

Obsah	
1.	Kapitola Roboty, manipulátory a jejich aplikace ..... 7
	1.1. Něco málo z historie ..... 7
	1.2. Všeobecné souvislosti ..... 8
	1.3. Automatizace a roboty ..... 12
	1.4. Klasifikace robotů ..... 12
	1.5. Oblasti využití robotů ..... 18
	1.6. Robot kontra manipulátor ..... 24
2.	Kapitola Matematický background ..... 28
	2.1. Úvod do vektorového počtu ..... 28
	2.2. Základní geometrické pojmy ..... 29
	2.3. Obecné vektorové prostory ..... 31
	2.4. Matice přechodu ..... 36
	2.5. Transformace souřadnic vektorů ..... 37
	2.6. Složená zobrazení ..... 39
	2.7. Unitární a normované prostory ..... 40
	2.8. Ortonormální báze a ortonormální matice ..... 48
	2.9. Rotace v $\mathbb{R}^3$ ..... 50
	2.10. Souhrn základních vlastností matic ..... 53
3.	Kapitola Homogenní souřadnice ..... 55
	3.1. Homogenní souřadnice ..... 55
	3.2. Inverzní homogenní transformace ..... 61
	3.3. Rotace a translace ..... 62
	3.4. Složené homogenní transformace ..... 63
4.	Kapitola Kinematika robotů ..... 65
	4.1. Souřadnice článků ramene robotů ..... 65
	4.2. Denavit-Hartenbergova koncepce (D-H) ..... 69
	4.3. Rovnice ramene robotů ..... 71
	4.4. Rychlosti a zrychlení ..... 76
	4.5. Přímá a inverzní úloha robotiky ..... 79

- [13] B. Chvátal, R. Matúčka, J. Talácko. Průmyslové roboty a manipulátory. SNTL, Praha, 1990.
- [14] B. Siciliano, O. Khatib (Eds.). Handbook of Robotics. Berlin, Springer-Verlag, 2008.
- [15] D. Liu, L. Wang, K. Ch. Tan (Eds.) Design and Control of Intelligent Robotic Systems. Berlin, Springer-Verlag, 2009.
- [16] S. M. LaValle. Planning Algorithms. 2006, Cambridge University Press.
- [17] V. Záda. Optimal Control of Robots. In: International Conference on Computer, Communication and Control Technologies, CCT'03, Volume V, July 31-August 1 2003, Orlando, Florida, USA. Pp. 330-335. ISBN: 980-6560-05-1.
- [18] V. Záda. Possibilities of a Spline-function Exploiting in Optimal Control of Robots. In: RAAD 2000, p. 111-116.
- [19] V. Záda. Robot Control under Surface Constraints. International Journal ROBOTICA & MANAGEMENT, Romania, Supplement, 2004. Pp. 64-69. ISSN 1453-2069.
- [20] V. Záda, A. Chatraei, D. Lindr. Analytical Solution of Inverse Task for Robot with Six Rotational Joints and its Concrete Utilization. In: Engineering Mechanics 2009, Svratka, Czech Republic, pp. 1495-1502. Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Science of the Czech Republic, Prague. ISBN 978-80-86246-35-2.
- [21] V. Záda, A. Chatraei, D. Lindr. Learning Control for Robot Manipulators. In: Engineering Mechanics 2009, Svratka, Czech Republic, pp. 1489-1495. Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Science of the Czech Republic, Prague. ISBN 978-80-86246-35-2.

- [22] A. Chatraei, V. Zada. A Combined Optimal Control Technique for Robot Manipulators. International Scientific Journal Acta Technica. Vol. 56 (2011), No. 1, pp. 23-42. ISSN 0001-7043.
- [23] A. Chatraei, V. Zada, D. Lindr. Modelling and Identification of Positioning part of the KUKA robot. International Scientific Journal Acta Technica, Vol. 56 (2011), No. 3, pp. 235-254. ISSN 0001-7043

recenzent: Prof. Ing. Jan Skalla, CSc.

© doc. Ing. Mgr. Václav Záda, CSc. - 2012

ISBN 978-80-7372-882-3

4.6.	Konfigurace nástroje.....	84
4.7.	Numerické řešení inverzní úlohy.....	86
4.8.	Řešený příklad – první a inverzní úloha robota s pěti stupni volnosti.....	90
5.	Kapitola Analýza pracovního prostoru, interpolace a plánování trajektorie.....	101
5.1.	Analýza pracovního prostoru.....	101
5.2.	Řízení po spojitě dráze.....	104
5.3.	Interpolace pohybu.....	106
5.4.	Dráhové řízení.....	117
6.	Kapitola Úvod do analytické mechaniky.....	122
6.1.	Vazby.....	122
6.2.	Princip virtuálních posunutí.....	122
6.3.	Lagrangeovy rovnice II. druhu.....	125
6.4.	Disipační funkce.....	130
7.	Kapitola Dynamika robota.....	133
7.1.	Kinetická energie robota.....	133
7.2.	Potenciální energie robota.....	136
7.3.	Lagrangeovy rovnice robota.....	137
7.4.	Dynamika pohonu.....	138
7.5.	Rovnice dynamiky robota.....	142
8.	Kapitola On-Line parametrická estimace.....	146
8.1.	Úprava rovnice a filtrace signálů.....	146
8.2.	Estimační metody založené na predikci chyby.....	147
8.3.	Gradientní estimator.....	148
8.4.	Estimace metodou nejmenších čtverců.....	149
9.	Kapitola Řízení robota.....	154
9.1.	Řízený kroužecí moment.....	155
9.2.	Řízení k bodu s využitím PD regulátoru.....	157
9.3.	PD řízení sledováním předepsané trajektorie.....	159

### 13. Literatura

- [1] A. Fasano, S. Marmi. Analytical Mechanics. Oxford University Press, 2002.
- [2] A. Ralston. Základy numerické matematiky. Academia, Praha, 1973.
- [3] M. Nekvinda, J. Šrubař, J. Vild. Úvod do numerické matematiky. SNTL, Praha, 1976.
- [4] D. M. Himmelblau. Applied Nonlinear Programming. McGraw/Hill, 1972.
- [5] L. E. Elsgolc. Calculus of Variations. Oxford, Pergamon Press, 1963. (Český překlad SNTL, 1965).
- [6] W. Rudin. Analýza v reálném a komplexním oboru. Praha, Academia, 1977.
- [7] B. Bronglio, R. Lozano, B. Maschke, O. Egeland. Dissipative Systems Analysis and Control. London. Springer-Verlag, 2007.
- [8] V. Matík a kol. Umeľá inteligencia, 1.-5. díl. Praha, Academia, 1993, 1997, 2000, 2003, 2007.
- [9] L. Kárník, J. Novák-Marcincin. Biorobotická zařízení. Mafly Slezsko, 1999.
- [10] R. J. Schilling. Fundamentals of Robotics, Analysis & Control. New Jersey, Prentice Hall, 1990.
- [11] J. Angeles. Fundamentals of Robotics Mechanical Systems. New York, Springer-Verlag, 2003.
- [12] C. Canudas de Win, B. Siciliano, G. Bastin. Theory of Robot Control. Springer-Verlag, 1996.

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI  
Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

# Robotika

## Matematické aspekty analýzy a řízení

*Václav Záda*

**Poděkování:** Tento text vznikl díky podpoře projektu ESF CZ.1.07/2.2.00/07.0247 Reflexe požadavků průmyslu na výuku v oblasti automatického řízení a měření.

**Věta 1.** Aplikace Barbalatova lemmatu  
Necht funkce  $V(t, \mathbf{x})$  je zdola omezená a její derivace  $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  je negativně semidefinitní a stejnoměrně spojitá v čase. Potom

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, \mathbf{x}) = 0.$$

pro  $t \rightarrow \infty$ .  
což je ve sporu s předpokladem, že funkce  $f(t)$  má konečnou limitu

$$|f(t_n + \delta) - f(t_n - \delta)| \geq \varepsilon_1 \delta$$

Odtud

$$\left| \int_{t_n + \delta}^{t_n - \delta} f(t) dt \right| = \int_{t_n + \delta}^{t_n - \delta} |f(t)| dt \geq \varepsilon_1 \delta.$$

$f$  zachovává znaménko na integračním intervalu a tedy platí  
Odtud plyne s ohledem na spojitost  $f$  (dokonce stejnoměrnou), že

$$|f(t)| > \varepsilon_1 / 2$$

takže

$$\varepsilon_1 > |f(t_n)| = |f(t_n) - f(t) + f(t)| \leq |f(t_n) - f(t)| + |f(t)| \leq \varepsilon_1 / 2 + |f(t)|$$

Ale potom pro  $t$  takové, že platí  $|t - t_n| > \delta$ , dostáváme

$$|f(t) - f(t_n)| > \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

libovolná dvě  $t'$  a  $t''$ , pro něž  $|t' - t''| > \delta$ , platí

Poněvadž  $f(t)$  je stejnoměrně spojitá funkce, existuje  $\delta > 0$ , že pro

$$|f(t_n)| > \varepsilon_1.$$

Důkaz.

Poněvadž  $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$ , je funkce  $V$  monotónní a nerostoucí. Proto má limitu  $V_\infty$  pro  $t \rightarrow \infty$  a platí  $V_\infty \leq V(0, \mathbf{x}(0))$ . Zbytek plyne z Barbalatova lemmatu. □

## 12.4. Řešení rovnice $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$

V této části se budeme zabývat řešením rovnice

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (8)$$

kde  $\mathbf{A}$  je čtvercová konstantní matice typu  $n \times n$ ,  $\mathbf{x}(t)$  je neznámá funkce proměnné  $t$  dimenze  $n \times 1$  a podobně vektor  $\mathbf{b}$  je dimenze  $n \times 1$ . Vektor  $\mathbf{b}$  může být libovolnou měřitelnou funkcí času  $t$ . Analogicky k rozvoji funkce  $e^x$  v Taylorovu řadu se definuje **exponenciální matice** ve tvaru nekonečné řady

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}}{1!}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{A}^3}{3!}t^3 + \dots$$

Tato řada je absolutně konvergentní, má derivace všech řádů, je vždy regulární. Pro její derivaci podle  $t$  platí, jak se lze snadno přesvědčit,

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}.$$

Upravme rovnici (8) na tvar

$$\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

a násobme zleva maticí  $e^{-\mathbf{A}t}$

$$e^{-\mathbf{A}t} \dot{\mathbf{x}} - e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{A}\mathbf{x} = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{b}.$$

Levá strana této rovnice je derivace součinu exponenciály a  $\mathbf{x}$

$$\frac{d}{dt} (e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}) = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{b},$$

b) *Kaspar Schott* – vytvořil figurinu dívky hrající na citeru

a) *Leonardo da Vinci* – sestavil kráčeji figurinu lva

některé velikány z této doby a jejich konstrukční výtvoř:  
prospěcen nejen starověk, ale i středověk a novověk. Připomeňme zde mechanismem, který pohyboval křídly. Podobnými konstrukcemi byl figuriny. Zvláště se proslavil dřevěnou holubici se skrytým starověkých pramenů zkonsruoval pohyblivé hrající a mluvící teoretické mechaniky *Archytas z Tarentu* (kolem r. 400 př. n. l.). Dle samohybných mechanismů, je řecký matematik a zakladatel Prvím historicky doloženým konstrukterem automatů, jako Za součást kybernetiky se považuje i tzv. *teorie automatů*.

objektů jednoduše a to bez ohledu na jejich fyzikální podstatu. skutečnost, že úkoly i metody teorie řízení jsou pro určité třídy průběhu doby různě modifikována, ale v podstatě vyvíjející se stroje, živých organismech a ve společnosti. Tato definice byla v definovat jako vědu, zabývající se analýzou řízení mezi procesy řízení různé autotri vznik kybernetiky do roku 1948, kdy ji N. WIENER Ačkoli některé metody regulace se používaly již od starověku, datují

## 1.1. Něco málo z historie

V současné době probíhá prudký rozvoj robotiky jako speciální vědní disciplíny, která má výrazný mezinárodní charakter. Jsme svědky rostoucího počtu aplikací robotů do nejrozličnějších směrů a oblastí. V popředí zájmu stojí tradičně strojírenství, kde se roboty využívají v různých oborech. Imenujme zde především technologie zpracování, obrábění a meziperacní činnosti, u odlévacích a vsťrikovacích strojů, ve svařování, montáži, pro manipulaci a úpravu kovů atd. Roboty již dávno pronikly nejen do klasických oblastí průmyslové výroby, ale též do zdravotnictví, vojensví, kosmického prostoru, a dokonce i do moří a na dna oceánů. Jisté tedy stojí zato se jimi zabývat, což učiníme v tomto textu.

## Roboty, manipulatory a jejich aplikace

### 1. Kapitola

## Úvod

Tento text vznikl jako podpora autorových přednášek konaných v předmětech *Robotika* a *Inteligentní roboty* na Fakultě mechatroniky, informatiky a mezinárodních studií Technické univerzity v Liberci. Text zahrnuje především teoretické partie s minimem řešených příkladů. Praktické aplikace, včetně řešení konkrétních úloh, jsou součástí cvičení a laboratorních seminářů. V textu došlo k výraznému posílení matematického aparátu. Základní matematické prostředky byly shrnuty do kapitoly s názvem *Matematický background*. Doprovodné matematické metody jsou přímou součástí textu. V dodatcích I a II lze pak nalézt obtížnější podpůrné prostředky, které svým charakterem patří rovněž do aplikované matematiky. Oproti klasickým knihám, byla do textu zařazena kapitola věnovaná analytické mechanice, kapitola zaměřená na estimaci (odhad) parametrů a partie pojednávající o teorii stability. Téměř všechny vyslovené věty jsou doprovázeny důkazy, takže čtenář nemusí sahat po rozsáhlém aparátu, rozprostřeném do mnoha knih a časopiseckých článků. V doporučené literatuře lze nalézt dostupné publikace převážně knižního typu.

Vzhledem k tomu, že v textu uvedené výsledky jsou většinou již klasické (nové je uspořádání a některé důkazy), nesnažil jsem se doložit původ u všech jednotlivých poznatků. Často by to ani nebylo možné, neboť odkazy na literaturu se nevztahují k původním pramenům, nýbrž k pracím novějším.

Vzorci a obrázky mají samostatné číslování v každé kapitole. Odkazy na vzorce (či obrázky) v jiných kapitolách jsou proto vždy doprovázeny uvedením příslušné kapitoly.

Na závěr bych chtěl poděkovat kolegovi dr. Davidu Lindrovi za překreslení obrázků, své ženě za odstranění řady překlepů a recenzentovi prof. Janu Skalloví, CSc. za přečtení komplikovaného textu a řadu podnětných připomínek.

Václav Záda

Teorie robotů je někdy považována za speciální zaměření v rámci umělé inteligence. Avšak ukořelem robotiky je, kromě stavby „mozku

**1.2. Všeobecné souvislosti**

atd. Na svůj hlavní vývoj však umělá inteligence teprve čeká. hlavolamů, konverze k přirozenému jazyku, reprezentace znalostí scén, automatické dokazování, hraní šachů, řešení hříček a inteligence se zaměřují především na rozpoznávání obrázů, analýzu příslušných procesů počítače. Současné metody umělé lze jim porozumět natolik, aby mohly být využity k imitaci (myslení), že tyto zákonitosti jsou přístupny vědeckému zkoumání a základních kognitivních procesů (tj. procesů vnímání a racionálního přesvědčení, že existují určité obecné zákonitosti v pozadí názvem *umělá inteligence*. Tato disciplína je založena na Oba aspekty se projevují vznikem nového vědního oboru s než na člověka.

- snaha vytvořit dokonalého pomocníka, který by dovedl toleť, a snad i více než my a na něhož bychom se mohli více spolehnout, zákonitosti
- snaha změřit síly s přírodou, ověřit si, kam až sahají naše schopnosti a pokusem a napodobení přírody lépe pochopit její zákonitosti

následujících dvou aspektech:  
 různé mechanické hračky? Důvody lze spatřovat především v Vzniká tak otázka, v čem spočívá zájem člověka o roboty a studoval fyzikální, fonetickou a fyziologickou stránku řeči. který značně předčil svou dobu. Kempelen k tomu účelu podrobne vyznačte hráče té doby. Rovněž vytvořil vynález mluvicího stroje, v roce 1769 zkonstruoval Turka hracího šachy, který porážel i (e) *Wolfgang von Kempelen* (1734-1804), rodák z Bratislavy – již pianistiku sledující očima noty, která se po představení sama ukláněla (d) *Svýcar Pierre Jasquet Droz* (1721-1790) – vytvořil písate pohybuujícího rukama a prsty, dále automatickou kreslící figurku a (c) *Francois Jaspues de Vaucanson* (1709-1782) – zkonstruoval figuriny hrající na flétnu a píšťalu a dále plavající kachnu, která mávala křídly

9.4. Řízení v pracovním prostoru robota ..... 161  
 9.5. Řízení založené na transformaci stavu..... 163  
 10. Kapitola Adaptivní řízení robotů..... 168  
 10.1. Základní algoritmus..... 168  
 10.2. Alternativní algoritmus adaptivního řízení..... 173  
 11. Dodatek I Základy Ljapunovovy teorie stability ..... 178  
 11.1. Nelineární systémy a rovnovážné body..... 178  
 11.2. Ljapunovova přímá metoda, věty o stabilitě..... 185  
 11.3. Věty o nestabilitě..... 194  
 11.4. La Salleho věta..... 197  
 12. Dodatek II..... 200  
 12.1. Vlastní čísla matice setrvačnosti..... 200  
 12.2. Řešení přeúčtené soustavy lineárních rovnic ..... 201  
 12.3. Barbalatovo lemma..... 203  
 12.4. Řešení rovnice  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$  ..... 205  
 13. Literatura ..... 207

Budeme postupovat sporem. Necht'  $f(t)$  nekonečně konverguje k nule pro  $t \rightarrow \infty$ . Potom existuje takové  $\epsilon_1 > 0$ , že pro každé přirozené  $n$  existuje  $t_n > n$ , že

Důkaz.

**Lemma (Barbalat)**  
 Necht'  $f(t)$  je reálná funkce jedné reálné proměnné  $t$ , která je diferencovatelná pro  $t \geq 0$ . Existuje-li konečná limita  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  a derivace  $f'(t)$  funkce  $f$  podle  $t$  je stejnoměrně spojitá, potom platí  $\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) = 0$ .

V našem případě lze uvažovat interval  $I = (0, \infty)$ .

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \epsilon, \text{ potom } |f'(t)| < \delta, \text{ pro všechna } t_1, t_2 \in I \text{ platí:}$$

Reálná funkce proměnné  $t$  definovaná na nějakém intervalu  $I$  se nazývá *stejně spojitá* na  $I$ , jestliže ke každému  $\epsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$ , že pro všechna  $t_1, t_2 \in I$  platí:

**Definice 12.1**

Před vyslovením vlastního tvrzení si připomeňme, co znamená pojem stejnoměrně spojitosti.

V některých úlohách řízení robotů lze s určitou výhodou použít následující pomocné tvrzení, které svým charakterem spadá do klasické matematické analýzy. Jeho důsledkem je např. tvrzení podobné Ljapunovově větě o stabilitě.

**12.3. Barbalatovo lemma**

matice  $\mathbf{A}$  je regulární. Jde tedy skutečně o zobecnění známého případu řešení soustavy lineárních rovnic.

proto lze rovnici ihned integrovat a tedy odtud dostaneme

$$e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t) - e^{-\mathbf{A}t_0} \mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{b}(\tau) d\tau.$$

Násobením maticí  $e^{\mathbf{A}t}$  zleva a úpravou odtud dostaneme

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Výsledek můžeme shrnout do věty

**Věta 2.**  
 Necht'  $\mathbf{b}(t)$  je libovolná měřitelná (např. spojitá) funkce proměnné  $t$ , která je definovaná alespoň na intervalu  $\langle t_0, \infty \rangle$  a  $\mathbf{A}$  je konstantní čtvercová matice. Potom rovnice (2) má řešení (9) pro všechny hodnoty  $t \in \langle t_0, \infty \rangle$ .

Hlavním cílem tohoto textu je analyzovat a řízení robotů. Text je určen převážně pro studenty oborů se zaměřením na mechatroniku, automatizaci a elektrotechniku, proto byl zvolen poněkud netriviální přístup s řadou nových pohledů a řešení.

Autor tak přistupuje ke čtenáři s nadějí, že zvolená metoda vykladu najde adekvátní odezvu a stane se základem textem pro každého, kdo chce postupymi kroky proniknout do problematiky robotů a jejich aplikací.

Průmyslové roboty současně doby ve vztahu ke svému okolí se chovají jako tzv. *otěvřené systémy*. Pracují zpravidla podle pevně zadaného programu a správně fungují za podmínek, že výrobní proces je organizován s určitým pevným rytmem a nedochází k žádným náhodným změnám. V konkrétním případě to tedy znamená, že například objekty manipulace, se kterými robot pracuje, musí vždy zaujmout stejnou polohu a musí být stejně prostoroově orientovány. Tyto přístupy jsou již překonány a brzy budou nahrazeny systémy s nemalou dávkou umělé inteligence, schopné auto-adaptace a samonaučení se.

rozhodování.

Možnosti realizace samonaučení, zdokonalování jazyka umělé inteligence jsou zaměřeny na maximální možné využití a zpracování všech údajů, získaných od senzorů. Zde dochází k vývoji stále dokonalějších typů snímačů, řídicích počítačových systémů, k rozšiřování pamětí, zkracování doby přístupu do pamětí, zvyšování počtu operací za sekundu a v neposlední řadě k vývoji stále kvalitnějšího softwarového vybavení včetně nových prostředků umělé inteligence, především s ohledem na možnost využití počítačového vidění, rozpoznávání mluvněného slova a obecně slovní komunikace s robotem, využití ultrazvuku či laseru pro mapování prostředí apod. V této souvislosti poznamenejme, že člověk přijímá zhruba 85 % všech informací pomocí zraku, což samo demonstrovuje význam vizuálního senzoru pro roboty. Kromě rozpoznávání se vyvíjejí metody automatického plánování a využití možnosti metod tvůrčích řešení úkolů, kde se aplikují metody matematické logiky a metody rozhodování.

Další tendence vývoje robotů s určitou dávkou inteligence jsou komunikací člověka s robotem, vývojem nových typů senzorů apod..

řadu algoritmických postupů přímo na roboty. Stejně jako obráběcí stroje i roboty musí pracovat s vysokou přesností. Ta činí u robotů až 0.01 mm v celém pracovním prostoru a je dosažitelná jedině za cenu značné tuhosti manipulačního zařízení. Zhruba od devadesátých let jsme svědky rostoucího zájmu snižovat hmotnosti robotů, což s sebou přináší nutnost používání nových materiálů, inovace strojařských konstrukcí ramen a využívání senzorů pro zajištění přesného polohování koncového efektoru robota. Současně zde vzniká nutnost realizovat výrazně výkonnější řídicí systémy, které musí v reálném čase zvládat úlohy dříve neznámé a nežádané. Především se jedná o řízení flexibilních ramen robotů při splnění požadavku přesného polohování, zamezení kmitání pružných členů ramene, kompenzace vůlí v kloubech, zajištění určitých forem adaptivity, schopnosti iteračního učení, počítačové vidění atd. až po schopnost autonomního plánování vlastní činnosti, čímž výrazně zasahujeme do oblasti umělého intelektu robota. Ve všech uvedených oblastech byl učiněn obrovský krok kupředu.

Z technického hlediska lze robotiku považovat za jeden z nejmladších směrů současné automatizační techniky. Rok od roku se intenzívně zvyšuje počet vyráběných a průmyslově využívaných robotů. Spolu s rozšiřováním oblastí jejich využívání a masovostí jejich nasazování se také rozšiřují vědecké a technické perspektivy jejich rozvoje.

Vývoj průmyslových robotů dosáhl relativně vysokého stupně, z hlediska možných perspektiv jsme však teprve na počátku. Další podstatný krok vpřed závisí na vyřešení řady stěžejních problémů. Projekčně-konstrukční a vědecko-vývojové práce v oblasti robotiky jsou vedeny zejména ve dvou hlavních směrech:

- zdokonalování dosavadních konstrukcí
- vývoj „kognitivních“ robotů, nadaných jistou dávkou umělé inteligence.

Tendence zdokonalování současných robotů zahrnují především práce vedoucí ke zvýšení spolehlivosti, přesnosti a akční rychlosti, k rozšiřování pracovní zóny, ke zvyšování manipulačních schopností. To souvisí s vývojem nových typů programovatelného řízení, s

$\mathbf{q}_0 \in \mathcal{Q}$ , že platí

vybrat podposoupnost  $\mathbf{q}^{k_n}$ , která je konvergentní. Existuje tedy pro  $n \rightarrow \infty$ . Prostor  $\mathcal{Q}$  je kompaktní, proto lze z posloupnosti  $\mathbf{q}^n$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{q}^n) \rightarrow \lambda_{\min}$$

$\mathcal{Q}$ , že

Z definice (1) plyne, že existuje posoupnost vektorů  $\mathbf{q}^n$  z prostoru

$$\lambda_{\min} < 0.$$

Potom zřejmě platí  $\lambda_{\min} \geq 0$ . Dokažme, že dokonce

$$\lambda_{\min} = \inf_{\mathbf{q} \in \mathcal{Q}} \{\lambda_{\min}(\mathbf{q})\}. \quad (1)$$

která jak víme jsou kladná, proto  $\lambda_{\min}(\mathbf{q}) > 0$ . Označme dále

$$\lambda_m(\mathbf{q}) = \min \{\lambda(\mathbf{q})\}; \lambda(\mathbf{q}) \text{ je vlastní číslo matice } M(\mathbf{q}).$$

prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Pro libovolné  $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$  označme

tedy vlastní číslo  $\lambda(\mathbf{q})$  je kladné, přesněji viz kapitola „Matematický background“. Necht  $\mathcal{Q}$  reprezentuje pracovní prostor robota. Ten je vždy omezený a uzavřený, jde tedy o kompaktní podmnožinu

$$0 < \mathbf{x}_T^T M(\mathbf{q}) \mathbf{x}_q = \lambda(\mathbf{q}) \mathbf{x}_T^T \mathbf{x}_q = \lambda(\mathbf{q}) \|\mathbf{x}_q\|_2^2,$$

Z pozitivní definitnosti plyne

$$M(\mathbf{q}) \mathbf{x}_q = \lambda(\mathbf{q}) \mathbf{x}_q$$

Matice setváčnosti  $M(\mathbf{q})$  je, jak víme, pozitivně definitní matice typu  $n \times n$ , závislá na vektoru  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ . Pro pevně zvolený vektor  $\mathbf{q}$  existuje nenulový vektor  $\mathbf{x}_q$  a vlastní číslo  $\lambda(\mathbf{q})$  takové, že platí

## 12.1. Vlastní čísla matice setváčnosti

## 12. Dodatek II

$$\mathbf{q}_{k_n} \rightarrow \mathbf{q}_0 \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Vlastní čísla matice spojitě závisí na koeficientech matice a ty jsou spojitě závislé na vektoru  $\mathbf{q}$  (spojitá závislost  $M(\mathbf{q})$  na  $\mathbf{q}$ ), proto platí

$$\lambda_m(\mathbf{q}) \text{ jsou spojitě funkce proměnné } \mathbf{q}.$$

Využitím tohoto faktu tak dostáváme

$$\lambda_m(\mathbf{q}_0) = \lambda_m(\lim \mathbf{q}_{k_n}) = \lim \lambda_m(\mathbf{q}_{k_n}) = \lambda_{\min}.$$

Avšak  $\lambda_m(\mathbf{q}_0) > 0$ , proto musí platit  $\lambda_{\min} > 0$ . □

## 12.2. Řešení přeuredené soustavy lineárních rovnic

Při řešení řady problémů v teorii i praxi se setkáváme s úlohou určit vektor neznámých parametrů  $\mathbf{p}$  ze soustavy rovnic

$$a_{k1}p_1 + a_{k2}p_2 + \dots + a_{km}p_m = b_k. \quad (2)$$

Počet těchto rovnic bývá větší než počet parametrů  $m$ , tj. proměnná  $k$  probíhá hodnoty  $1, 2, \dots, n$ . Takové úlohy vznikají např. při odhadování parametrů  $p_j$  realizací soustavy různých měření. Je-li  $n > m$ , není soustava (1) obecně řešitelná, takže se často spokojíme s nějakým přibližným řešením. Jednou z možností je použití metody nejmenších čtverců, kterou si zde uvedeme. Zde budeme předpokládat, že případné lineárně závislé rovnice byly ze soustavy (2) vypuštěny. Pokud je stále  $n > m$ , můžeme použít následující postup.

Při dosazení libovolných hodnot za  $p_k$  do soustavy (2) získáme chybu

$$\varepsilon_k = a_{k1}p_1 + a_{k2}p_2 + \dots + a_{km}p_m - b_k \quad (3)$$

pro  $k = 1, 2, \dots, n$ . Soustavu (3) můžeme přepsat do vektorové formy

Tato věta je nejjednodušší aplikována v teorii řízení robotů. Její použití je velmi snadné.

**Věta 11.8** Necht'  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitě diferencovatelná pozitivně definitní funkce, necht'  $V \leq 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}^n$  a necht' množina  $S = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) = 0\}$  obsahuje pouze triviální trajektorii  $x(t) = \mathbf{0}$ . Potom bod  $\mathbf{0}$  je globálně asymptoticky stabilní.

Další aplikací La Salleho principu ihned získáme následující větu.

Důkaz. Důkaz je bezprostředním důsledkem předchozího lemmatu.  $\square$

**Věta 11.7** Necht'  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitě diferencovatelná funkce, množina  $M_c = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq c\}$  je kompaktní a platí na ní  $V \leq 0$ . Jestliže množina  $S$  obsahuje pouze jedinou trajektorii  $x(t) = \mathbf{0}$ , potom je bod  $\mathbf{0}$  asymptoticky stabilní.

Definujme opět množinu  $M_c = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq c\}$  je kompaktní a platí na ní  $V \leq 0$ . Necht'  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitě diferencovatelná funkce, množina  $S = \{x \in M_c; V(x) = 0\}$ .

neomezeně blíží k  $N$  pro  $t \rightarrow \infty$ , dostáváme, že  $\Phi(t, x_0, 0)$  se neomezeně blíží k  $S_{\max}$  pro  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{b}.$$

Definujme nyní kvadratický funkcionál

$$J = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{b}). \quad (4)$$

Naším cílem je nalezení takového vektoru  $\mathbf{p}$ , aby funkcionál  $J$  nabyl co možná nejmenší hodnoty. Ve shodě se základy matematické analýzy derivujeme  $J$  podle  $\mathbf{p}$  a výsledek položíme rovný nule (nutná podmínka extrému):

Derivací dostaneme

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}} = 2(\mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{b})^T \mathbf{A},$$

odtud transpozicí a anulováním obdržíme

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}}\right)^T = 2\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{b}) = \mathbf{0},$$

takže pro stacionární bod platí

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (5)$$

Z teorie matic je známo, že hodnota matice  $\mathbf{A}$  je  $h(\mathbf{A}) \leq \min\{n, m\}$ . Pokud je hodnota matice  $\mathbf{A}$  rovna  $h(\mathbf{A}) = m$ , nelze ze soustavy (2) vyřadit žádnou lineárně závislou rovnici. Dále matice

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (6)$$

je nutně regulární. Proto lze (5) násobit zleva maticí inverzní k matici (6), čímž dostáváme výsledné řešení

$$\mathbf{p} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (7)$$

Z tvaru funkcionálu (3) je zřejmé, že minimum  $J$  existuje, proto je (7) hledaným řešením.

Řešení (7) se často nazývá **zobecněná inverze**. Všimněme si, že (7) je v pořádku i v případě, kdy  $n = m$  a

**Mobilní roboty** – lze spatřit nejen v průmyslové výrobě, ale i ve výzkumných ústavách univerzit a na řadě robotických soutěží, kde stimuluje různé hry. Část slouží k simulaci a studiu umělého života. Robotických ramen.

reprezentuje jeden z klasických typů průmyslových robotů - realizována ve formě robotických ramen. Následující Obr. 1 otevírá kinematický řetěz. Většina průmyslových robotů je vzájemně propojena pohyblivými klouby, čímž je vytvořen zpravidla tvořena několika články, která můžeme považovat za tuhá tělesa, škodlivých a fyzicky namáhavých prostorech. Robotická ramena jsou nejdůležitějších pomocníků výroby a to zejména ve zdravotní péči. Tyto roboty lze spatřit na mnoha výrobních linkách formu robotů. Představují v současnosti nejobvyklejší **Robotická ramena** – představují v současnosti nejobvyklejší formu robotů. Tyto roboty lze spatřit na mnoha výrobních linkách

Z hlediska využití a strukturální stavby můžeme roboty dělit na:

#### 1.4. Klasifikace robotů

kompletní automatizaci pracoviště s využitím průmyslových robotů. na trhu objevila řada malých firem (tzv. integrátoři), které nabízejí které se obvykle zaplatí do jednoho až dvou let. V důsledku toho se snadno programovatelné robotické systémy (pružná automatizace), často zaplatí za předpokladu velkokapitálové výroby, můžeme nasadit museli použít jedinou účelovou zařízení (tvrdá automatizace), které se prvku automatizačních procesů. Důvod je zřejmý. Tam kde bychom ve své průmyslové podobě, využívány jako jeden ze základních plně nastartována era robotů. V současné době jsou roboty, zejména umožnil k existujícímu mechanismu přidat řídicí systém, čímž byla stovky vedly k vývoji jednoduchých manipulatorů. Rozvoj počítačů byly vytvářeny mechanismy, které na začátku druhé poloviny 20. výroby včetně využívání specializovaných jednocelových mechanismů, jako jsou různé podavače a uchopovací zařízení. Tím s tím se začalo intenzivně využívat různých prostředků automatizace linky jako hlavního prostředku zintenzivnění výrobního procesu. Spolu začátkem 20. století se ve Fordových továrnách objevují výrobní

#### 1.3. Automatizace a roboty

roboty“, vybavit celý systém vhodnými receptory, efektorů a vyřešit koordinaci všech složek dohromady. V této souvislosti se můžeme ptát, co je to robot? Jedna z možných definic říká:

**Robotem** rozumíme počítačem řízený integrovaný systém, schopný autonomní a cílově orientované interakce s reálným prostředím v souladu s instrukcemi od člověka.

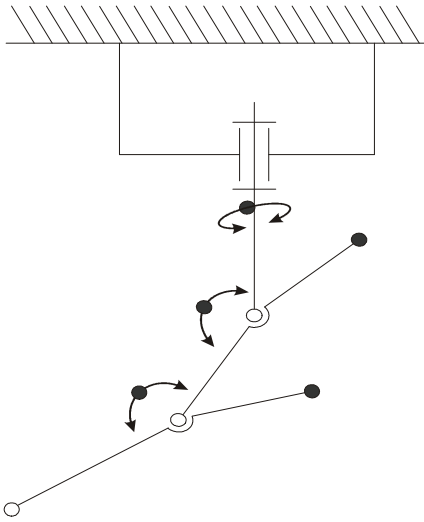
Robotika, jako disciplína věnovaná rozvoji a užití robotů, se dělí na robotiku *teoretickou* a *aplikovanou*. Pokud se týká průmyslových robotů, které mají z praktického hlediska největší význam, požadujeme, aby měly roboty následující vlastnosti

- manipulační schopnosti
- schopnost automatické činnosti
- snadná změna programu
- univerzálnost (mnoho účelovost)
- existence zpětné vazby
- prostorová integrovanost komponent do jednoho celku.

Z hlediska obecného pohledu je důležitý tzv. *kybernetický přístup*. Ten soustřeďuje především ty aspekty, které souvisejí s pojmy informace, rozhodování a zpětné vazby. Teorie systémů sleduje hlavně prvky a závislosti mezi nimi. Kybernetický systém je pak možno definovat jako množinu prvků, množinu informačních nebo signálních závislostí mezi těmito prvky navzájem a množinu obecných závislostí (informačních a fyzikálních) mezi prvky a prostředím. Poznamenejme, že právě přítomnost fyzikálních vlivů na prostředí odlišuje roboty od čistě informačních systémů, jakými jsou např. počítače. Z hlediska strukturálního lze robot chápat jako kybernetický systém skládající se ze tří subsystémů: *motorický subsystém*, *senzorický subsystém* a *kognitivní subsystém*.

