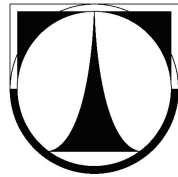


TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta strojní



Antonín Skarolek

**Dynamická analýza rotoru
turbodmychadla**

Diplomová práce

2005

Anotace

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI Fakulta strojní

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

Diplomant	: Antonín Skarolek
Téma práce	: Dynamická analýza rotoru turbodmyhadla
Theme of the thesis	: Dynamic Analysis of Turbocharger Rotor
Vedoucí práce	: doc. Ing. Josef Mevald, CSc, TU Liberec
Konzultant práce	: Ing. Václav Kareš, ČZ a.s., Strakonice

Stručný výtah:

Práce zkoumá hlavní aspekty dynamického chování rychloběžného rotoru turbodmyhadla, a to jak na zjednodušených modelech přístupných analytickým metodám, na kterých se snáze identifikují dílčí projevy dynamiky, tak i pomocí numerických řešení přesnějších modelů. Porovnává výsledky obou těchto přístupů ze zřetelem k důležitým parametrům soustavy, zejména s ohledem na uložení rotoru, hmotové vlastnosti kotoučů a vlastního hřídele.

Short abstract:

The thesis investigates main aspects of dynamic behaviour of fast-running turbocharger rotor, both on simplified models opened to analytical methods, which is easier to determine partial dynamics exhibitions on and with assistance of numerical solutions of more accurate models too. The work compares results of both these ways considering important parameters of the system, especially in relation to rotor suspension and mass properties of wheels and shaft.

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č.121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 (školní dílo).

Beru na vědomí, že TUL má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé diplomové práce a prohlašuji, že **souhlasím** s případným užitím mé diplomové práce (prodej, zapůjčení apod.).

Jsem si vědom toho, že užít své diplomové práce či poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem TUL, která má právo ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených univerzitou na vytvoření díla (až do jejich skutečné výše).

Beru na vědomí, že si svou diplomovou práci mohu vyzvednout v Univerzitní knihovně TUL po uplynutí pěti let po obhajobě.

dne: 22. května 2005

Antonín Skarolek

Místopřísežné prohlášení

Místopřísežně prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury.

dne: 22. května 2005

Antonín Skarolek

Poděkování

Je mou milou povinností poděkovat všem, kteří mi byli nápomocni při tvorbě této práce. Zejména bych rád poděkoval doc. Ing. Josefu Mevaldovi, CSc. za odborné vedení diplomové práce, cenné konzultace a pomoc při získání odborné literatury. Rovněž děkuji Ing. Pinkasovi a Ing. Karešovi z podniku ČZ a.s. za poskytnuté podklady, bez kterých by tuto práci nebylo možno vytvořit. Děkuji též Ing. Miroslavu Štěpánovi a Ing. Janě Loudové za nezištnou pomoc při realizaci návštěv společnosti ČZ a.s. Vřelé díky patří také mé rodině a přátelům za soustavnou podporu, nejen při pronikání do zákonitostí dynamiky rotorů, ale během celého studia.

Obsah

Seznam veličin	6
Seznam obrázků	9
1 Úvod	12
1.1 Vyráběné turbodmychadlo	12
2 Základ analýzy rotorových systémů	13
2.1 Lavalův rotor	13
2.2 Netlumený Lavalův rotor	13
2.3 Lavalův rotor s tlumením vnějším a vnitřním	15
2.4 Vliv gyroskopických účinků kotouče	16
2.5 Kluzná ložiska	18
3 Modelování rotoru turbodmychadla	27
3.1 Diskrétní model s tuhými ložisky	27
3.2 Ložiska rotoru	35
3.3 Model rotoru s poddajným izotropním uložením	36
3.4 Model rotoru s uložením v kruhových kluzných ložiskách	45
4 Závěr	54
4.1 Shrnutí dosažených výsledků	54
4.2 Možnosti pokračování práce	54
Seznam literatury	55
A Grafické přílohy	56
A.1 Tuhosti a tlumení kruhového ložiska	56
A.2 Kritické otáčky rotoru s izotropními ložisky	63
A.3 Amplitudové charakteristiky rotoru s izotropními ložisky	66
A.4 Amplitudy modelu s kruhovými kluznými ložisky	72

Seznam veličin

Kapitola 2.1 – 2.3

x, y	[m]	Souřadnice pevného souřadného systému
ξ, η	[m]	Souřadnice systému spojeného s kotoučem
$\bar{z}, \bar{\zeta}$	[m]	Komplexní výchylka středu kotouče
ω	[rad s ⁻¹]	Úhlová rychlost rotoru
ε	[m]	Vyosení těžiště kotouče
g	[m s ⁻²]	Tíhové zrychlení
m	[kg]	Hmotnost kotouče
k	[N m ⁻¹]	Tuhost hřídele
b	[N s m ⁻¹]	Koeficient vnitřního tlumení hřídele
p	[N s m ⁻¹]	Koeficient vnějšího tlumení
Ω	[rad s ⁻¹]	Vlastní frekvence netlumeného systému
κ	[s ⁻¹]	Koeficient proporcionality vnějšího tlumení
δ	[s ⁻¹]	Koeficient proporcionality vnitřního tlumení
Ω_0	[rad s ⁻¹]	Vlastní frekvence

Kapitola 2.4

E	[Pa]	Modul pružnosti v tahu
J	[m ⁴]	Kvadratický moment průřezu hřídele
l	[m]	Délka hřídele
α	[N ⁻¹ m]	Příčinkový činitel
β	[N ⁻¹]	Příčinkový činitel
γ	[N ⁻¹ m ⁻¹]	Příčinkový činitel
k_{11}	[N m ⁻¹]	Tuhost hřídele
k_{12}	[N]	Tuhost hřídele
k_{22}	[N m]	Tuhost hřídele
\bar{u}	[m]	Komplexní průhyb kotouče
$\bar{\phi}$	[rad]	Komplexní úhlová výchylka kotouče
\bar{P}	[N]	Komplexní dynamický silový účinek
\bar{M}	[N m]	Komplexní dynamický momentový účinek
C	[Kg m ²]	Moment setrvačnosti kotouče k ose symetrie
A	[Kg m ²]	Moment setrvačnosti kotouče kolmo k ose symetrie
\bar{U}	[m]	Komplexní amplituda průhybu kotouče
$\bar{\Phi}$	[rad]	Komplexní amplituda natočení kotouče

Kapitola 2.5

R	[m]	Poloměr čepu hřídele
c	[m]	Radiální vůle ložiska
W	[N]	Statické zatížení ložiska
e	[m]	Vyosení středu hřídele v ložisku
Φ	[rad]	Úhlová poloha středu hřídele

β	[rad]	Úhlová souřadnice ložiska
h	[m]	Tloušťka olejového filmu
p	[Pa]	Tlak oleje
μ	[Pa s]	Dynamická viskozita oleje
τ	[Pa]	Tečné napětí
o, u, v	[m s ⁻¹]	Složky rychlosti proudění v ložisku
q	[m ² s ⁻¹]	Objemový průtok jednotkové délky ložiska
L	[m]	Délka ložiska
ε	[–]	Excentricita středu hřídele v ložisku
F_i, F_k	[N]	Složky reakce ložiska na hřídel
F	[N]	Výsledná reakční síla ložiska na hřídel
S	[–]	Sommerfeldovo číslo
$k_{yy}, k_{yz}, k_{zy}, k_{zz}$	[N m ⁻¹]	Tuhosti ložiska
$b_{yy}, b_{yz}, b_{zy}, b_{zz}$	[N s m ⁻¹]	Tlumení ložiska

Kapitola 3.1

Index d značí veličinu kola dmyhadla, index t kola plynové turbíny.

y, z	[m]	Průhyby kola
φ_z, φ_y	[rad]	Natočení kola
e	[m]	Rameno nevyváženosti kola
p_w	[N s m ⁻¹]	Koeficient vnějšího tlumení průhybu
p_φ	[N m s]	Koeficient vnějšího tlumení natočení
α	[s]	Koeficient proporcionality vnitřního tlumení
$k_{w,w}$	[N m ¹]	Tuhost hřídele
$k_{w,\varphi}$	[N]	Tuhost hřídele
$k_{\varphi,w}$	[N]	Tuhost hřídele
$k_{\varphi,\varphi}$	[N m]	Tuhost hřídele
ζ	[–]	Poměrné vnější tlumení
ψ	[rad]	Úhel mezi rameny nevyvážeností kotoučů
Ω_{kr}	[rad s ⁻¹]	Kritická úhlová rychlost rotoru
n_{kr}	[min ⁻¹]	Kritické otáčky rotoru
λ	[rad s ⁻¹]	Vlastní čísla soustavy
W	[m]	Amplituda průhybu kola
Φ	[rad]	Amplituda natočení kola

Kapitola 3.2

t	[°C]	Teplota mazacího oleje
μ_t	[Pa s]	Dynamická viskozita oleje při dané teplotě

Kapitola 3.3

w, v	[m]	Výchyly uzlu soustředěné hmoty
Φ, ϑ	[rad]	Úhlové výchyly uzlu soustředěné hmoty
V_y, V_z	[N]	Složky tečné síly
M_y, M_z	[N m]	Složky ohybového momentu
k	[N m ¹]	Tuhost izotropního ložiska
b	[N s m ¹]	Koeficient tlumení izotropního ložiska

Kapitola 3.4

Index s značí sinové složky veličin, index c kosinové složky veličin.

\bar{r}	[m]	Průvodič uzlu soustředěné hmoty
\bar{r}^+, \bar{r}^-	[m]	Složky průvodiče uzlu soustředěné hmoty
a, b	[m]	Poloosy eliptické trajektorie uzlu soustředěné hmoty
δ	[rad]	Úhel orientace eliptické trajektorie uzlu soustředěné hmoty

Seznam obrázků

Obrázky v textu

1	Řez turbodmychadlem	12
2	Lavalův rotor: Rovina pohybu kotouče	13
3	Lavalův rotor: Partikulární řešení	14
4	Letmo uložený kotouč	16
5	Gyroskopické účinky: Vlastní frekvence a kritické otáčky	18
6	Rovina kruhového hydrodynamického ložiska	19
7	Prostorový element mazacího filmu	19
8	Vliv excentricity na tlak v dlouhém ložisku	21
9	Sommerfeldovo číslo – excentricita	24
10	Stacionární poloha středu hřídele	24
11	Bezrozměrné tuhosti – Sommerfeldovo číslo	26
12	Bezrozměrné tlumení – Sommerfeldovo číslo	26
13	Schematické znázornění rotoru	28
14	Reálné části vlastních čísel	29
15	Vlastní frekvence	32
16	Detail kritických otáček souběžné precese	32
17	Amplitudy průhybů – $\psi = 0^\circ$, $\zeta = 0.05$	33
18	Amplitudy natočení – $\psi = 0^\circ$, $\zeta = 0.05$	33
19	Amplitudy průhybů – $\psi = 90^\circ$, $\zeta = 0.05$	33
20	Amplitudy natočení – $\psi = 90^\circ$, $\zeta = 0.05$	34
21	Amplitudy průhybů – $\psi = 180^\circ$, $\zeta = 0.05$	34
22	Amplitudy natočení – $\psi = 180^\circ$, $\zeta = 0.05$	34
23	Uložení rotoru	35
24	Tuhosti ložiska – $t = 40^\circ\text{C}$, $c = 15\ \mu\text{m}$	37
25	Tlumení ložiska – $t = 40^\circ\text{C}$, $c = 15\ \mu\text{m}$	37
26	Tuhosti ložiska – $t = 150^\circ\text{C}$, $c = 42\ \mu\text{m}$	38
27	Tlumení ložiska – $t = 150^\circ\text{C}$, $c = 42\ \mu\text{m}$	38
28	Rozdělení rotoru na přenosové části	39
29	Vlastní frekvence – $k = 1 \cdot 10^9\ \text{N m}^{-1}$, $b = 1\ \text{N s m}^{-1}$	42
30	Vlastní frekvence – $k = 1 \cdot 10^7\ \text{N m}^{-1}$, $b = 1\ \text{N s m}^{-1}$	42
31	Vlastní frekvence – $k = 1 \cdot 10^5\ \text{N m}^{-1}$, $b = 1\ \text{N s m}^{-1}$	42
32	Detail vlastních frekvencí – $k = 1 \cdot 10^5\ \text{N m}^{-1}$, $b = 1\ \text{N s m}^{-1}$	43
33	Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^9\ \text{N m}^{-1}$, $b = 1\ \text{N s m}^{-1}$	43
34	Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^7\ \text{N m}^{-1}$, $b = 1\ \text{N s m}^{-1}$	44
35	Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^5\ \text{N m}^{-1}$, $b = 1\ \text{N s m}^{-1}$	44
36	Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^7\ \text{N m}^{-1}$, $b = 1\ \text{N s m}^{-1}$	46
37	Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^7\ \text{N m}^{-1}$, $b = 1\ \text{N s m}^{-1}$	46
38	Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^7\ \text{N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2\ \text{N s m}^{-1}$	46
39	Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^7\ \text{N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2\ \text{N s m}^{-1}$	47
40	Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^7\ \text{N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^4\ \text{N s m}^{-1}$	47
41	Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^7\ \text{N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^4\ \text{N s m}^{-1}$	47
42	Trajektorie uzlu soustředěné hmoty	49

43	Průhyby dmychadlového kola – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 0^{\circ}$	51
44	Průhyby turbínového kola – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 0^{\circ}$	51
45	Orientace eliptické trajektorie – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 0^{\circ}$	51
46	Průhyby dmychadlového kola – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 90^{\circ}$	52
47	Průhyby turbínového kola – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 90^{\circ}$	52
48	Orientace eliptické trajektorie – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 90^{\circ}$	52
49	Průhyby dmychadlového kola – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^{\circ}$	53
50	Průhyby turbínového kola – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^{\circ}$	53
51	Orientace eliptické trajektorie – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^{\circ}$	53

Obrázky v přílohách

52	Tuhosti ložiska – $t = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$	56
53	Tlumení ložiska – $t = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$	56
54	Tuhosti ložiska – $t = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 42\text{ }\mu\text{m}$	57
55	Tlumení ložiska – $t = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 42\text{ }\mu\text{m}$	57
56	Tuhosti ložiska – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$	58
57	Tlumení ložiska – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$	58
58	Tuhosti ložiska – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$	59
59	Tlumení ložiska – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$	59
60	Tuhosti ložiska – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 42\text{ }\mu\text{m}$	60
61	Tlumení ložiska – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 42\text{ }\mu\text{m}$	60
62	Tuhosti ložiska – $t = 150\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$	61
63	Tlumení ložiska – $t = 150\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$	61
64	Tuhosti ložiska – $t = 150\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$	62
65	Tlumení ložiska – $t = 150\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$	62
66	Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^9\text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2\text{ N s m}^{-1}$	63
67	Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^9\text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^8\text{ N s m}^{-1}$	63
68	Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^7\text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2\text{ N s m}^{-1}$	64
69	Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^7\text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^4\text{ N s m}^{-1}$	64
70	Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^5\text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2\text{ N s m}^{-1}$	65
71	Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^5\text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^4\text{ N s m}^{-1}$	65
72	Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^9\text{ N m}^{-1}$, $b = 1\text{ N s m}^{-1}$	66
73	Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^9\text{ N m}^{-1}$, $b = 1\text{ N s m}^{-1}$	66
74	Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^9\text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2\text{ N s m}^{-1}$	67
75	Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^9\text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2\text{ N s m}^{-1}$	67
76	Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^9\text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^8\text{ N s m}^{-1}$	68
77	Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^9\text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^8\text{ N s m}^{-1}$	68
78	Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^5\text{ N m}^{-1}$, $b = 1\text{ N s m}^{-1}$	69
79	Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^5\text{ N m}^{-1}$, $b = 1\text{ N s m}^{-1}$	69
80	Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^5\text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2\text{ N s m}^{-1}$	70
81	Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^5\text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2\text{ N s m}^{-1}$	70
82	Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^5\text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^4\text{ N s m}^{-1}$	71
83	Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^5\text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^4\text{ N s m}^{-1}$	71
84	Průhyby dmychadlového kola – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^{\circ}$	72

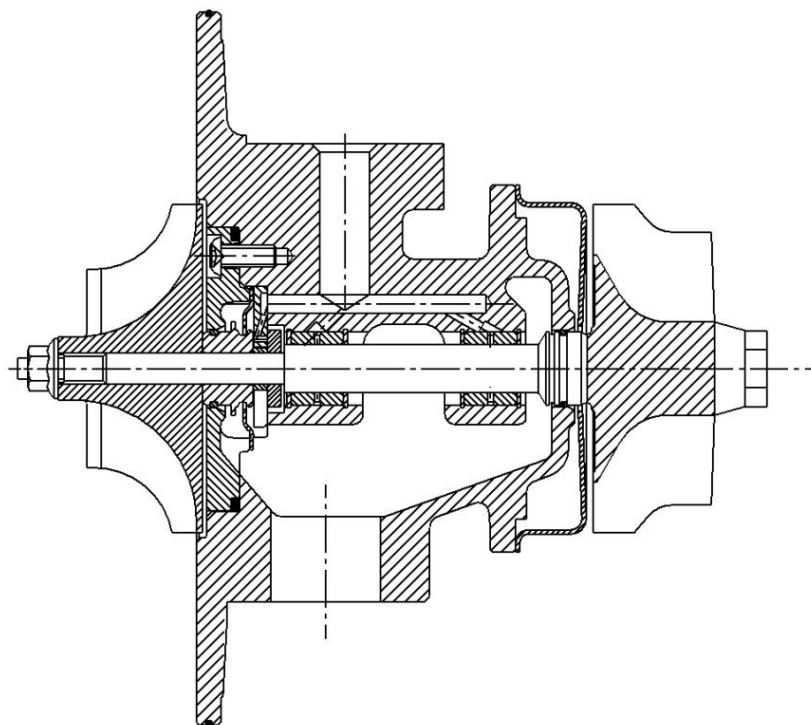
85	Průhyby turbínového kola – $t = 100\text{ °C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^\circ$	72
86	Orientace eliptické trajektorie – $t = 100\text{ °C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^\circ$	72
87	Průhyby dmychadlového kola – $t = 100\text{ °C}$, $c = 42\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^\circ$	73
88	Průhyby turbínového kola – $t = 100\text{ °C}$, $c = 42\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^\circ$	73
89	Orientace eliptické trajektorie – $t = 100\text{ °C}$, $c = 42\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^\circ$	73
90	Průhyby dmychadlového kola – $t = 40\text{ °C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^\circ$	74
91	Průhyby turbínového kola – $t = 40\text{ °C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^\circ$	74
92	Orientace eliptické trajektorie – $t = 40\text{ °C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^\circ$	74
93	Průhyby dmychadlového kola – $t = 150\text{ °C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^\circ$	75
94	Průhyby turbínového kola – $t = 150\text{ °C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^\circ$	75
95	Orientace eliptické trajektorie – $t = 150\text{ °C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^\circ$	75

1 Úvod

Snaha o vyšetření dynamiky rotoru automobilového turbodmychadla je vedena několika zájmy. Mezi hlavní patří identifikace vlivu parametrů na vibrace rotoru za účelem rozpoznání možných inovačních rezerv. Jedná se zejména o zmenšení konturových vůlí mezi koly a spirálními skříněmi pro dosažení vyšších termodynamických účinností, snížení ztrátového výkonu kluzných ložisek, tj. tepla odvedeného mazacím olejem a zlepšení těsnosti turbodmychadla. Výše uvedené požadavky nejsou nezávislé, ale jsou poměrně úzce spjaty. Kmitání konců hřídele je silně ovlivněno použitým uložením hřídele, zvýšený průtok mazacího oleje zase ohrožuje těsnost turbodmychadla atd. Dalším důležitým okruhem výzkumu dynamiky rotoru jsou oblasti nestabilního chodu, ve kterých nelze rotor trvale provozovat z důvodu neúměrného nárůstu vibrací a jimi způsobených poškození zařízení. Jedná se o problémy analyticky řešitelné pouze se značnými zjednodušeními a ve speciálních případech, které jsou přesto cenné, neboť se díky nim snáze zorientujeme ve výsledcích získaných numerickými postupy či měřeními.

Cílem této práce je analyticky vyšetřit vlivy uložení, nevyváženosti rotoru, vnitřního a vnějšího tlumení na vynucené kmitání a na stabilitu volných kmitů a takto získané poznatky využít k hodnocení výsledků vhodných simulačních metod, případně dat získaných měřeními.

1.1 Vyráběné turbodmychadlo



Obrázek 1: Řez turbodmychadlem

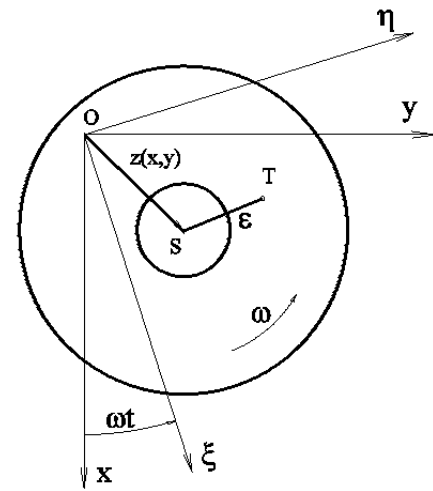
Vyšetřované automobilové turbodmychadlo, které vyrábí společnost ČZ a.s. je vyobrazeno na obr. 1. Skládá se z funkčního hlediska z několika hlavních celků. Z části hnací (na obr. 1 vpravo), tj. plynové turbíny, pevně spojené s hřídelem pomocí třecího svařování, z poháněného kola kompresoru (na obr. 1 vlevo) a systému uložení hřídele rotoru. Na uvedeném vyobrazení je stávající řešení uložení hřídele ve dvou radiálních plovoucích ložiscích a jednom axiálním ložisku. Budoucí možnou alternativou k tomuto způsobu uložení je jedno fixní radiální ložisko s jedním ložiskem axiálním. Detaily provedení ložisek budou uvedeny v kapitole věnované jejich analýze.

2 Základ analýzy rotorových systémů

Tato kapitola se zabývá analytickými řešeními nejjednodušších modelů, poukazujících na výrazné kvalitativní rozdíly ve výsledcích, mající svůj původ v některém ze zásadních jevů provázejících problematiku rotorů. Vyšetřeny budou otázky nevyváženosti kotoučů, vnitřního a vnějšího tlumení, gyroskopických účinků, poddajnosti a tlumení uložení.

2.1 Lavalův rotor

Pod názvem Lavalův či Jeffcottův rotor [5] se rozumí nehmotný podajný hřídel konstantního kruhového průřezu, uložený na dvou tuhých ložiscích, s tenkým kotoučem nasazeným uprostřed mezi nimi. Pohyb kotouče se děje v rovině kolmé na spojnici ložisek, proto do řešení tohoto modelu nevstupují gyroskopické účinky kotouče na hřídel. Situaci v této rovině znázorňuje obr. 2. Bod O je průsečíkem spojnice ložisek s rovinou kotouče, bod S značí střed hřídele s kotoučem. Hmotný střed kotouče je umístěn v bodě T , ε je tedy excentricita těžiště kotouče. Směr tíhového zrychlení g působí ve směru osy x . Hmotnost kotouče označme m a tuhost hřídele k .



Obrázek 2: Rovina pohybu kotouče

2.2 Netlumený Lavalův rotor – [3]

Souřadnice středu kotouče x, y nahradíme komplexní výchylkou

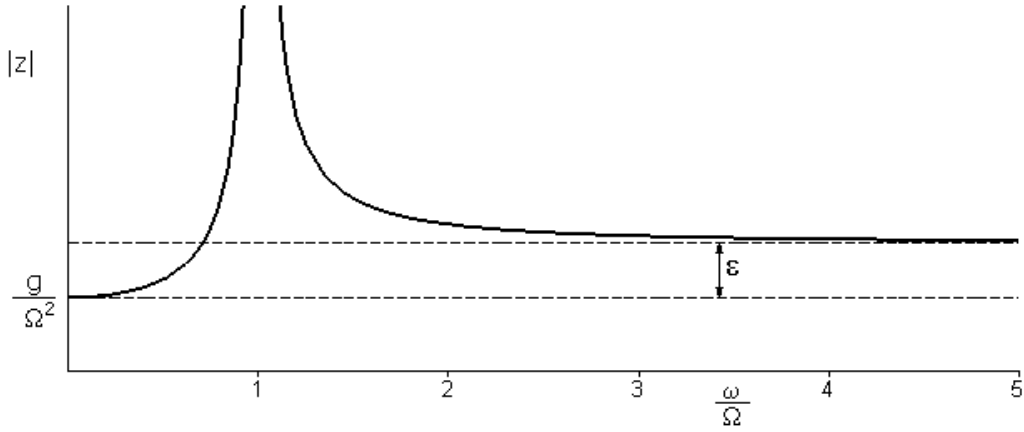
$$\bar{z} = x + jy, \text{ kde } j = \sqrt{-1}. \quad (2.1)$$

Zanedbáváme-li tlumení, dostaneme pro rovnoměrně se otáčející kotouč pohybovou rovnici vyjádřenou v soustavě Oxy

$$m\ddot{\bar{z}} + k\bar{z} = m\varepsilon\omega^2 e^{j\omega t} + gm. \quad (2.2)$$

Partikulární řešení soustavy (2.2) je

$$\bar{z}_P = \frac{g}{\Omega^2} + \frac{\varepsilon}{\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1} e^{j\omega t}, \text{ kde } \Omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (2.3)$$



Obrázek 3: Partikulární řešení

Partikulární řešení (2.3) sestává ze dvou členů. První člen je statickou výchylkou kotouče způsobenou tíhovou silou, druhý člen vyjadřuje krouživé kmitání hřídele. Hřídel s konstantním průhybem rotuje úhlovou rychlostí ω kolem spojnice ložisek. Nekonečných hodnot nabývají výchylky pouze za shody úhlové rychlosti rotace ω s vlastní frekvencí Ω . Odhlédneme-li od prvního členu partikulárního řešení, tj. neuvažujeme-li průhyb způsobený gravitací, jsou vektory tvořené body OS a ST kolineární. V podrezonanční oblasti úhlových rychlostí je $|\text{OS}| < |\text{OT}|$, pro nadrezonanční úhlové rychlosti rotoru je tomu naopak. Pro $\omega \rightarrow \infty$ pak dochází k vystředění kotouče, pro které platí $|\text{OT}| = 0$.

Řešením homogenní rovnice přidružené k (2.2) je

$$\bar{z}_H = C_1 e^{j\Omega t} + C_2 e^{-j\Omega t}, \quad (2.4)$$

kde C_1, C_2 jsou konstanty určitelné z počátečních podmínek. Řešení představuje volné kmitání hřídele s kotoučem a ryze imaginární exponenty ukazují, že systém popsaný touto homogenní rovnicí je na mezi stability. Což prakticky znamená, že \bar{z}_H nekonverguje k prosté hodnotě, ani neopouští jistou konečnou oblast vymezenou počátečními podmínkami.

Obecné řešení rovnice (2.2) je tedy

$$\bar{z} = \bar{z}_H + \bar{z}_P = C_1 e^{j\Omega t} + C_2 e^{-j\Omega t} + \frac{g}{\Omega^2} + \frac{\varepsilon}{\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1} e^{j\omega t}. \quad (2.5)$$

2.3 Lavalův rotor s tlumením vnějším a vnitřním – [1]

Ukazuje se, že velmi podstatný vliv na stabilitu pohybu rotorů mají účinky vnějšího a vnitřního útlumu. Vnější tlumením se rozumí interakce rotoru s okolním prostředím, které sestává hlavně z aerodynamických odporů plynů obtékajících hřídel s kotouči a z účinků olejových filmů hydrodynamických ložisek na čepy hřídele. Při zjednodušeném uvažování viskozního tlumení s koeficientem p přibude patřičný člen do rovnice (2.2)

$$m\ddot{\bar{z}} + p\dot{\bar{z}} + k\bar{z} = m\varepsilon\omega^2 e^{j\omega t} + gm. \quad (2.6)$$

Vnitřní tlumení má původ v útlumu materiálu hřídele a v tření mezi náboji a hřídelem. Opět lze snadno zavést jako viskozní tlumení s koeficientem b . Nejprve je ale třeba transformovat rovnici (2.6) do souřadného systému $O\xi\eta$ pomocí transformačních vztahů

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} &= \xi + j\eta, & \bar{z} &= \bar{\zeta}e^{j\omega t}, \\ \dot{\bar{z}} &= \dot{\bar{\zeta}}e^{j\omega t} + j\bar{\zeta}\omega e^{j\omega t}, & \ddot{\bar{z}} &= \ddot{\bar{\zeta}}e^{j\omega t} + 2j\dot{\bar{\zeta}}\omega e^{j\omega t} - \omega^2\bar{\zeta}e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Zavedením členu vyjadřujícího vnitřní tlumení $b\dot{\bar{\zeta}}$ obdržíme pohybovou rovnici v souřadném systému rotujícím společně s hřídelem

$$m\left(\ddot{\bar{\zeta}} + 2j\omega\dot{\bar{\zeta}} - \omega^2\bar{\zeta}\right) + p\left(\dot{\bar{\zeta}} + j\omega\bar{\zeta}\right) + b\dot{\bar{\zeta}} + k\bar{\zeta} = m\varepsilon\omega^2 + mg e^{-j\omega t}. \quad (2.8)$$

Nyní lze výše uvedenou rovnici vyjádřit opět v pevném souřadnicovém systému Oxy

$$\ddot{\bar{z}} + \kappa\dot{\bar{z}} + \delta(\dot{\bar{z}} - j\omega\bar{z}) + \Omega^2\bar{z} = \varepsilon\omega^2 e^{j\omega t} + g, \quad (2.9)$$

kde

$$\kappa = \frac{p}{m}, \quad \delta = \frac{b}{m}, \quad \Omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (2.10)$$

Partikulární řešení soustavy (2.9) je

$$\bar{z}_P = \frac{g(\Omega^2 + j\delta\omega)}{\Omega^4 + \delta^2\omega^2} + \frac{\varepsilon\omega^2(\Omega^2 - j\kappa\omega - \omega^2)}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\kappa^2} e^{j\omega t}. \quad (2.11)$$

První člen partikulárního řešení (2.11) opět vyjadřuje průhyb hřídele vlivem tíhy kotouče, druhý člen ustálené krouživé kmitání hřídele. V tomto případě již nedochází k nekonečně velkým výchylkám jako u netlumeného rotoru. Amplitudy vynuceného krouživého kmitání jsou omezeny pouze vlivem vnějšího tlumení. Tento fakt se stane poměrně zajímavým při vyšetřování vynuceného kmitání složitějších rotorů, kdy vynechání vnitřního útlumu může vést k podstatnému zjednodušení úlohy. Výchylka způsobená tíhou kotouče se od výchylky netlumené soustavy (2.3) odlišuje zastoupením vnitřního tlumení a otáček rotoru. S nárůstem otáček se průhyb vyvozený tíhou kotouče mírně snižuje.

