TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2009 Zuzana Milerová

Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra: KMD

Studijní program: 2. stupeň

Kombinace: matematika - geografie

METODY ŘEŠENÍ ROVNIC

Equation Solving Methods

Diplomová práce: 09 – FP – KMD – 001

Autor: **Podpis**:

Zuzana Milerová

Adresa:

17. listopadu 1372

Mladá Boleslav, 293 01

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.

Počet:

Stran	Slov	Obrázků	Vzorců	Pramenů	Příloh
68	7 941	23	58	20	0

V Liberci dne 1. 12. 2008

Zadání

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

V Liberci dne 1. 12. 2008 Zuzana Milerová

Poděkování

Ráda bych touto cestou poděkovala vedoucí mé diplomové práce paní RNDr. Daniele Bittnerové, CSc. z Katedry matematiky a didaktiky matematiky za odborný dohled a cenné rady pro vypracování diplomové práce.

Dále děkuji své rodině a blízkým za veškerou podporu, bez kterých bych svou diplomovou práci nikdy nedokončila.

Metody řešení rovnic

MILEROVÁ Zuzana **DP** – 2009 **Vedoucí DP**: RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.

Abstrakt

Na začátku této diplomové práce je uveden stručný přehled základních algebraických rovnic i s příklady. Dále jsou zde zmíněny různé metody řešení rovnic, mezi které patří nejenom početní a grafická metoda, ale také metody přibližné a řešení rovnic pomocí metod matematické analýzy. Ke všem zmíněným metodám jsou uvedeny názorné příklady. Předposlední částí práce je teorie špatně podmíněných polynomů včetně několika jejich příkladů. Na samém závěru je uvedena metodika, jak a kdy tuto látku zařadit při výuce na nejen SŠ.

Das Resümee

Am Anfang dieser Diplomarbeit ist eine kurze Übersicht der elementaren algebraischen Gleichungen auch mit den Beispielen genannt. Weiterhin sind hier die verschiedenen Methoden von Lösungen der Gleichungen erwähnt, unter die nicht nur die rechnerischen und graphischen Methoden gehören, sondern auch die Annäherndmethoden und die Lösung der Gleichungen mithilfe von der mathematischen Analyse. Zu allen erwähnten Methoden sind anschauliche Beispiele eingeführt. Der vorletzte Teil der Arbeit besteht aus der Theorie der falsch bedingten Polynome inklusiv einigen Beispielen. Zum Schluss ist die Methodik genannt, wie und wann so ein Thema nicht nur auf den Mittelschulenunterricht gesetzt werden kann.

Abstract

At the beginning of the thesis, a brief overview of elementary algebraic equations with the examples is introduced, as well. There are beyond mentioned various methods of equation solutions, which among not only the arithmetical and graphical methods are ranked but also the approximate ones and equation solutions by means of the mathematic analysis. There are introduced examples to all mentioned methods. The penultimate part of the thesis is composed of the theory of false contingent polynomials inclusive some examples. There is a methodology named in the conclusion, how and when can be such a theme submitted not only at the secondary school classes.

Obsah

1 Úvod **8**

2 Metody řešení rovnic **9**

2.1 Typy rovnic 10

2.1.1 Lineární rovnice 10

2.1.2 Kvadratická rovnice 10

2.1.3 Algebraické rovnice vyšších stupňů 12

2.2 Početní metoda řešení rovnic 24

2.3 Řešení rovnic pomocí funkcí a jejich vlastností 26

2.4 Grafické řešení rovnic 31

2.5 Přibližné metody řešení rovnice 34

2.5.1 Metoda půlení intervalu 34

2.5.2 Metoda regula falsi (metoda tětiv) 38

2.5.3 Metoda sečen 41

2.5.4 Metoda tečen (Newtonova metoda) 44

2.5.5 Shrnutí 47

3 Špatně podmíněné polynomy **48**

3.1 Hledání kořenů polynomu 48

3.2 Teorie 48

3.3 Koeficient podmíněnosti 50

3.4 Číslo podmíněnosti 50

3.5 Shrnutí 51

4 Příklady špatně podmíněných polynomů **52**

4.1 Příklad 52

4.2 Příklad 55

4.3 Příklad 59

5 Závěr **63**

6 Použitá literatura **66**

1 Úvod

Učitelé na základních či středních škole by měli mít dostatečný přehled nejenom nad látkou, kterou sami učí, ale i nad látkou, která je díky učebním osnovám nepovinná. Nikdy totiž nemůžou vědět, co se jim může při hodinách stát a co se jim bude hodit.

Proto tato práce nastiňuje stručný přehled základních typů rovnic a metod jejich řešení. Jsou zde zmíněny jak rovnice a metody, které se dají použít na základních školách, tak i metody usnadňující hledání kořenů algebraických rovnic středoškolákům, ale také metody, které se vyučují na vysokých školách. Všechny tyto metody mají jedno společné, a to, že když jsou vhodně využity, obohacují tak látku všedních hodin vyučování. Proto je jen na vyučujícím, kdy a jak se rozhodne různé metody využít. Jedna metoda řešení rovnic třetího stupně (Cardanovy vzorce) je zde porovnávána i z historického hlediska.

V další části této diplomové práce jsou zmíněny špatně podmíněné polynomy, ke kterým jsou samozřejmě uvedeny názorné příklady. Tyto polynomy se sice na středních školách běžně neberou, ale pro zpestření hodin je nejenom učitelé škol s rozšířenou výukou matematiky mohou klidně zařadit. Při jejich probírání si žáci nenásilnou formou osvěží a procvičí nejenom průběhy funkcí, ale také si uvědomí zrádnost a záludnost zaokrouhlování.

V poslední kapitole je nastíněna metodika, kdy a jakým způsobem tuto látku zařadit na obohacení výuky. Také je zde uvedeno pár příkladů, na kterých je vidět, na jakou probranou a žáky osvojenou problematiku navazují.

2 Metody řešení rovnic

V této kapitole je nastíněn stručný přehled základních algebraických rovnic, jejich příklady a také různé metody jejich řešení.

Mnoho úloh, ať už matematických, technických či jiných, lze formulovat tak, že máme určit všechna čísla z daného číselného oboru M, pro která jsou definovány dané funkce f, g proměnné x nabývajících určitých funkčních hodnot. Množinou M je většinou **R** nebo **C** a také funkční hodnoty jsou z těchto oborů.

Definice 1.: Rovnice

Zápis ve tvaru $f(x) = g(x)$, kde $x \in M$, nazýváme ***rovnicí s neznámou*** x; $f(x)$ se nazývá ***levá strana rovnice***, $g(x)$ ***pravá strana rovnice***. Je-li $g(x) = 0$, říkáme, že rovnice je v ***anulovaném tvaru***.

Číselný obor M se nazývá ***obor řešení rovnice***. Čísla $x \in M$, která vyhovují dané rovnici, tj. splňují podmínky úlohy, již rovnice vyjadřuje, se nazývají ***kořeny*** nebo ***řešení rovnice***.

Z definice rovnice je zřejmé, že k jejímu určení musíme zadat:

a) obor řešení M, volba oboru je důležitá z hlediska existence řešení rovnice

b) označení neznámé

c) funkce f, g, jejichž proměnou je neznámá a jejichž funkční hodnoty si mají být rovny

2.1 Typy rovnic

2.1.1 Lineární rovnice

Definice 2.: Termín ***lineární rovnice*** označuje algebraickou ***rovnici 1. stupně***, tzn. rovnici o jedné neznámé, kde se neznámá nachází pouze v první mocnině. V základním tvaru ji můžeme vyjádřit takto: $ax = b$, kde $a \neq 0$, $a \in \mathbf{C}$, $b \in \mathbf{C}$. Je tedy zřejmé, že má vždy jeden kořen $x = \frac{b}{a}$. Je-li $a \in \mathbf{R} \wedge b \in \mathbf{R}$, je také $x = \frac{b}{a} \in \mathbf{R}$.

Tento typ rovnic ve stručnosti řešíme tak, že převedeme všechny členy s neznámou x na levou stranu rovnice a členy bez neznámé na pravou stranu rovnice.

2.1.2 Kvadratická rovnice

Definice 3.: ***Kvadratickou rovnicí s reálnými koeficienty*** neboli ***rovnicí 2. stupně s reálnými koeficienty*** nazýváme rovnici $f(x) = g(x)$ s neznámou $x \in \mathbf{C}$, jestliže ji lze vyjádřit v ***anulovaném tvaru*** $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$.

Výraz ax^2 se nazývá ***kvadratický člen***, a ***koeficient kvadratického členu***, bx ***lineární člen***, b ***koeficient lineárního členu***, c ***absolutní člen***.

V případě, kdy $b = 0$, má kvadratická rovnice tvar $ax^2 + c = 0$ a nazývá se ***ryze kvadratická rovnice***. Dalším speciálním případem je ***kvadratická rovnice bez absolutního členu***, která má podobu $ax^2 + bx = 0$.

Výpočet kořenů kvadratické rovnice pomocí diskriminantu

Libovolná kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ se řeší pomocí vzorce $D = b^2 - 4ac$, zvaného ***diskriminant***, pro který platí:

a) je-li $D > 0$, má kvadratická rovnice právě 2 reálné různé kořeny,

b) je-li $D = 0$, má dva sobě rovné reálné kořeny (dvojnásobný kořen),

c) je-li $D < 0$, nemá v oboru reálných čísel **R** žádný kořen, v oboru komplexních čísel **C** má právě 2 komplexně sdružené kořeny.