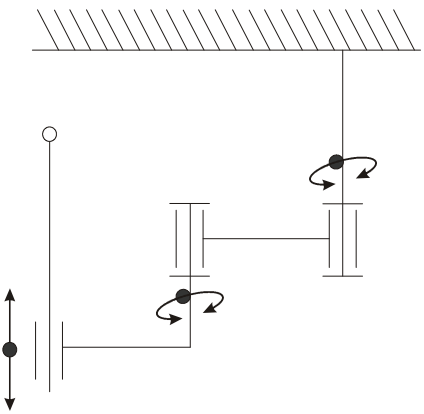
Zásadní rozvoj robotů přinesla šedesátá léta 20. století. Důvodem byl vývoj prvních výkonných počítačů, které byly schopny zvládnout komplikované výpočty potřebné pro řízení robotů. Aby robot mohl plnit úkoly na něj kladené, vyžaduje dostatečně výkonný řídicí systém, který musí pracovat v reálném čase. V sedmdesátých letech se pro řízení robotů hojně používaly programovatelné automaty. Vývoj obráběcích strojů, zejména NC strojů, pak umožnil přenést

Obr. 7: Angulární struktura



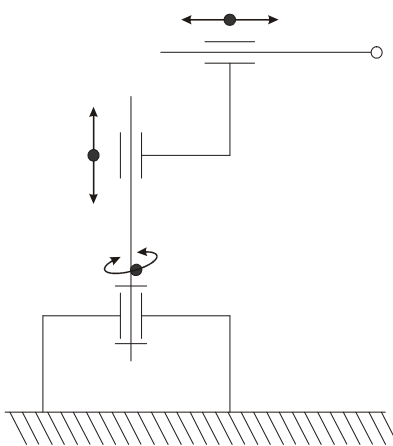
5. Angulární (úhlová, kloubová) struktura - RRR.

Obr. 6: SCARA struktura



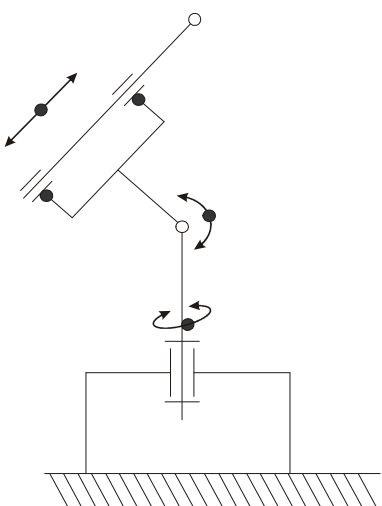
4. SCARA struktura - RRT

## 2. Cylindrická struktura - RTT



Obr. 4: Cylindrická kinematická struktur

## 3. Sférická struktura - RRT



Obr. 5: Sférická kinematická struktura

Tedy funkce  $g(t) = V(t, \mathbf{x}(t))$  roste bez omezení a s ohledem na (I) je  $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$  pro dostatečně velká  $t$ .

$$V(t, \mathbf{x}(t)) \geq V(t_0, \mathbf{x}_0) e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

a odtud integrací v mezích v dostaneme nerovnost

$$\frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}(t)) e^{-\lambda t} \geq 0$$

Násobením nerovnost  $V(t, \mathbf{x}(t)) \geq \lambda V(t, \mathbf{x}(t)) e^{-\lambda t}$  dostaneme

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}(t)) = \lambda V(t, \mathbf{x}(t)) + p(t, \mathbf{x}(t)).$$

Položme  $\varepsilon = R$  a ke zvolenému  $\delta > 0$  najdeme bod  $\mathbf{x}_0$ , že  $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$  a  $V(t_0, \mathbf{x}_0) > 0$ . Pokud je  $\|\mathbf{x}\| \leq R$ , platí

Důkaz.

**Věta 11.4 (Četajevova věta o nestabilitě)**

Rovnovážný bod  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  rovnice (1) je nestabilní v čase  $t_0$  za předpokladu, že existuje skalární reálná funkce  $V(t, \mathbf{x}) \geq 0$  taková, že platí

(i)  $V(t, \mathbf{x}) \leq \beta(\|\mathbf{x}\|)$ , pro  $\mathbf{x} \in K_R$ , kde  $\beta$  je rostoucí funkce jedné reálné proměnné a  $\beta(0) = 0$

(ii)  $V(t, \mathbf{0}) = 0$  a v každém okolí bodu  $\mathbf{0}$  existuje bod  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , že  $V(t_0, \mathbf{x}) > 0$

(iii)  $\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \lambda V(t, \mathbf{x}) + p(t, \mathbf{x})$ , kde  $\lambda < 0$ ,  $p(t, \mathbf{x}) \geq 0$  pro  $t \geq 0$  a  $\mathbf{x} \in K_R$ .

□

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \text{ pro } t < t_1.$$

t<sub>1</sub>. Odtud

k překročení  $g(t)$  hodnoty  $\beta(\varepsilon)$ . Platí tedy  $\beta(\varepsilon) < V(t, \mathbf{x}(t))$  pro  $t >$

## 11.4. La Salleho věta

V této podkapitole uvedeme a dokážeme významnou La Salleho větu, která se úspěšně využívá v robotice. Tuto větu lze použít i tehdy, když funkce  $-\dot{V}$  není lokálně pozitivně definitní a umožňuje také dokázat, že trajektorie řešení diferenciální rovnice začínající v nějaké oblasti konverguje k nějakému rovnovážnému bodu z této oblasti. Věta je s výhodou použitelná na autonomní a na periodické systémy. Pro obecné neautonomní systémy má jistá omezení.

## Definice 11.13

Množina  $S \subset \mathbb{R}^n$  se je  $\omega$  **limitní množinou** trajektorie  $\Phi(\cdot, \mathbf{x}_0, t_0)$ , jestliže pro každé  $\mathbf{y} \in S$  existuje posloupnost časových okamžiků  $t_n$ , konvergujících do nekonečna, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(t_n, \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{y}. \quad (21)$$

## Definice 11.14

Podmnožina  $S \subset \mathbb{R}^n$  se nazývá **invariantní množinou**, jestliže pro libovolné  $\mathbf{y} \in S$  platí: je-li  $t \geq t_0$ , potom  $\Phi(t, \mathbf{x}_0, t_0) \in S$ .

Tedy, řešení začínající v invariantní množině v ní trvale zůstává.

## Lemma 2

Je-li  $\Phi(\cdot, \mathbf{x}_0, t_0)$  je ohraničená trajektorie, potom její  $\omega$  limitní množina je kompaktní. Navíc,  $\Phi(t, \mathbf{x}_0, t_0)$  si limitně blíží k  $\omega$  limitní množině pro  $t \rightarrow \infty$ .

Důkaz. Viz [1].

## Věta 11.5

Uvažujme autonomní rovnici (2) a necht'  $S$  je  $\omega$  limitní množina trajektorie jejího řešení. Potom je  $S$  invariantní množinou.

Důkaz.



Pokud řešení  $\Phi(t, \mathbf{x}_0, t_0)$  leží v kouli  $K_\varepsilon$  platí podle (20)  $V(t, \mathbf{x}) \geq 0$ . Tedy funkce  $g(t) = V(t, \mathbf{x}(t))$ , jako funkce proměnné  $t$ , je neklesající. Proto platí  $V(t, \mathbf{x}(t)) \geq V(t_0, \mathbf{x}_0) > 0$ . To ale znamená, že neklesající. Funkce  $g(t) = V(t, \mathbf{x}(t))$  je tedy rostoucí v kouli  $K_\varepsilon$  a dle (20) její derivace neklesá. Tedy pro nějaký okamžik  $t_1$  dojde

Nechť existuje funkce  $V(t, \mathbf{x})$ , že platí body (i) až (iii). Podle (iii)  $V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|)$  pro  $\mathbf{x} \in K_p$ , kde  $p$  je vhodný poloměr. Položme  $\varepsilon = \min\{R, p\}$ . Necht'  $\delta$  je libovolně zvolené kladné číslo. Zvolíme  $\mathbf{x}_0$  takové, že  $\|\mathbf{x}_0\| > \delta$  a zároveň  $V(t_0, \mathbf{x}_0) < 0$ . S ohledem na bod (ii) to lze vždy provést.

Důkaz. Necht' existuje funkce  $V(t, \mathbf{x})$ , že platí body (i) až (iii). Podle (iii)

**Věta 11.3**  
Rovnovážný bod  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  rovnice (1) je nestabilní v časovém okamžiku  $t_0$  za předpokladu, že existuje skalární reálná funkce  $V(\mathbf{x}, t)$  taková, že platí  
(i)  $V(t, \mathbf{x}) \leq \beta(\|\mathbf{x}\|)$ , pro  $\mathbf{x} \in K_R$ , kde  $\beta$  je rostoucí funkce jedné reálné proměnné taková, že  $\beta(0) = 0$   
(ii)  $V(t, \mathbf{0}) = 0$  a v každém okolí bodu  $\mathbf{0}$  existuje bod  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , že platí  $V(t_0, \mathbf{x}) < 0$   
(iii)  $V(t, \mathbf{x})$  je lokálně pozitivně definitní.

Nyní jsme připravili vyslovit první větu o nestabilitě.

Rovnovážný bod  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  je *nestabilní v bodě*  $t_0$  právě tehdy, když není stabilní.

#### Definice 11.12

Nechť  $\mathbf{y} \in S$  a  $t_1 \geq 0$  je libovolný časový okamžik. Poněvadž  $\mathbf{y} \in S$ , existuje posloupnost  $t_n$  taková, že platí (21). Potom ze spojitosti trajektorie a (21) plyne

$$\begin{aligned} \Phi(t, \mathbf{y}, t_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(t, \Phi(t_n, \mathbf{x}_0, t_0), t_1) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t + t_n - t_1, \mathbf{x}_0, t_0) \end{aligned}$$

neboť soustava je autonomní. Podle předešlého lemmatu poslední člen konverguje k nějakému elementu z množiny  $S$ .  $\square$

#### Věta 11.6 (La Salleho princip)

Nechť  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitě diferencovatelná funkce a necht' množina

$$M_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; V(\mathbf{x}) \leq c\}$$

je ohraničená a platí v ní, že  $\dot{V} \leq 0$ . Definujme množinu

$$S = \{\mathbf{x} \in M_c; \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$$

a necht'  $S_{\max}$  je největší invariantní množina obsažená v  $S$ . Potom platí, že pro libovolné  $\mathbf{x}_0 \in M_c$  se řešení  $\Phi(t, \mathbf{x}_0, 0)$  neomezeně blíží k množině  $S_{\max}$  pro  $t \rightarrow \infty$ .

Důkaz.

Nechť  $\mathbf{x}_0 \in M_c$ . Poněvadž  $V(\Phi(t, \mathbf{x}_0, 0))$  je nerostoucí funkcí času, musí platit  $\Phi(t, \mathbf{x}_0, 0) \in M_c$ . Množina  $M_c$  je ohraničená, proto  $V(\Phi(t, \mathbf{x}_0, 0))$  je ohraničená funkce. Necht'

$$c_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} V(\Phi(t_n, \mathbf{x}_0, 0))$$

a necht'  $N$  je  $\omega$  limitní množina trajektorie. Potom  $V(\mathbf{y}) = c_0$  pro všechna  $\mathbf{y} \in N$ . Množina  $N$  je invariantní, proto  $\dot{V}(\mathbf{y}) = 0$  pro všechna  $\mathbf{y} \in N$ . Tedy  $N \subset S$ . Poněvadž  $S_{\max}$  je největší invariantní množina obsažená v  $S$ , musí platit  $N \subset S_{\max}$ . Protože  $\Phi(t, \mathbf{x}_0, 0)$  se

- rychlým nástrojem aplikací robotů
  - intenzivním kvalitativním rozvojem robotiky
- charakterizován:  
Vývoj robotiky je v současné etapě rozvoje průmyslu

#### 1.5. Oblasti využití robotů

- Počet pohybových os robota
- Dosaž a rozsah pohybu [mm]
- Orientace nástroje [deg]
- Zátěžová kapacita [kg]
- Maximální rychlost [mm/s]
- Opačovatelnost [mm]
- Přesnost polohování [mm]
- Uživatelské prostředí

robot. Vyberme některé základní:  
Je celá řada charakteristik, které vedou uživatele k výběru

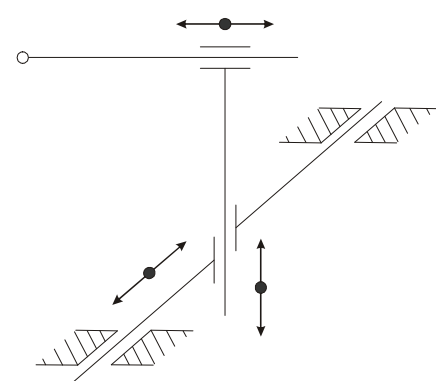
#### D) Rozdělení podle specifikace

komplikovaných manipulací.  
užívá u oboukoveho svarování, lepení, tmelení, stříkání a lze povětšinou měnit v průběhu pohybu. Tohoto způsobu řízení se pohybuje podle stanovené trajektorie předepsanou rychlostí, kterou s pneumatickými pohony. V případě CP řízení se koncový efektore Tento způsob řízení se vyskytuje zpravidla u robotů např. u bodového svarování, nakládky a vykládky materiálu apod. řízení a zpravidla ani dostatečně přesně známy. Toho se využívá přesných poloh jen ve stanovených bodech, dráhy mezi nimi nejsou řízení. V případě PTP řízení se efektore robota dostává do dostatečně **bodů k bodu**, tzv. **PTP řízení** a dále **řízení po spojitě dráze**, tzv. **CP řízení**. Další podstatné kritérium, umožňující rozdělení robotů, vychází ze způsobu jejich řízení v pracovním prostoru. Jedná se o **řízení od**

#### C) Rozdělení podle způsobu řízení

článků, vzájemně spojených klouby. Klouby mohou mít obecně větší počet stupňů volnosti než jeden, např. kulové čepy, avšak z hlediska pevnosti a jednoduchosti realizace se dává přednost kombinacím rotačních a posuvných členů. Každý kloub tak přidává u otevřených kinematických řetězců jeden stupeň volnosti. Má-li robot  $n$  pohyblivých kloubů, má i  $n$  stupňů volnosti. V případě obecných kinematických struktur je výpočet stupňů volnosti poněkud komplikovanější. Osy kloubů, které přispívají převážně k velikosti pracovního prostoru se nazývají **majoritní osy** a jsou tvořeny zpravidla prvními třemi osami, počítanými od základny. Ostatní osy se nazývají **minoritní**. Jejich účelem je zajistit orientaci nástroje či chapadla v pracovním prostoru, případně zvýšit manipulační pružnost. Na základě konstrukce polohovacího systému robota, tvořeného majoritními osami, se vyvinulo několik klasických kinematických struktur ramen robotů, které se dominantně objevují u všech výrobců robotů. Označíme-li písmenem R rotaci a písmenem T translaci, můžeme tyto struktury označit trojicí písmen, reprezentujících návaznost kloubů typu R nebo T. Jednotlivé kinematické struktury mají své pojmenování, které vychází z matematického popisu transformace souřadných soustav. Na následujících obrázcích Obr.3 až Obr.7 jsou uvedeny jednotlivé kinematické struktury.

#### 1. Kartézská struktura - TTT



Obr. 3: Kartézská kinematická struktura



ty. začne-li řešení místo s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}(t)$  v čase  $t$  původní podmínkou, musí být příslušná trajektorie totožná pro okamžik  $t+\Delta t$ , ale s počáteční podmínkou, kterou prochází řešení  $\Phi(\tau, \mathbf{x}(t), t)$  v čase  $t$ .

Poněvadž pro všechna posunutí času  $\Delta t$  platí

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left\| \Phi(t+T, \mathbf{x}, t) \right\|^2 - \left\| \Phi(t, \mathbf{x}, t) \right\|^2 + \int_t^{t+T} \frac{d}{dt} \left\| \Phi(\tau, \mathbf{x}(t), t) \right\|^2 d\tau$$

Derivováním (17) podle  $t$  dostaneme

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left\| \Phi(t+T, \mathbf{x}, t) \right\|^2 - \left\| \Phi(t, \mathbf{x}, t) \right\|^2 + \int_t^{t+T} \frac{d}{dt} \left\| \Phi(\tau, \mathbf{x}(t), t) \right\|^2 d\tau$$

konstanty  $\beta_1$  a  $\beta_2$ .

plyne nerovnost (14) pro  $\mathbf{x}$  z vhodného okolí bodu  $\mathbf{0}$  a pro vhodné nerovnosti (18) a integrací podle  $\tau$  jako v (17), již bezprostředně kde  $\mathbf{x} \in K_R$  pro vhodný poloměr  $R$ . Umočněním na druhou

$$\left\| \mathbf{x} \right\| e^{-\alpha(t-T)} \leq \left\| \Phi(\tau, \mathbf{x}, t) \right\| \leq m \left\| \mathbf{x} \right\| e^{-\alpha(\tau-t)} \quad (18)$$

nerovnosti (3) v lemmatu 1 dostáváme

$$V(\mathbf{x}, t) = \int_t^{t+T} \left\| \Phi(\tau, \mathbf{x}, t) \right\|^2 d\tau. \quad (17)$$

začíná v bodě  $\mathbf{x}$  v čase  $t$ . Zvolíme

Označme  $\Phi(\tau, \mathbf{x}, t)$  řešení rovnice (1) v časovém okamžiku  $\tau$ , které 2. Dokažme nyní naopak, že z tvrzení (i) plyne (ii).

což je exponenciální vztah (13) pro  $k = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}$  a  $\alpha = c/2$ .

$$\left\| \mathbf{x}(\tau) \right\| \leq \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \left\| \mathbf{x}(t) \right\| e^{-\frac{c}{2}(\tau-t)},$$

a odtud

všechna  $\tau \geq t+\Delta t$ . Ale potom derivace pod integrálem musí být nulová. Poněvadž platí  $\Phi(t, \mathbf{x}, t) = \mathbf{x}$ , užitím (18), dostaneme

$$\frac{dV(t, \mathbf{x})}{dt} \leq - \left( 1 - m^2 e^{-2\alpha T} \right) \left\| \mathbf{x} \right\|^2.$$

Druhá nerovnost (15) je tak dokázána a tím i ekvivalence obou tvrzení (i) a (ii).

Dokažme zbývající třetí nerovnost (16). Parciálním derivováním (17) podle jednotlivých složek vektoru stavu dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x_i} V(t, \mathbf{x}) = 2 \int_t^{t+T} \sum_{j=1}^n \Phi_j(\tau, \mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_j(\tau, \mathbf{x}, t) d\tau \quad (19)$$

Poněvadž  $\Phi(\tau, \mathbf{x}, t)$  je řešení rovnice (1), platí

$$\frac{d\Phi(\tau, \mathbf{x}, t)}{d\tau} = \mathbf{f}(\tau, \Phi(\tau, \mathbf{x}, t)).$$

Derivací této rovnice podle vektoru  $\mathbf{x}$  a užitím věty o záměnnosti derivací dostaneme

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\tau, \Phi(\tau, \mathbf{x}, t)) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}$$

Označíme-li  $\mathbf{Y} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}$  a  $\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Phi}$ , lze předešlou rovnici zapsat ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\tau} = \mathbf{C}\mathbf{Y}.$$

Na základě předpokladu omezenosti parciálních derivací funkce  $\mathbf{f}$  plyne omezenost matice  $\mathbf{C}$ , tj.  $\|\mathbf{C}\| \leq K$  a odtud  $\|\mathbf{Y}(\tau, \mathbf{x}, t)\| \leq \exp(K(\tau-t))$ . Použitím tohoto faktu a rovnosti (19) získáme odhad

- pokládání a svařování potrubí (plynovody, ropovody)
- hloubení vrtů

#### 6. Plynařensví a petrochemický průmysl:

- pokládání a svařování vodních torů.
- roboty pro úpravy vodních toků, stavby hrází
- roboty pro práci s biomasou (těžba, manipulace a zpracování)
- roboty pro výsadbu lesního porostu

#### 5. Lesní a vodní hospodářství:

- roboty pro práci v šamotárnách.
- roboty pro práci na pecích a v jejich blízkosti
- těžební roboty pro získávání hornin
- roboty pro havarijní stavy v dolech

#### 4. Hornictví a hutní průmysl:

- automatické jeřáby, samočinná rypadla
- portálové manipulatory (automatická přeprava břemen)
- montážní roboty (výstavba stavebních komponent)
- manipulatory v panelárnách, cihelnách

#### 3. Stavebnictví:

- balení výrobků (jistice, zásuvky, zárovky)
- kompletace výrobků
- vyjímání vyřizků při tlakovém lití
- výroba elektrických pohonů, transformátorů
- osazování desek plošných spojů elektronickými součástkami
- motory, transformátory
- manipulace s těžkými výrobky a polotovary (odlitky,

#### 2. Elektrotechnický průmysl

Země	%
Japonsko	38
Spojené státy americké	26
Německo	10
Švédsko	7
Francie	3
Velká Británie	3
Itálie	2
Ostatní	11

Tabulka 2. Poměry rozdělení celosvětové produkce robotů

#### B) Přehled aplikací robotů v průmyslových odvětvích

Shrňme nyní aplikace robotů v nejvýraznějších odvětvích, které využívají roboty jako jeden z významných nástrojů výroby. V závorkách jsou uvedeny některé možnosti využití.

##### 1. Strojírenství:

- stříkácí roboty (lakování karoserií, dveří a nárazníků aut)
- obrábění a mezioperační činnosti (obsluha u soustruhů, fréz)
- odlévací a vstřikovací stroje (předměty z plastických hmot)
- lisovací stroje (lisování karoserií aut, dveří apod.)
- roboty pro svařování (bodové a obloukové svařování)
- montážní roboty (kompletace dílů, šroubování, nýtování)
- roboty pro manipulaci a úpravu kovů (otryskávání pískem, broušení, lapování)
- balení, lepení, využití ve skladovém hospodářství
- speciální aplikace

$$\beta_1 \|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq \beta_2 \|\mathbf{x}(0)\|_2 e^{-c(t-0)}$$

Opakovaným použitím (14) v okamžicích  $\tau$  a  $t$  získáme nerovnost

$$V(\tau, \mathbf{x}(\tau)) \leq V(t, \mathbf{x}(t)) e^{-c(\tau-t)}$$

což upravíme na tvar

$$V(\tau, \mathbf{x}(\tau)) e^{c\tau} - V(t, \mathbf{x}(t)) e^{ct} \leq 0,$$

obdržíme nerovnost

což je derivace součinu  $V$  a  $e^{ct}$ . Odtud integrací v mezích od  $t$  do  $\tau$

$$V e^{c\tau} + c V e^{c\tau} \leq 0,$$

Násobením této nerovnosti faktorem  $e^{-c\tau}$ , kde  $c > 0$ , dostaneme

$$V + \frac{\beta_3}{\beta_2} V \leq 0.$$

Z (14) a (15) dostaneme

podmínek pro platnost (i).

1. Nejprve dokážeme, že (ii) představuje soubor postačujících

Důkaz.

kde  $\beta_4$  je rovněž kladná konstanta.

$$\frac{\beta_4}{\beta_2} \|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq \frac{\beta_4}{\beta_2} \|\mathbf{x}(0)\|_2 e^{-c t} \quad (16)$$

Za uvedených předpokladů platí navíc následující odhad

$$\frac{\beta_4}{\beta_2} \|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq \frac{\beta_4}{\beta_2} \|\mathbf{x}(0)\|_2 e^{-c t} \quad (15)$$

$$\beta_1 \|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq V(t, \mathbf{x}(t)) \leq \beta_2 \|\mathbf{x}(t)\|_2 \quad (14)$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(t, \mathbf{x}) \right\| \leq 2 \int_t^{t+T} m \|\mathbf{x}\| e^{(k-\alpha)(\tau-t)} d\tau,$$

což je vztah (16), neboť  $\mathbf{x}$  není funkcí  $\tau$ . Na závěr připomeňme, že  $V(\mathbf{x}, t)$  je definována pouze na vhodném okolí bodu  $\mathbf{0}$ , což zajišťuje, že  $\Phi(\tau, \mathbf{x}, t)$  patří také do nějakého okolí bodu  $\mathbf{0}$ .

□

Příklad 11.4

Vyšetřeme stabilitu systému daného rovnicemi

$$\dot{x}_1 = -x_1 - e^{-3t} x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2.$$

Jeho rovnovážným bodem je bod  $\mathbf{0}=(0,0)$ . Zvolme skalární funkci

$$V(\mathbf{x}, t) = x_1^2 + (1 + e^{-3t}) x_2^2.$$

Tato funkce je pozitivně definitní, dokonce ji můžeme majorizovat zdola i shora funkcemi

$$\alpha(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \leq V(\mathbf{x}, t) \leq x_1^2 + 2x_2^2 = \beta(\mathbf{x})$$

Pro její derivaci podél trajektorie řešení dostáváme negativně definitní funkci

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = -x_1^2 - x_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - 5e^{-3t} x_2^2 \leq -x_1^2 - x_2^2,$$

odkud již plyne asymptotická stabilita bodu  $(0,0)$ .

### 11.3. Věty o nestabilitě

Ljapunovovy věty dávaly pouze postačující podmínky stability. Výjimku tvořila věta o exponenciální stabilitě, která byla vyslovena ve formě ekvivalence. Proto je vhodné mít k dispozici několik vět, které reprezentují nestabilitu systému. Nejprve si ale vyslovme následující definici.

- roboty pro operace srdce, mozku, očí
- výzkumných ústavech, vývojových centrech, nemocnicích
- biologicky nebezpečnými materiály a dalšími materiály ve
- roboty pro manipulaci s chemickými, radioaktivními, či
- endoprotézami
- zejména operace kyčelních a kolenních kloubů, tzv. totální
- roboty pro náhradu pohybových lidských orgánů (protetika),

### 9. Užití robotů ve zdravotnictví:

- robotizace skladového hospodářství armády.
- roboty pro zachránu osob z horčicích či zamorených míst
- policejní roboty pro likvidaci náloží a třaskavých hmot
- roboty pro práce v zamorených oblastech
- roboty pro odminování zaminovaných prostor
- bezpilotní bojová a špiónážní letadla
- bojové roboty (vozidla s vlastní inteligencí)

### 8. Armáda a bezpečnostní složky:

Podívejme se nyní na využití robotů mimo výrobní sféru. Zcela obdobně lze roboty a manipulatory využít v chemickém průmyslu, dopravě, ve spojích, v zemědělství, mlýnech apod.

- robotizace skladového hospodářství ap.
- manipulace s hotovými výrobky
- podávání materiálů pro šicí stroje
- řezání srtíhů (laser, nůž, vodní paprsek)
- vysekávání knoflíkových direk (nůž, laser, ultrazvuk)
- vykládání žoků, balíků textilií a manipulace s nimi

### 7. Textilní průmysl:

- roboty pro práci ve zdravotním prostředí
- manipulační roboty ve výbušném prostředí (plyn, benzín)

- pronikáním robotů do nestandardních odvětví výrobní i nevýrobní sféry
- strojírenství zůstává i nadále dominantním uživatelem robotů.

### A) Nejdůležitější technické aplikace

Následující tabulka reprezentuje nejdůležitější oblasti využití robotů z hlediska procentního zastoupení jejich aplikací v průmyslu. Poznamenejme, že tabulky tohoto typu bývají poněkud zavádějící. Důvodem je skutečnost, že vycházejí z nepřesných statistických odhadů a dále jsou zatíženy dobou, kdy byly odhady prováděny. Přesto mají svůj význam pro vytvoření alespoň přibližné představy rozložení využitelnosti robotů v dílčích oblastech. Následující tabulky byly získány ze statistiky autora pro rok 2011.

Aplikace	%
Manipulace s materiálem	23
Bodové svařování	18
Obloukové svařování	16
Stříkání a finišování	15
Mechanická montáž	7
Elektronická montáž	5
Přeprava	5
Řezání materiálu vodním paprskem	2
Ostatní	9

Tabulka 1. Procentní rozdělení aplikací robotů

Již tradičně je největším uživatelem i výrobcem robotů Japonsko. V následující tabulce lze nalézt procentní porovnání počtu robotů ve vyspělých zemích světa. Jak je vidět, Česká republika mezi významné uživatele robotů nepatří. Důvodem však není malý počet obyvatel ČR, jak plyne v porovnání se Švédskem.

Důkaz. (i) Poněvadž  $V$  je lokálně pozitivně definitní, existuje funkce  $\alpha$ , že  $\alpha(0) = 0$  a

$$V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|) \quad (7)$$

pro všechna  $\mathbf{x} \in K_r$ , kde  $r$  je vhodné kladné číslo. Předpoklad věty dále říká, že

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0 \quad (8)$$

pro všechna  $t \geq t_0$  a všechna  $\mathbf{x} \in K_s$ . Zvolme libovolně  $\varepsilon > 0$  a definujme  $\eta = \min\{r, s, \varepsilon\}$ . Vyberme  $\delta > 0$  tak, aby platilo

$$S(\delta, t_0) = \sup_{\|\mathbf{x}\| < \delta} V(t_0, \mathbf{x}) > \alpha(\eta) \quad (9)$$

Poněvadž supremum spojitě funkce je spojitá funkce, je  $S$  spojitou funkcí  $\delta$ , tj. lze nalézt vhodné  $\delta > 0$ . Chceme dokázat, že pro  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$  platí  $\|\mathbf{x}(t)\| < \eta$  pro všechna  $t \geq t_0$ . Ze (7) a (9) plyne

$$\alpha(\|\mathbf{x}(t_0)\|) \leq V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) \leq \alpha(\eta) \quad (10)$$

Poněvadž  $\alpha$  je rostoucí funkce, platí  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \eta$ . Kdyby neplatila nerovnost  $\|\mathbf{x}(t)\| < \eta$  pro všechna  $t$ , pak necht  $t_1$  je nejmenší  $t$  větší než  $t_0$ , pro které to neplatí. Tedy  $\|\mathbf{x}(t_1)\| \geq \eta$ . Potom ale

$$V(t_0, \mathbf{x}(t_0)) > \alpha(\eta) \leq \alpha(\|\mathbf{x}(t_1)\|) \leq V(t_1, \mathbf{x}(t_1)).$$

To je však spor se vztahem (8), který říká, že funkce  $V$  je v čase nerostoucí. Tedy musí platit

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \eta \quad \text{pro všechna } t \geq t_0. \quad (11)$$

Podle předpokladu platí (ii) Navíc oproti bodu i) je třeba dokázat stejnoměrnou stabilitu.

Budeme se zabývat Euklidovskými konečně rozměrnými prostory. Pod  $k$ -rozměrným euklidovským prostorem,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , rozumíme kartézský součin  $\mathbb{R}^k = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  k množin  $\mathbb{R}$ , kde  $\mathbb{R}$  značí množinu reálných čísel. Tedy  $k$ -rozměrný prostor je tvořen množinou všech uspořádaných  $k$ -tic

## 2.2. Základní geometrické pojmy

V případě klouzavých vektorů platí, že každý klouzavý vektor  $\mathbf{v}$  je určen volným vektorem  $\mathbf{v}$ , který má s ním stejnou velikost a smysl a dále průvodičem  $\mathbf{r}$  libovolného pevného bodu přímky, podél níž působí klouzavý vektor  $\mathbf{v}$ . Je tedy každý klouzavý vektor určen soustavou skládající se z volného vektoru  $\mathbf{v}$  a vázaného vektoru  $\mathbf{r}$ . Algebru lineárních vektorů lze rozšířit na klouzavé vektory. Tuto algebru lze rovněž vybudovat poněkud jiným způsobem. Klouzavé vektory lze považovat za *hyperkomplexní čísla* a lze tak stanovit pravidla pro operace mezi nimi, aniž se použije algebra volných vektorů. Tak vznikl *splineový počet*.

Operace vektorové algebry nelze vždy použít na vektory, které mají různá působišť. Např. skládání sil, působících na dva zcela volné vektory postaráda smysl. Obecně je však třeba vycházet z konkrétních podmínek řešeního problému.

Pravidla pro operace vektorové algebry jsou stejná pro všechny volné vektory a to nezávisle na jejich fyzikálních podstatě. Algebraické operace pro volné vektory se plně vztahují také na vázané a klouzavé vektory, jestliže mají společně působišť. Jako výsledek algebraických výkonů odtud vznikají opět vektory vázané na společně působišť.

**Volné vektory** jsou vektory, které lze v prostoru libovolně posouvat z jednoho místa na druhé. Příkladem volného vektoru je vektor momentu dvojice sil.

**Klouzavé vektory** jsou vektory působící podél nějaké přímky, které nemají konkrétní působišť. Tyto vektory lze po dané přímce libovolně posouvat, aniž by se změnil výsledný efekt. Příkladem je vektor síly působící na dokonale tuhé těleso a vektor jeho okamžité úhlové rychlosti.

## 2. Kapitola

### Matematický background

V této části jsou zopakována některá základní fakta potřebná v dalších kapitolách. Čtenář, který je dobře obeznámený se základy matematiky, může bez nesnází tuto kapitolu přeskočit a věnovat se partiím, které mohou mít pro něho větší přínos.

#### 2.1. Úvod do vektorového počtu

Z důvodu ucelenosti budou v této části probrány některé základní pojmy o vektorech, které souvisejí s technickými aplikacemi v mechanice a robotice.

Za **skaláry** považujeme fyzikální veličiny, které jsou úplně určeny jedinou číselnou hodnotou nebo, v obecnějším případě, které jsou funkcí, jež nabývá číselné hodnoty. Pokud skalár nezávisí na volbě soustavy souřadnic, nazývá se *absolutní skalár* nebo *invariant*. Jako příklady mohou sloužit např. práce konaná silou, teplota, hmotnost tělesa, velikost elektrického náboje aj. Kromě absolutních skalárů existují skaláry, které závisejí na volbě soustavy souřadnic, o nich pojednáme později.

**Vektory** nazýváme fyzikální veličiny, které lze charakterizovat číselnou hodnotou (velikost), směrem a orientací v prostoru (obvykle se tím myslí přímo směr). Jak známo, vektory se často zobrazují geometricky. Nelze se domnívat, že má-li nějaká fyzikální veličina velikost a směr v prostoru, že jde automaticky o vektor. Vektory musí splňovat určitá algebraická pravidla. Ve fyzice a v technických vědách se v zásadě používají tři typy vektorů.

**Vázané vektory** jsou takové typy vektorů, které jsou vázány na nějaký bod v prostoru, který se nazývá působišť vektoru. Graficky se zobrazují šipkami vycházejícími z působišť. Patří sem např. vektory síly působící v daném bodě, vektory rychlosti a zrychlení hmotného bodu ap..

a odtud dostáváme

$$\sup_{\|\mathbf{x}\| \leq \delta, t \geq t_0} V(t, \mathbf{x}) \leq \beta(\delta). \quad (12)$$

Poněvadž  $\beta$  je neklesající spojitá funkce, lze vybrat  $d$ , že  $\beta(\delta) < \infty$  pro  $0 \leq \delta \leq d$ . Nyní stačí vybrat  $\delta > 0$ , aby  $\beta(\delta) < \alpha(\eta)$ .

(iii) Poněvadž  $\dot{V}$  je lokálně negativně definitní, jsou splněny podmínky v předešlém důkaze, takže bod  $\mathbf{0}$  je stejnoměrně stabilní rovnovážný bod. Je potřeba ukázat existenci  $\delta_1 > 0$  takového, že pro  $\varepsilon > 0$  existuje  $\tau < \infty$ , že pro všechna  $t > \tau$  platí

$$\|\mathbf{x}_0\| < \delta_1 \Rightarrow \|\Phi(t+t_1, \mathbf{x}_0, t_1)\| < \varepsilon,$$

kde  $\Phi(t+t_1, \mathbf{x}_0, t_1)$  představuje řešení rovnice (1) v okamžiku  $t+t_1$  s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}_0$  v čase  $t_1$ . Předpoklad tvrzení (iii) zajišťuje existenci rostoucích funkcí  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  jedné reálné proměnné takové, že  $\alpha(0) = 0$ ,  $\beta(0) = 0$ ,  $\gamma(0) = 0$  a

$$\alpha(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \beta(\|\mathbf{x}\|) \\ \dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -\gamma(\|\mathbf{x}\|).$$

K danému  $\varepsilon$  vyberme  $\delta_1, \delta_2 \in T$ , aby byly splněny vztahy

$$\beta(\delta_1) < \alpha(\varepsilon) \quad \dots \text{viz } K_s \text{ u vztahu (8),} \\ \beta(\delta_2) < \min\{\alpha(\varepsilon), \beta(\delta_1)\} \\ \text{a } T \cdot \alpha(s) = \gamma(\delta_2).$$

Ukažme, že existuje alespoň jeden časový okamžik  $t_2 \in [t_1, t_1+T]$ , že platí nerovnost  $\|\mathbf{x}_0\| < \delta_2$ .