Řešením homogenní rovnice přidružené k (2.9) je

$$\bar{z}_H = C_1 e^{\left[-\frac{1}{2}(\kappa+\delta) + \frac{1}{2}\sqrt{(\kappa+\delta)^2 - 4(\Omega^2 - j\delta\omega)}\right]t} + C_2 e^{\left[-\frac{1}{2}(\kappa+\delta) - \frac{1}{2}\sqrt{(\kappa+\delta)^2 - 4(\Omega^2 - j\delta\omega)}\right]t}, \quad (2.12)$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty. Vlastní frekvence systému je určena dle

$$\Omega_0^2 = \Omega^2 - \frac{1}{4}(\kappa + \delta)^2, \quad (2.13)$$

a pokud uvážíme, že hodnoty vnitřního tlumení jsou malé vzhledem k tuhosti hřídele,

$$\delta\omega \ll \Omega^2, \quad (2.14)$$

lze vztah (2.12) přibližně přepsat na

$$\bar{z}_H = C_1 e^{[j\Omega_0 - \frac{1}{2}(\kappa + \delta - \frac{\delta\omega}{\Omega_0})]t} + C_2 e^{[-j\Omega_0 - \frac{1}{2}(\kappa + \delta + \frac{\delta\omega}{\Omega_0})]t}. \quad (2.15)$$

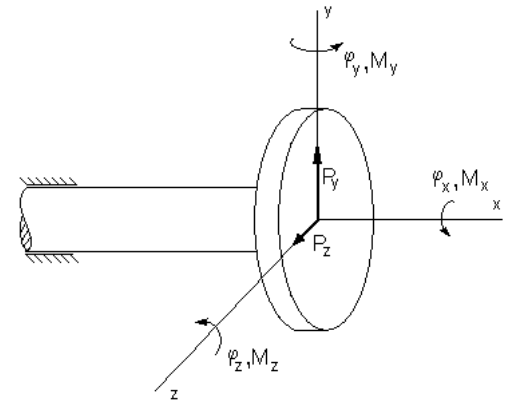
Pokud má být partikulární řešení (2.11) tohoto systému stabilní, je třeba, aby oba exponenty homogeního řešení (2.12) nenabývaly kladných hodnot ve svých reálných částech pro $t \geq 0$. Toto je splněno, jestliže platí podmínka¹

$$\omega \leq \Omega_0 \left(1 + \frac{\kappa}{\delta}\right). \quad (2.16)$$

Vliv tlumení na stabilitu pohybu rotoru je výrazný. Při překročení úhlové rychlosti rotoru dané podmínkou (2.16) se rozkmitá i dokonale vyvážený rotor. Výchytky reálného systému budou díky nelinearitám pochopitelně konečné, ale přesto mohou být dostačující k poškození zařízení kolizí statoru a pohyblivých částí, případně trvalé deformaci hřídele. Tato kritická úhlová rychlost se nalézá v nadrezonanční oblasti a vnitřní tlumení její hodnotu snižuje, zatímco vnější tlumení činí opak.

2.4 Vliv gyroskopických účinků kotouče – [3],[2]

Zatím se pro kotouč umístěný doprostřed mezi ložiska neprojevovaly gyroskopické účinky, neboť kotouč se pohyboval stále v rovině. Pokud není kotouč přímo uprostřed ložisek, nelze tyto účinky zanedbávat. K zohlednění jejich vlivu použijeme centricky uchycený kotouč letmo na hřídeli konstantního kruhového průřezu (viz obr. 4). Hřídel je v ložisku vetknut s možností otáčení kolem osy x . Účinky kotouče na hřídel jsou síly P_y , P_z zahrnující síly odstředivé a momenty M_y , M_z . Předpokládáme stále rovnoměrnou rotaci hřídele kolem osy x úhlovou rychlostí ω .



Obrázek 4: Letmo uložený kotouč

Vypočteme-li si průhyby a natočení průřezu pomocí setrvačných účinků kotouče na hřídel obržíme

$$\begin{aligned} y &= \alpha P_y + \beta M_z, & \varphi_z &= \beta P_y + \gamma M_z, \\ z &= \alpha P_z - \beta M_y, & \varphi_y &= -\beta P_z + \gamma M_y. \end{aligned} \quad (2.17)$$

¹Přibližně pomocí zjednodušení 2.15

V našem případě jsou příčinkové činitele

$$\alpha = \frac{l^3}{3EJ}, \quad \beta = \frac{l^2}{2EJ}, \quad \gamma = \frac{l}{EJ}. \quad (2.18)$$

Zavedením komplexních proměnných

$$\begin{aligned} \bar{u} &= y + jz, & \bar{\varphi} &= \varphi_y + j\varphi_z, \\ \bar{P} &= P_y + jP_z, & \bar{M} &= M_y + jM_z, \end{aligned} \quad (2.19)$$

budou deformace hřídele

$$\bar{u} = \alpha \bar{P} - j\beta \bar{M}, \quad \bar{\varphi} = j\beta \bar{P} + \gamma \bar{M}. \quad (2.20)$$

Účinky gyroskopu na hřídel jsou za předpokladu malých rotací kolem os y a z

$$\bar{P}_D = -m\ddot{u}, \quad \bar{M}_D = -(A\ddot{\varphi} - j\omega C\dot{\varphi}). \quad (2.21)$$

V rovnicích (2.21) je m hmotnost kotouče. A , resp. C , je diametrální, resp. centrální, moment setrvačnosti kotouče. (C – moment setrvačnosti k ose x , A – moment setrvačnosti kolmo k ose x). Z rovnice (2.20) získáme inverzní vztahy

$$\bar{P} = k_{11}\bar{u} + k_{12}\bar{\varphi}, \quad \bar{M} = -k_{12}\bar{u} + k_{22}\bar{\varphi}. \quad (2.22)$$

$$k_{11} = \frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2}, \quad k_{12} = \frac{\beta}{\alpha\gamma - \beta^2}, \quad k_{22} = \frac{\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2}. \quad (2.23)$$

Nyní z dynamické rovnováhy dostaneme dvě komplexní pohybové rovnice

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + k_{11}\bar{u} + k_{12}\bar{\varphi} &= 0, \\ A\ddot{\varphi} - j\omega C\dot{\varphi} - k_{12}\bar{u} + k_{22}\bar{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Rovnicím (2.24) vyhovují řešení

$$\bar{u} = \bar{U} e^{j\Omega t}, \quad \bar{\varphi} = \bar{\phi} e^{j\Omega t}, \quad (2.25)$$

kde Ω představuje úhlovou rychlost rotace průhybové čáry kolem osy x . Dosazením (2.25) do (2.24) získáme rovnice pro výpočet amplitud

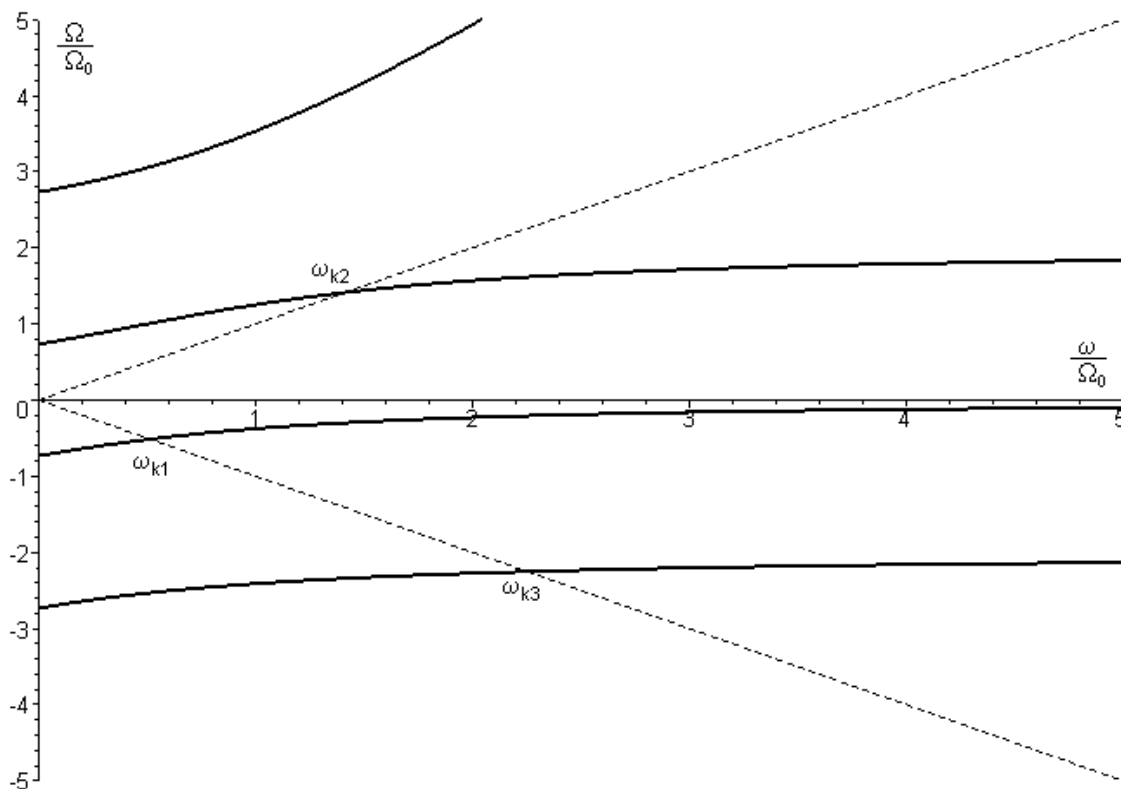
$$\begin{aligned} (k_{11} - m\Omega^2) \bar{U} + k_{12} \bar{\phi} &= 0, \\ -k_{12} \bar{U} + (k_{22} + mC\Omega - A\Omega^2) \bar{\phi} &= 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

což je homogenní lineární soustava dvou rovnic, jejíž matice musí být pro existenci netriviálního řešení singulární. To lze snadno zajistit nulovou hodnotou determinantu matice této soustavy. Tím získáme charakteristickou rovnici pro Ω

$$Am\Omega^4 - mC\omega\Omega^3 - (k_{11}A + k_{22}m)\Omega^2 + k_{11}C\omega\Omega + k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = 0. \quad (2.27)$$

Rovnice (2.27) lze pro tenký kotouč ($A = C/2$) přepsat do tvaru

$$\Omega^4 - 2\omega\Omega^3 - (4\Omega_o^2 + 4\Omega_i^2)\Omega^2 + 8\Omega_o^2\omega\Omega + 4\Omega_o^2\Omega_i^2 = 0, \quad (2.28)$$



Obrázek 5: Vlastní frekvence a kritické otáčky

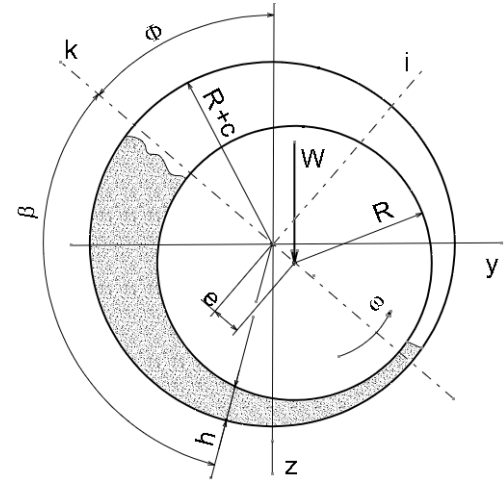
ve které Ω_o je vlastní frekvence ohybových kmitů s bodovou hmotností umístěnou do těžiště kotouče, Ω_i je frekvence kmitů fiktivního systému s tělesem momentu setrvačnosti A a torzní tuhostí k_{22} , ω značí otáčky hřídele.

Na obr. 5 jsou vyznačeny tři kritické úhlové rychlosti hřídele (ω_{k1} , ω_{k2} , ω_{k3}) při kterých se frekvence otáčení hřídele shoduje s vlastní frekvencí systému. ω_{k2} odpovídá souběžné synchronní precesi, kdy se průhybová čára hřídele otáčí souhlasně s frekvencí rotace hřídele. ω_{k1} a ω_{k3} jsou kritické úhlové rychlosti protiběžné precese, které se však vyskytují poměrně zřídka, neboť u běžného rotoru dojde vlivem odstředivých sil nevyvážeností k vynucení souběžné precese.

2.5 Kluzná ložiska – [6],[9],[7]

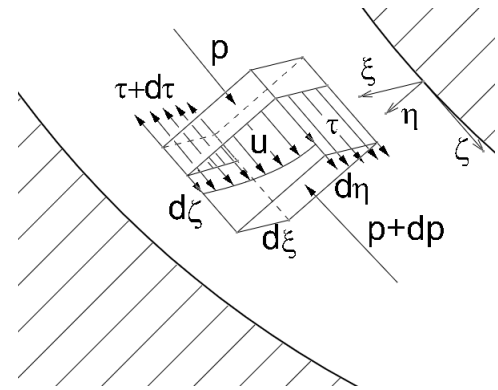
Kluzná ložiska používaná k uložení rotujících částí strojů výrazně ovlivňují chování rotoru. Tenký film, který odděluje čep hřídele od vlastního tělesa ložiska, přenáší reakce základu nejen jako pružina, ale působí i jako tlumič. Vlivem tuhosti a tlumení uložení se výrazně mění kritické otáčky, stejně jako odezva na nevyváženost rotoru. Efekty třecího filmu rovněž způsobují oblasti nestability chodu, se kterými je třeba počítat při návrhu zařízení. Výpočet parametrů ložiska analytickými metodami je možný opět za značných zjednodušujících předpokladů. Nicméně pro pochopení jevů, jež použití hydrodynamických ložisek přináší, jsou analytická řešení velmi užitečná.

Proudění média v ložisku může být jak laminární, tak turbulentní. Pokud je médiem vzduch, je třeba navíc uvažovat jeho stlačitelnost. Dále se zabýváme jen ložisky olejovými, u kterých je možno stlačitelnost zanedbat, pracujících v laminární oblasti proudění olejového filmu. Vlivem gravitace² není rovnovážná poloha čepu hřídele uprostřed ložiska. Toto místo je závislé na otáčkách hřídele, zatížení ložiska, radiální vůli a viskozitě oleje. Uvažujme nejprve stacionární polohu čepu hřídele a rychlosti olejové vrstvy nezávislé na čase. V tomto případě je svislé zatížení ložiska W v rovnováze s reakcí mazací vrstvy působící na hřídel. Situaci kruhového hydrodynamického ložiska znázorňuje obr. 6. R značí poloměr čepu ložiska a c radiální vůli. Tloušťka olejového filmu h je závislá na souřadnici β . Rovnovážná poloha středu hřídele je zde určena souřadnicemi Φ a e . Hřídel rotuje stálou úhlovou rychlostí ω . K již uvedeným předpokladům dále uvažujme dostatečnou délku ložiska, takovou, abychom mohli pokládat průběh tlaku nezávislý na axiální souřadnici x . Tímto se problém zjednoduší na rovinný.



Obrázek 6: Rovina kruhového hydrodynamického ložiska

Nyní je situace mazacího filmu podobná tzv. Couetteovu proudění, kde je ovšem šířka vrstvy (h) konstantní. Na obr. 7 je zobrazen objemový element této vrstvy, společně s normálovými a tečnými složkami povrchových sil, působících ve směru souřadnice ζ . Lokální vztažný systém ξ, η, ζ určuje smysl a směr axiální, radiální a tečné souřadnice. Díky předpokladu stacionárního proudění jsou složky objemových sil ve směru ζ , způsobené zrychlením hmoty elementu, nulové. Gravitaci působení rovněž zanebdáváme, tudíž jsou objemové síly v tomto směru (ζ) všechny nulové. Problém se tak zjednoduší na řešení statické rovnováhy. Rychlost proudění u ve směru ζ je funkcí souřadnic η a ζ , neboť $h \neq konst.$ Pokud je proudění laminární, je tečné napětí působící v rovinách $\eta - \zeta$ nulové. Toto platí, pokud je radiální vůle značně menší proti poloměru hřídele, $c \ll R$. Z toho vyplyne skutečnost, že tlak velmi dlouhého ložiska bude pouze funkcí souřadnice ζ , jak uvidíme dále.



Obrázek 7: Prostorový element mazacího filmu

²tvořící statické zatížení ložiska tíhou rotoru, nikoliv působící na element objemu olejového filmu

Rovnice rovnováhy sil ve směru ζ je

$$dp \, d\xi \, d\eta = d\tau \, d\xi \, d\zeta, \quad \frac{\partial p}{\partial \zeta} d\zeta \, d\xi \, d\eta = \frac{\partial \tau}{\partial \eta} d\eta \, d\xi \, d\zeta. \quad (2.29)$$

Tečné napětí je dáno Newtonovým zákonem pomocí dynamické viskozity μ

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad (2.30)$$

jehož dosazením do (2.29) a krácením získáme rovnici

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \quad (2.31)$$

Stejným postupem za platnosti předchozích zjednodušení dostaneme rovnice rovnováhy pro zbývající dva směry

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0. \quad (2.32)$$

Z rovnice (2.31) integrací vzejde

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \eta + C_1, \quad u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \eta^2 + C_1 \eta + C_2. \quad (2.33)$$

Z okrajových podmínek pro rychlost

$$u(\eta = 0) = \omega R, \quad u(\eta = h(\zeta)) = 0, \quad (2.34)$$

snadno určíme integrační konstanty

$$C_2 = \omega R, \quad C_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial \zeta} h - \omega \frac{R}{h}. \quad (2.35)$$

Po dosazení je rychlost

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial \zeta} (h\eta - \eta^2) + \omega R \left(1 - \frac{\eta}{h}\right). \quad (2.36)$$

Určíme objemový průtok jednotkovou šířkou ložiska

$$q(\zeta) = \int_0^h u(\eta, \zeta) d\eta = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{d\zeta} + \omega R \frac{h}{2}, \quad (2.37)$$

a pomocí něj vyjádříme derivaci tlaku

$$\frac{dp}{d\zeta} = \frac{6R\omega\mu}{h^2} - \frac{12\mu q}{h^3}. \quad (2.38)$$

Integrací této rovnice při $R d\beta = d\zeta$ získáme vztah

$$p = 6R\omega\mu \lambda_1(\beta) - 12\mu q \lambda_2(\beta) + p_0, \quad (2.39)$$

ve kterém jsou

$$\lambda_1(\beta) = \int_0^{R\beta} \frac{d\zeta}{h^2}, \quad \lambda_2(\beta) = \int_0^{R\beta} \frac{d\zeta}{h^3}. \quad (2.40)$$

V případě, že při $p = p_0$ je $\beta = 2\pi$, vyjádříme objemový průtok pomocí charakteristické tloušťky H

$$q = \frac{1}{2} \omega R H, \quad H = \frac{\lambda_1(2\pi)}{\lambda_2(2\pi)}. \quad (2.41)$$

Pro kruhové ložisko platí

$$h = c + e \cos\beta, \quad H = \frac{2c(1 - \varepsilon^2)}{2 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = \frac{e}{c}. \quad (2.42)$$

Pomocí vztahů (2.37) získáme

$$\frac{dp}{d\beta} = 6\mu\omega R^2 \left(\frac{1}{h^2} - \frac{H}{h^3} \right). \quad (2.43)$$

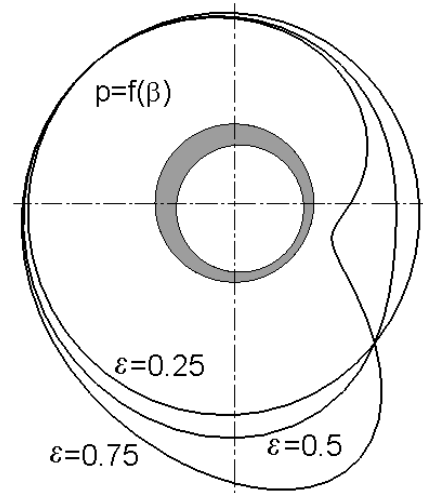
Integrováním obdržíme závislost tlaku na úhlu β

$$p(\beta) - p(0) = 6\mu\omega \left(\frac{R^2}{c^2} \right) \frac{\varepsilon \sin\beta (2 + \varepsilon \cos\beta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos\beta)^2}, \quad (2.44)$$

jejíž opětovnou integrací získáme síly působící na hřídel

$$F_i = L \int_{\beta_1}^{\beta_2} (p(\beta) - p(0)) R \sin\beta \, d\beta, \quad F_k = L \int_{\beta_1}^{\beta_2} (p(0) - p(\beta)) R \cos\beta \, d\beta. \quad (2.45)$$

Integrujeme přes obor $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$. Pro určení oblasti filmu, který nese zatížení, existuje několik hypotéz. Nejjednodušší případ je ten, kdy integrujeme přes interval $\beta_1 = 0, \beta_2 = 2\pi$. Vzhledem k silným zjednodušujícím předpokladům, zejména zanedbání proudění oleje v axiálním směru, vyjde $F_k = 0$. Pokud bychom olejový film přerušili v místě minimální tloušťky, tj. $\beta_2 = \pi$, či ještě o něco dále, kde se nalézá minimum tlaku, můžeme z velikosti obou složek určit polohu hřídele v ložisku e a Φ tak, aby síla produkovaná filmem F byla v rovnováze se svislou silou zatěžující ložisko W . Na obr. 8 jsou zobrazeny tři průběhy tlaků (2.44) pro různé hodnoty vyosení čepu hřídele za konstantních otáček. Pro větší excentricity se hodnoty maximálního a minimálního tlaku od sebe vzdalují, přičemž v místech s příliš nízkými tlaky může vzniknout kavitace u více zatížených ložisek.



Obrázek 8: Vliv excentricity na tlak v dlouhém ložisku

Tlak určený podle (2.44) je řešením Reynoldsovy rovnice

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{d\zeta} \right) = 6\omega R \frac{dh}{d\zeta}. \quad (2.46)$$

Předchozí rovnici jsme získali užitím rovnice kontinuity jednorozměrného proudění vyjádřenou vztahem pro konstantní průtok

$$\frac{dq}{d\zeta} = 0, \quad (2.47)$$

na rovnici (2.37).

Pro obecnou délku ložiska je třeba uvažovat funkci tlaku závislou v obou směrech ξ a ζ , a též zahrnout ostatní složky rychlosti elementu kapaliny do rovnic rovnováhy, což ovšem činí Reynoldsovu rovnici

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{d\zeta} \right) + \frac{d}{d\xi} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{d\xi} \right) = 6\omega R \frac{dh}{d\zeta} + 6O \frac{dh}{d\xi} + 6V, \quad (2.48)$$

získanou ze složek rovnováhy pomocí rovnice kontinuity $div(\mathbf{v}) = 0$,

$$\frac{\partial o}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.49)$$

analyticky neřešitelnou. V rovnici (2.48) se vyskytuje člen O , který má význam axiální rychlosti čepu vůči tělesu ložiska a člen V , jenž zastupuje radiální složku rychlosti.

Přístupem obdobným analýze velmi dlouhého ložiska lze řešit ložisko velmi krátké, u kterého lze zanedbat závislost tlaku podél souřadnice β proti derivaci tlaku v axiálním směru, která ovšem je na souřadnici β závislá. Vzhledem k předpokladu malé radiální vůle vůči poloměru hřídele zanedbáme též radiální složku rychlosti. Pokud se hřídel uvnitř ložiska axiálně nepohybuje a radiální vůle je po délce ložiska konstantní, bude zjednodušená Reynoldsova rovnice pro krátké ložisko

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{d\xi} \right) = 6\omega R \frac{dh}{d\xi}. \quad (2.50)$$

Pravá strana diferenciální rovnice (2.50) nezávisí na axiální souřadnici, proto lze uvedenou rovnici snadno dvakrát integrovat.

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{-6\mu\omega\xi e \sin\beta}{(c+e\cos\beta)^3} + C_1, \quad p = \frac{-3\mu\omega\xi^2 e \sin\beta}{(c+e\cos\beta)^3} + C_1\xi + C_2. \quad (2.51)$$

Osu souřadnice ξ umístíme počátkem do středu délky ložiska L . Pomocí podmínek pro funkci tlaku na okraji ložiska a její derivaci uprostřed ložiska

$$\frac{dp}{d\xi}(\xi = 0) = 0, \quad p(\xi = L/2) = p_0, \quad (2.52)$$

určíme integrační konstanty

$$C_1 = 0, \quad C_2 = p_0 + \frac{3 \mu \omega e \sin \beta}{(c + e \cos \beta)^3} \frac{L^2}{4}. \quad (2.53)$$

Funkce tlaku po dosazení konstant je

$$p = \frac{3 \mu \omega \varepsilon \sin \beta}{c^2 (1 + \varepsilon \cos \beta)^3} \left(\frac{L^2}{4} - \xi^2 \right) + p_0, \quad (2.54)$$

jejíž integrací stanovíme sílu působící na hřídel, složenou opět ze dvou složek F_i a F_k

$$F_i = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p(\beta, \xi) R \sin \beta \, d\xi \, d\beta, \quad F_k = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p(\beta, \xi) R \cos \beta \, d\xi \, d\beta. \quad (2.55)$$

Pokud zvolíme integrační obor $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \pi$, získáme vektorovým součtem obou složek

$$F_i = \frac{3}{2} \frac{\mu \omega R \varepsilon L^3}{c^2} \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2}, \quad F_k = \frac{3}{8} \frac{\mu \omega R \varepsilon L^3}{c^2} \frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{(1 - \varepsilon^2)^2} \quad (2.56)$$

celkovou reakci ložiska působící na hřídel vyjádřeno vztahem

$$F = \frac{3 \mu \omega R L^3}{8 c^2} \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2} \sqrt{16 \varepsilon^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon^2)}. \quad (2.57)$$

Výsledná síla musí působit pouze ve svislém směru, z čehož vyplývá vztah pro úhel Φ

$$\Phi = \operatorname{arctg} \frac{F_i}{F_k} = \operatorname{arctg} \frac{4 \varepsilon}{\pi \sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad (2.58)$$

nás zajímá pouze hodnota Φ v rozmezí 0 až $\pi/2$.

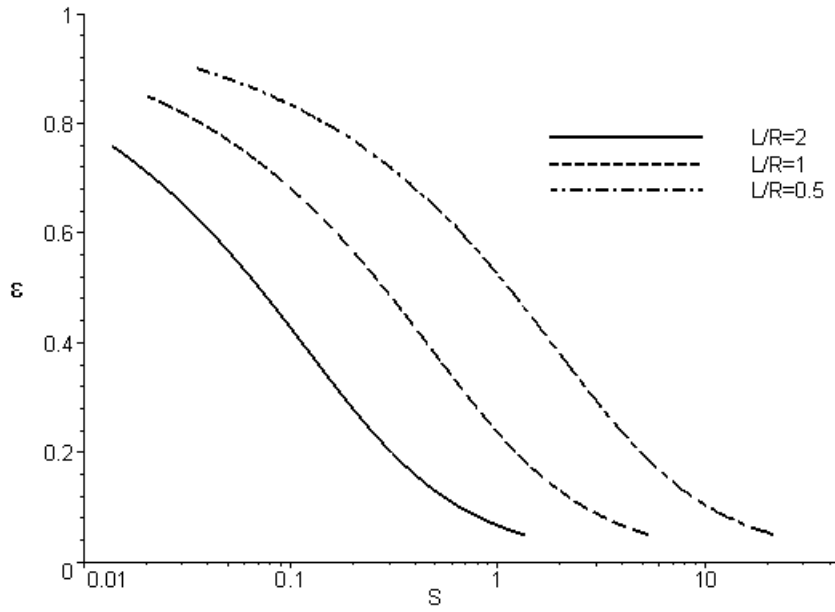
Síla F je reakcí na zatěžující sílu W . Tyto síly jsou v rovnováze, tudíž se jejich velikosti rovnají. Použijeme-li pro popis ložiska bezrozměrné Sommerfeldovo číslo

$$S = \frac{\mu \omega R L}{\pi W} \left(\frac{R}{c} \right)^2, \quad (2.59)$$

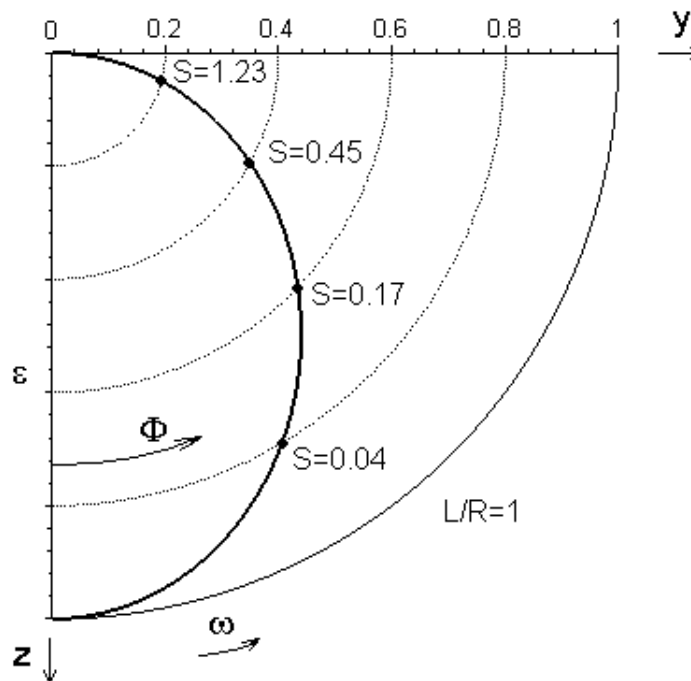
lze snadno vyjádřit jeho závislost na excentricitě hřídele v ložisku

$$S = \frac{8 R^2}{3 \pi L^2} \frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{\varepsilon \sqrt{16 \varepsilon^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon^2)}}. \quad (2.60)$$

Na obr. 9 je vykreslena tato závislost pro tři různě dlouhá ložiska. Logaritmičká osa grafu, na kterou vynášíme hodnotu Sommerfeldova čísla, v sobě mimo jiné obsahuje informaci o zatížení. Pro stejnou hodnotu excentricity tak můžeme srovnat jednotlivá ložiska podle dosažených Sommerfeldových čísel. Kromě zatížení ložiska ve jmenovateli se ovšem v Sommerfeldově čísle vyskytuje jak délka ložiska, tak i průměr hřídele.



