Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra:	matematiky a didaktiky matematiky
Studijní program:	2. stupeň
Studijní obor (kombinace)	matematika – anglický jazyk

ŘETĚZOVÉ ZLOMKY
CONTINUED FRACTIONS

Diplomová práce: 09–FP–KMD–007

Autor:

Dalibor HANZAL

Podpis:

Adresa:

Západní 2743

407 47, Varnsdorf

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jiří Taufer, CSc.

Konzultant:

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
66	0	0	0	8	0

V Liberci dne: 22. 5. 2009

Prohlášení

Byl(a) jsem seznámen(a) s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval(a) samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

Datum: 22. 5. 2009

Podpis:

Poděkování

Děkuji vedoucímu práce doc. RNDr. Jiřímu Tauferovi, CSc. za podnětné rady a připomínky, které pomohly k dokončení této práce. Dále děkuji svým rodičům za podporu, obzvláště pak Mgr. Anně Hanzalové za jazykovou korekturu, a všem ostatním, kteří mě při psaní této práce podporovali.

ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

HANZAL Dalibor **DP – 2009** **Vedoucí DP:** doc. RNDr. Jiří Taufer, CSc.

Resumé

Diplomová práce poskytuje stručný přehled o řetězových zlomcích a zabývá se jejich aproximačními vlastnostmi. V první části je popsána teorie celého aparátu, tedy základní pojmy a vlastnosti řetězových zlomků. Druhá část se zabývá teorií zobrazení čísel pomocí řetězových zlomků a přesností těchto zobrazení. Ve třetí části práce jsou pak uvedeny rozvoje několika konkrétních čísel a funkcí v řetězce, na základě čehož jsou v závěru shrnuty hlavní výhody vyjádření čísel řetězovými zlomky.

Klíčová slova:
řetězový zlomek – konečný, nekonečný, pravidelný, periodický; sblížený zlomek; aproximace.

CONTINUED FRACTIONS

Summary

This Diploma Thesis presents a brief overview of continued fractions and deals with their approximation properties. In the first part, the theory of this issue is described, such as basic terms and the properties of continued fractions. The second part deals with the theory of expressing numbers as continued fractions and the accuracy of these expressions. In the third part, some concrete numbers and functions are expressed as continued fractions. And finally, the conclusion sums up the main advantages of expressing numbers as continued fractions.

Key words:
continued fraction – finite, infinite, simple, periodic; convergent; approximation.

KETTENBRÜCHE

Zusammenfassung

Die Diplomarbeit gewährt einen kurzen Einblick in das Thema Kettenbrüche und befasst sich mit ihren Approximationseigenschaften. Im ersten Teil ist die Theorie des ganzen Gebietes beschrieben, d.h. die Grundbegriffe und Eigenschaften der Kettenbrüche. Der zweite Teil behandelt den theoretischen Aspekt der Darstellung von Zahlen mittels Kettenbrüche und die Genauigkeit dieser Darstellungen. Im dritten Teil der Arbeit sind Kettenbruchentwicklungen einiger konkreter Zahlen und Funktionen präsentiert. Diese liegen auch der Zusammenfassung der Hauptvorteile der Darstellung von Zahlen durch Kettenbrüche in der Schlussfolgerung zugrunde.

Schlüsselwörter:
Kettenbruch – endlich, unendlich, regulär, periodisch; Konvergent; Approximation.

Obsah

1. Úvod

Problematika řetězových zlomků byla známa dříve, než by se mohlo zdát. Jak se můžeme dočíst v různých zdrojích (Collins [1], Danilov [2]), algoritmy podobné řetězovým zlomkům používali již matematici ve starém Řecku (Euklidův algoritmus, archimédovské aproximace pro $\sqrt{3}$) či Indii (matematik Aryabhata používal řetězový zlomek k řešení lineární rovnice). Ve středověku se řetězcům značně přiblížil Omar al-Chajjám (přibližně 1040n.l. – 1123n.l.), který pracoval s Euklidovým algoritmem. Avšak první písemnou zmínku o použití řetězového zlomku v dnešní podobě najdeme v knize „Algebra“ italského matematika Raffaela Bombelliho z 16. století, kde jsou pomocí řetězových zlomků vyjádřeny $\sqrt{13}$ a $\sqrt{18}$. Řetězovými zlomky se poté zabývala řada významných matematiků 17. století, například William Brouncker a John Wallis, kteří vymysleli rozvoj pro $4/\pi$, či Christian Huygens, jenž zkoumal použití sblížených zlomků k nalezení nejlepších aproximací. Nicméně systematický rozvoj teorie řetězových zlomků se datuje až od roku 1737 díky knize Leonharda Eulera De Fractionlous Continious a práci Johana Lamberta a Josepha Louise Lagrange. V následujících stoletích se o řetězové zlomky zajímali mnozí významní matematici, jako například Oskar Perron, Karl Friedrich Gauss či Augustin Cauchy.

Řetězové zlomky jsou i dnes předmětem zájmu matematiků, a to zejména pro jejich teoretické i praktické užití při přibližných výpočtech, avšak není jim věnováno tolik prostoru, kolik by si takovýto praktický a efektivní algoritmus zasloužil. Tyto nedostatky shledáváme především v oblasti vzdělávání. Proto si tato práce klade za cíl zpracovat souvislý text zabývající se řetězovými zlomky a na základě některých konkrétních aproximací pomocí řetězových zlomků poukázat na jejich aproximační vlastnosti.

2. Vlastnosti aparátu

2.1 Základní pojmy

Nechť jsou dány posloupnosti $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, $\{b_i\}_{i=1}^{n}$. **Řetězovým zlomkem** (neboli **řetězcem**) nazýváme výraz ve tvaru

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}} .$$

Jelikož je však takovýto zápis dosti nepraktický, můžeme v literatuře (Danilov [2], Schwarz [6], Weisstein [8]) najít i jiné tvary vyjádření řetězců zavedené různými autory, například:

$$a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \ldots + \frac{b_n|}{|a_n} \qquad \text{(Pringsheim)},$$

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} \dot{+} \frac{b_2}{a_2} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{b_n}{a_n} \qquad \text{(Muller)},$$

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\ \frac{b_2}{a_2 + \ldots}\ \frac{b_n}{+a_n} \qquad \text{(Rogers)}.$$

Zlomek $\frac{b_n}{a_n}$ nazýváme n-tým článkem řetězce,

b_n a a_n prvky n-tého článku řetězce,

b_1, b_2, b_3, ... jsou jeho dílčí čitatelé,

a_1, a_2, a_3, ... dílčí jmenovatelé,

a_0 se nazývá nulový prvek řetězce.

Písmena a_0, a_1, $a_2,\ldots,$ a_n a b_0, b_1, $b_2,\ldots,$ b_n zde značí nezávisle proměnné. Předpokládáme, že a_0, a_1, $a_2,\ldots,$ a_n a b_0, b_1, $b_2,\ldots,$ b_n jsou komplexní čísla. Z tohoto důvodu je také nutno určit, za jakých podmínek má daný výraz smysl.

Jelikož v řetězovém zlomku dochází k dělení, bude mít daný výraz smysl pouze tehdy, nebudeme-li dělit nulou. To znamená, že musíme určit n podmínek:

$$a_n \neq 0,$$

$$a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n} \neq 0,$$

$$a_{n-2} + \frac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}} \neq 0, \text{ atd.}$$

Pro lepší názornost můžeme řetězový zlomek přepsat do jiné podoby:

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}} =$$

$$= a_0 + b_1\left(a_1 + b_2\left(a_2 + b_3\left(\ldots\left(a_{n-1} + b_n\left(a_n\right)^{-1}\right)^{-1}\ldots\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$$

Na takto zapsaném řetězovém zlomku můžeme vidět, že žádný výraz v závorce se nesmí rovnat nule a těchto výrazů je právě n.

<u>Definice 1.</u>

Nechť jsou dány posloupnosti $\left\{a_i\right\}_{i=1}^n$, $\left\{b_i\right\}_{i=1}^n$. *Řetězec zapsaný ve tvaru*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

nazveme ***konečným řetězovým zlomkem****, jinak také* n*-členným řetězcem, nebo řetězcem s* n *členy.*

Definice 2.

Nechť jsou dány nekonečné posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$. *Existuje-li*

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}} \right),$$

zavádíme ***nekonečný řetězový zlomek*** *ve tvaru*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n + \ddots}}}},$$

který nabývá hodnoty této limity.

Zatím jsme zde uvedli pouze takzvaný **zobecněný** (nebo také **zevšeobecněný**) **řetězový zlomek**. Ale v teorii čísel se obyčejně vyšetřují řetězce ve tvaru

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} ,$$

kde a_1, a_2, a_3, ..., a_n jsou přirozená čísla, a_0 je libovolné celé číslo a $b_i = 1$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$, které se nazývají **pravidelné**. Proto i my budeme, půjde-li o aplikace v teorii čísel, pracovat s řetězci pravidelnými.

Analogicky jako u řetězců zobecněných nazveme

zlomek $\frac{1}{a_n}$ n-tým článkem řetězce,

a_0, a_1, a_2, …, a_n prvky daného řetězce,

a_n n-tým prvkem řetězce,

a_0 nulovým prvkem řetězce.

V další části diplomové práce budeme konečné pravidelné řetězce psát převážně ve tvaru

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$$

a nekonečné pravidelné řetězce ve tvaru

$$[a_0; a_1, a_2, ...]. \quad (1)$$

Řetězec

$$s_k = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k],$$

kde $0 \le k \le n$, nazveme **úsekem řetězce**. Analogicky pak při libovolném $k \ge 0$ nazveme s_k **úsekem nekonečného řetězce**. Libovolný úsek libovolného (konečného nebo nekonečného) řetězce je tedy konečný řetězec.

Řetězec

$$r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_n]$$

nazveme **zbytkem konečného řetězce**. Podobně pak nazveme řetězec

$$r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, ...]$$

zbytkem nekonečného řetězce. Všechny zbytky konečného řetězce jsou tedy opět konečné řetězce, zatímco zbytky nekonečného řetězce jsou rovněž nekonečné řetězce.

Pro konečné řetězce platí vztah

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}, r_k] \; (0 \le k \le n), \tag{2}$$

jak plyne přímo z definice. Analogický vztah

$$[a_0; a_1, a_2, ...] = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}, r_k] \; (k \ge 0)$$

platí pro nekonečné řetězce.