Předpokládejme, že to není pravda. Připomeňme, že  $\Phi(t, \mathbf{x}_0, t_0)$  značí řešení rovnice (1) začínající v bodě  $\mathbf{x}_0$  v okamžiku  $t_0$ . Kdyby

$$\|\Phi(t, \mathbf{x}_0, t_0)\| \geq \delta_2 \quad \text{pro } t \in [t_1, t_1+T]$$

potom

**Věta 11.1 (Základní Ljapunovy věty)**

(i) Je-li funkce  $V(t, \mathbf{x})$  lokálně pozitivně definitní a její derivace je lokálně nekladná (negativně semidefinitní), potom je rovnovážný bod stabilní.

(ii) Necht' je funkce  $V(t, \mathbf{x})$  lokálně pozitivně definitní, její derivace lokálně nekladná a existuje rostoucí funkce  $\beta$  jedné proměnné, že pro všechna  $\mathbf{x} \in K_R$  platí

$$V(t, \mathbf{x}) \leq \beta(\|\mathbf{x}\|),$$

potom je rovnovážný bod stejnoměrně stabilní.

(iii) Necht' je funkce  $V(t, \mathbf{x})$  lokálně pozitivně definitní a její derivace lokálně negativně definitní a necht' existuje rostoucí funkce  $\beta$  jedné reálné proměnné, že  $\beta(0)=0$  a pro všechna  $x$  z nějakého okolí bodu  $\mathbf{0}$  platí

$$V(t, \mathbf{x}) \leq \beta(\|\mathbf{x}\|)$$

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

(iv) Necht' je funkce  $V(t, \mathbf{x})$  globálně pozitivně definitní, její derivace je globálně negativně definitní a existuje rostoucí funkce  $\beta$  jedné reálné proměnné, že  $\beta(0)=0$  a pro všechna  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  platí

$$V(t, \mathbf{x}) \leq \beta(\|\mathbf{x}\|),$$

potom je rovnovážný bod globálně stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Z důvodu stručnosti hovoříme jen o derivaci  $V$  podél trajektorie, kde význam trajektorie je z kontextu zřejmý. Casovou derivaci funkce  $V$  budeme často psát  $\dot{V}$ . Namísto o globální pozitivní definitnosti se většinou hovoří pouze o pozitivní definitnosti. Nyní si vyslovíme základní věty Ljapunovy teorie, které shrneme do věty jediné.

$$0 \leq \alpha(\delta_2) \leq V(t_1 + T, \Phi(t_1 + T, \mathbf{x}_0, t_1)) = \\ V(t_1, \mathbf{x}_0) + \int_{t_1}^{t_1+T} \dot{V}(\Phi(\xi, \mathbf{x}_0, t_1), \xi) d\xi \leq \\ \beta(\delta_1) - T\gamma(\delta_2) \leq \beta(\delta_1) - \alpha(s) < 0.$$

Dostáváme tak spor. Tedy skutečně existuje alespoň jeden okamžik  $t_2 \in [t_1, t_1+T]$ , kde  $\|\mathbf{x}_0\| < \delta_2$ .

Necht' nyní  $t \geq t_1+T$ . Potom

$$\alpha(\|\Phi(t, \mathbf{x}_0, t_1)\|) \leq V(\Phi(t_2, \mathbf{x}_0, t_1), t_2) \\ \leq \beta(\|\Phi(t_2, \mathbf{x}_0, t_1)\|) \leq \beta(\delta_2) < \alpha(\varepsilon)$$

a tedy

$$\|\Phi(t, \mathbf{x}_0, t_1)\| < \varepsilon \text{ pro } t \geq t_1+T.$$

(iv) Plyne bezprostředně z (iii). Tím je důkaz ukončen.  $\square$

Velmi často nás kromě skutečnosti, že rovnice je asymptoticky stabilní, zajímá také rychlost konvergence. Tomu odpovídá následující modifikace věty o stabilitě, která vychází z již dříve definovaného pojetí exponenciální stability.

### Věta 11.2 (Exponenciální stabilita)

Necht' funkce  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  má spojité parciální derivace podle  $\mathbf{x}$  a je po částech spojitá vzhledem k  $t$ . Potom následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní

(i) Bod  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  je lokálně exponenciálně stabilním rovnovážným bodem rovnice (1), tj. existuje koule  $K_R$  a konstanty  $k \geq 0$  a  $\alpha > 0$ , že

$$\|\Phi(\tau, \mathbf{x}, t)\| \leq ke^{-\alpha(\tau-t)} \quad (13)$$

(ii) Existuje funkce  $V(t, \mathbf{x})$  a kladné konstanty  $r, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ , že pro všechna  $\mathbf{x} \in K_r$  a  $t \geq 0$  platí

Poznamenejme, že k libovolným dvěma bodům

Vektor  $\mathbf{v}$  z prostoru  $\mathbb{R}^k$  nazýváme **k-rozměrným vektorem**.

dalších odstavcích. nezávislé na jakýchkoli bodech - o této věci pojednáme přesněji v klasické definice vektorových prostorů, kde se vektorový chápou hovoříme o *volném vektoru*. Tím dostáváme určitě odlišnost od libovolně posouvat po přímce procházející určitým bodem. Pokud je reprezentován silou působící na tuhé těleso, jejíž působitě lze musí vždy ležet na dané přímce. Technicky je tento případ daného vektoru mohou být libovolně zvoleny, ale s omezením, že vektoru vázaného na přímku. Ide o případ, kdy počáteční body musí být jeho počátečním bodem. Jiným příkladem může být případ křivky v bodě  $P$ , jde o vektor vázaný na tento bod  $P$ , to znamená, že speciálním způsobem. Například, mluvíme-li o tečném vektoru určité byl vybrán za počáteční, někdy je však důležité vybrat počáteční bod a koncovým bodem  $B = A + \mathbf{v}$ .  $V$  obecnosti je lhostejné, který bod Graficky se vektor  $\mathbf{v}$  zobrazuje jako šipka s počátečním bodem  $A$  zobrazení či funkce ve tvaru  $\mathbf{v}(A)$ .

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

potom je rovnovážný bod stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Integraci této nerovnosti v čase od  $t_0$  do  $t$  dostaneme

$$\frac{d\phi}{dt} \leq 0.$$

což je

$$\phi e^{-L(t-t_0)} - \phi e^{-L(t_0-t_0)} \leq 0,$$

násobme kladným výrazem  $e^{-L(t-t_0)}$ , dostaneme

$$\phi - \phi e^{-L(t-t_0)} \leq 0$$

Nerovnost

Řešme např. první z nich, druhá se vyřeší analogicky.

$$\phi - \phi e^{-L(t-t_0)} \leq 0 \text{ a } 0 \leq \phi + L\phi.$$

což jsou dvě diferenciální nerovnosti

$$(6) \quad -L\phi \leq \phi \leq L\phi,$$

Předšlou nerovnost potom upravíme na

Označme  $\phi(t) = \|\mathbf{x}(t)\|$ . Jde o skalární funkci argumentu  $t$ .

$$(5) \quad -L\|\mathbf{x}\| \leq \frac{d\|\mathbf{x}\|}{dt} \leq L\|\mathbf{x}\|.$$

neboli

$$\left| \frac{d\|\mathbf{x}\|}{dt} \right| \leq L\|\mathbf{x}\|,$$

a vzhledem k předšlé nerovnosti (4) dostáváme

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| = \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{0})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = L\|\mathbf{x}\|$$

rovnovážný bod, platí  $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Odtud plyne

Ize přesvědčit, že platí i pro vektor  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  nulový. Je-li  $\mathbf{0}$

Poslední vztah platí zřejmě pro vektor  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  nenulový. Snadno se

$$(4) \quad \left| \frac{d\|\mathbf{x}\|}{dt} \right| \leq \|\mathbf{x}\|.$$

V mechanice chápeme sílu jako vektor posouvající se po přímce (*kluzný vektor*). Odhlédneme-li od fyzikálního rozměru, je síla určena uspořádanou dvojicí bodů  $AB$ . Dvě dvojice bodů  $AB$  a  $CD$  považujeme za stejně právě tehdy, když se shodují vektory určené přímkou  $p$  a vektorem  $\mathbf{v}$ , který je s přímkou  $p$  rovnoběžný. Násobení reálným číslem  $p$  můžeme pak definovat tak, že  $k\mathbf{F}$  je síla, která má tutéž nositelku  $p$  jako síla  $\mathbf{F}$  a která má vektor  $k\mathbf{v}$  namísto vektoru  $\mathbf{v}$ . Nyní se věnujeme otázce sčítání sil. Dvě síly  $\mathbf{F}_1$  a  $\mathbf{F}_2$  o nositelkách  $p_1$  a  $p_2$  s vektory  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  můžeme sečíst, nejsou-li jejich nositelky rovnoběžné. Síly pak nahradíme výslednou silou  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$  podle

Příklad: Soustavy sil v rovině.

nezávislé.

$k_i = 0$ , kde  $i=1, 2, \dots, k$ , jsou vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  lineárně lineární vektorovou rovnici  $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \dots + k_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$  splnit jedinečně se vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  nazývájí *lineárně nezávislé*. Jinými slovy, však netriviální lineární kombinace, která je nulovým vektorem, pak jejich netriviální lineární kombinace je nenulový vektor. Existuje-li Vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  se nazývájí *lineárně závislé*, jestliže každá

Definice 2.3

$k_i$  jsou nulová. Ostatní kombinace se nazývájí  *netriviální*.

Řekneme, že vektor  $\mathbf{b}$  je *lineární kombinací* vektorů  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ , jestliže pro nějaké konstanty  $k_1, k_2, \dots, k_n$  platí  $\mathbf{b} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 + \dots + k_n\mathbf{a}_n$ . *Triviální lineární kombinací* nazýváme kombinaci, kdy všechna

Definice 2.2

sčítání, a tedy ani pravidlo rovnoběžníka pro sčítání vektorů.

*Poznámka.* Ne všechny "vektory" jsou skutečnými vektory ve smyslu výše uvedené definice. Např. v technických vědách se někdy zavádí úhlové natočení jako vektor kolmý k ose otočení. Uvažujeme jednotkový vektor umístěný v počátku soustavy souřadnic ve směru osy  $z$ . Otočíme-li tento vektor o pravý úhel okolo osy  $x$  a poté o stejný úhel okolo osy  $y$ , dostaneme jiný vektor, než bychom získali prohozením pořadí obou otáčení. Tedy neplatí komutativnost

### Definice 2.1

**Vektorový prostor**  $V$  nazýváme libovolnou neprázdnou množinu prvků na které je definováno sčítání a násobení prvků z  $V$  reálným (popřípadě komplexním) číslem, přičemž platí následující pravidla (axiomy)

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- existuje právě jeden prvek  $\mathbf{0}$ , pro který  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$  pro každé  $\mathbf{a}$
- $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$
- $s(\mathbf{ta}) = (st)\mathbf{a}$
- $(s+t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$
- $t(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = t\mathbf{a} + t\mathbf{b}$

kde  $s, t$  jsou libovolná reálná (komplexní) čísla a  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  a  $\mathbf{c}$  jsou libovolné prvky z  $V$ . Prvky vektorového prostoru se nazývají **vektory**, prvek  $\mathbf{0}$  se nazývá **nulovým vektorem**. Místo  $t\mathbf{a}$  píšeme stručně  $t\mathbf{a}$ . Poznamenejme, že vektorový prostor se někdy nazývá *lineární prostor*.

Ve vektorovém prostoru platí  $\mathbf{a} = (1+0)\mathbf{a} = 1\mathbf{a} + 0\mathbf{a} = \mathbf{a} + 0\mathbf{a}$ , odkud plyne, že  $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Dále je  $(-1)\mathbf{a} + \mathbf{a} = [(-1)+1]\mathbf{a} = 0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Vektor  $(-1)\mathbf{a}$  se značí  $-\mathbf{a}$  a místo  $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$  píšeme stručně  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ .

Vlastnost ii) se nazývá **asociativnost** (sdružování) a znamená, že nezáleží na pořadí, v němž jsou vektory sčítány. Nedoje tedy k nedorozumění, když místo zápisu v ii) budeme stručně psát  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ . Podobně pro více vektorů. Dá se ukázat, že **komutativnost sčítání**, tj. platnost vlastnosti i), je důsledkem ostatních vlastností. Uvádíme ji proto, aby bylo na první pohled zřejmé, že sčítání vektorů představuje komutativní, tj. Abelovu, grupu.

Ověřme komutativnost sčítání vektorů:

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{0} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + [-(\mathbf{b} + \mathbf{a}) + (\mathbf{b} + \mathbf{a})] = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (\mathbf{b} + \mathbf{a}) + (\mathbf{b} + \mathbf{a}) = [(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (\mathbf{b} + \mathbf{a})] + (\mathbf{b} + \mathbf{a}) = \{[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{b}] - \mathbf{a}\} + (\mathbf{b} + \mathbf{a}) = \{[\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{b})] - \mathbf{a}\} + (\mathbf{b} + \mathbf{a}) = [\mathbf{a} + (\mathbf{0}) - \mathbf{a}] + (\mathbf{b} + \mathbf{a}) = (\mathbf{a} - \mathbf{a}) + (\mathbf{b} + \mathbf{a}) = \mathbf{0} + (\mathbf{b} + \mathbf{a}) = (\mathbf{b} + \mathbf{a})$ , to za předpokladu, že  $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$  pro libovolný vektor  $\mathbf{x}$ . Ale to platí, neboť  $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{0}\mathbf{x} + 1\mathbf{x} = (0+1)\mathbf{x} = 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ . Tedy komutativnost sčítání skutečně plyne z ostatních axiomů.

$$\phi(t)e^{-Lt} - \phi(t_0)e^{-Lt_0} \leq 0$$

a po úpravě

$$\phi(t) \leq \phi(t_0)e^{L(t-t_0)}.$$

Druhá nerovnost má řešení

$$\phi(t) \geq \phi(t_0)e^{-L(t-t_0)}.$$

Odtud dostáváme řešení vztahu (6)

$$\phi(t_0)e^{-L(t-t_0)} \leq \phi(t) \leq \phi(t_0)e^{L(t-t_0)},$$

což po dosazení za  $\phi$  představuje dokazovaný vztah (3). □

## 11.2. Ljapunovova přímá metoda, věty o stabilitě

Tato metoda se někdy nazývá druhá Ljapunovova metoda. S první se stručně seznámíme v druhé části, neboť pro nás nemá tak velký význam.

**Koulí o středu  $\mathbf{x}_0$  a poloměru  $R > 0$**  budeme nazývat množinu  $K_R = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}\| < R\}$ .

**Okolím bodu  $\mathbf{x}$**  budeme nazývat libovolnou otevřenou množinu  $K_R$  takovou, že  $\mathbf{x} \in K_R$ .

### Definice 11.8

Spojité funkce  $V(t, \mathbf{x}): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se nazývá **lokálně pozitivně definitní**, jestliže existuje konstanta  $R > 0$  a spojitá rostoucí funkce  $\alpha$  jedné reálné proměnné, že  $\alpha(0) = 0$  a pro všechna  $\mathbf{x} \in K_R$  platí

$$V(t, \mathbf{0}) = 0 \text{ a } V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|).$$

□ kde koeficient u vektoru  $\mathbf{a}_i$  je roven  $-1$ , tj. nenulovému číslu.

$$l^i \mathbf{a}_1 + \dots + l^{i-1} \mathbf{a}_{i-1} + (-1) \mathbf{a}_i + l^{i+1} \mathbf{a}_{i+1} + \dots + l^n \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

Předšlý výraz lze pak upravit na tvar

$$\mathbf{a}_i = l^i \mathbf{a}_1 + \dots + l^{i-1} \mathbf{a}_{i-1} + l^{i+1} \mathbf{a}_{i+1} + \dots + l^n \mathbf{a}_n.$$

vektoru, tj. platí

Naopak, necht' např. vektor  $\mathbf{a}_i$  je lineární kombinací ostatních

Tedy vektor  $\mathbf{a}_i$  je lineární kombinací ostatních.

$$\mathbf{a}_r = -\frac{k_1}{k_r} \mathbf{a}_1 - \dots - \frac{k_{r-1}}{k_r} \mathbf{a}_{r-1} - \frac{k_{r+1}}{k_r} \mathbf{a}_{r+1} - \dots - \frac{k_n}{k_r} \mathbf{a}_n.$$

upravou odtud dostaneme

Necht' jsou uvedené vektory lineárně závislé. Pak v rovnici  $k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + \dots + k_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$  existuje nenulové  $k_r$ . Dělením koeficientem  $k_r$  a

Důkaz.

**Věta 2.1** Vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  jsou lineárně závislé právě tehdy, když je alespoň jeden z nich lineární kombinací ostatních.

*Množina osamělých sil netvoří ani v rovině a ani v prostoru vektorový (lineární) prostor. Avšak v rovině množina všech osamělých sil a množina všech dvojic sil, brané dohromady, vektorový prostor tvoří. V třírozměrném prostoru opět množina všech silových soustav tvoří vektorový prostor.*

Celkově platí následující tvrzení:

ten není ekvivalentní žádné osamělé síle.

před sebou zvláštní případ dvojice sil, která se nazývá *moment sil* a osamělou sílu jako součet  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ . Pokud ale  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$ , máme zvláštní konstrukci - převedení na předšlý případ - definovat rovnoběžné a vzájemně různě, lze i v případě, kdy  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \neq \mathbf{0}$ , známého pravidla rovnoběžníka. Jsou-li však jejich nositelky

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_k), \quad B = (b_1, b_2, \dots, b_k)$$

v prostoru  $\mathbb{R}^k$  existuje jediný vektor  $\mathbf{v}$  takový, že platí  $B = A + \mathbf{v}$ . Vektor  $\mathbf{v}$  pak nazýváme **rozdílem bodů** B a A a značíme symbolem  $B - A$ . V souřadnicích to znamená

$$B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_k - a_k).$$

Platí tedy

$$A + \mathbf{v} = A + (B - A) = B.$$

Vektor, jehož všechny souřadnice jsou nulové, nazýváme **nulovým vektorem**. Nulový vektor značíme obvykle symbolem  $\mathbf{0}$ . Podle definice tedy platí

$$\mathbf{0} = [0, 0, \dots, 0].$$

**Součinem čísla**  $k \in \mathbb{R}$  **a vektoru**  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_k]$  rozumíme vektor

$$k\mathbf{v} = [kv_1, kv_2, \dots, kv_k],$$

který zapisujeme také  $\mathbf{vk} = [v_1k, v_2k, \dots, v_kk]$ . Místo zápisu  $(-1)\mathbf{v}$  píšeme stručně  $-\mathbf{v}$ .

**Součtem dvou vektorů**  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_k]$  a  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_k]$  nazýváme vektor

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_k + v_k]$$

a podobně **rozdílem obou vektorů** je vektor

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = [u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_k - v_k].$$

Vektory, tak jak jsme právě definovali, mají řadu vlastností, které jsou uvedeny v následující velmi obecně pojaté podkapitole.

### 2.3. Obecné vektorové prostory

Z důvodu úplnosti si uveďme abstraktní matematickou definici vektorových prostorů. V matematice se zpravidla vychází ze souboru požadavků, které se nazývají *axiomy*. Přímým dosazením se lze snadno přesvědčit, že vektory definované v předšlé části splňují všechny požadavky, kladené na vektory v následující definici.

a odtud

$$\frac{d\|\mathbf{x}\|}{dt} = \frac{d\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \|\mathbf{x}\|$$

podle času dostáváme

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Pro derivaci Euklidovské normy

Důkaz.

**Lemma 1** Necht'  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  je rovnovážný bod rovnice (1) a necht' funkce  $\mathbf{f}$  je Lipschitzovská vzhledem k  $\mathbf{x}$  s konstantou  $L$  a necht' je po částech spojitá vzhledem k  $t$ . Potom řešení rovnice (1) splňuje nerovnost

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| e^{L(t-t_0)} \quad (3)$$

všechna  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

Konstanta  $L$  se nazývá *Lipschitzova konstanta*. Funkce  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  se nazývá *globálně Lipschitzovská*, jestliže uvedena nerovnost platí pro

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

libovolně reálné  $t \geq t_0$  platí nerovnost

pro nějaké  $R > 0$  existuje  $L \geq 0$ , že pro všechna  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}_R$  a

Funkce  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  se nazývá *lokálně Lipschitzovská* v bodě  $\mathbf{x}$ , jestliže

#### Definice 11.7

- System  $\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}/(1+t)$  je asymptoticky stabilní, ale ne stejnoměrně.
- System  $\dot{\mathbf{x}} = -t\mathbf{x}$  je exponenciálně stabilní.
- System  $\dot{\mathbf{x}} = t\mathbf{x}$  není stabilní vůbec.

#### Definice 11.9

Spojité funkce  $V(t, \mathbf{x}): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se nazývá **globálně pozitivně definitní**, jestliže existuje spojitá rostoucí funkce  $\alpha$  jedné proměnné, že  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  pro  $r \rightarrow \infty$  a pro všechna  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  platí

$$V(\mathbf{0}, t) = 0 \text{ a } V(\mathbf{x}, t) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|).$$

Méně přísné podmínky klademe na tzv. semidefinitní funkce.

#### Definice 11.10

Spojité funkce  $V(t, \mathbf{x}): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se nazývá **lokálně pozitivně semidefinitní**, jestliže existuje konstanta  $R > 0$ , že pro všechna  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}_R$  platí  $V(t, \mathbf{x}) \geq 0$  a nazývá se **lokálně negativně semidefinitní**, jestliže  $V(t, \mathbf{x}) \leq 0$ .

Dále,  $V(t, \mathbf{x}): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se nazývá (*lokálně, globálně*) **negativně definitní**, je-li  $-V(t, \mathbf{x})$  pozitivně (*lokálně, globálně*) definitní. Podobně je  $V(t, \mathbf{x})$  (*lokálně, globálně*) **negativně semidefinitní**, je-li  $-V(t, \mathbf{x})$  pozitivně (*lokálně, globálně*) semidefinitní.

#### Příklad 11.3

Uveďme příklad jednoduché časově variantní pozitivně definitní funkce

$$V(t, \mathbf{x}) = (1 + \cos^2 t)(x_1^2 + x_2^2).$$

Podle definice 6.8 stačí volit  $\alpha(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2)$ , což je časově invariantní pozitivně definitní funkce, kde místo

$$\alpha(\|\mathbf{x}\|) = \|\mathbf{x}\|^2$$

píšeme stručně  $\alpha(\mathbf{x})$ .

#### Definice 11.11

**Časovou derivací funkce**  $V(t, \mathbf{x})$  podél trajektorie dané rovnicí (1) nazýváme

$$\frac{d}{dt} V(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$



posunutím  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*$ . Potom dostáváme rychlost pohybu soustavy. Definujme nyní nový stavový vektor rovnovážného bodu platí  $\dot{\mathbf{y}}^* = \mathbf{0}$ , což fyzikálně značí nulovou která má rovnovážný bod  $\mathbf{y}^*$ , tj. platí  $\mathbf{g}(\mathbf{y}^*, \mathbf{t}) = \mathbf{0}$ . Podle definice  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{t}, \mathbf{y})$ ,

studujeme rovnici

tj. aby platilo  $\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{0}$ . To lze vždy splnit. Abychom to ukázali, vektorů tak, aby rovnovážný bod byl v počátku soustavy souřadnic, V teorii stability byva zvykem provádět transformace stavových

Poznámka

nemá žádný rovnovážný bod.

$$\dot{x} = -\frac{1+x^2}{x^3} + 1$$

má rovnovážný bod  $x=0$ . Avšak systém

$$\dot{x} = -\frac{1+x^2}{x^3}$$

Příklad 11.1: Nelineární systém prvního řádu

Necht  $\mathbf{x}^*(t)$  je rovnovážný bod rovnice (1). Poněvadž je tento bod řešením (1), musí platit  $\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{0}$ , a tedy  $\mathbf{x}^*(t)$  je konstantní vektor. Hledání rovnovážného bodu se tedy redukuje na řešení rovnice  $\mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  pro  $\mathbf{x}^* = \text{konst.}$ , nikoli na hledání neznámé vektorové funkce času.

*kritické body*. V dalším textu budeme používat obou názvů.

Řešení  $\mathbf{x}^*$  rovnice (1) se nazývá *rovnovážným bodem*, jestliže platí  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}) = \mathbf{0}$  pro všechna  $t \geq t_0$ . Rovnovážné body se též nazývají

**Definice 11.1.**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{y}}(t) - \dot{\mathbf{y}}^* = \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t)) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t) + \mathbf{y}^*).$$

Označíme-li nyní  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x} + \mathbf{y}^*)$ , vidíme, že rovnice (1) má rovnovážný bod  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ .

S ohledem na právě uvedenou poznámku budeme v dalším textu stále předpokládat, že má-li soustava (1) rovnovážný bod, je jím bod  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ . Tomu budou odpovídat veškeré naše definice a věty.

**Definice 11.2.**

Rovnovážný bod  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  soustavy (1) se nazývá *stabilní v čase*  $t_0$ , jestliže k libovolnému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$  platí  $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$  pro všechna  $t \geq t_0$ . Jinak je *nestabilní v čase*  $t_0$ .

Mnozí autoři definují: bod  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  se nazývá *stabilní*, jestliže je stabilní pro všechna  $t_0 \geq 0$ , jinak je *nestabilní*.

Zřejmě, je-li bod  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  stabilní v okamžiku  $t_0 \geq 0$  a  $t_1 \geq t_0$ , pak existuje  $\delta_1 > 0$ , že pro  $\|\mathbf{x}(t_1)\| < \delta_1$  platí  $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ , jeli  $t \geq t_1$ .

**Definice 11.3**

Rovnovážný bod  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  soustavy (1) se nazývá *stejněměrně stabilní*, jestliže k libovolnému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro všechna  $t_0 \geq 0$  a  $t \geq t_0$  platí, je-li  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$ , pak  $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ .

Poznamenejme, že v definici 7.2 záviselo  $\delta$  na  $t_0$ , přesněji  $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ . Naproti tomu, v definici 7.3  $\delta$  na  $t_0$  nezáleží, tedy máme společné  $\delta$  pro všechna  $t_0$ , což lze zapsat  $\delta = \delta(\varepsilon)$ .

**Definice 11.4**

Rovnovážný bod  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  soustavy (1) je *asymptoticky stabilní* v čase  $t_0$  právě tehdy, když je stabilní v čase  $t_0$  a existuje  $\eta > 0$ , že nerovnost  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \eta$  pro  $t \rightarrow \infty$  implikuje  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ . Tento bod  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  se nazývá *asymptoticky stabilní*, jestliže je asymptoticky stabilní pro každé  $t_0 \geq 0$ .

Zjednodušením vyjádření vektoru, jako lineární kombinace předpokladu, že neutrpí jednodušením vyjádření. Podobná zjednodušení budeme často používat, ovšem za sčítací index a automaticky se předpokládá sčítání od 1 do  $n$ . Zde jsme provedli malou redukci zápisu. Pod sumou je uveden pouze

$$\sum_{j=1}^i x_j B_{ji} \mathbf{b}_j = \sum_{j=1}^i y_j^i \mathbf{b}_j.$$

nebo-li po úpravě

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^i x_j B_{ji} \mathbf{b}_j = \sum_{j=1}^i y_j^i \mathbf{b}_j.$$

Pomocí vztahů (1) a (2) odvodíme

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n, \quad \mathbf{x} = y_1 \mathbf{b}_1 + y_2 \mathbf{b}_2 + \dots + y_n \mathbf{b}_n \quad (7)$$

jako lineární kombinace vektorů bázi

Libovolný vektor  $\mathbf{x}$  lze v daných bázích  $\alpha$  a  $\beta$  jednodušeně vyjádřit

## 2.5. Transformace souřadnic vektoru

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}. \quad (6)$$

proto  $\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}) = 1$ , odkud plyne nenulovost obou determinantů. Matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou tedy regulární a vzhledem k jednodušenosti existence inverzních matic dostáváme

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad (5)$$

Z předšlého vztahu (3) vidíme, že pro matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  platí

podobně  $\mathbf{B}$  je matice přechodu od báze  $\beta$  k bázi  $\alpha$ .

Matice  $\mathbf{A}$  se nazývá *matice přechodu* od báze  $\alpha$  k bázi  $\beta$  a

$$\mathbf{A} = [A_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,n}, \quad \mathbf{B} = [B_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,n}. \quad (4)$$

Zavedme následující matice

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

Poznámka. Ne každý vektorový prostor má konečnou bázi. Má-li však vektorový prostor dvě báze, lze pomocí tzv. *Steinitzovy věty* ukázat, že obě báze mají stejný počet prvků. Počet prvků báze se pak nazývá *dimenzí* vektorového prostoru a uvedené prostory nazýváme *konečně dimenzionální*. Tvoří-li vektory  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  bázi prostoru  $V$ , píšeme  $\dim V = n$  a hovoříme o  $n$ -rozměrném vektorovém prostoru. Vektorové prostory, které nemají konečnou bázi se nazývají *nekonečně dimenzionální*.

## 2.4. Matice přechodu

Uvažujme  $n$  rozměrný vektorový prostor  $V$  a v něm dvě báze  $\alpha = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ ,  $\beta = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ . Vektory jedné báze lze vyjádřit jako lineární kombinace vektorů báze druhé a naopak, proto můžeme psát

$$\mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^n A_{ji} \mathbf{a}_j, \quad \text{pro } i=1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_k = \sum_{j=1}^n B_{jk} \mathbf{b}_j, \quad \text{pro } k=1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Vzájemným dosazením za vektory dostaneme

$$\mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^n A_{ji} \sum_{s=1}^n B_{sj} \mathbf{b}_s = \sum_{s=1}^n \left( \sum_{j=1}^n B_{sj} A_{ji} \right) \mathbf{b}_s$$

a obdobně

$$\mathbf{a}_k = \sum_{j=1}^n B_{jk} \sum_{l=1}^n A_{lj} \mathbf{a}_l = \sum_{l=1}^n \left( \sum_{j=1}^n A_{lj} B_{jk} \right) \mathbf{a}_l.$$

S ohledem na lineární nezávislost vektorů obou bází odtud dostáváme

$$\sum_{j=1}^n B_{sj} A_{ji} = \delta_{si}, \quad \sum_{j=1}^n A_{lj} B_{jk} = \delta_{lk}, \quad (3)$$

kde  $\delta_{ij}$  je tzv. *Kroneckerovo delta*, pro které platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\phi}] = \mathbf{0}.$$

$\|\mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\phi}\| < \delta$  se neohraničeně vzájemně přibližují, tj.

řešení  $\mathbf{x}(t)$  vzhledem na počáteční podmínky *stabilní řešení*, jestliže je stabilní a řešení  $\boldsymbol{\phi}$  (1) dostatečně blízké. Podobně se definuje, že řešení  $\mathbf{x}(t)$  rovnice (1) je *asymptoticky*

neohraničeněm rústu parametru  $t$ .

blízké vzhledem na počáteční podmínky zůstávají blízké při plyne  $\|\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\phi}\| < \varepsilon$  pro všechna  $t \geq t_0$ . Tedy, řešení dostatečně libovolně  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$ , že z nerovnosti  $\|\mathbf{x}(t_0) - \boldsymbol{\phi}\| < \delta$  že řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  rovnice (1) je *stabilní řešení*, jestliže pro počáteční podmínkou  $\boldsymbol{\phi}(t_0) = \boldsymbol{\phi}$ . Ve smyslu Ljapunova lze definovat, že řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  a necht  $\boldsymbol{\phi}(t)$  je řešení téže rovnice, ale s pozmeněnou  $\mathbf{x}(t_0)$  je řešení rovnice (1) s počáteční podmínkou

koeficientů není apod.

viskozity maziva ložisek, koroze součástí, která vede ke změně sledovatelné změny, které probíhají v čase. Sem patří např. změny popsat autonomními rovnicemi, pokud zanedbáme obřížně výrazně zjednodušuje úvahy. Např. robot jako technické zařízení lze invariantní. Autonomní systémy představují idealizaci, která nám poněvadž žádná jejich dynamická charakteristika není číste časově

**Poznámka**

typu (2).

speciální případ (1), proto dále uvedené definice platí i pro rovnici nazývají *neautonomní, též časově variantní*. Zřejmě rovnice (2) je *autonomní, též časově invariantní*. Soustavy typu (1) se pak která neobsahuje explicitně čas. Takové soustavy se nazývají

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

setkáváme se speciálními případy, kdy systém je popsán rovnicí což je rovnice typu (1). Místo rovnice (1) se v technice často

### Definice 11.5

Rovnovážný bod  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  soustavy (1) je *exponenciálně stabilní*, jestliže existují kladné konstanty  $k, \alpha$  a  $\varepsilon$  takové, že pro  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \varepsilon$  platí  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq k \cdot \|\mathbf{x}(t_0)\| \exp(-\alpha(t-t_0))$  pro  $t \geq t_0$ . Největší takové  $\alpha$  se nazývá *řád exponenciální konvergence*.

### Definice 11.6

Soustava se nazývá *globálně asymptoticky (exponenciálně, stejnoměrně) stabilní*, jestliže je asymptoticky (exponenciálně, stejnoměrně) stabilní pro každý počáteční stav  $\mathbf{x}(t_0)$ .

Příklad 11.2: Uvažujme systém prvního řádu

$$\dot{x}(t) = g(t)x(t).$$

Jeho řešení je

$$x(t) = x(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau\right).$$

Odtud je přímo vidět, že systém je stabilní pro  $g(t) \leq 0$  (kde  $t \geq t_0$ ); je asymptoticky stabilní pro

$$\int_0^{\infty} g(t) dt = -\infty;$$

je exponenciálně stabilní, jestliže existuje kladné  $T$ , že pro  $t \geq 0$  platí

$$\int_t^{t+T} g(t) dt \leq k,$$

kde  $k$  je vhodná záporná konstanta. Pro následující speciální případy platí

- Systém  $\dot{x} = -x/(1+t)^2$  je stabilní, nikoli však asymptoticky.

Podobně pro matici  $\mathbf{B}$ .  $\mathbf{E}\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2$ , tj.  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$ . Tedy taková matice  $\mathbf{A}$  existuje jediná.  $\mathbf{B}\mathbf{A}_1 = \mathbf{E}$  pro  $i = 1, 2$ . Potom platí  $\mathbf{A}_1 \mathbf{E} = \mathbf{A}_1 \mathbf{B} = \mathbf{A}_1 (\mathbf{B}\mathbf{A}_2) = (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}) \mathbf{A}_2$  a necht  $\mathbf{A}_1$  a  $\mathbf{A}_2$  jsou matice, pro které platí vztahy  $\mathbf{A}_1 \mathbf{B} = \mathbf{E}$  bezprostředně ze vztahu (5). Necht  $\mathbf{B}$  je nějaká matice, pro kterou z předšlého vztahu (6). Můžeme si to ukázat

**Poznámka.** Matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou určeny jednoznačně, jak plyne k souřadnicím v bázi  $\alpha$ . Podobně i v druhém případě.

$\beta$  *souřadnicovou transformací maticí* ze souřadnic v bázi  $\alpha$  k bázi  $\beta$  této souvislosti nazýváme matici přechodu  $\mathbf{A}$  od báze  $\alpha$  k bázi

$$[\mathbf{x}]_{\alpha} = \mathbf{A} [\mathbf{x}]_{\beta} \quad \text{a} \quad [\mathbf{x}]_{\beta} = \mathbf{B} [\mathbf{x}]_{\alpha}. \quad (12)$$

Rovnice (8) a (9) pak můžeme zapsat jednoduchými vztahy

$$x_i^t = [\mathbf{x}]_{\alpha}^t, \quad y_i^t = [\mathbf{x}]_{\beta}^t, \quad \text{kde } i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Pro jednotlivé složky budeme používat zápis

$$[\mathbf{x}]_{\alpha} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad [\mathbf{x}]_{\beta} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

*sloupcovými vektory*.

$n \times 1$ , které budeme ve shodě se zázitými zvyklostmi nazývat v dostatečně kompaktní formě, definujeme následující matice typu

Poněvadž je našim cílem pracovat se souřadnicemi vektorů vzhledem k bázi  $\beta$ .