Obrázek 9: Sommerfeldovo číslo – excentricita



Obrázek 10: Stacionární poloha středu hřídele

Obr. 10 ukazuje stacionární polohu středu hřídele v ložisku v polárních souřadnicích. Excentricita ε a úhel Φ jsou určeny pouze hodnotou Sommerfeldova čísla. Pro čtyři polohy je jeho hodnota zanesena do grafu.

Pokud známe stacionární polohu hřídele v ložisku, můžeme pro malé odchylky určit totální diferenciál vratné síly

$$dF_z = \frac{\partial F_z}{\partial z} dz + \frac{\partial F_z}{\partial y} dy, \quad (2.61)$$

kde za tuhosti označíme

$$k_{zz} = \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad k_{zy} = \frac{\partial F_z}{\partial y}. \quad (2.62)$$

Protože jsme zpočátku uvažovali pouze zatížení svislou silou, je třeba problém rozšířit a zahrnout i složku vodorovnou. Navíc po přidání dalších sil, způsobených rychlostí pohybu středu hřídele kolem rovnovážné polohy, lze určit i koeficienty tlumení. V literatuře [7], [9] je uveden algoritmus použitelný k výpočtu všech složek tuhostí a tlumících koeficientů. Nejprve je třeba určit excentricitu ε a úhel Φ , např. pomocí rovnic (2.60), (2.58), a poté ze získaných hodnot vypočítat bezrozměrné parametry tuhostí

$$k_{kk} = \frac{8(1 + \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)\sqrt{\pi^2(1 - \varepsilon^2) + 16\varepsilon^2}}, \quad k_{ki} = \frac{\pi\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon\sqrt{\pi^2(1 - \varepsilon^2) + 16\varepsilon^2}}, \quad (2.63)$$

$$k_{ik} = \frac{\pi(1 + 2\varepsilon^2)}{\varepsilon\sqrt{(1 - \varepsilon^2)[\pi^2(1 - \varepsilon^2) + 16\varepsilon^2]}}, \quad k_{ii} = \frac{4}{\sqrt{\pi^2(1 - \varepsilon^2) + 16\varepsilon^2}} \quad (2.64)$$

a tlumení

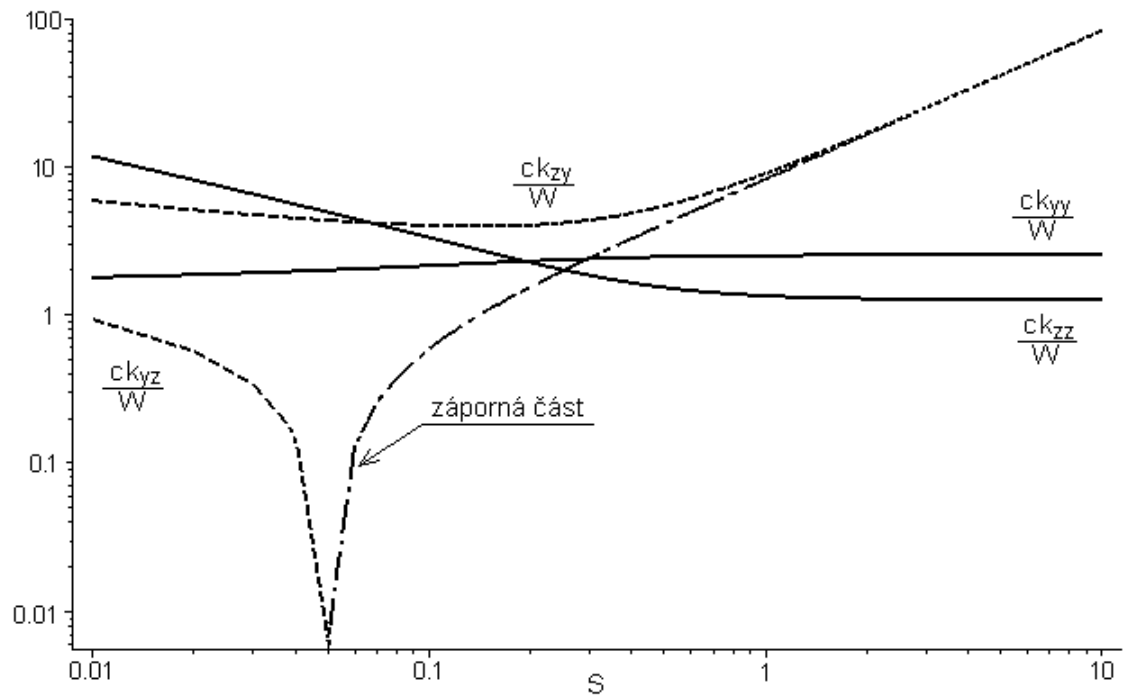
$$b_{ki} = b_{ik} = 2k_{ii}, \quad b_{ii} = 2k_{ki}, \quad b_{kk} = 2k_{ik}. \quad (2.65)$$

Trasformací do souřadnic y, z získáme hledané tuhosti

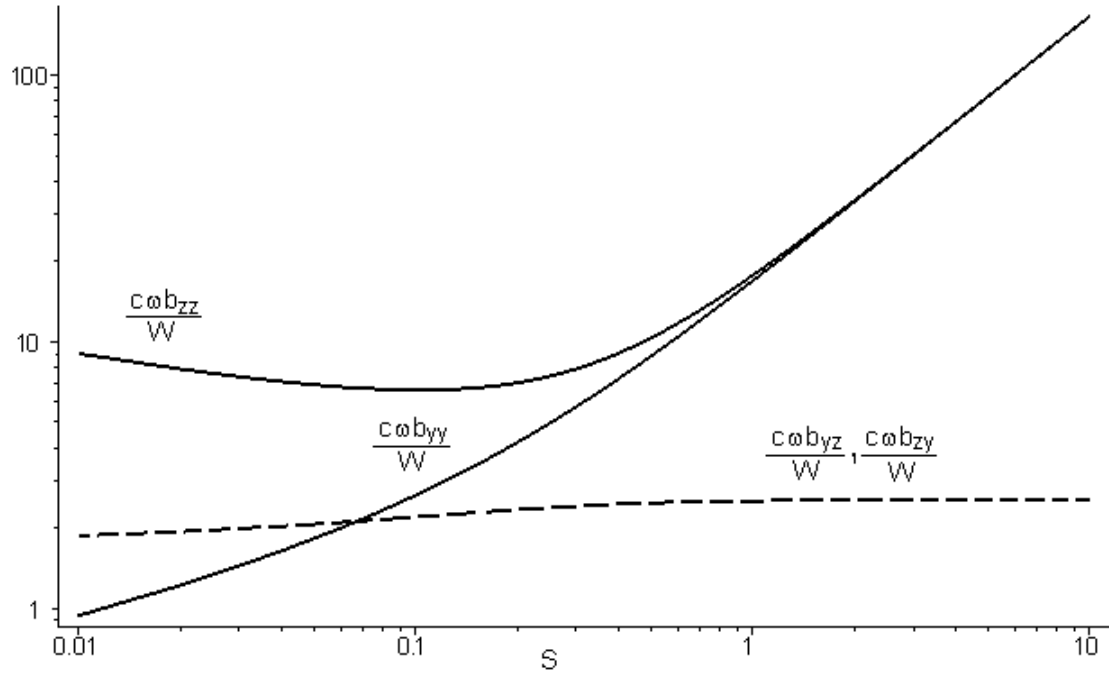
$$\begin{pmatrix} k_{zz} \\ k_{zy} \\ k_{yz} \\ k_{yy} \end{pmatrix} = \frac{W}{c} \begin{pmatrix} k_{kk} & k_{ii} & (k_{ik} - k_{ki}) \\ k_{ki} & k_{ik} & (k_{kk} - k_{ii}) \\ k_{ik} & k_{ki} & (k_{ii} - k_{kk}) \\ k_{ii} & k_{kk} & (k_{ki} - k_{ik}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 \Phi \\ \sin^2 \Phi \\ \cos \Phi \sin \Phi \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

a koeficienty tlumení kruhového ložiska

$$\begin{pmatrix} b_{zz} \\ b_{zy} \\ b_{yz} \\ b_{yy} \end{pmatrix} = \frac{W}{c\omega} \begin{pmatrix} b_{kk} & b_{ii} & (b_{ki} + b_{ik}) \\ -b_{ki} & b_{ik} & (b_{kk} - b_{ii}) \\ -b_{ik} & b_{ki} & (b_{kk} - b_{ii}) \\ b_{ii} & b_{kk} & -(b_{ki} + b_{ik}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 \Phi \\ \sin^2 \Phi \\ \cos \Phi \sin \Phi \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$



Obrázek 11: Bezrozměrné tuhosti – Sommerfeldovo číslo



Obrázek 12: Bezrozměrné tlumení – Sommerfeldovo číslo

Na obr. 11 a 12 jsou vyobrazeny závislosti koeficientů tlumení a tuhostí na Sommerfeldově čísle v bezrozměrných tvarech. Použití linearizací takto získaných koeficientů je omezeno pro malé výchylky kolem rovnovážné polohy středu hřídele v ložisku. Průběhy závislostí souhlasí s odpovídajícími vyobrazeními v knize [6]. Vyšetření tuhostních a tlumicích parametrů ložiska je třeba řešit, pro konkrétní Sommerfeldova čísla a tím i pro konkrétní otáčky hřídele, numericky. Pro analytická řešení kmitání rotoru je proto nutné jejich průběhy vhodně aproximovat.

Vzhledem k nesymetrii tuhostní matice kluzného ložiska může být při určitých podmínkách energie odebíraná z pohonu rotoru spotřebována na zvyšování energie kmitání hřídele. Tím mohou být vyvolány samobuzené kmity rotoru. Soustavu destabilizují zejména křížové členy tuhosti ložiska (2.66) k_{zy} a k_{yz} , opačný efekt má vyšší tlumení ložiska. Mez stability se též rychle zvyšuje se zatížením ložiska a od jisté hodnoty zatížení je pohyb hřídelového čepu stabilní trvale [10].

Pro rotor v málo zatíženém jednoduchém kruhovém ložisku se objevují kritické otáčky samobuzeného kmitání s hodnotou přibližně dvojnásobnou než jsou první kritické otáčky krouživého kmitání [1],[6],[9].

3 Modelování rotoru turbodmychadla

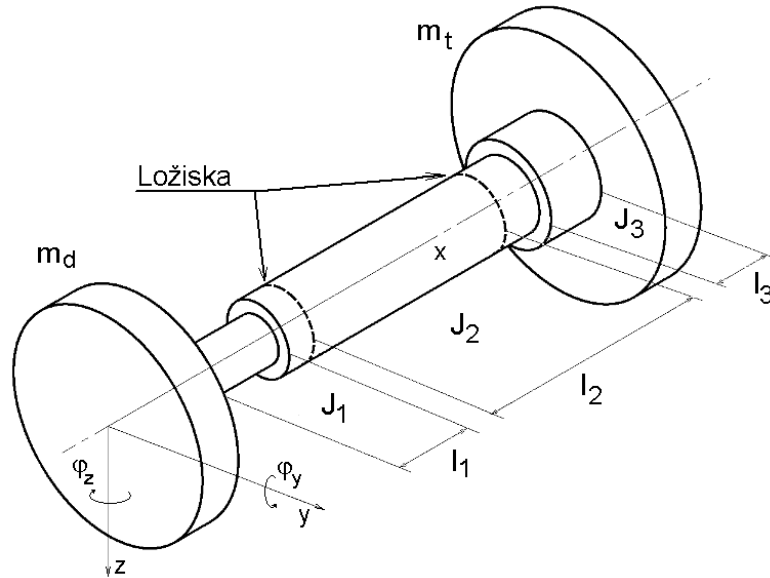
K vytvoření modelu rotoru turbodmychadla lze přistoupit několika způsoby, které se liší jak svou složitostí, tak i věrností ve smyslu přiblížení se svým chováním k modelovanému originálu. Jako obvykle složitějším modelem obsáhneme větší spektrum jevů či přesnějších hodnot. Ovšem za cenu větší pracnosti a větších nároků na výpočetní výkon. Dominantním problémem je zejména variabilita parametrů vzhledem k rozsahu provozních otáček.

3.1 Diskrétní model s tuhými ložisky

Zřejmě nejjednodušší model rotoru s n kotouči lze sestavit přímou analogií k postupu v kapitole 2.3. Tento model nerespektuje gyroskopické účinky rotujících kotoučů. Proto je použitelný pouze pokud jsou kotouče uvnitř ložisek, a to přibližně uprostřed. Jeho velkou výhodou je snadné začlenění materiálového útlumu hřídele do soustavy rovnic při vyjádření soustavy v pevných souřadnicích. Soustava má tvar obdobný jako (2.9), s rozšířením do vyšší dimenze stavového vektoru výchylek. Kotouče se působením přes hřídel vzájemně ovlivňují, čímž z konstant vyvstanou obecně nesymetrické matice nad reálnými čísly řádu $2n$. U tohoto modelu je možno sledovat reálné části vlastních čísel, které vypovídají o stabilitě soustavy, při různých otáčkách. Imaginární části vlastních čísel jsou na otáčkách nezávislé. Soustava rovnic v maticovém zápisu má tvar

$$\mathbf{M}_E \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_E \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_E \mathbf{q} = \mathbf{M}_E \mathbf{g} + \mathbf{M}_E \omega^2 \boldsymbol{\varepsilon} e^{j\omega t}, \quad (3.1)$$

ve které je $\mathbf{q} = (z_d, z_t, y_d, y_t)^T$ vektor výchylek, $\mathbf{g} = (g, g, 0, 0)^T$ představuje vektor tíhového zrychlení působící na hmotu kotoučů ve směru osy z . Složky vektoru $\boldsymbol{\varepsilon}$ jsou tvořeny



Obrázek 13: Schematické znázornění rotoru

průměty výstředností kotoučů do jednotlivých os. Matice hmotnosti \mathbf{M}_E , tuhosti \mathbf{K}_E a tlumení \mathbf{B}_E jsou tvořeny následovně

$$\mathbf{M}_E = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_E = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \omega \mathbf{B} \\ -\omega \mathbf{B} & \mathbf{K} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_E = \begin{pmatrix} \mathbf{B} + \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} + \mathbf{P} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Prvky výše vypsanych matic obsahují matice, které popisují uvedenou soustavu v rovině. \mathbf{M} je matice hmotností kotoučů, \mathbf{K} je tvořena tuhostmi hřídele, \mathbf{B} je matice interního tlumení a \mathbf{P} představuje tlumení externí. Jediné nedíagonální prvky se nalézají v matici \mathbf{K}_E . Tyto frekvenčně závislé členy způsobují vazbu mezi kmitáním v rovině xy a xz pomocí vnitřního tlumení.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{dd} & k_{dt} \\ k_{td} & k_{tt} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \alpha \mathbf{K}, \quad (3.3)$$

kde m_d resp. m_t je hmotnost kola dmychadlového resp. kola plynové turbíny, p koeficient externího tlumení a α koeficient proporcionality vnitřního tlumení \mathbf{B} vzhledem k tuhosti hřídele \mathbf{K} . Prvky matice ohybových tuhosti hřídele jsou

$$k_{dd} = 12 \frac{(J_3 l_2 + J_2 l_3) E J_2 J_1}{l_1^2 (4 J_2 l_1 J_3 l_2 + 4 J_2^2 l_1 l_3 + 3 l_2^2 J_1 J_3 + 4 J_1 l_2 J_2 l_3)}, \quad (3.4)$$

$$k_{tt} = 12 \frac{(J_2 l_1 + J_1 l_2) E J_2 J_3}{l_3^2 (4 J_2 l_1 J_3 l_2 + 4 J_2^2 l_1 l_3 + 3 l_2^2 J_1 J_3 + 4 J_1 l_2 J_2 l_3)}, \quad (3.5)$$

$$k_{dt} = k_{td} = -6 \frac{l_2 E J_1 J_2 J_3}{l_1 l_3 (4 J_2 l_1 J_3 l_2 + 4 J_2^2 l_1 l_3 + 3 l_2^2 J_1 J_3 + 4 J_1 l_2 J_2 l_3)}. \quad (3.6)$$

Pro vyšetření vlastních čísel je vhodné homogenní část soustavy (3.1) rozšířit pomocí identity na systém dvojnásobné dimenze.

$$\tilde{\mathbf{M}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} = 0, \quad (3.7)$$

kde

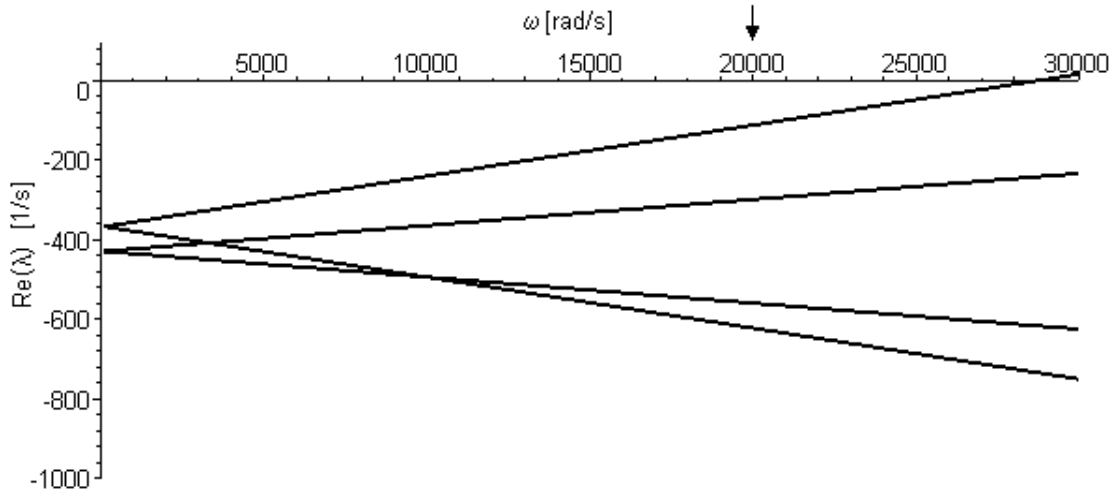
$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_E \\ \mathbf{M}_E & \mathbf{B}_E \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{M}_E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_E \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Vlastní čísla λ_i jsou kořeny charakteristické rovnice dané frekvenčním determinanem

$$|\lambda \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{K}}| = 0. \quad (3.9)$$

Řešením této rovnice jsou dvě shodné čtveřice komplexních vlastních čísel. Imaginární části čísel jsou komplexně sdružené. Dvě různé absolutní hodnoty imaginárních částí udávají vlastní frekvence nezávislé na otáčkách hřídele ω a hodnoty čtyř reálných částí zajišťují asymptotickou stabilitu soustavy, pokud jsou všechny záporné.

Vlastní úhlové frekvence jsou $\Omega_1 = 5472 \text{ rad s}^{-1}$ a $\Omega_2 = 11153 \text{ rad s}^{-1}$. Těmto frekvencím přísluší kritické otáčky $n_{kr1} = 52250 \text{ min}^{-1}$ a $n_{kr2} = 106500 \text{ min}^{-1}$.



Obrázek 14: Reálné části vlastních čísel

Na obr. 14 je vyobrazen průběh reálných částí vlastních čísel, pro vnitřní tlumení svou hodnotou odpovídající poměrnému útlumu 0.005 a destinasobnému tlumení vnějšímu. Zde jsou stejně jako v kapitole 2.3 kritické otáčky, při kterých přejde alespoň jedna z reálných částí vlastních čísel do kladných hodnot, dány poměrem vnitřního a vnějšího tlumení. Šipkou jsou označeny maximální pracovní otáčky $n_{max} = 185000 \text{ min}^{-1}$.

Pro rotor s kotouči upevněnými na převislých koncích hřídele je nutno gyroskopické účinky zahrnout do pohybových rovnic. Tím kromě výchylek přibudou další nezávislé proměnné. Budou jimi úhly sklonu tečny k průhybové čáře hřídele v místě upevnění kotoučů φ_y a φ_z . Tyto úhly zároveň značí natočení kotouče kolem příslušné osy v kladném směru. Zavedením dalších proměnných se zvětší soustava na osm rovnic druhého řádu. Formální maticový zápis soustavy (3.1) se zohledněním gyroskopických účinků zůstane nezměněn. Změní se ale vektor stavových proměnných na

$$\mathbf{q} = (y_d, y_t, \varphi_{zd}, \varphi_{zt}, z_d, z_t, \varphi_{yd}, \varphi_{yt})^T. \quad (3.10)$$

Kromě dimenze se rovněž změní význam matic \mathbf{M}_E , \mathbf{K}_E a \mathbf{B}_E

$$\mathbf{M}_E = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_E = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_E = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & -\omega \mathbf{G} \\ \omega \mathbf{G} & \mathbf{P} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Matice \mathbf{G} zahrnuje gyroskopické účinky kotoučů na hřídel. Matice tuhosti \mathbf{K}_E sestává ze dvou symetrických matic \mathbf{K}_1 a \mathbf{K}_2 , jež nyní již nejsou shodné, ale liší se znaménky ve svých mimodiagonálních blocích.

Interní tlumení je z tohoto modelu vynecháno, protože bez předjímání vynucené synchronní precese je odvození pohybových rovnic s ohledem na destabilizující efekt vnitřního tlumení složité. Pouhé přenesení proporcionálního tlumení násobené frekvencí otáčení hřídele do matice tuhosti \mathbf{K}_E by nebylo v tomto případě – narozdíl od případu (3.1) – dostatečně podloženo. Tím nebude u modelu možno sledovat vývoj reálných částí vlastních čísel. Vynechání interního tlumení není příliš na závadu, neboť jak se dříve ukázalo, nemá vnitřní tlumení vliv na průběh vlastních frekvencí. S předpokladem souběžné synchronní precese nebude mít vliv ani na amplitudy vynuceného kmitání.

Matice \mathbf{M} a \mathbf{G} jsou

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_t \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

kde se nově objevují momenty setrvačnosti kotoučů C_d , C_t k ose a A_d , A_t kolmo k ose symetrie.

Matice \mathbf{P} a \mathbf{K}_1 jsou

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} k_{wd,wd} & & & \\ k_{wt,wd} & k_{wt,wt} & sym. & \\ k_{\varphi d,wd} & k_{\varphi d,wt} & k_{\varphi d,\varphi d} & \\ k_{\varphi t,wd} & k_{\varphi t,wt} & k_{\varphi t,\varphi d} & k_{\varphi t,\varphi t} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

kde koeficient tlumení p_φ působí momentem proti zvětšující se výchylce kotouče, p_w je již použitý koeficient tlumení p . V matici tuhosti \mathbf{K}_1 k třem již známým tuhostem

přibylo nových sedm členů. Určeny byly stejně jako předešlé pomocí inverze matice obsahující příčinkové činitele, které jsem získal integrací diferenciální rovnice průhybové čáry hřídele.

Matice \mathbf{K}_2 vyjde obdobně

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} k_{wd,wd} & & & & & & \\ k_{wt,wd} & k_{wt,wt} & sym. & & & & \\ -k_{\varphi d,wd} & -k_{\varphi d,wt} & k_{\varphi d,\varphi d} & & & & \\ -k_{\varphi t,wd} & -k_{\varphi t,wt} & k_{\varphi t,\varphi d} & k_{\varphi t,\varphi t} & & & \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Provedením stejného rozšíření jako v (3.8) a po vyřešení (3.9) lze z osmi různých hodnot imaginárních částí vlastních čísel opět zjistit vlastní frekvence soustavy. Tentokrát jsou díky gyroskopickým účinkům vlastní frekvence závislé na otáčkách rotoru.

Na obr. 15 je zobrazena změna vlastních frekvencí s otáčkami rotoru. Obr. 16 ukazuje kritické otáčky rotoru pro synchronní souběžnou precesi. Kritické úhlové frekvence jsem určil $\Omega_1 = 6100 \text{ rad s}^{-1}$ a $\Omega_2 = 12200 \text{ rad s}^{-1}$. Těmto frekvencím přísluší kritické otáčky $n_{kr1} = 58250 \text{ min}^{-1}$ a $n_{kr2} = 116500 \text{ min}^{-1}$.

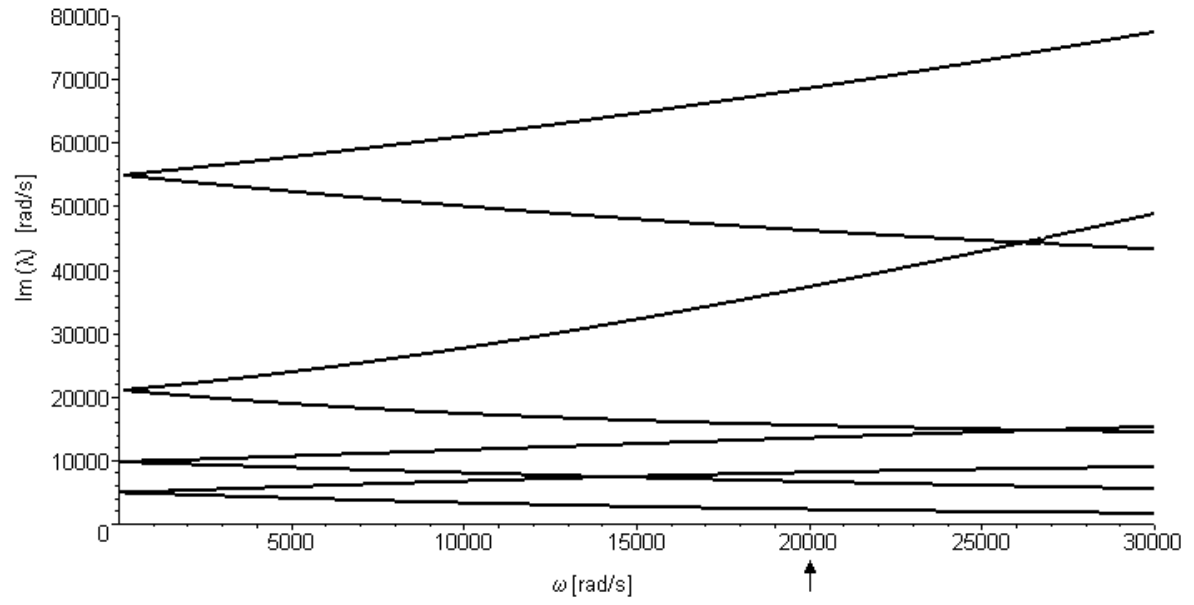
Pro získání amplitudových charakteristik vynuceného kmitání je nutno uvažovat i pravou stranu rovnice (3.1). Vektor ε zastupuje buzení nevyváženostmi kotoučů

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_d \\ e_t e^{j\psi} \\ 0 \\ 0 \\ -j e_d \\ -j e_t e^{j\psi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

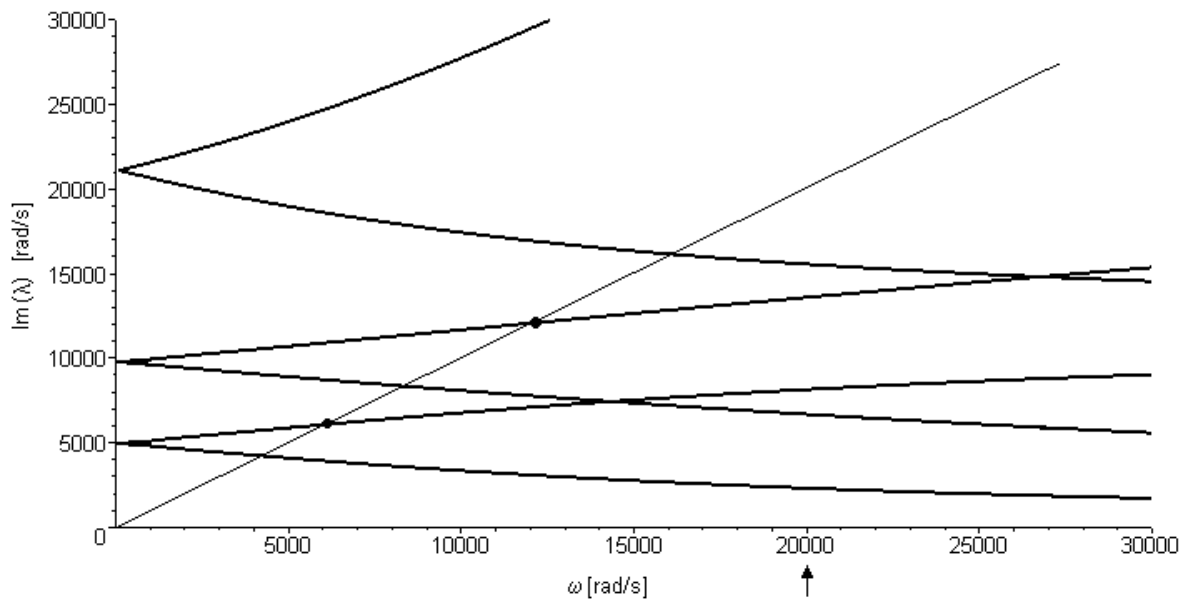
kde e_d resp. e_t jsou velikosti ramen nevyvážeností kotoučů dmychadla resp. turbíny, vypočtené tak, aby nevyváženost kotoučů byla 0.15 g mm . Vzájemná poloha jednotlivých těžišť kotoučů je dána úhlem ψ . Tento úhel svírají ramena nevyvážeností v rovině yz . Buzení tíhou kotoučů je zde pro minimální vliv zanedbán. Pro dané poměrné tlumení ζ lze spočítat vektor amplitudových charakteristik \mathbf{Q} pomocí

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{K}_E - \omega^2 \mathbf{M}_E + j\omega \mathbf{B}_E)^{-1} \omega^2 \mathbf{M}_E \varepsilon. \quad (3.16)$$