Pro $D \geq 0$ můžeme vyjádřit kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ s reálnými koeficienty vzorcem $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, pro $D < 0$ je lze vyjádřit $x = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$.

Příklad

Zadání: Pomocí diskriminantu najděte kořeny rovnice $x^2 + 11x + 30 = 0$.

Řešení: Využijeme vzorec $D = b^2 - 4ac$, abychom zjistili, kolik a v jakém oboru má daná rovnice kořenů.

V našem případě platí: $D = b^2 - 4ac = 121 - 120 = 1$.

Jelikož je $D > 0$, má kvadratická rovnice v **R** právě 2 reálné různé kořeny. Nyní použijeme vzoreček $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ pro jejich výpočet:

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-11 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = -5$$

$$x_2 = -6$$

Odpověď: Kvadratická rovnice $x^2 + 11x + 30 = 0$ má kořeny $x_1 = -5$ a $x_2 = -6$.

Viètovy vzorce

Kořeny kvadratické rovnice můžeme také počítat podle tzv. Viètových vzorců. Tato metoda však bohužel v některých případech není tak snadná jako počítání kořenů pomocí diskriminantu.

Nejprve si kvadratickou rovnici upravíme na ***normovaný tvar*** $x^2 + px + q = 0$ (celou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ vydělíme koeficientem a). Víme, že koeficienty rovnice můžeme zapsat pomocí kořenů x_1, x_2. Pak platí:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 x_2) = 0.$$

Z této rovnice vyplývá, že hledáme takové kořeny x_1, x_2, které vyhovují rovnicím:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{a} \quad x_1 x_2 = q.$$

Příklad

<u>Zadání</u>: Pomocí Viètových vzorců řešte rovnici $x^2 + 11x + 30 = 0$.

<u>Řešení</u>: Nejprve budeme hledat takové kořeny x_1, x_2, které vyhovují rovnici $x_1 + x_2 = -p$, zároveň však musíme brát na zřetel druhou podmínku, a to rovnici $x_1 x_2 = q$.

Jediným řešením, které splňuje obě podmínky, jsou kořeny: $x_1 = -5$ a $x_2 = -6$.

<u>Odpověď</u>.: Rovnice $x^2 + 11x + 30 = 0$ má dva kořeny. Jsou jimi $x_1 = -5$ a $x_2 = -6$.

2.1.3 Algebraické rovnice vyšších stupňů

<u>Definice 4.</u>: ***Algebraickou rovnicí n-tého stupně*** s neznámou x nazýváme rovnici $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$, kde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla, resp. komplexní čísla, a nazývají se ***koeficienty rovnice***.

Binomické rovnice

<u>Definice 5.</u>: Algebraická rovnice tvaru $ax^n + b = 0$, kde a, b jsou obecně komplexní čísla $(a \neq 0, b \neq 0)$, x je neznámá a n přirozené číslo, se nazývá ***binomickou rovnicí***.

Po vydělení celé rovnice číslem a dostaneme tzv. ***normovaný tvar*** rovnice $x^n \pm c = 0$, kde $c > 0$.

Binomickou rovnici můžeme v **C** řešit buď algebraicky, či goniometricky.

<u>Algebraické řešení</u>

Při této metodě se používá rozklad levé strany rovnice na součin mnohočlenů nižšího stupně.

Příklad

<u>Zadání</u>: Řešte algebraicky rovnici $x^3 + 1 = 0$.

<u>Řešení</u>: Levou stranu rovnice můžeme rozložit pomocí vzorce

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Dostaneme tedy součin $(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$, ze kterého plyne $x + 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - x + 1 = 0$. Odtud dostaneme kořeny $x_1 = -1$ a $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

<u>Odpověď</u>: Rovnice $x^3 + 1 = 0$ má 3 kořeny: $x_1 = -1$ a $x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Goniometrické řešení

Při tomto způsobu řešení binomické rovnice se využívá vzorec pro odmocninu z komplexního čísla v goniometrickém tvaru. Přitom musíme odlišit n-té odmocniny z čísla $c > 0$ v oboru komplexních čísel $\mathbf{C}$ symbolem $(\sqrt[n]{c})_c$ od n-té odmocniny z c v oboru reálných čísel $\mathbf{R}$, kterou značíme $\sqrt[n]{c}$. Všechny kořeny patří do oboru komplexním čísel.

Z rovnice $x^n - c = 0$, $c > 0$, $c \in \mathbf{R}$, dostaneme n kořenů tvaru:

$$x = (\sqrt[n]{c})_c = \sqrt[n]{c}(\cos\frac{0+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{0+2k\pi}{n}) = \sqrt[n]{c}(\cos k\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin k\frac{2\pi}{n}),$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Z rovnice $x^n + c = 0$, $c > 0$, $c \in \mathbf{R}$, dostaneme n kořenů tvaru:

$$x = (\sqrt[n]{-c})_c = \sqrt[n]{c}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}) = \sqrt[n]{c}[\cos(2k+1)\frac{\pi}{n} + \mathrm{i}\sin(2k+1)\frac{\pi}{n}]$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Kořeny binomické rovnice tvoří v Gaussově rovině vrcholy pravidelného n – úhelníka, který je vepsaný do kružnice. Tato kružnice má střed v počátku soustavy souřadnic a její poloměr je $\sqrt[n]{|c|} > 0$.

Příklad

Zadání: Řešte goniometricky rovnici $x^3 + 1 = 0$.

Řešení: Využijeme vzorec pro určení kořenů

$$x = \sqrt[n]{c}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}),\ k = 0, 1, 2.$$

Po dosazení dostaneme $x = \sqrt[3]{1}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{3})$, nyní vypočítáme jednotlivé kořeny:

$$k = 0: \quad x_1 = \sqrt[3]{1}(\cos\frac{\pi + 0\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 0\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 1: \quad x_2 = \sqrt[3]{1}(\cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2\pi}{3}) = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1$$

$$k = 2: \quad x_3 = \sqrt[3]{1}(\cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 4\pi}{3}) = \cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Odpověď: Rovnice $x^3 + 1 = 0$ má 3 kořeny: $x_1 = -1$ a $x_{2,3} = \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Kubické rovnice (rovnice třetího stupně)

Definice 6.: Algebraická rovnice tvaru $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, kde a, b, c jsou komplexní čísla ($a \neq 0$) a x je neznámá, se nazývá ***kubickou rovnicí (rovnicí třetího stupně).***

Pomocí substituce $x = y - \frac{b}{3a}$ převedeme kubickou rovnici na ***redukovaný tvar*** rovnice $y^3 + pq + q = 0$, kde $p,\ q \in \mathrm{C}$.

Způsobů řešení kubických rovnic je několik. Můžeme použít algebraické řešení (Cardanovy vzorce), goniometrické řešení či rozklad na součin kořenových činitelů.

Rozklad na součin kořenový činitelů

Danou rovnici se snažíme rozložit na součin kořenových činitelů buď pomocí vzorců, pomocí vytýkání, či kombinací obojího.

Pro nalezení kořenů rovnice $ax^3 + bx_2 + cx + d = 0$ můžeme využít např. vzorec: $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, kde x_1, x_2, x_3 jsou kořeny dané rovnice. Tyto kořeny musejí splňovat následující podmínky:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \quad \text{a} \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

Příklad

Zadání: Řešte rovnici $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$ pomocí rozkladu na součin kořenových činitelů.

Řešení: Jelikož se ve všech členech levé strany rovnice vyskytuje neznámá x, můžeme ji vytknout před závorku: $x(x^2 + 5x + 6) = 0$.

Aby platila tato rovnost, musí $x = 0 \lor x^2 + 5x + 6 = 0$. Z první podmínky je zřejmé, že první kořen je $x_1 = 0$.

Nyní vypočítáme kořeny kvadratické rovnice pomocí diskriminantu:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \rightarrow \begin{array}{l} x_2 = -2 \\ x_3 = -3 \end{array}$$

Tyto kořeny posléze dosadíme do výše zmíněných rovnic, které jsou podmínkami právě pro tyto kořeny:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \qquad 0 + (-2) + (-3) = -\frac{5}{1} \rightarrow \text{rovnost platí}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \qquad 0.(-2) + 0.(-3) + (-2)(-3) = \frac{6}{1} \rightarrow \text{rovnost platí}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \qquad 0.(-2)(-3) = -\frac{0}{1} \rightarrow \text{rovnost platí}$$

Všechny 3 nalezené kořeny můžeme ještě ověřit zkouškou. Nejprve dosadíme kořen x_1 do levé strany původní rovnice (značíme $L_{(0)}$), poté i do pravé strany rovnice (označíme $P_{(0)}$) a pokud se obě strany rovnají, je námi nalezený kořen řešením této rovnice. Postup opakujeme i pro kořeny x_2, x_3.

$$L_{(0)} = 0^3 + 5.0^2 + 6.0 = 0 \qquad P_{(0)} = 0$$

$$L_{(-2)} = (-2)^3 + 5.(-2)^2 + 6.(-2) = -8 + 20 - 12 = 0 \qquad P_{(-2)} = 0$$

$$L_{(-3)} = (-3)^3 + 5.(-3)^2 + 6.(-3) = -27 + 45 - 18 = 0 \qquad P_{(-3)} = 0$$

Odpověď: Rovnice $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$ má tři kořeny: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ a $x_3 = -3$.