$\alpha$  a podobně koeficienty  $y_j$  se nazývají *souřadnice vektoru x vzhledem k bázi*

$$x_j^t = \sum_{i=1}^n A_{ji}^t y_i^t, \quad \text{pro } j = 1, \dots, n. \quad (9)$$

a zcela obdobným způsobem obdržíme

$$y_j^t = \sum_{i=1}^n B_{ji}^t x_i^t, \quad \text{pro } j = 1, \dots, n. \quad (8)$$

### Definice 2.4

**Bázi vektorového prostoru**  $V$  nazýváme libovolnou uspořádanou množinu lineárně nezávislých vektorů z  $V$  takových, že každý vektor z množiny  $V$  lze zapsat jako lineární kombinaci této uspořádané množiny.

V dalším nás budou zajímat prioritně vektorové prostory, které mají konečný počet prvků báze. Podle předšlé definice platí, že tvoří-li vektory  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  bázi vektorového prostoru  $V$ , lze každý vektor  $\mathbf{x} \in V$  vyjádřit ve tvaru  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$ , kde  $x_i$  jsou koeficienty uvedené lineární kombinace. Platí následující jednoduché tvrzení.

**Věta 2.2** Čísla  $x_1, \dots, x_n$  ve vyjádření  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$  jsou pro každý vektor  $\mathbf{x} \in V$  určena jednoznačně.

Důkaz.

Necht' lze vektor  $\mathbf{x}$  zapsat také ve tvaru lineární kombinace  $\mathbf{x} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + \dots + y_n \mathbf{e}_n$ , tj. s koeficienty  $y_j$ . Odečtením obou lineárních kombinací dostaneme

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \mathbf{e}_i.$$

Ale vektory  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  tvoří bázi prostoru  $V$ , proto jsou lineárně nezávislé, a tedy koeficienty  $x_i - y_i$  musí být nulové. Odtud plynou rovnosti  $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$ . □

Čísla  $x_i$  ve vyjádření  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$  se nazývají *souřadnice vektoru x vzhledem k bázi e<sub>1</sub>, ..., e<sub>n</sub>*.

**Poznámka.** Poněvadž záměnou pořadí vektorů báze dojde ke změně pořadí souřadnic každého vektoru, měli bychom formálně správně konečnou bázi zapisovat jako uspořádanou  $n$ -tici  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . To se však zpravidla nedělá, neboť zápis  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  lze chápat jako konečnou posloupnost prvků, čímž je pořadí jednoznačně dáno. V tomto textu však zápis báze jako uspořádané  $n$ -tice budeme někdy používat.

K dalšímu studiu problematiky adaptivního řízení robotů lze doporučit knihu [12], která zahrnuje i problematiku řízení mobilních robotů. K adaptivnímu řízení má blízko řízení založené na samoučení se. Sem patří příspěvek [21], ve kterém je navržena jistá metoda iterativního učení - „Iterative Learning Control“. Kromě adaptivních a samo učících metod stojí v popředí zájmu metody optimálního řízení. Sem patří např. příspěvky [17], [18], [22].

Aktuální matice setvačnosti robota  $M$  je vždy stejnoměrně pozitivně definitní, proto uvedený zákon řízení zajišťuje **globální stabilitu řízeního procesu a globální konvergenci aktuální trajektorie pohybu robota k žádané trajektorii**.

$$\mathbf{u} = -\mathbf{Q}^m \boldsymbol{\lambda} \quad (21)$$

Zákon řízení lze vyjádřit v jednoduchém tvaru

$$\dot{\mathbf{V}} = -k_s \mathbf{M}_T \mathbf{s}$$

dosaňme zjednodušení derivace Ljapunovovy funkce

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{I}^m \mathbf{Q}_T^m \mathbf{s}, \quad (20)$$

Volbou zákona adaptace parametru

$$\dot{\mathbf{V}} = -k_s \mathbf{M}_T \mathbf{M}_T (\mathbf{I}^{-1} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q}^m \mathbf{s}).$$

## Závěr

Ze zkušeností je všeobecně známo, že každý psaný text lze neustále doplňovat a zlepšovat, což platí i v tomto případě. Tato práce je prioritně určena především studentům Fakulty mechatroniky, informatiky a mezioborových studií na Technické univerzitě v Liberci. Tomu odpovídá i celkové zaměření a výběr látky. Přesto doufám, že i čtenář s jinou orientací na robotiku našel v této práci řadu zajímavých a inspirujících myšlenek. Pokud při čtení byly odhaleny některé nedostatky, budu vděčný za jejich sdělení, např. prostřednictvím e-mailu: [vaclav.zada@tul.cz](mailto:vaclav.zada@tul.cz).

Václav Záda

S využitím Schwarzovy nerovnosti dostáváme

Důkaz.

$$\mathbf{V} \text{ unitárním prostorem } \mathbf{V} \text{ platí pro libovolné prvky } \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ nerovnost} \\ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \quad (21)$$

□ ze kterého již bezprostředně plyne dokazované tvrzení.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2,$$

obdržíme vztah

$\mathbf{V}$  předěsíle nerovnosti položíme  $t = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle / \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ . Po dosazení a úpravě

$$= \langle t\mathbf{x} + \mathbf{y}, t\mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle +$$

$$0 \leq \langle t\mathbf{x} + \mathbf{y}, t\mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle t\mathbf{x}, t\mathbf{x} \rangle + \langle t\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, t\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

uvážujeme následující skalární součin

Je-li  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , pak uvedena nerovnost triviálně platí. Předpokládejme tedy, že  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Podle (i) platí  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$ , a tedy  $\|\mathbf{x}\| > 0$ . Pro  $t$  reálné

Důkaz.

$$\mathbf{V} \text{ pro prvky } \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ unitárního prostoru platí nerovnost} \\ |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|. \quad (20)$$

Dokážeme si, že se jedná skutečně o normu podle definice 2.5. Nejprve si však odvodíme několik základních nerovností.

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}. \quad (19)$$

normu  $\|\mathbf{x}\|$  libovolného prvku  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$  vztahem

bilinéárním zobrazením. Vzhledem k vlastnosti (i) lze definovat které libovolné dvojici vektorů z  $\mathbf{V}$  přiřadí jejich skalární součin, je

$$(\cdot, \cdot) : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R},$$

je zobrazení  $\mathbf{y} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  lineární funkcionál, proto zobrazení

zobrazení  $\mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  lineární funkcionál a podobně pro každé  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$

## 2.7. Unitární a normované prostory

V inženýrských výpočtech se často potřebuje nějaká forma skalárního součinu. Nejběžnější skalární součin známý z planimetrie resp. stereometrie mnohdy nestačí. Proto si vyslovíme obecnou definici skalárního součinu ve formě souboru požadavků (axiomů).

### Definice 2.5

Vektorový prostor  $\mathbf{V}$  nazýváme **normovaným prostorem**, jestliže je v něm definováno zobrazení, nazývané **norma vektoru**, které libovolnému vektoru  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$  přiřadí reálné číslo  $\|\mathbf{x}\|$ , tj.  $\|\cdot\| : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , a přitom jsou splněny následující požadavky (axiomy)

- (i)  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  pro každé  $\mathbf{x}$ , přičemž  $\|\mathbf{x}\| = 0$  právě když  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- (ii)  $\|t\mathbf{x}\| = |t| \|\mathbf{x}\|$  pro libovolné reálné  $t$
- (iii)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Nerovnost (iii) se nazývá **trojúhelníková nerovnost**.

### Definice 2.6

Reálný vektorový prostor  $\mathbf{V}$  se nazývá **prostorem se skalárním součinem** nebo též **unitárním prostorem**, jestliže každé dvojici vektorů  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$  je přiřazeno reálné číslo  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ , nazývané **skalární součin**  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ , že platí

- (i)  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$  a  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$  jenom pro  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- (ii)  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
- (iii)  $\langle k\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = k\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  pro každé reálné  $k$
- (iv)  $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ .

**Poznámka.** Definují se též komplexní unitární prostory pro komplexní vektorové prostory, ty však potřebovat nebudeme.

Z vlastnosti (iii) plyne pro skalární součin, že  $\langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0$  pro každé  $\mathbf{x}$ , neboť platí  $\langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = \langle 0 \cdot \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0 \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0$ . Dále pro každé  $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$  je



pro libovolné  $t_0$ , dostáváme pro řešení (12)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\mathbf{V}t} \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{0}$$

Poněvadž

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{f}(t) = \mathbf{0},$$

což je možné jedině, když

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}(t)\| = 0,$$

normy  $\mathbf{f}(t)$ , tj.

Poněvadž  $\varepsilon$  bylo libovolně kladné číslo, plyne odtud nulovost limity

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{d}.$$

Odtud obdržíme nerovnost

$$\|\mathbf{f}(t)\| \leq \varepsilon \int_t^{t_0} e^{-\mathbf{V}(t-\tau)} d\tau = \varepsilon \frac{1 - e^{-\mathbf{V}(t-t_0)}}{\mathbf{V}}.$$

Z nerovnosti (13) pak plyne

$$\|\mathbf{s}(t)\| \leq \varepsilon.$$

Zvolíme-li  $\varepsilon > 0$  naležtí  $t_0$ , že pro  $t \geq t_0$  platí

pro  $t \geq t_0$ . Poněvadž  $\mathbf{s}$  konverguje k nule, lze k libovolně

$$\left\| e^{-\mathbf{V}(t-\tau)} \right\| \leq k e^{-a(t-\tau)}$$

Je všeobecně známo, že pro matici  $\mathbf{V}$  existují čísla  $a > 0$  a  $k > 0$ , že

$$\|\mathbf{f}(t)\| \leq \int_t^{t_0} e^{-\mathbf{V}(t-\tau)} \|\mathbf{s}(\tau)\| d\tau. \quad (13)$$

pak pro normu tohoto výrazu platí odhad

pro  $i = 1, 2, \dots, n$ . Uvedenou soustavu rovnic lze dále přepsat do následující maticové formy, která je mnohem přehlednější.

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}_1 \\ \dot{\mathbf{a}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{a}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$$

Tuto soustavu rovnic lze přepsat pomocí matic do tvaru

$$\mathbf{A}_{11} \dot{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{A}_{1n} \mathbf{a}_n = \mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{A}_{21} \mathbf{a}_1 + \mathbf{A}_{22} \dot{\mathbf{a}}_2 + \dots + \mathbf{A}_{2n} \mathbf{a}_n = \mathbf{b}_2,$$

$$\mathbf{A}_{n1} \mathbf{a}_1 + \mathbf{A}_{n2} \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{A}_{nn} \dot{\mathbf{a}}_n = \mathbf{b}_n.$$

Rovnice (28) lze pro pevně i zapsat jako soustavu rovnic tvaru

$$c_{ij} = \frac{\|\mathbf{a}_i\| \|\mathbf{b}_j\|}{\|\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j\|}. \quad (31)$$

Speciálně, pro vektory bází  $\alpha = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  a  $\beta = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  označme tento kosinus písmenem  $c_{ij}$ ; takže

(30)  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \phi. \quad (30)$$

Provedme nyní skalární součin vektorů  $\mathbf{b}_i, \mathbf{a}_j$ , které patří postupně do bází  $\beta = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  a  $\alpha = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ , které nemusí být ortonormální. Potom

$$\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_j \rangle = \left( \sum_k A_{ki} \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_j \right) = \sum_k A_{ki} \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_j \rangle.$$

Jako speciální případ odtud dostáváme

**Věta 2.6** Necht'  $\alpha = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  a  $\beta = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  jsou dvě báze vektorového prostoru  $V$  a  $A = (A_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$  je matice přechodu od báze  $\alpha$  k bázi  $\beta$ . Je-li báze  $\alpha$  ortonormální, pak pro prvky matice přechodu platí

$$A_{ji} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_j \rangle.$$

Poznámka.

Ačkoli  $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_j \rangle = \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{b}_i \rangle$ , nelze se domnívat, že  $A_{ji} = A_{ij}$ . Ve skalárním součinu  $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_j \rangle$  index  $j$  značí  $j$ -tý vektor báze  $\alpha$ , zatímco index  $i$  představuje  $i$ -tý prvek báze  $\beta$ . Komutací vektorů jsme přehodili nejen indexy, ale i vektory bází. Tedy, ačkoli  $A_{ji} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_j \rangle = \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{b}_i \rangle$ , ve výrazu  $A_{ji}$  první index značí prvek báze od které vycházíme a druhý index značí prvek báze ke které přecházíme.

Vraťme se zpět k vyjádření

$$\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_j \rangle = \sum_k A_{ki} \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_j \rangle \quad (28)$$

a uvažujme obecný případ, tj. báze nemusí být ortonormální. Jak víme, platí pro libovolné dva vektory Schwarzova nerovnost

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad (29)$$

a lze v analogii s třírozměrným prostorem definitoricky přiřadit oběma vektorům úhel  $\phi$  podle vztahu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) = \mathbf{0},$$

nebo-li po přechodu k původnímu označení

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0},$$

což podle předešlého lemmatu značí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{0}.$$

Došli jsme tak k závěru, že v této podkapitole definovaný **regulační proces adaptivního řízení je exponenciálně stabilní**. To je samozřejmě velmi potěšující.

## 10.2. Alternativní algoritmus adaptivního řízení

V návaznosti na předešlý výklad budeme v této části uvažovat dva případy řízení robota, neadaptivní a adaptivní.

### Neadaptivní případ

Jsou-li všechny parametry známe, lze opět užít zákon řízení ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \mathbf{B}\mathbf{s},$$

s tím, že odhad  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$  se nahradí známými parametry  $\boldsymbol{\lambda}$ , tj.  $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}$ . Předešlý algoritmus lze tedy považovat za další alternativu řízení ke kapitole 9. Matice  $\mathbf{B}$  v předešlé části byla konstantní. Stejným způsobem však můžeme odvodit algoritmus řízení, kde matice  $\mathbf{B}$  může být časově variantní. Stačí zachovat požadavek stejnoměrné pozitivní definitnosti takové matice.

Zvolme tedy matici  $\mathbf{B}$  následujícím způsobem

$$\mathbf{B}(t) = k\mathbf{M}(\mathbf{q}(t)), \quad (14)$$

kde  $k$  je vhodně zvolená kladná konstanta. Poněvadž matice setrvačnosti  $\mathbf{M}$  je pozitivně definitní, je i matice  $\mathbf{B}$  pozitivně definitní. Matice  $\mathbf{B}$  tedy v průběhu regulačního pochodu bude stále představovat hodnoty svých prvků v závislosti na aktuálních

$$G = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_n) \\ (a_2, a_1) & \dots & (a_2, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n, a_1) & \dots & (a_n, a_n) \end{pmatrix}$$

Matice skalárních součinů

vztahu (32) regulární.

Vzniká otázka, kdy je matice skalárních součinů na levé straně

$$\sum_{k=1}^k (a_j, a_k) A_{ki} = (a_j, b_i) \quad (33)$$

tvary

skalární součin komutativní a rovnice (28) může být přepsána do kde pruh vyznačuje komplexní sdružení. V reálných prostorech je

$$(y, x) = (x, y)$$

nahrzena anti-komutativností ve tvaru

komplexní čísla a komutativnost skalárního součinu  $(x, y) = (y, x)$  je

reálného pouze tím, že koeficienty lineárních kombinací mohou být vektorových prostorech. Komplexní vektorový prostor se liší od platí uvedené rovnice nejen v reálných, ale i v komplexních, Poněvadž jsme zachovávali pořadí vektorů ve skalárních součinech,

$$(32) \quad \begin{pmatrix} (b_1, a_1) & \dots & (b_1, a_n) \\ (b_2, a_1) & \dots & (b_2, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_n, a_1) & \dots & (b_n, a_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_n) \\ (a_2, a_1) & \dots & (a_2, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n, a_1) & \dots & (a_n, a_n) \end{pmatrix}$$

$$u = \sum_j u_j a_j = \sum_i w_i b_i \quad (24)$$

jsou vyjádření dvou vektorů  $x, u \in V$  vzhledem k oběma bázím. Pro skalární součiny obou vektorů dostáváme

$$(x, u) = \sum_i \sum_j x_i u_j (a_i, a_j) \text{ v bázi } \alpha \quad (25)$$

$$(x, u) = \sum_i \sum_j y_i w_j (b_i, b_j) \text{ v bázi } \beta. \quad (26)$$

Součiny  $(a_i, a_j)$  se nazývají *souřadnice bilinéární formy*  $(\dots)$  vzhledem k bázi  $\alpha$ . Podobně pro bázi  $\beta$ .

**Definice 2.7**

Dva vektory  $a$  a  $b$  se nazývají *ortogonální* (kolmé), jestliže platí  $(a, b) = 0$ . Libovolná báze  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$  se nazývá *ortonormální*, jestliže je tvořena vzájemně ortogonálními vektory, které mají jednotkovou velikost, tj. když platí  $(a_i, a_j) = 0$  pro  $i \neq j$  a  $\|a_i\| = 1$  pro všechna  $j$ .

Jsou-li speciálně obě báze  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$  a  $\beta = (b_1, \dots, b_n)$  ortonormální, dostáváme

$$(x, u) = \sum_i x_i u_i = \sum_i y_i w_i. \quad (27)$$

Zápis skalárního součinu v tomto tvaru je běžně užíván nejen v rovinné, ale i v prostorové geometrii. Celkově jsme odvodili větu.

**Věta 2.5** Nechť  $\alpha$  je ortonormální báze  $n$ -rozměrného vektorového prostoru  $V$ . Potom je skalární součin dvou libovolných vektorů tohoto prostoru dán součtem součinů souřadnic obou vektorů vzhledem k bázi  $\alpha$  a jeho hodnota je invariantní při přechodu k jiné bázi v tomto prostoru.

$$J(t) = \int_t^{t_0} e^{-V(t-\tau)} s(\tau) p \tau,$$

Matice  $-V$  je stabilní, proto první člen na pravé straně (12) konverguje k nule pro  $t \rightarrow \infty$ , avšak je třeba dokázat, že celý integrál konverguje k nule pro  $t \rightarrow \infty$ . Oznáčíme-li

$$z(t) = e^{-Vt} z(t_0) + \int_t^{t_0} e^{-V(t-\tau)} s(\tau) p \tau. \quad (12)$$

vektor  $z$  ve tvaru

Nechť nyní  $e$  značí Eulerovo číslo. Z dodatku II dostáváme řešení rovnice (11) jakožto lineární diferenciální rovnice pro neznámý

$$z + Vz = s \quad (11)$$

(2) přejde do tvaru

Věnujme tedy pozornost vztahu (2). Oznáčíme na chvíli  $z = e$ , tj.

Potřebujeme však dokázat poněkud více, totiž že  $e \rightarrow 0$  pro  $t \rightarrow \infty$ .

**Lemma:** Platí  $e \rightarrow 0$  právě tehdy když  $e \rightarrow 0$  pro  $t \rightarrow \infty$ .

následující:

což je ovšem zřejmé i ze vztahu (2). Poslední tvrzení však říká

Poněvadž  $s \rightarrow 0$ , plyne ze vztahu (3)  $\dot{q} \rightarrow \dot{q}_r$ , a podle definice

parametrů se v průběhu řízení zastavuje.

Podle vztahu (10) pak odtud plyne, že  $s \rightarrow 0$  a podle (9) i  $\dot{\lambda} \rightarrow 0$

pro  $t \rightarrow \infty$ . Vidíme tedy, že proces opravy (9) odhadovaných

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V = 0.$$

Poněvadž druhá derivace funkce  $V$  je omezená, je  $V$  stejnoměrně spojitá a tedy podle Barbatolovy vety (dodatek II) platí

hodnotách kloubových proměnných  $q_1, \dots, q_n$ . Funkce (4) se tedy s ohledem na fakt

$$\tilde{\lambda} = \hat{\lambda} - \lambda = 0$$

změní na

$$V = \frac{1}{2} s^T M s. \quad (15)$$

Její derivace (10) podle času dává

$$\dot{V} = -s^T B s = -k s^T M s = -2kV.$$

Máme tedy jednoduchou diferenciální rovnici pro určení  $V$  ve tvaru

$$\dot{V} = -2kV,$$

kteřá má řešení

$$V(t) = V(0)e^{-2kt}. \quad (16)$$

Poněvadž matice setrvačnosti  $M$  je stejnoměrně pozitivně definitní, plyne z (15) existence kladné konstanty  $a$  takové, že platí

$$a s^T s \leq s^T M s$$

a tedy podle (15)

$$a \frac{1}{2} s^T s \leq V(0)e^{-2kt}.$$

Odtud je vidět, že vektor  $s$  exponenciálně konverguje k nule. Položme nyní  $\Lambda = kE$ , kde  $E$  je jednotková matice. Dosazením do zákona řízení dostaneme

$$u = Q\dot{\lambda} - Bs = Q\dot{\lambda} - kM(\dot{q} - \dot{q}_r) = M\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + N - kM\dot{q} + kM\dot{q}_r$$

a odtud další úpravou



Na místo kandidáta Ljapunovovy funkce zvolíme

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{q}^z - \mathbf{A}\mathbf{e},$$

kde

$$\mathbf{s} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_r \quad (3)$$

definitní matice, tedy  $-\mathbf{A}$  je stabilní matice. Vztah (2) lze upravit

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad (2)$$

Zavedme nyní nový vektor

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} - \mathbf{M}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - \mathbf{C}, \quad \tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N} - \mathbf{N}.$$

Podobně definujeme

$$\tilde{\lambda} = \lambda - \lambda, \quad (1)$$

Pro předem stanovenou trajektorii  $\mathbf{q}^z(t)$  předpokládáme, že žadáná poloha, rychlost a zrychlení jsou omezené, některé, nebo dokonce všechny parametry robota jsou neznámé. Naším cílem je vytvořit návrh zákona řízení a zákona odhadu (estimace) parametru tak, aby výstupní trajektorie  $\mathbf{q}(t)$  robota co nejvíce kopírovala trajektorii  $\mathbf{q}^z(t)$ . Definujeme chybu odhadu parametru

## 10.1. Základní algoritmus

### Adaptivní řízení robotu

## 10. Kapitola

$$V(t) = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{s} + \tilde{\lambda}^T \Gamma^{-1} \tilde{\lambda} \right], \quad (4)$$

kde  $\Gamma$  je symetrická pozitivně definitní matice. Derivací této funkce podle času dostaneme

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}} \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}} \mathbf{s} + \tilde{\lambda}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\lambda}} = \mathbf{s}^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_r) + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}} \mathbf{s} + \tilde{\lambda}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\lambda}} \quad (5)$$

Rovnici dynamiky robota

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{N} = \mathbf{u} \quad (6)$$

upravme na tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{C}(\mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r) - \mathbf{N} + \mathbf{u}.$$

Odtud dosazením do (5) obdržíme

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T (\mathbf{u} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{N}) + \mathbf{s}^T \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}} - \mathbf{C} \right) \mathbf{s} + \tilde{\lambda}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\lambda}}$$

Poněvadž matice kvadratické formy

$$\mathbf{s}^T \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}} - \mathbf{C} \right) \mathbf{s}$$

je antisymetrická (viz kapitola 7), je forma rovna nule. Odtud dostáváme

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T (\mathbf{u} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{N}) + \tilde{\lambda}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\lambda}}. \quad (7)$$

Hmotnosti a momenty setrvačnosti se v rovnici dynamiky objevují v lineární formě. Podobně i některé další koeficienty, např. koeficienty tření závisící přímo úměrně na rychlosti apod. Proto lze definovat (viz též kapitola 8) matici  $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}_r, \dot{\tilde{\lambda}}) \lambda = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (8)$$

Podle (31) platí  $\mathbf{C}_{ij} = (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j)$ , takže matice (38) může být upravena na tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) & \dots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) & \dots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) & \dots & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) & \dots & (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1) & \dots & (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_2) & \dots & (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n) \end{pmatrix} \quad (38)$$

a odtud vzhledem k symetrii skalárního součinu (neboť pracujeme s reálnými vektorovými prostory) dostáváme

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{21} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1) & \dots & (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_1) & \dots & (\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{b}_n, \mathbf{a}_1) & \dots & (\mathbf{b}_n, \mathbf{a}_n) \end{pmatrix}$$

Ve vztahu (32) je u ortonormální báze příslušná Gramova matice jednotková, proto pro matici  $\mathbf{A}$  platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \mathbf{a} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^T. \quad (37)$$

Jsou-li  $\alpha$  a  $\beta$  ortonormální báze, jsou i příslušné matice přechodu  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  mezi těmito bázemi ortonormální, tj. platí

Rovnost  $A_{ji} = B_{ij}$  značí, že matice  $\mathbf{B}$  je transponovaná k  $\mathbf{A}$ , tj.  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ . Poněvadž  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$ , dostáváme tak větu:

$$\mathbf{A}_{ji} = (\mathbf{b}_i, \mathbf{a}_j) = (\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_i) = B_{ij}.$$

Uvažujme nyní ortonormální bázi  $\alpha = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$  a bázi  $\beta = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ . Necht  $\mathbf{A}$  je matice přechodu od báze  $\alpha$  k bázi  $\beta$  a  $\mathbf{B}$  je matice přechodu od báze  $\beta$  k bázi  $\alpha$ . Podle předchozího textu platí

rovnost  $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^{-1}$  plyne ihned  $\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{E}$ . Tedy podmínky  $\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{E}$  a  $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^{-1}$  jsou ekvivalentní.

$$\mathbf{c} = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + \dots + k_n \mathbf{a}_n. \quad (35)$$

Dokažme, že  $(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = 0$ . Násobme postupně (35) zleva vektory  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1, \mathbf{c}) &= k_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) + k_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) + \dots + k_n(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{c}) &= k_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + k_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) + \dots + k_n(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_2) \\ &\dots \dots \dots \\ (\mathbf{a}_n, \mathbf{c}) &= k_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_n) + k_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_n) + \dots + k_n(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n). \end{aligned} \quad (36)$$

Čísla  $k_1, \dots, k_n$  byla vybrána jako nenulové řešení soustavy (34), proto v (36) musí platit

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1, \mathbf{c}) &= (\mathbf{a}_2, \mathbf{c}) = \dots = (\mathbf{a}_n, \mathbf{c}) = 0 \text{ a odtud} \\ (\mathbf{c}, \mathbf{c}) &= \left( \sum_i k_i \mathbf{a}_i, \mathbf{c} \right) = \sum_i (\mathbf{a}_i, \mathbf{c}) = 0. \end{aligned}$$

Podle definice skalárního součinu to však znamená, že  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$  a tedy dle (35) jsou vektory  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  lineárně závislé.  $\square$

## 2.8. Ortonormální báze a ortonormální matice

Jak již bylo řečeno dva vektory  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  se nazývají *ortogonální* (kolmé), jestliže platí  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ . Libovolná báze  $\alpha = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  se nazývá *ortonormální*, jestliže je tvořena vzájemně ortogonálními vektory, které mají jednotkovou velikost. To lze zapsat  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 0$  pro  $i \neq j$  a  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i) = 1$  pro všechna  $i = j$ .

### Definice 2.8

Libovolná matice  $\mathbf{C}$  se nazývá *ortonormální*, jestliže platí  $\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{E}$ .

Pro ortonormální matici  $\mathbf{C}$  platí, že je regulární, neboť z řady následujících rovností

$$1 = \det \mathbf{E} = \det(\mathbf{C}^T \mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^T) \det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C})^2,$$

plyne  $\det(\mathbf{C}) = \pm 1$ . Protože k regulární matici existuje právě jedna inverzní matice, dostáváme rovnost  $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^{-1}$ . Opačně, z platnosti

Existuje řada publikací věnovaná problematice řízení robotů. Některé patří mezi velmi významné, z nich jmenujme knihu [12]. Velmi obecně pojatou publikací je rozsáhlá příručka [14].

Z poslední nerovnosti již bezprostředně dostáváme nerovnost uvedenou v části (b). Ostatní části (a), (b) lze již odvodit pomocí této nerovnosti.

Ad (c) Nerovnost (c) je bezprostředním důsledkem (a), (b) a vztahu (15).

$$\begin{aligned} \alpha &= n_1 + 2\|A\|k_1 n_2 / l - a, \\ \beta &= 2k_1 n_2 / l - a, \\ k_2 &= \max\{\alpha, \beta\}. \end{aligned}$$

kde

$$\|e(t)\| \leq \exp(-bt) [\alpha \|e(0)\| + \beta \|e(0)\|] \leq k_2 \exp(-bt) [\alpha \|e(0)\| + \beta \|e(0)\|]$$

Zvolíme-li zákon řízení ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}\hat{\boldsymbol{\lambda}} - \mathbf{B}\mathbf{s},$$

kde  $\mathbf{B}$  je pozitivně definitní matice, mající význam derivační složky regulátoru, potom obdržíme ze vztahu (7)

$$\dot{V} = -\mathbf{s}^T \mathbf{B}\mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{Q}\tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}.$$

Poněvadž transpozicí skaláru se skalár nemění, lze předešlý vzorec upravit

$$\dot{V} = -\mathbf{s}^T \mathbf{B}\mathbf{s} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T (\mathbf{Q}\mathbf{s} + \mathbf{\Gamma}^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}).$$

Aktualizaci parametrů  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$  lze provádět podle zákona

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\lambda}}} = -\mathbf{\Gamma}\mathbf{Q}^T \mathbf{s}, \quad (9)$$

čímž dostaneme, že derivace funkce  $V$  podle času je rovna pouze

$$\dot{V} = -\mathbf{s}^T \mathbf{B}\mathbf{s} \leq 0. \quad (10)$$

Poněvadž  $\dot{V}(t) \leq 0$ , je funkce  $V(t)$  je nerostoucí a z nerovnosti  $V(t) \geq 0$  plyne, že  $V(t)$  je dokonce ohraničenou nerostoucí funkcí. Odtud plyne, že  $V(t)$  má limitu pro  $t \rightarrow \infty$ . S ohledem na (4) jsou  $\mathbf{s}$  a  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$  ohraničené. Z (1) plyne ohraničenost  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$  a z (9) ohraničenost  $\dot{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}$ .

Ze vztahů (6) a (8) dostaneme odečtením a úpravou rovnici

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{s}} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{s} = \mathbf{Q}\tilde{\boldsymbol{\lambda}}.$$

S ohledem na regulárnost matice  $\mathbf{M}$ , lze odtud vypočíst

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{s} + \mathbf{Q}\tilde{\boldsymbol{\lambda}},$$

kde na pravé straně jsou pouze omezené matice a vektory. Proto i vektor  $\dot{\mathbf{s}}$  je omezený. Odtud plyne omezenost i druhé derivace  $V$ , tj.

$$\ddot{V} = -2\mathbf{s}^T \mathbf{B}\dot{\mathbf{s}}.$$

A) Necht'  $\mathbf{R}_1(\phi)$  značí matici (40) za předpokladu, že souřadnicová soustava  $S'$  je získána ze soustavy  $S$  otočením okolo osy  $x$ , v níž leží vektor  $\mathbf{a}_1$ , viz Obr. 1.

Vyšetřujeme nyní tuto matici pro speciální případy rotace okolo jednohlavých souřadných os – částí případ v technice.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Uvažujeme dvě souřadné soustavy  $S$  a  $S'$  s bázemi  $\alpha = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  a  $\beta = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ . Skalární součiny v matici (38) píšme stručně  $\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j$  namísto  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j)$ , tak jak je zvykem v analytické geometrii a technických vědách. Matice (38) tak přejde do elegantního tvaru

V této části se budeme věnovat vyhledání trojrozměrného prostoru  $R^3$ , který je tvořen všemi možnými uspořádanými trojicemi reálných čísel  $[x, y, z]$ . V popředí našeho zájmu bude otáčení souřadných soustav, především je-li jedna ze soustav získána z druhé otočením okolo nějakého směřového vektoru.

## 2.9. Rotace v $R^3$

$\alpha$  a  $\beta$  vektorům směřového vektoru. kde  $C_{ij}$  tedy značí kosinus úhlu sevřeného i-tým vektorům prvé báze

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mn} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

nazýváme **Gramovou maticí** a její determinant  $\det \mathbf{G}$  **Gramovým determinantem**. Označme pravou stranu v (32) písmenem  $\mathbf{W}$ , tj.

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_1) & \dots & (\mathbf{b}_n, \mathbf{a}_1) \\ (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2) & (\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_2) & \dots & (\mathbf{b}_n, \mathbf{a}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_n) & (\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_n) & \dots & (\mathbf{b}_n, \mathbf{a}_n) \end{pmatrix}.$$

Pak lze soustavu (32) zapsat

$$\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{W}$$

a v případě regulárnosti  $\mathbf{G}$  platí  $\mathbf{A} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{W}$ . Tím dostáváme řešení uvedené soustavy rovnic pro neznámé koeficienty v matici  $\mathbf{A}$ . V této souvislosti platí následující věta.

**Věta 2.7** Vektory  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  jsou lineárně nezávislé právě tehdy, je-li jejich Gramův determinant  $\det \mathbf{G}$  nenulový.

Důkaz.

1. Necht' vektory  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  jsou lineárně závislé. Potom existují koeficienty  $k_1, \dots, k_n$ , z nich alespoň jeden je nenulový, že platí

$k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + \dots + k_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ . Nech nenulovým koeficientem je  $k_j$ . Násobme skalárně předešlou rovnici postupně prvky  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , pak dostaneme

$$\begin{aligned} k_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) + k_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) + \dots + k_n(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1) &= 0 \\ k_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + k_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) + \dots + k_n(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_2) &= 0 \\ \dots & \\ k_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_n) + k_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_n) + \dots + k_n(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n) &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Poněvadž  $k_j$  je nenulový, má soustava (34) nenulové řešení a její determinant se tedy musí rovnat nule, tj.  $\det \mathbf{G} = 0$ .

2. Nyní přepokládejme, že  $\det \mathbf{G} = 0$ . Potom má soustava (34) nenulové řešení  $k_1, \dots, k_n$ . Pro toto řešení definujeme vektor

Uvažujme nyní dvě souřadné soustavy  $S$  a  $S'$ . Soustava  $S$  nechť je tvořena třemi kolmými osami protínajícími se v bodě  $O$ , s vektory  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  ležícími v těchto osách. Tuto soustavu budeme znát  $S = (O, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ . Druhá soustava  $S' = (O', \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$  nechť je obdobně tvořena třemi osami protínajícími se v bodě  $O'$ , kde vektory  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  jsou jednotkové vektory ležící v osách soustavy  $S'$ . Nyní můžeme  $\mathbf{b}_3$  jsou jednotkové vektory ležící v osách soustavy  $S'$ . Nyní můžeme

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_3 & p_1 \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_3 & p_2 \\ \mathbf{a}_3^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3^T \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3^T \mathbf{b}_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Nechť  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_3)$  a  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_3)$  jsou dvě ortonormální báze v trojrozměrném vektorovém prostoru  $V$ . Nechť  $C$  je matice přechodu od báze  $\alpha$  k bázi  $\beta$ , tj.  $C = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3]$ . Pro libovolná reálná čísla  $p_1$  definujeme tak zvanou **homogenní matici** vztahem

**Definice 3.1**

V této podkapitole budeme definovat tzv. homogenní souřadnice bodů v třírozměrném prostoru přidáním čtvrté nenulové souřadnice rovně jedné. Víme, že z geometrického hlediska lze vektory definovat jako rozdíly dvou bodů. Odtud vyplývá, že vektory budou mít čtvrtou souřadnici vždy nulovou. Tím dostáváme výhodně odlišení bodů a vektorů, které v běžném pojetí ve formě uspořádaných trojic, působí jistě rozpačky.

**3.1. Homogenní souřadnice**

**Homogenní souřadnice**

**3. Kapitola**

**Důsledek:** Kvadratická forma libovolné matice závisí jen na její symetrické části.

Důkaz:  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}_s \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}_a \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}_s \mathbf{x}$ . □

Nechť  $\mathbf{A}^*$  značí **Hermitovské sdružení**, tj. matici, která vznikne z matice  $\mathbf{A}$  komplexním sdružením jejích prvků se současnou transpozicí. Matice  $\mathbf{A}$  se nazývá **Hermitovská**, jestliže  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ .