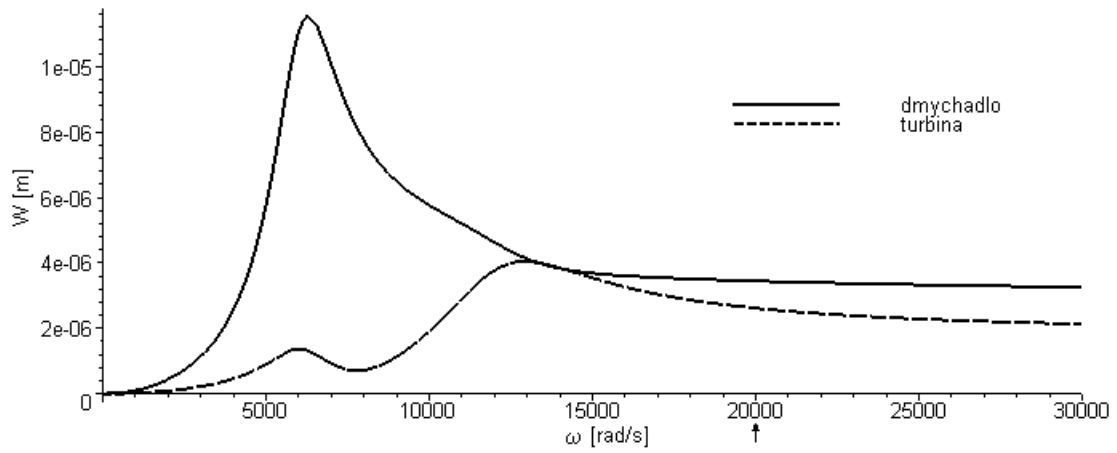
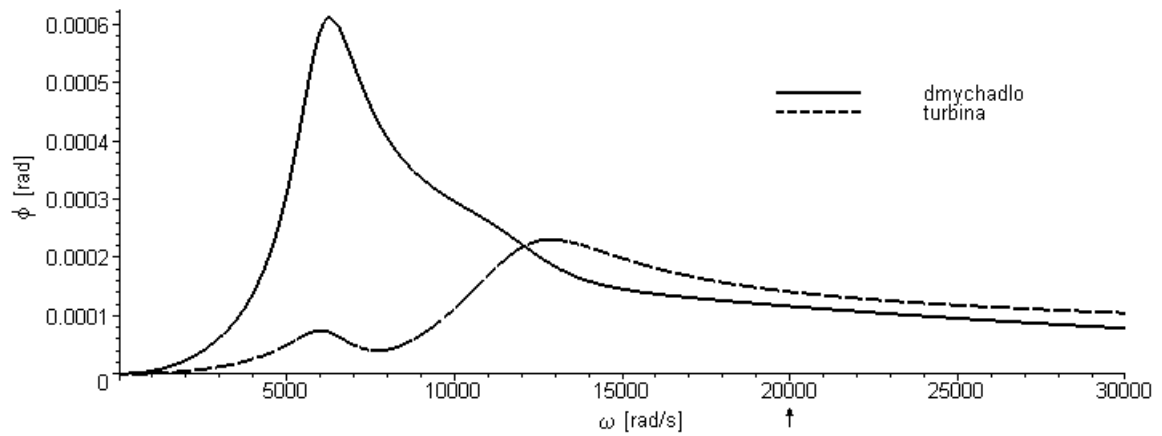
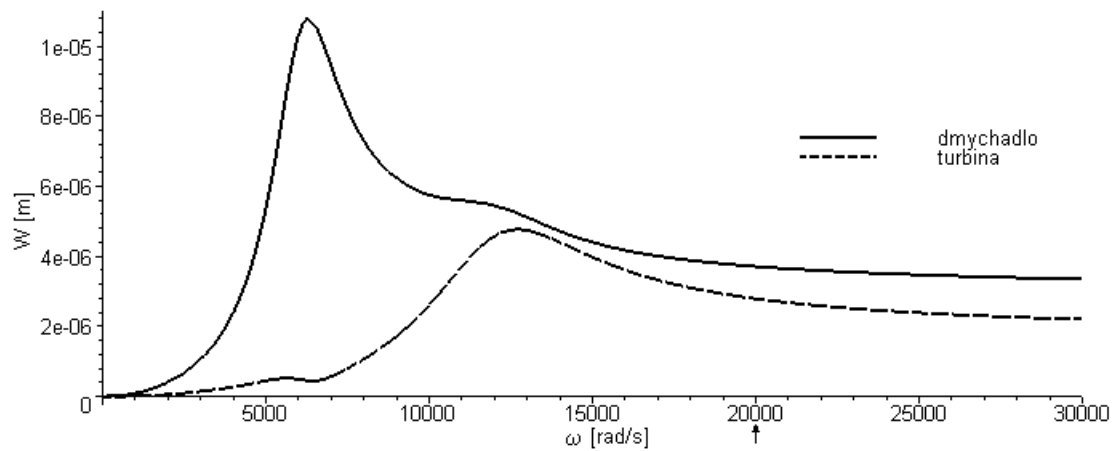
Na obr. 17 až 22 jsou vykresleny amplitudové charakteristiky průhybů a natočení kotoučů dmychadla a turbíny. Zvoleno je zde poměrné tlumení $\zeta = 0.05$ a vzájemné polohy těžišť kotoučů $\psi = 0^\circ, 90^\circ$ a 180° .

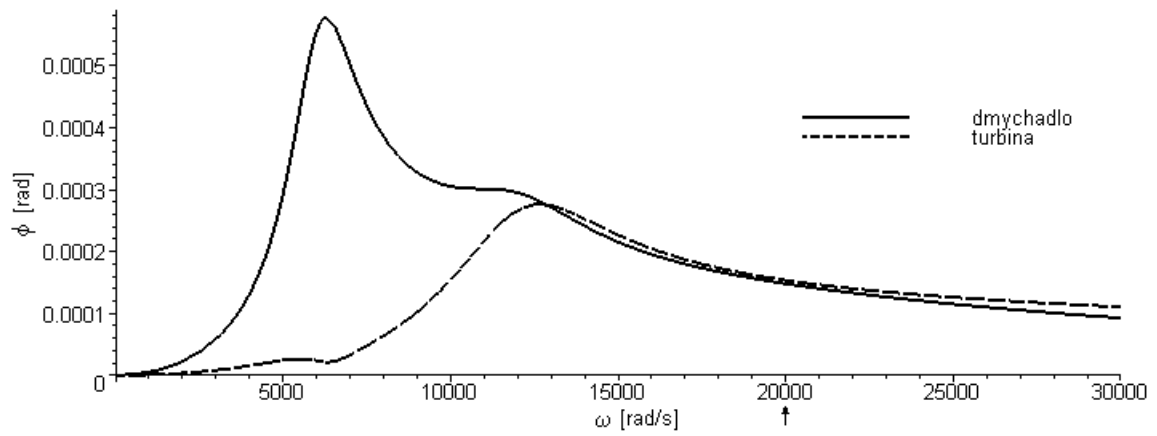
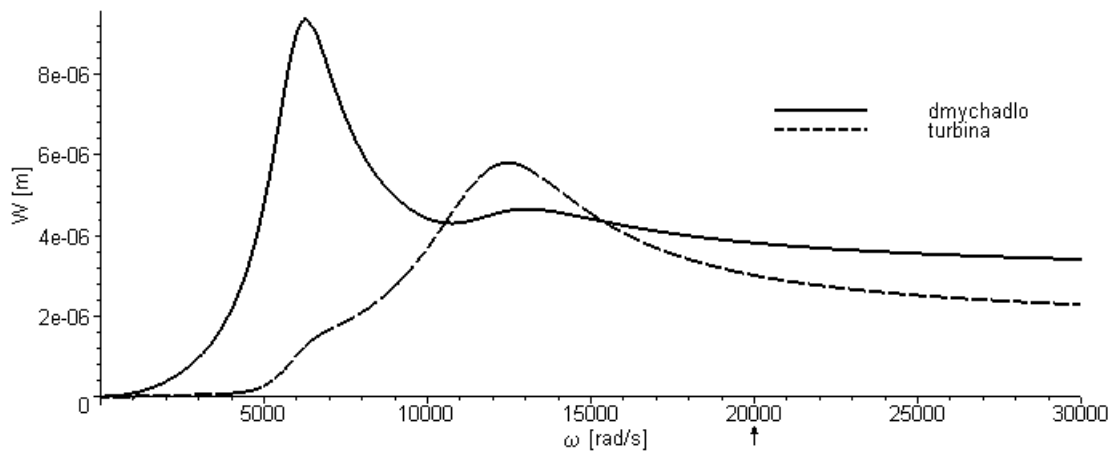
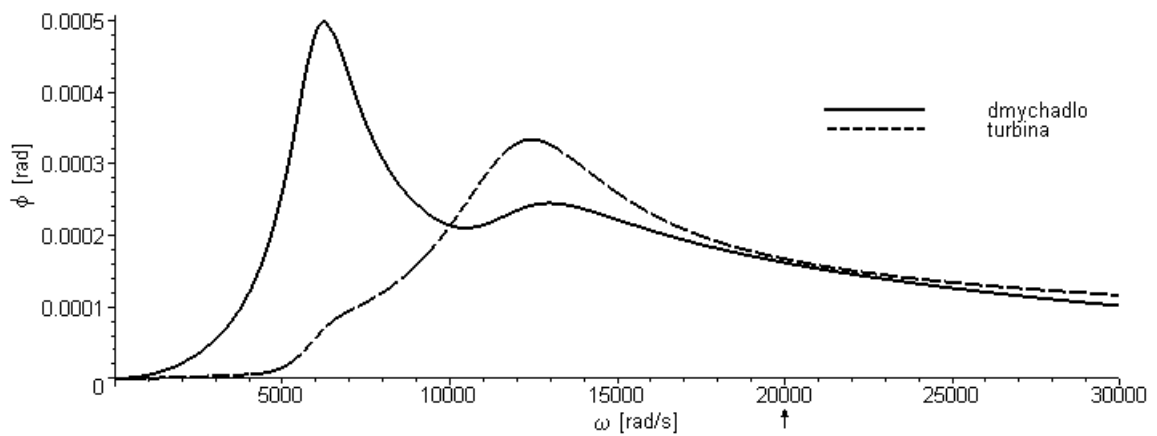


Obrázek 15: Vlastní frekvence



Obrázek 16: Detail kritických otáček souběžné precese

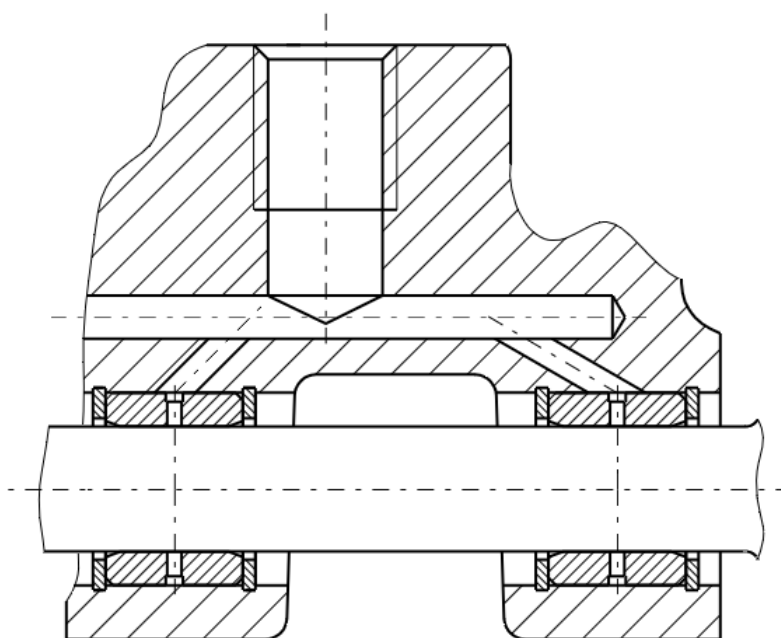
Obrázek 17: Amplitudy průhybů – $\psi = 0^\circ$, $\zeta = 0.05$ Obrázek 18: Amplitudy natočení – $\psi = 0^\circ$, $\zeta = 0.05$ Obrázek 19: Amplitudy průhybů – $\psi = 90^\circ$, $\zeta = 0.05$

Obrázek 20: Amplitudy natočení – $\psi = 90^\circ$, $\zeta = 0.05$ Obrázek 21: Amplitudy průhybů – $\psi = 180^\circ$, $\zeta = 0.05$ Obrázek 22: Amplitudy natočení – $\psi = 180^\circ$, $\zeta = 0.05$

3.2 Ložiska rotoru

V předchozí kapitole byl sestaven model rotoru s ložisky tuhými. Skutečný systém ložisek použitý k radiálnímu uchycení rotoru je vyobrazen na obr. 23. Plovoucí, volné pouzdro (loose bushing), vložené mezi hřídel a ložiskové těleso, není fixováno proti otáčení. Tím jsou vytvořeny dvě olejové vrstvy v každém ložisku. V literatuře [1] je proveden experimentální rozbor vlastností tohoto typu ložiska. V případě, že se pouzdro otáčí, jsou – vzhledem k jednoduchému kruhovému ložisku – kritické otáčky samobuzeného kmitání posunuty k vyšším hodnotám nebo se dokonce ani nevyskytují.

Pro získání matic tuhostí a tlumení tohoto ložiska by bylo nutno přistoupit k numerickému modelování. Toto je obsahem [10], kde je pomocí Navier-Stokesových rovnic vyšetřováno krátké i dlouhé ložisko eliptického tvaru. V případě plovoucího ložiska by byla analýza ještě zkomplikována přítomností pohyblivého pouzdra. Tato záležitost je příliš složitá na to, aby byla součástí této práce.



Obrázek 23: Uložení rotoru

Alternativa uložení rotoru, zmíněná v úvodu, počítá s použitím jednoho dlouhého radiálního ložiska. Součástí ložiska by mělo být rovněž vložené pouzdro – u kterého by ovšem bylo zamezeno jeho rotaci kolem osy hřídele – pracující jako olejový tlumič (squeeze damper). Dále je ze strany ČZ a.s. uvažováno použití valivých ložisek, která by byla opět opatřena olejovými tlumiči. Zatím jsou tyto možnosti ve stadiu koncepce, takže nejsou k dispozici konstrukční detaily. Navíc by podrobná analýza těchto ložisek překračovala možnosti této diplomové práce.

Radiální vůle mezi hřídelem a plovoucím pouzdrem činí $c = (0.015 \div 0.022)$ mm a mezi pouzdrem a tělesem ložiska $c = (0.0325 \div 0.042)$ mm.

Použitý olej je viskozní třídy SAE 30. Dynamická viskozita tohoto oleje je pro různé teploty zanesena do tabulky 1.

t [°C]	40	100	150
μ_t [Pa s]	0.0753	0.0101	0.0029

Tabulka 1: Viskozita mazacího oleje

Další modelování rotoru turbodmychadla bude provedeno se zahrnutím modelu jednoduchých kruhových radiálních ložisek bez tělesa plovoucího pouzdra. Pro porovnání vlivu viskozity oleje, která se mění s teplotou, a vlivu tolerance radiální vůle na hodnoty tuhostí a tlumení použijí postup uvedený v závěru kapitoly 2.5. Zvýšení velikosti radiální vůle, stejně jako snížení dynamické viskozity oleje, má za následek pokles hodnot tuhosti i tlumení ložiska. Níže jsou vyobrazeny průběhy tuhostí a koeficientů tlumení pro dva případy kombinace vůle a viskozity.

Na obr. 24 jsou zaneseny hodnoty tuhosti pro minimální vůli a teplotu oleje 40 °C v závislosti na otáčkách rotoru $\omega = (100 \div 30000)$ rad s⁻¹. Hodnoty křížových tuhostí se kromě znaménka mírně liší ve svých absolutních velikostech při nižších otáčkách. Pro stejné parametry obsahuje obr. 25 průběhy koeficientů tlumení.

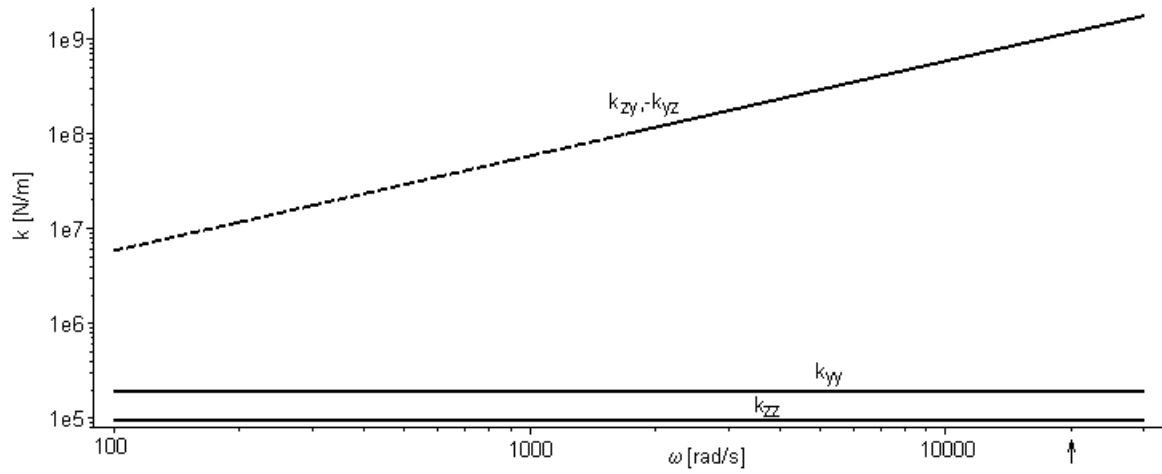
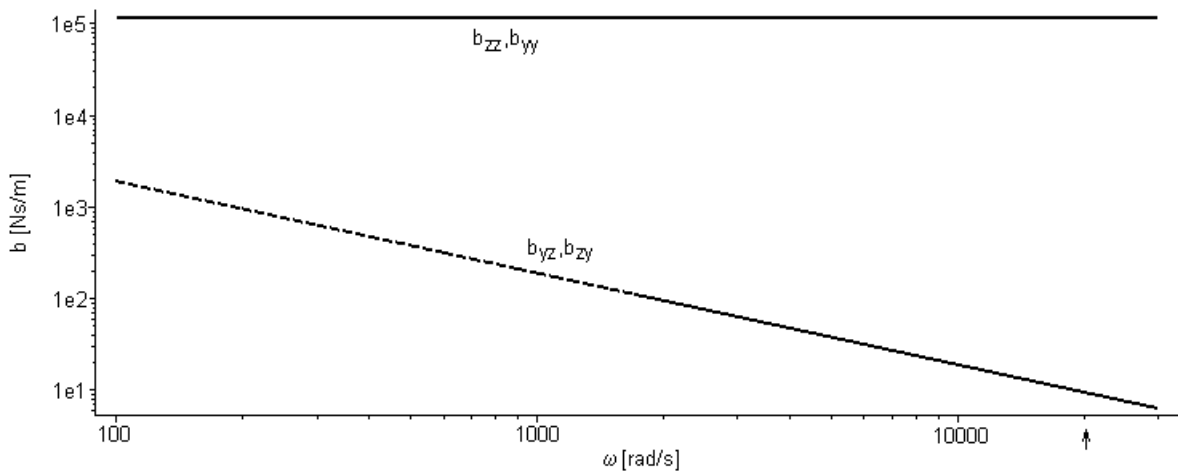
Obr. 26 a 27 znázorňují závislosti tuhosti a tlumení na otáčkách pro vůli $c = 42 \mu\text{m}$ a teplotu oleje $t = 150$ °C. Průběhy vlastností ložisek pro ostatní kombinace parametrů jsou připojeny v příloze A.1.

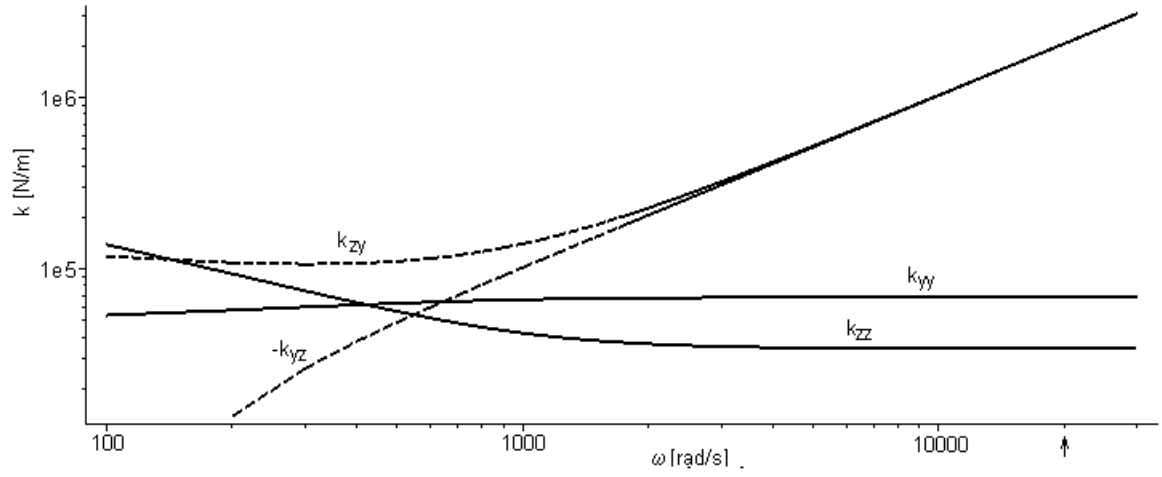
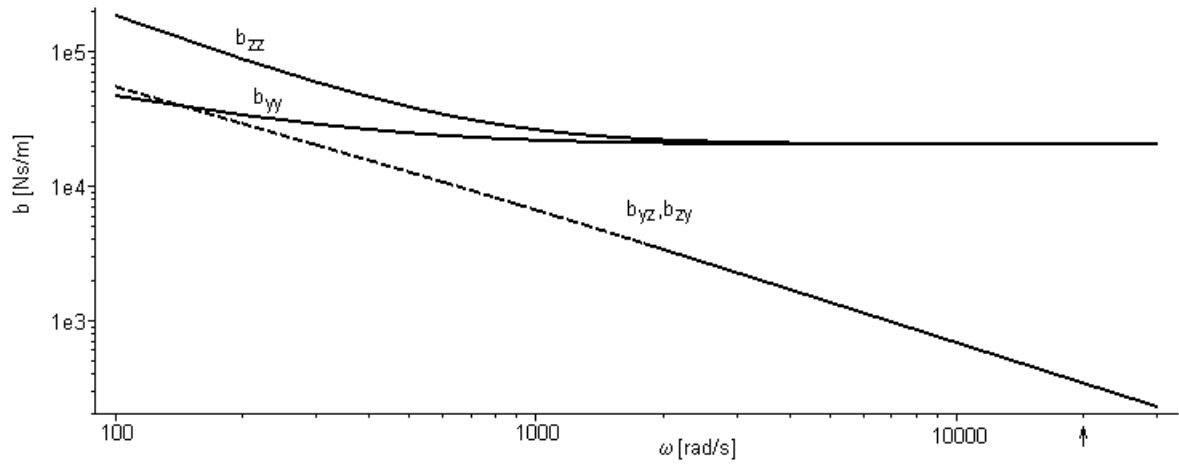
3.3 Model rotoru s poddajným izotropním uložením

Pro vytvoření modelu rotoru turbodmychadla se zahrnutím tuhostí a tlumení ložisek je možno použít metodu přenosových matic. V literatuře [8],[6],[7] jsou uvedeny různé modifikace této metody pro rotorové systémy.

V knize [8] je uvedena metoda používající matice osmého, resp. devátého, řádu. Metoda nezohledňuje spojitě rozloženou hmotu podél hřídele a dovoluje použití pouze izotropních ložisek. Toto by vyhovovalo pro případ použití valivých ložisek, která jsou osově souměrná v tuhosti a prakticky postrádají tlumení. Změnou tuhosti ložisek lze sledovat velikost vlastních frekvencí soustavy a tím i změnu kritických otáček.

Začleněním izotropního tlumení je možno též posoudit jeho vliv na velikost amplitud vynucených kmitů. Zde je důležité připomenout, že uvažovaný typ tlumící síly působí na hřídel ve směru kolmém na rovinu, v níž se právě nachází průhybová čára hřídele.

Obrázek 24: Tuhosti ložiska – $t = 40^\circ\text{C}$, $c = 15\ \mu\text{m}$ Obrázek 25: Tlumení ložiska – $t = 40^\circ\text{C}$, $c = 15\ \mu\text{m}$

Obrázek 26: Tuhosti ložiska – $t = 150\text{ }^\circ\text{C}$, $c = 42\text{ }\mu\text{m}$ Obrázek 27: Tlumení ložiska – $t = 150\text{ }^\circ\text{C}$, $c = 42\text{ }\mu\text{m}$

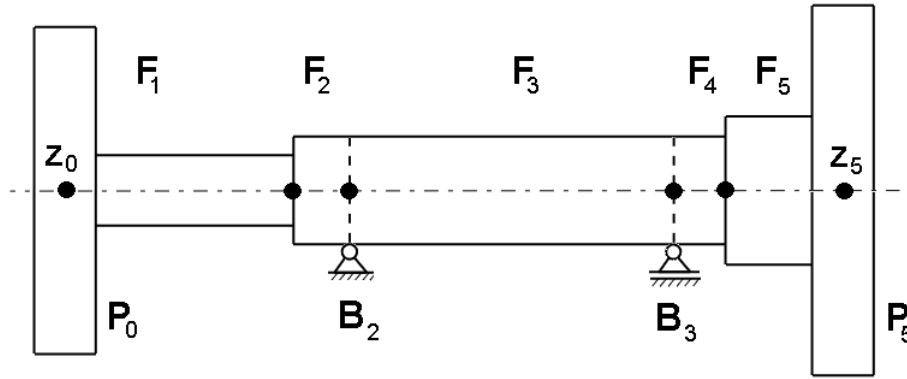
Síla je přímo úměrná úhlové rychlosti hřídele. To je rozdíl oproti funkci squeeze tlumiče, kdy olejový film působí na pouzdro, které je fixováno proti rotaci s hřídelem.

Souřadný systém je stejně orientován jako na obr. 3.1, ale tentokrát je pevně spojen s hřídelem a otáčí se společně s ním kolem osy x úhlovou rychlostí ω .

Kvůli přehlednosti a ustáleným zvyklostem upravíme označení veličin průhybů a natočení

$$y = v, \quad z = w, \quad \varphi_y = \phi, \quad \varphi_z = \vartheta. \quad (3.17)$$

Na obr. 28 je schamaticky znázorněno rozdělení rotoru na pět úseků. Model tedy obsahuje pět hřídelových přenosových matic \mathbf{F}_{1-5} , dvě matice ložisek $\mathbf{B}_{2,3}$ v uzlech příslušejícím ložiskám³ a šest bodových matic soustředěných hmot \mathbf{P}_{0-5} .



Obrázek 28: Rozdělení rotoru na přenosové části

Přenos i -tého hřídelového prvku

$$\mathbf{z}_i^L = \mathbf{F}_i \mathbf{z}_{i-1}^R, \quad (3.18)$$

je rozepsán ve tvaru zdvojnásobeného přenosu ohybových kmitů prizmatického hřídele

$$\begin{pmatrix} -w \\ \phi \\ M_y \\ V_z \\ v \\ \vartheta \\ M_z \\ -V_y \end{pmatrix}_i^L = \begin{pmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} & & & & \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} & & & & \\ 0 & 0 & 1 & l & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} \\ & & & & 0 & 1 & \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} \\ & & & & 0 & 0 & 1 & l \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i \cdot \begin{pmatrix} -w \\ \phi \\ M_y \\ V_z \\ v \\ \vartheta \\ M_z \\ -V_y \end{pmatrix}_{i-1}^R. \quad (3.19)$$

³v ostatních uzlech jsou matice \mathbf{B} jednotkové

Bodové matice soustředěných hmot

$$\mathbf{z}_i^R = \mathbf{P}_i \mathbf{z}_i^L, \quad (3.20)$$

$$\begin{pmatrix} -w \\ \phi \\ M_y \\ V_z \\ v \\ \vartheta \\ M_z \\ -V_y \\ 1 \end{pmatrix}_i^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A\lambda^2 & 1 & 0 & 0 & -C\omega\lambda & 0 & 0 & 0 \\ m\lambda^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & em\omega^2 \sin \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\omega\lambda & 0 & 0 & 0 & -A\lambda^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m\lambda^2 & 0 & 0 & 1 & em\omega^2 \cos \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i \cdot \begin{pmatrix} -w \\ \phi \\ M_y \\ V_z \\ v \\ \vartheta \\ M_z \\ -V_y \\ 1 \end{pmatrix}_i^L. \quad (3.21)$$

Matice ložiskových uzlů zahrnující izotropní tuhosti a tlumení

$$\mathbf{z}_i^R = \mathbf{B}_i \mathbf{z}_i^L, \quad (3.22)$$

$$\begin{pmatrix} -w \\ \phi \\ M_y \\ V_z \\ v \\ \vartheta \\ M_z \\ -V_y \end{pmatrix}_i^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 1 & -b\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b\omega & 0 & 0 & 0 & -k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i \cdot \begin{pmatrix} -w \\ \phi \\ M_y \\ V_z \\ v \\ \vartheta \\ M_z \\ -V_y \end{pmatrix}_i^L. \quad (3.23)$$

Pro rotor rozdělený na $n = 5$ úseků hřídele je celková přenosová matice \mathbf{U} dána součinem dílčích matic. Přenosová rovnice celé soustavy je

$$\mathbf{z}_n^R = \prod_{i=n}^1 (\mathbf{P}_i \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i) \mathbf{z}_0^L. \quad (3.24)$$

Pro vyšetření vlastních frekvencí stačí použít matice řádu 8×8 , pro získání amplitudových charakteristik je třeba matice \mathbf{F}_i , \mathbf{B}_i rozšířit o jednu rovnici – identitu.