2.2 Sblížené zlomky

Každý konečný řetězec

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$$

je vlastně výsledek konečného počtu racionálních úkonů nad jeho prvky, a je tedy racionální funkcí těchto prvků. Proto se dá vyjádřit jako podíl dvou mnohočlenů

$$\frac{P(a_0; a_1, a_2, ..., a_n)}{Q(a_0; a_1, a_2, ..., a_n)},$$

kde $a_0; a_1, a_2, ..., a_n$ jsou celé koeficienty. U tohoto vyjádření je ovšem potřeba poukázat na odlišné podmínky. Oproti původnímu tvaru

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}},$$

kde máme n podmínek (nesmíme dělit nulou, tedy:

$$a_n \neq 0,$$

$$a_{n-1}+\frac{1}{a_n} \neq 0,$$

$$a_{n-2}+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}} \neq 0\text{, atd.}),$$

vystačíme u vyjádření

$$\frac{P(a_0;a_1,a_2,...,a_n)}{Q(a_0;a_1,a_2,...,a_n)}$$

pouze s podmínkou jednou, a to jmenovatel se nesmí rovnat nule.

Mají-li prvky číselné hodnoty, je řetězec vyjádřen ve tvaru obyčejného zlomku $\frac{p}{q}$, ale toto vyjádření samozřejmě není jediné. Pro další je důležité, abychom měli nějak definované vyjádření konečného řetězce ve tvaru obyčejného zlomku. Toto vyjádření nazveme **kanonické** a definujeme ho pomocí indukce.

Pro řetězec $[a_0]=a_0$ s počtem členů 0 zvolíme jako kanonické vyjádření zlomek $\frac{a_0}{1}$.

Nechť je nyní dáno kanonické vyjádření pro řetězec s počtem členů menším než n.

V n-členném řetězci $[a_0;a_1,a_2,...,a_n]$ můžeme dle vzorce

$$[a_0;a_1,a_2,...,a_n]=[a_0;a_1,a_2,...,a_{k-1},r_k]\ (0 \leq k \leq n)$$

položit

$$\left[a_0; a_1, a_2, ..., a_n\right] = \left[a_0; r_1\right] = a_0 + \frac{1}{r_1}.$$

Zde

$$r_1 = \left[a_1; a_2, ..., a_n\right]$$

je $n-1$-členný řetězec, pro který je tedy kanonické vyjádření již určeno.
Nechť má tvar

$$r_1 = \frac{p'}{q'}.$$

Pak

$$\left[a_0; a_1, a_2, ..., a_n\right] = a_0 + \frac{q'}{p'} = \frac{a_0 p' + q'}{p'}.$$

Tento zlomek zvolíme za **kanonické vyjádření řetězce** $\left[a_0; a_1, a_2, ..., a_n\right]$.
Položíme-li

$$\left[a_0; a_1, a_2, ..., a_n\right] = \frac{p}{q},$$

$$r_1 = \left[a_1; a_2, ..., a_n\right] = \frac{p'}{q'},$$

dostaneme pro **čitatele a jmenovatele kanonického vyjádření** vztahy

$$p = a_0 p' + q',$$

$$q = p'. \qquad (3)$$

Zároveň vidíme, že byla takto jednoznačně určena kanonická vyjádření pro konečné řetězce s libovolným počtem členů.

<u>Definice 3.</u>

Kanonické vyjádření úseku

$$s_k = \left[a_0; a_1, a_2, ..., a_k\right]$$

řetězce $\left[a_0; a_1, a_2, ...\right]$ *označíme*

$$\frac{p_k}{q_k}$$

*a nazveme ho **sblíženým zlomkem řádu** k daného řetězce.*

$$s_k = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k] = \frac{p_k}{q_k}$$

Tento zlomek je zcela jednoznačně definován pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$. Konečné řetězce mají konečný počet sblížených zlomků, zatímco nekonečné jich mají nekonečně mnoho.

Pro n-členný řetězec je tedy

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

Takový řetězec má tedy celkem $n+1$ sblížených zlomků, a to řádů 0, 1, 2, ..., n.

Vlastnosti sblížených zlomků

Uveďme si nyní několik vět, které popisují vlastnosti sblížených zlomků, zformulovaných podle Chinčina [3].

Věta 1. (Zákon znázornění sblížených zlomků.)

Pro libovolné $k \geq 2$

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2},$$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \tag{4}$$

Důkaz.

V případě $k = 2$ se tyto vzorce ověří bezprostředně. Předpokládejme jejich platnost pro všechna $k < n$; všimněme si řetězce

$$[a_1; a_2, ..., a_n]$$

a označme $\frac{p_r^{'}}{q_r^{'}}$ jeho sblížené zlomky řádu r. Podle vzorce (3) pro čitatele a jmenovatele kanonického vyjádření

$$p_n = a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1},$$

$$q_n = p'_{n-1},$$

a jelikož dle našeho předpokladu

$$p'_{n-1} = a_n p'_{n-2} + p'_{n-3},$$

$$q'_{n-1} = a_n q'_{n-2} + q'_{n-3}$$

(zde je a_n a ne a_{n-1}, protože řetězec $\left[a_1; a_2, ..., a_n\right]$ začíná a_1 a nikoliv a_0), je dle vzorce (3)

$$p_n = a_0\left(a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}\right) + \left(a_n q'_{n-2} + q'_{n-3}\right) =$$

$$a_n\left(a_0 p'_{n-2} + q'_{n-2}\right) + \left(a_0 p'_{n-3} + q'_{n-3}\right) =$$

$$= a_n p_{n-1} + p_{n-2},$$

$$q_n = a_n p'_{n-2} + p'_{n-3} = a_n q_{n-1} + q_{n-2},$$

což jsme chtěli dokázat.

Tyto rekurentní vzorce (4), které nám vyjadřují čitatele a jmenovatele sblíženého zlomku řádu n pomocí prvku a_n a pomocí čitatelů a jmenovatelů dvou předcházejících sblížených zlomků, jsou základem celé teorie řetězců. Pro zevšeobecněné řetězové zlomky mají vzorce (4) tvar

$$p_{k+1} = a_{k+1} p_k + b_{k+1} p_{k-1},$$

$$q_{k+1} = a_{k+1} q_k + b_{k+1} q_{k-1}.$$

Přičemž

$$p_{-1} = 1,\ q_{-1} = 0,$$

$$p_0 = a_0,\ q_0 = 1.$$

<u>Věta 2.</u>

Pro všechna $k \geq 0$

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k .$$

Důkaz.

Násobíme-li vzorce

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} ,$$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} ,$$

resp. q_{k-1} a p_{k-1}, a odečteme pak první od druhého, najdeme

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) ,$$

a jelikož

$$q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1} = 1 ,$$

je věta dokázána.

Důsledek.

Pro všechna $k \geq 1$

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}} . \tag{5}$$

Za předpokladu, že všechny prvky počínaje a_1 jsou kladné, lze z této rovnice vyčíst, že každý zlomek lichého řádu je větší než zlomek sudého řádu bezprostředně následující.

<u>Věta 3.</u>

Pro všechna $k \geq 1$

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k .$$

Důkaz.

Násobíme-li vzorce

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2},$$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2},$$

resp. q_{k-2} a p_{k-2}, a odečteme pak první od druhého, dostaneme pomocí věty 2:

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = a_k \left(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2} \right) = \left(-1\right)^{k-1} a_k ,$$

jak jsme chtěli dokázat.

Důsledek.

Pro všechna $k \geq 2$

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{\left(-1\right)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}.$$

Za předpokladu, že všechny prvky počínaje a_1 jsou kladné, nám tato rovnice ukazuje, že sblížené zlomky sudých řádů tvoří rostoucí posloupnost, zatímco sblížené zlomky lichých řádů tvoří posloupnost klesající.

Z těchto několika posledních výsledků můžeme odvodit další větu.

<u>Věta 4.</u>

Sblížené zlomky sudého řádu tvoří rostoucí posloupnost, kdežto sblížené zlomky lichého řádu tvoří posloupnost klesající. Přitom libovolný sblížený zlomek lichého řádu je větší než libovolný sblížený zlomek sudého řádu.

Konkrétně pro konečný řetězec $\alpha = \left[a_0; a_1, a_2, ..., a_n\right]$ je tedy každý sblížený zlomek sudého řádu menší než α, zatímco každý sblížený zlomek lichého řádu je větší než α (s výjimkou posledního sblíženého zlomku rovného α).

<u>Věta 5.</u>

Pro všechna $k \left(1 \leq k \leq n\right)$

$$\left[a_0; a_1, a_2, ..., a_n\right] = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}}; \qquad (6)$$

(zde p_i, q_i, r_i se vztahuje na řetězec na levé straně rovnice).

Důkaz.

Dle již zmíněného vzorce (2) pro konečné řetězce platí

$$\left[a_0; a_1, a_2, ..., a_n\right] = \left[a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}, r_k\right].$$

Řetězec na pravé straně této rovnice má patrně jako sblížené zlomky řadu $k-2$ a $k-1$ resp. zlomek $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Pro jeho sblížený zlomek $\frac{p_k'}{q_k'}$ řádu k, je dle vzorce (4) z věty 1

$$p_k' = p_{k-1}r_k + p_{k-2},\ q_k' = q_{k-1}r_k + q_{k-2}.$$

Jelikož

$$\frac{p_k'}{q_k'} = \left[a_0, a_1, ..., a_{k-1}, r_k\right] = \left[a_0, a_1, ..., a_n\right],$$

je věta dokázána.

<u>**Věta 6.**</u>

Pro každé $k \geq 1$

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \left[a_k; a_{k-1}, ..., a_1\right].$$

Důkaz.

Pro $k = 1$ je tento vztah patrný, protože nabývá tvaru

$$\frac{q_1}{q_0} = a_1.$$

Nechť $k > 1$ a nechť je již dokázáno, že

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} = \left[a_{k-1}; a_{k-2}, ..., a_1\right]. \qquad (7)$$

Na základě vztahu (4) z věty 1 máme

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \left[a_k ; \frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} \right]$$

a odtud na základě vzorců (2) a (7) dostaneme

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k ; a_{k-1}, ..., a_1],$$

jak jsme chtěli dokázat.

2.3 Nekonečné řetězce

Ve spojení s nekonečnými řetězci je nutno zmínit několik vět týkajících se jejich konvergence (Chinčin [3]). Každému nekonečnému řetězci (1) totiž odpovídá nekonečná posloupnost sblížených zlomků

$$\frac{p_0}{q_0},\ \frac{p_1}{q_1},\ \dots,\ \frac{p_k}{q_k},\ \dots,$$

kde každý sblížený zlomek je reálné číslo. Má-li tato posloupnost limitu α, označíme toto číslo stejným znakem α jako řetězec a budeme psát

$$\alpha = [a_0 ; a_1, a_2, \dots].$$

Řetězec (1) v tomto případě nazveme **konvergentní.** Pokud zmíněná posloupnost limitu nemá, řekneme, že řetězec (1) **diverguje**.

Věta 7.

Konverguje-li nekonečný řetězec (1)*, konverguje i každý jeho zbytek; naopak, konverguje-li jeden ze zbytků řetězce* (1)*, konverguje také řetězec* (1).

Důkaz.

Označme $\frac{p_k}{q_k}$ sblížené zlomky daného řetězce a $\frac{p_k'}{q_k'}$ sblížené zlomky libovolného jeho zbytku, například r_n.