Algebraické řešení (Cardanovy vzorce)

Číslo $D = -4p^3 - 27q^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ se nazývá ***diskriminantem*** kubické rovnice. Podle toho, jestli je diskriminant větší, resp. menší, resp. rovno nule, má rovnice třetího stupně různé kořeny – viz následující tabulka (Tab. 1)

	$x^3 + pq + q = 0$
$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$	Jeden reálný kořen a dva komplexně sdružené kořeny.
$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$	Tři reálné různé kořeny.
$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$	Tři reálné kořeny, mezi nimiž je vícenásobný kořen.

Tab. 1: Kořeny kubické rovnice v závislosti na diskriminantu

Řešením rovnice v redukovaném tvaru jsou čísla:

$$y_1 = u + v, \qquad y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}, \qquad y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\mathrm{i}\sqrt{3},$$

$$\text{kde } u = \sqrt[3]{(-\frac{q}{2} + \sqrt{D})}, \quad v = \sqrt[3]{(-\frac{q}{2} - \sqrt{D})},$$

přičemž hodnoty třetích odmocniny volíme tak, aby $3uv = -p$ a $\sqrt{D}$ je pevně zvolená druhá odmocnina z komplexního čísla D.

I když by se mohlo zdát, že řešení rovnic 3. stupně pomocí Cardanových vzorců je novodobou záležitostí, není tomu tak. Výše uvedené předpisy byly pojmenovány po italském matematikovi Hieronimu Cardanovi, který se touto problematikou zabýval už v 16. století. Samozřejmě, že se v jeho době nepoužívaly přehledné formule jako dnes, ale náročný slovní popis (viz ukázka):

„Umocni třetinu koeficientu u neznámé na třetí, k němuž přičteš druhou mocninu poloviny koeficientu rovnice, vezmi odmocninu součtu, jmenovitě druhou, a toto použij dvakrát. K jednomu přičti polovinu koeficientu, kterým bylo právě násobeno, od druhého odečti tutéž polovinu, a dostaneš Binomium a jeho Apotome, dále, když odečteš třetí odmocninu Apotoma od třetí odmocniny Binomia, zbytek, který je vlevo od toho, udává hodnotu neznámé."

(Překlad z anglické verze Ars Magna, autor Hieronim Cardan, [9])

Naštěstí se v průběhu času od tohoto velmi těžkého a téměř nesrozumitelného textu opouštělo a vytvářely se snáze pochopitelné postupy. Proto dnes můžeme využívat právě přehledné Cardanovy vzorce.

Příklad

Zadání: Pomocí Cardanových vzorců vyřešte rovnici třetího stupně $x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$.

Řešení: Nejprve převedeme danou rovnice pomocí substituce na redukovaný tvar:

$$\text{subst.: } x = y - \frac{b}{3a} = y - \frac{-3}{3} = y + 1,$$

$$(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 4(y+1) - 4 = 0 \rightarrow \quad y^3 + y - 2 = 0.$$

Z redukovaného tvaru rovnice můžeme vyčíst hodnoty pro p a q: $p = 1$, $q = -2$, a tudíž tak vypočítat diskriminant: $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-2)^2}{4} + \frac{1}{27} = 1 + \frac{1}{27} = \frac{28}{27}$.

Jelikož je $D > 0$, má daná rovnice jeden reálný kořen a dva komplexně sdružené imaginární kořeny.

Nyní vypočítáme u, v:

$$u = \sqrt[3]{(-\frac{q}{2} + \sqrt{D})} = \sqrt[3]{(-\frac{-2}{2} + \sqrt{\frac{28}{27}})} = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} \doteq 1{,}264\,,$$

$$v = \sqrt[3]{(-\frac{q}{2} - \sqrt{D})} = \sqrt[3]{(1 - \sqrt{\frac{28}{27}})} \doteq -0{,}264\,.$$

Poté získané hodnoty dosadíme do výše zmíněných vzorečků pro výpočet kořenů rovnice v redukovaném tvaru. Posledním krokem je samotný výpočet kořenů původní kubické rovnice, které získáme dosazením do substituce:

$$y_1 = u + v = 1{,}264 - 0{,}264 = 1 \qquad \rightarrow \quad x_1 = 2$$

$$x_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\mathrm{i}\sqrt{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1{,}528}{2}\mathrm{i}\sqrt{3} \qquad \rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2} + 0{,}764\mathrm{i}\sqrt{3}$$

$$x_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\mathrm{i}\sqrt{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1{,}528}{2}\mathrm{i}\sqrt{3} \qquad \rightarrow \quad x_3 = \frac{1}{2} - 0{,}764\mathrm{i}\sqrt{3}$$

Vše bychom měli ještě ověřit zkouškou.

$$L_{(2)} = 2^3 - 3.2^2 + 4.2 - 4 = 8 - 12 + 8 - 4 = 0 \qquad P_{(2)} = 0$$

$$L_{(\frac{1}{2}+0{,}764\mathrm{i}\sqrt{3})} = (\frac{1}{2} + 0{,}764\mathrm{i}\sqrt{3})^3 - 3.(\frac{1}{2} + 0{,}764\mathrm{i}\sqrt{3})^2 + 4.(\frac{1}{2} + 0{,}764\mathrm{i}\sqrt{3}) - 4 = \ldots = 0$$

$$P_{(\frac{1}{2}+0{,}764\mathrm{i}\sqrt{3})} = 0$$

$$L_{(\frac{1}{2}-0{,}764\mathrm{i}\sqrt{3})} = (\frac{1}{2} - 0{,}764\mathrm{i}\sqrt{3})^3 - 3.(\frac{1}{2} - 0{,}764\mathrm{i}\sqrt{3})^2 + 4.(\frac{1}{2} - 0{,}764\mathrm{i}\sqrt{3}) - 4 = \ldots = 0$$

$$P_{(\frac{1}{2}-0{,}764\mathrm{i}\sqrt{3})} = 0$$

<u>Odpověď</u>: Kubická rovnice $x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$ má 3 kořeny: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2} + 0{,}764\mathrm{i}\sqrt{3}$ a $x_3 = \frac{1}{2} - 0{,}764\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Goniometrické řešení

Tento způsob řešení se používá, když je diskriminant kubické rovnice s reálnými koeficienty $D < 0$. V tomto případě má daná rovnice 3 reálné kořeny a vypočítají se z dříve uvedené substituce $x = y - \frac{b}{3a}$ pomocí vzorců:

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\frac{\psi}{3}, \quad y_2 = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos(\frac{\psi}{3} - \frac{\pi}{3}), \quad y_3 = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos(\frac{\psi}{3} + \frac{\pi}{3}),$$

kde ψ vypočteme z rovnice $\cos\psi = \dfrac{\frac{-q}{2}}{\sqrt{(\frac{|p|}{3})^3}}$.

Příklad

Zadání: Pomocí goniometrického způsobu řešení nalezněte kořeny kubické rovnice $x^3 + 6x^2 - x - 30 = 0$.

Řešení: Nejprve převedeme danou rovnici pomocí substituce na rovnici v redukovaném tvaru:

$$\text{subst.: } x = y - \frac{b}{3a} = y - \frac{6}{3} = y - 2$$

$$(y-2)^3 + 6(y-2)^2 - (y-2) - 30 = 0 \rightarrow y^3 - 13y - 12 = 0$$

Stejně jako v algebraickém řešení rovnice vyčteme hodnoty p a q: $p = -13$, $q = -12$ a spočítáme diskriminant:

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-12)^2}{4} + \frac{(-13)^3}{27} = 36 - \frac{2197}{27} \doteq -45{,}37 < 0.$$

Jelikož je $D < 0$, víme, že má tato rovnice 3 reálné kořeny. Dále se přímo nabízí použít k jejich dosažení goniometrické řešení.

Pro výpočet kořenů rovnice v redukovaném tvaru y_1, y_2, y_3 a pro výpočet úhlu ψ použijeme výše zmíněné vzorce. Výsledky pak dosadíme do původní substituce a získáme tím kořeny původní kubické rovnice.

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\frac{\psi}{3} = 2\sqrt{\frac{|-13|}{3}}\cos 16°6' \doteq 4 \qquad \rightarrow \; x_1 = y_1 - 2 = 2$$

$$y_2 = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos(\frac{\psi}{3} - \frac{\pi}{3}) = -2\sqrt{\frac{|-13|}{3}}\cos(-43°54') \doteq -3 \qquad \rightarrow \; x_2 = y_2 - 2 = -5$$

$$y_3 = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos(\frac{\psi}{3} + \frac{\pi}{3}) = -2\sqrt{\frac{|-13|}{3}}\cos 76°6' \doteq -1 \qquad \rightarrow \; x_3 = y_3 - 2 = -3$$

Posledním krokem je ověření získaných kořenů zkouškou.

$$L_{(2)} = 2^3 + 6.2^2 - 1.2 - 30 = 8 + 24 - 2 - 30 = 0 \qquad P_{(2)} = 0$$

$$L_{(-5)} = (-5)^3 + 6.(-5)^2 - 1.(-5) - 30 = -125 + 150 + 5 - 30 = 0 \qquad P_{(-5)} = 0$$

$$L_{(-3)} = (-3)^3 + 6.(-3)^2 - 1.(-3) - 30 = -27 + 54 + 3 - 30 = 0 \qquad P_{(-3)} = 0$$

Odpověď: Kubická rovnice $x^3 + 6x^2 - x - 30 = 0$ má 3 reálné kořeny $x_1 = 2$, $x_2 = -5$ a $x_3 = -3$.