Jako okrajové podmínky jsou v tomto případě direktivně zadány nulové hodnoty vnějších působících sil a momentů na kotouče. Po dosazení do krajních vektorů \mathbf{z}_0^L a \mathbf{z}_5^R je celková rovnice rozepsaná do jednotlivých členů

$$\begin{pmatrix} -w \\ \phi \\ 0 \\ 0 \\ v \\ \vartheta \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_5^R = \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} & U_{1,4} & U_{1,5} & U_{1,6} & U_{1,7} & U_{1,8} & U_{1,9} \\ U_{2,1} & U_{2,2} & U_{2,3} & U_{2,4} & U_{2,5} & U_{2,6} & U_{2,7} & U_{2,8} & U_{2,9} \\ U_{3,1} & U_{3,2} & U_{3,3} & U_{3,4} & U_{3,5} & U_{3,6} & U_{3,7} & U_{3,8} & U_{3,9} \\ U_{4,1} & U_{4,2} & U_{4,3} & U_{4,4} & U_{4,5} & U_{4,6} & U_{4,7} & U_{4,8} & U_{4,9} \\ U_{5,1} & U_{5,2} & U_{5,3} & U_{5,4} & U_{5,5} & U_{5,6} & U_{5,7} & U_{5,8} & U_{5,9} \\ U_{6,1} & U_{6,2} & U_{6,3} & U_{6,4} & U_{6,5} & U_{6,6} & U_{6,7} & U_{6,8} & U_{6,9} \\ U_{7,1} & U_{7,2} & U_{7,3} & U_{7,4} & U_{7,5} & U_{7,6} & U_{7,7} & U_{7,8} & U_{7,9} \\ U_{8,1} & U_{8,2} & U_{8,3} & U_{8,4} & U_{8,5} & U_{8,6} & U_{8,7} & U_{8,8} & U_{8,9} \\ U_{9,1} & U_{9,2} & U_{9,3} & U_{9,4} & U_{9,5} & U_{9,6} & U_{9,7} & U_{9,8} & U_{9,9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -w \\ \phi \\ 0 \\ 0 \\ v \\ \vartheta \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_0^L. \quad (3.25)$$

Pro netriviální řešení této rovnice musí být roven nule determinant

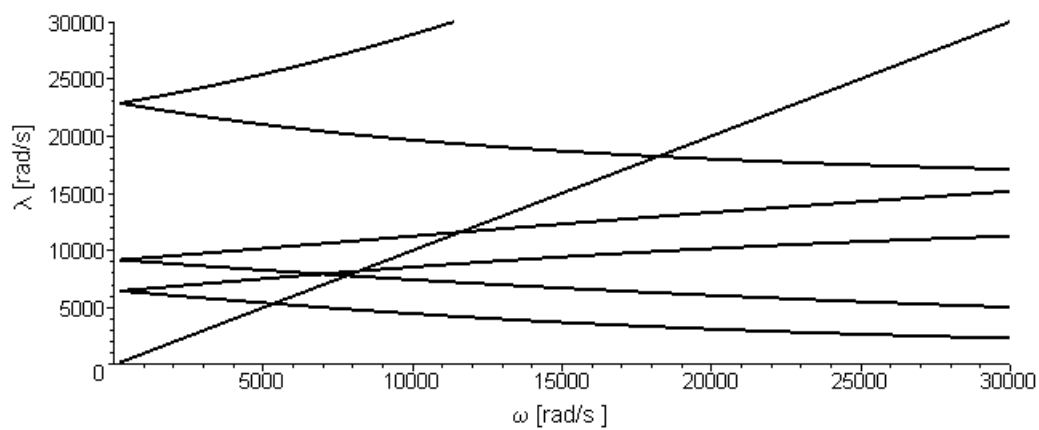
$$\begin{vmatrix} U_{3,1} & U_{3,2} & U_{3,5} & U_{3,6} \\ U_{4,1} & U_{4,2} & U_{4,5} & U_{4,6} \\ U_{7,1} & U_{7,2} & U_{7,5} & U_{7,6} \\ U_{8,1} & U_{8,2} & U_{8,5} & U_{8,6} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.26)$$

Jednotlivé složky determinantu (3.26) obsahují polynomy dvou proměnných ω a λ se součtem jejich mocnin menším nebo rovným šesti. Pro ilustraci uvádím hodnotu jednoho jeho členu při zápisu čísel na pět platných číslic.

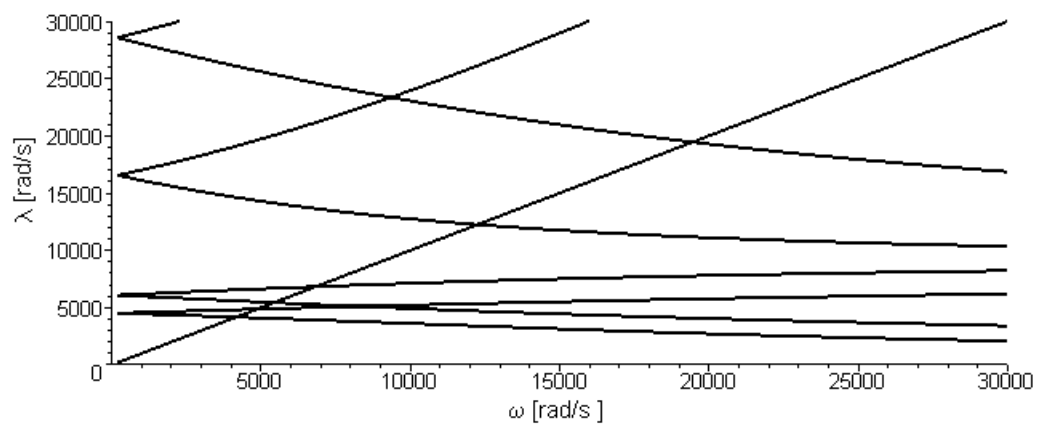
$$\begin{aligned} U_{3,1} = & -7277.2 + 38152 \cdot 10^{-7} \lambda^2 - 24047 \cdot 10^{-13} \lambda \omega^2 - 22781 \cdot 10^{-11} \omega^2 \\ & - 1.9132 \cdot 10^{-15} \lambda^2 \omega^2 - 2.0635 \cdot 10^{-11} \lambda^4 - 3.0286 \cdot 10^{-17} \lambda^3 \omega^2 \\ & + 1.4001 \cdot 10^{-24} \lambda^4 \omega^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Determinantem je tedy dvourozměrná polynomická plocha. Po dosazení jednotlivých úhlových rychlostí získáme frekvenční polynom 16-tého stupně proměnné λ , jehož kořeny jsou vlastní frekvence rotorového systému při dané úhlové rychlosti ω . Hledání kořenů takto sestaveného determinantu pro různé otáčky volené z pracovního rozsahu s malým krokem je numericky náročné i při velké numerické přesnosti (počet desetinných míst ~ 200).

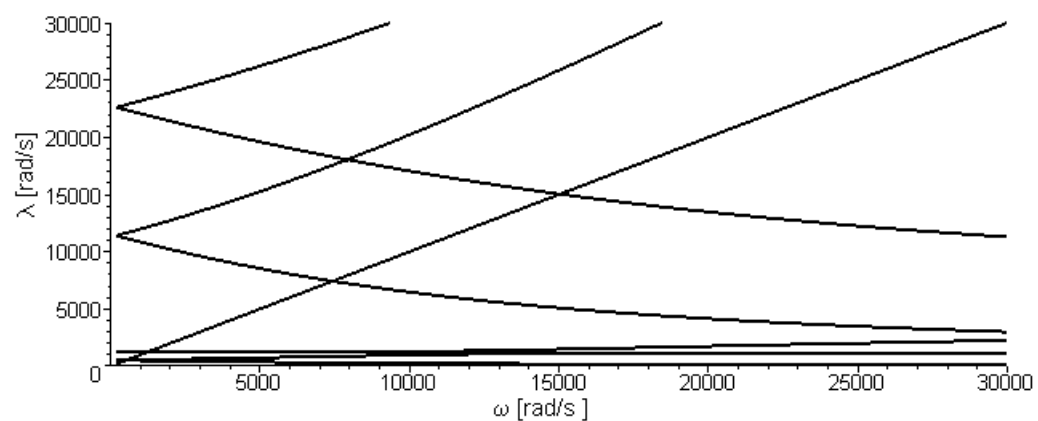
Na obr. 29 až 32 jsou zobrazeny vlastní frekvence rotorové soustavy pro různé hodnoty tuhostí ložisek a zanedbatelné tlumení. Tuhost ložiska $k = 1 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-1}$ řádově odpovídá tuhostem dosahovaným u běžných valivých ložisek. Tomu odpovídá i mizivé tlumení. Nižší tuhost ložiska $k = 1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-1}$ je přibližně vzatá diagonální tuhost olejového filmu analyzovaného kruhového ložiska.



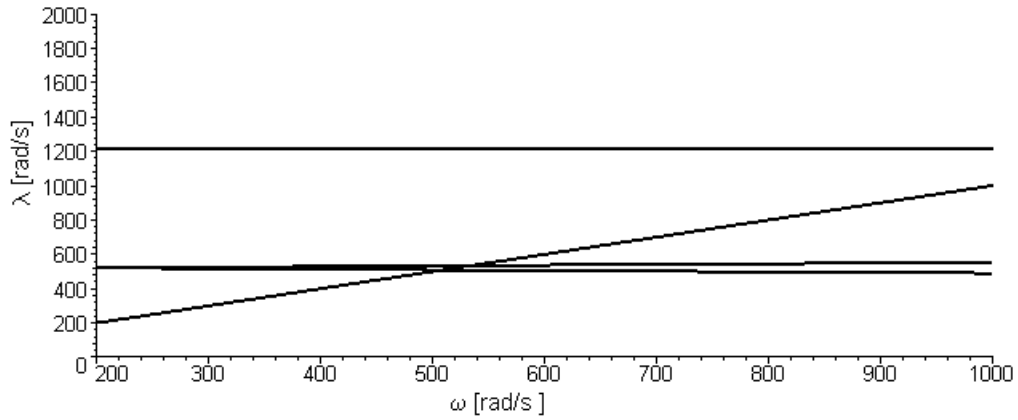
Obrázek 29: Vlastní frekvence – $k = 1 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \text{ N s m}^{-1}$



Obrázek 30: Vlastní frekvence – $k = 1 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \text{ N s m}^{-1}$



Obrázek 31: Vlastní frekvence – $k = 1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \text{ N s m}^{-1}$

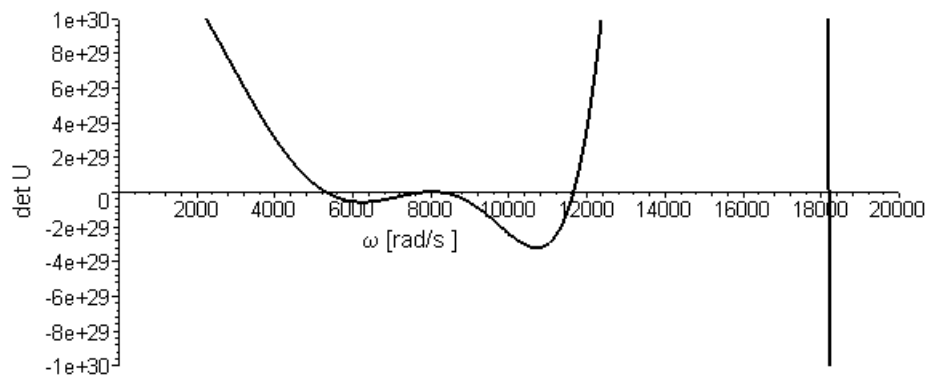


Obrázek 32: Detail vlastních frekvencí – $k = 1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \text{ N s m}^{-1}$

Poměrně jednodušší je zavést substituci $\lambda = \omega$ do determinantu (3.26)⁴ a po jeho výpočtu zanesení do grafu v závislosti na ω pro určení kritických úhlových rychlostí rotoru. Výpočet hodnoty polynomu vyššího řádu není numericky obtížné, narozdíl od hledání jeho kořenů, které v případě ložisky tlumené soustavy nevedlo vždy k cíli. Kritické úhlové hodnoty jsou určeny nulovou hodnotou frekvenčního determinantu.

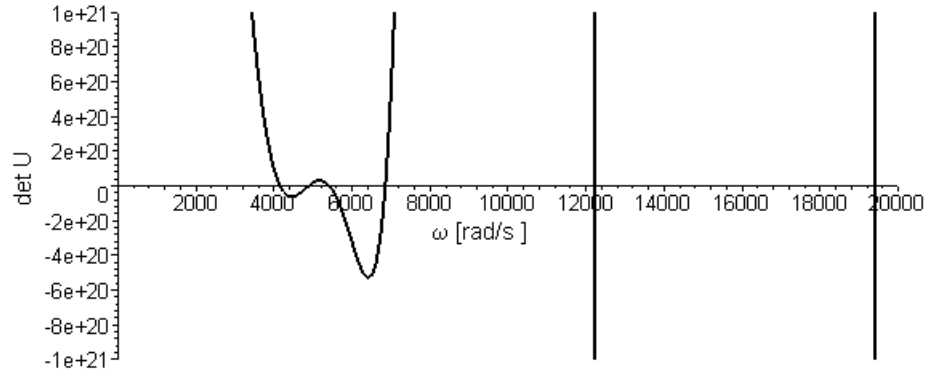
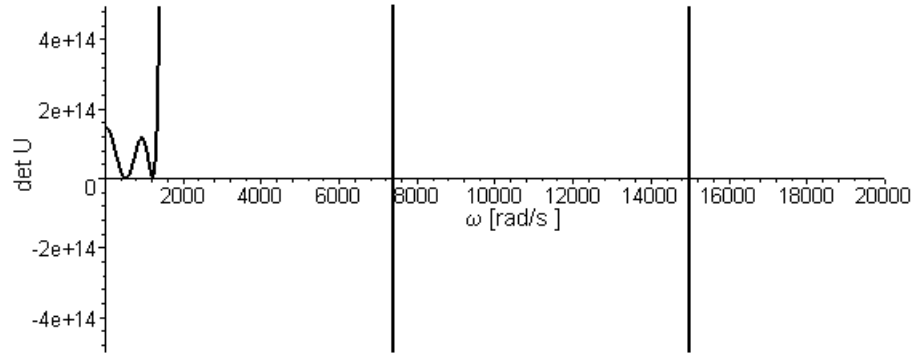
Na obr. 33 až 35 jsou vykresleny průběhy frekvenčních determinantů systému se třemi různými tuhostmi a opět mizivým tlumením jako v případě předchozích zobrazení vlastních frekvencí na obr. 29 až 32. Na vyobrazeních je patrný posun kritických otáček k nižším hodnotám pro poddajnější ložiska.

Vliv různých hodnot koeficientů tlumení na závislosti frekvenčních determinantů a tím i na kritické otáčky je zanesen do grafické části příloh A.2.



Obrázek 33: Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \text{ N s m}^{-1}$

⁴což je v podstatě vynucení synchronní precese

Obrázek 34: Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \text{ N s m}^{-1}$ Obrázek 35: Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \text{ N s m}^{-1}$

Pro získání amplitudových charakteristik je třeba uvažovat i poslední devátý sloupec celkové přenosové matice \mathbf{U} . Velikosti amplitud průhybů i natočení nultého uzlu udává řešení lineární soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} U_{3,1} & U_{3,2} & U_{3,5} & U_{3,6} \\ U_{4,1} & U_{4,2} & U_{4,5} & U_{4,6} \\ U_{7,1} & U_{7,2} & U_{7,5} & U_{7,6} \\ U_{8,1} & U_{8,2} & U_{8,5} & U_{8,6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -w \\ \Phi \\ v \\ \vartheta \end{pmatrix}_0^L = - \begin{pmatrix} U_{3,9} \\ U_{4,9} \\ U_{7,9} \\ U_{8,9} \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

pro dopočtení amplitud ostatních uzlů již lze použít obdoby vztahu (3.24), kde ovšem nahradíme n pořadovým číslem počítaného uzlu.

Na obr. 36 až 41 jsou amplitudové charakteristiky průhybů a natočení kol turbíny a dmychadla. Grafy jsou vytvořeny pro tuhost uložení $k = 1 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-1}$ a tři rozdílné koeficienty tlumení ložisek. Zajímavý je případ obr. 40 a 41 pro největší tlumení $b = 1 \cdot 10^4 \text{ N s m}^{-1}$, kde vymizí rezonanční vrcholy pro nižší otáčky a nastoupí rezonance na vyšších otáčkách hřídele. Jak již bylo poznamenáno, tlumící síly v ložiskách působí v

rovině kolmé k průhybové čáře hřídele a jsou přímo úměrné otáčkám hřídele. Tento jev koresponduje s obr. 69 v příloze A.2, který ukazuje průběh frekvenčního determinantu pro tytéž parametry, oproti obr. 68 a 34 pro nižší hodnoty tlumení.

Závislosti amplitudových charakteristik na velikosti tlumení pro další tuhosti ložisek jsou připojeny v příloze A.3.

3.4 Model rotoru s uložením v kruhových kluzných ložiskách

Pro vyšetření amplitudových charakteristik rotoru uloženého v ložiskách s křížovými tuhostmi a tlumením je podobně jako v předchozím případě možno použít metodu přenosových matic. Pro popis systému v pevných souřadnicích je třeba matice rozšířit na dvojnásobný řád, než tomu bylo u rotoru s ložisky izotropních parametrů. Stavový vektor nyní obsahuje průhyby i natočení ve dvou složkách, sinové a kosinové. Postup sestavení modelu je zcela obdobný jako u předchozí metody. Metoda je popsána v literatuře [6].

Přenos i -tého hřídelového prvku

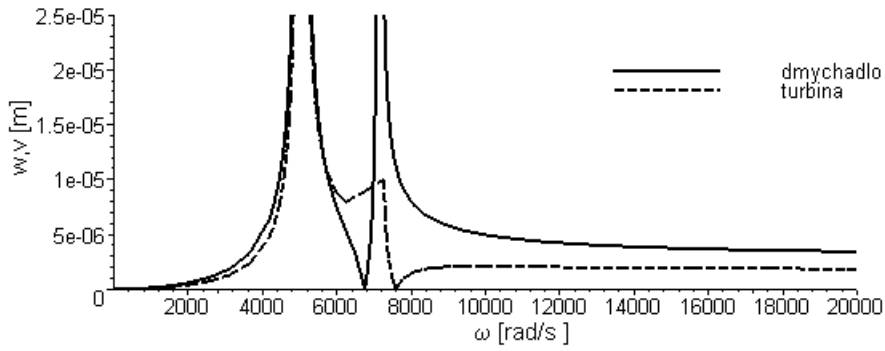
$$\begin{pmatrix} \{S_{zc}\} \\ \{S_{zs}\} \\ \{S_{yc}\} \\ \{S_{ys}\} \\ 1 \end{pmatrix}_i^L = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \{0\} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \{0\} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_m & \mathbf{0} & \{0\} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}_m & \{0\} \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & 1 \end{pmatrix}_i \cdot \begin{pmatrix} \{S_{zc}\} \\ \{S_{zs}\} \\ \{S_{yc}\} \\ \{S_{ys}\} \\ 1 \end{pmatrix}_{i-1}^R, \quad (3.29)$$

kde je $\{0\}$ čtyřprvkový nulový vektor, $\mathbf{0}$ značí nulovou matici rozměru 4×4 ,

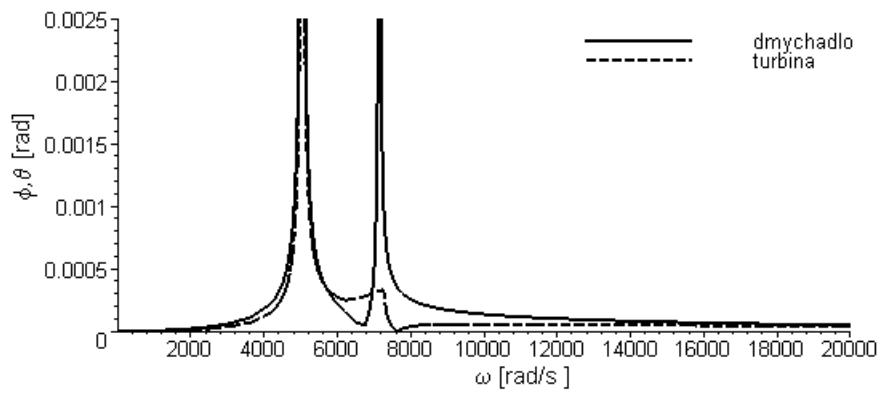
$$\begin{aligned} \{S_{zc}\} &= \begin{pmatrix} -w_c \\ \Phi_c \\ M_{yc} \\ V_{zc} \end{pmatrix} & \{S_{zs}\} &= \begin{pmatrix} -w_s \\ \Phi_s \\ M_{ys} \\ V_{zs} \end{pmatrix}, \\ \{S_{yc}\} &= \begin{pmatrix} v_c \\ \vartheta_c \\ M_{zc} \\ -V_{yc} \end{pmatrix} & \{S_{ys}\} &= \begin{pmatrix} v_s \\ \vartheta_s \\ M_{zs} \\ -V_{ys} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Matice \mathbf{F}_m je tvořena stále jako u ohybových kmitů

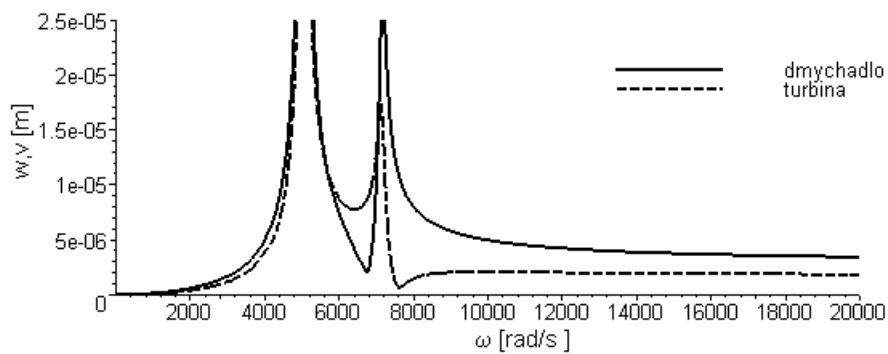
$$\mathbf{F}_m = \begin{pmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$



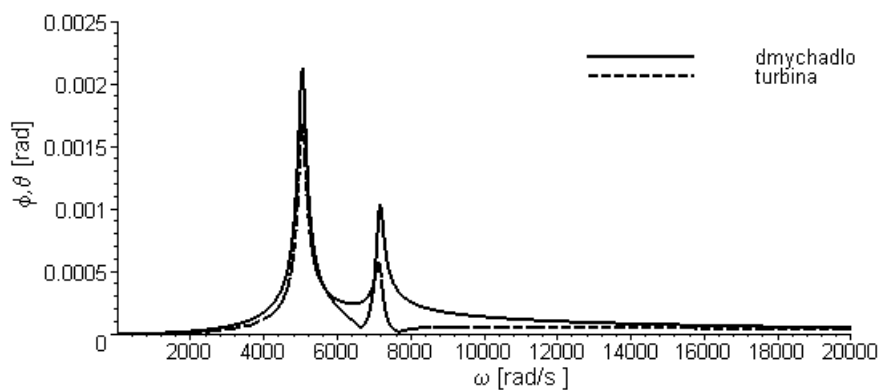
Obrázek 36: Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \text{ N s m}^{-1}$



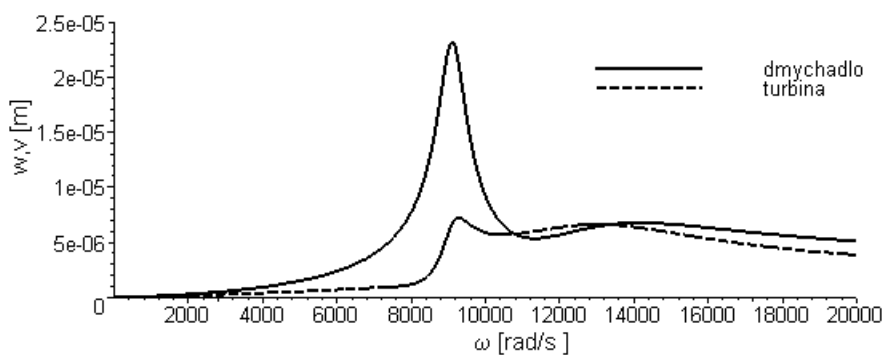
Obrázek 37: Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \text{ N s m}^{-1}$



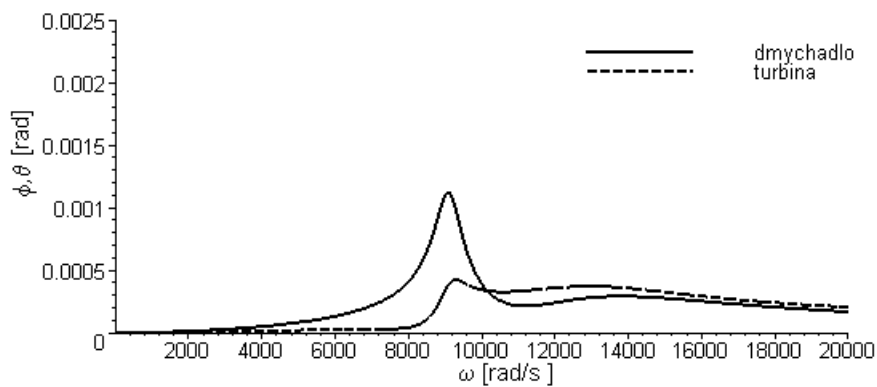
Obrázek 38: Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2 \text{ N s m}^{-1}$



Obrázek 39: Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2 \text{ N s m}^{-1}$



Obrázek 40: Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^4 \text{ N s m}^{-1}$



Obrázek 41: Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^4 \text{ N s m}^{-1}$

Bodové matice soustředěných hmot \mathbf{P}

$$\begin{pmatrix} \{S_{zc}\} \\ \{S_{zs}\} \\ \{S_{yc}\} \\ \{S_{ys}\} \\ 1 \end{pmatrix}_i^R = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \{m_{zc}\} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \{m_{zs}\} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_m & \mathbf{0} & \{m_{yc}\} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_m & \{m_{ys}\} \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & 1 \end{pmatrix}_i \cdot \begin{pmatrix} \{S_{zc}\} \\ \{S_{zs}\} \\ \{S_{yc}\} \\ \{S_{ys}\} \\ 1 \end{pmatrix}_i^L, \quad (3.32)$$

v této matici poslední sloupec zavádí buzení nevyváženostmi kotoučů,

$$\begin{aligned} \{m_{zc}\} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -em\omega^2 \sin \psi \end{pmatrix} & \{m_{zs}\} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ em\omega^2 \cos \psi \end{pmatrix}, \\ \{m_{yc}\} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ em\omega^2 \cos \psi \end{pmatrix} & \{m_{ys}\} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ em\omega^2 \sin \psi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Matice \mathbf{P}_m mají stejný základ

$$\mathbf{P}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

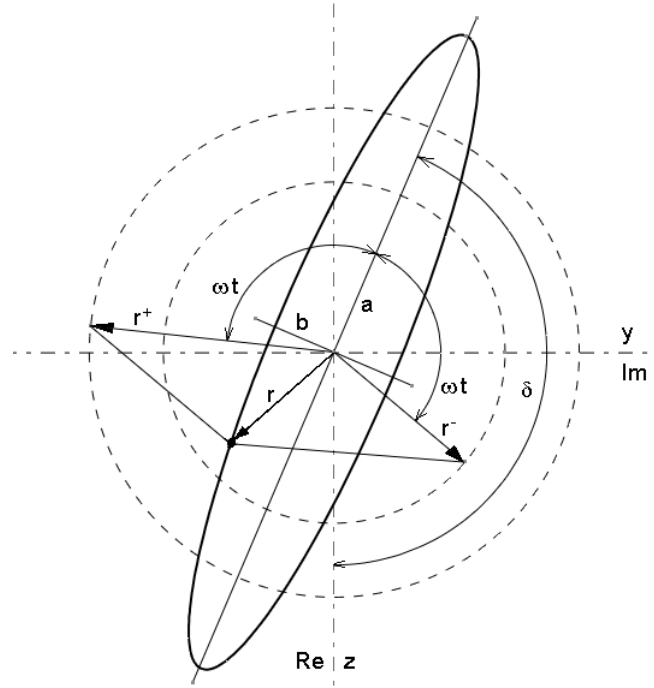
Do matice \mathbf{P} se již pouze doplní gyroskopické účinky

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{3,2} = \mathbf{P}_{7,6} = \mathbf{P}_{11,10} = \mathbf{P}_{15,14} &= -A\omega^2, \\ -\mathbf{P}_{3,14} = \mathbf{P}_{7,10} = \mathbf{P}_{11,6} = -\mathbf{P}_{15,2} &= -C\omega^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ložiskové matice \mathbf{B} jsou tvořeny z jednotkové matice řádu 17×17 doplněním jednotlivých parametrů ložisek

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{4,1} = \mathbf{B}_{8,5} &= -k_{zz}, & \mathbf{B}_{12,9} = \mathbf{B}_{16,13} &= -k_{yy}, \\ \mathbf{B}_{4,5} = -\mathbf{B}_{8,1} &= -b_{zz}\omega, & \mathbf{B}_{4,9} = \mathbf{B}_{8,13} &= k_{zy}, \\ \mathbf{B}_{4,13} = -\mathbf{B}_{8,9} &= b_{zy}\omega, & \mathbf{B}_{12,1} = \mathbf{B}_{16,5} &= k_{yz}, \\ \mathbf{B}_{12,5} = -\mathbf{B}_{16,1} &= b_{yz}\omega, & \mathbf{B}_{12,13} = -\mathbf{B}_{16,9} &= -b_{yy}\omega. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Amplitudy polohových veličin se získají ze vztahu obdobnému (3.28). Narozdíl od předchozího případu uložení rotoru v izotropních ložiskách, kdy se jednotlivé uzly pohybovaly po kružnicích, tvoří trajektorie hmot elipsy obecně natočené vůči souřadnému systému y - z . Situace je zachycena na obr. 42.