Na základě vzorce (6) dostaneme

$$\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n+k}] = \frac{p_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k} + p_{n-2}}{q_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k} + q_{n-2}} (k = 0, 1, ...). \qquad (8)$$

Odtud bezprostředně plyne, že pokud konverguje zbytek r_n, má při tom zlomek $\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}$ limitu, a to α, která je rovna

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}.$$

Jestliže ale řešíme vztah (8) vzhledem k $\frac{p'_k}{q'_k}$, přesvědčíme se stejným postupem o správnosti opačného závěru, čímž dokončíme důkaz věty 7.

<u>Věta 8.</u>

Hodnota konvergentního nekonečného řetězce je větší než libovolný sblížený zlomek sudého řádu a menší než libovolný sblížený zlomek lichého řádu.

<u>Věta 9.</u>

Hodnota α *konvergentního nekonečného řetězce* (1) *vyhovuje při libovolném* $k \geq 0$ *nerovnosti:*

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_k + 1}.$$

Věta 9 platí i pro konečný řetězec

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$$

pro všechna $k < n$, přičemž v případě $k = n - 1$ se nerovnost změní v rovnost, jelikož $\alpha = \frac{p_n}{q_n}$.

<u>Věta 10.</u>

Ke konvergenci řetězce (1) *je nutné a stačí, aby řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{9}$$

byla divergentní.

Důkaz.

Podle věty 4 je patrné, že ke konvergenci řetězce je nutné a postačí, aby ty dvě posloupnosti, o nichž se mluví v oné větě, měly tutéž limitu (existence limity pro každou posloupnost zvláště plyne z věty 4 ve všech případech). A to, jak můžeme zjistit podle vzorce (5), platí právě tehdy, když

$$q_k q_k + 1 \to \infty \qquad (k \to \infty). \tag{10}$$

Tato podmínka je tudíž nutná a postačující ke konvergenci daného řetězce.

Nechť řada (9) konverguje. Podle druhého vzorce (4)

$$q_k > q_{k-2} \qquad (k \geq 1).$$

Pro libovolné k máme tudíž buď $q_k > q_{k-1}$, nebo $q_{k-1} > q_{k-2}$. V prvním případě nám druhý ze vzorců (4) dává

$$q_k < a_k q_k + q_{k-2},$$

a odtud při dostatečně velkých k (když $a_k < 1$, což na základě konvergence řady (9) nutně platí pro $k \geq k_0$),

$$q_k < \frac{q_{k-2}}{1-a_k};$$

v druhém případě nám stejný vzorec dává pro $a_k < 1$

$$q_k < (1+a_k) q_{k-1} < \frac{q_{k-1}}{1-a_k};$$

pro všechna $k \geq k_0$ tudíž platí

$$q_k < \frac{1}{1-a_k} q_l,$$

kde $l < k$. Je-li $l \geq k_0$, lze na q_l užít téže nerovnosti. Pokračujeme-li v těchto úvahách, dojdeme k nerovnosti

$$q_k < \frac{q_s}{(1-a_k)(1-a_l)\ldots(1-a_r)}, \tag{11}$$

kde $k > l > \ldots > r \geq k_0$ a $s < k_0$. Avšak na základě předpokládané konvergence řady (9) nekonečný součin

$$\prod_{n=k_0}^{\infty}(1-a_n)$$

je patrně konvergentní, tzn. má kladnou hodnotu, kterou označíme λ. Patrně

$$(1-a_k)(1-a_l)\ldots(1-a_r) \geq \prod_{n=k_0}^{\infty}(1-a_n) = \lambda;$$

označíme-li tedy Q největší z čísel $q_0, q_1, \ldots, q_{k_0-1}$, můžeme na základě nerovnosti (11) soudit, že

$$q_k < \frac{Q}{\lambda} \qquad (k \geq k_0),$$

tudíž

$$q_{k+1}q_k < \frac{Q^2}{\lambda^2} \qquad (k \geq k_0).$$

Vztah (10) tedy neplatí, takže je daný řetězec divergentní.

Nechť nyní řada (9) diverguje. Jelikož $q_k > q_{k-2}$ pro všechna $k \geq 2$, tak, označíme-li c menší z čísel q_0, q_1, budeme mít $q_k \geq c$ pro libovolné $k \geq 0$. Druhý ze vzorců (4) nám tedy dává

$$q_k \geq q_{k-2} + ca_k \qquad (k \geq 2).$$

Postupné užití této nerovnosti nám dává

$$q_{2k} \geq q_0 + c\sum_{n=1}^{k} a_{2n}$$

a

$$q_{2k+1} \geq q_1 + c\sum_{n=1}^{k} a_{2n+1},$$

odkud

$$q_{2k}+q_{2k+1}>q_0+q_1+c\sum_{n=1}^{2k+1}a_n\ .$$

Jinak řečeno, pro všechna k

$$q_k+q_{k-1}>c\sum_{n=1}^{k}a_n\ .$$

Výše jsme dokázali tuto nerovnost pro lichá k, je ale patrné, že stejným způsobem ji lze dokázat i pro k sudá.

Odtud však plyne, že v součinu $q_k q_{k-1}$ alespoň jeden z činitelů převyšuje $\frac{1}{2}c\sum_{n=1}^{k}a_n$. Protože druhý činitel v žádném případě není menší než c, dostaneme

$$q_k q_{k-1}>\frac{1}{2}c^2\sum_{n=1}^{k}a_n\ .$$

Na základě předpokládané divergence řady (9) plyne odtud vztah (10), a tudíž konvergence daného řetězce. Tím je věta 10 dokázána úplně.

2.4 Řetězce s přirozenými prvky

Mluvíme-li o řetězcích s přirozenými prvky, máme na mysli řetězce pravidelné. Za našich předpokladů o těchto řetězcích a na základě věty 10 můžeme prohlásit, že pokud je takovýto řetězec nekonečný, je vždy konvergentní, a můžeme tedy mluvit o jeho hodnotě. Pokud je konečný a jeho poslední prvek je $a_n=1$, je $r_{n-1}=a_{n-1}+1$ celé číslo a my můžeme daný n-členný řetězec $\left[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},1\right]$ napsat ve tvaru $n-1$-členného řetězce $\left[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}+1\right]$, kde je poslední prvek očividně větší než jedna. Čitatelé a jmenovatelé sblížených zlomků jsou u pravidelných řetězců celá čísla.

<u>**Věta 11.**</u>

Sblížené zlomky jsou ireducibilní.

Jinými slovy čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná čísla.

Důkaz.

Důkaz nám vyplývá ze vzorce

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k,$$

protože každý společný dělitel čísel p_k a q_k je současně dělitelem výrazu $q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1}$.

Vzorec

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

nám pak ukazuje, že pro každé $k \geq 2$ platí $q_k > q_{k-1}$. Posloupnost $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$ je tedy stále rostoucí. O řádu růstu těchto čísel nás informuje následující věta.

Věta 12.

Pro každé $k \geq 2$ platí

$$q_k \geq 2^{\frac{1}{2}(k-1)}.$$

Důkaz.

Pro $k \geq 2$ platí

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \geq q_{k-1} + q_{k-2} \geq 2q_{k-2}.$$

Při postupném užití této nerovnosti dostaneme

$$q_{2k} \geq 2^k q_0 = 2^k, \; q_{2k+1} \geq 2^k q_1 \geq 2^k,$$

což nám dokazuje větu 12.

Vsunuté zlomky

Nechť je $k \geq 2$ a i libovolné celé kladné číslo. Potom má rozdíl

$$\frac{p_{k-1}(i+1)+p_{k-2}}{q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}}-\frac{p_{k-1}i+p_{k-2}}{q_{k-1}i+q_{k-2}},$$

jenž je roven výrazu

$$\frac{(-1)^k}{\left[q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}\right]\left[q_{k-1}i+q_{k-2}\right]},$$

pro všechna $i \geq 0$ stejné znaménko, které je závislé pouze na paritě čísla k. Z toho vyplývá, že zlomky

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \frac{p_{k-2}+p_{k-1}}{q_{k-2}+q_{k-1}}, \frac{p_{k-2}+2p_{k-1}}{q_{k-2}+2q_{k-1}}, \ldots, \frac{p_{k-2}+a_k p_{k-1}}{q_{k-2}+a_k q_{k-1}}=\frac{p_k}{q_k} \tag{12}$$

vzrůstají, je-li k sudé, a klesají, je-li k liché. Krajní z těchto zlomků jsou sblížené zlomky stejné parity a členy ležící mezi nimi, pokud existují, nazveme **zlomky vsunuté**.

Medianta zlomků

Definice 4.

Nechť jsou dány dva různé zlomky $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ *s kladnými jmenovateli. Mediantou dvou zlomků* $\frac{a}{b}$ *a* $\frac{c}{d}$ *se nazývá zlomek*

$$\frac{a+c}{b+d}.$$

Medianta dvou zlomků leží velikostí vždy mezi nimi.

Toto poslední tvrzení si můžeme dokázat následovně.

Nechť je $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$. Potom je také $bc-ad \geq 0$, a tedy

$$\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{b(b+d)} \geq 0, \quad \frac{a+c}{b+d}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{d(b+d)} \leq 0.$$

Mediantu dvou zlomků potřebujeme především kvůli rozložení sblížených a vsunutých zlomků a jejich tvorbě. Tvoříme-li medianty postupně od sblíženého zlomku $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ k sblíženému zlomku $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$, můžeme vidět, že každý ze vsunutých zlomků z posloupnosti (12) je mediantou zlomku předcházejícího a zlomku $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Takto můžeme postupovat až do té doby, kdy nově utvořená medianta splyne se sblíženým zlomkem $\frac{p_k}{q_k}$. O této mediantě víme, že leží mezi zlomky $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$. Dále víme, že hodnota α daného řetězce leží mezi zlomky $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a $\frac{p_k}{q_k}$, a o zlomcích $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\frac{p_k}{q_k}$ můžeme na základě jejich parity prohlásit, že leží na téže straně čísla α. Z těchto úvah vyplývá, že celá posloupnost (12) leží na jedné straně čísla α, zatímco zlomek $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ na straně druhé. Vezmeme-li tedy v úvahu, že zejména zlomky $\frac{p_{k-2}+p_{k-1}}{q_{k-2}+q_{k-1}}$ a $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ leží vždy na opačných stranách čísla α, můžeme prohlásit, že hodnota řetězce leží vždy mezi libovolným sblíženým zlomkem a mediantou utvořenou z něj a zlomku předcházejícího.

Díky těmto zákonitostem můžeme tvořit další sblížené zlomky, pokud známe dva předcházející. Jestliže neznáme prvek a_k, využijeme znalosti velikosti řetězce α a pomocí sblížených zlomků $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$, $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ vytvoříme další sblížený zlomek $\frac{p_k}{q_k}$. Nejdříve vytvoříme mediantu těchto daných zlomků, poté sestrojíme mediantu právě vzniklé medianty s $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$, dále najdeme mediantu nově vzniklé medianty se zlomkem $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a takto budeme pokračovat do té doby, než utvoříme poslední mediantu na stejné straně α jako výchozí zlomek $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$, která bude ležet mezi všemi těmito mediantami a bude rovna $\frac{p_k}{q_k}$. Následující medianta pak bude $\frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}$ a bude ležet na druhé straně čísla α.