Reciproké rovnice

Definice 7.: ***Reciproká rovnice n-tého stupně prvního,*** resp. ***druhého druhu***, je algebraická rovnice $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, kde $a_n \neq 0$, pro všechny jejíž koeficienty $a_k\,(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ platí:

- v případě reciproké rovnice prvního druhu (kladně reciproká) $a_k = a_{n-k}$
- v případě reciproké rovnice druhého druhu (záporně reciproká) $a_k = -a_{n-k}$.

Reciproké rovnice mají všechny kořeny různé od nuly, protože je-li $x = x_1$ kořenem rovnice, je i $x = \frac{1}{x_1}$ kořenem dané rovnice.

Věta: Každá rovnice 2. druhu (záporně reciproká) má kořen $x = 1$, každá rovnice prvního druhu (kladně reciproká) lichého stupně a každá záporná reciproká rovnice sudého stupně má kořen $x = -1$.

Pokud má daná rovnice kořen $x = 1$, nebo $x = -1$, pak ji vydělíme kořenovým činitelem $(x-1)$ či $(x+1)$. Po provedení stále kontrolujeme, zda ještě můžeme v dělení pokračovat, dokud nedostaneme kladně reciprokou rovnici sudého stupně

$$a_0x^{2m} + a_1x^{2m-1} + \ldots + a_mx^m + \ldots + a_0 = 0.$$

Poté vydělíme celou rovnice výrazem x^m a dostaneme

$$a_0(x^m + \frac{1}{x^m}) + a_1(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}) + \ldots + a_{m-1}(x + \frac{1}{x}) + a_m = 0.$$

Po zavedení substituce $y = x + \frac{1}{x}$ převedeme danou rovnici na rovnici m-tého stupně pro y, kterou už umíme vyřešit.

Příklad

Zadání: Řešte reciprokou rovnici $2x^5 + x^4 - 19x^3 + 19x^2 - x - 2 = 0$.

Řešení: Reciproká rovnice $2x^5 + x^4 - 19x^3 + 19x^2 - x - 2 = 0$ je rovnicí 2. druhu (záporně reciproká) 5. stupně. Má proto kořen $x_1 = 1$, a tak ji můžeme vydělit kořenovým činitelem $(x-1)$:

$$(2x^5 + x^4 - 19x^3 + 19x^2 - x - 2):(x-1) = 2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2$$
$$3x^4 - 19x^3$$
$$-16x^3 + 19x^2$$
$$3x^2 - x - 2$$
$$2x - 2$$
$$0$$

Nyní vydělíme vzniklou rovnici výrazem x^2 a zavedeme substituci $y = x + \dfrac{1}{x}$:

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0 \quad / x^2$$

$$2(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 3(x + \frac{1}{x}) - 16 = 0, \quad x \neq 0$$

$$\text{subst.: } y = x + \frac{1}{x}, \quad y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$2(y^2 - 2) + 3y - 16 = 0$$

$$2y^2 + 3y - 16 = 0$$

Danou kvadratickou rovnici vyřešíme pomocí diskriminantu. Poté zpětně dosadíme do substituce a získáme tak další kořeny reciproké rovnice.

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2} = \frac{-3 \pm 13}{4} \quad \rightarrow \quad y_1 = \frac{5}{2}, \quad y_2 = -4$$

$$y_1 = \frac{5}{2} = x + \frac{1}{x} \qquad /.2x \qquad\qquad y_2 = -4 = x + \frac{1}{x} \qquad /.x$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \qquad\qquad x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \rightarrow \; x_2 = 2 \qquad x_{4,5} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}$$

<u>Odpověď</u>: Reciproká rovnice $2x^5 + x^4 - 19x^3 + 19x^2 - x - 2 = 0$ má 5 kořenů. Jsou to $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \dfrac{1}{2}$, $x_4 = -2 + \sqrt{3}$ a $x_5 = -2 - \sqrt{3}$.

2.2 Početní metoda řešení rovnic

Hlavní otázkou při řešení rovnic je, jak určit, která čísla jsou řešením dané rovnice. Postup hledání kořenů lze rozdělit na jednotlivé fáze:

1. fáze - ***rozbor:*** Předpokládáme, že má daná rovnice alespoň jeden kořen a pokoušíme se tuto rovnici upravit na rovnici, jejíž kořeny jsou zřejmé, nebo je dovedeme snadno určit. Můžeme však používat pouze takových úprav, při nichž řešení dané rovnice je také řešením rovnic vzniklých při úpravách. Tyto úpravy se nazývají ***důsledkové úpravy***.
2. fáze - ***závěr rozboru:*** V této fázi ověřujeme, zda množina M', která přestavuje všechna možná řešení dané rovnice, vyhovuje $M' \subset M$.
3. fáze – ***zkouška***: Zjistíme, které prvky z množiny M' jsou řešením dané rovnice. Postupně dosadíme každé číslo $x \in M'$ do levé i pravé strany. Pokud se pak tyto hodnoty rovnají, jedná se o kořen dané rovnice. Výsledkem této fáze je získání množiny všech kořenů dané rovnice.
4. fáze – ***diskuse:*** Provádíme ji pouze tehdy, když daná rovnice obsahuje parametry. Stanoví se, pro které hodnoty parametrů má daná rovnice řešení a jaký je jejich počet, případně, pro které hodnoty parametrů nemá daná rovnice řešení.

Příklad

Zadání: Pomocí vzorce pro výpočet diskriminantu D najděte kořeny rovnice $x^2 + 4x + 1 = 0$ v oboru **R**.

Řešení:

1. fáze: Nejprve dosadíme do vzorce $D = b^2 - 4ac$ a zjistíme, zda má daná rovnice v oboru **R** kořeny.

   $D = (4)^2 - 4.1.1 = 12 > 0$ → Daná rovnice má v **R** dva různé reálné kořeny

Poté můžeme použít vztah $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ pro výpočet kořenů.

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2.1} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2.\sqrt{3}}{2} \rightarrow x_1 = -2 + \sqrt{3}$$

$$\rightarrow x_2 = -2 - \sqrt{3}$$

2. fáze: Oba tyto kořeny patří do oboru reálných čísel, proto mohou být kořeny dané rovnice.

3. fáze: Vše ověříme zkouškou. Nejprve dosadíme kořen x_1 do levé strany rovnice (značíme $L_{(-2+\sqrt{3})}$), poté i do pravé strany rovnice (označíme $P_{(-2+\sqrt{3})}$) a pokud se obě strany rovnají, je námi nalezený kořen řešením této rovnice. Postup opakujeme i pro kořen x_2.

$$L_{(-2+\sqrt{3})} = (-2+\sqrt{3})^2 + 4.(-2+\sqrt{3}) + 1 = 0 \qquad P_{(-2+\sqrt{3})} = 0$$

$$L_{(-2-\sqrt{3})} = (-2-\sqrt{3})^2 + 4.(-2-\sqrt{3}) + 1 = 0 \qquad P_{(-2-\sqrt{3})} = 0$$

Oba získané kořeny splňují zkoušku a vyhovují tak dané kvadratické rovnici.

4. fáze: V tomto příkladě nemusíme provádět diskusi, protože zadaná kvadratická rovnice neobsahuje parametry.

<u>Odpověď</u>: Rovnice $x^2 + 4x + 1 = 0$ má v **R** dva kořeny: $x_1 = -2 + \sqrt{3}$ a $x_2 = -2 - \sqrt{3}$.

2.3 Řešení rovnic pomocí funkcí a jejich vlastností

Rovnice se dají řešit také pomocí pojmů a jejich vlastností matematické analýzy. Například pomocí lokálních extrémů funkce $f(x) = x^3 + px + q$ můžeme určit kořeny rovnice třetího stupně (kubické rovnice).

Jsou-li p a q reálná čísla, pak má rovnice $x^3 + px + q = 0$ buď všechny tři kořeny reálné, nebo jeden reálný a dva komplexně sdružené. Definiční obor funkce je $\mathbf{R}$. Po jejím zderivování dostaneme $f'(x) = 3x^2 + p$.

Když je $p > 0$, pak je $f'(x) > 0$ a funkce f je rostoucí pro všechna reálná čísla x. Z toho plyne, že jediným kořenem rovnice je průsečík s osou x. Při přechodu od $x = -\infty$ k $x = +\infty$ mění funkce $f(x)$ znaménko z minus na plus.

Když je $p < 0$, pak má funkce

- maximum v bodě $x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$.
- minimum v bodě $x = \sqrt{-\frac{p}{3}}$.

Po dosazení těchto hodnot do výrazu funkce $f(x)$, dostaneme:

$$f_{max} = q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} \qquad \text{a} \qquad f_{min} = q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Nyní upravíme součin

$$f_{max} f_{min} = \quad (q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}})(q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}) = q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Mají-li $f_{max} f_{min}$

- stejná znaménka, pak platí $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ a rovnice má jediný reálný kořen (průsečík s osou x), který je buď v intervalu $(-\infty;-\sqrt{-\frac{p}{3}})$, nebo v intervalu $(\sqrt{-\frac{p}{3}};+\infty)$.

- různá znaménka, tj. $f_{max}>0$ a $f_{min}<0$, pak platí $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ a daná rovnice má tři reálné kořeny, protože znaménka funkce v koncových či extrémních bodech mají hodnoty:

$f(-\infty)$	f_{max}	f_{min}	$f(+\infty)$
-	+	-	+

V případě $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$ má rovnice jeden dvojnásobný kořen $x=\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ a jeden jednoduchý kořen $x=\frac{3q}{p}$, kde $p<0$.

Je-li $p>0$, pak $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ platí pro libovolné q.