Obrázek 42: Trajektorie uzlu soustředěné hmoty

Průvodič soustředěné hmoty $\bar{r}(t)$ je dán součtem

$$\bar{r}(t) = \bar{r}^+ e^{j\omega t} + \bar{r}^- e^{-j\omega t}, \quad (3.37)$$

kde jsou poloměry kružnic tvořící elipsu

$$\bar{r}^+ = \frac{1}{2} (w_c + v_s) + \frac{1}{2} j (v_c - w_s), \quad \bar{r}^- = \frac{1}{2} (w_c - v_s) + \frac{1}{2} j (v_c + w_s). \quad (3.38)$$

Velikosti poloos eliptické trajektorie se určí ze vztahu

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \left(w_c^2 + w_s^2 + v_c^2 + v_s^2 + \sqrt{(w_c^2 - w_s^2 + v_c^2 - v_s^2)^2 + 4 (w_c w_s + v_c v_s)^2} \right)},$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} \left(w_c^2 + w_s^2 + v_c^2 + v_s^2 - \sqrt{(w_c^2 - w_s^2 + v_c^2 - v_s^2)^2 + 4 (w_c w_s + v_c v_s)^2} \right)}. \quad (3.39)$$

Úhel δ popisující natočení hlavní poloosy vůči ose z lze vypočítat podle

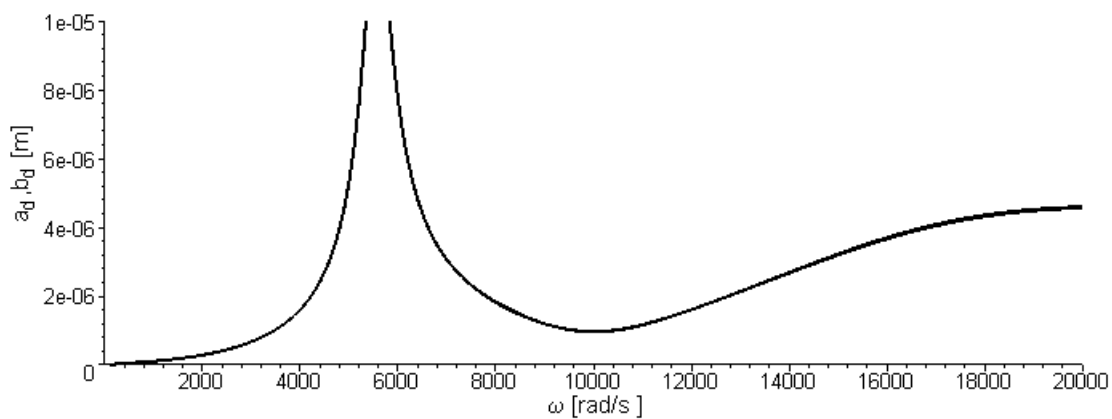
$$\delta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 (w_c v_c + w_s v_s)}{w_c^2 - v_c^2 + w_s^2 - v_s^2}. \quad (3.40)$$

Na následujících třech stránkách jsou vyobrazeny amplitudové charakteristiky odezev na buzení modelu nevyváženostmi kol pro tři různé vzájemné polohy ramen nevyvážeností. Parametry kruhových kluzných ložisek jsou: teplota oleje $t = 100^\circ\text{C}$, radiální vůle v ložiskách $c = 22 \mu\text{m}$

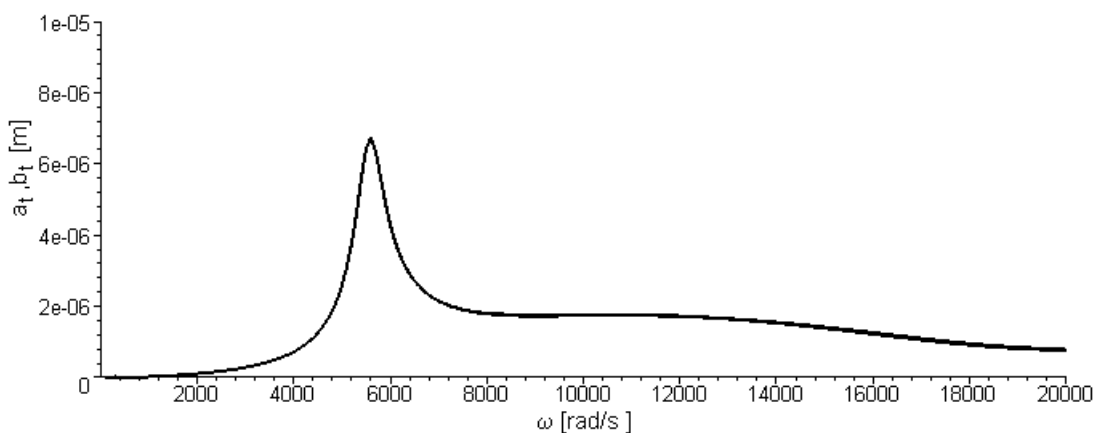
Obr. 43 obsahuje závislost obou poloos eliptické trajektorie středu dmychadlového kola na úhlové rychlosti otáčení hřídele. Na obr. 44 je zachyceno totéž pro kolo plynové turbíny. Na obou obrázcích velikosti poloos téměř splývají, trajektorie se blíží kružnici. Úhly svírající hlavní poloosy elips, po nichž se pohybují středy kol, a osy z ukazuje obr. 45. Vzájemná poloha ramen nevyvážeností je v tomto případě $\psi = 0^\circ$. Pro $\psi = 90^\circ$ a $\psi = 180^\circ$ jsou stejným způsobem vytvořeny obr. 46 – 48 a obr. 49 – 51.

Výpočet probíhal s krokem úhlové rychlosti hřídele 100 rad s^{-1} při reprezentaci čísel v plovoucí desetinné čárce na 30 platných číslic. Algoritmus byl napsán v programu Maple 7. S použitým CPU Duron 700 trval výpočet jedné varianty parametrů ložisek zhruba hodinu a půl.

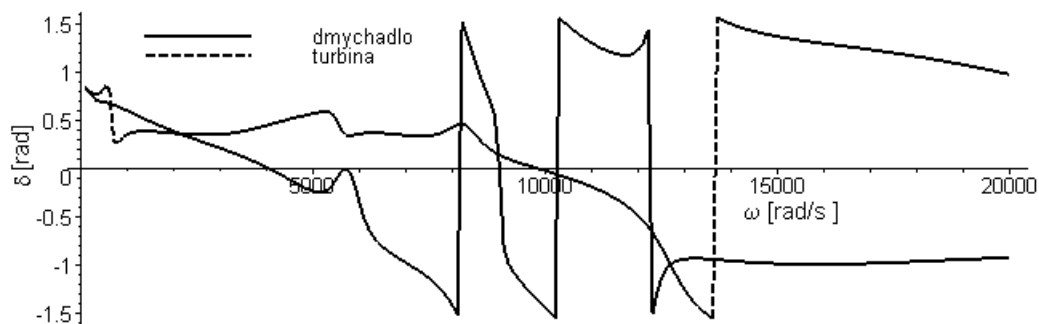
V příloze A.4 jsou vloženy obr. 84 – 89 a obr. 90 – 95, dokumentující vliv velikosti radiální vůle a teploty oleje na vynucené kmitání kol rotoru. Nejméně se kružnici blíží trajektorie středů kol pro největší ložiskové vůle, viz. obr. 87 a 88.



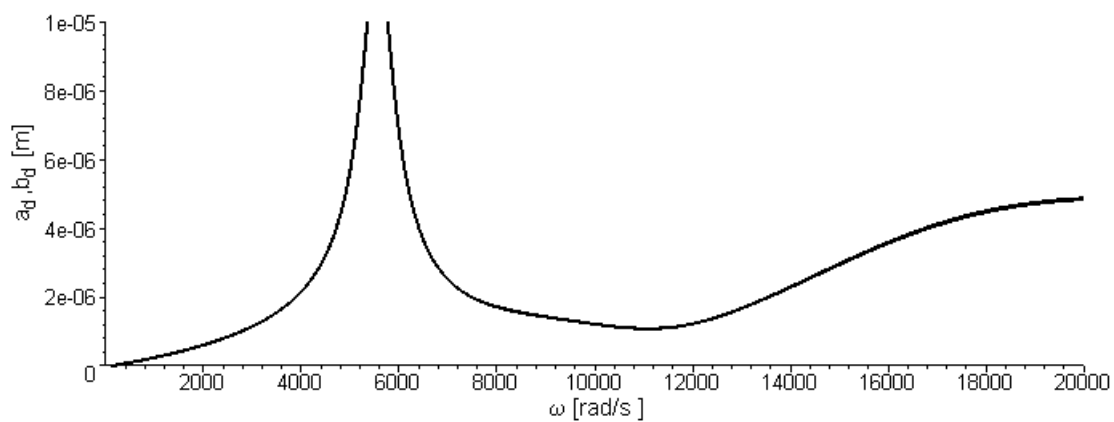
Obrázek 43: Průhyby dmychadlového kola – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 0^{\circ}$



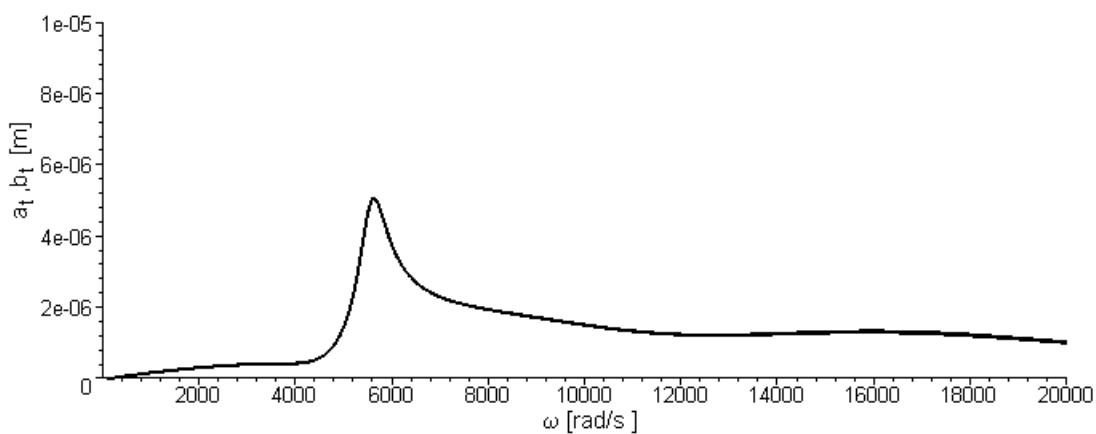
Obrázek 44: Průhyby turbínového kola – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 0^{\circ}$



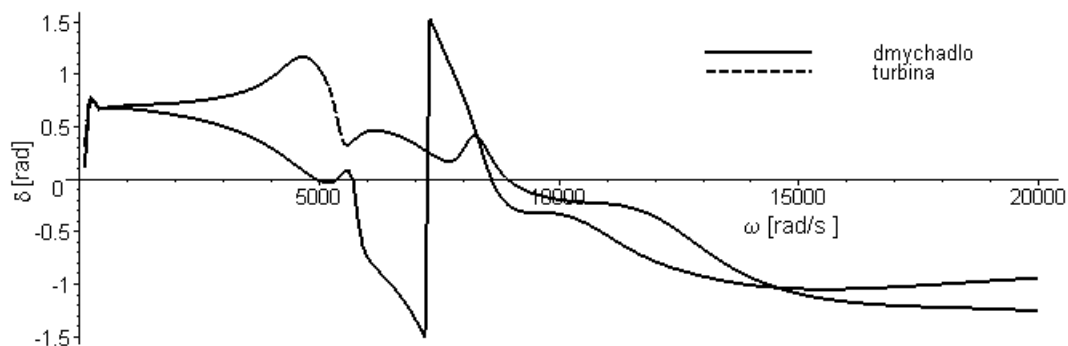
Obrázek 45: Orientace eliptické trajektorie – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 22\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 0^{\circ}$



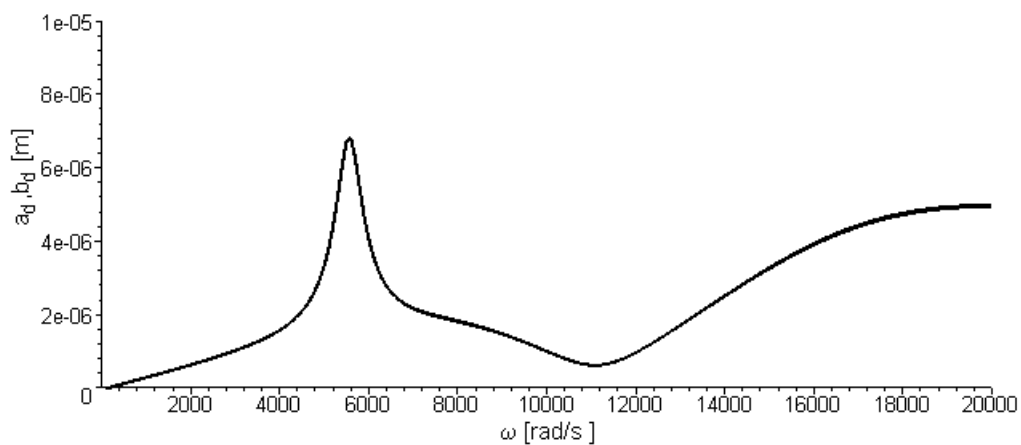
Obrázek 46: Průhyby dmychadlového kola – $t = 100$ °C, $c = 22$ μm , $\psi = 90^\circ$



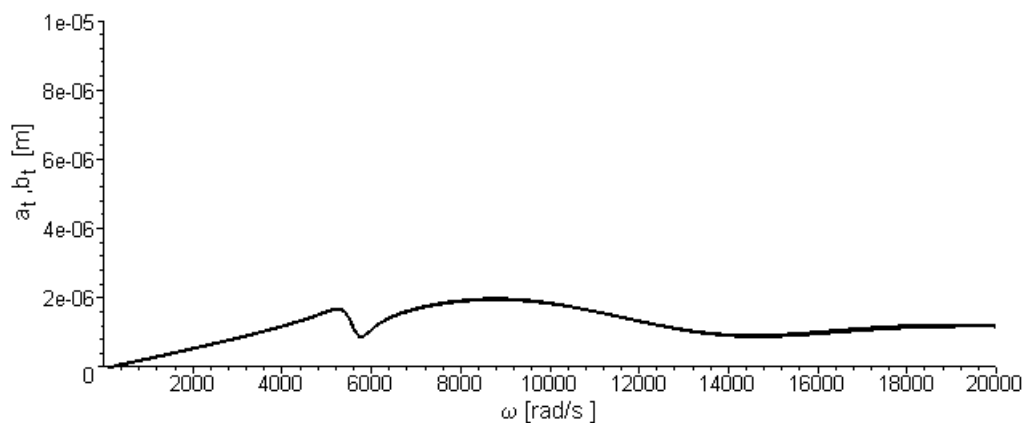
Obrázek 47: Průhyby turbínového kola – $t = 100$ °C, $c = 22$ μm , $\psi = 90^\circ$



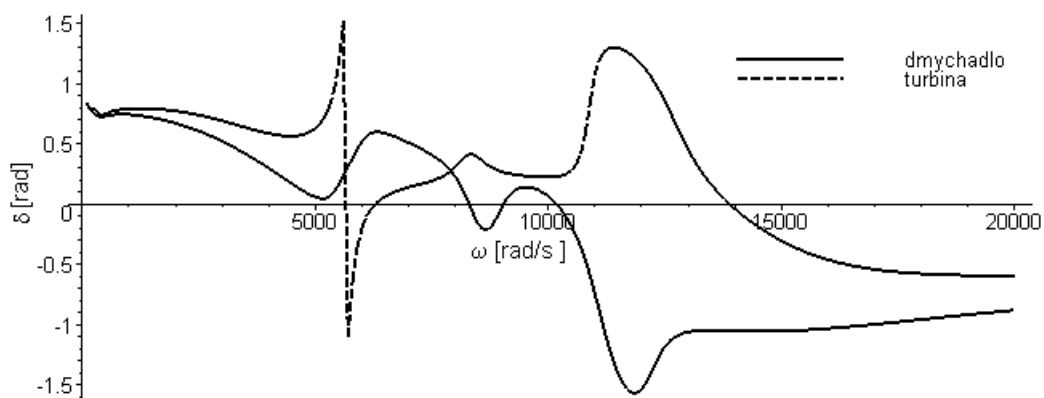
Obrázek 48: Orientace eliptické trajektorie – $t = 100$ °C, $c = 22$ μm , $\psi = 90^\circ$



Obrázek 49: Průhyby dmychadlového kola – $t = 100$ °C, $c = 22$ μ m, $\psi = 180^\circ$



Obrázek 50: Průhyby turbínového kola – $t = 100$ °C, $c = 22$ μ m, $\psi = 180^\circ$



Obrázek 51: Orientace eliptické trajektorie – $t = 100$ °C, $c = 22$ μ m, $\psi = 180^\circ$

4 Závěr

4.1 Shrnutí dosažených výsledků

V oddílu 2. práce řeší za pomoci dostupné literatury vybrané problémy dynamiky rotorových soustav použitím analytických metod. Tento přístup vyžaduje užití jednoduchých modelů, u kterých lze získat řešení v uzavřeném tvaru. Tato část práce ilustruje vlivy vnějšího a vnitřního tlumení rotoru na stabilitu a amplitudové charakteristiky krouživého kmitání vynuceného nevyvážeností kotouče. Dále též působení gyroskopických účinků kotouče, umístěného na převislém konci hřídele, na vlastní frekvence a kritické otáčky soustavy. V poslední kapitole této části práce jsou prošetřeny jednoduché případy kluzných ložisek s důrazem na stanovení jejich tuhostních a tlumících parametrů.

Oddíl 3. se zabývá některými způsoby modelování reálného rotorového systému zvolenými vždy tak, aby bylo možno sledovat vlivy dílčích parametrů soustavy na chování rotoru turbodmychadla. U diskrétního modelu s tuhým uložením je vyšetřena oblast stability provozu rotoru, která je závislá na poměru tlumení materiálu hřídele a vnějšího útlumu, rozštěpení vlastních frekvencí způsobené gyroskopickými účinky a vliv vzájemných poloh nevyvážeností kotoučů na amplitudové charakteristiky jejich krouživého kmitání. Metodami přenosových matic byly zkoumány vlivy rozdílných uložení na kritické otáčky rotoru a vynucené kmitání. Byla použita ložiska izotropní, a to jak velmi tuhá, řádově odpovídající valivým ložiskám, tak i ložiska poddajnější. Na závěr byl sestaven model zahrnující parametry kruhových kluzných ložisek, vypočítané pro různé radiální vůle a teploty mazacího oleje.

4.2 Možnosti pokračování práce

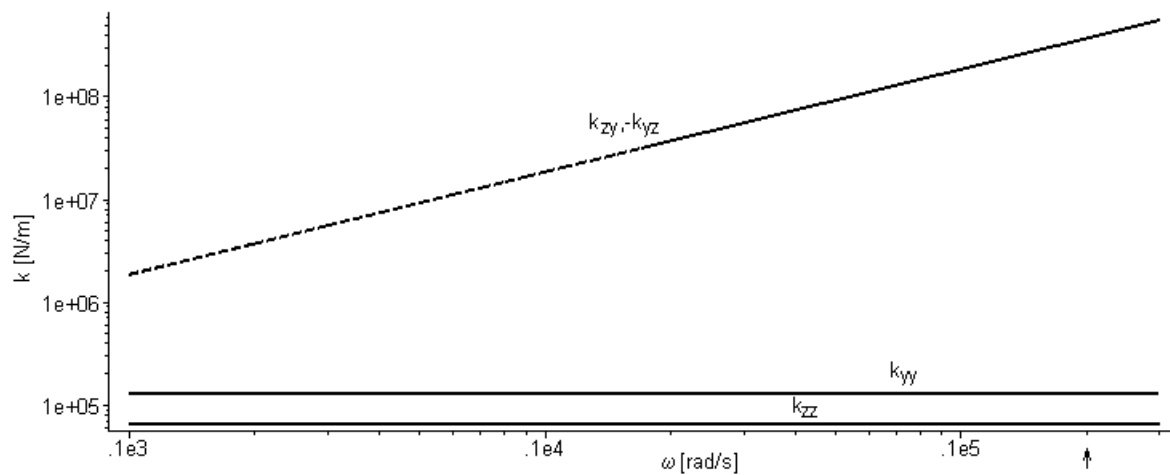
Pro další analýzu rotoru turbodmychadla by bylo vhodné sestavit modely použitím komplexnějších metod. Vhodnou se jeví metoda přenosových matic umožňující začlenit spojitě rozloženou hmotu hřídele [7] a též metoda konečných prvků produkující soustavu pohybových rovnic [5]. Druhá ze jmenovaných má tu výhodu, že zahrnuje torzní a axiální zobecněné posuvy. Bohužel však tvar odvozený v [5] nedovoluje použití mimodiagonálních tuhostí a tlumení ložisek. Dalším důležitým krokem je vyšetření parametrů kluzných ložisek s plovoucím pouzdrem, což se nyní zdá být nejobtížnější částí analýzy řešeného systému. Po vyřešení těchto dvou problémů by se měl model turbodmychadla blížit reálnému vzoru a bylo by účelné jej validovat pomocí vhodně navrženého experimentu.

Literatura

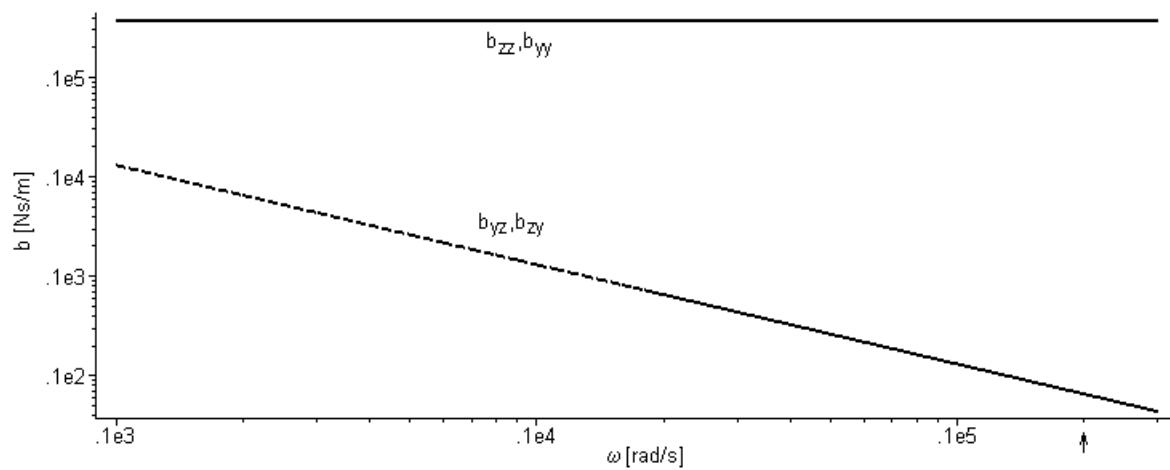
- [1] *Tondl A.: Some Problems of Rotor Dynamics*
ČSAV, Praha 1965
- [2] *Höschl C.: Nauka o kmitání*
Skriptum VŠST, Liberec 1969
- [3] *Kožešník J. : Kmitání mechanických soustav*
ČSAV, Praha 1979
- [4] *Brepta R., Půst L., Turek F.: Mechanické kmitání*
Sobotáles, Praha 1994
- [5] *Slavík J., Stejskal V., Zeman V.: Základy dynamiky strojů*
Vydavatelství ČVUT, Praha 1997
- [6] *Rao J. S.: Rotor Dynamics*
Wiley Eastern Limited, New Delhi 1983
- [7] *Aleyaasin M., Ebrahimi M., Whalley R.: Multivariable Hybrid Models for Rotor-Bearing Systems*
Journal of Sound and Vibration (2000) 233(5), 835-856
- [8] *Pestel E. C., Leckie F.A.: Matrix Methods in Elastomechanics*
McGraw-Hill Book Company, 1963
- [9] *Chauvin D.: An Experimental Investigation of Whirl Instability Including Effects of Lubricant Temperature in Plain Journal Bearings*
Thesis, Nicholls State University 1998
- [10] *Rak V., Malenovský E., Pochylý F.: Výpočtová analýza stability proudění olejového filmu kluzných ložisek*
20. konference s mezinárodní účastí, Computational Mechanics (2004), 429-435

A Grafické přílohy

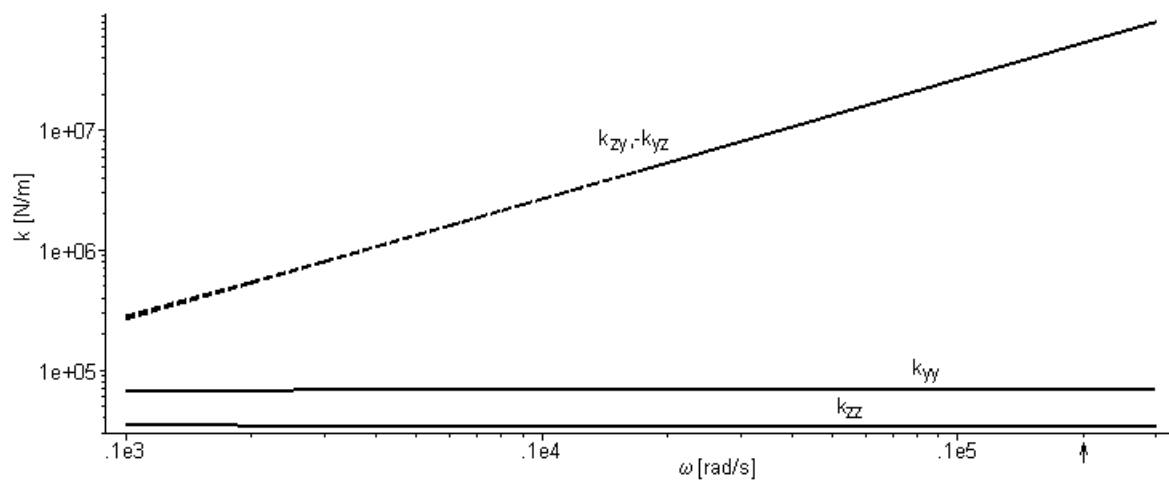
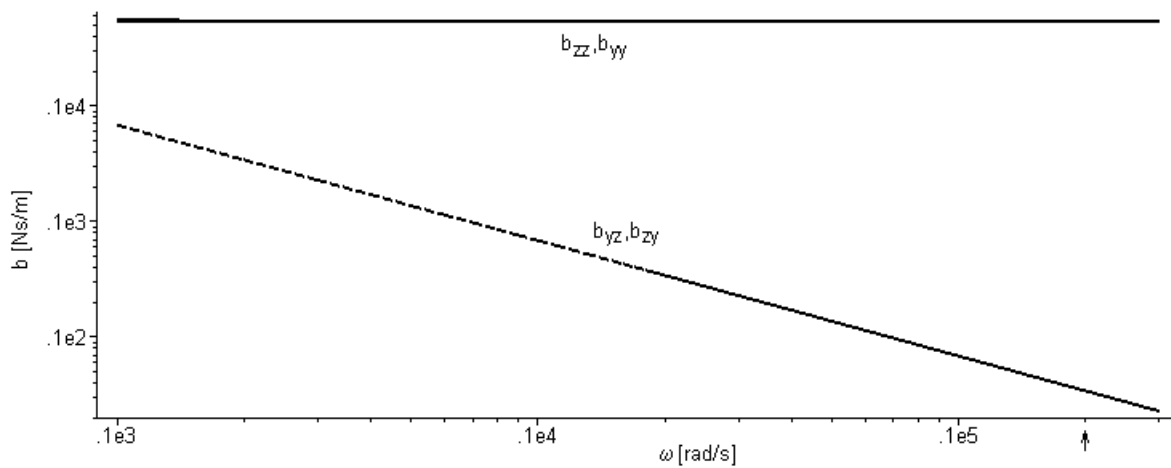
A.1 Tuhosti a tlumení kruhového ložiska

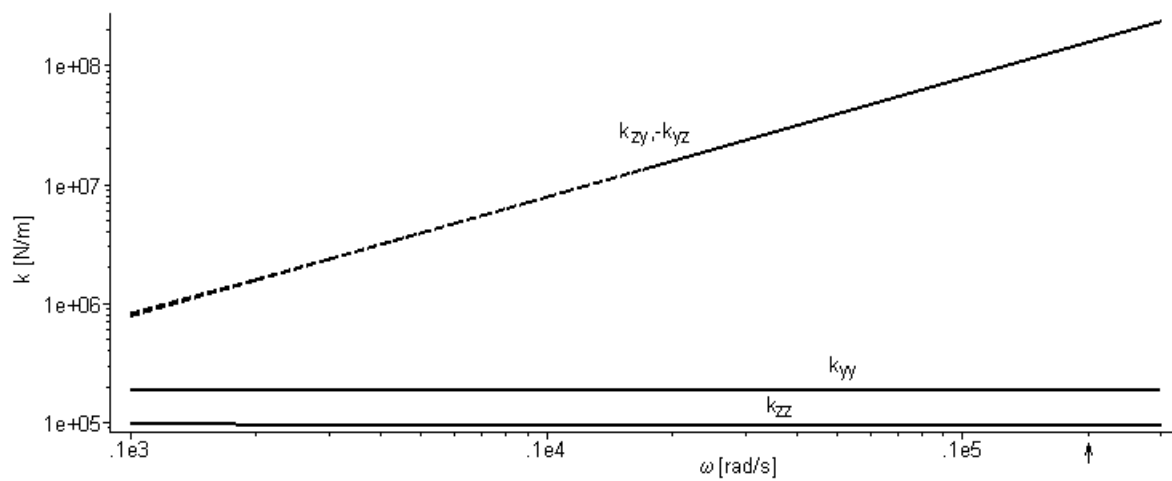
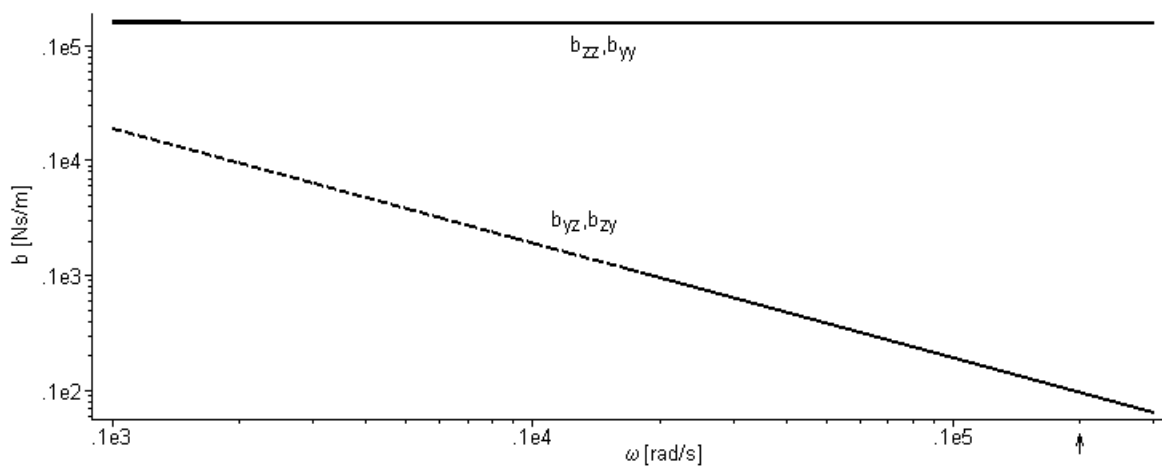