Na tyto úvahy navazuje následující věta.

<u>Věta 13.</u>

Pro všechna $k \geq 0$

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k\left(q_{k+1} + q_k\right)}.$$

Důkaz.

Na základě vzájemného rozložení čísla α a jeho sblížených a vsunutých zlomků víme, že vsunutý zlomek

$$\frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}},$$

který leží mezi $\frac{p_k}{q_k}$ a α, leží blíže ke zlomku $\frac{p_k}{q_k}$ než k číslu α. Tudíž

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \left|\frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k\left(q_k + q_{k+1}\right)}.$$

To nám dokazuje větu 13.

Tato věta nám doplňuje větu 9, a tak dostáváme vedle horní meze pro rozdíl $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|$ také mez dolní.

3. Zobrazení čísel řetězci

3.1 Vyjádření reálných čísel řetězci

Řetězové zlomky můžeme použít k vyjádření jakéhokoliv reálného čísla, což si nyní dokážeme. Předpokládejme, že se opět jedná o řetězce pravidelné, kde je poslední prvek každého konečného řetězce různý od jedné (jak jsme si již ukázali v kapitole 1.4).

<u>Věta 14.</u>

Každému reálnému číslu α odpovídá jediný řetězec, který má za hodnotu toto číslo. Tento řetězec je konečný, je-li α číslo racionální, a nekonečný, je-li α číslo iracionální.

Důkaz.

Nejdříve dokážeme, že každé reálné číslo může být vyjádřeno řetězcem, potom ukážeme rozdílné vyjádření u racionálních a iracionálních čísel a nakonec dokážeme jednoznačnost tohoto vyjádření řetězcem.

Označme a_0 největší celé číslo, které nepřevyšuje α. Není-li α celé číslo, pak vztah

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1}$$

dovoluje určit číslo r_1. Přitom platí $r_1 > 1$, jelikož

$$\frac{1}{r_1} = \alpha - a_0 < 1.$$

Obecně, není-li r_n celé číslo, označíme a_n největší celé číslo nepřevyšující r_n a určíme číslo r_{n+1} vztahem:

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}}.$$

Tento postup může být opakován, dokud nenastane případ, že r_n je celé číslo; přitom patrně $r_n > 1$ ($n \geq 1$).

Vztah $\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1}$ ukazuje, že

$$\alpha = [a_0; r_0].$$

Nechť dále

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, r_n];$$

(tento vzorec platí pro všechna n za předpokladu, že $r_1, r_2, ..., r_{n-1}$ nejsou celá čísla).

Pak podle vztahu

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}}$$

a vzorce

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}, r_k] \; (0 \leq k \leq n)$$

můžeme zapsat číslo α jako

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, r_{n+1}].$$

Je-li číslo α racionální, jsou racionální i všechna r_n. V tomto případě náš postup skončí po konečném počtu kroků. Je-li např.

$$r_n = \frac{a}{b},$$

pak

$$r_n - a_n = \frac{a - ba_n}{b} = \frac{c}{b},$$

kde $c < b$, protože $r_n - a_n < 1$. Podle vztahu $r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}}$ potom máme

$$r_{n+1} = \frac{b}{c}$$

(není-li ovšem $c = 0$, jinak by r_n bylo celé číslo a naše tvrzení by bylo dokázáno). Z těchto vztahů vidíme, že r_{n+1} má menšího jmenovatele než r_n. Z toho také plyne, že po konečném počtu kroků přijdeme u posloupnosti $r_1, r_2, ...$ k celému číslu $r_n = a_n$. Vzorec

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, r_n]$$

pak ukazuje, že číslo α je znázorněno konečným řetězcem, jehož poslední prvek $a_n = r_n > 1$.

Je-li číslo α iracionální, jsou iracionální i všechna r_n. V tomto případě je náš postup nekonečný. Položíme-li

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n},$$

kde je zlomek $\frac{p_n}{q_n}$ ireducibilní a $q_n > 0$, dostaneme na základě vzorců

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, r_n]$$

a

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}$$

vztah

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}} \quad (n \geq 2).$$

Na druhé straně je

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_{n-1}a_n + q_{n-2}}.$$

Odtud

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})(r_n - a_n)}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})},$$

a tedy

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Platí tedy

$$\frac{p_n}{q_n} \to \alpha \text{ pro } n \to \infty,$$

což značí, že nekonečný řetězec $[a_0; a_1, a_2, ...]$ má za hodnotu dané číslo α.

Zde jsme dokázali, že jakékoliv reálné číslo α může být vždy vyjádřeno nějakým řetězcem, přičemž tento řetězec může být konečný, a to pokud je číslo α racionální, či nekonečný, je-li číslo α iracionální. Nyní dokážeme jednoznačnost tohoto vyjádření.

Nechť

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, ...] = [a_0'; a_1', a_2', ...],$$

kde řetězce $[a_0; a_1, a_2, ...]$ a $[a_0'; a_1', a_2', ...]$ jsou různá vyjádření čísla α (tyto řetězce mohou být konečné i nekonečné). Označme $[x]$ největší celé číslo nepřevyšující x. Potom dostáváme vztahy $a_0 = [\alpha]$ a $a_0' = [\alpha]$, z čehož plyne $a_0 = a_0'$. Dále jsme již stanovili, že

$$a_i = a_i' \quad (i = 0, 1, 2, ..., n),$$

a tak analogicky dostáváme

$$\left.\begin{array}{l} p_i = p_i' \\ q_i = q_i' \end{array}\right\} \qquad (i = 0, 1, 2, ..., n)$$

a dle vzorce

$$\alpha = \frac{p_{n-1} r_n + p_{n-2}}{q_{n-1} r_n + q_{n-2}}$$

také vztahy

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} = \frac{p_n' r_{n+1}' + p_{n-1}'}{q_n' r_{n+1}' + q_{n-1}'} = \frac{p_n r_{n+1}' + p_{n-1}}{q_n r_{n+1}' + q_{n-1}}.$$

Odtud $r_{n+1} = r_{n+1}'$ a na základě rovností $a_{n+1} = [r_{n+1}]$ a $a_{n+1}' = [r_{n+1}']$ také $a_{n+1} = a_{n+1}'$. To znamená, že dané řetězce jsou totožné, což jsme chtěli dokázat (nepřipouštíme ovšem konečné řetězce s posledním prvkem 1; kdyby byl např. $a_{n+1} = 1$ posledním prvkem takového řetězce, pak by $r_n = a_n + 1$ a $a_n \neq [r_n]$).

Výhody a nedostatky vyjádření reálných čísel řetězci

Hlavní význam tohoto zobrazení spočívá v tom, že známe-li řetězec zobrazující reálné číslo, můžeme toto číslo určit s libovolnou předem danou přesností. Další výhody a nedostatky závisí na našich požadavcích na vyjadřování čísel.

Pokud chceme vyjádřit nějaké reálné číslo, přirozeně požadujeme, aby aparát, který k tomuto účelu používáme, vyjadřoval (pokud možno úplně) vlastnosti tohoto čísla tak, aby mohly být zcela a jednoduše ukázány. Z tohoto důvodu je vyjádření pomocí řetězců zajisté výhodnější než vyjádření např. pomocí systematických zlomků (tzn. zlomků vyjádřených v nějaké číselné soustavě). Systematické zlomky jsou totiž spojeny s určitou číselnou soustavou, a odráží v sobě tedy nejen absolutní vlastnosti čísla, které zobrazují, ale i vzájemný vztah k oné číselné soustavě. Oproti tomu řetězce ve spojení s žádnou číselnou soustavou nejsou, a dokonale tedy reprodukují vlastnosti zobrazovaných čísel. Například racionálnost a iracionálnost vyjádřeného čísla je u řetězců úplně určena jejich konečností či nekonečností, zatímco u systematických zlomků jejich konečnost nebo nekonečnost závisí nejen na povaze vyjádřeného čísla, ale i na vztahu tohoto čísla k příslušné číselné soustavě.

Další přirozený požadavek je takový, aby nám nové vyjádření dovolilo pokud možno jednoduše určit přibližnou hodnotu daného čísla s předem daným stupněm přesnosti. Tomu vyhovují řetězce oproti systematickým zlomkům dostatečně, jelikož jimi poskytované hodnoty mají (jak si ukážeme v následující kapitole) pro tento účel velmi vhodné vlastnosti.

Ovšem je nutné zmínit také nevýhodu vyjádření reálných čísel řetězovými zlomky. Jelikož s reálnými čísly potřebujeme počítat, požadujeme od jejich vyjádření, abychom mohli snadno nalézt zobrazení jednodušších funkcí těchto čísel (především jejich součtu a součinu). Tedy aby bylo vyjádření vhodné z praktického hlediska, musí připouštět, jak uvádí Chinčin [3], dostatečně jednoduchá pravidla aritmetických úkonů, bez čehož nemůže sloužit jako nástroj počtu. Narozdíl od systematických zlomků pro řetězce prakticky přijatelná pravidla pro aritmetické úkony neexistují.

3.2 Sblížené zlomky jako nejlepší přiblížení

Když chceme s určitým stupněm přesnosti vyjádřit nějaké iracionální číslo α ve tvaru obyčejného racionálního zlomku, můžeme použít sblížené zlomky řetězce zobrazujícího dané číslo, přičemž stupeň přesnosti je stanoven větami 9 a 13:

$$\frac{1}{q_n\left(q_{n+1}+q_n\right)}<\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Obyčejně postupujeme tak, že hledáme racionální zlomek s nejmenším (kladným) jmenovatelem, který se liší od čísla α nejvýše o nějakou předem danou veličinu. K řešení takovéto úlohy jsou systematické zlomky nevhodné, protože mají jmenovatele určené výhradně z vybrané číselné soustavy, a tudíž nezávislé na aritmetické povaze čísla. Oproti tomu u řetězců jsou jmenovatelé sblížených zlomků zcela určeny číslem, které znázorňují. Proto jsou sblížené zlomky důležité při řešení úloh o nejlepší aproximaci (neboli přibližném vyjádření) čísel racionálními zlomky.

Definice 5.

Nechť jsou dány dva různé racionální zlomky $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$*, kde* $0<d\leq b$*. Říkáme, že zlomek* $\frac{a}{b}$ *je nejlepším přiblížením reálného čísla* α*, jestliže platí*

$$\left|\alpha-\frac{c}{d}\right|>\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|.$$

Jinými slovy to můžeme vyjádřit takto:

Racionální zlomek $\frac{a}{b}$ ($b>0$) je **nejlepším přiblížením** reálného čísla α, pokud každý racionální zlomek s týmž nebo menším jmenovatelem leží ve větší vzdálenosti od α.