Je-li $p=0$ a $q\neq 0$, má rovnice $x^3+q=0$ právě jeden reálný kořen, tj. $x=\sqrt[3]{-q}$.

Je-li $p=q=0$, má rovnice tvar $x^3=0$, a tudíž jeden trojnásobný kořen $x=0$.

Všechny výsledky lze shrnout do přehledné tabulky, viz Tab. 2:

	$x^3 + pq + q = 0$
$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$	Jeden reálný kořen a dva komplexně sdružené kořeny.
$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$	Tři reálné různé kořeny.
$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$	Tři reálné kořeny, mezi nimiž je vícenásobný kořen.

Tab. 2: Kořeny kubické rovnice v závislosti na diskriminantu

Příklad

Zadání: Pomocí vlastností funkcí určete, jakého typu jsou kořeny rovnice $2x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$, případně vypočítejte jejich hodnoty.

Řešení: Pomocí lokálních extrémů funkce $f(\overline{x}) = x^3 + px + q$ určíme typy kořenů rovnice $2x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$.

Nejprve si však danou rovnici musíme převést do redukovaného tvaru (pomocí substituce): $y = -\frac{b}{3a} = y - \frac{-6}{3} = y + 2$

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 4(y+2) - 7 = 0 \to \; y^3 - 8y - 15 = 0$$

Z redukovaného tvaru rovnice vyčteme hodnoty: $p = -8$, $q = -15$. Z výše uvedeného textu je zřejmé, že má rovnice $x^3 + px + q = 0$ buď všechny tři kořeny reálné, nebo jeden reálný a dva komplexně sdružené.

Po zderivování funkce v redukovaném tvaru dostaneme: $f'(\overline{x}) = 3y^2 - 8$.

Jelikož je $p < 0$, má funkce maximum v bodě $x = -\sqrt{-\frac{-8}{3}} = -\sqrt{\frac{8}{3}}$ a minimum v bodě $x = \sqrt{-\frac{-8}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Po dosazení těchto hodnot do výrazu funkce $f(x)$, dostaneme:

$$f_{max} = q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} = -15 + \frac{16}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} < 0 \text{ a } f_{min} = q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} = -15 - \frac{16}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} < 0.$$

Nyní můžeme upravit součin:

$$f_{max} f_{min} = (q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}})(q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}) = q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} =$$

$$= (-15 - \frac{16}{3}\sqrt{\frac{8}{3}})(-15 + \frac{16}{3}\sqrt{\frac{8}{3}}) = (-15)^2 - \frac{2\,048}{27} = \frac{225}{4} - \frac{512}{27} = \frac{4\,027}{108}.$$

Jelikož mají f_{max}, f_{min} stejná znaménka, pak je diskriminant $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ a rovnice má jediný reálný kořen (průsečík s osou x) a 2 imaginární kořeny komplexně sdružené.

Pro jejich výpočet budeme používat Cardanovy vzorce (viz str. 16). Nejprve si určíme u, v:

$$u = \sqrt[3]{(-\frac{q}{2} + \sqrt{D})} = \sqrt[3]{(\frac{15}{2} + \sqrt{\frac{4027}{108}})} \doteq 2{,}387,$$

$$v = \sqrt[3]{(-\frac{q}{2} - \sqrt{D})} = \sqrt[3]{(\frac{15}{2} - \sqrt{\frac{4027}{108}})} \doteq 1{,}117.$$

Nyní hodnoty u, v dosadíme do vzorečků pro výpočet kořenů rovnice v redukovaném tvaru. Posledním krokem je samotný výpočet kořenů původní kubické rovnice, které získáme zpětným dosazením do substituce:

$$y_1 = u + v = 2{,}387 - 1{,}117 \doteq 3{,}504 \qquad \rightarrow \; x_1 \doteq 5{,}504$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} i\sqrt{3} \doteq -\frac{3{,}504}{2} + \frac{1{,}27}{2} i\sqrt{3} \doteq -1{,}752 + 0{,}635 i\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \; x_2 \doteq 0{,}248 + 0{,}635 i\sqrt{3}$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}i\sqrt{3} \doteq -\frac{3{,}504}{2} - \frac{1{,}27}{2}i\sqrt{3} \doteq -1{,}752 - 0{,}635i\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \; x_3 \doteq 0{,}248 - 0{,}635\mathrm{i}\sqrt{3}$$

Vše bychom měli ještě ověřit zkouškou.

$L_{(5{,}504)} = 5{,}504^3 - 6.5{,}504^2 + 4.5{,}504 - 7 \doteq \ldots \doteq 0$ $\qquad P_{(5{,}504)} = 0$

$L_{(0{,}248+0{,}635\mathrm{i}\sqrt{3})} = (0{,}248 + 0{,}635\mathrm{i}\sqrt{3})^3 - 6.(0{,}248 + 0{,}635\mathrm{i}\sqrt{3})^2 + 4.(0{,}248 + 0{,}635\mathrm{i}\sqrt{3}) -$
$- 7 \doteq \ldots \doteq 0$

$P_{(0{,}248+0{,}635\mathrm{i}\sqrt{3})} = 0$

$L_{(0{,}248-0{,}635\mathrm{i}\sqrt{3})} = (0{,}248 - 0{,}635\mathrm{i}\sqrt{3})^3 - 6.(0{,}248 - 0{,}635\mathrm{i}\sqrt{3})^2 + 4.(0{,}248 - 0{,}635\mathrm{i}\sqrt{3}) -$
$- 7 \doteq \ldots \doteq 0$

$P_{(0{,}248-0{,}635\mathrm{i}\sqrt{3})} = 0$

Odpověď: Rovnice $2x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$ má 1 reálný kořen a 2 imaginární kořeny komplexně sdružené. Jejich hodnoty jsou $x_1 \doteq 5{,}504$, $x_2 \doteq 0{,}248 + 0{,}635\mathrm{i}\sqrt{3}$ a $x_3 \doteq 0{,}248 - 0{,}635\mathrm{i}\sqrt{3}$.

2.4 Grafické řešení rovnic

Nejprve sestrojíme grafy reálných funkcí f, g reálné proměnné x v pravoúhlé soustavě souřadnic $(0; x, y)$. Pak x-ové souřadnice průniků obou grafů představují ***reálné kořeny*** rovnice $f(x) = g(x)$.

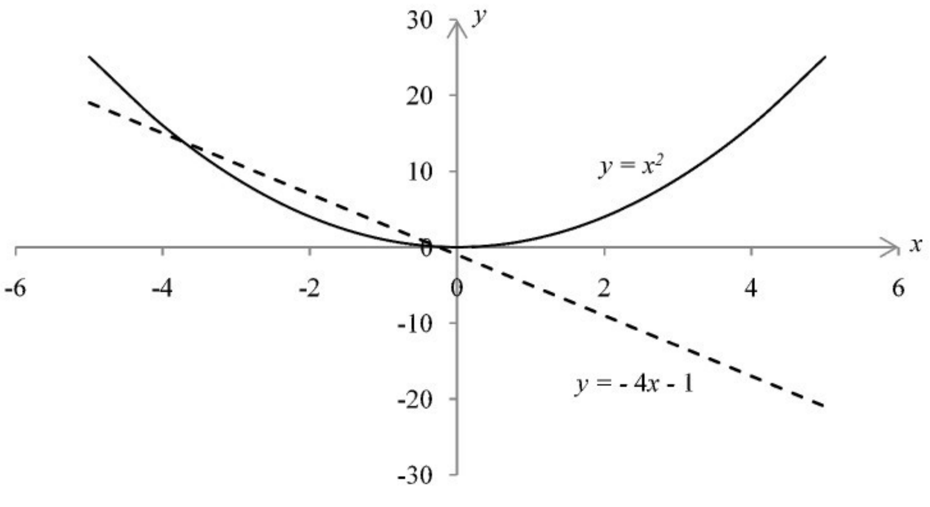
Tato metoda je velmi užitečná hlavně tehdy, nedokážeme-li danou rovnice řešit početně a potřebujeme-li získat přibližnou hodnotu reálných kořenů rovnice.

Nespornou výhodou je, že lze tuto metodu použít i pro řešení rovnic vyššího stupně, a to tak, že danou rovnici opět rozložíme na dvě funkce, u nichž bez problémů umíme určit jejich průběh (viz následující příklady).

Příklad

<u>Zadání:</u> Graficky řešte rovnici $x^2 + 4x + 1 = 0$.

<u>Řešení:</u> Danou rovnici upravíme na tvar $x^2 = -4x - 1$ a sestrojíme grafy funkcí $y = x^2$ a $y = -4x - 1$, viz Obr. 1. Poté vyčteme x-ové souřadnice společných bodů a nazveme je kořeny dané rovnice.