**Věta 2.11** Čtvercová Hermitovská (a tedy i reálná symetrická) matice má všechna vlastní čísla reálná.

Důkaz. Nechť  $\lambda$  je vlastní číslo a  $\mathbf{x}$  odpovídající vlastní vektor, tj. platí  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \neq 0$ . Potom  $\lambda\mathbf{x}^* \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \mathbf{A}^* \mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^* \mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})^* \mathbf{x} = \lambda^* \mathbf{x}^* \mathbf{x}$ . Odtud  $\lambda = \bar{\lambda}$ , tedy  $\lambda$  je reálné číslo. □

Reálná čtvercová matice  $\mathbf{A}$  se nazývá **pozitivně definitní**, jestliže  $J = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  pro  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Obecněji, každá čtvercová matice  $\mathbf{A}$  se nazývá **pozitivně definitní**, jestliže  $J = \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  pro  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

**Věta 2.12** Positivně definitní matice je vždy regulární.

Důkaz. Nechť čtvercová matice  $\mathbf{A}$  je singulární. Pak rovnice  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  má nenulové řešení  $\mathbf{x}$ . Odtud  $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$  pro  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  a tedy  $\mathbf{A}$  není pozitivně definitní. □

**Věta 2.13** Positivně definitní Hermitovská matice má všechna vlastní čísla kladná.

Důkaz. Nechť  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ , kde  $\mathbf{x}$  je vlastní vektor a  $\lambda$  vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$ . Podle předpokladu je  $J = \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  a tedy  $J = \lambda\mathbf{x}^* \mathbf{x} > 0$ . Poněvadž  $\mathbf{x}^* \mathbf{x} > 0$ , musí platit  $\lambda > 0$ . □

**Důsledek:** Reálná, pozitivně definitní symetrická matice má všechna vlastní čísla kladná.

Značí-li  $\lambda_{\min}(\mathbf{B})$  nejmenší vlastní číslo matice  $\mathbf{B}$ , pak platí

$$0 \leq \int_0^t \mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z} d\tau = -\int_0^t \dot{W}(\tau) d\tau = W(0) - W(t) \leq W(0)$$

následující nerovnosti

$$W = -\mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z} \leq 0$$

její časová derivace se po úpravě rovná

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{z}, \quad (16)$$

Ad a) Definujme pozitivně definitní kvadratickou formu

Důkaz.

**Věta 9.4** Zákon řízení, definovaný vztahem (14) má následující vlastnosti:

- a)  $\mathbf{z} \in L_2 \cap L_\infty$ ,  $\|\mathbf{z}(t)\| \leq k_1 \exp(-at) \|\mathbf{z}(0)\|$
- b)  $\mathbf{e} \in L_2 \cap L_\infty$ ,  $\|\mathbf{e}(t)\| \leq k_2 \exp(-bt) (\|\mathbf{e}(0)\| + \|\mathbf{e}(0)\|)$
- c)  $\mathbf{e} \in L_2 \cap L_\infty$ ,  $\|\mathbf{e}(t)\| \leq k_3 \exp(-ct) (\|\mathbf{e}(0)\| + \|\mathbf{e}(0)\|)$

kde  $k_1, k_2, k_3, a, b, c$  jsou kladné konstanty.

proměnné  $\mathbf{z}$ . Z dříve uvedeného vztahu (13) dostaneme

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{z} - \mathbf{A} \mathbf{e} \quad (15)$$

Tato rovnice popisuje diferenciální rovnici prvního řádu nové

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

rovnici

Odtud substitucí do rovnice (1) a s použitím (13) dostaneme

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\mathbf{y} + \mathbf{N}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{B}\mathbf{z} \quad (14)$$

$$\mathbf{z}^T \mathbf{z} \leq \mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z} / \lambda_{\min}(\mathbf{B}) \text{ a tedy}$$

$$\int_0^t \|\mathbf{z}(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{B})} \int_0^t \mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z} d\tau \leq \frac{W(0)}{\lambda_{\min}(\mathbf{B})} < \infty$$

Tedy skutečně  $\mathbf{z} \in L_2$ . Funkce  $W$  je ohraničená, proto i vektor  $\mathbf{z}$  je ohraničený, viz (16), proto platí  $\mathbf{z} \in L_\infty$ .

Dokažme nyní nerovnost v a). Zřejmě

$$\frac{\dot{W}}{W} = -2 \frac{\mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{z}} \leq -2 \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{B}) \mathbf{z}^T \mathbf{z}}{\lambda_M \|\mathbf{z}\|^2} = -2 \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{B})}{\lambda_M} = -2a$$

a odtud integrací dostáváme

$$\ln \frac{W(t)}{W(0)} = \int_0^t \frac{\dot{W}}{W} d\tau \leq -2at$$

a dále

$$W(t) \leq W(0) \exp(-2at). \quad (17)$$

Poznamenejme, že platí:

Matice  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  je symetrická a pozitivně definitní, její prvky jsou spojité funkce na ohraničené a uzavřené množině v pracovním prostoru. Existují kladné konstanty  $\lambda_m$  a  $\lambda_M$  takové, že ( $\mathbf{E}$  značí jednotkovou matici)

$$\lambda_m \mathbf{E} \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \leq \lambda_M \mathbf{E}.$$

Z této vlastnosti dostáváme s využitím (16) a (17) nerovnost

$$\lambda_m \mathbf{z}^T \mathbf{z} / 2 \leq \mathbf{z}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{z} / 2 \leq \mathbf{z}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})(0) \mathbf{z} / 2 \leq \|\mathbf{z}(0)\|^2 \lambda_M e^{-2at} / 2$$

a tedy

uvazujeme ve tvaru

kde  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^z(t)$ . Zákon řízení, pro řízenou soustavu (1),

$$(13) \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{q}^d - \Delta \mathbf{e}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{q} - \mathbf{y},$$

Definujeme nové vektory  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  pomocí následujících vztahů

exponenciální stability řízení - viz dodatek I.

V této části ukážeme jiný přístup, který nevyžaduje užití Lapunovotu

definici stability ani La Salleho větu. Umožňuje přímo odvození

### 9.5. Řízení založené na transformaci stavu

Budeme opět uvažovat prostor zobecněných, neboli vnitřních, neboli

Ukáme si nyní zcela jiný přístup v úlohách řízení robotů.

pracovním prostorem robota.

v předšlých sekcích této kapitoly, na problematiku řízení v

rozšířit výsledky řízení v prostoru kloubových proměnných, získané

strukturu, ale zachovala si i své podstatné vlastnosti. Proto lze přímo

je **antisymetrická**. Rovnice (12) má tedy nejen stejnou základní

$$\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}$$

je **symetrická pozitivně definitní**, zatímco matice

$$\mathbf{M}$$

Snadno se ověří, že matice

vektoru  $\mathbf{x}$  představuje komplikovaný technický problém.

technická závislost, zatímco dostatečně přesně měření složek  $\mathbf{x}$

přímým měřením. Realizace snímačů pro odměřování  $\mathbf{q}$  je snadná

kloubových proměnných  $\mathbf{q}$ ; a vektor  $\mathbf{x}$  stanovujeme výpočtem, nikoli

že u drtivě většiny robotů jsme schopni přímo měřit hodnoty

se nazývají **efektivní parametry systému**. Nůno ovšem poznamenan,

$$\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{N}$$

konfiguraci robota v souřadnicích  $\mathbf{q}$ . Matice

Rovnice reprezentuje dynamiku robota v souřadnicích pracovního  $\mathbf{x}$  a

$$\|\mathbf{z}(t)\|^2 \leq \frac{\lambda_M}{\lambda_m} \|\mathbf{z}(0)\|^2 \exp(-2at). \quad (18)$$

Odtud je již zřejmá platnost nerovnosti v (a) pro vhodné  $k_1$ .

Ad b) Dokažme nerovnost (b). Ostatní plyne již z této nerovnosti.

Vyřešme rovnici (15)

$$\mathbf{e}(t) = \exp(-\mathbf{A}t)\mathbf{e}(0) + \int_0^t \exp(-\mathbf{A}(t-\tau))\mathbf{z}(\tau) d\tau$$

a odtud dostáváme odhady, samozřejmě pro vhodné konstanty,

$$\|\mathbf{e}(t)\| \leq$$

$$\|\exp(-\mathbf{A}t)\| \cdot \|\mathbf{e}(0)\| + \|\exp(-\mathbf{A}t)\| \cdot \int_0^t \|\exp(\mathbf{A}\tau)\| \cdot \|\mathbf{z}(\tau)\| d\tau$$

$$\leq n_1 \exp(-lt)\|\mathbf{e}(0)\| + n_2 \exp(-lt) \int_0^t \exp(l\tau)\|\mathbf{z}(\tau)\| d\tau,$$

kde  $l \neq a$ . S využitím již dokázaného tvrzení (a) lze nerovnost dále upravit

$$\|\mathbf{e}(t)\| \leq$$

$$n_1 \exp(-lt)\|\mathbf{e}(0)\| + n_2 k_1 \|\mathbf{z}(0)\| \exp(-lt) \int_0^t \exp((l-a)\tau) d\tau =$$

$$n_1 \exp(-lt)\|\mathbf{e}(0)\| + n_2 k_1 \|\mathbf{z}(0)\| \frac{[\exp(-at) - \exp(-lt)]}{(l-a)}$$

Definujme konstantu

$$b = \min\{1, a\}.$$

Z (15) dostaneme pro počáteční podmínky

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{A}\mathbf{e}(0) + \dot{\mathbf{e}}(0)$$

a odtud užitím dosud odvozené nerovnosti dostaneme

$$[P]^{-1} [O] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ r_3 & 0 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Odečtením obou matic dostáváme

$$[O] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Speciálně bod  $O$  má potom homogenní souřadnice

$$[P]^{-1} [O] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ r_3 & 0 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

typu  $4 \times 1$  ve tvaru

Poněvadž  $P - O = P$ , jsou souřadnice bodu  $P$  shodné se souřadnicemi

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^4 r_i \mathbf{a}_i.$$

tvaru lineární kombinace

každý vektor lze vyjádřit v bázi soustavy  $\alpha = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_3)$ , tj. ve

Necht' tedy  $\mathbf{r} \in V$  je polohový vektor bodu  $P$  v soustavě  $S$ . Jako

rozdílem bodů  $P$  a  $O$ .

rozumíme vektor vázaný na počátek soustavy  $S$  takový, že  $\mathbf{r}$  je

Pod pojmem **polohový vektor**  $\mathbf{r}$  nějakého bodu  $P$  v soustavě  $S$

**Definice 3.2**

### 2.10. Souhrn základních vlastností matic

Matice  $\mathbf{A}$  se nazývá **symetrická**, jestliže pro ni platí  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$  a nazývá se **antisymetrická**, jestliže  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ .

**Věta 2.9** Každou čtvercovou matici lze jednoznačně rozdělit na součet matice symetrické a matice antisymetrické.

Důkaz: Zavedme následující označení

$$\mathbf{A}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad \mathbf{A}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T).$$

Odtud transpozicí dostáváme

$$\mathbf{A}_a^T = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)^T = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T - \mathbf{A}) = -\mathbf{A}_a.$$

Podobně  $\mathbf{A}_s^T = \mathbf{A}_s$ . Tedy  $\mathbf{A}_s$  je symetrická a  $\mathbf{A}_a$  antisymetrická

matice a platí  $\mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a = \mathbf{A}$ . Dokažme jednoznačnost tohoto vyjádření.

Kdyby platilo  $\mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a = \mathbf{A} = \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_a$ , potom

$$\mathbf{A}_s - \mathbf{B}_s = \mathbf{B}_a - \mathbf{A}_a.$$

Odtud plyne

$$\mathbf{A}_s - \mathbf{B}_s = (\mathbf{A}_s - \mathbf{B}_s)^T = (\mathbf{B}_a - \mathbf{A}_a)^T =$$

$$\mathbf{B}_a^T - \mathbf{A}_a^T = -\mathbf{B}_a + \mathbf{A}_a = -(\mathbf{A}_s - \mathbf{B}_s)$$

a tedy  $\mathbf{A}_s - \mathbf{B}_s = \mathbf{0}$ , tj.  $\mathbf{A}_s = \mathbf{B}_s$ . Proto platí  $\mathbf{A}_a = \mathbf{B}_a$ .  $\square$

**Věta 2.10** Kvadratická forma antisymetrické matice je nulová.

Důkaz. Necht'  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ . Poněvadž je kvadratická forma  $J = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  skalár, platí

$$J = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (-\mathbf{A}) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = -J,$$

tedy  $J = 0$ .  $\square$

Pracovní prostor robota je omezený a podobně jsou omezené i jeho maximální možné rychlosti, z toho plyne omezenost  $\mathbf{q}$  a  $\dot{\mathbf{q}}$ .

$$J = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T (\mathbf{e} + \eta \mathbf{e})^T \mathbf{M}(\mathbf{q})(\mathbf{e} + \eta \mathbf{e}) + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (\mathbf{A} - \eta^2 \mathbf{M}) \mathbf{e}. \quad (11)$$

Obdobně lze i formu J upravit na tvar

$$J = -\mathbf{e}^T \left[ \mathbf{B} - \eta (\mathbf{M} + \mathbf{G}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}) \right] \mathbf{e} - \eta \left( \mathbf{e} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{e} \right)^T \left( \mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{e} \right) \quad (10)$$

obdržíme výraz

$$J = -\mathbf{e}^T (\mathbf{B} - \eta \mathbf{M}) \mathbf{e} - \eta \mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{e} - \eta \mathbf{e}^T (\mathbf{B} + \mathbf{C} - \mathbf{M}) \mathbf{e}.$$

je antisymetrická, dostaneme

$$\mathbf{M} - 2\mathbf{C}$$

Dosažením z (9), úpravou a využitím faktu, že matice

$$J = \mathbf{e}^T \mathbf{M} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{M} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{e} + \eta \mathbf{e}^T \mathbf{M} \mathbf{e} + \eta \mathbf{e}^T (\mathbf{M} \mathbf{e} + \mathbf{M} \mathbf{e})$$

L podél trajektorie dané rovnici (9) – viz dodatek I:

Je-li  $\eta$  dostatečně malá kladná konstanta, potom L je pozitivně definitní, což ukážeme později. Vypočítáme časovou derivaci funkce

$$J = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{e} + \eta \mathbf{e}^T \mathbf{M} \mathbf{e}.$$

nebo-li po roznásobení

$$J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \eta \mathbf{M} \\ \mathbf{A} & \eta \mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}.$$

Volme kvadratickou formu ve tvaru

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{e} + \mathbf{B} \mathbf{e} + \mathbf{A} \mathbf{e} = 0. \quad (9)$$

$$\mathbf{M} + \mathbf{G}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G},$$

$$\mathbf{A} - \eta^2 \mathbf{M}$$

jsou spojitě závislé na  $\mathbf{q}$  a  $\dot{\mathbf{q}}$ , proto jsou také omezené, a to jak jejich složky, tak i jejich normy. Tedy pro dostatečně malé kladné  $\eta$  jsou matice

$$\mathbf{B} - \eta (\mathbf{M} + \mathbf{G}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}) \quad \text{a} \quad \mathbf{A} - \eta^2 \mathbf{M}$$

pozitivně definitní, tj. forma (10) je negativně definitní a forma (11) pozitivně definitní. Regulační proces je tedy asymptoticky stabilní, dokonce i exponenciálně stabilní, viz dodatek I.  $\square$

#### 9.4. Řízení v pracovním prostoru robota

Nechť je daná dráha  $\mathbf{f}_z(t)$ , která představuje požadovanou trajektorii a natočení (tj. konfiguraci) koncového efektoru robota jako funkce času. Jedna z možností řízení pohybu robota podél této trajektorie je řešit inverzní úlohu kinematiky v každém okamžiku a generovat hodnoty kloubových proměnných  $\mathbf{q}_z(t)$  tak., aby  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_z(t)) = \mathbf{f}_z(t)$ . Metody z předešlých podkapitol lze potom využít k realizaci zpětnovazebního řízení sledováním žádané trajektorie robotem – tzv. *sledové řízení*.

Právě uvedený postup však nemusí být nejvhodnější. Výpočty řešící inverzní kinematiku bývají časově náročné. Systémy, kde  $\mathbf{f}_z(t)$  je specifikováno v reálném čase musí využívat výkonný počítač k určení  $\mathbf{q}_z(t)$ . Navíc, někdy může být obtížné stanovit hodnoty zpětnovazebních zesílení v prostoru kloubových proměnných, neboť řešená úloha bývá zadána v termínech trajektorie koncového efektoru – nástroje.

Nechť  $\Omega$  představuje prostor kloubových proměnných  $\mathbf{q}$  a nechť  $\mathbf{F}: \Omega \rightarrow X$  je lokální *difeomorfismus*, tj. diferencovatelné zobrazení, mající diferencovatelnou inverzi, z prostoru kloubových proměnných  $\mathbf{q} \in \Omega$  do pracovního prostoru  $X \subset \mathbb{R}^p$ . Poznamenejme, že v nejčastějším případě robotů se šesti stupni volnosti je  $p = 6$  a dimenze  $\Omega$  je rovněž 6.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

kde

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P} & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Po analytickém rozboru významu matice  $\mathbf{T}$  si můžeme celou věc ukázat v poněkud kompaktnější podobě. Přeřídíme transformaci v souřadnicích soustavy S.

Závěrem tedy vidíme, že matice  $\mathbf{T}$  je vlastně uspořádanou čtveřicí sloupců, které v homogenních souřadnicích vyjadřují vektorů baze  $\beta = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$  a vektor polohy  $\mathbf{r}$  počátku O', vyjádřené v souřadnicích soustavy S.

při zobrazení (1) je třetí sloupec matice  $\mathbf{T}$ .

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

zápis

Analogicky, obrazem vektoru  $\mathbf{b}_3$ , který má složkový homogenní matice  $\mathbf{T}$ .

a jeho obrazem, při zobrazení daném maticí (1), je druhý sloupec

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

který tak není ničím jiným, než koncovým bodem vektoru

$$\mathbf{r} = \sum_i p_i \mathbf{a}_i$$

opět vyjádřeným v homogenních souřadnicích. Vektor  $\mathbf{r}$  tedy představuje polohový vektor počátku O' soustavy S'.

Vektor  $\mathbf{b}_1$  lze v bázi  $\beta$  vyjádřit kombinací  $\mathbf{b}_1 = 1\mathbf{b}_1 + 0\mathbf{b}_2 + 0\mathbf{b}_3$ , proto mu přiřazujeme uspořádanou trojici [1,0,0], kterou v homogenních souřadnicích píšeme

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Poslední složka je nulová, neboť jde o vektor. Násobení matice (1) zprava tímto vektorem dostaneme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_3 & p_1 \\ \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_3 & p_2 \\ \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Při maticovém zobrazení pomocí matice (1) se tedy souřadnice vektoru  $\mathbf{b}_1$  zobrazí jako první sloupec matice  $\mathbf{T}$ , viz (1), a to jako vektor, neboť v posledním řádku je nula. To je v plném souladu s našimi předešlými úvahami.

Zcela obdobně vektoru  $\mathbf{b}_2$  odpovídá homogenní složkový zápis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha[\mathbf{x}] \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta[\mathbf{x}] \end{pmatrix} \mathbf{L}$$

Ize (9) přepsat do formy

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha[\mathbf{x}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta[\mathbf{x}] \end{pmatrix} \mathbf{L}$$

Poněvadž zřejmě platí

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$$

k němuž je přičten homogenní bod  
Vidíme tedy, že koncový bod vektoru  $\mathbf{x}$ , umístěného do počátku  $O'$  soustavy  $S'$ , se transformuje do soustavy  $S$  jako homogenní vektor,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta[\mathbf{x}] \end{pmatrix} \mathbf{L} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta[\mathbf{x}] \end{pmatrix} \mathbf{L} + \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Jeho součin s maticí (1) lze potom upravit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta[\mathbf{x}] \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{L}$$

bude

stane se polohovým vektorem v této soustavě a jeho koncový bod nabývá hodnot 1, 2, 3. Umístíme-li vektor  $\mathbf{x}$  do počátku soustavy  $S'$ , jeho složky jsou po řadě  $x_i$  v soustavě  $\alpha$  a  $y_j$  v soustavě  $\beta$ , kde  $i$  a  $j$  Necht  $\mathbf{x}$  je libovolný vektor uvažovaný v našich soustavách. Necht

obvodu

Dosažením (8) do (1) získáme rovnici uzavřené smyčky regulačního

Důkaz.

**Věta 9.3**  
Necht matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou symetrické a pozitivně definitní. Potom zákon řízení (8) aplikovaný na soustavu (1) vede k řízení, které exponenciálně konverguje k žádané trajektorii v čase.

Platí následující věta

kde opět  $\mathbf{q}_z = \mathbf{q}_z(t)$  představuje žádanou trajektorii pohybu robota.

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_z + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_z + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{B}\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad (8)$$

Na základě porovnání zákonů řízení (4) a (6) se pokusme o

### 9.3. PD řízení sledováním předepsané trajektorie

□

Abychom našli maximální invariantní množinu, obsaženou v  $S$ , dosadíme  $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$  do rovnice uzavřeného regulačního obvodu (7). Odtud dostaneme rovnici  $\mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , ze které plyne  $\mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{e} = \mathbf{0}$ . Z pozitivní definitnosti matice  $\mathbf{A}$  odtud dostáváme  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ . Tedy  $\mathbf{p} = \mathbf{q}_z$  je asymptoticky stabilní poloha.

$$S = \{\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}; \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{0}\}$$

stavového prostoru, pro kterou platí  $L = 0$ , tj.

$$(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}})$$

Abychom dokázali asymptotickou stabilitu, použijeme tzv. **La Salleho větu** – viz též dodatek I. Necht  $S$  je množina bodů zatím dokázali pouze stabilitu regulačního procesu. Vidíme, že časová derivace funkce  $L$  je nekladná, avšak nikoli negativně definitní, nýbrž pouze negativně semidefinitní. Tím jsme

Z předešlých kapitol víme, že dynamika robota v prostoru kloubových proměnných má formu

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}.$$

Přepíšeme tuto rovnici v rámci proměnných  $\mathbf{x}$ , které patří do pracovního prostoru  $X$ , tj.  $\mathbf{x} \in X$ . Použijme Jakobián zobrazení kinematické rovnice  $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{x}$ , tj.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}},$$

$$\text{kde } \mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}.$$

Poznamenejme, že zde jde o klasický Jakobián zobrazení. Za našeho předpokladu můžeme psát

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{x}}$$

a derivací odtud dostaneme

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} + \frac{d\mathbf{J}^{-1}}{dt}\dot{\mathbf{x}}.$$

Uvedené vztahy můžeme nyní dosadit do rovnice dynamiky robota. Píšeme-li, jak je zvykem  $\mathbf{J}^{-T}$  namísto  $(\mathbf{J}^{-1})^T$ , dostaneme po úpravě rovnici dynamiky robota ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{x}}) = \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \quad (12)$$

kde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{J}^{-T} \mathbf{M} \mathbf{J}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{J}^{-T} \left( \mathbf{C} \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{M} \frac{d\mathbf{J}^{-1}}{dt} \right) \\ \tilde{\mathbf{N}} &= \mathbf{J}^{-T} \mathbf{N} \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}} &= \mathbf{J}^{-T} \boldsymbol{\tau}. \end{aligned}$$

což jsou právě složky vektoru  $\mathbf{r}$ , rozšířené o čtvrtou nulovou komponentu. Zároveň vidíme, že podobné úpravy lze provést s každým vektorem, nejen polohovým.

Zajímáme se nyní o význam jednotlivých složek homogenní matice (1). Jak uvidíme, mají bezprostřední geometrický smysl.

#### Věta 3.1

Matici  $\mathbf{T}$  lze vyjádřit ve tvaru součinu dvou matic

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_3 & 0 \\ \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_3 & 0 \\ \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

z nichž levá představuje posunutí počátku  $O'$  o vektor  $\mathbf{r}$  vyjádřený v souřadnicích soustavy  $S$ , tj.

$$\mathbf{r} = \sum_i p_i \mathbf{a}_i$$

a druhá reprezentuje natočení soustavy  $S'$  vyjádřené v souřadnicích soustavy  $S$ .

Důkaz.

Rovnost ve (2) ověříme snadno přímým vynásobením. Bod  $O'$  má v soustavě  $S'$  souřadnice (0,0,0) a v homogenních souřadnicích mu odpovídá sloupcový vektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Násobíme-li (1), resp. (2), tímto vektorem, obdržíme



Kdyby vlastní číslo  $\lambda$  bylo nulové, musel by podle první rovnice vektor  $\mathbf{x}_2$  být také nulový a z druhé rovnice by vyplynula nulovost

$$\lambda \mathbf{x}_2 = -\mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{B}\mathbf{x}_2$$

$$\lambda \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$$

a odtud

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}$$

Označme matici této soustavy písmenem  $\mathbf{C}$ . Nyní postačuje ukázat, že všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{C}$  mají záporné reálné části. Charakteristická rovnice matice  $\mathbf{C}$  má tvar

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}$$

Rovnici (5) můžeme přepsat na soustavu rovnic 1. řádu

Důkaz.

**Věta 9.1**  
Jsou-li matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  symetrické a pozitivně definitní, potom zákon řízení (4) systému (1) je exponenciálně stabilní.

odchylka  $\mathbf{e}$  konvergovala k nule. tak, aby rovnice (5) byla stabilní, tj. aby pro  $t \rightarrow \infty$  regulační s konstantními koeficienty, proto bude snadné stanovit matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  Rovnice (5) je lineární vektorová diferenciální rovnice druhého řádu

$$\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (5)$$

setvačností musí pro regulační odchylku platit Porovnáním (1) a (4) vidíme, že vzhledem k regularitě matice kde  $\mathbf{e}$  je regulační odchylka a  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  jsou konstantní matice.

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{p} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{q} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4)$$

$$\mathbf{p} = \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{B}\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{A}\mathbf{e} \quad (4)$$

vektoru  $\mathbf{x}_1$ . Tehdy vektor tvořený složkami vektorů  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$  by byl nulový, což je v rozporu s definicí vlastních vektorů. Tedy  $\lambda \neq 0$ . Kdyby nyní některý z vektorů  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  byl nulový, pak podle první rovnice by musel být nulový a druhý z nich, což opět není možné. Tedy  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$  jsou oba nenulové vektory. Dosazením za  $\mathbf{x}_2$  do druhé rovnice obdržíme

$$\lambda^2 \mathbf{x}_1 = -\mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \lambda \mathbf{B}\mathbf{x}_1$$

a odtud násobením zleva vektorem  $\mathbf{x}_1^*$  dostaneme rovnici

$$\lambda^2 \mathbf{x}_1^* \mathbf{x}_1 = -\mathbf{x}_1^* \mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \lambda \mathbf{x}_1^* \mathbf{B}\mathbf{x}_1,$$

kteřou převedeme do standardního tvaru

$$\lambda^2 \mathbf{x}_1^* \mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{x}_1^* \mathbf{B}\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^* \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 0.$$

Hvězdička zde značí *hermitovskou transpozici*, tj. transponování matice spolu s komplexním sdružením provedeným současně.

Rovnici lze přepsat do tvaru  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ . Její koeficienty jsou všechny kladné (obě matice jsou totiž pozitivně definitní). Odtud užitím klasického vzorce pro řešení kvadratické rovnice vidíme, že oba kořeny mají reálné části záporné. Poněvadž řešení rovnice (5) je tvořeno lineární kombinací exponenciálních funkcí, které v případě násobných kořenů jsou násobeny polynomem, vidíme, že řešení je exponenciálně stabilní.  $\square$

Uvedenou úlohu jsme mohli řešit La Salleho větou, odkud bychom dokázali, že regulační proces je asymptoticky stabilní. Především úprava důkazu však dokazuje mnohem více, totiž, že proces je dokonce exponenciálně stabilní.

## 9.2. Řízení k bodu s využitím PD regulátoru

V této části opět využijeme PD regulátor, ke kterému přidáme nelineární kompenzační člen

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{A}\mathbf{e} - \mathbf{B}\dot{\mathbf{e}}, \quad (6)$$

S ohledem na předchozí text můžeme konstrukci homogenní transformací matice rozložit do čtyř kroků. Je nutné provést čtyři operace

### Matice ramene

transformaci provést. Náš úkol je nyní příslušnou matici nalézt. matic tak dostáváme jedinou složenou matici, která umožňuje tuto koncového nástroje do prostoru báze  $S_0$ . Vynásobením příslušných matic  $\mathbf{T}_1$  přepočítávat souřadnice bodů a vektorů z prostoru pomocí kterých můžeme s využitím příslušných transformací  $S_1$ . S využitím D-H konvence jsme sestavili souřadné soustavy  $S_1$ .

### 4.3. Rovnice ramene robota

článek předchozí. obdržíme výslednou transformací matice z posledního článku na konstantní. Vynásobením transformací matic pro oba systémy tak 7. Příslušné parametry druhého systému jsou pak ovšem všechny články kinematického řetězce, jeden díle bodů 1 až 6, druhý díle bodů vyhne v obou souřadných systémech přířazených posledního jednotlivých článků řetězce, neboť poslední souřadný systém by bod 7 může být v rozporu s vobou souřadných systémech na spojen s posledním článkem kinematického řetězce robota. Potom

Ve vyjimečných případech může být koncový nástroj pevně

$\square$

13. Položme  $k := k+1$ . Je-li  $k \leq n$ , jdi na krok 8; jinak ukonči činnost.

12. Určime úhel  $\alpha_k$  jako natočení osy  $Z^k$  oproti ose  $Z^{k-1}$  měřeny ve směru otáčení okolo osy  $X^k$ .

11. Určime parametr  $a_k$  jako vzdálenost od bodu  $B^k$  k počátku souřadného systému  $S_k$  měřenou v kladném směru podél osy  $X^k$ .

homogenní matici  $\mathbf{T}$  zprava příslušnou maticí  $\mathbf{M}$  rotace či translace, tj.  $\mathbf{T} := \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}$ .

4. Je-li více rotačních či translačních matic, reprezentujících vícenásobné složené zobrazení, přejdeme na krok 2, jinak se výpočet ukončí.

Výsledná složená homogenní matice  $\mathbf{T}$  transformuje souřadnice posledního mobilního souřadného systému do prvního, tj. do pevného souřadného systému.

Zavedme proto zpět svou vazbu pomocí PD regulátoru

podle typu robota zpravidla v rozmezí 0,01 – 5 mm. může zaujmout stanovenou polohu jen s určitou přesností, která bývá ani přesně dosažitelnou počáteční polohou a rychlost, neboť robot řízení však nelze považovat za zcela korektní. Není-li k dispozici řízení, robot projíždí stanovenou trajektorii. To jsou-li počáteční podmínky pro polohu  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^z(0)$  a rychlost  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}^z(0)$ .

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^z(t)$$

Matic  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  je vždy regulární, proto

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}^z$$

Dosažením do diferenciální rovnice dynamiky robota obdržíme

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}^z + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}^z + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3)$$

Tato metoda patří k nejjednodušším a pochází z dávné historie řízení nelineárních systémů. Někdy se používá i pojem *řízení s inverzní dynamikou*. Uvažujeme zákon řízení ve tvaru

### 9.1. Řízení kroucí moment

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^z(t)$$

definovat vztahem

V celé této kapitole budeme *regulační odchylku polohy* naopak, než tomu bylo v kinematice robotů.

Poznamenejme, že-li dáno řízení  $\mathbf{u}(t)$  a z rovnice (1) určujeme trajektorii  $\mathbf{q}(t)$ , hovoříme o *první úloze dynamiky*. Je to tak trochu

konkrétních aplikací. Poznámenejme, že-li dáno řízení  $\mathbf{u}(t)$  a z rovnice (1) určujeme trajektorii  $\mathbf{q}(t)$ , hovoříme o *první úloze dynamiky*. Je to tak trochu „nedostatečnost“ je samozřejmě závislá především na požadavcích známých technických systémech. Přitom volba „dostatečnost“ nebo značnou pozornost otázkám dostatečně přesného řízení nedostatečně robotů hodnoty těchto parametrů nedodávají. Je tedy nutné věnovat těm, hmotnosti dílčích členů, momenty setrvačnosti apod. – výrobců z parametrů robota známe jen velmi přibližně – zejména koeficienty

kde  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou opět čtvercové matice a  $\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^z$ , jako v předešlé části. Bez nelineárního členu  $\mathbf{N}$  by řízení trpělo tzv. *trvalou regulační odchylkou* a bylo by nutné přidat integrační člen, který by tuto odchylku eliminoval v průběhu regulace. Platí však následující věta.

#### Věta 9.2

Nechť  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou symetrické pozitivně definitní matice a  $\mathbf{q}^z(t)$  je konstantní vektor. Potom řízení dané vztahem (6) aplikované na systém (1) je globálně asymptoticky stabilní.

Důkaz.

Dosažením (6) do (1) dostaneme rovnici uzavřeného regulačního obvodu

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

Poněvadž je žádaná hodnota konstantní vektor, je  $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{q}}$  a  $\ddot{\mathbf{e}} = \ddot{\mathbf{q}}$ . Potom lze předešlou rovnici přepsat do tvaru

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (7)$$

Volme Ljapunovovu funkci ve tvaru pozitivně definitní kvadratické formy

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{A} \mathbf{e}.$$

Vypočteme derivaci této funkce podél trajektorie dané diferenciální rovnicí (7)

$$\dot{L} = \frac{dL}{dt} = \dot{\mathbf{e}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{e}} + \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{e}} = -\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T (\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}) \dot{\mathbf{e}}$$

Poněvadž matice  $\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}$  je antisymetrická, viz (29) v kapitole o dynamice robotů, je její kvadratická forma nulová. Tedy platí

$$\dot{L} = -\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{e}} \leq 0.$$

a podobně i pro druhý úhel

$$C\alpha_k = \cos\alpha_k, S\alpha_k = \sin\alpha_k$$

S<sub>k-1</sub>. Pro další potřeby zavedme následující označení. Uvedená matice představuje transformační matici, která transformuje souřadnice z k-tého souřadného systému S<sub>k</sub> do souřadného systému S<sub>k-1</sub>. Pro další potřeby zavedme následující označení.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\alpha_k & 0 \\ \cos\alpha_k & \cos\alpha_k \cos\Theta_k & -\sin\alpha_k \cos\Theta_k \\ \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \sin\Theta_k & \sin\alpha_k \cos\Theta_k \\ 0 & \cos\alpha_k & \sin\alpha_k \\ 1 & e_k & 1 \end{pmatrix}$$

matici

Vynásobíme-li tyto matice v uvedeném pořadí, obdržíme výslednou

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_k & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

homogenní matice

Tento čtyřem operacím odpovídají ve stejném pořadí následující

1. Rotovat systém S<sub>k-1</sub> okolo z<sup>k-1</sup> o úhel  $\Theta_k$
2. Posunout soustavu S<sub>k-1</sub> o hodnotu  $e_k$
3. Posunout S<sub>k-1</sub> podél osy x<sup>k-1</sup> o hodnotu  $a_k$
4. Otočit S<sub>k-1</sub> okolo osy x<sup>k-1</sup> o úhel  $\alpha_k$ .

První z uvedených matic představuje homogenní matici rotace soustavy S' o úhel  $\phi$  okolo osy  $k$ . Druhá matice pak představuje homogenní matici posunutí počátku souřadného systému S' o vektor  $\mathbf{P}$ , v souřadnicích soustavy  $\alpha$ . Odtud je zřejmé a plyne též z věty 3.1, že pro inverzní transformace platí následující vztahy:

#### 1. Inverzní translace

$$\mathbf{Tran}^{-1}(\mathbf{P}) = \mathbf{Tran}(-\mathbf{P})$$

#### 2. Inverzní rotace

$$\mathbf{Rot}^{-1}(\phi, k) = \mathbf{Rot}(-\phi, k) = \mathbf{Rot}^T(\phi, k)$$

### 3.4. Složené homogenní transformace

V případě robotů budeme potřebovat skládat více transformací do sebe. Na základě výkladu v této a předešlé kapitole můžeme skládání lineárních zobrazení, reprezentovaných maticemi, shrnout do následujícího algoritmu. Rotace a translace budeme reprezentovat výhradně homogenními maticemi. Složené rotace budeme reprezentovat jako oddělené fundamentální matice rotací. Systém od kterého vycházíme budeme pracovně nazývat *pevný* a systém, který se pohybuje v rámci tohoto „pevného“ systému budeme pracovně nazývat *mobilní*.