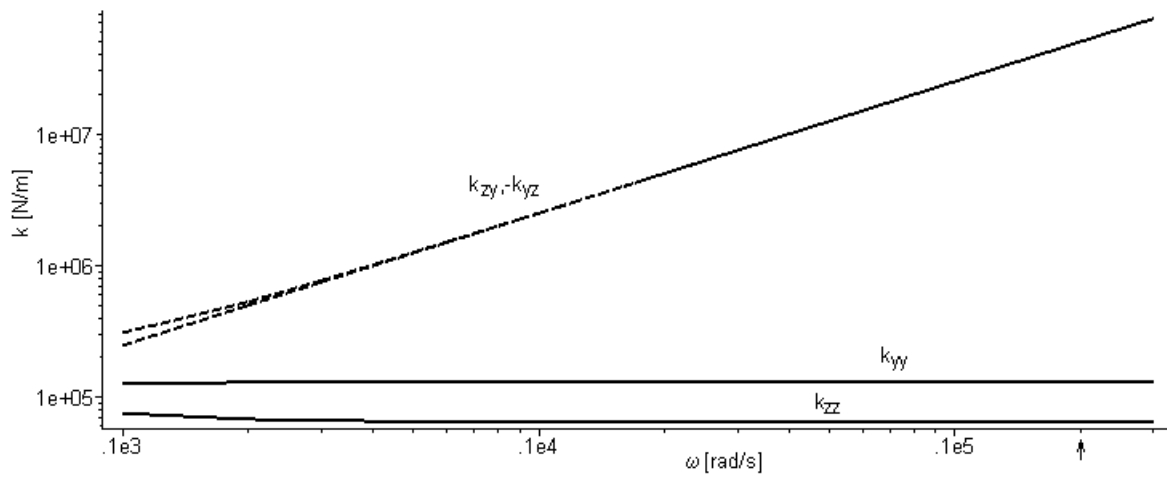
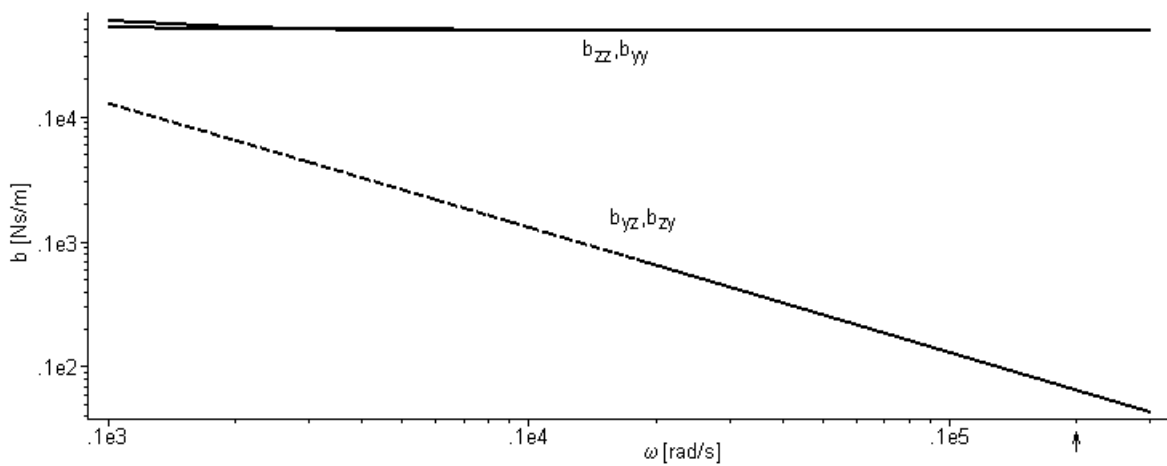
Obrázek 52: Tuhosti ložiska – $t = 40$ °C, $c = 22$ μ m

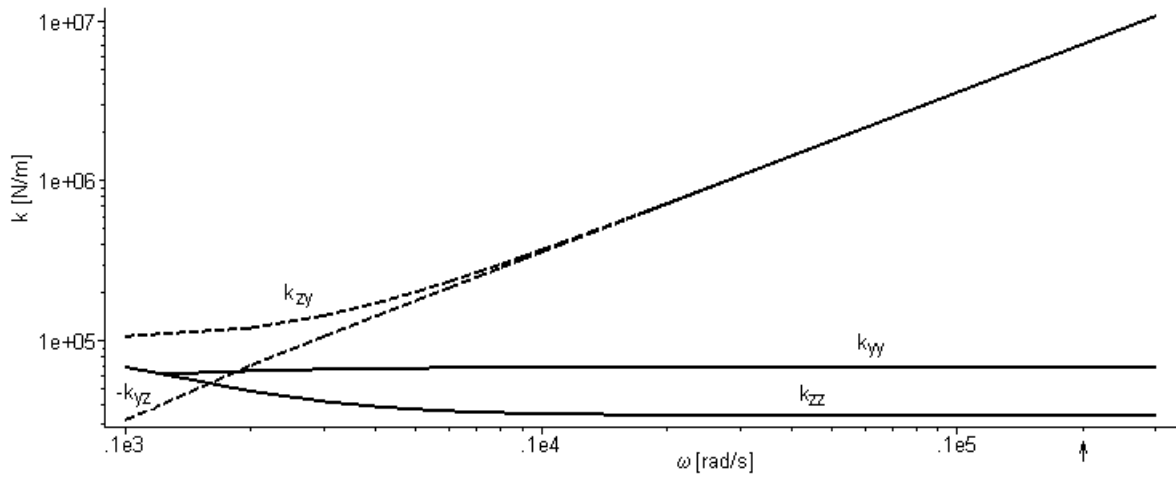
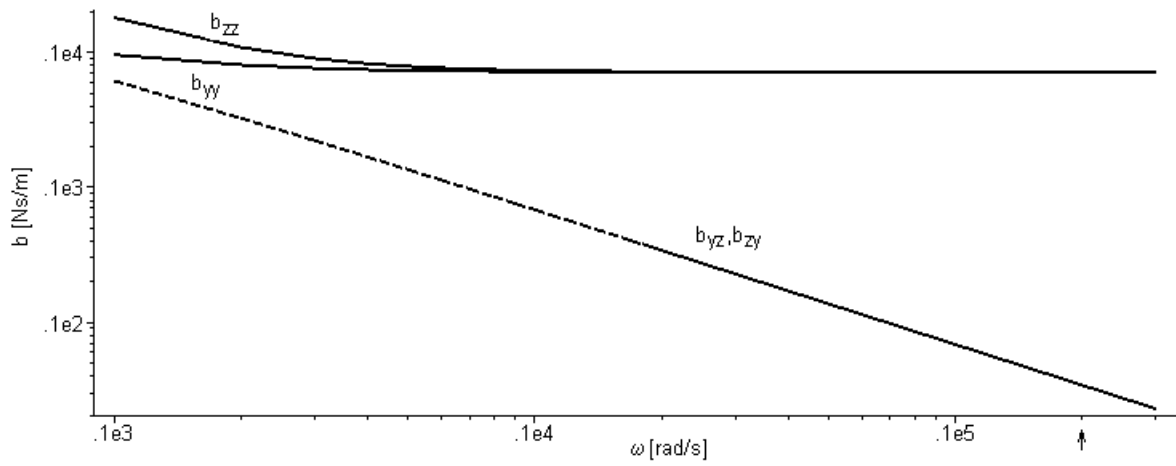


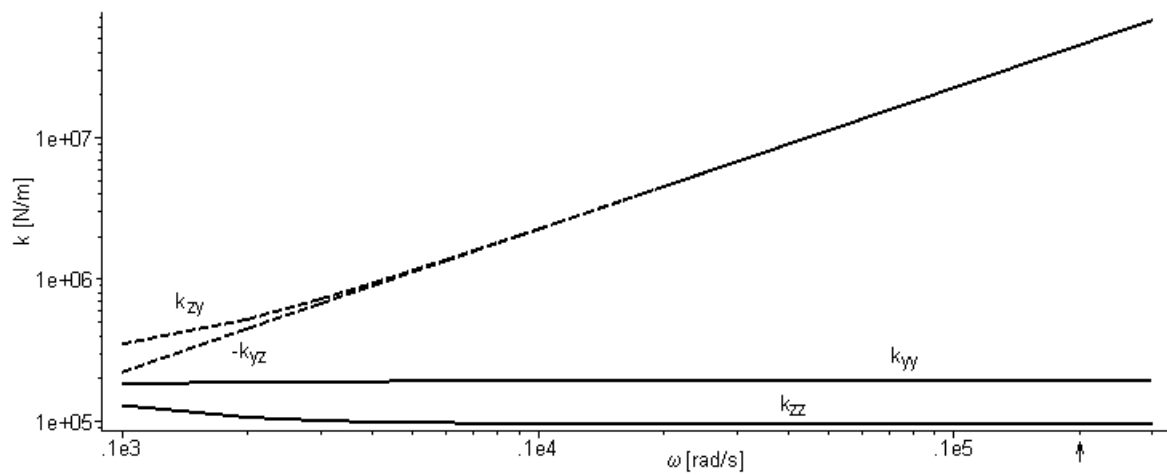
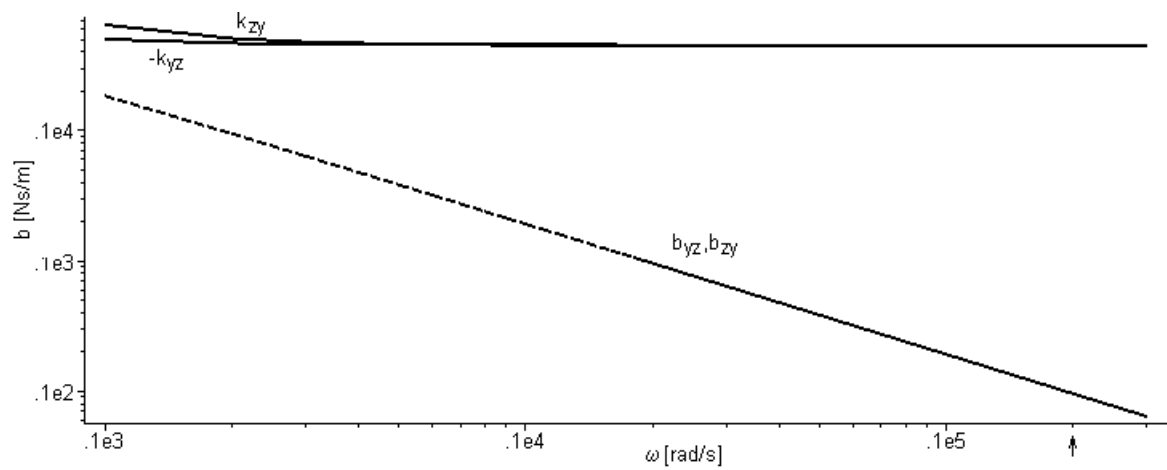
Obrázek 53: Tlumení ložiska – $t = 40$ °C, $c = 22$ μ m

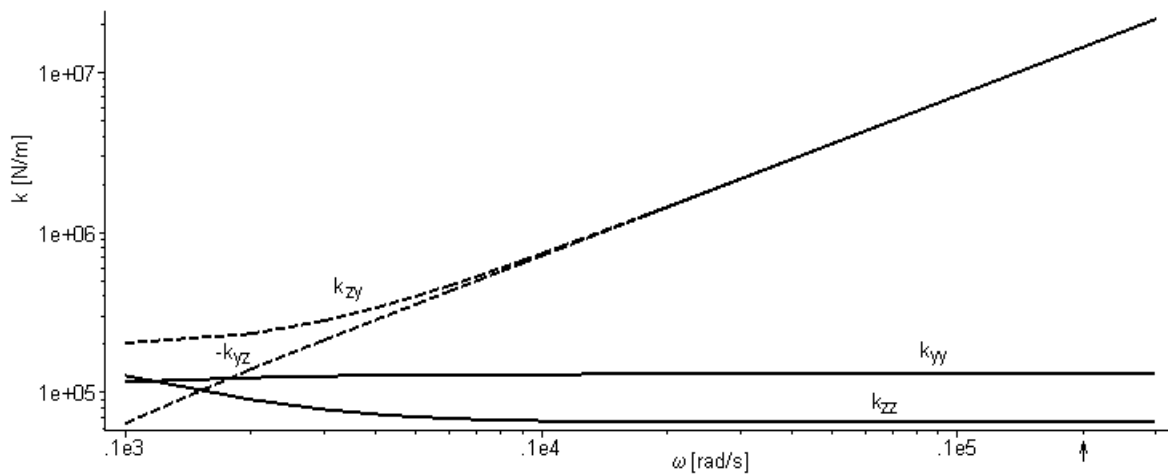
Obrázek 54: Tuhosti ložiska – $t = 40$ °C, $c = 42$ μm Obrázek 55: Tlumení ložiska – $t = 40$ °C, $c = 42$ μm

Obrázek 56: Tuhosti ložiska – $t = 100\text{ }^\circ\text{C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$ Obrázek 57: Tlumení ložiska – $t = 100\text{ }^\circ\text{C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$

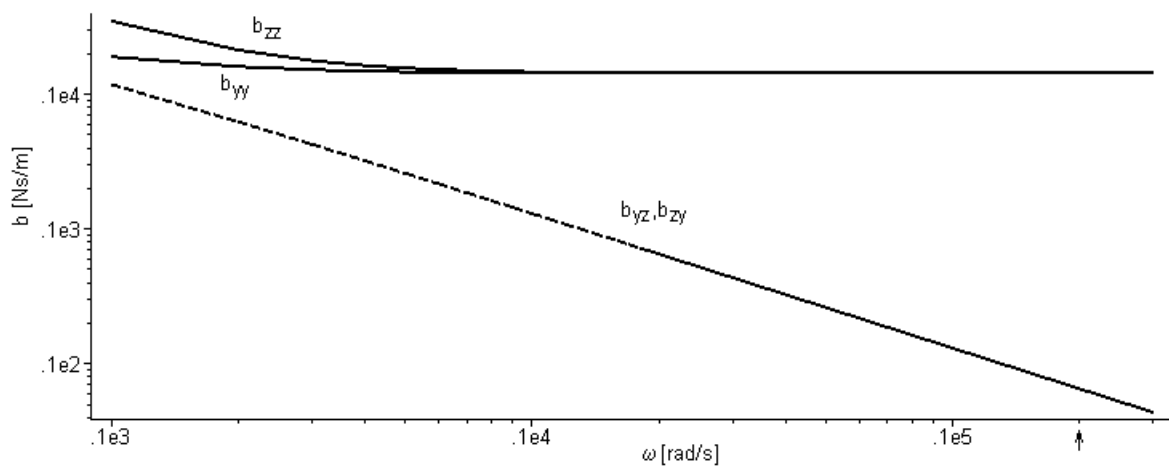
Obrázek 58: Tuhosti ložiska – $t = 100$ °C, $c = 22$ μ mObrázek 59: Tlumení ložiska – $t = 100$ °C, $c = 22$ μ m

Obrázek 60: Tuhosti ložiska – $t = 100^\circ\text{C}$, $c = 42 \mu\text{m}$ Obrázek 61: Tlumení ložiska – $t = 100^\circ\text{C}$, $c = 42 \mu\text{m}$

Obrázek 62: Tuhosti ložiska – $t = 150\text{ }^\circ\text{C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$ Obrázek 63: Tlumení ložiska – $t = 150\text{ }^\circ\text{C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$

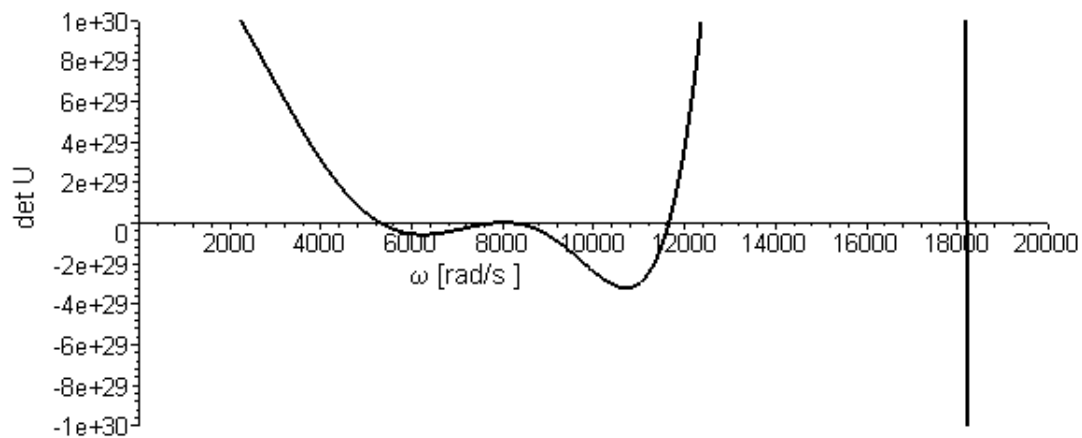


Obrázek 64: Tuhosti ložiska – $t = 150^\circ\text{C}$, $c = 22 \mu\text{m}$

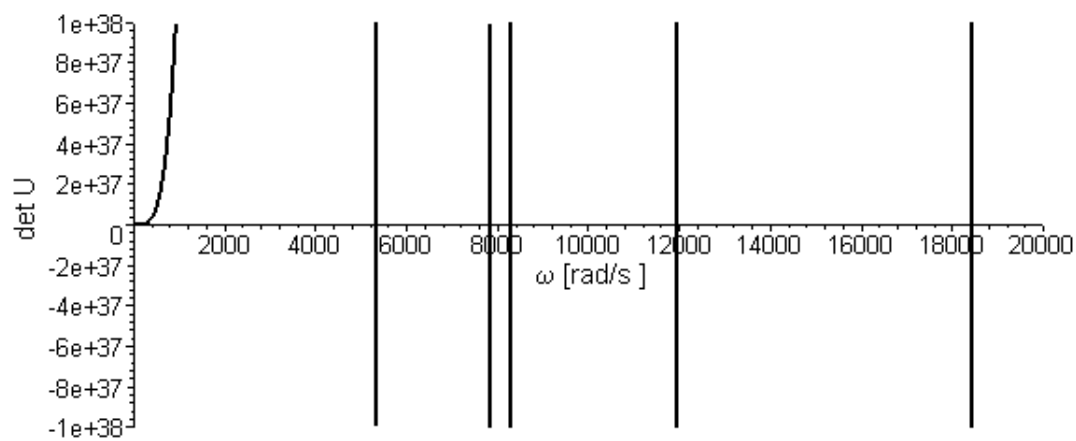


Obrázek 65: Tlumení ložiska – $t = 150^\circ\text{C}$, $c = 22 \mu\text{m}$

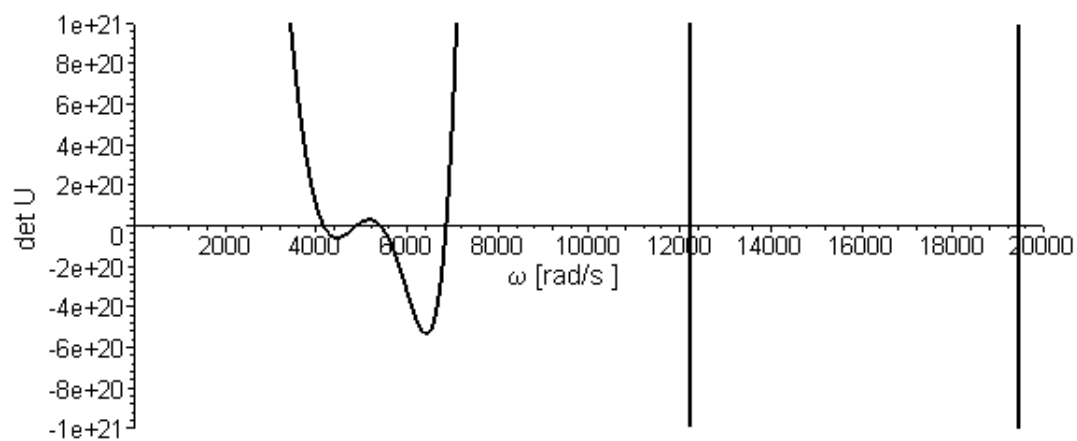
A.2 Kritické otáčky rotoru s izotropními ložisky



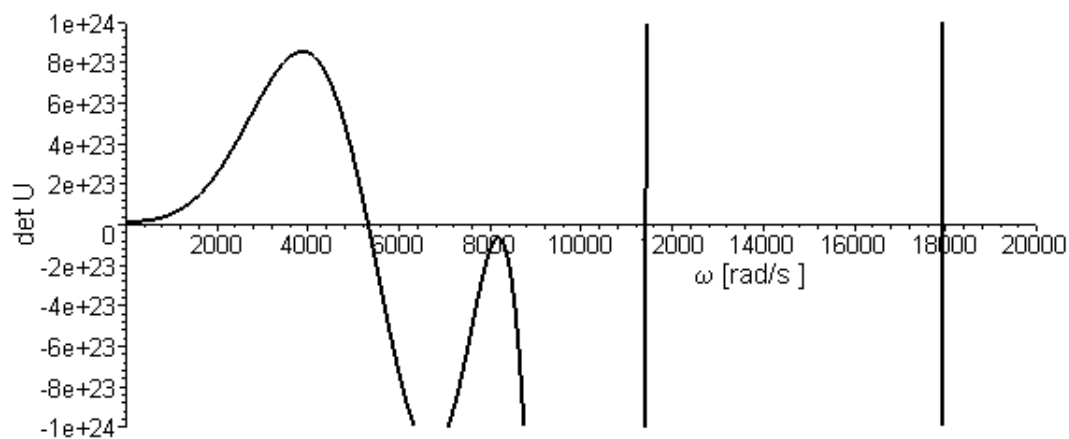
Obrázek 66: Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2 \text{ N s m}^{-1}$



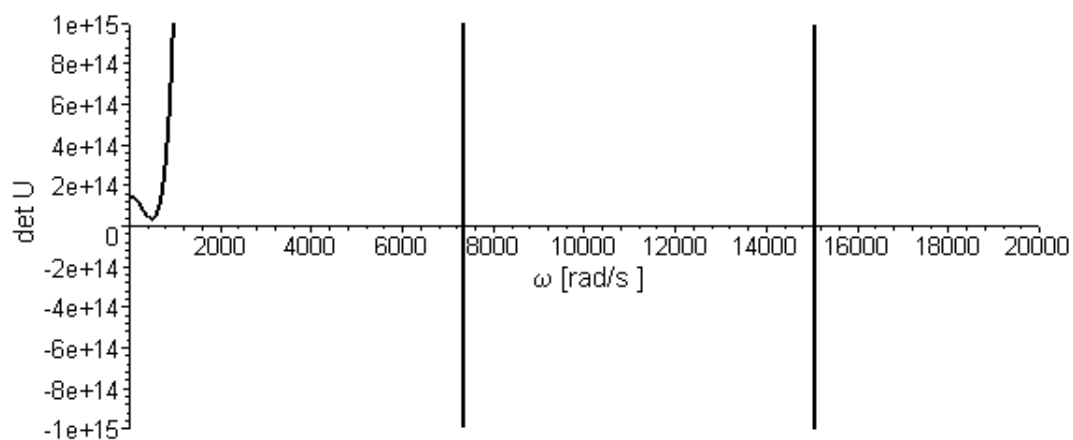
Obrázek 67: Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^8 \text{ N s m}^{-1}$



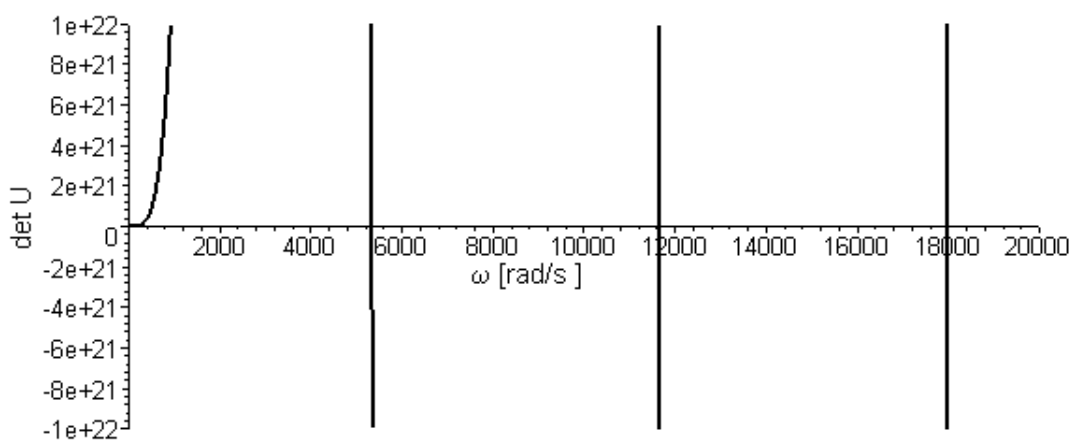
Obrázek 68: Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2 \text{ N s m}^{-1}$



Obrázek 69: Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^4 \text{ N s m}^{-1}$

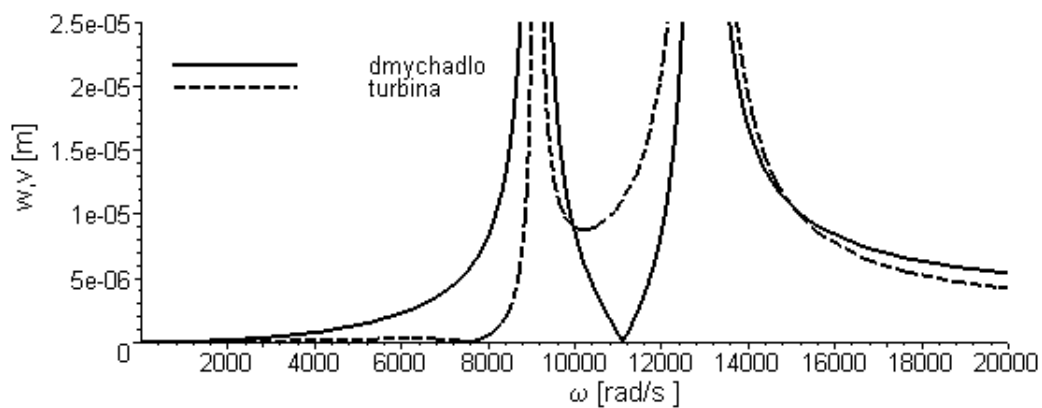


Obrázek 70: Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2 \text{ N s m}^{-1}$

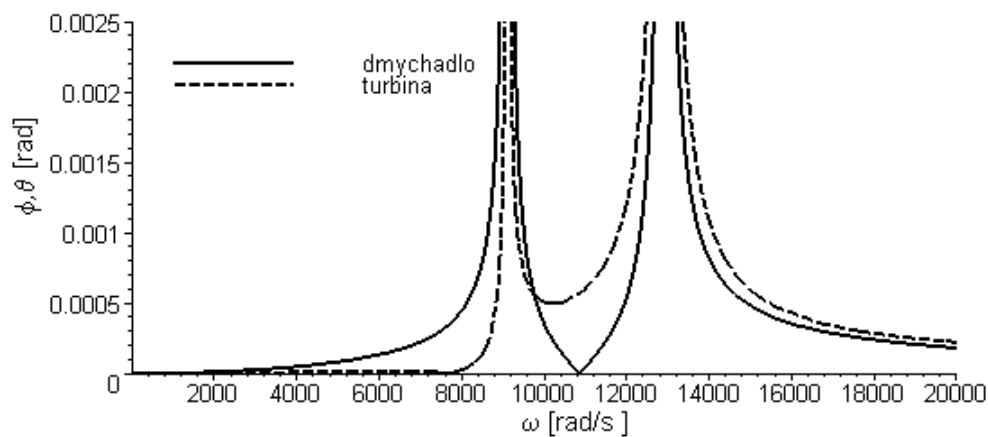


Obrázek 71: Frekvenční determinant – $k = 1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^4 \text{ N s m}^{-1}$

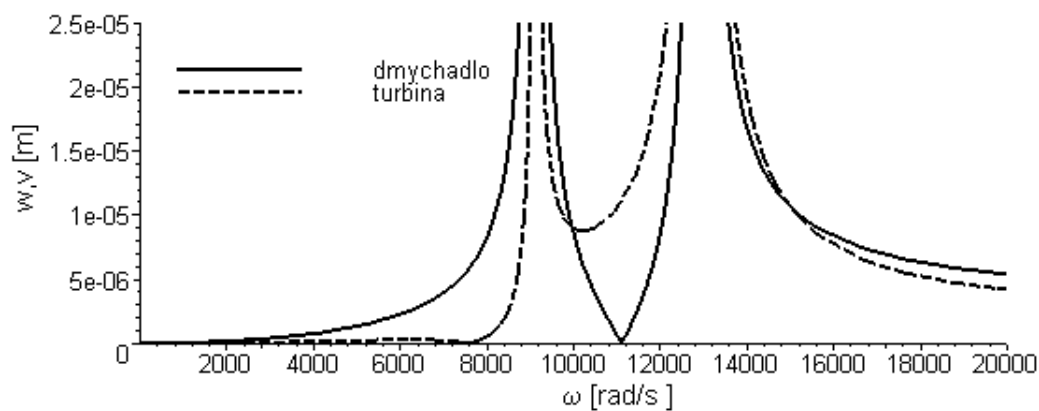
A.3 Amplitudové charakteristiky rotoru s izotropními ložisky