Obr. 1: Grafy $y = x^2$ a $y = -4x - 1$

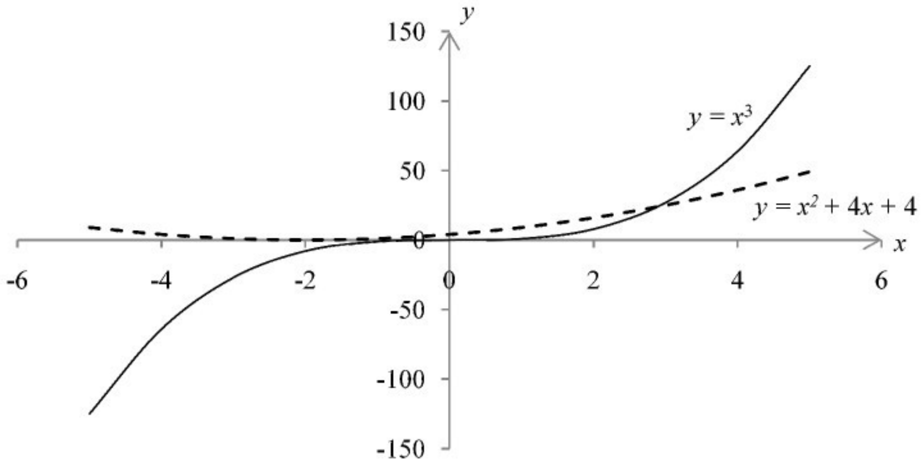
Z daného obrázku je zřejmé, že kořeny dané kvadratické rovnice jsou x-ové souřadnice průniků obou grafů a jsou přibližně $x_1 \doteq -0{,}3$ a $x_2 \doteq -3{,}7$.

Odpověď: Kořeny rovnice $x^2 + 4x + 1 = 0$ jsou $x_1 \doteq -0{,}3$ a $x_2 \doteq -3{,}7$.

Příklad

Zadání: Řešte rovnici $x^3 - x^2 - 4x - 4 = 0$

Řešení: Obdobně jako v minulém příkladě si nejprve danou rovnici upravíme na tvar $x^3 = x^2 + 4x + 4$ a sestrojíme průběhy funkcí $y = x^3$ a $y = x^2 + 4x + 4$. Řešením původní rovnice jsou x-ové souřadnice průsečíků, viz Obr. 2.



Obr. 2: Grafy $y = x^3$ a $y = x^2 + 4x + 4$

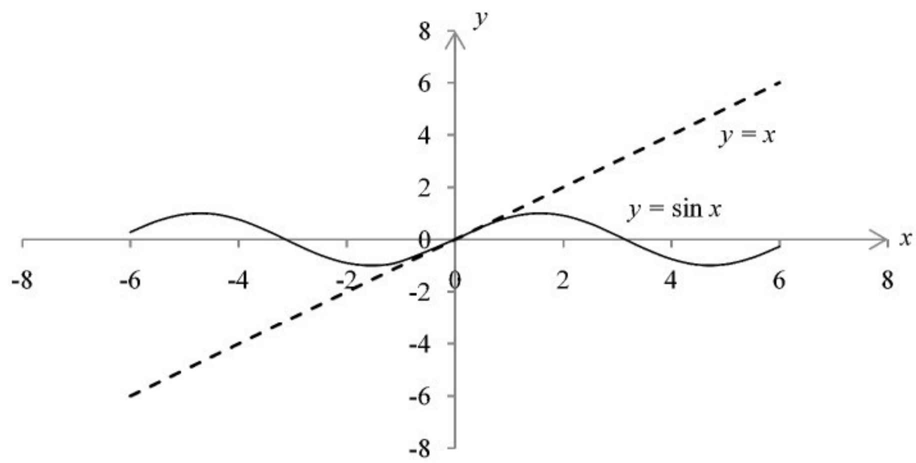
Kořenem původní rovnice je průsečík obou nových funkcí, respektive jeho x-ová souřadnice. V tomto případě je to $x = 3$.

Odpověď: Jediným kořenem rovnice $x^3 - x^2 - 4x - 4 = 0$ je v **R** $x = 3$.

Příklad

Zadání: Řešte rovnici $\sin x - x = 0$.

Řešení: Řeší se podobně jako v minulém (předminulém) příkladě – rozdělením na dvě funkce. V tomto případě na $y = x$ a $y = \sin x$. Jejich průsečík je opět řešením zadané rovnice – viz Obr. 3.



Obr. 3: Grafy $y = x$ *a* $y = \sin x$

Z Obr. 3 je vidět, že obě nové funkce se protínají pouze v jednou bodě – a to v počátku soustavy souřadnic. Jeho x-ová souřadnice a tudíž kořen původní rovnice je $x = 0$.

Odpověď: Řešením původní rovnice je $x = 0$.

Závěr

Velkou výhodou této metody je nejenom to, že hledané kořeny můžeme snadno a rychle vyčíst z grafů, ale také, že si procvičujeme právě průběhy funkcí.

2.5 Přibližné metody řešení rovnice

Ve velké části příkladů vycházejí při výpočtu kořenů polynomu celočíselné kořeny. To však neznamená, že všechny polynomy mají jenom tyto kořeny. Ty kořeny, které nejsou celočíselné, určujeme přibližnými metody pro jejich nalezení. Naším úkolem je zjistit (odhadnout) počet reálných kořenů, najít interval, ve kterém tyto kořeny leží, a posléze kořeny odseparovat, tj. nalézt systém intervalů, kde každý interval obsahuje právě jeden kořen polynomu.

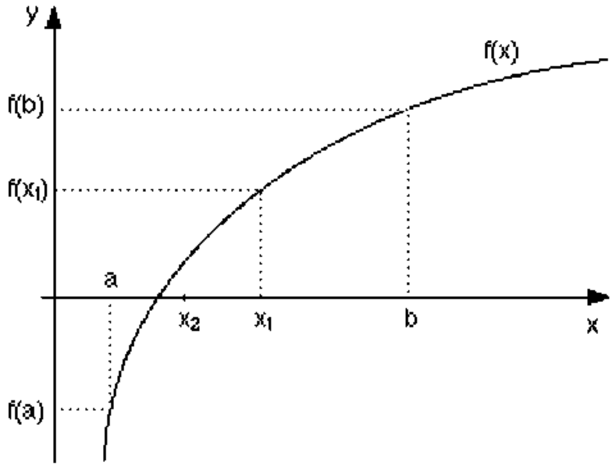
2.5.1 Metoda půlení intervalu

Předpokládejme, že právě jeden kořen rovnice $f(x)=0$ leží v intervalu $\langle a,b\rangle$, kde $f(a).f(b)<0$. Polohu kořene můžeme zpřesnit rozpůlením daného intervalu a zjištěním, ve které jeho části kořen ξ leží. To provedeme tak, že určíme funkční hodnoty obou krajních bodů i středu intervalu. Pak vyberme hodnotu s opačným znaménkem, než má středový bod a vytvoříme tak nový interval. Zmenšený interval, v němž leží kořen, můžeme znovu rozpůlit a tak pokračovat dále. Střed posledního sestrojeného intervalu nebo některý z jeho krajních bodů lze považovat za aproximaci kořene ξ. Přesný postup je popsán následující větou.

<u>Věta</u>: Nechť je funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$ a platí $f(a).f(b)<0$. Pak vytvořme posloupnost intervalů $\langle a_k,b_k\rangle$ a posloupnost bodu x_k, $k=0,1,2,\ldots$ takto:

1. Pro $k=0$ položíme $a_0=a$, $b_0=b$
2. Je-li definovaný interval $\langle a_k,b_k\rangle$, vypočteme $x_k=\dfrac{a_k+b_k}{2}$
3. Je-li $f(x)=0$, další interval už nevytváříme. Je-li $f(a_k).f(x_k)<0$, položíme $a_{k+1}=a_k$ a $b_{k+1}=x_k$, jinak položíme $a_{k+1}=x_k$ a $b_{k+1}=b_k$.

Vše je vidět na Obr. 4.



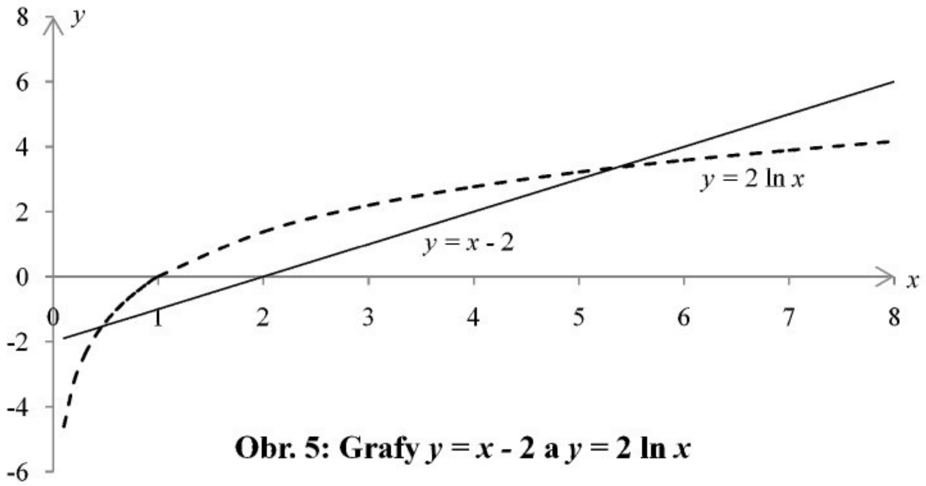
Obr. 4: Metoda půlení intervalu [17]

Jelikož je tento cyklus velmi zdlouhavý, hledali bychom přesný kořen velmi dlouho. Proto zjišťujeme odhad pro maximální možnou odchylku kořene. Pro tento odhad používáme vzorec $\varepsilon = \dfrac{b - a}{2}$.

Příklad

Zadání: Určete všechny kořeny rovnice $f(x) = x - 2\ln x - 2$ v intervalu $(0{,}1 ; 7)$ s maximální odchylkou $\varepsilon = 0{,}004$.

Řešení: Představu o počtu a přibližný odhad kořenů nám poskytne grafická metoda. Rozdělíme zadanou funkci na dvě, jejichž grafy lze snadno znázornit. Například: $f(x) = x - 2$ a $f(x) = 2\ln x$.