Věta 15.

Každé nejlepší přiblížení čísla α *je jedním ze sblížených nebo vsunutých zlomků řetězce zobrazujícího číslo* α .

(Abychom nepřipustili výjimky, musíme zavést sblížené zlomky řádu -1, a to položením $p_{-1}=1$ a $q_{-1}=0$.)

Důkaz.

Nechť je $\frac{a}{b}$ nejlepším přiblížením čísla α . Pak

$$\frac{a}{b}\geq a_0$$

(v opačném případě by zlomek $\frac{a_0}{1}$ ležel k číslu α blíže než $\frac{a}{b}$, a tak by $\frac{a}{b}$ nebylo nejlepším přiblížením) a analogicky

$$\frac{a}{b}\leq a_0+1.$$

Můžeme tedy připustit, že

$$a_0<\frac{a}{b}<a_0+1$$

(v případě $\frac{a}{b}=a_0$ či $\frac{a}{b}=a_0+1$ by věta byla dokázána, neboť $\frac{a_0}{1}=\frac{p_0}{q_0}$ je sblížený a $\frac{a_0+1}{1}=\frac{p_0+p_{-1}}{q_0+q_{-1}}$ je vsunutý zlomek čísla α).

Pokud zlomek $\frac{a}{b}$ se žádným sblíženým nebo vsunutým zlomkem čísla α nesplývá, leží mezi dvěma po sobě jdoucími takovými zlomky. Zvolíme-li vhodně k a r ($k>0$, $0\leq r<a_{k+1}$ nebo $k=0$, $1\leq r<a_1$), leží zlomek $\frac{a}{b}$ mezi zlomky

$$\frac{p_k r+p_{k-1}}{q_k r+q_{k-1}} \text{ a } \frac{p_k\left(r+1\right)+p_{k-1}}{q_k\left(r+1\right)+q_{k-1}},$$

z čehož plyne

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p_k r+p_{k-1}}{q_k r+q_{k-1}}\right|<\left|\frac{p_k\left(r+1\right)+p_{k-1}}{q_k\left(r+1\right)+q_{k-1}}-\frac{p_k r+p_{k-1}}{q_k r+q_{k-1}}\right|=$$

$$=\frac{1}{\left(q_k\left(r+1\right)+q_{k-1}\right)\left(q_k r+q_{k-1}\right)}.$$

Avšak také

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p_k r+p_{k-1}}{q_k r+q_{k-1}}\right|=\frac{m}{b\left(q_k r+q_{k-1}\right)},$$

kde $m\geq 1$. Z těchto vztahů je patrné, že

$$\frac{1}{b\left(q_k r+q_{k-1}\right)}<\frac{1}{\left(q_k\left(r+1\right)+q_{k-1}\right)\left(q_k r+q_{k-1}\right)},$$

a tedy

$$q_k\left(r+1\right)+q_{k-1}<b.$$

Zlomek

$$\frac{p_k\left(r+1\right)+p_{k-1}}{q_k\left(r+1\right)+q_{k-1}},$$

jelikož má menšího jmenovatele než zlomek $\frac{a}{b}$, leží blíže číslu α než zlomek

$$\frac{p_k r+p_{k-1}}{q_k r+q_{k-1}}$$

(protože každý následující vsunutý zlomek leží blíže číslu α než předcházející), tedy i blíže než zlomek $\frac{a}{b}$, který leží mezi těmito dvěma zlomky. Toto ale odporuje definici nejlepšího přiblížení, tudíž jsme dokázali větu 15.

3.2.1 Řád přiblížení

Při definici pojmu nejlepšího přiblížení použitého pro tuto větu jsme si všímali vzdálenosti zlomku $\frac{a}{b}$ k číslu α pomocí rozdílu $\alpha-\frac{a}{b}$. Nicméně v číselné teorii je často vhodnější používat rozdíl $b\alpha-a$. Činitel b totiž není stálá veličina, ale mění se v závislosti na aproximaci zlomku. V souvislosti s těmito rozdíly rozlišujeme dva druhy nejlepšího přiblížení.

Definice 6.

Nechť jsou dány dva různé racionální zlomky $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$*, kde* $0 < d \leq b$*. Racionální zlomek* $\frac{a}{b}$ *nazveme* ***nejlepším přiblížením prvního druhu*** *pro reálné číslo* α*, jestliže platí*

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| > \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|.$$

Definice 7.

Nechť jsou dány dva různé racionální zlomky $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$*, kde* $0 < d \leq b$*. Racionální zlomek* $\frac{a}{b}$ *nazveme* ***nejlepším přiblížením druhého druhu*** *pro reálné číslo* α*, jestliže platí*

$$|d\alpha - c| > |b\alpha - a|.$$

Každé nejlepší přiblížení druhého druhu je zároveň nejlepší přiblížení prvního druhu, ale nejlepší přiblížení prvního druhu není vždy nejlepším přiblížením druhého druhu.

Věta 16.

Každé nejlepší přiblížení druhého druhu je dáno sblíženým zlomkem.

Důkaz.

Nechť je zlomek $\frac{a}{b}$ nejlepším přiblížením druhého druhu čísla $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, jehož sblížené zlomky označíme $\frac{p_k}{q_k}$. Pokud by byl zlomek $\frac{a}{b} < a_0$, měli bychom

$$|1 \cdot \alpha - a_0| < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \le |b\alpha - a|,\ 1 \le b,$$

neboli zlomek $\frac{a}{b}$ by nebyl nejlepším přiblížením druhého druhu. Proto můžeme napsat $\frac{a}{b} \ge a_0$. Je-li tedy zlomek $\frac{a}{b} \ge a_0$ a nesplývá-li s žádným ze sblížených zlomků, pak buď leží mezi dvěma sblíženými zlomky $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ stejné parity, nebo je větší než $\frac{p_1}{q_1}$.

V prvním případě

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| \ge \frac{1}{bq_{k-1}}$$

a

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k-1}},$$

odkud pak

$$b > q_k.$$

Na druhé straně

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \ge \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{a}{b}\right| \ge \frac{1}{bq_{k+1}},$$

a tedy

$$|b\alpha - a| \ge \frac{1}{q_{k+1}},$$

zatímco

$$|q_k\alpha - p_k| \le \frac{1}{q_{k+1}},$$

odkud získáváme

$$|q_k\alpha - p_k| \le |b\alpha - a|.$$

Zde nám vztahy $b > q_k$ a $|q_k\alpha - p_k| \le |b\alpha - a|$ ukazují, že zlomek $\frac{a}{b}$ není nejlepší přiblížení druhého druhu.

Ve druhém případě potom máme

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| > \left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{a}{b}\right| \ge \frac{1}{bq_1},$$

odkud pak

$$|b\alpha - a| > \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1}.$$

Na druhé straně

$$|1 \cdot \alpha - a_0| \le \frac{1}{a_1},$$

a tedy

$$|b\alpha - a| > |1 \cdot \alpha - a_0|,\ 1 \le b.$$

Zde opět vidíme, že zlomek $\frac{a}{b}$ není nejlepší přiblížení druhého druhu. Tím jsme tuto větu dokázali úplně.

Věta 17.

Každý sblížený zlomek je nejlepším přiblížením druhého druhu; jedinou (triviální) výjimkou je

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{2},\ \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}.$$

Důkaz.

V případě $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$ zlomek $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$ není nejlepším přiblížením druhého druhu, protože

$$|1\cdot\alpha-(a_0+1)|=1|1\cdot\alpha-a_0|.$$

Dále mějme

$$|y\alpha-x|,$$

kde $y=1,2,\ldots,q_k$ a $x\in Z$. Označíme y_0 tu hodnotu y, při které $|y\alpha-x|$ po příslušném výběru x nabývá nejmenší možné hodnoty. Konkrétní hodnotu x, při které $|y_0\alpha-x|$ nabývá této nejmenší hodnoty, označíme x_0 a dokážeme, že je tato hodnota jediná.

Kdybychom měli

$$\left|\alpha-\frac{x_0}{y_0}\right|=\left|\alpha-\frac{x_0'}{y_0}\right| \qquad (x_0\neq x_0'),$$

bylo by

$$\alpha=\frac{x_0+x_0'}{2y_0},$$

což je zlomek ireducibilní.

Kdyby totiž bylo

$$x_0+x_0'=lp,\ 2y_0=lq \qquad (l>1),$$

pak v případě $l>2$ je $q<y_0$,

$$\alpha=\frac{p}{q},\ |q\alpha-p|=0,$$

což odporuje definici y_0,

a v případě $l=2$ je $q=y_0$,

$$|q\alpha-p|=|y_0\alpha-p|=0<|y_0\alpha-x_0|,$$

což odporuje definici x_0.

Když rozvineme racionální číslo α v řetězec, dostaneme

$$\alpha=\frac{p_n}{q_n},\ p_n=x_0+x_0',\ q_n=2y_0=a_nq_{n-1}+q_{n-2},\ a_n\geq 2.$$

Jestliže je tedy $a_n>2$ nebo $a_n=2$, $n>1$, budeme mít $q_{n-1}<y_0$. Ale potom

$$|q_{n-1}\alpha-p_{n-1}|=\frac{1}{q_n}=\frac{1}{2y_0}\leq\frac{1}{2}\leq|y_0\alpha-x_0|,$$

a to opět odporuje definici y_0.

Jestliže je $a_n = 2$, $n = 1$, pak je

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{2}, \; y_0 = 1$$

dostaneme případ, který jsme vyloučili.

Hodnoty x_0 a y_0 jsou tedy určeny jediným způsobem danými podmínkami, z čehož plyne, že $\frac{x_0}{y_0}$ je nejlepší přiblížení druhého druhu čísla α. Jinak by totiž nerovnosti

$$|b\alpha - a| \le |y_0\alpha - x_0| \qquad \left(\frac{a}{b} \ne \frac{x_0}{y_0}, b \le y_0\right)$$

odporovaly definici čísel x_0 a y_0. Podle věty 16 potom dostáváme

$$x_0 = p_s, \; y_0 = q_s \qquad (s \le k).$$

Pokud je $s = k$, je věta dokázána. Pokud by však bylo $s < k$, bylo by

$$|q_s\alpha - p_s| > \frac{1}{q_s + q_{s+1}} \ge \frac{1}{q_{k-1} + q_k},$$

$$|q_k\alpha - p_k| \le \frac{1}{q_{k+1}}.$$

Protože na základě určení čísel $p_s = x_0$ a $q_s = y_0$ je

$$|q_s\alpha - p_s| \le |q_k\alpha - p_k|,$$

dostáváme nerovnost

$$\frac{1}{q_{k-1} + q_k} < \frac{1}{q_{k+1}},$$

neboli

$$q_{k+1} < q_k + q_{k-1},$$

což není možné kvůli pravidlu o tvoření čísel q_k. Tak jsme větu 17 dokázali úplně.