#### Algoritmus: Skládání homogenních transformací

1. Inicializujeme transformační matici  $\mathbf{T} := \mathbf{E}$
2. Jestliže se má mobilní souřadný systém otáčet nebo posouvat podél osy (jednotkového vektoru) pevného souřadného systému, násobíme matici  $\mathbf{T}$  *zleva* příslušnou fundamentální maticí  $\mathbf{M}$  rotace či posuvu, tj.  $\mathbf{T} := \mathbf{M} \cdot \mathbf{T}$ .
3. Jestliže se má mobilní souřadný systém otáčet nebo posouvat podél své vlastní osy (jednotkového vektoru), vynásobíme

Věnujme se na chvíli analytickému řešení rovnice (12). Její pravá strana je nelineární, obsahuje kvadratický výraz, a proto může vzbuzovat vážné obavy. Pro jednoduchost předpokládejme, že

**Poznámka**

Obdobně lze využít (8) pro předběžné určení  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{Q}^{-1}(0)$ .  
 Podobně lze využít (9), který byl použit na předběžný výpočet hodnoty  $\lambda$ .  
 $\mathbf{R}(0)$ , které často získáváme odhadem založeným na zkušenostech získaných z měření a pokusů. Pro odhad  $\lambda(0)$  lze v prvním kroku

Obě rovnice (11) a (12) zřívávis na počátečních podmínkách  $\lambda(0)$  a

upravit měření snižující veličin.

nutno bud změnit krok metody, zvolit jinou metodu integrace nebo vypočítávané hodnoty oscilovat, je dosaženo meze přesnosti a je krocih, čímž získáme trvale se upřesňující hodnotu vektoru  $\lambda$ . Přesnost výpočtu je závislá na řadě okolností. Začínají-li přímou integraci rovnici (11). To můžeme provádět ve střídaných integrování diferenciálních rovnic nejprve řešíme rovnici (12) a poté použít je zříváme: pomocí předem vybrané metody numerického diferenciálního řešení (11) a (12) umožňují on-line estimaci. Jejich

$$\dot{\mathbf{R}} = -\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{R} \quad (12)$$

tedy

$$\mathbf{R} = -\mathbf{R} \frac{d}{dt} \mathbf{R}^{-1} = -\mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^{-1} = -\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{R},$$

a odtu

$$\mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} + \mathbf{R} \frac{d}{dt} (\mathbf{R}^{-1}) = \mathbf{0}$$

Derivaci matice  $\mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{E}$  podle času dostaneme

$$\dot{\lambda} = -\mathbf{R}^T \mathbf{A} \lambda \quad (11)$$

výraz přepsat

Zavedme označení  $\mathbf{z} = \mathbf{Z} \lambda - \mathbf{w}$  a  $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{-1}$ . Potom lze předešlý

matice  $\mathbf{R}$  je regulární pro všechna  $t \geq 0$ . Derivací výrazu  $\mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{E}$  podle času a úpravou dostaneme rovnici

$$\frac{d}{dt} \mathbf{R}^{-1} = -\mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-1}.$$

Rovnici (12) přepíšeme na

$$-\mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z},$$

takže musí platit

$$\frac{d}{dt} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z}.$$

Integrací odtud dostaneme

$$\mathbf{R}^{-1}(t) = \mathbf{R}^{-1}(0) + \int_0^t \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} d\tau, \quad (13)$$

neboli

$$\mathbf{R}(t) = \left( \mathbf{R}^{-1}(0) + \int_0^t \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} d\tau \right)^{-1}. \quad (14)$$

Porovnáme-li (8) a (13), vidíme, že rozdíl spočívá pouze v počáteční podmínce. Ještě jednou poznamenejme, že výhoda této metody spočívá ve využití rovnic (11) a (12), které umožňují **on-line estimaci**, nikoli tedy v rovnicích (13), resp. (14). Ty jsou zde uvedené pouze z důvodu ucelenosti.

Na závěr poznamenejme, že metoda nejmenších čtverců, ve zde uvedené integrální podobě, je zobecněním klasické metody nejmenších čtverců, která je uvedena v dodatku II, viz „Řešení přeúčtené soustavy rovnic“. V zásadě jde o „totéž“. V integrální podobě je užita Lebesgueova míra, v diskretní míra algebraická, viz [6]. Dále poznamenejme, že v článku [23] lze nalézt řešení konkrétního případu identifikace parametrů robota KUKA.

potom můžeme zapsat v jednotném tvaru

Derivaci podle zobecněné proměnné  $q_k = \eta_k \Theta_k + (1 - \eta_k) e_k$

definice 4.1.

kde  $\eta_k = 1$  pro rotační kloub a  $\eta_k = 0$  pro posuvný kloub, viz též

$$\mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Derivaci matice rozumíme matice tvaru

**Definice 4.2**

operátoru.

Situace je ještě jednodušší, než v předešlém případě. Toho nyní využijeme. Definujme následující matice ve smyslu maticeového

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T}_k^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analogicky derivaci parametru  $e_k$  dostaneme

matice.

Derivaci matice podle  $\Theta_k$  lze tedy nahradit násobením zleva vhodnou

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T}_k^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Důkaz.

Matice (1) je jen zkráceným zápisem již odvozené matice. Pro odvození inverzní matice postačuje užít větu 3.1 z předešlé podkapitoly.  $\square$

**Definice 4.1**

Pod pojmem k-tá **zobecněná proměnná** rozumíme skalár definovaný

$$q_k = \eta_k \Theta_k + (1 - \eta_k) e_k,$$

kde  $\eta_k = 1$  pro rotační kloub a  $\eta_k = 0$  pro posuvný kloub.

Transformační matice  $\mathbf{T}$  z předešlé věty pak můžeme vyjádřit jednotně ve tvaru

$$\mathbf{T}_{k-1}^k = \mathbf{T}_{k-1}^k(q_k), \quad (2)$$

čímž vyjadřujeme skutečnost, že matice je funkcí jediné proměnné  $q_k$ . Podle věty 4.1 se bod P zapsaný v homogenních souřadnicích transformuje ze soustavy  $S_k$  do soustavy  $S_{k-1}$  podle vztahu

$$\mathbf{T}_{k-1}^k(q_k) \mathbf{P}.$$

Transformaci z prostoru nástroje (koncového efektoru) do základny robota pak můžeme zapsat

$$\mathbf{T}_{báze}^{nástroj}(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^n(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^1(q_1) \mathbf{T}_1^2(q_2) \dots \mathbf{T}_{n-1}^n(q_n), \quad (3)$$

kde  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$  je sloupcový vektor zobecněných proměnných. Bod P v homogenních souřadnicích se pak ze soustavy  $S_n$  transformuje do báze robota vztahem

$$\mathbf{T}_{báze}^{nástroj}(\mathbf{q}) \mathbf{P}.$$

Velmi často je výhodné rozdělit matice ramene robota na dvě složky, na složku charakterizující polohovací systém robota a na složku charakterizující orientaci koncového nástroje:

$$\mathbf{T}_{báze}^{zápěstí}(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^3(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^1(q_1) \mathbf{T}_1^2(q_2) \mathbf{T}_2^3(q_3) \quad (4)$$

odkud určíme derivaci  $\lambda$

$$\lambda = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{A} (\mathbf{Z} \lambda - \mathbf{u}) .$$

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} \lambda + \mathbf{Q} \lambda = \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{u} ,$$

Využijeme-li vztah (8), dostaneme derivaci vztahu (10) podle  $t$

$$(10) \quad \left( \int_t^0 \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} d\tau \right) \lambda(t) = \int_t^0 \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{u} d\tau .$$

Vektor parametru  $\lambda$  je ve skutečnosti vektorem konstant a nezávisí tedy na čase. V průběhu jeho identifikace jsou snímány signály zasunuté, dokonce ani matematický model dynamiky robota není nikdy přesný. Proto je nutné měření provádět opakovaně a po delší dobu. Navíc výpočet  $\lambda$  je závislý na funkcích, které jsou funkcemi času, viz (7). V průběhu identifikace se komponenty vektoru  $\lambda$  postupně mění. Proto je vhodné klást  $\lambda = \lambda(t)$ , přičemž pro dostatečně dlouhou dobu měření lze za určitých předpokladů očekávat, že  $\lambda$  konverguje ke skutečným hodnotám, alespoň v rámci předepsané přesnosti měření. Pokusme se využít tohoto faktu k dosažení lepší efektivity výpočtu. V rovnici (7) tedy závisí vektor parametru  $\lambda$  na čase  $t$  a na  $\tau$ . Nás ale bude zajímat jen jeho hodnota v čase  $t$ , která na hodnotách  $\tau > t$  nezávisí. Proto můžeme poslední rovnici upravit vyknutím vektoru parametru z integrálu a rovnici (7) přepsat

**Průběžná identifikace parametru**

$$(9) \quad \lambda = \mathbf{Q}^{-1} \int_t^0 \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{u} d\tau .$$

regulární, můžeme přímo určit hledané parametry vztahem

$$(8) \quad \mathbf{Q} = \int_t^0 \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} d\tau$$

## 9. Kapitola

### Řízení robotů

V úlohách řízení robotů se objevuje několik specifických problémů, které můžeme reprezentovat následujícími úlohami. První z nich představuje problém dosažení velmi přesné polohy a orientace chapadla v prostoru. Tato úloha vzniká např. při snaze položit předmět na stanovené místo, anebo zasunout komponentu montovaného zařízení do učeného otvoru apod. Druhá úloha reprezentuje problematiku přesného sledování předem stanovené dráhy koncového nástroje v čase, tzv. *sledové řízení*.

Poznamenejme, že v této kapitole budeme předpokládat znalost Ljapunovy teorie stability nelineárních systémů (tzv. přímá Ljapunovova metoda) a znalost La Salleho věty. Vše potřebné lze nalézt v dodatku 1.

Pokud se týká rovnice dynamiky robota, můžeme v zásadě vyjít z kteréhokoli typu rovnic (28), (30) nebo (31). Příslušné úpravy v matematickém odvození jsou zcela zanedbatelné. Uvažujme tedy dynamické chování robota popsané rovnicí

$$(1) \quad \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u} .$$

Je-li předem stanovená dráha pohybu  $\mathbf{q}_z(t)$  – tzv. *žádaná trajektorie*, pak za předpokladu dvojnásobné spojité diferencovatelnosti  $\mathbf{q}_z(t)$ , můžeme určit požadované řízení  $\mathbf{u}$  prostým dosazením do předešlé rovnice. Tím obdržíme zákon řízení

$$(2) \quad \mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{q}_z)\ddot{\mathbf{q}}_z + \mathbf{C}(\mathbf{q}_z, \dot{\mathbf{q}}_z)\dot{\mathbf{q}}_z + \mathbf{N}(\mathbf{q}_z, \dot{\mathbf{q}}_z) .$$

Tedy hovoříme o *inverzní úloze dynamiky*. Je-li rovnice dynamiky (1) určena přesně, je i takto stanovené řízení přesné. Skutečnost však bývá poněkud jiná. Především přesný model dynamiky robota nelze nikdy dosáhnout. Důvody spočívají v řadě okolností: především nelze dosáhnout přesného odměřování potřebných veličin a to jak z technického hlediska, tak i z hlediska fyzikálních zákonů, viz Heisenbergův princip neurčitosti kvantové mechaniky. Dále mnohé

kde

$$(12) \quad \mathbf{v}^k = \frac{d\mathbf{p}^k}{dt} = \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_k^i \mathbf{p}^k q_i^k + \mathbf{T}_k^0 \mathbf{p}^k ,$$

Derivaci (11) podle času dostaneme

$$(11) \quad \mathbf{p}^0 = \mathbf{T}_1^0(q_1) \cdots \mathbf{T}_{k-1}^k(q_k) \mathbf{p}^k .$$

Potom  $i$  a  $j$  mohou být libovolná čísla z celočíslného intervalu 0 až  $n$ . Speciálním případem rovnice (10) je

$$\mathbf{T}_k^k = \mathbf{E} .$$

dodefinujeme-li

směry, využijeme-li zápis inverzní transformace u věty 4.1 a reprezentování jeho homogenní souřadnice. Vztah funguje oběma kde dolním indexem u bodu  $\mathbf{P}$  vyznačujeme ve které soustavě jsou

$$(10) \quad \mathbf{p}^i = \mathbf{T}_j^i(\mathbf{q}) \mathbf{p}^j = \mathbf{T}_{i+1}^i(q_{i+1}) \cdots \mathbf{T}_j^i(q_j) \mathbf{p}^j ,$$

soustavy  $S_j$  do soustavy  $S_i$

transformaci libovolného bodu v homogenních souřadnicích  $\mathbf{P}$  ze ve svém důsledku i derivace ramene robota. Uvažujme nyní

Vztah (9) umožňuje výpočet derivaci podle času jednotlivých matic a

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T}_k^{k-1} = \frac{d}{dt} \mathbf{T}_k^{k-1} \frac{dq_k}{dt} .$$

neboť podle pravidla o derivaci složených funkcí dostáváme

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{T}_k^{k-1} = \mathbf{Q}^k \mathbf{T}_k^{k-1} \dot{q}_k .$$

Dále platí

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{T}_k^{k-1} = \mathbf{Q}^k \mathbf{T}_k^{k-1} (q_k) .$$

$$C\Theta_k = \cos \Theta_k , \quad S\Theta_k = \sin \Theta_k .$$

Nyní jsme připraveni vyslovit následující větu.

**Věta 4.1:** (Transformace souřadnic článků robota)

Nechť  $S_0, S_1, \dots, S_n$  je množina souřadných soustav zvolená podle D-H konvence. Nechť dále  $X$  je libovolný bod, jehož homogenní souřadnice vyjádřené, po řadě, v souřadných systémech  $S_k$  a  $S_{k-1}$  jsou

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}^k \text{ a } \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}^{k-1} , \quad k = 1, 2, \dots, n ,$$

Potom pro transformace těchto souřadnic platí vztah

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}^{k-1} = \mathbf{T}_{k-1}^k \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}^k$$

kde transformační matice je tvaru

$$\mathbf{T}_{k-1}^k = \begin{pmatrix} C\Theta_k & -C\alpha_k S\Theta_k & S\alpha_k S\Theta_k & a_k C\Theta_k \\ S\Theta_k & C\alpha_k C\Theta_k & -S\alpha_k C\Theta_k & a_k S\Theta_k \\ 0 & s\alpha_k & C\alpha_k & e_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (1)$$

Pro inverzní transformaci platí

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}^k = \mathbf{T}_k^{k-1} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}^{k-1} , \quad \text{kde } \mathbf{T}_k^{k-1} = (\mathbf{T}_{k-1}^k)^{-1} ,$$

$$(\mathbf{T}_{k-1}^k)^{-1} = \begin{pmatrix} C\Theta_k & S\Theta_k & 0 & -a_k \\ -C\alpha_k S\Theta_k & C\alpha_k C\Theta_k & S\alpha_k & -e_k S\alpha_k \\ S\alpha_k S\Theta_k & -S\alpha_k C\Theta_k & C\alpha_k & -e_k C\alpha_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$



kde index 4 u výrazu vlevo označuje poslední, tj. 4. sloupec matice

$$\mathbf{T}_{daze}^{baze}(q_1, q_2, q_3)_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{r} - e^n \mathbf{R}_3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

redukované rovnice zápisu kloubové proměnné  $q_1, q_2, q_3$  lze potom získat z následující matice  $\mathbf{R}$ . Pozice zápisu byla získána z trojice  $\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{e}_n$ . První tři kde  $\mathbf{e}_n$  je délka nástroje,  $\mathbf{R}_3$  je přístupový vektor, tj. třetí sloupec

$$\mathbf{r}_{zap} = \mathbf{r} - e^n \mathbf{R}_3,$$

rozložit na dva subproblémy. Pozice zápisu je natažení zápisu robota. V tomto případě, lze inverzní problém robot má sférické zápisu. Necht' dále poslední osa představuje osu případ, kdy počet stupňů volnosti robota je v rozpětí  $4 \leq n \leq 6$  a zjednodušuje, je-li robot opatřen sférickým zápisem. Uvažujeme nyní manipulace je třeba žádat  $n \geq 6$ . Jak již bylo řečeno, problém se neznámých proměnných musí být roven nejméně 6, tj. pro obecně máme-li obecný problém inverzní úlohy, potom počet neznámých komponent vektoru  $\mathbf{q}$ .

tak zbude 6 nezávislých omezujících podmínek pro určení  $n$  tři rovnice pro  $i = j$ , tj. celkem 6 rovnic. Z původních 12 rovnic nám kde  $\mathbf{R}_i$  značí  $i$ -tý sloupec matice  $\mathbf{R}$ . Máme tedy tři rovnice pro  $i \neq j$  a

$$\mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_j^T = \delta_{ij}, \text{ pro } i, j = 1, 2, 3,$$

Z ortonormality matice orientace  $\mathbf{R}$ , tj. z platnosti  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{E}$  plyne Rovnice ramene určuje 12 algebraických rovnic pro  $n$  neznámých kloubových proměnných. Avšak tyto rovnice nejsou nezávislé.

$$\begin{pmatrix} C_{11}(\mathbf{q}) & C_{12}(\mathbf{q}) & C_{13}(\mathbf{q}) & d_1(\mathbf{q}) & R_{11} & R_{12} & R_{13} & r_1 \\ C_{21}(\mathbf{q}) & C_{22}(\mathbf{q}) & C_{23}(\mathbf{q}) & d_2(\mathbf{q}) & R_{21} & R_{22} & R_{23} & r_2 \\ C_{31}(\mathbf{q}) & C_{32}(\mathbf{q}) & C_{33}(\mathbf{q}) & d_3(\mathbf{q}) & R_{31} & R_{32} & R_{33} & r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{w}(t) \quad (3)$$

Uvažujeme lineárně parametrizovaný model

## 8.2. Estimační metody založené na predikci chyby

$\mathbf{Z}$  lze potom určit dostupnými měřeními  $\mathbf{q}, \mathbf{q}$ . Matice  $\mathbf{Q}$ . Matice  $\mathbf{Z}$  je filtrovaný signál  $\mathbf{u}(t)$  a  $\mathbf{Z}$  je filtrovaná verze  $\mathbf{Q}$ .

$$\mathbf{Z}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{w}(t),$$

Odtud je vidět, že (2) lze přepsat do tvaru

$$\int_t^0 \mathbf{z}(t-\tau) \mathbf{H}(\mathbf{q}) d\tau - \int_t^0 \mathbf{z}(t-\tau) \mathbf{H}(\mathbf{q}) d\tau = \mathbf{z}(t) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{q}(t) - \mathbf{z}(t) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{q}(0) + \int_t^0 \mathbf{z}(t-\tau) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{q}(\tau) d\tau - \int_t^0 \mathbf{z}(t-\tau) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{q}(\tau) d\tau$$

Provedme úpravu prvého členu vlevo integrací per partes

$$\int_t^0 \mathbf{z}(t-\tau) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{q}(\tau) d\tau = \int_t^0 \mathbf{z}(t-\tau) \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{q}(\tau) d\tau + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \mathbf{u}(t) d\tau. \quad (2)$$

Potom

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{q} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \mathbf{u} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \mathbf{q}).$$

voit filter 1. řádu exp(-at). Provedme konvoluci (1) pro

Necht'  $\mathbf{z}(t)$  je impulsní odezva stabilního filtru (stačí veličiny.

Pro určení neznámých parametrů  $\boldsymbol{\lambda}$  byvá vhodné, a někdy i nutné, rovnici předem upravit tak, abychom se zbavili druhých derivací, které byvají zdrojem šumu a často jsou hůře měřitelné, než ostatní

Necht'  $\mathbf{A}$  je předem zvolená pozitivně definitní symetrická matice typu  $n \times n$ . Volme kvadratický funkcionál tvaru

$$J(\boldsymbol{\lambda}) = \int_0^t (\mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{w})^T \mathbf{A} (\mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{w}) d\tau.$$

### Jednorázová identifikace parametrů

Naším cílem je z minimalizace tohoto funkcionálu podle hledaných parametrů  $\boldsymbol{\lambda}$  určit jejich hodnotu. Pro tento účel označme integrand funkcionálu

$$F = (\mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{w})^T \mathbf{A} (\mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{w}).$$

Potom pro derivaci  $F$  podle  $\boldsymbol{\lambda}$  dostaneme

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 2(\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z}^T - \mathbf{w}^T) \mathbf{A} \mathbf{Z}.$$

Podle pravidel o derivování integrálu podle parametru odtud plyne

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \int_0^t \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\lambda}} d\tau$$

Z nutné podmínky pro extrém

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}$$

dostaneme

$$2 \int_0^t (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{Z}^T - \mathbf{w}^T) \mathbf{A} \mathbf{Z} d\tau = \mathbf{0}$$

a odtud úpravou a transponováním získáme rovnici pro parametry  $\boldsymbol{\lambda}$

$$\left( \int_0^t \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{Z} d\tau \right) \boldsymbol{\lambda} = \int_0^t \mathbf{Z}^T \mathbf{A} \mathbf{w} d\tau. \quad (7)$$

Je-li matice

## 4.5. Přímá a inverzní úloha robotiky

S ohledem na jednoduchost a předešlý výklad se zabýváme nejprve tzv. přímou úlohou robotiky.



Vynásobíme-li vektor  $\mathbf{r}^3$  touto funkcí, dostaneme kompaktní reprezentaci orientace nástroje.

$$f(q_n) = \exp(q_n/\pi).$$

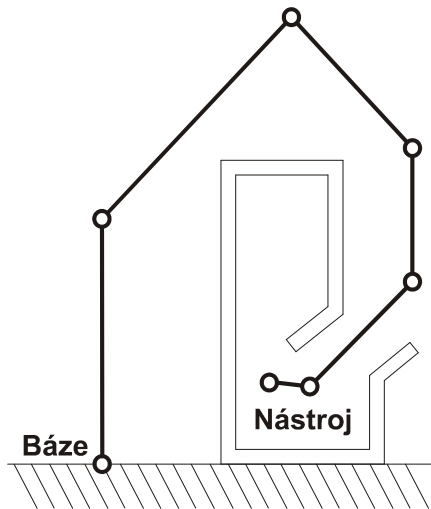
Zvolme pro jednoduchost exponenciální funkci. Ta je vždy kladná, rostoucí a inverzní funkci k ní je logaritmus. Položme tedy

nezáleží. Vzduchu apod. se nesmí překloubit. Na výběru samotné funkce ohraničený, neboť vodiče vedoucí k senzorigramu, přívody sílačného obalkou možných konfigurací prostoru kloubů. Tento rozsah je často musí být uvedena funkce nelineární. Rozsah natočení nástroje je dán přístupového vektoru. Poněvadž nulovou délku nemůžeme připsat, jednoznačně přiřazení mezi úhlem natočení nástroje a délkou vybrat kladnou ryze monotónní funkci, který by představovala délky, znamenalo by to otočení nástroje do protisměru. Je tedy třeba délka vektoru zůstat kladnou veličinou – např. připsat-li záporné problém. Aby nedošlo ke zmatení nebo ztrátě informace, musí jednotkově velikosti tohoto vektoru. Tím se nám otevírá klíč k řešení natočení nástroje, za předpokladu, že se vzdáme požadavku přístupového vektoru může pro nás představovat hledanou složku délka přístupového vektoru  $\mathbf{r}^3$  je jednoduše. Avšak délka čtyři komponenty, což však není minimální reprezentace. Jak víme, natočení nástroje. Přidáme-li tuto informaci k vektoru  $\mathbf{r}^3$ , dostaneme natočení nástroje, případně alternativní metoda musí zahrnovat úhel Poněvadž přístupový vektor specifikuje orientaci nástroje kromě

ve smyslu pootočení okolo druhých dvou os  $Y_n$  a  $X_n$ . Vektor efektivně určuje oba úhly naklopení zápěstí a jeho vybočení přístupovým vektorem, tj. posledním sloupcem matice  $\mathbf{R}$ . Přístupový Mějme nyní k dispozici informaci o orientaci nástroje poskytnutou

#### Vektor konfigurace nástroje

se seznámíme s alternativní podobou reprezentace konfigurace nástroje, která je výrazně pohodlnější.



Obr. 6: Zvýšení obratnosti robota dodatečnými stupni volnosti

V obecnosti lze říci, že k víceznačnosti řešení přispívají rotační klouby, které však zvyšují manipulační obratnost robotů. Proto se jim dává přednost před klouby posuvnými.

#### 4.6. Konfigurace nástroje

Abychom vyřešili problém inverzní úlohy, žádaná konfigurace koncového nástroje musí být specifikována ve vstupních datech. Předpokládejme, že reprezentace nástroje je formulována ve formě dvojice  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{R}$ , kde  $\mathbf{r}$  představuje žádanou polohu konce nástroje a  $\mathbf{R}$  orientaci nástroje, oboje vyjádřené v souřadnicích základny robota, tj. v souřadnicích  $S_0$ . Zatímco specifikace  $\mathbf{r}$  jako pozice konce nástroje spadá do běžných technických požadavků, specifikace orientace nástroje ve formě matice  $\mathbf{R}$  se jeví poněkud těžkopádná a pro technickou praxi nevhodná. Navíc, jeden ze tří vektorů matice  $\mathbf{R}$  je redundantní, neboť jej lze vždy určit z druhých dvou. V této sekci

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}), \quad (29)$$

Zavedeme-li označení

#### b) Druhý typ rovnice dynamiky

která je v literatuře hojně používána.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (28)$$

Potom přejde rovnice (26) do tvaru

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{M}_0 + \mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}). \quad (27)$$

Zavedme označení

#### a) První typ rovnice dynamiky

Pro další potřeby lze zavést různé úpravy.

řízení robotů.

Rovnice (26) představuje finální rovnici, která popisuje dynamické chování robota. Budeme ji dále využívat zejména v problematice

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{M}_0 + \mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (26)$$

Dosažením do (22) tak obdržíme výslednou rovnici

$$\mathbf{S}\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{K}} \quad (25)$$

vztah

neboť první člen je nulový. Platí tedy následující jednoduchý

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} \right) = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{K}}$$

přejde rovnice (26) do tvaru

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_0\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}$$

a přidáním případných nelineárních členů závislosti odporu na tření, dojdeme k závěrečné rovnici

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \quad (30)$$

což představuje druhý velmi často užívaný tvar.

#### c) Třetí typ rovnice dynamiky

Přidáním vektoru tření k poslednímu členu získáme třetí, často užívaný tvar diferenciální rovnice dynamiky robota

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \mathbf{u}, \quad (31)$$

kde

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}). \quad (32)$$

Vztah (32) budeme používat ve tvaru

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}). \quad (33)$$

Poněvadž matice  $\mathbf{S}$  je antisymetrická, víme z kapitoly „Matematický background“, že její kvadratická forma je vždy nulová.

Poznamenejme, že poslední člen rovnice (31), tj.

$$\mathbf{N}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$$

zahrnuje nejen gravitační vlivy, ale i vlivy odporových sil, případně i nelineární.

Další podrobné informace lze získat z knihy [11], která je věnována výhradně mechanice robotů.

Rovnici (21) lze řešit klasickými numerickými metodami řešení soustav nelineárních rovnic. Poučení o těchto metodách lze nalézt v Příloze 1, kde je znám, vektor  $\mathbf{q}$  je třeba vypočítat.

Je-li  $n \geq 6$ , je  $m = 6$ , je-li  $n < 6$ , je  $m = n$ .

přičemž platí:

kde zpravidla  $\mathbf{W}$  a  $\mathbf{F}$  jsou vektory typu  $m \times 1$  a  $\mathbf{q}$  je vektor typu  $n \times 1$ , (21)

zapsat ve tvaru

Přímý složený robot je navrhován tak, aby bylo možné řešit inverzní úlohy v analytické podobě. V některých případech laboratorních robotů se stává, že inverzní úloha nemá analytické řešení. Tehdy je nutné sáhnout k řešení numerickému. Někdy hovoříme o tzv. **přibližných metodách** řešení inverzní úlohy. Na základě předchozího textu víme, že primární úlohu robotiky můžeme

#### 4.7. Numerické řešení inverzní úlohy

$$q_n = \pi \ln \sqrt{w_4^2 + w_5^2 + w_6^2}$$

a tedy

$$w_4^2 + w_5^2 + w_6^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_3 \exp(q_n / \pi) = \exp(q_n / \pi)$$

Poněvadž vektor konfigurace nástroje má 6 složek, jde o minimální reprezentaci konfigurace nástroje. Prvé tři složky  $\mathbf{r}$  představují pozici vrcholu nástroje, druhé tři složky  $\mathbf{v}$  představují orientaci nástroje. Uhel natočení lze pak již snadno určit z vektoru konfigurace  $\mathbf{w}$ . Pro velikost vektoru  $\mathbf{v}$  platí

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{R}_3 \exp(q_n / \pi) \end{pmatrix}$$

Necht  $\mathbf{r}$  představuje pozici a  $\mathbf{R}$  orientaci nástroje vzhledem k bázi robota a necht  $q_n$  značí úhel natočení nástroje robota. Potom vektor konfigurace nástroje rozumíme vektor  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^6$  definovaný

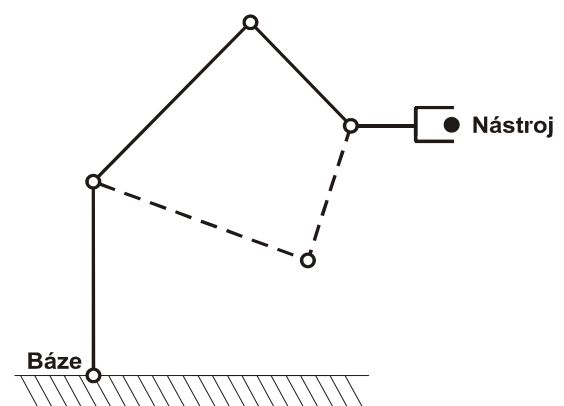
**Definice 4.3**

$\mathbf{T}_{\text{báze}}^{\text{záp}}$ ,

který závisí jen na prvních třech složkách kloubových proměnných. Tedy, čtvrtý sloupec reprezentuje homogenní souřadnice počátku zápěstí v souřadném systému  $S_3$  určené relativně vzhledem k bázi systému  $S_0$ , tj. k systému báze robota. Poněvadž souřadnice zápěstí závisí pouze na kloubových proměnných  $q_1, q_2$  a  $q_3$ , lze tyto proměnné řešit odděleně. Po jejich určení je můžeme dosadit do zbylých rovnic jako konstanty a řešit tyto rovnice jako soustavu rovnic závislých již jen na proměnných  $q_4, q_5, \dots, q_n$ .

#### Jednoznačnost řešení inverzní úlohy

Pokud řešení inverzní úlohy existuje, má typicky více než jedno řešení. Tehdy hovoříme o **nejednoznačnosti** či **víceznačnosti** řešení inverzní úlohy. Roboty z více stupni volnosti mívají obvykle i více řešení inverzních úloh. Je-li počet stupňů volnosti  $n > 6$ , přispívají dodatečně stupně ke zvýšení manipulační obratnosti. Rameno robota může sahat za komplikované překážky, protahovat se do členitých prostorů a provádět tam složité operace, viz např. následující obrázky 5 a 6.



Obr. 5: Demonstrace víceznačnosti řešení inverzní úlohy

Pro derivaci druhého členu zřejmě platí, viz (8),

$$\mathbf{S} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \right)$$

a tedy

$$\frac{1}{2} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \right)$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sum_{j,k} q_k \frac{d}{dt} M_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j,k} q_k \frac{d}{dt} M_{nk} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sum_{j,k} q_k \frac{\partial}{\partial q_j} M_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j,k} q_k \frac{\partial}{\partial q_n} M_{jk} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sum_{j,k} q_k \frac{\partial}{\partial q_j} M_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j,k} q_k \frac{\partial}{\partial q_n} M_{jk} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sum_{j,k} q_k \frac{\partial}{\partial q_j} M_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j,k} q_k \frac{\partial}{\partial q_n} M_{jk} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \sum_{j,k} S_{1j} q_j \\ \vdots \\ \sum_{j,k} S_{nj} q_j \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sum_{j,k} q_k \frac{\partial}{\partial q_j} M_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j,k} q_k \frac{\partial}{\partial q_n} M_{jk} \end{pmatrix}$$

## 8. Kapitola

### On-Line parametrická estimace

Pro účely řízení robotů a obecně nelineárních systémů je nutné znát dostatečně přesné parametry řízené soustavy. Mnohé z nich lze určit bezprostředním měřením. Často se však stává, že není k dispozici dostatečně přesné měřicí zařízení nebo nelze stávající zařízení rozebrat z důvodu určení měřených parametrů nebo potřebné parametry se změnily montáží a přidáním dodatečných komponent, bez kterých robot nemůže fungovat. Pak lze s výhodou použít některou z metod identifikace parametrů, případně metody adaptivního řízení. V této kapitole se budeme zabývat vybranými možnostmi určení parametrů, které se ukázaly prakticky dostatečně efektivní. Omezíme se při tom na metody, jež předpokládají lineární závislost soustavy na parametrech. Tento předpoklad není nikterak vážně omezující. Oblastí našeho zájmu bude totiž určení hmotností a momentů setrvačnosti jednotlivých článků ramene robota, včetně vybraných koeficientů tření. Jde o výběr nejdůležitějších parametrů řízené soustavy.

#### 8.1. Úprava rovnic a filtrace signálů

Řízený systém (robot) lze popsat vektorovou diferenciální rovnicí, kterou můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{u} \quad (1)$$

kde rozměry jednotlivých vektorů a matic jsou

$\boldsymbol{\lambda} \dots m \times 1$

$\mathbf{u} \dots n \times 1$

$\mathbf{q} \dots n \times 1$

$\mathbf{Q} \dots n \times m$

Předpokládejme, že časová konstanta  $\phi_i$  – polohový úhel natočení rotoru.

$k_{b,i}$  – konstanta přímo indukovaného elektromotorického napětí  
kde je

$$v_{b,i} = k_{b,i} \dot{\phi}_i,$$

Pro indukované napětí platí vztah

$v_{b,i}$  – indukované elektromotorické napětí na kotvě

$v_i$  – napětí na svorkách

$I_i$  – elektrický proud, procházející vinutím kotvy

$R_i$  – odpor vinutí kotvy

$L_i$  – vlastní indukčnost kotvy

kde je

$$L_i \dot{I}_i + R_i I_i = v_i - v_{b,i}, \quad (17)$$

Uvažujeme nyní diferenciální rovnici proudu kotvy motoru

$$(\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}(\mathbf{q}))\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{H}(\mathbf{q}))\dot{\mathbf{q}} - \left( \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}. \quad (16)$$

Jde o řízení elektrickým proudem, tzv.  *Proudové řízení*. Dosazením do rovnice (12) obdržíme rovnici robota ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_1 \mathbf{I}. \quad (15)$$

Zavedme řídicí vektor vztahem

kde  $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_n)^T$  je sloupcový vektor elektrických proudů.

$$\mathbf{H}_1 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_1 \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}_1 \mathbf{I} - \mathbf{F}, \quad (14)$$

Potom lze soustavu rovnic (13) zapsat jednotně v maticovém tvaru

$$\mathbf{K}_1 = \text{diag}(k_{\tau,1} r_1^{-1}, \dots, k_{\tau,n} r_n^{-1}).$$

Pro další matice platí

$$S_{j,k} = \sin(q_j + q_k),$$

$$C_{j,k} = \cos(q_j + q_k),$$

kde pro jednodučnost je zavedeno označení:

$$\mathbf{T}_3^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -S_{23} & -S_{123} & -S_{23} \\ S_{123} & S_{23} & S_{23} \\ C_{123} & C_{123} & C_{123} \\ C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) & C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) & C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_1 & S_1 & S_1 \\ e_1 & e_1 & e_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Vynásobením těchto matic dostaneme matici transformace z prostoru

zápětí do prostoru báze robota

$$\mathbf{T}_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 & 0 \\ C_3 & -S_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

příslušný vektor  $\mathbf{q}^i$  patří do oblasti *přípustných vektorů*, tj. zda robot je schopen dosáhnout kloubových hodnot daných vektorem  $\mathbf{q}^i$ . Označme oblast přípustných vektorů symbolem  $Q$ . V obecném případě je oblast  $Q$  definována následujícími omezeními:

- **Konstrukční omezení:** pro každý kloub je dán interval rozsahu pohybu kloubu ve tvaru

$$q_{i,\min} \leq q_i \leq q_{i,\max}.$$

- **Omezení daná způsobem přemístění:** např. při posunutí chapadla (bez otáčení) je nutné brát v úvahu omezení ve tvaru rovností, svazující tři libovolné směrové kosiny matice

$$\mathbf{T}_0^n,$$

např. pro druhý sloupec této matice žádáme

$$\left[ \mathbf{T}_0^n(\mathbf{q}) \right]_{j,2} = \left[ \mathbf{T}_{0,poc}^n \right]_{j,2} \quad \text{pro } j = 1, 2, 3.$$

Vlevo jsou prvky druhého sloupce matice proměnné, vpravo prvky téhož sloupce matice počáteční.