Obr. 5: Grafy $y = x - 2$ a $y = 2 \ln x$

Z Obr. 5 můžeme odhadnout, že má původní rovnice dva kořeny. Jeden kořen leží v intervalu $\langle 0{,}3\,;0{,}6\rangle$, druhý v intervalu $\langle 5\,;5{,}5\rangle$.

Nejprve budeme počítat kořen x_1, tzn. kořen ležící v intervalu $\langle 0{,}3\,;0{,}6\rangle$. Spočítáme funkční hodnoty obou krajních bodů: $f(a) \doteq 0{,}707945$ a $f(b) = -0{,}378348$ (stačí zjistit pouze znaménka těchto hodnot).

Dále spočítáme polovinu intervalu $\langle a,b\rangle$: $c = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{0{,}3+0{,}6}{2} = 0{,}45$ a její funkční hodnotu: $f(c) = 0{,}47015$.

Nyní hledáme tu polovinu intervalu, ve které dochází k znaménkové změně. Kraje této poloviny budou novou apoximací kořene. Opět rozpůlíme interval a celý proces opakujeme, dokud nenalezneme hledaný kořen.

Jelikož je tento cyklus příliš zdlouhavý, bude nám stačit najít přibližný kořen. Ten získáme jako polovinu posledního určeného intervalu, ke které přičteme odhad chyby – musíme však brát v úvahu pomínku ze zadání, tj. maximální odchylku $\varepsilon = 0{,}004$.

Pro přehlednost můžeme vše zaznamenat do tabulky – viz Tab. 3.

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
0,3	0,45	0,6	+	+ 0,047 015	-	
0,45	0,525	0,6	+	- 0,186 285	-	
0,45	0,487 5	0,525	+	- 0,075 570	-	
0,45	0,468 75	0,487 5	+	- 0,015 878	-	
0,45	0,459 375	0,468 75	+	+ 0,015 158	-	0,009 375
0,459 375	0,464 062 5	0,468 75	+	- 0,000 465	-	0,004 68
0,459 375	0,461 718 75	0,464 062 5	+	+ 0,007 317	-	0,002 34

Tab. 3: Výpočet kořene x_1 pomocí metody půlení intervalu.

Z Tab. 3 je zřejmé, že kořen z intervalu $\langle 0{,}3\,;0{,}6\rangle$ má přibližnou hodnotu $x_1 = 0{,}4617 \pm 0{,}002$.

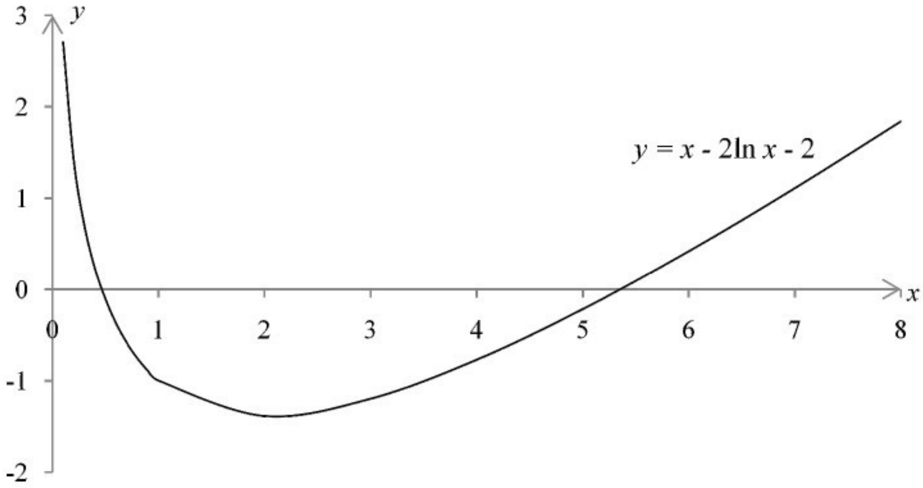
Obdobně spočítáme i kořen x_2, tzn. kořen z intervalu $\langle 5\,;5{,}5\rangle$. Vše opět shrnume do přehledné tabulky, viz Tab. 4.

a	$c = \frac{a+b}{2}$	b	$f(a)$	$f(c)$	$f(b)$	$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$
5	5,25	5,5	-	- 0,066 456	+	
5,25	5,375	5,5	-	+ 0,011 482	+	
5,25	5,312 5	5,375	-	- 0,027 625	+	
5,312 5	5,343 75	5,375	-	- 0,008 105	+	
5,343 75	5,359 375	5,375	-	+ 0,001 680	+	0,015 625
5,343 75	5,351 562 5	5,359 375	-	- 0,003 214	+	0,007 812 5
5,351 562 5	5,355 468 75	5,359 375	-	- 0,000 767	+	0,003 9062 5

Tab. 4: Výpočet kořene x_2 pomocí metody půlení intervalu.

Z Tab. 4 můžeme vyčíst, že kořen z intervalu $\langle 5;5{,}5\rangle$ má přibližnou hodnotu $x_2 = 5{,}355 \pm 0{,}004$.

Na závěr můžeme ještě načrtnout graf celé rovnice $f(x) = x - 2\ln x - 2$, viz Obr. 6.

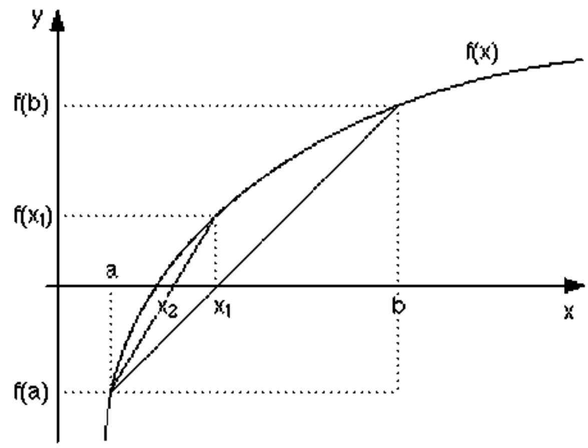


Obr. 6: Graf $y = x - 2\ln x - 2$

<u>Odpověď</u>: Rovnice $f(x) = x - 2\ln x - 2$ má v intervalu $(0{,}1;7)$ dva přibližné kořeny: $x_1 = 0{,}4617 \pm 0{,}002$ a $x_2 = 5{,}355 \pm 0{,}004$.

2.5.2 Metoda regula falsi (metoda tětiv)

Nechť je funkce $f(x) = 0$ spojitá na nějakém intervalu I. A známe dvě čísla a, $a \in I$ a b, $b \in I$, kde $a < b$, pro která platí $f(a).f(b) < 0$ (funkční hodnoty mají odlišná znaménka). Pak sečna spojující body $[a; f(a)]$, $[b; f(b)]$ protíná osu x v bodě x_1, pro který platí: $x_1 = \dfrac{a.f(b) - b.f(a)}{f(b) - f(a)}$ - viz Obr. 7.



Obr. 7: Metoda regula falsi (metoda tětiv) [18]

Jestliže je $f(x_1) = 0$, je x_1 kořenem dané rovnice. Je-li $f(x_1) \neq 0$, je buď $f(a)$ nebo $f(b)$ opačného znaménka než $f(x_1)$. Pak vezmeme body x_1, x_i, $i = 0,1$ takové, pro něž platí: $f(x_i).f(x_1) < 0$. Nyní opět sečna spojující body $[x_i; f(x_i)]$, $[x_1; f(x_1)]$ protíná osu x v bodě x_2, pro který platí: $x_2 = \dfrac{x_i f(x_1) - x_1 f(x_i)}{f(x_1) - f(x_i)}$, $i = 0,1,2,\ldots$.

Jelikož je celý cyklus opět velmi dlouhý, přičítáme k výpočtu kořene odhad odchylky. Tento odhad vypočítáme pomocí vzorce: $\varepsilon = |x_i - x_{i-1}|$.

Posloupnost čísel $a, b, x_1, x_2, \ldots$ vždy konverguje, většinou však velmi pomalu.

Příklad

Zadání: Pomocí metody regula falsi najděte přibližný kořen rovnice $x^2 - 15 = 0$ v intervalu $(3{,}5; 4)$ s maximální odchylkou $\varepsilon = 10^{-5}$.

Řešení: Nejprve určíme funkční hodnoty krajních bodů intervalu $(3{,}5; 4)$:

$$f(3{,}5) = -2{,}75 \text{ a } f(4) = 1.$$

Tyto hodnoty musí mít opačná znaménka.