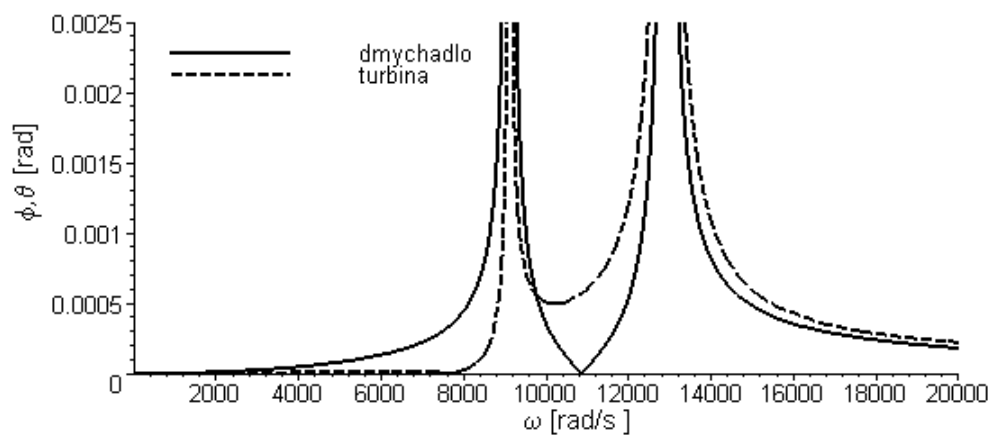
Obrázek 72: Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \text{ N s m}^{-1}$



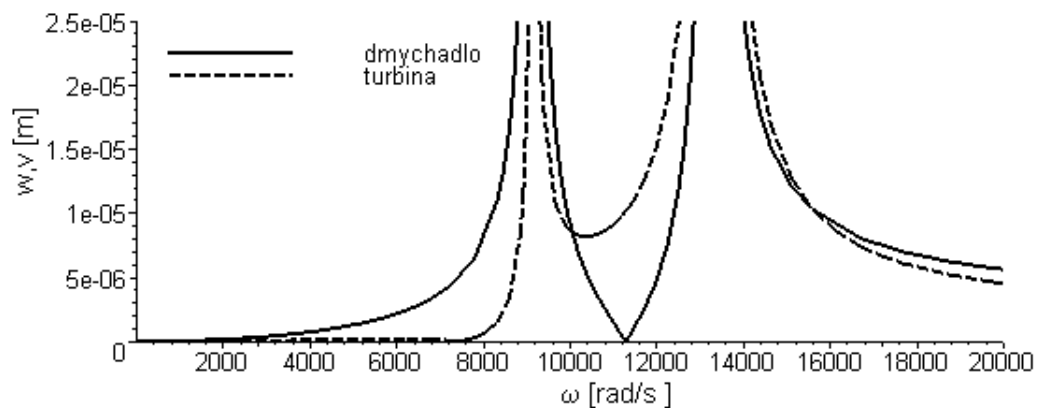
Obrázek 73: Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \text{ N s m}^{-1}$



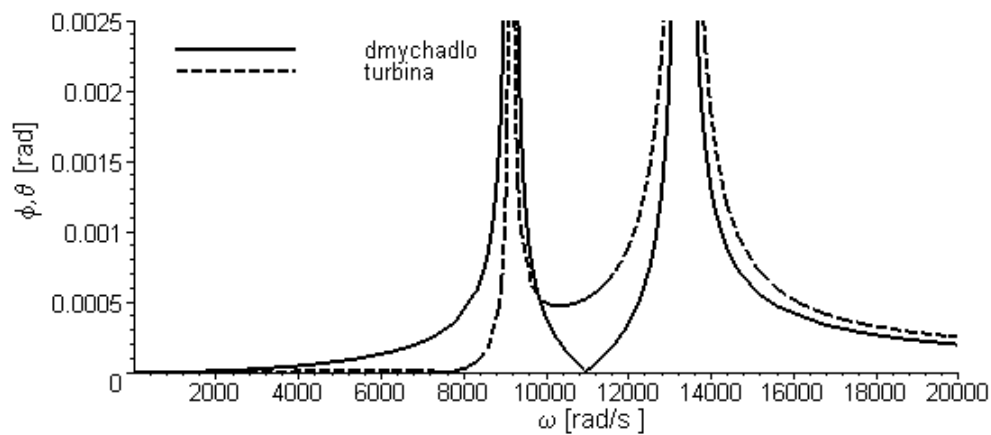
Obrázek 74: Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2 \text{ N s m}^{-1}$



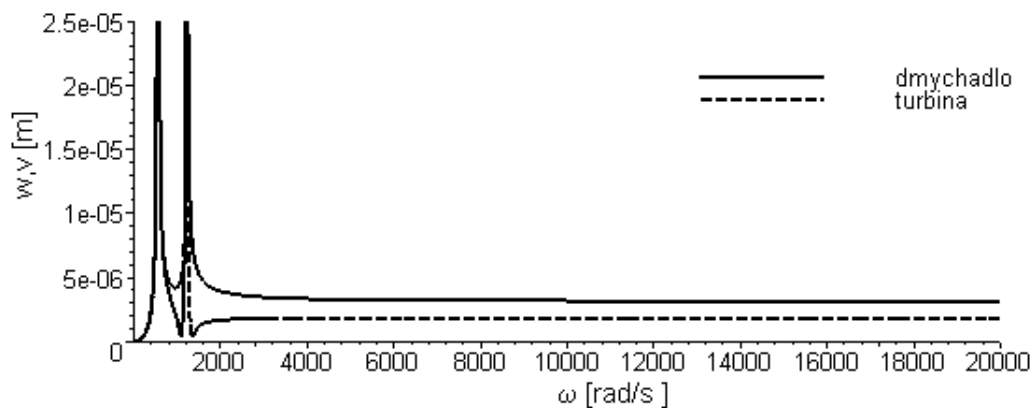
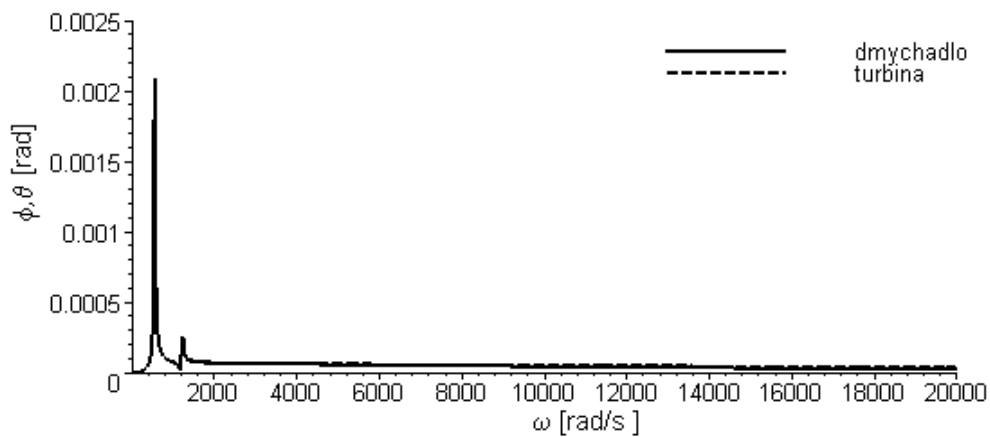
Obrázek 75: Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2 \text{ N s m}^{-1}$

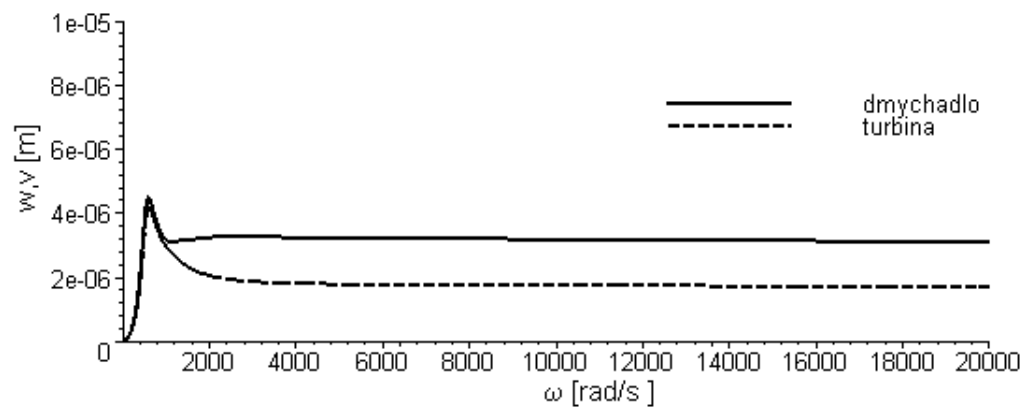


Obrázek 76: Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^8 \text{ N s m}^{-1}$

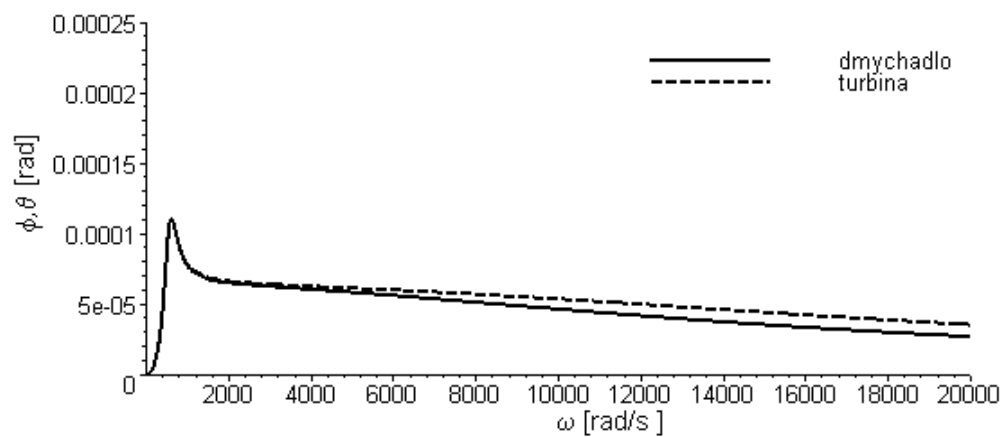


Obrázek 77: Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^8 \text{ N s m}^{-1}$

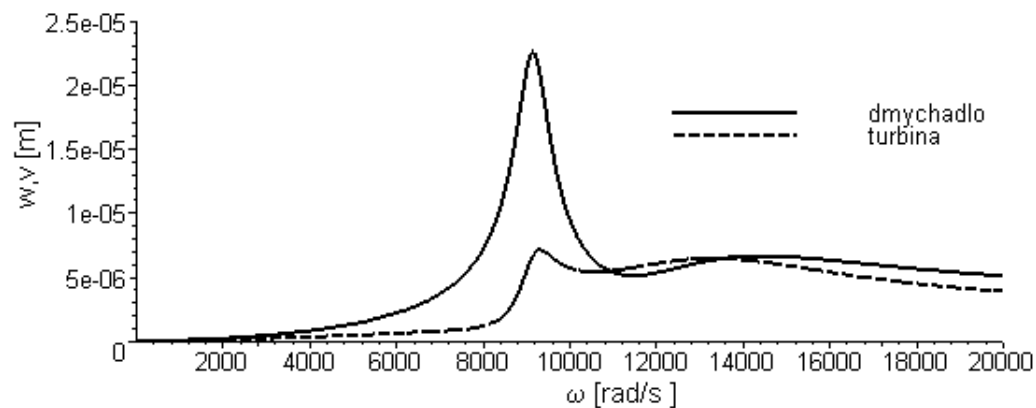
Obrázek 78: Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \text{ N s m}^{-1}$ Obrázek 79: Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \text{ N s m}^{-1}$



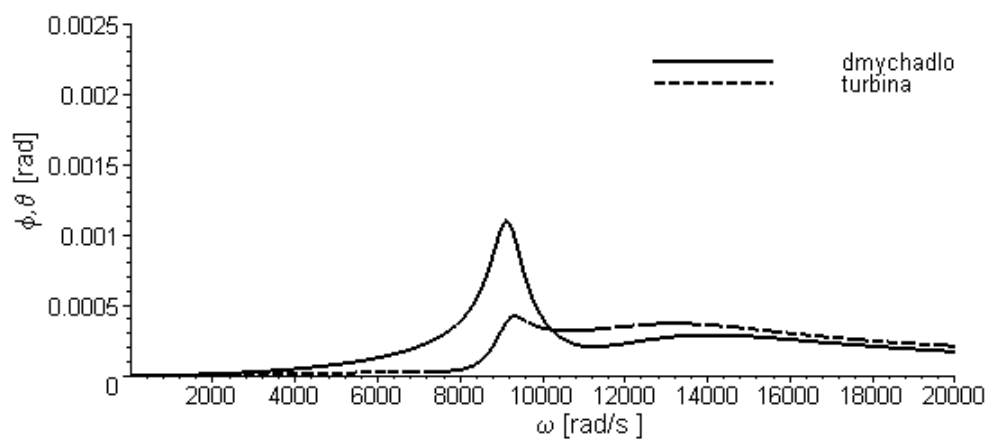
Obrázek 80: Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2 \text{ N s m}^{-1}$



Obrázek 81: Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^2 \text{ N s m}^{-1}$

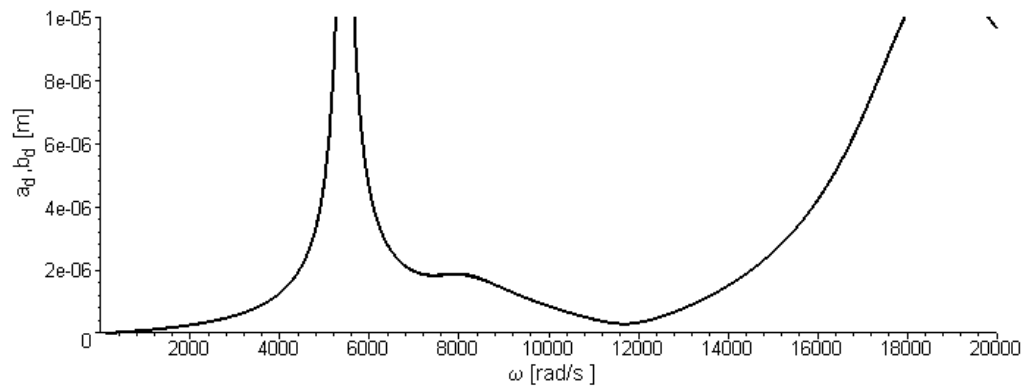


Obrázek 82: Amplitudy průhybů – $k = 1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^4 \text{ N s m}^{-1}$

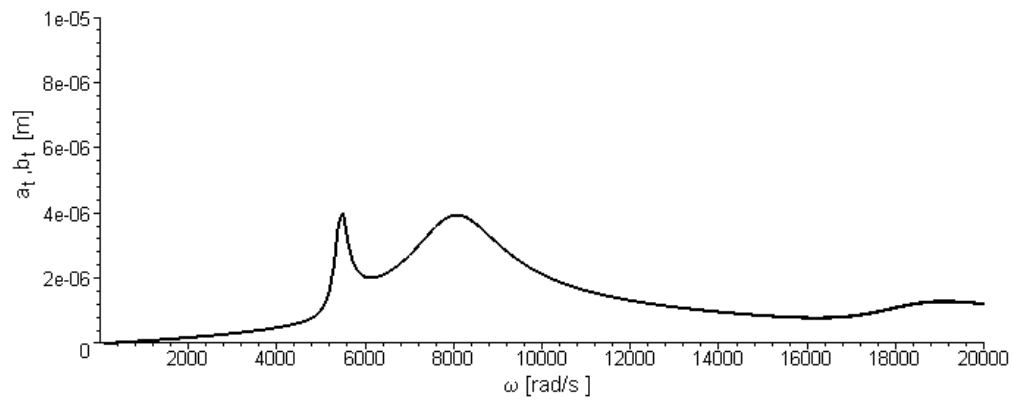


Obrázek 83: Amplitudy natočení – $k = 1 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-1}$, $b = 1 \cdot 10^4 \text{ N s m}^{-1}$

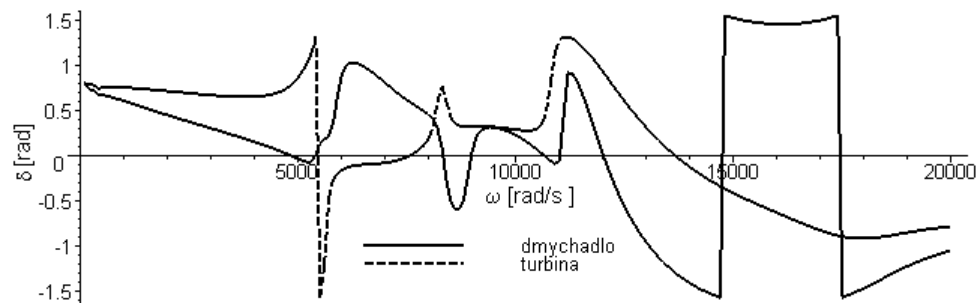
A.4 Amplitudy modelu s kruhovými kluznými ložisky



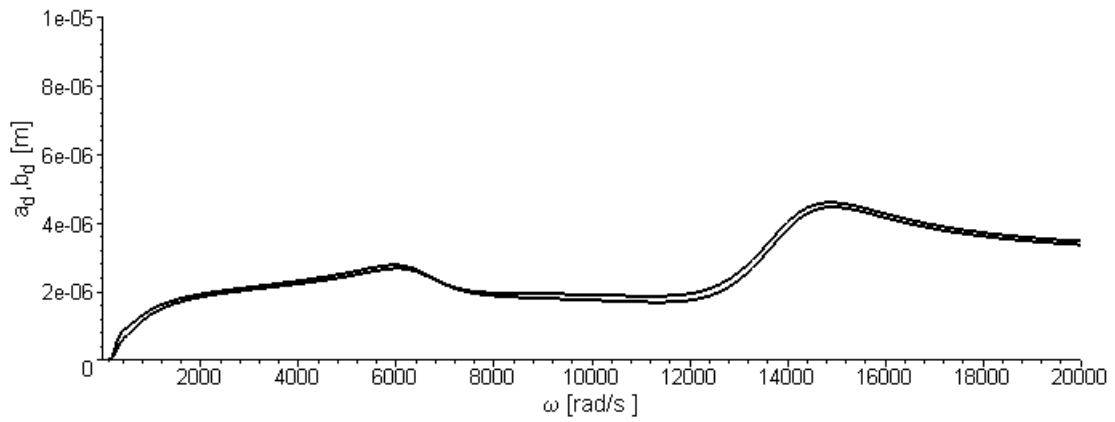
Obrázek 84: Průhyby dmychadlového kola – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^{\circ}$



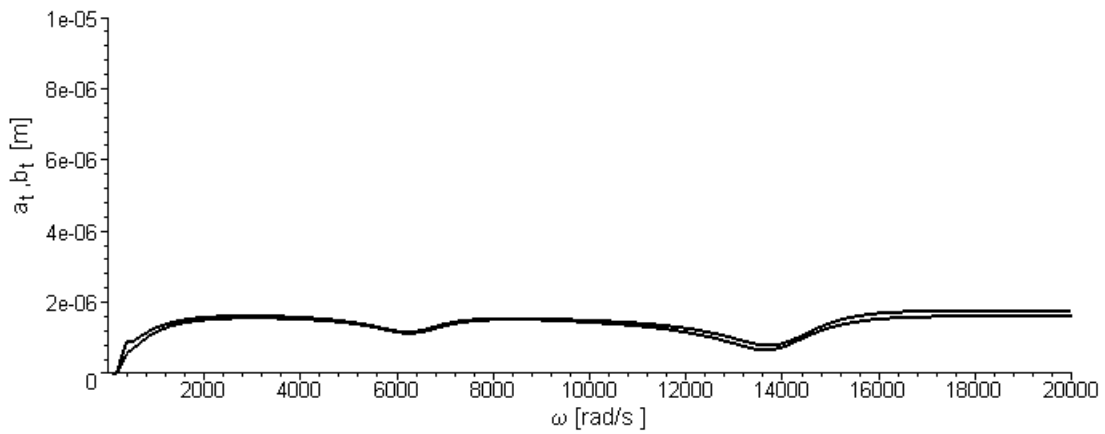
Obrázek 85: Průhyby turbínového kola – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^{\circ}$



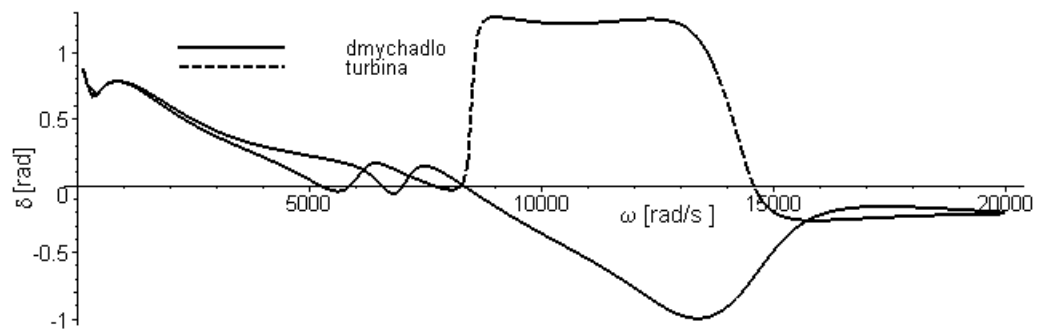
Obrázek 86: Orientace eliptické trajektorie – $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^{\circ}$



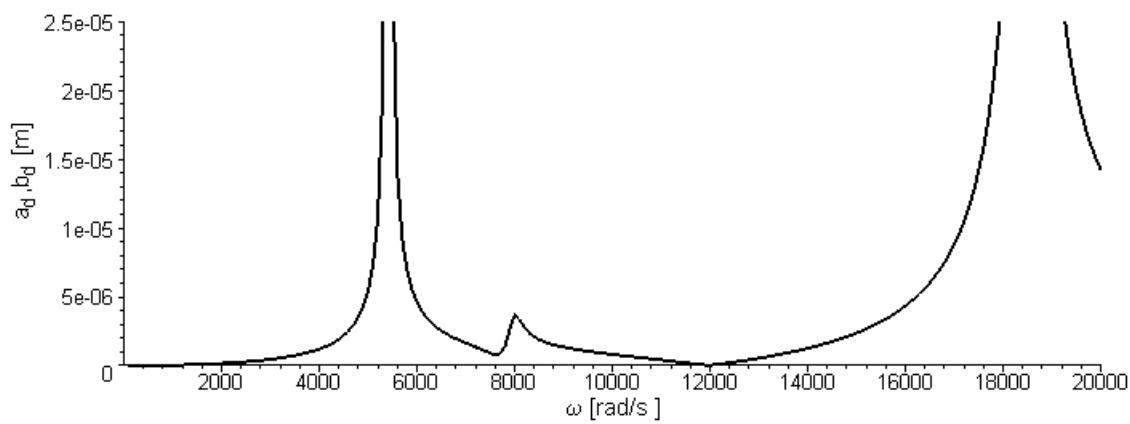
Obrázek 87: Průhyby dmychadlového kola – $t = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, $c = 42 \text{ } \mu\text{m}$, $\psi = 180^\circ$



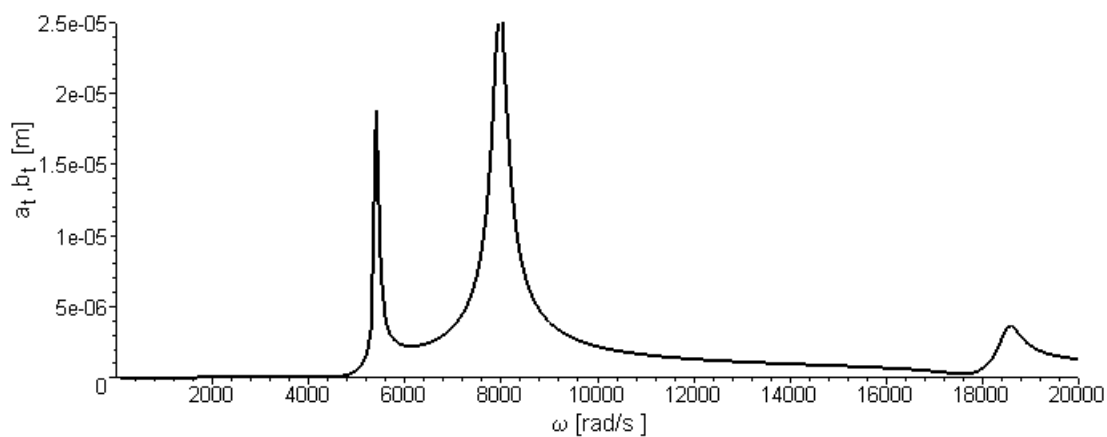
Obrázek 88: Průhyby turbínového kola – $t = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, $c = 42 \text{ } \mu\text{m}$, $\psi = 180^\circ$



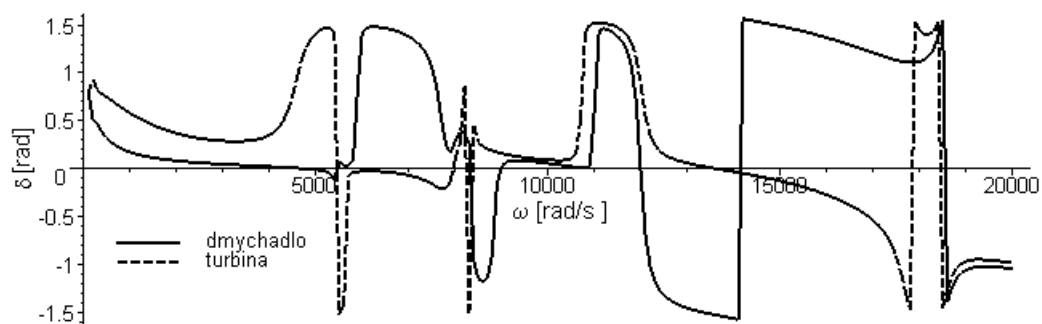
Obrázek 89: Orientace eliptické trajektorie – $t = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, $c = 42 \text{ } \mu\text{m}$, $\psi = 180^\circ$



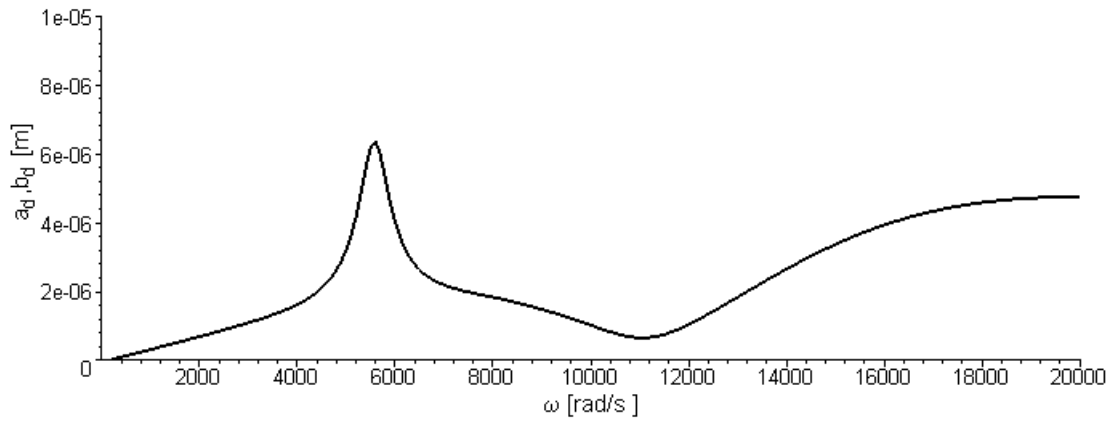
Obrázek 90: Průhyby dmychadlového kola – $t = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^{\circ}$



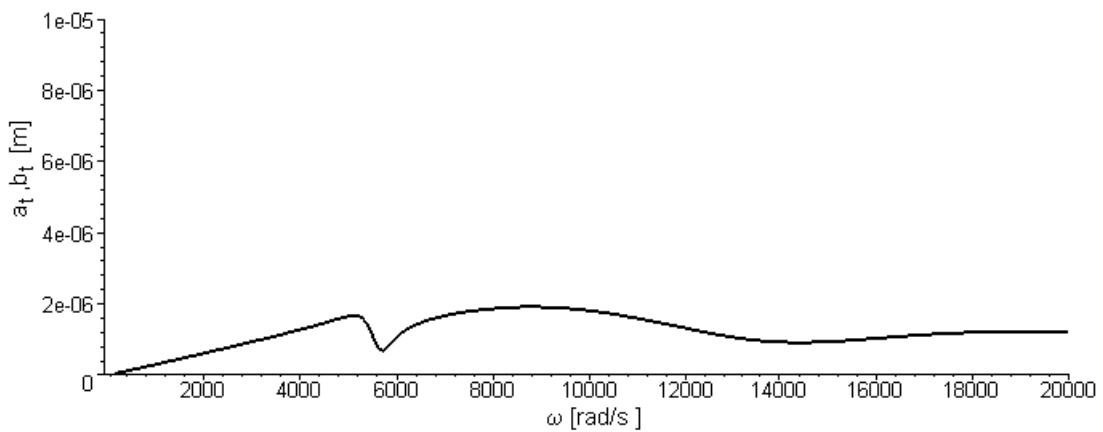
Obrázek 91: Průhyby turbínového kola – $t = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^{\circ}$



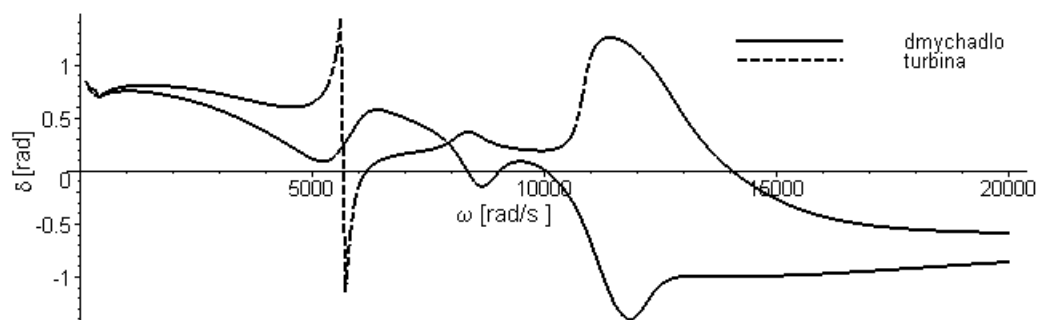
Obrázek 92: Orientace eliptické trajektorie – $t = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$, $c = 15\text{ }\mu\text{m}$, $\psi = 180^{\circ}$



Obrázek 93: Průhyby dmychadlového kola – $t = 150$ °C, $c = 15$ μm , $\psi = 180^\circ$



Obrázek 94: Průhyby turbínového kola – $t = 150$ °C, $c = 15$ μm , $\psi = 180^\circ$



Obrázek 95: Orientace eliptické trajektorie – $t = 150$ °C, $c = 15$ μm , $\psi = 180^\circ$