- **Omezení daná překážkami:** Jako příklad zvolme aproximaci překážky několika rovinami, např. rovnoběžnostěnem. Podmínky nalezení bodu svázaného s některou rovinou v přípustné oblasti lze zapsat ve tvaru nerovností

$$(\mathbf{P}^j - \mathbf{B})\mathbf{n} \geq 0, \quad (24)$$

kde  $\mathbf{P}^j$  je  $j$ -tý vrchol rovnoběžnostěnu aproximující roviny z hlediska báze robota,  $\mathbf{B}$  je bod podložky, ke které se přibližuje chapadlo robota a  $\mathbf{n}$  je vektor normály podložky v bodě  $\mathbf{B}$ .

Je-li úhel mezi vektory  $\mathbf{P}^j - \mathbf{B}$  a  $\mathbf{n}$  menší nebo rovný  $90^\circ$ , je skalární součin v (24) nezáporný a kolize bodu  $\mathbf{P}^j$  s podložkou v bodě  $\mathbf{B}$  nenastává. Je-li ale tento úhel větší než  $90^\circ$ , bod  $\mathbf{P}^j$  se nutně dostal pod rovinu podložky a kolize musela nastat. Situace je znázorněna na Obr. 7, kde jde o

$$\mathbf{H}_1 = \text{diag}(J^1 r_1^{-2}, \dots, J^n r_n^{-2}),$$

$$\mathbf{B}_1 = \text{diag}(b^1 r_1^{-2}, \dots, b^n r_n^{-2}),$$

Zavedme nyní následující diagonální matici

v podstatě jak rotaci, tak i posuvná uložení kloubů.

Odvozené vztahy platí za předpokladu, že i-tý členek robota je rotačního typu. Je-li posuvného typu lze získat rovnice s obdobnými vztahy, i když významově jiné. Proto předesele odvození reprezentuje

$$J^i r_i^{-1} \dot{q}_i + b^i r_i^{-1} \dot{q}_i = k_{\tau_i} I^i - r_i^i F^i. \quad (13)$$

Rovnici pohonu tak můžeme upravit do následujícího tvaru

$$\tau^{e_i} = r_i^i F^i.$$

takže odtud plyne

$$\dot{q}_i F^i = \phi_i^i \tau^{e_i},$$

V případě provozu bez ztrát musí platit zachování výkonu

$$r_i^i = \frac{\phi_i^i}{\dot{q}_i}.$$

Označme nyní převodový poměr pro i-tý pohon

$\tau_{e_i}$  - zátěžový moment (efektivní zátěž).

$b_i$  - koeficient tlumení motoru a příslušných převodů

$J_i$  - moment setrvačnosti kotvy včetně dalších částí převodu

$\phi_i^i$  - úhel natočení rotoru

kde je

$$J^i \dot{\phi}_i^i + b^i \phi_i^i \dot{q}_i = \tau_i - \tau^{e_i},$$

Diferenciální rovnice kotvy motoru je

$k_{\tau_i}$  - představuje konstantu kroutícího momentu.

Rovnice (16) a (21) se liší tím, že koeficienty tlumení jsou v (21) obecně větší, neboť platí

$$b_i \ll \frac{k_{\tau_i} k_{b,i}}{R_i}.$$

#### Poznámka

Pokud bychom nezanedbali  $L_i$  v rovnici (17), došli bychom k diferenciální rovnici 3. řádu. Provedenými simulacemi vychází najevo, že chyba, které jsme se tak dopustili je zcela zanedbatelná a tedy provedené zanedbání je oprávněné.

### 7.5. Rovnice dynamiky robota

Porovnáme-li nyní rovnice (12), (16) a (21), vidíme, že všechny rovnice mají tvar

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{M}_0 + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}))\dot{\mathbf{q}} - \left( \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}. \quad (22)$$

kde  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}(\mathbf{q})$  a  $\mathbf{M}_0$  se rovná  $\mathbf{B}_1$  resp.  $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ .

Definujme nyní prvky matice  $\mathbf{S}$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \left( \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad (23)$$

pro  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Ihned se přesvědčíme, že  $S_{ji} = -S_{ij}$ , to znamená, že příslušná matice  $\mathbf{S}$  je antisymetrická, a tedy

$$\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}. \quad (24)$$

Matice  $\mathbf{S}$  závisí na vektorech  $\mathbf{q}$  a  $\dot{\mathbf{q}}$ , lze tedy psát

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Pokusme se nyní upravit součin  $\mathbf{S}\dot{\mathbf{q}}$  do tvaru, vhodného pro další použití:

potom pro matici  $\mathbf{C}$  platí

$$\mathbf{T}_5^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C} \\ \mathbf{P} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

Zavedeme-li pro matici ramene označení, viz (7),

$$\mathbf{T}_5^0 = \mathbf{T}_3^0 \mathbf{T}_4^0.$$

robota

Provedeme-li nyní vynásobení obou matic (26) a (27), dostaneme výslednou matici transformace z prostoru nástroje do prostoru báze

$$\mathbf{T}_5^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_5 & -C_5 & 0 & 0 \\ S_4 C_5 & -S_4 S_5 & C_4 & C_4 \\ C_4 C_5 & -C_4 S_5 & -S_4 & a^4 C^4 - e^5 S^4 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Vynásobením těchto matic dostaneme matici transformace z prostoru nástroje do prostoru zápěstí

Provedeme-li nyní vynásobení obou matic (26) a (27), dostaneme výslednou matici transformace z prostoru nástroje do prostoru zápěstí

$$\mathbf{T}_5^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e^5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ S^4 & 0 & -1 & 0 \\ a^4 C^4 & C^4 & 0 & 0 \\ a^4 C^4 & -S^4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

v každé učebnici numerické matematiky, např. [2], [3]. Z výpočetního hlediska však tyto metody nebývají příliš vhodné. Budeme proto postupovat následovně. K rovnici (21) přiřadíme funkcionál

$$I(\mathbf{q}) = \|\mathbf{F}(\mathbf{q}) - \mathbf{W}\|^2 = (\mathbf{F}(\mathbf{q}) - \mathbf{W})^T (\mathbf{F}(\mathbf{q}) - \mathbf{W}). \quad (22)$$

Je zřejmé, že rovnice (21) je splněna pro vhodné  $\mathbf{q}$  právě tehdy, když v (22) platí rovnost

$$I(\mathbf{q}) = 0.$$

Vzhledem k přesnostem dosažitelným při polohování robotů však zpravidla požadujeme o trochu méně. K předem zadanému  $\varepsilon > 0$  hledáme vektor  $\mathbf{q}$  takový, aby platilo

$$I(\mathbf{q}) < \varepsilon. \quad (23)$$

Číslo  $\varepsilon$  je přitom třeba vybrat tak, aby pro libovolné dva vektory  $\mathbf{q}^1$  a  $\mathbf{q}^2$ , pro něž platí (23), byla nutně splněna nerovnost

$$\|q_i^1 - q_i^2\| < \xi, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

kde  $\xi$  je kladné číslo menší, nebo nejvýše rovné maximální hodnotě, o kterou lze provést změnu i-té vnitřní (kloubové) proměnné, aniž by byla zaznamenána příslušným snímačem. Např., kdyby  $q_i$  byla přímo velikost natočení rotoru servopohonu s inkremetálním snímačem, byla by hodnota  $\xi$  menší nebo rovna úhlové velikosti nejmenšího políčka; u čidel mřížkových pak vzdálenosti mezi sousedními vrypky apod.

Převodem problému (21) na problém (23) jsme přešli od úlohy řešení nelineárních rovnic k úloze minimalizace funkcionálu  $I(\mathbf{q})$ . Další postup je následující: Zvolí se počáteční odhad řešení  $\mathbf{q}^0$  a dále se vypočte minimalizující posloupnost vektorů  $\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \dots, \mathbf{q}^k$ , pro kterou platí

$$I(\mathbf{q}^0) > I(\mathbf{q}^1) > I(\mathbf{q}^2) > \dots > I(\mathbf{q}^k),$$

kde pro  $\mathbf{q}^k$  platí (23). Pokud taková posloupnost neexistuje, nemá úloha (21) řešení. Při výpočtu je třeba neustále kontrolovat, zda

Učít potenciální energii je výrazně jednodušší než energii kinetickou. Pro tento úkol předpokládejme, že známe polohy těžišť jednotlivých článků kinematického řetězce robota, které si označíme dodatečným písmenkem  $c$ , jako centrum. Potenciální energii si můžeme vyjádřit ve tvaru

## 7.2. Potenciální energie robota

Zde konkrétně vidíme, že začínáme zúčtovávat výsledky připravené v „matematickém backgroudu“ – viz 2. kapitola.

**Věta 7.1** Matice setrvačnosti  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ , definovaná vztahem (7), je regulární, symetrická a pozitivně definitní matice s reálnými koeficienty.

Jíme tak následující tvrzení setrvačnosti  $\mathbf{H}$  je **pozitivně definitní** a tedy **regulární**. Dokázali jsme tak následující tvrzení

$$\mathbf{q}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{q} \geq 0,$$

Poněvadž kinetická energie tělesa s nenulovou hmotností je vždy kladná, je-li její rychlost nenulová, plyne z (8) nerovnost

$$\mathbf{H}^T = \mathbf{H}.$$

Matice  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  se nazývá **matice setrvačnosti**. Zaměňme-li v (7) indexy  $i$  a  $j$ , dostaneme tenýž výsledek, tedy matice  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  je **symetrická**, tj.

$$K = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{q}. \quad (8)$$

Potom lze kinetickou energii ze (6) přepsat do elegantní kvadratické formy vzhledem k rychlosti

$$H_{j,i} = \sum_{k=\max\{i,j\}}^n m_k \mathbf{U}_k^j \mathbf{U}_k^i \quad \text{pro } i, j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

$$V = - \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{G}^T \mathbf{T}_0^j \mathbf{R}_{c,j} \quad (9)$$

kde

$m_k$  – představuje hmotnost  $k$ -tého článku ramene

$\mathbf{G}$  – je vektor zrychlení. Většinou je soustava  $S_0$  zvolena tak, že osa  $z_0$  je orientována vertikálně, vzhůru. Potom je  $\mathbf{G} = (0, 0, -g, 0)^T$ ,

kde  $g$  je gravitační zrychlení ( $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ )

$\mathbf{R}_{c,j} = (x_{c,j}, y_{c,j}, z_{c,j}, 1)^T$  značí polohu těžiště (centra)  $j$ -tého článku řetězce.

## 7.3. Lagrangeovy rovnice robotů

Věnujme se nyní odvození Lagrangeových rovnic. Budeme používat maticové zápisy. Pro derivaci Lagrangeovy funkce podle vektoru rychlosti platí

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q})$$

a tedy

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T = \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

neboť matice  $\mathbf{H}$  je symetrická. Odtud dostáváme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T = \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}. \quad (10)$$

Obdobně pro derivaci podle vektoru  $\mathbf{q}$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \left( \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \left( \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \mathbf{g}(\mathbf{q}), \quad (11)$$

a tedy

$$C_2 C_{23} + S_2 S_{23} = C_3,$$

jež užítím dostaneme

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

Z goniometrie je známý vzorec

$$\xi^2 + \eta^2 = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 (C_2 C_{23} + S_2 S_{23}).$$

Obou vztahů na druhou a sečtením dostaneme

$$\eta = a_2 S_2 + a_3 S_{23}, \quad (31)$$

$$\xi = a_2 C_2 + a_3 C_{23} \quad (30)$$

čímž získáme rovnice

Proměněme  $\xi$  a  $\eta$  tedy závisí jen na  $q_1$  a  $q_{234}$ , a protože máme tyto hodnoty již vypočtené můžeme je dosadit do uvedených výrazů,

$$\eta = e_1 - w_3 - a_4 S_{234} - e_5 C_{234} = a_2 S_2 + a_3 S_{23}$$

$$\xi = w_1 C_1 + w_2 S_1 - a_4 C_{234} - e_5 S_{234} = a_2 C_2 + a_3 C_{23}$$

kteřé dále upravíme, spolu se zavedením nových proměnných

$$e_1 - w_3 = a_2 S_2 + a_3 S_{23} + a_4 S_{234} + e_5 C_{234}$$

$$w_1 C_1 + w_2 S_1 = a_2 C_2 + a_3 C_{23} + a_4 C_{234} - e_5 S_{234}$$

k výpočtu  $q_3$ . Z prvních třech složek vektoru  $w$  získáme vztahy

Budeme-li znát libovolně dva úhly, dovedeme odtud později vypočítat třetí. Poněvadž známe  $q_1$  a  $q_{234}$ , můžeme toho využít

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} + a_4 C_{234} - e_5 S_{234}) \\ S_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23} + a_4 C_{234} - e_5 S_{234}) \\ e_1 - a_2 S_2 - a_3 S_{23} - a_4 S_{234} - e_5 C_{234} \\ - C_1 S_{234} \exp(q_5/\pi) \\ - S_1 S_{234} \exp(q_5/\pi) \\ - C_{234} \exp(q_5/\pi) \end{pmatrix}.$$

V robotice se definuje tzv. **čtyř kvadrantová verze funkce** arctg:

$$\text{atan2}(y, x),$$

kteřá dává správný úhel, odpovídající vektoru  $(x, y)$ . V podstatě jde o funkci  $\text{arctg}(y/x)$ , kde výsledný úhel je opraven na správnou hodnotu podle toho, ve kterém kvadrantu leží bod o souřadnicích  $x, y$ . Samozřejmě funguje i pro  $x = 0$  a  $y \neq 0$ . Pokud není tato funkce součástí softwarového vybavení odpovídajícího výpočetního prostředku, dá se snadno naprogramovat vhodnou volbou kvadrantu podle znamének složek  $x$  a  $y$ .

S využitím této funkce můžeme okamžitě určit úhel  $q_1$ :

$$q_1 = \text{atan2}(w_2, w_1), \quad (28)$$

přítom se musí ověřit, zda společný člen u  $w_1$  a  $w_2$  je nenulový. Poznamenejme, že společný člen

$$a_2 C_2 + a_3 C_{23} + a_4 C_{234} - e_5 S_{234}$$

je nulový, právě když  $w_1 = w_2 = 0$ , což odpovídá singulárnímu bodu: např. dosažitelná část osy  $Z_0$  tvoří množinu singulárních bodů, kde je řešení inverzní úlohy nejednoznačné. Příslušná Jakobiho matice, zobrazení daného kinematickou rovnicí robota, má nulový determinant (Jacobián).

Nyní vypočteme úhel  $q_{234} = q_2 + q_3 + q_4$ . Snadno ověříme platnost

$$q_{234} = \text{atan2}(C_1 w_4 + S_1 w_5, w_6). \quad (29)$$



$$q_4 = q_{234} - (q_2 + q_3).$$

Ze vztahů (29), (33) a (34) již bezprostředně určíme úhel  $q_4$ :

voľbe znaménka v (33).  
Poněvadž jsme využili dvou vztahů pro určení  $q_2$ , dostáváme jedinou hodnotu tohoto úhlu. Nezapomeňme však, že tato hodnota závisí na

$$q_2 = \arctan 2 \left[ \xi (a_2 + a_3 C_3) - \eta a_3 S_3, \xi (a_2 + a_3 C_3) + \eta a_3 S_3 \right]. \quad (34)$$

Odtud již bezprostředně plyne

$$S_2 = \frac{\xi (a_2 + a_3 C_3) - \eta a_3 S_3}{\xi^2 + \eta^2},$$

$$C_2 = \frac{\xi (a_2 + a_3 C_3) + \eta a_3 S_3}{\xi^2 + \eta^2}$$

$C_2$  a  $S_2$  s přihlídnutím k (32)) následující vztahy  
rovnic (ve smyslu soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé

Dosažením úhlu  $q_3$ , který již máme vypočtený, odvodíme z těchto

$$\eta = a_3 S_3 C_2 + (a_2 + a_3 C_3) S_2.$$

$$\xi = (a_2 + a_3 C_3) C_2 - a_3 S_3 S_2$$

můžeme rovnice (44) a (45) upravit

$$C_{23} = C_2 C_3 - S_2 S_3 \quad \text{a} \quad S_{23} = S_2 C_3 + C_2 S_3,$$

Použijeme-li vzorců (cosinus součtu a sinus součtu dvou úhlů)

$$q_3 = \pm \arccos \frac{\xi_2 a_3}{\xi_2^2 + \eta_2^2 - a_3^2}. \quad (33)$$

Odtud již snadno určíme příslušný úhel  $q_3$ . Existují dvě možnosti

$$\xi_2^2 + \eta_2^2 = a_3^2 + 2a_2 a_3 C_3. \quad (32)$$

Zavedme nyní následující matici  $\mathbf{H}$  definici jejích prvků  
jak se čtenář snadno přesvědčí.

$$K = \frac{1}{n} \sum_n \sum_{k=\max\{i,j\}}^2 \sum_{l=1}^2 \mathbf{U}_k^l \mathbf{f}_k^l (\mathbf{U}_k^l)^T (q^j, q^i) \quad (6)$$

což lze přepsat do ekvivalentního tvaru

$$K = \frac{1}{n} \sum_k \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{U}_k^l \mathbf{f}_k^l (\mathbf{U}_k^l)^T (q^j, q^i),$$

robotu

Ze vztahů (2) a (4) dostáváme celkovou kinetickou energii

Poznámka. Setvačnost objektu drženého v chapadlem robota musí  
být zahrnuta v matici setvačnosti  $\mathbf{J}_n$  posledního členu.

Poznamenejme, že  $\mathbf{R}_k$  je matice typu  $4 \times 1$ , určující bod v prostoru, tj.  
čtvrtá komponenta je rovna 1.

$$\mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad m_k \text{ je hmotnost } k\text{-tého členu.}$$

kde

$$\mathbf{J}_k = \begin{pmatrix} \int x_k^2 dm_k & \int x_k y_k dm_k & \int x_k z_k dm_k & \int x_k dm_k \\ \int y_k x_k dm_k & \int y_k^2 dm_k & \int y_k z_k dm_k & \int y_k dm_k \\ \int z_k x_k dm_k & \int z_k y_k dm_k & \int z_k^2 dm_k & \int z_k dm_k \\ \int x_k dm_k & \int y_k dm_k & \int z_k dm_k & m_k \end{pmatrix}$$

kde

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \quad \text{a} \quad \frac{\partial V}{\partial q_k} = - \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{G}^T \mathbf{U}_k^j \mathbf{R}_{c,j}.$$

Lagrangeova rovnice (1) může být zapsána v maticovém tvaru

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{F}.$$

Odtud a ze vztahů (10) a (11) dostáváme výslednou rovnici, která  
popisuje dynamické chování robota

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \left( \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}. \quad (12)$$

Nyní bychom v principu mohli ukončit naši činnost. Tvar rovnice  
(12) však není uspokojivý pro další potřeby tohoto textu.

## 7.4. Dynamika pohonů

V této části ukážeme, že začlenění pohonů do diferenciální rovnice  
(12) nemění v podstatě její tvar. U robotů se používají jednak  
synchronní elektropohony, jednak pohony stejnosměrné. Uvažujme  
robot se stejnosměrnými elektropohony s permanentními magnety.  
To nám značně usnadní práci. Elektropohony s permanentními  
magnety se stále u některých robotů používají a platí, že model  
stejnosměrného motoru, až na odchylky velikosti proudu při  
vysokých otáčkách, velmi dobře vystihuje také chování servopohonu  
se synchronním motorem (s vektorovým řízením).

Kroutící moment stejnosměrného pohonu lze popsat rovnicí

$$\tau_i = k_{\tau,i} I_i,$$

kde

$I_i$  - je proud kotvy  $i$ -tého motoru

Podrobnější informace o analytické mechanice může čtenář získat z knihy [1]. Vhodným doplňkem je i kniha [7].

Vidíme, že některé typy třecích sil můžeme s úspěchem zahrnout do Lagrangeova formalismu. Obecně to však bohužel nelze.

pro  $j = 1, 2, \dots, n$ , s. Rovnice (12) se nazývají *rozšířené Lagrangeovy rovnice druhého druhu*.

## 7. Kapitola

### Dynamika robotů

V této kapitole se budeme zabývat odvozením diferenciálních rovnic, které reprezentují dynamické chování robotů. Popis dynamických vlastností robotů lze provést různými způsoby. Následující přístup vychází z Lagrangeových rovnic 2. druhu, jejichž tvar jsme si odvodili.

V předešlé kapitole byly odvozeny Lagrangeovy rovnice ve tvaru (7). Nechť  $n$  značí počet stupňů volnosti robota, potom lze Lagrangeovy rovnice zapsat

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = F_j, \quad \text{pro } j=1,2,\dots,n \quad (1)$$

kde  $L = K - V$  je Lagrangeova funkce,  $K$  značí kinetickou energii,  $V$  potenciální energii robota,  $q_j$  je  $j$ -tá zobecněná souřadnice, kterou zde nazýváme kloubová proměnná. Sílu  $Q_{jN}$  na pravé straně rovnice (7) z předešlé kapitoly jsme, vzhledem k technickým zvyklostem, označili ve vztahu (1) symbolem  $F_j$ .

#### 7.1. Kinetická energie robota

Celková kinetická energie robota je dána součtem kinetických energií jednotlivých členů ramene robota, včetně objektu manipulace

$$K = \sum_{k=1}^n K_k \quad (2)$$

kde  $K_k$  značí kinetickou energii  $k$ -tého členu. Nechť  $\mathbf{R}_k$  je polohový vektor v homogenních souřadnicích malého elementu o hmotnosti  $dm_k$  u  $k$ -tého členu ramene. Potom

$$\mathcal{Q} = \{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{q}_{\min} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{q}_{\max} \}, \quad (1)$$

U většiny robotů je tato množina  $\mathcal{Q}$  konvexní polyedr v  $\mathbb{R}^n$  tvaru je robot schopen provést.

*Obálkou prostoru kloubových proměnných*  $\mathcal{Q}$  daného robota rozumíme množinu všech možných hodnot  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ , které jsou dosažitelné z hlediska všech možných poloh a natočení, které

#### Definice 5.2

Podmnožina  $K$  libovolného vektorového prostoru  $X$  se nazývá *konvexní*, jestliže pro libovolné dva body  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  patřící do  $K$  platí, že kombinace  $\mathbf{z} = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$  patří do množiny  $K$  pro každé  $t$  splňující nerovnost  $0 \leq t \leq 1$ .

#### Definice 5.1

Pracovní prostor robota je výrazně složitější geometrická struktura, než se obvykle jeví nezasvěcenému pozorovateli. Někde jen o stanovení oblasti, do které může robot dosáhnout koncovým nástrojem. V určitých místech prostoru může docházet k omezení v rozsahu natočení nástroje, proto je nutné pracovní prostor charakterizovat i z tohoto hlediska.

#### 5.1. Analýza pracovního prostoru

V této kapitole budeme využívat vyvinuté prostředky kinematiky k určení trajektorii koncového nástroje robota, mající význam v manipulačních úlohách.

### Analýza pracovního prostoru, interpolace a plánování trajektorii

## 5. Kapitola

Vidíme, že zatímco původní vztahy, ze kterých jsme vyšli, byly velmi komplikované, výsledné řešení dává překvapivě jednoduché matematické vztahy, které lze snadno naprogramovat do řídicího systému robota.

V práci [20] lze nalézt řešení inverzní úlohy robota se šesti stupni volnosti, které vychází z odlišné strategie řešení. Primární krok spočívá opět ve využití posledního sloupce transformační matice, který reprezentuje polohu referenčního bodu. Pomocí prvních třech sloupců se vhodnými kombinacemi dodatečně určí i orientace chapadla. Univerzální metoda stanovení řešení inverzní úlohy neexistuje, nicméně klasické kinematické struktury, které se užívají v průmyslové robotice, jsou vyřešeny. V této oblasti nelze očekávat nějaký výrazný posun.



Dílečkou součástí výrobních celků bývají různé typy dopravníků a rotačních karuselů, které výrazně urychlují výrobní proces a zjednodušují manipulaci s materiálem. Transportní dopravníky na volbě celkové topologie kooperujících zařízení.

Ma-li být robot užitečnou součástí nějakého výrobního celku, musí být mechanicky i softwarově kompatibilní s ostatními články výrobního řetězce. Z mechanického hlediska je nutné dodržet patřičný dosah ramene robota a to ve vertikálním i horizontálním směru. Podobně sledujeme i dosah ramene vlevo, či vpravo. Uvahy tohoto typu je nutné začlenit do prvotních úvah, týkajících se výběru robota. Vhodná topologie rozmištrujících zařízení, např. podavačů, lze často dosáhnout kruhovými uspořádáním kolem robota. Některé podavače jsou vybaveny pohony, vibrátory apod., jiné pracují vyhradně na gravitačním principu. Při využití různých zásobníků je potřeba stanovit správný směr přístupového vektoru. Zásobníky mohou být vodovodné, vertikální či nakloněné pod různými úhly. Postupným rozmisťováním jednotlivých zařízení v okolí robota tak vytváříme pracovní buňku, jejíž vykomnost závisí na volbě celkové topologie kooperujících zařízení.

$$P = \{p \in R^3; q \in Q\}.$$

Pracovní obálkou  $P$  je naproti tomu nazýváno geometrické místo všech poloh  $p \in R^3$ , kterých může robot dosáhnout. Tedy konfiguracní prostor nástroje.

Vektor  $q$  kloubových proměnných je tedy omezen podmnožinou  $Q$  prostoru  $R^n$ . Proto prostor  $R^n$  bývá často nazýván *prostorem kloubových proměnných*. Podobně konfiguracní prostor všech dvojic  $(R, p)$ , který reprezentuje prostor všech natočení a poloh koncového nástroje, můžeme ztotožnit s podmnožinou  $K \subset R^6$ . Proto často i v tomto případě bývá prostor  $R^6$  označován jako

jiné.

stejný rozsah natočení, sklopení či vybočení zápětí, jako v poloze proměnných. Např. rameno robota nemůže v určité poloze dosáhnout představuje (1) omezení kladená na lineární kombinace kloubových Obsahuje-li matice  $M_V$  nenulové členy ležící mimo diagonálu, kloubových proměnných a  $M_V$  je *matice vazeb*, též vazbová matice. kde  $q_{\min}$  a  $q_{\max}$  jsou vektory z  $R^n$  označující mezní hodnoty

Nyní zbývá určit poslední úhel, natočení nástroje  $q_5$ . Avšak z kapitoly 4.6.1 můžeme bezprostředně použít vztah

$$q_5 = \pi \ln \sqrt{w_4^2 + w_5^2 + w_6^2},$$

který nám dává přímo požadovanou hodnotu.

Tím jsme ukončili rozbor řešení inverzní úlohy. Výsledek celého řešení můžeme zformulovat do následujícího jednoduchého algoritmu, který lze snadno naprogramovat do řídicího systému robota:

#### Algoritmus: Řešení inverzní úlohy robotu *Rhino XR-4*

1.  $q_1 = \text{atan2}(w_2, w_1)$ ,
2.  $q_{234} = \text{atan2}(C_1 w_4 + S_1 w_5, w_6)$ .
3.  $\xi = w_1 C_1 + w_2 S_1 - a_4 C_{234} - e_5 S_{234}$   
 $\eta = e_1 - w_3 - a_4 S_{234} - e_5 C_{234}$
4.  $q_3 = \pm \arccos \frac{\xi^2 + \eta^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3}$
5.  $q_2 = \text{atan2}[\xi(a_2 + a_3 C_3) - \eta a_3 S_3, \xi(a_2 + a_3 C_3) + \eta a_3 S_3]$ .
6.  $q_4 = q_{234} - (q_2 + q_3)$ .
7.  $q_5 = \pi \ln \sqrt{w_4^2 + w_5^2 + w_6^2}$ .

$$p \left( \frac{\partial L}{\partial L} \frac{\partial q_j}{\partial L} + \frac{\partial L}{\partial R} \frac{\partial q_j}{\partial R} \right) = M_j, \quad (12)$$

dává finální soustavu rovnic

pro  $j = 1, 2, \dots$  s. Vztah (11) spolu s Lagrangovými rovnicemi (7)

$$\mathbf{Q}_{j,N} = \mathbf{M}_j - \frac{\partial L}{\partial R} \frac{\partial q_j}{\partial R} \quad (11)$$

Vztah (10) lze tedy upravit na tvar

$$\tilde{\mathbf{Q}}_D^j = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{r}_i} = - \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^T \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{r}_i} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i \right) = - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{r}_i}$$

Zabýváme se nyní úpravou prvé složky

$$\tilde{\mathbf{Q}}_D^j = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^T \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{r}_i} \quad \text{a} \quad M_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^T \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{r}_i}$$

kde

$$\mathbf{Q}_{j,N} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^T \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{T}_i \right) \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{r}_i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^T \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i^T \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{r}_i} = \tilde{\mathbf{Q}}_D^j + M_j \quad (10)$$

hmotný bod. Potom platí

je rozklad nekonzerovatívní sumy vnějších sil působících na i-tý

$$\mathbf{F}_{i,N} = \mathbf{F}_i^T + \mathbf{T}_i$$

a necht

$$dK_k = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{R}}_0\|^2 dm_k + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}_0^T \dot{\mathbf{R}}_0 dm_k \geq 0 \quad (3)$$

je elementární přírůstek kinetické energie k-tého členu, kde

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{T}_0^k \mathbf{R}_k$$

je vztah, který byl odvozen v kinematice.

**Poznámka.** Pro skalární součin vektorů platí  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \text{tr}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T)$ , kde první výraz představuje klasický zápis skalárního součinu vektorů, druhý je maticový součin vektorů chápaných jako sloupcové matice a třetí představuje stopu matice  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T$ . Toho nyní využijeme.

V kinematice jsme dokázali vztah (16)

$$\mathbf{v}^k = \frac{d}{dt} \mathbf{R}^0 = \sum_{j=1}^k \mathbf{U}_j^k \mathbf{R}_k \dot{q}_j$$

s jehož pomocí dostáváme

$$dK_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \text{tr}(\mathbf{U}_j^k \mathbf{R}_k \mathbf{R}_k^T (\mathbf{U}_i^k)^T) dm_k \dot{q}_j \dot{q}_i.$$

Poněvadž integrace stopy matice je rovna stopě matice z integrovaných členů matice, platí po integrování

$$K_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \text{tr}(\mathbf{U}_j^k \mathbf{J}_k (\mathbf{U}_i^k)^T) \dot{q}_j \dot{q}_i, \quad (4)$$

kde  $\mathbf{J}_k$  značí matici momentů setrvačnosti členu k:

$$\mathbf{J}_k = \int_{m_k} \mathbf{R}_k \mathbf{R}_k^T dm_k. \quad (5)$$

Matice momentů setrvačnosti má tvar

$$L = K - V,$$

Označme nyní

potenciální energie  $V$ , anebo ji tam z nějakého důvodu zahrnouti Složka  $Q_{j,N}$  představuje část  $j$ -té síly, kterou buď nelze zahrnout do vytvořena silovým polem, v našich úlohách většinou gravitaci. Veličina  $V$  zde představuje potenciální energii soustavy a je

$$\bar{Q}_j = \bar{Q}_{j,N} - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \text{ pro } j = 1, 2, \dots, s.$$

Odtud

$$\bar{Q}_{j,K} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \text{ pro } j = 1, 2, \dots, s,$$

kde pro konzervativní složku platí

$$Q_j = Q_{j,K} + Q_{j,N},$$

na část konzervativní a část nekonzervativní potenciální energie vyšetřované soustavy. Rozložíme zobecněnou sílu potřeby si tyto rovnice upravíme do tvaru, v němž je zahrnuta i Rovnice (6) se nazývají **Lagrangeovy rovnice II. druhu**. Pro další

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \bar{Q}_j, \text{ pro } j = 1, 2, \dots, s. \quad (6)$$

(1), (4), (5) lze psát

nazývá **Lagrangeovou zvešobecněnou silou**. S ohledem na

$$\bar{Q}_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, s. \quad (5)$$

Veličina  $Q_j$  má tedy význam síly pro souřadnice  $q_j$  dříve a význam momentů síl pro souřadnice  $q_j$  uhlavě. Z tohoto důvodu se vyraz

$$\bar{Q}_j = \lim_{\delta q_j \rightarrow 0} \frac{\delta A}{\delta q_j} = \frac{\partial A}{\partial q_j}.$$

potom platí

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = \bar{Q}_j + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_{j,N}$$

neboť potenciální energie  $V$  nezávisí na zobecněných rychlostech  $\dot{q}_j$ . **Lagrangeovy rovnice** lze přepsat do velmi elegantního tvaru

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_{j,N}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (7)$$

kde  $Q_{j,N}$  jsou složky zobecněných sil nezahrnuté do potenciální energie  $V$ . Veličina  $L = K - V$  se nazývá Lagrangeova veličina a její vyjádření pomocí zobecněných souřadnic  $q_1, \dots, q_s$  a jejich derivací  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$  resp. i času  $t$  se nazývá **Lagrangeova funkce**. Platí tedy

$$L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t).$$

Nyní vzniká přirozená otázka, zda naše rozdělení jednotlivých zobecněných sil na konzervativní a nekonzervativní složky odpovídá nějakým vztahem skutečným konzervativním a nekonzervativním silám  $\mathbf{F}_i$ . Uvidíme, že ano a to zcela přirozeným způsobem. Rozložíme sílu  $\mathbf{F}_i$  na konzervativní a nekonzervativní část

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i,K} + \mathbf{F}_{i,N}.$$

Dosadíme-li odtud do vztahu pro zobecněnou sílu

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

vidíme, že lze zcela přirozeně volit

kloubové průměně vlněchávám.

Pro jednoduchost zde označeni odpovídající příslušné bodech platí  $P(t_i) = P_i$  pro  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ . Zde  $P_i$  značí souřadnici  $t_m = T$ . Hledáme tedy interpolační funkci  $P(t)$  takovou, že v uzlových  $Rozdělme tento interval dílčími body  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_m$ , kde  $t_0 = 0$  a musí být interpolační křivka třídy  $C^2$ . Interval řešení označme  $\langle 0, T \rangle$ .$

### Kubické splajn-funkce

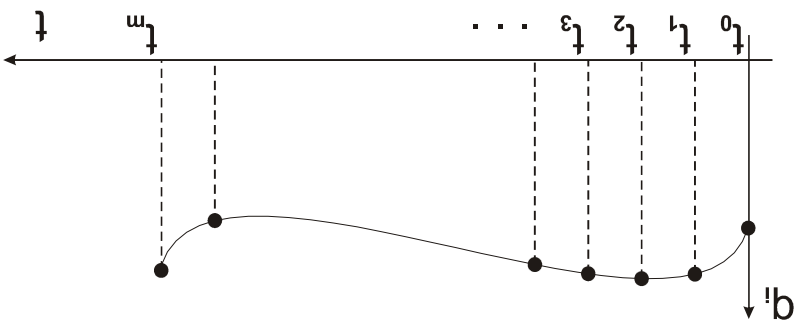
realizaci v řídicím systému robota.

Nyní se budeme věnovat jednodušším případům a jejich spojitá. Nyní se budeme věnovat jednodušším případům a jejich. Tedy žádáme, aby i druhá derivace podle času existovala a byla převoděch a ložiskách, je nutné žádat i spojitý průběh zrychlení. Nechceme-li, aby docházelo k prudkým rázům v pohonech, nerealizovatelné, musí mít křivka spojitou první derivaci podle času. Pohybovat po spojitě dráze. Poněvadž skoky rychlosti jsou Především musí být interpolační křivka spojitá, neboť robot se musí Na interpolační byvají kladeny poměrně vysoké nároky.

nástroje.

y a z referenčního bodu koncového nástroje a souřadnice natočení viz. Obr. 3, tak i dílčí souřadnice vnějších proměnných, tj. polohy  $x_i$ . Interpolovat lze jak polohy jednodušších kloubových proměnných,

Obr. 3: Interpolace bodů kloubové souřadnice v čase



různých zařízení rádi užívají úsečky a oblouky kružnic. Jde o důsledek historie, kdy se při kreslení výkresů využívala pravítka a kružítko. Proto musí robot zvládat velmi přesný pohyb po přímce (např. při svařování dvou dílů) a kružnici. Přímka je zadána libovolnými dvěma vzájemně různými body. U úsečky tedy stačí zvolit počáteční bod A a koncový bod B. Každý bod  $X$  úsečky lze potom vyjádřit ve tvaru

$$X = \lambda A + (1 - \lambda) B,$$

kde  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Rozdělením intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  dělícími body na dílčí sub intervaly získáme konečnou posloupnost bodů  $X^i$  ležící na přímce, pro které můžeme řešit inverzní úlohu robotiky a určit tak posloupnosti jednotlivých kloubových proměnných. Jejich aproximací pak získáme křivky závislé na čase, které určují žádané hodnoty pro jednotlivé servopohony. Celkově tak získáme postup ve formě dílčích kroků, které zajistí pohyb nástroje po přímce v pracovním prostoru robota.