3.2.2 Euklidův algoritmus

Euklidův algoritmus je znám především v souvislosti s hledáním největšího společného dělitele. Princip hledání největšího společného dělitele spočívá v neúplném dělení.

Libovolné celé číslo b je buď násobkem celého kladného čísla a, nebo spadá mezi dva po sobě jdoucí násobky aa_0 a $a\left(a_0+1\right)$. Proveďme tedy neúplné dělení čísla b číslem a. Platí

$$b = aa_0 + r_0,\ 0 \le r_0 < a\ .$$

Číslo r_0 nazýváme zbytek, číslo a_0 **neúplný podíl** (pro $r_0 = 0$ je to **úplný podíl**). V číselné teorii se neúplné podíly vyskytují často a bylo pro ně zavedeno označení $a_0 = \left[\frac{b}{a}\right]$. Proto lze jakékoliv reálné číslo α zapsat ve tvaru

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\},\ 0 \le \{\alpha\} < 1,$$

kde $[\alpha]$ se nazývá **celá část** a $\{\alpha\}$ **zlomková část** čísla α.

Nevyjde-li dělení, jinými slovy když $r_0 \ne 0$, můžeme použít algoritmus dělení na dvojici čísel a, r_0. Proveďme tedy další neúplné dělení čísla a číslem r_0. Dostaneme rovnost

$$a = r_0 a_1 + r_1,\ 0 \le r_1 < r_0\,.$$

Pokud $r_1 \ne 0$, můžeme celý proces opakovat a dostaneme

$$r_0 = r_1 a_2 + r_2,\ 0 \le r_2 < r_1\,.$$

Takto můžeme neustále pokračovat až do té doby, kdy bude některé $r_n = 0$. K tomu musí dojít, jelikož pro nezáporná čísla $r_0, r_1, r_2, \ldots$ platí

$$r_0 > r_1 > r_2 > \ldots > r_{n-1} > r_n = 0\,.$$

Poslední vztah pro $r_n = 0$ tudíž je

$$r_{n-2} = r_{n-1} a_n\,.$$

Poslední nenulový zbytek r_{n-1} je pak největším společným dělitelem čísel a a b.

Nicméně Euklidův algoritmus můžeme použít i na rozvinutí racionálního čísla v řetězec. Vydělíme-li vzorec

$$b = aa_0 + r_0$$

číslem a, dostaneme rovnost

$$\frac{b}{a} = a_0 + \frac{r_0}{a},$$

kde a_0, tedy neúplný podíl, je největší celé číslo $\leq \frac{b}{a}$ a $0 \leq \frac{r_0}{a} < 1$. Vypišme si nyní v tomto tvaru všechny rovnosti Euklidova algoritmu pro čísla a, b:

$$\frac{b}{a} = a_0 + \frac{r_0}{a} = a_0 + \frac{1}{\frac{a}{r_0}},$$

$$\frac{a}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}},$$

$$\frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}},$$

$$\vdots$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n .$$

Dosadíme-li do těchto rovností, dostaneme

$$\frac{b}{a} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}},$$

neboli vyjádření kladného racionálního čísla $\frac{b}{a}$ ve tvaru řetězového zlomku (Vít [7]).

4. Rozvoj v řetězce

4.1 Rozvoj některých konstant v řetězce

4.1.1 Rozvoj Ludolfova čísla

Řetězové zlomky, jak jsme již zmínili v úvodu diplomové práce, se často používají pro nejlepší přiblížení čísel. Zkusíme teď tedy pomocí Euklidova algoritmu nalézt řetězový zlomek čísla π a určit tak jeho nejlepší přiblížení. K výpočtu použijeme hodnoty π zaokrouhlené na deset desetinných míst, protože menší počet desetinných míst by nezaručil dostatečnou přesnost, a převedené na tvar zlomku

$$\pi = 31415926536/10000000000.$$

Vypíšeme si rovnosti podle Euklidova algoritmu:

$$31415926536/10000000000 = 3 + 1415926536/10000000000,$$

$$10000000000/1415926536 = 7 + 88514248/1415926536,$$

$$1415926536/88514248 = 15 + 88212816/88514248,$$

$$88514248/88212816 = 1 + 301432/88212816,$$

$$88212816/301432 = 292 + 194672/301432,$$

$$301432/194672 = 1 + 106760/194672,$$

$$194672/106760 = 1 + 87912/106760,$$

$$106760/87912 = 1 + 18848/87912,$$

$$\vdots$$

Dostaneme tedy řetězový zlomek

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \ldots].$$

Pro určování nejlepšího přiblížení pak použijeme sblížené zlomky. Ty vypočítáme pomocí vztahů (4) pro čitatele p_k a jmenovatele q_k sblíženého zlomku řetězce:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{3}{1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{7 \cdot 3 + 1}{7} = \frac{22}{7},$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{15 \cdot 22 + 3}{15 \cdot 7 + 1} = \frac{333}{106},$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{355}{113},$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{103993}{33102},$$

$$\frac{P_6}{Q_6} = \frac{104348}{33215}, \ldots$$

Tyto sblížené zlomky jsou střídavě větší a menší než hodnota čísla π a neustále se k jeho hodnotě přibližují. Jelikož zlomky s příliš velkými čísly se k aproximacím nehodí, musíme najít zlomek pokud možno s malými čísly, přičemž tyto aproximace jsou tím lepší, čím menší mají chybu (to je rozdíl od požadované hodnoty). Vypočítáme tedy hodnoty několika prvních sblížených zlomků a jejich chyby:

$$\frac{22}{7} = 3{,}142857\ldots; \qquad \text{chyba} = -0{,}001;$$

$$\frac{333}{106} = 3{,}1415094\ldots; \qquad \text{chyba} = +0{,}00008;$$

$$\frac{355}{113} = 3{,}14159292035\ldots; \qquad \text{chyba} = -0{,}00000026676.$$

Zde vidíme, že $\frac{355}{113}$ už je velmi dobrá aproximace.

Uvádí se (Vít [7]), že už Archimédes věděl, že číslo π leží mezi $\frac{22}{7}$ a $\frac{223}{71}$, což je vsunutý zlomek čísla π, a že aproximace $\frac{355}{113}$ byla známa již čínskému astronomovi Tsu-Chung-Chih v pátém století našeho letopočtu (Schwarz [6]).

U vyjádření

$$\pi = \left[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \ldots\right]$$

je posloupnost dílčích jmenovatelů řetězového zlomku nepředvídatelná a nepravidelná. Nicméně existují i vyjádření π pomocí zobecněných řetězových zlomků, která mají pravidelnou strukturu, jako například

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \cfrac{25}{11 + \cfrac{36}{13 + \cfrac{49}{15 + \ldots}}}}}}}}.$$

Tento řetězec můžeme v některých zdrojích (Marichev [4]) vidět také ve tvaru

$$\pi = \frac{4}{\mathrm{K}_k (k^2, 2k-1)_1^\infty}.$$

Zde $\mathrm{K}_k (k^2, 2k-1)_1^\infty$ označuje nekonečný řetězový zlomek, u kterého dílčí čitatelé řetězového zlomku tvoří posloupnost druhých mocnin přirozených čísel a dílčí jmenovatelé řetězového zlomku tvoří posloupnost lichých čísel. Dále můžeme číslo π vyjádřit jako

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{9}{6 + \cfrac{25}{6 + \cfrac{49}{6 + \cfrac{81}{6 + \cfrac{121}{6 + \cfrac{169}{6 + \cfrac{225}{6 + \ldots}}}}}}}},$$

kde dílčí čitatelé řetězového zlomku tvoří posloupnost druhých mocnin lichých čísel. Jiný zápis tohoto rozvoje může být také

$$\pi = 3 + \mathrm{K}_k((2k-1)^2, 6)_1^\infty .$$

Při různých výpočtech by také mohl být užitečný rozvoj

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{6}{1 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{20}{1 - \cfrac{12}{3 - \cfrac{42}{1 - \cfrac{30}{3 - \dots}}}}}}},$$

jiným zápisem

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3 + \mathrm{K}_k(-(k-(-1)^k)(k-(-1)^k+1), 2+(-1)^k)_1^\infty} .$$

Pěkná vyjádření existují (Marichev [4]) také například pro zlomek $\frac{4}{\pi}$:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \cfrac{25}{11 + \cfrac{36}{13 + \dots}}}}}},$$

neboli

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \mathrm{K}_k(k^2, 2k+1)_1^\infty ,$$

a jiný tvar

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \cfrac{121}{2 + \dots}}}}}},$$

neboli

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \mathrm{K}_k((2k-1)^2, 2)_1^\infty .$$

4.1.2 Rozvoj Eulerova čísla

Všeobecně známé vyjádření Eulerova čísla pomocí řetězových zlomků je $e = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,\ldots]$.

Tento řetězec má nespornou výhodu v tom, že oproti pravidelnému řetězovému zlomku pro číslo π je u něj známa posloupnost dílčích jmenovatelů. Po prvních dvou prvcích 2, 1 následují po sobě jdoucí sudá čísla 2, 4, 6, 8, ..., která jsou od sebe oddělená vždy dvěma jedničkami.

Zkusme si u tohoto řetězce opět vypočítat přesnost aproximací pomocí sblížených zlomků a jejich chyb:

$\frac{2}{1} = 2$; chyba = 0,7;

$\frac{3}{1} = 3$; chyba = -0,28;

$\frac{8}{3} = 2{,}66667$; chyba = 0,051;

$\frac{11}{4} = 2{,}75$; chyba = -0,031;

$\frac{19}{7} = 2{,}714286$; chyba = 0,003996;

$\frac{87}{32} = 2{,}71875$; chyba = -0,000468;

$\frac{106}{39} = 2{,}7179487$; chyba = 0,000333;

$\frac{193}{71} = 2{,}7183099$; chyba = -0,000028.

Na těchto výpočtech lze vidět, že $\frac{193}{71}$ je už poměrně dobrá aproximace, nicméně sblížené zlomky se nám u řetězce $e=\left[2;1,2,1,1,4,1,1,6,\ldots\right]$ nepřibližují takovým tempem, jako například u $\pi=\left[3;7,15,1,292,1,1,1,\ldots\right]$.

Pro Eulerovo číslo lze však najít (Marichev [4]) mnoho pěkných rozvojů s pravidelnými posloupnostmi v podobě zevšeobecněných řetězových zlomků:

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\ddots}}}},$$

$$e=2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\ddots}}}},$$

$$e=\cfrac{1}{1-\cfrac{2}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\ddots}}}}}},$$

$$e=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{5+\ddots}}}}}}.$$

Zkusme si nyní vypočítat přesnost aproximací pomocí řetězce

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \ddots}}}}}.$$

Nejdříve vypočítáme několik prvních sblížených zlomků:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{3}{1} = 3,$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{6 \cdot 3 + 1 \cdot 1}{6 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \frac{19}{7},$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{10 \cdot 19 + 1 \cdot 3}{10 \cdot 7 + 1 \cdot 1} = \frac{193}{71},$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{14 \cdot 193 + 1 \cdot 19}{14 \cdot 71 + 1 \cdot 7} = \frac{2721}{1001}.$$

Dále zjistíme jejich chyby:

1;	chyba = 1,72;
3;	chyba = -0,282;
$\frac{19}{7} = 2,714286$;	chyba = 0,003996;
$\frac{193}{71} = 2,71830986$;	chyba = -0,000028;
$\frac{2721}{1001} = 2,7182817182$;	chyba = 0,00000011.