V případě kruhového oblouku je situace podobná. Avšak k určení oblouku jsou nutné tři vzájemně různé body neležící na téže přímce. Pak existuje jediná kružnice procházející těmito třemi body. První z bodů může být výchozím bodem trajektorie, poslední koncovým a prostřední průchozím bodem nástroje.

### 5.3. Interpolace pohybu

Při programování robota je třeba generovat trajektorie jeho pohybu v prostoru pracoviště. V obecnosti to znamená definování spojitých křivek  $\Gamma$  v prostoru  $R^6$ , neboť je nutné definovat nejen polohu daného koncového bodu, ale i natočení nástroje. Při definování trajektorie pohybu je robot nucen opakovaně řešit inverzní úlohu, aby se v daných časových okamžicích nacházel vždy na správném místě. To nelze provádět kontinuálně, ale jen ve vybraných bodech dráhy, které zpravidla nazýváme **uzly**. Všechny uzly jsou vzájemně propojeny jednoduchou křivkou, která tak realizuje interpolaci těchto bodů. Navíc je jeden z bodů zvolen za počáteční a jiný za koncový.

Necht  $a_i$  představuje zrychlení v okamžiku  $t_i$ . Poněvadž je druhá

derivace lineárně lomená křivka, můžeme psát

$$h_i = t_i - t_{i-1}.$$

Je o parabolu třetího řádu. Její druhá derivace dává rovnici přímky, tj. mezi interpolacími body se bude zrychlení měnit lineárně. Pro další potřebu tyto křivky označme  $S_i = S_i(t)$ , zatímco  $P_i$  bude i nadále znát zadane diskretní hodnoty v časových okamžicích  $t_i$ , pro  $i = 0, 1, \dots, m$ . V dalším vykladu však nevyjádíme z rovnice (2), ale budeme postupovat pomocí jiným způsobem, který se jeví efektivnější. Zavedeme označení

$$P_i^f(t) = a_i t^3 + a_i t^2 + a_i t + a_i t_0. \quad (2)$$

Integrací této diferenciální rovnice získáme hledanou křivku

$$\frac{d^4 P_i^f(t)}{dt^4} = 0.$$

po vyčíslení dáva

$$F_i^f P_i^f - \frac{d}{dt} F_i^f P_i^f + \frac{d^2}{dt^2} F_i^f P_i^f = 0$$

takže jeho Eulerova rovnice, viz [ 5 ]

$$F_i^f(t, P_i^f, \dot{P}_i^f, \ddot{P}_i^f) = [P_i^f]_2,$$

Integrand má tvar

$$J_i^f = \int_{t_{i-1}}^{t_i} [P_i^f(t)]_2 dt.$$

Poněvadž uzlové body jsou pevně dány, hledáme na každém subintervalu  $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$  vhodnou funkci  $P_i^f(t)$ . V návrhu vyjádíme z jednoduché variační úlohy: hledá se funkce  $P_i^f(t)$  třídy  $C^2$ , procházející soustavou uzlových bodů, která minimalizuje integrální funkcionál, reprezentující minimalizaci kvadrátů zrychlení – snaha po omezení ráží v ložiskách a převodech:

takovou, že  $s(0) = 0$  a  $s(T) = 1$ . Potom *trajektorie nástroje odpovídající dvojici  $(k, g)$*  je dána

$$k = \{w(\lambda); 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

$$\lambda = g(t) \quad t \in \langle 0, T \rangle.$$

Křivka  $k$  reprezentuje dráhu, kterou nástroj prochází,  $s(t)$  představuje parametrizaci této křivky v závislosti na čase a zpravidla reprezentuje délku dráhy uraženou nástrojem při jeho pohybu. V tom případě její derivací podle času dostáváme přímo velikost rychlosti, kterou se nástroj pohybuje – odtud název *distribuce rychlostí*.

Průběh derivace funkce  $s(t)$  podle času se zpravidla nazývá *rychlostní profil*. Z důvodu jednoduchosti bývá často užívaným rychlostním profilem lichoběžník. Jeho tvar lze v časové oblasti zapsat

$$\dot{s}(t) = \begin{cases} kt & 0 \leq t \leq \tau \\ v_{\max} & \tau < t \leq T - \tau \\ k(T-t) & T - \tau < t \leq T \end{cases}$$

kde  $v_{\max}$  je maximální dosažitelná rychlost a  $k = v_{\max} / \tau$ .

Integrací pak snadno nalezneme časový průběh funkce  $s(t)$ . Nevýhodou je skoková změna zrychlení, což má neblahé následky zejména pro převody a ložiska robota. Proto lze stejný průběh žádat nikoli pro rychlost, ale pro zrychlení, tedy

$$\ddot{s}(t) = \begin{cases} kt & 0 \leq t \leq \tau \\ a_{\max} & \tau < t \leq T - \tau \\ k(T-t) & T - \tau < t \leq T \end{cases}$$

kde  $a_{\max}$  je maximální dosažitelné zrychlení a  $k = a_{\max} / \tau$ . Dvojnásobnou integrací odtud snadno získáme průběh  $s(t)$ . Další informace lze získat z následující kapitoly, která je věnována interpolaci trajektorií pohybu robotů.

Právě uvedená problematika má velmi blízko k úlohám v praxi. Většina robotů musí zvládat pohyb koncového efektoru po přímce a kružnici, jako základních křivkách. Důvod je zřejmý: konstruktéři

neboli

$$\delta A = \tilde{O} \delta q_j.$$

Kdybychom měli použít jednu souřadnici, např.  $j$ -tou, pak by tato práce byla

$$\delta A = \sum_s \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^t \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{r}_i^t} \cdot \left( \sum_s \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^t \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{r}_i^t} \right) \delta q_j = \sum_s \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^t \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{r}_i^t} \delta q_j = \delta A$$

Práce hnacích sil při virtuálním posunutí je

$$\tilde{O} \delta q_j = \sum_n \mathbf{F}_i^t \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{r}_i^t}.$$

(B) Studijme nyní výraz na levé straně (1)

$$S_j^f = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j}, \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, s. \quad (4)$$

nebo-li platí

$$S_j^f = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i^t \cdot \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{r}_i^t} - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_j \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i^t} - \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_j \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i^t} - \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_j \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i^t}$$

proto platí

$$\mathbf{a}_i^t \cdot \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{r}_i^t} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i^t} \right) - \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i^t} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t}$$

Poněvadž  $\mathbf{v}_i^t = \dot{\mathbf{r}}_i^t$  a  $v_i^t = \|\mathbf{v}_i^t\|$ , lze vztah (3) upravit

$$\frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{r}_i^t} = \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i^t} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i^t}{\partial \mathbf{r}_i^t} + \dots + \frac{\partial q_j}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \mathbf{r}_i^t} = \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i^t} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i^t}{\partial \mathbf{r}_i^t} + \dots + \frac{\partial q_j}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \mathbf{r}_i^t}$$

$$Q_{j,K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i,K} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad Q_{j,N} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i,N} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

takže platí  $Q_j = Q_{j,K} + Q_{j,N}$ . Zbývá ověřit, zda  $Q_{j,K}$  je skutečně konzervativní síla.

Pro konzervativní síly  $\mathbf{F}_{i,K}$  platí, jak známo, následující vztah

$$\mathbf{F}_{i,K} = \left( -\frac{\partial V}{\partial x_i}, -\frac{\partial V}{\partial y_i}, -\frac{\partial V}{\partial z_i} \right),$$

kde  $x_i, y_i, z_i$  jsou souřadnice polohového vektoru  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$  v kartézské soustavě souřadnic. Potom

$$Q_{j,K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i,K} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i} \right) \cdot \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \frac{\partial y_i}{\partial q_j}, \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

neboť  $V = V(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$ . Tedy  $Q_{j,K}$  je skutečně konzervativní silou, tak jak jsme předpokládali.

## 6.4. Disipační funkce

V mnoha systémech působí *disipační síly*, tj. síly, jako je tření, vlivem kterých systém postupně ztrácí energii.

Experimentálně se zjistilo, že disipační síly se v mnoha případech mění se složkami rychlosti podle vztahu

$$\mathbf{F}_i^D = -k_i \dot{\mathbf{r}}_i. \quad (8)$$

Definujme disipační *Rayleighovu funkci* (čti Rejlího)

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad (9)$$

**d'Alembertův princip virtuálních prací.**

(virtuálních prací) pro případ pohybu soustavy a nazývá se

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0}.$$

dostáváme

$$\sum_i \mathbf{F}_i^* \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$$

a s ohledem na

$$\sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i^* - m_i \mathbf{a}_i) \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$$

a odtud

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i^*$$

hmotný bod psát

vazbami. Podle druhého Newtonova zákona (zákona síly) lze pro i-ty

b) Uvažujeme nyní soustavu  $n$  hmotných bodů s  $m$  holonomními

*Je-li soustava hmotných bodů v rovnováze, pak virtuální práce všech*

*vnějších (hmotných) sil je nulová.*

**virtuálních posunutí** (virtuálních prací):

Poslední vztah je matematické vyjádření tzv. **principu**

$$\sum_i \mathbf{F}_i^* \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0}.$$

a tedy

$$\sum_i \mathbf{F}_i^* \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0},$$

Podle předešlé věty o vazbových silách platí

$$\sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i^*) \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0}.$$

Odtud plyne násobením a sečtením

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i^* = \mathbf{0}.$$

Má-li soustava  $n$  hmotných bodů a  $m$  vazeb, pak má počet stupňů volnosti  $s = 3n - m$ . Všechna virtuální posunutí nemohou být libovolná, neboť musí splňovat podmínky dané vazbami.

### 6.3. Lagrangeovy rovnice II. druhu

Pohyblivost soustavy hmotných bodů, resp. soustavy tuhých těles, je dána počtem stupňů volnosti, který udává počet nezávislých parametrů. Potom hovoříme o **obecných souřadnicích**  $q_i$ . V technických úlohách těmito nezávislými parametry bývají délkové míry nebo úhly. Pro  $n$ -člennou soustavu s  $m$  holonomními vazbami  $\Phi_j$  je počet zobecněných souřadnic roven  $s = 3n - m$ . Polohové vektory jednotlivých hmotných bodů jsou funkcemi zobecněných souřadnic  $q_i$ . Tedy pro  $s$  stupňů volnosti platí

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Podle zevšeobecněného principu virtuálních prací platí

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0}.$$

Dále, pro virtuální posunutí je

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Z předešlých dvou vztahů pak dosazením dostáváme

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \mathbf{0}.$$

Poněvadž virtuální změny  $\delta q_j$  pro  $j = 1, 2, \dots, s$  jsou nezávislé, tj. každá změna souřadnic je možná, plyne z předešlé rovnice

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Odtud dostáváme

$$c_m = -\frac{1}{2} a_m.$$

Využijeme-li fakt, že platí  $a^m = \ddot{s}^m(t^m)$ , dostaneme pro  $c_m$

$\ddot{a}^m = \ddot{P}^m(t^m) = 0$ , nám dáva vztah  $\ddot{s}^m(t^m) + 2c_m = 0$ .

Požadavek nulového zrychlení v koncovém bodě, tj. rovnost

$$-\ddot{P}^m(t) = \ddot{s}^m(t) + 2c_m(t - t^{m-1})^3 / h_3^3 + 6c_m(t - t^{m-1})^2 / h_3^3 + 12c_m(t - t^{m-1}) / h_3^3 - 12c_m(t - t^{m-1})^2 / h_3^3 = 0$$

druhou derivací

mělo by platit  $\ddot{s}^m(t^m) = 0$ , což je splněno, viz (4). Určeme nyní

Poněvadž žádáme nulovou koncovou rychlost  $v^m = \dot{P}^m(t^m) = 0$ ,

$$\dot{P}^m(t) = \dot{s}^m(t) + 2c_m(t - t^{m-1})^3 / h_3^3 + 3c_m(t - t^{m-1})^2 / h_3^3$$

Obdobně budeme postupovat i v koncovém bodě trajektorie:

kde  $a_0 = \ddot{s}_1(t_0)$ .

$$c_1 = -\frac{1}{2} a_0.$$

a odtud dostáváme hodnotu koeficientu  $c_1$

$$\ddot{s}_1(t_0) + 2c_1 = 0$$

Požadavek na počáteční zrychlení  $\ddot{a}_0 = \ddot{P}_1(t_0) = 0$  dáva

$$\ddot{P}_1(t) = \ddot{s}_1(t) + 2c_1(t - t_0)^2 / h_1^3 - 12c_1(t - t_0) / h_1^3 + 6c_1 = 0$$

$$k_2 = P_{i-1} - a_{i-1} h_i^2 / 6.$$

Obdobně z podmínky  $s_i(t_i) = P_i$  vypočteme

$$k_1 = P_i - a_i h_i^2 / 6.$$

Celkově tak získáváme tvar funkce  $s_i$

$$s_i(t) = a_{i-1} \frac{(t_i - t)^3}{6h_i} + a_i \frac{(t - t_{i-1})^3}{6h_i} + \left( P_{i-1} - a_{i-1} h_i^2 / 6 \right) \frac{t_i - t}{h_i} + \left( P_i - a_i h_i^2 / 6 \right) \frac{t - t_{i-1}}{h_i} \quad (4)$$

pro  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ .

Koeficienty  $P_0, P_1, \dots, P_m$  představují předem stanovené polohy, zatímco  $a_0, a_1, \dots, a_m$  reprezentují zrychlení v uzlových bodech. Z uvedených vztahů však okrajová zrychlení  $a_0$  a  $a_m$  vyjdou obecně nenulová. Poněvadž žádáme nulová okrajová zrychlení i rychlosti, provedeme redukci uvedených polynomů. Pro počáteční a koncový interval označme

$$P_1(t) = s_1(t) + c_1(t - t_0)^2 (t - t_0)^3 / h_1^3$$

$$P_m(t) = s_m(t) + c_m(t - t_m)^2 (t - t_{m-1})^3 / h_m^3.$$

Jde o polynomy pátého řádu. Přidané polynomy nám umožní zajistit nulové rychlosti a zrychlení v okrajových bodech. Derivací prvního z nich podle  $t$  dostaneme

$$\dot{P}_1(t) =$$

$$\dot{s}_1(t) + 2c_1(t - t_0)(t_1 - t)^3 / h_1^3 - 3c_1(t - t_0)^2 (t_1 - t)^2 / h_1^3$$

a z požadavku na počáteční rychlost  $v_0 = \dot{P}_1(t_0) = 0$  plyne

$\dot{s}_1(t_0) = 0$ , což je splněno. Určeme druhou derivaci téhož výrazu

$$P_1^i(t) = s_1^i(t) - a_0(t-t_0) - a_1(t-t_0)^2 - a_2(t-t_0)^3/h_1^3$$

$$P_2^i(t) = s_2^i(t) - a_0(t-t_0) - a_1(t-t_0)^2 - a_2(t-t_0)^3/h_1^3$$

V další části tohoto textu se věnujeme určení neznámých koeficientů  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ . Derivujeme všechny polynomy  $P_i$  podle  $t$ :

$$P_1^m(t) = s_1^m(t) - a_0(t-t_0) - a_1(t-t_0)^2 - a_2(t-t_0)^3/h_1^3$$

$$P_2^m(t) = s_2^m(t) - a_0(t-t_0) - a_1(t-t_0)^2 - a_2(t-t_0)^3/h_1^3$$

Poznamenejme, že zrychlení v počátečním a koncovém bodě jsme označili  $\underline{a}_0$  a  $\underline{a}_m$ , neboť s ohledem na provedenou úpravu zrychlení v okrajových bodech neodpovídá zavedeným koeficientům  $a_0$  a  $a_m$ . Nyní můžeme opět označit všechny polynomy na dříve uvedených intervalech symboly  $P_i(t)$ , tj. platí

a) Uvažujeme soustavu hmotných bodů v klidu. Necht'  $\mathbf{F}_i$  je součet všech vnějších (hmacích) sil působících na  $i$ -tý hmotný bod a necht'  $\mathbf{F}_i^*$  je součet všech vazbových sil působících na tento hmotný bod. Zřejmě platí

Součet prací vazbových sil při virtuálním změně polohy bodů soustavy se rovná nule (za předpokladu ideálně hladkých vazeb).

Následující fyzikální zákon zveřejněný v různých případech, jako byl předešlý, dostáváme Vazby hmotných bodů mohou být velmi složité, avšak

$$\delta A = \mathbf{F}_{12} \delta \mathbf{r}_{12} = 0.$$

Tedy oba vektory  $\mathbf{r}_{12}$  a  $\delta \mathbf{r}_{12}$  jsou vzájemně kolmé. Avšak  $\mathbf{r}_{12}$  jako spojnice obou bodů má směr  $\mathbf{F}_{12}$  resp. opačný. Proto z předešlých dvou vztahů obdržíme

$$\mathbf{r}_{12} \cdot \delta \mathbf{r}_{12} = 0.$$

Dle předpokladu jsou oba body vázány pevnou vazbou, takže nemohou změnit vzájemnou vzdálenost, tj.  $\mathbf{r}_{12}$  je vektor s konstantní velikostí. Tedy skalární součin  $\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12} = \text{konst.}$ , takže pro virtuální změnu (diferencování) dostáváme

$$\delta A = \mathbf{F}_{12} \delta \mathbf{r}_{12}.$$

Platí  $\delta \mathbf{r}_{12} = \delta \mathbf{r}_2 - \delta \mathbf{r}_1$ , takže společnou práci lze upravit

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,$$

Poněvadž polohový vektor bodu 2 na bod 1 je

$$\delta A = \mathbf{F}_{12} \delta \mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{21} \delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{F}_{21} (\delta \mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{r}_2)$$

V tuším tělese jsou hmotné body vázány vazbami tak, že hmotné body s polohovými vektory  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_2$ . Na hmotný bod 1 necht' působí vazbová síla  $\mathbf{F}_{21}$  a na bod 2 síla  $\mathbf{F}_{12}$ . Zřejmě  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ . Jejich společná práce při virtuálním posunutí je

Práce vazbových sil při virtuálním posunutí podél křivky nebo plochy je nulová.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (1)$$

A) Označme pravou stranu tohoto vztahu

$$S_j = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

Pokusíme se ji vyjádřit pomocí kinetické energie  $K$  dané soustavy. Derivací  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$  podle času  $t$  dostaneme

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

a odtud derivací podle zevšeobecněné rychlosti  $\dot{q}_j$  plyne

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (2)$$

Odtud postupnými úpravami dostáváme

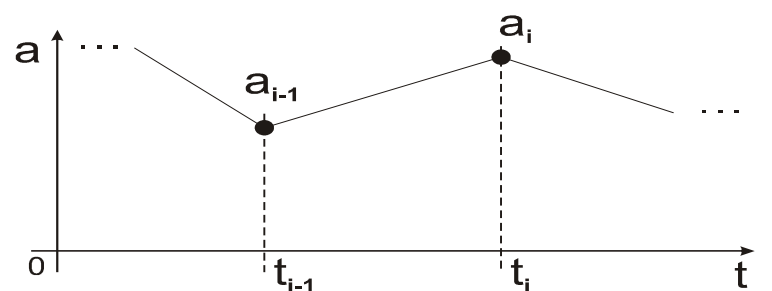
$$\mathbf{a}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}_i}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i)$$

neboť platí záměnnost derivací

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_1 \partial q_j} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_2 \partial q_j} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_s \partial q_j} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j}$$

$$\ddot{s}_i(t) = a_{i-1} \frac{t_i - t}{h_i} + a_i \frac{t - t_{i-1}}{h_i} \quad (3)$$



Obr. 4: Lineárně lomená křivka průběhu zrychlení v čase

Dvojnásobnou integrací vztahu (3) obdržíme

$$s_i(t) = a_{i-1} \frac{(t_i - t)^3}{6h_i} + a_i \frac{(t - t_{i-1})^3}{6h_i} + c_1 t + c_2.$$

Výraz  $c_1 t + c_2$  lze přepsat na tvar

$$k_2 \frac{t_i - t}{h_i} + k_1 \frac{t - t_{i-1}}{h_i},$$

proto můžeme psát

$$s_i(t) =$$

$$a_{i-1} \frac{(t_i - t)^3}{6h_i} + a_i \frac{(t - t_{i-1})^3}{6h_i} + k_2 \frac{t_i - t}{h_i} + k_1 \frac{t - t_{i-1}}{h_i}$$

Poněvadž žádáme  $s_i(t_{i-1}) = P_{i-1}$  dostaneme z předešlého vztahu

$$P_{i-1} = a_{i-1} h_i^2 / 6 + k_2,$$

odkud určíme konstantu  $k_2$



$\mathbf{q}_e$ 

integrální regulátor na hodnotu  $\mathbf{W}_e$ , odkud z (12) určíme vektor  $\mathbf{e}$  je zpracována lineárním regulátorem PID. Stačí aplikovat pohyb je rozdílem žádaného vektoru  $\mathbf{W}_z$  a skutečné hodnoty  $\mathbf{W}$ . Odchylka  $\mathbf{e} = \mathbf{W}_z - \mathbf{W}$  Odtud je již schéma řízení zřejmé. Regulační odchylka  $\mathbf{e} = \mathbf{W}_z - \mathbf{W}$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{W}} \quad (12)$$

bodů, má matice  $\mathbf{J}$  inverzi a lze psát a budeme-li předpokládat, že jsme v některé oblasti regulárních

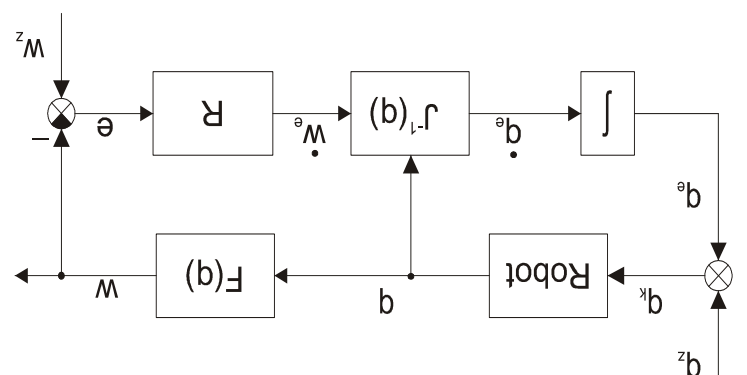
$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$$

Označíme-li Jacobiho matici

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{q})}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$$

kinematické rovnice podle času dostaneme rovnici  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{W}$  Řízení na Obr. 7 vychází z kinematické rovnice (11), za předpokladu, že řídíme robot se šesti stupni volnosti. Derivací

Obr. 7: Schéma řízení na základě kinematiky



Integrací tohoto vektoru získáme vektor  $\mathbf{q}_e$ , který slouží jako oprava žádaného vektoru  $\mathbf{q}_z$ . Získaná korigovaná hodnota  $\mathbf{q}_k$  tvoří skutečnou žádanou hodnotu kloubových proměnných, která vstupuje po složkách na jednotlivé servopohony ve formě žádaných poloh. Samozřejmě je nutné při tom uvažovat i změny velikostí těchto složek vzhledem k jednotlivým převodům.

Vzniká otázka, proč vlastně opravujeme žádaný vektor  $\mathbf{q}_z$ ? Důvod spočívá ve skutečnosti, že každé měření je zatíženo nějakou chybou a tedy ani  $\mathbf{q}_z$ , a  $\mathbf{W}_z$  nejsou zcela přesné a určitě si vzájemně přesně neodpovídají. Poněvadž je však pro nás cennější žádaná trajektorie  $\mathbf{W}_z(t)$ , která reprezentuje pohyb nástroje přímo v pracovním prostoru robota, provádíme korekci kloubových proměnných.

V problematice plánování trajektorií robotů se využívá celá škála nejrůznějších metod, které často spolu bezprostředně nesouvisí. Mnohé z nich patří do umělé inteligence [8]. Specializované algoritmy lze nalézt v [16], algoritmy přímo určené pro roboty lze nalézt v knize [15]. Základní metody plánování pohybu robotů lze nalézt v [10].

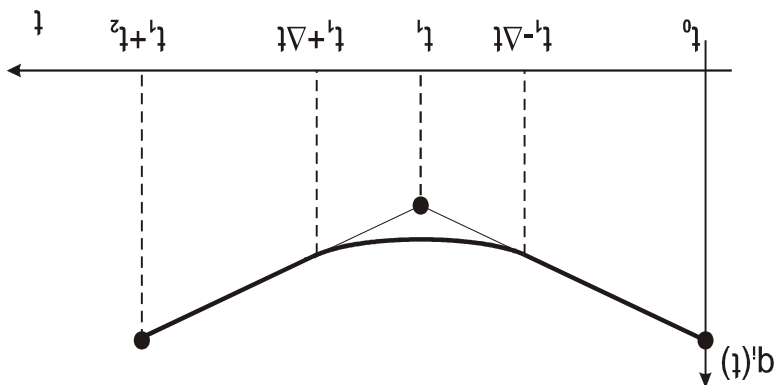
- Kloubových proměnných  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$
- Řešení inverzní úlohy kinematiky k určení vektoru okamžitých  $\dot{\mathbf{q}}$ .
- Generování matic transformace v diskretních časových

V úloze řízení robota po spojitě trajektorii je nutné řešit několik úloh:

#### 5.4. Drahové řízení

Z důvodu jednoduchosti přenecháváme příslušné vztahy čtenáři k vlastnímu odvození.

Obr. 6: Napojení úseček a parabol v lineární interpolaci



pohybu s nenulovou rychlostí v okolí původního bodu zlomu. Je-li parabola čtvrtého řádu, lze na přechod v oblasti zlomu klást dodatečně podmínky hladkosti, podobně, jako tomu bylo u kubického splajnu (též kubická spline-funkce). V nejjednodušším případě lze využít pouze paraboly druhého řádu. Pak ovšem můžeme zajistit pouze spojitost trajektorie a spojitost rychlosti. Zrychlení se bude měnit skokově a to na hranici, kde se úsečka z předešlé části trajektorie tečně dotýká navazující paraboly. Na vlastní parabole je pak zrychlení konstantní.

Máme tedy  $m-1$  rovnic pro  $m+1$  neznámých  $a_0, a_1, \dots, a_m$ . Rovnice je třeba doplnit dalšími dvěma nezávislými rovnicemi. V předešlém textu jsme požadovali splnění požadavků na okrajové rychlosti

$$\dot{s}_1(t_0) = \dot{P}_1(t_0) = 0 \text{ a } \dot{s}_m(t_m) = \dot{P}_m(t_m) = 0,$$

čehož nyní využijeme. Poněvadž platí pro počáteční rychlost vztah

$$\dot{s}_1(t_0) = -a_0 \frac{h_1}{2} + \frac{P_1 - P_0}{h_1} + (a_0 - a_1) h_1 / 6$$

dostáváme odtud s využitím podmínky pro počáteční rychlost

$$a_0 \frac{h_1^2}{3} + a_1 \frac{h_1^2}{6} = P_1 - P_0. \quad (8)$$

Obdobně ze vztahu

$$\dot{s}_m(t_m) = a_m \frac{h_m}{2} + \frac{P_m - P_{m-1}}{h_m} + (a_{m-1} - a_m) h_m / 6$$

a podmínky nulové rychlosti na konci trajektorie dostáváme

$$a_m \frac{h_m^2}{3} + a_{m-1} \frac{h_m^2}{6} = P_{m-1} - P_m. \quad (9)$$

Rovnice (7), (8) a (9) již představují soustavu  $m+1$  lineárních rovnic pro  $m+1$  neznámých. Uvedenou soustavu upravme do vhodnějšího tvaru násobením 6. Celou soustavu pak můžeme zapsat

$$\begin{aligned} a_0 2h_1 + a_1 h_1 &= 6 \left[ \frac{P_1 - P_0}{h_1} - \frac{P_0}{h_1} \right] \\ a_0 h_1 + a_1 2(h_1 + h_2) + a_2 h_2 &= 6 \left[ \frac{P_2 - P_1}{h_2} - P_1 \left( \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_1} \right) + \frac{P_0}{h_1} \right] \end{aligned}$$

Uvedeným postupem jsme získali jak zadanou trajektorii serpopohou  $\mathbf{q}^z(t)$ , tak i zadanou trajektorii  $\mathbf{W}^z(t)$ . Odtud plyne možnost navrhnout zjednodušenou metodu řízení robota, která využívá obou těchto trajektorií, viz Obr. 7.

Rychlosti i zrychlení v rámci pracovního prostoru robota. Uvedených metod interpolace jsme schopni zajistit dodržení poloh, jsou patěho stupně, nežní obříže. Celkem řečeno, s využitím Rozborem se snadno zjistí, že ani počáteční a koncový interval, které nejen uvinit příslušných intervalů  $(t_i, t_{i+1})$ , ale i na jejich hranici. rovnic (5) je snadná záležitost. Při tom je nutné sledovat extrémní řádu jsou polynomu druhého řádu a určeni kořeni kvadratické hodnoty se zpravidla snadno určují, neboť derivace polynomu třetího v úloze o interpolaci hodnot  $\mathbf{W}^i$  je, že maximální a minimální změny hodnot  $\mathbf{W}^i$  podobně i pro zrychlení. Východou využít splajnu korekce v tabulce I, např. změny dělek okamžiků vzorkování  $t_i$ , resp. poskytuje časová derivace  $\mathbf{W}^z(t)$ . Potom je nutné provést příslušné se stát, že maximální možná rychlost pohybu robota je menší, než překážkám, tj. provádíme různé úpravy ve tvaru křivky  $\mathbf{W}^z(t)$ . Může dále pracovat. Např. je možné požadovat, aby se vyhybala různým hodnot v pracovním prostoru robota. S tímto získanou trajektorií lze pohybu. Získáme tak trajektorii  $\mathbf{W}^z(t)$ , jako zadanou vektorovou a zbylé tři představují časový průběh natáčení nástroje v průběhu trajektorii pohybu zvoleného bodu nástroje (tzv. **referenčního bodu**) nástroje, získáme šest trajektorií. Z nich dvě tři reprezentují  $\mathbf{W}^i$ . Poněvadž tyto vektory reprezentují polohy a natočení koncového Obdobně lze proést interpolace pro složky jednovlivých vektorů hodnotu.

v prostoru kloubových proměnných  $\mathbf{q}^z(t)$ , jako zadanou vektorovou pro ostatní kloubové proměnné. Jako výsledek tak získáme trajektorii kloubové trajektorie pro příslušný serpopohou. Totéž provedeme i provedeme z hodnot řádku pro  $\mathbf{q}^i(t_i)$ , čímž získáme zadanou hodnotu pro křivku  $\mathbf{q}^i(t)$ , např. kubickým interpolacím splajnem. Interpolaci Tak se postupuje až do konce tabulky. Dále následuje interpolace

## 6. Kapitola

### Úvod do analytické mechaniky

V této kapitole se budeme věnovat některým základním principům, které sehrály významnou roli v mechanice, jako vědní disciplíně. Později je budeme aplikovat na problematiku určení diferenciálních rovnic dynamiky robotů.

#### 6.1. Vazby

Soustava  $n$  hmotných bodů je **volná**, jestliže každý bod může zaujmout libovolnou polohu. Říkáme, že v soustavě hmotných bodů jsou **vazby**, jestliže alespoň jeden z bodů nemůže opustit danou plochu či křivku.

Vazby dělíme na **holonomní**, neboli nediferenciální a na **neholonomní** (též anholonomní nebo diferenciální). Holonomní vazby lze vyjádřit rovnicemi bez derivací a dělíme je dále na vazby **skleronomní**, které nezávisí explicitně na čase a **reonomní**, které explicitně na čase závisí. Skleronomní vazby mají tedy obecně tvar

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0,$$

zatímco vazby reonomní jsou tvaru

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0.$$

#### 6.2. Princip virtuálních posunutí

**Virtuální posunutí**  $\delta \mathbf{r}$  je malá a vzhledem na vazby v daném okamžiku možná změna polohy hmotného bodu s průvodičem  $\mathbf{r}$  v dané soustavě. **Vazbové síly** jsou síly vzniklé v důsledku existence vazeb v soustavě hmotných bodů. Za předpokladu, že uvažujeme vazby bez tření a překážek, je vazbová síla kolmá na danou plochu nebo křivku. Platí tedy následující tvrzení.

Každý sloupec tabulky reprezentuje konfiguraci robota v dílčích časových okamžicích. Např. v čase  $t_0$  řešíme kinematickou rovnici a jako výsledek získáme hodnoty

$$\mathbf{q}_0 = (q_1(t_0), \dots, q_n(t_0))^T,$$

V sousedním bodě trajektorie je obdobně řešena úloha pro časový okamžik  $t_1$ . Jako výsledek jsou vypočtené hodnoty

$$\mathbf{q}_1 = (q_1(t_1), \dots, q_n(t_1))^T.$$

Tab. 1: Reprezentace výpočtu posloupnosti řešení inverzní úlohy.

$\mathbf{q}_6(t_0)$	$\mathbf{q}_6(t_1)$	$\mathbf{q}_6(t_m)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\mathbf{q}_2(t_0)$	$\mathbf{q}_2(t_1)$	$\mathbf{q}_2(t_m)$
$\mathbf{q}_1(t_0)$	$\mathbf{q}_1(t_1)$	$\mathbf{q}_1(t_m)$
$\mathbf{W}_0$	$\mathbf{W}_1$	$\mathbf{W}_m$
$t_0$	$t_1$	$t_m$

a celý postup lze zachytit následující tabulkou.

$$\mathbf{W}^i = \mathbf{F}(\mathbf{q}^i)$$

krok této činnosti, máme pro  $i$ -tý krok rovnici trajektorie řešíme inverzní úlohu. Označíme-li horním indexem dílčí nástroje a  $\mathbf{F}$  je matice funkce, rovněž typu  $6 \times 1$ . V každém bodu kde  $\mathbf{W}$  je vektor typu  $6 \times 1$ , zahrnující polohu a orientaci koncového rovnic kinematiky může být vyjádřena ve tvaru

$$\mathbf{W} = \mathbf{F}(\mathbf{q}) \quad (11)$$

- Interpolace v prostoru kloubových souřadnic.

$$\dot{P}_m(t) = \dot{s}_m(t) + a_m(t_m - t)(t - t_{m-1})^3 / h_m^3 - \frac{3}{2} a_m(t_m - t)^2(t - t_{m-1})^2 / h_m^3$$

kde je

$$\dot{s}_i(t) = -a_{i-1} \frac{(t_i - t)^2}{2h_i} + a_i \frac{(t - t_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{P_i - P_{i-1}}{h_i} + (a_{i-1} - a_i) h_i / 6 \quad (5)$$

pro  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Pro rychlosti v přechodových bodech pro  $i = 2, 3, \dots, m-1$  má platit rovnost rychlostí zleva a zprava. Poněvadž, dle speciální volby dodatečných členů s koeficienty  $c_1$  a  $c_m$  u funkcí  $P_1$  a  $P_m$ , platí

$$\dot{P}_1(t_1) = \dot{s}_1(t_1) \text{ a } \dot{P}_m(t_{m-1}) = \dot{s}_m(t_{m-1}),$$

můžeme uzavřít, že žádáme splnění následujících rovnic

$$\dot{s}_i(t_i) = \dot{s}_{i+1}(t_i) \text{ pro } i = 1, 2, \dots, m-1. \quad (6)$$

Dosazením  $t = t_i$  do (5) dostaneme

$$\dot{s}_i(t_i) = a_i \frac{h_i}{2} + \frac{P_i - P_{i-1}}{h_i} + (a_{i-1} - a_i) h_i / 6$$

$$\dot{s}_{i+1}(t_i) = -a_i \frac{h_{i+1}}{2} + \frac{P_{i+1} - P_i}{h_{i+1}} + (a_i - a_{i+1}) h_{i+1} / 6$$

a tedy dle (6), po úpravě, dostáváme soustavu rovnic

$$a_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} + a_i \frac{h_{i+1} + h_i}{3} + a_{i-1} \frac{h_i}{6} = \frac{P_{i+1}}{h_{i+1}} - P_i \left( \frac{1}{h_{i+1}} + \frac{1}{h_i} \right) + \frac{P_{i-1}}{h_i} \quad (7)$$

pro  $i = 1, 2, \dots, m-1$ .