Tento řetězec pro Eulerovo číslo očividně aproximuje velmi rychle. Již čtvrtý sblížený zlomek nám dává dobrou aproximaci, a pomocí zlomku $\frac{2721}{1001}$ dokonce dostaneme přibližné vyjádření čísla e s přesností na 7 desetinných míst.

Další rozvoje s Eulerovým číslem jsou například:

$$e^2 = [7; 2, 1, 1, 3, 18, 5, 1, 1, \ldots],$$

$$\frac{e}{e-2} = [1; 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, \ldots],$$

$$\frac{1}{\sqrt{e}-1} = [1; 1, 1, 5, 1, 1, 9, 1, \ldots],$$

$$\frac{e+1}{e-1} = [2; 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, \ldots],$$

$$\frac{e^2+1}{e^2-1} = [1; 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots].$$

4.2 Rozvoj některých funkcí v řetězce

Lagrange odvodil jistou metodu řešení diferenciálních rovnic pomocí řetězců. Zjistil, že mnoho funkcí splňuje určitou diferenciální rovnici a téměř všechny diferenciální rovnice, které se jemu a jiným podařilo vyřešit rozvojem v řetězec, jsou zvláštními případy této rovnice. Této rovnici říká základní diferenciální rovnice a má tvar

$$\left(\alpha + \alpha' x^{\nu}\right) x y' + \left(\beta + \beta' x^{\nu}\right) y + \gamma y^2 = \delta x^{\nu}, \quad y(0) = 0. \tag{13}$$

Po aplikaci Lagrangeovy metody nám tato rovnice generuje řetězec

$$y = \cfrac{\delta x^{\nu}}{\nu\alpha + \beta + \cfrac{\left[\left(\nu\alpha+\beta\right)\left(\nu\alpha'+\beta'\right)+\gamma\delta\right] x^{\nu}}{2\nu\alpha + \beta + \cfrac{\left(\nu^2\alpha\alpha' - \nu\alpha\beta + \nu\alpha'\beta + \gamma\delta\right) x^{\nu}}{3\nu\alpha + \beta + \ddots}}}$$

$$\ddots$$

$$+ \cfrac{\left[\left(n\nu\alpha+\beta\right)\left(n\nu\alpha'+\beta'\right)+\gamma\delta\right] x^{\nu}}{2n\nu\alpha + \beta + \cfrac{\left(n^2\nu^2\alpha\alpha' - n\nu\alpha\beta' + n\nu\alpha'\beta + \gamma\delta\right) x^{\nu}}{\left(2n+1\right)\nu\alpha + \beta + \ddots}}.$$

4.2.1 Rozvoj mocninné funkce

Nechť $y=(1+x)^k$, kde k je libovolné reálné číslo. Potom

$(1+x)y'=ky$, $y(0)=1$.

Když použijeme substituci $y=1+\dfrac{kx}{1+z}$, převedeme diferenciální rovnici na tvar

$$(1+x)xz'+\left[1-(1-k)x\right]z+z^2=(1-k)x,\ z(0)=0, \tag{14}$$

což je zvláštní případ rovnice (13), kde $v=\alpha=\alpha'=\beta=\gamma=1$, $\beta'=-(1-k)$, $\delta=1-k$.

Z těchto dvou rovnic (13) a (14) dostaneme rozvoj

$$(1+x)^k=1+\cfrac{kx}{1+\cfrac{(1-k)x}{2+\cfrac{(1+k)x}{3+\cfrac{(2-k)x}{2+\ddots+\cfrac{(n-k)x}{2+\cfrac{(n+k)x}{(2n+1)+\ddots}}}}}}\ . \tag{15}$$

Tento rozvoj odvodil Lagrange. Řetězec konverguje v rovině komplexní proměnné x, z které je vyňata část reálné osy od $x=-\infty$ do $x=-1$. Oproti tomu mocninná řada, kterou bychom utvořili rozvojem funkce $y=(1+x)^k$, by konvergovala na otevřeném kruhu se středem v počátku a poloměrem jedna. To znamená, že rozvoj této funkce v řetězec konverguje v mnohem větším oboru než rozvoj v mocninou řadu (Danilov [2]).

Příklad:

Pokud položíme $x=1$ a $k=\dfrac{1}{3}$, dostaneme rozvoj pro $\sqrt[3]{2}$.

$$\sqrt[3]{2}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{2}{2+\cfrac{4}{9+\cfrac{5}{2+\ddots+\cfrac{3n-1}{2+\cfrac{3n+1}{3(2n+1)+\ddots}}}}}},$$

kde sblížené zlomky nabývají hodnot $\frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{10}{8}, \frac{106}{84}, \ldots$. Vypočítejme hodnoty těchto zlomků a jejich chyby:

$\frac{1}{1}=1;$ chyba = 0,26;

$\frac{4}{3}=1,\overline{3};$ chyba = -0,0734;

$\frac{10}{8}=1,25;$ chyba = 0,00992;

$\frac{106}{84}=1,2619;$ chyba = -0,00198;

Na chybách těchto aproximací vidíme, že řetězec pro $\sqrt[3]{2}$ aproximuje trochu pomaleji.

Příklad:

Zkusme nyní nalézt pravidelný řetězec pro $\sqrt{2}$. Převedeme si $\sqrt{2}$ na zlomek zaokrouhlený s přesností na deset desetinných míst

$$\sqrt{2}=\frac{14142135624}{10000000000}.$$

$14142135624/10000000000=1+4142135624/10000000000,$

$10000000000/4142135624=2+1715728752/4142135624,$

$4142135624/1715728752=2+710678120/1715728752,$

$1715728752/710678120=2+294372512/710678120,$

$710678120/294372512 = 2 + 121933096/294372512$,

$294372512/121933096 = 2 + 50506320/121933096$,

$121933096/50506320 = 2 + 20920456/50506320$,

$\vdots$

Vznikne nám řetězec

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots],$$

kde posloupnost $a_i = 2$ pro $i = 1, 2, \ldots$ a prvek $a_0 = 1$. Tento řetězový zlomek je periodický s jednoprvkovou periodou 2. Vypočítejme si nyní jeho sblížené zlomky a jejich chyby:

$\frac{1}{1} = 1$; chyba = 0,4142;

$\frac{3}{2} = 1,5$; chyba = -0,086;

$\frac{7}{5} = 1,4$; chyba = 0,014;

$\frac{17}{12} = 1,41667$; chyba = -0,00246;

$\frac{41}{29} = 1,41379$; chyba = 0,000424;

$\frac{99}{70} = 1,4142857$; chyba = -0,000072;

$\frac{239}{169} = 1,4142012$; chyba = 0,000012;

$\frac{577}{408} = 1,4142157$; chyba = -0,0000021.

Od šestého sblíženého zlomku již tento řetězec aproximuje poměrně dobře a zlomek $\frac{577}{408}$ je už velmi dobrá aproximace.

4.2.2 Rozvoj logaritmické funkce

Rozvoj (15) můžeme zapsat také ve tvaru

$$\frac{(1+x)^k-1}{k}=\cfrac{x}{1+\cfrac{(1-k)x}{2+\cfrac{(1+k)x}{3+\cfrac{(2-k)x}{2+\cfrac{(2+k)x}{5+\ddots+\cfrac{(n-k)x}{2+\cfrac{(n+k)x}{(2n+1)+\ddots}}}}}}}\,.$$

Položíme $k=0$. Potom, na základě vztahu

$$\lim_{k\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{k}=\ln(1+x),$$

dostaneme rozvoj

$$\ln(1+x)=\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{3+\cfrac{2x}{2+\cfrac{2x}{5+\ddots+\cfrac{nx}{2+\cfrac{nx}{(2n+1)+\ddots}}}}}}}\,.$$

Tento rozvoj spolu s postupem odvodil také Lagrange. Řetězec konverguje v rovině komplexní proměnné x, z níž je opět vyjmuta část reálné osy od $x=-\infty$ do $x=-1$.

Příklad:

Pro $x=1$ dostáváme rozvoj

$$\ln 2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ddots+\cfrac{n}{2+\cfrac{n}{(2n+1)+\ddots}}}}}$$

se sblíženými zlomky $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \ldots$. Určíme chyby:

$\frac{0}{1}=0$;	chyba = 0,6931;
$\frac{1}{1}=1$;	chyba = -0,307;
$\frac{2}{3}=0,\overline{6}$;	chyba = 0,0265;
$\frac{7}{10}=0,7$;	chyba = -0,00685.

Z několika příkladů, u kterých jsme si spočítali aproximační chyby, můžeme vyčíst, že nejlepší aproximační vlastnosti mají řetězce s vysokými hodnotami dílčích jmenovatelů.

4.2.3 Rozvoj exponenciální funkce

Použijeme-li substituci $x = \frac{x}{k}$, můžeme rozvoj (15) napsat ve tvaru

$$\left(1+\frac{x}{k}\right)^k = 1+\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1-k}{k}x}{2+\cfrac{\frac{1+k}{k}x}{3+\cfrac{\frac{2-k}{k}x}{2+\ddots}}}}$$

$$\ddots + \cfrac{\frac{n-k}{k}x}{2+\cfrac{\frac{n+k}{k}x}{(2n+1)+\ddots}} \quad .$$

Jestliže $k \to \infty$, pak dostáváme v limitě

$$e^x = 1+\cfrac{x}{1-\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{3-\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{5-\ddots}}}}}$$

$$\ddots - \cfrac{x}{2+\cfrac{x}{(2n+1)-\ddots}} \quad .$$

Rozvoj tentokrát konverguje v celé rovině komplexní proměnné x a opět jej i s postupem odvodil Lagrange. Jestliže tento řetězec upravíme, dostaneme, jak uvádí Danilov [2], Eulerův rozvoj

$$e^x = 1 + \cfrac{2x}{2 - x + \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{x^2}{10 + \ddots + \cfrac{x^2}{2(2n+1) + \ddots}}}} ,$$

jenž také konverguje v celé rovině komplexní proměnné x.

4.2.4 Rozvoj funkce $y = \operatorname{arctg} x$

Diferenciální rovnice funkce $y = \operatorname{arctg} x$ má tvar

$$y' = \frac{1}{1+x^2}, \quad y(0) = 0 .$$

Pokud substituujeme $y = \dfrac{x}{1+z}$, dostaneme tuto rovnici ve tvaru

$$\left(1+x^2\right) xz' + \left(1-x^2\right) z + z^2 = x^2 ,$$

což je zvláštní případ rovnice (13), kde $\alpha = \alpha' = \beta = \gamma = \delta = 1$, $\beta' = -1$, $v = 2$.

Z rozvoje (14) potom plyne

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+z} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{4x^2}{5 + \cfrac{9x^2}{7 + \ddots + \cfrac{n^2 x^2}{(2n+1) + \ddots}}}}} .$$

Tento rozvoj odvodil Lambert. Řetězec konverguje v oblasti, jež vznikne z roviny komplexní proměnné x, vyjmeme-li dvě části imaginární osy, a to od $-\infty$ do $-i$ a od $+i$ do $+\infty$. Rozvoj tedy konverguje v mnohem větším oboru než mocninná řada, která vznikne rozvojem funkce $y = \operatorname{arctg} x$. Tato řada totiž narozdíl od rozvoje v řetězec konverguje na vnitřku kruhu se středem v počátku a poloměrem jedna (Danilov [2]).

Jiný rozvoj funkce $y = \operatorname{arctg} x$, který uvádí Marichev [5]:

$$\operatorname{arctg} x = x - \cfrac{x^3}{3 + \cfrac{9x^2}{5 + \cfrac{4x^2}{7 + \ddots + \cfrac{(2n+1)^2 x^2}{4n+1+\cfrac{(2n)^2 x^2}{4n+3+\ddots}}}}} .$$

4.2.5 Rozvoj funkce $y = \operatorname{tg} x$

Diferenciální rovnice pro $y = \operatorname{tg} x$ je

$$y' = 1 + y^2, \; y(0) = 0 .$$

Položíme $y = \dfrac{x}{1+z}$ a dostaneme rovnici

$$xz' + z + z^2 = -x^2 .$$

Tato rovnice je opět zvláštní případ rovnice (13), kde $\alpha' = \beta' = 0$, $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $\delta = -1$, $v = 2$.

Z rozvoje (14) pak plyne

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \ddots - \cfrac{x^2}{(2n+1) - \ddots}}}} .$$

Tento rozvoj byl odvozen Lambertem a konverguje v rovině komplexní proměnné x, z níž jsou vyňaty body, v kterých $\operatorname{tg} x$ nabývá nekonečné hodnoty.

4.2.6 Rozvoj funkce $y = \operatorname{tgh} x$

Pokud v rozvoji pro $\operatorname{tg} x$, který jsme si právě odvodili, položíme $x = \frac{x}{i}$ a nově vzniklou nerovnost vynásobíme i, vznikne nám rozvoj pro $\operatorname{tgh} x$:

$$\operatorname{tgh} x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \ddots + \cfrac{x^2}{(2n+1) + \ddots}}}} .$$

4.2.7 Aproximace funkcí $\sin x$ a $\sinh x$ lomenou racionální funkcí

Obecný tvar rozvoje funkce $\sin x$ v řetězový zlomek není znám. Pomocí metody, kterou vymyslel V. Viskovatov, můžeme určit pouze konečně mnoho členů tohoto řetězce. Danilov [3] uvádí například rozvoje:

$$\sin x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{6 - \cfrac{7x^2}{10 + \cfrac{11x^2}{98 - \cfrac{551x^2}{198 + \ddots}}}}},$$

kde sblížené zlomky mají tvar

$$\frac{x}{1},\ \frac{6x}{6+x^2},\ \frac{60x-7x^3}{60+3x^2},\ \frac{5880x-620x^3}{5880+360x^2+11x^4},\ \dots,$$

a

$$\sin x = x - \cfrac{x^3}{6 + \cfrac{3x^2}{10 - \cfrac{11x^2}{42 + \cfrac{25x^2}{66 - \ddots}}}},$$

se sblíženými zlomky

$$\frac{x}{1},\ \frac{6x-x^3}{6},\ \frac{60x-7x^3}{60+3x^2},\ \frac{2520x-360x^3+11x^5}{2520+60x^2},\ \dots.$$

Vezmeme-li si z těchto dvou rozvojů přibližné vyjádření

$$\sin x \approx \frac{60x-7x^3}{60+3x^2},$$

dostaneme z něj, že $\sin\frac{1}{4}\pi \approx 0{,}7071$, jestliže položíme $\frac{1}{4}\pi \approx 0{,}7854$. To znamená, že nám toto přibližné vyjádření na základě periodičnosti funkce $y = \sin x$ a vztahů

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \cos x$$

a

$$|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

umožňuje sestavit tabulku hodnot této funkce s přesností na čtyři desetinná čísla. Kdybychom použili sblížený zlomek vyššího řádu, mohli bychom počet platných desetinných míst libovolně zvýšit.

Vzhledem ke vztahu $\sinh x = (-i)\sin ix$ můžeme odvodit rozvoje pro funkci $\sinh x$:

$$\sinh x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{7x^2}{10 - \cfrac{11x^2}{98 + \cfrac{551x^2}{198 - \ddots}}}}},$$

$$\frac{x}{1},\ \frac{6x}{6-x^2},\ \frac{60x+7x^3}{60-3x^2},\ \frac{5880x+620x^3}{5880-360x^2+11x^4},\ \ldots,$$

a

$$\sinh x = x + \cfrac{x^3}{6 - \cfrac{3x^2}{10 + \cfrac{11x^2}{42 - \cfrac{25x^2}{66 + \ddots}}}},$$

$$\frac{x}{1},\ \frac{6x+x^3}{6},\ \frac{60x+7x^3}{60-3x^2},\ \frac{2520x+360x^3+11x^5}{2520-60x^2},\ \ldots.$$

4.2.8 Aproximace funkcí $\cos x$ a $\cosh x$ lomenou racionální funkcí

Jelikož obecný tvar rozvoje funkce $\cos x$ také neznáme, můžeme opět Viskovatovovou metodou najít pouze konečný počet členů tohoto řetězce. Tyto rozvoje vypadají spolu s sblíženými zlomky následovně:

$$\cos x = \cfrac{1}{1+\cfrac{x^2}{2-\cfrac{5x^2}{6+\cfrac{3x^2}{50-\cfrac{313x^2}{126+\ddots}}}}},$$

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{2+x^2},\ \frac{12-5x^2}{12+x^2},\ \frac{600-244x^2}{600+56x^2+3x^4},\ \ldots,$$

případně

$$\cos x = 1-\cfrac{x^2}{2+\cfrac{x^2}{6-\cfrac{3x^2}{10+\cfrac{13x^2}{126-\ddots}}}},$$

$$\frac{1}{1},\ \frac{2-x^2}{2},\ \frac{12-5x^2}{12+x^2},\ \frac{120-56x^2+3x^4}{120+4x^2},\ \ldots.$$

Na základě vztahu $\cosh x = \cos ix$ odvodíme rozvoje pro funkci $\cosh x$:

$$\cosh x = \cfrac{1}{1-\cfrac{x^2}{2+\cfrac{5x^2}{6-\cfrac{3x^2}{50+\cfrac{313x^2}{126-\ddots}}}}},$$

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{2-x^2},\ \frac{12+5x^2}{12-x^2},\ \frac{600+244x^2}{600-56x^2+3x^4},\ \ldots,$$

či jiný tvar

$$\cosh x = 1 + \cfrac{x^2}{2 - \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{3x^2}{10 - \cfrac{13x^2}{126 + \ddots}}}},$$

$$\frac{1}{1},\ \frac{2+x^2}{2},\ \frac{12+5x^2}{12-x^2},\ \frac{120+56x^2+3x^4}{120-4x^2},\ \ldots .$$

5. Závěr

Cílem této práce bylo vytvoření uceleného textu, jenž by zpracoval základy problematiky řetězových zlomků. Diplomová práce popisuje základní pojmy týkající se této oblasti matematiky spolu s vlastnostmi řetězců a zabývá se teorií použití řetězových zlomků k zobrazení čísel. Na závěr uvádí konkrétní příklady rozvojů některých čísel a funkcí v řetězce a několik aproximací.

Na základě jednotlivých kapitol a konkrétních příkladů aproximací uvedených v poslední části diplomové práce můžeme konstatovat, že řetězové zlomky jsou krásným algoritmem pro aproximaci reálných čísel i funkcí a mohou sloužit k praktickým, velmi efektivním výpočtům. Výhodná je především rychlost výpočtů prováděných pomocí těchto zlomků a jejich schopnost omezení čísla (hodnoty funkce v daném bodě) shora i zdola. Ta nám umožňuje poměrně jednoduše určit přibližnou hodnotu daného čísla (funkce v daném bodě). Navíc u pravidelných řetězců jsme pouhým pohledem schopni odhadnout „rychlost“ aproximace, jelikož závisí na velikosti dílčích jmenovatelů řetězce.

Současný stav na českých školách je takový, že řetězovým zlomkům není v oblasti vzdělávání věnována velká pozornost. Vzhledem k tomuto faktu bylo poměrně obtížné shromáždit dostatek materiálů potřebných k vytvoření této práce. Nicméně vezmeme-li v úvahu nesporné výhody použití řetězců, je možná škoda, že tomuto tématu není poskytnuto více prostoru, než je tomu nyní.

Použitá literatura

[1] COLLINS, Darren C. Continued Fractions. *Undergraduate Journal of Mathematics* [online]. Massachusetts Institute of Technology. Únor 2000 [cit. 17. května 2009]. Dostupný z WWW: http://www-math.mit.edu/phase2/UJM/vol1/COLLIN~1.PDF

[2] DANILOV, V. L. a kol. *Přehled matematické analýzy I*. Renc, Zdeněk. 1. vyd. Praha: SNTL, 1968. 416 s.

[3] CHINČIN, A. J. *Řetězové zlomky*. Rychlík, Karel. 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. 104 s.

[4] MARICHEV, Oleg; TROTT, Michael. Constants [online]. The Wolfram Functions Site. Champaign: Wolfram Research, Inc., 1998-2009 [cit. 17. května 2009]. Dostupný z WWW: http://functions.wolfram.com/Constants/

[5] MARICHEV, Oleg; TROTT, Michael. Elementary Functions [online]. The Wolfram Functions Site. Champaign: Wolfram Research, Inc., 1998-2009 [cit. 17. května 2009]. Dostupný z WWW: http://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/

[6] SCHWARZ, Štefan. *Základy náuky o riešení rovníc*. 1. vyd. Bratislava: Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied, 1967. 440 s.

[7] VÍT, Pavel. *Řetězové zlomky*. ÚV Matematické olympiády. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1982. 160 s. Škola mladých matematiků.

[8] WEISSTEIN, Eric. W. *Continued fraction* [online]. Mathworld-A Wolfram Web Resource. Champaign: Wolfram Research, Inc., 1999-2009 [cit. 17. května 2009]. Dostupný z WWW: http://mathworld.wolfram.com/ContinuedFraction.html