Dále pak vypočítáme první aproximaci kořene pomocí vzorce $x_1 = \frac{a.f(b) - b.f(a)}{f(b) - f(a)}$ (a, b jsou krajní hodnoty intervalu) a funkční hodnotu $f(x_1)$:

$$x_1 = \frac{(3{,}5\,.\,1) - 4.(-2{,}75)}{1 + 2{,}75} \doteq 3{,}867\,,\ f(x_1) = -0{,}046\ 311\,.$$

Nyní budeme hledat takový interval, ve kterém dochází ke znaménkové změně a následně celý proces několikrát opakujeme:

Další aproximace kořene:

$$x_2 = \frac{4.(-0{,}046\,311) - 3{,}8671.1}{-0{,}046\,311 - 1} \doteq 3{,}872\,88$$

$$x_3 = \frac{4.(-0{,}000\,8) - 3{,}872\,88.1}{-0{,}000\,8 - 1} \doteq 3{,}872\,981\,6$$

$$x_4 = \frac{4.(-0{,}000\ 013\ 5) - 3{,}872\ 9816.1}{-0{,}000\ 0135 - 1} \doteq 3{,}872\,983\,3$$

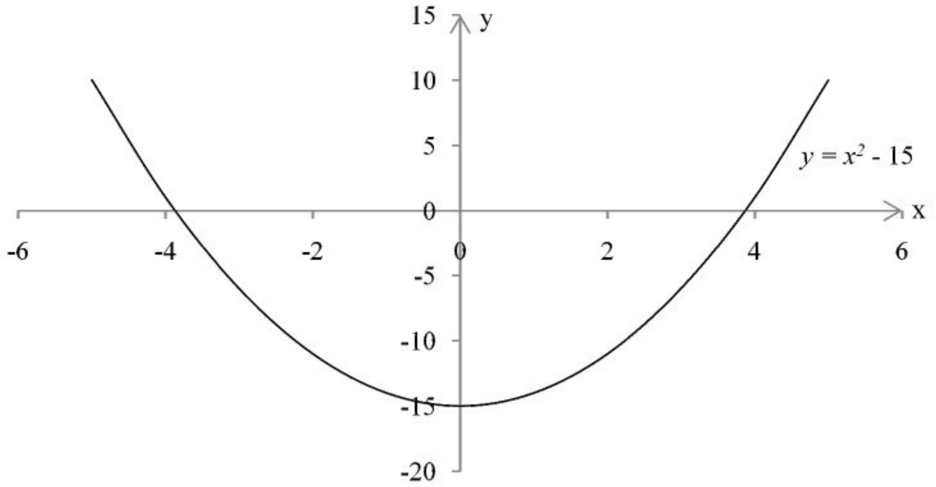
Takto bychom mohli pokračovat, až bychom dostali $f(x_i) = 0$. Jelikož je tento cyklus velmi zdlouhavý, bude nám stačit pouze přibližný kořen, ke kterému přičteme odchylku kořene.

Vše můžeme shrnout do přehledné tabulky – viz Tab. 5.

a	b	x	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$\varepsilon = \lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
3,5	4	3,867	-	+	- 0,046 311	
4	3,867	3,872 88	+	-	- 0,000 8	
4	3,872 88	3,872 981 6	+	-	- 0,000 013 5	0,000 1
4	3,872 981 6	3,872 983 3	+	-	- 0,000 000 36	0,000 001 7

Tab. 5: Výpočet přibližného kořene rovnice pomocí metody regula falsi.

Pro názornou ukázku ještě načrtneme průběh funkce – viz Obr. 8. Můžeme tak udělat alespoň vizuální kontrolu, zda jsme kořen našli správně.



Obr. 8: Graf $y = x^2 - 15$

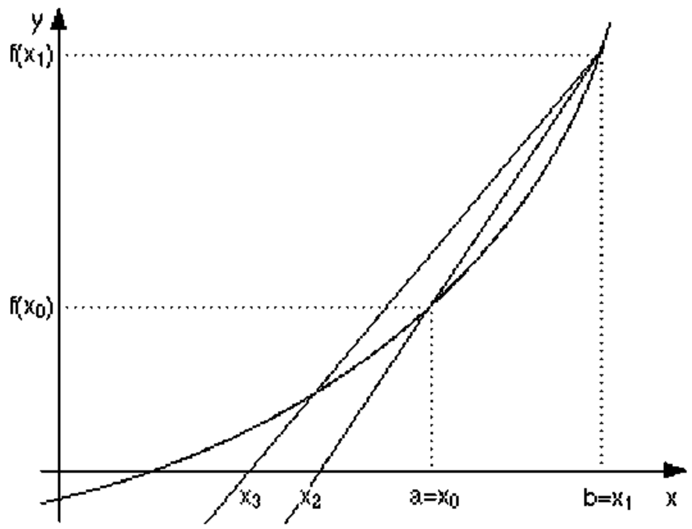
Z Obr. 8. vidíme, námi nalezený kořen zřejmě odpovídá, a že funkce $x^2 - 15 = 0$ má ještě jeden kořen. Jelikož se jedná o parabolu, bude jeho hodnota zřejmě přibližně $x_2 \doteq -3{,}8729833 \pm 1{,}7.10^{-6}$.

<u>Odpověď</u>: Rovnice $x^2 - 15 = 0$ má v intervalu $(3{,}5\,;4)$ kořen $x \doteq 3{,}8729833 \pm 1{,}7.10^{-6}$.

2.5.3 Metoda sečen

Tato metoda je zjednodušením předchozí metody. A to především v tom, že vynecháváme požadavek, aby funkce $f(x)$ měla různá znaménka v bodech, které používáme pro určení další aproximace, viz Obr. 9.

Využíváme rekurentní předpis: $x_{i+1} = \dfrac{x_{i-1} f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.



Obr. 9: Metoda sečen [19]

Odchylku kořene opět vypočítáme pomocí vzorce $\varepsilon = |x_i - x_{i-1}|$.

Oproti metodě regula falsi se v případě konvergence jedná o podstatné zlepšení výpočtu. Nevýhodou je, že při špatné volbě počátečních aproximací nemusí konvergovat.

Příklad

Zadání: Pomocí metody sečen najděte přibližný kořen rovnice $x^2 - 15 = 0$ v intervalu $\langle 3{,}5 ; 4 \rangle$ s maximální odchylkou kořene $\varepsilon = 10^{-5}$.

Řešení: Tento příklad se řeší velmi podobně, jako předchozí příklad (viz str. 38). Jediným rozdílem mezi těmito úlohami je, že se nemusejí hlídat různá znaménka v bodech, které nám slouží k aproximaci.

K určování aproximací budeme používat vzorec: $x_{i+1} = \dfrac{x_{i-1} f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$,

$i = 0, 1, 2, \ldots$. Po dosazení hodnot dostaneme:

$$x_1 = \frac{4 . 10 - 5 . 1}{10 - 1} \doteq 3{,}888$$

Celý cyklus můžeme několikrát opakovat:

$$x_2 = \frac{3{,}888 \,.\, 1 - 4 \,.\, 0{,}1165}{1 - 0{,}1165} \doteq 3{,}87323$$

$$x_3 = \frac{3{,}87323 \,.\, 0{,}1165 - 3{,}888 \,.\, 0{,}00191}{0{,}1165 - 0{,}00191} \doteq 3{,}8729838$$

Jelikož je hledání kořenu pouze přibližné, musíme také vypočítat odchylku, o kterou se daný kořen liší: $\varepsilon = |x_i - x_{i-1}| = |3{,}8729838 - 3{,}87323| = 0{,}0002462$.

Ze zadání víme, že odchylka musí mít maximální hodnotu $\varepsilon = 10^{-5}$, proto musíme počítat dál:

$$x_4 = \frac{3{,}8729838 \,.\, 0{,}00191 - 3{,}87323 \,.\, 0{,}0000035}{0{,}00191 - 0{,}0000035} \doteq 3{,}8729833$$

$$\varepsilon = |x_i - x_{i-1}| = |3{,}8729833 - 3{,}8729838| = 0{,}0000005$$

Poslední vypočítaný kořen s příslušnou odchylkou již vyhovuje podmínce ze zadání.

Výsledky a mezivýsledky výpočtu kořene jsou zaznamenány v Tab. 6.

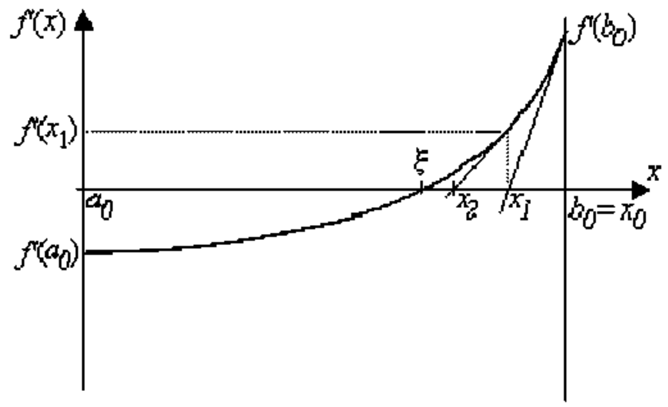
a	b	x	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	$\varepsilon = \|x_i - x_{i-1}\|$
4	5	3,888	+	+	+ 0,116 5	
3,888	4	3,873 23	+	+	+ 0,001 91	
3,873 23	3,888	3,872 983 8	+	+	+ 0,000 003 5	0,000 246 2
3,872 983 8	3,873 23	3,872 983 3	+	+	- 0,000 000 36	0,000 000 5

Tab. 6: Výpočet přibližného kořene rovnice pomocí metody sečen.

<u>Odpověď</u>: Rovnice $x^2 - 15 = 0$ v intervalu $(3{,}5\,;4)$ přibližný kořen $x \doteq 3{,}8729833 \pm 5.10^{-7}$.

2.5.4 Metoda tečen (Newtonova metoda)

Nechť je funkce $f(x) = 0$ spojitá na nějakém intervalu $<a_0, b_0>$, kde $a_0 < b_0$, pro kterou platí $f(a_0).f(b_0) < 0$ a má v tomto intervalu derivaci v každém bodě. Předpokládejme, že má daná funkce v tomto intervalu jediný kořen ξ - viz Obr. 10.



Obr. 10: Metoda tečen (Newtonova metoda) [20]

Bodem $[b_0, f(b_0)]$ vedeme tečnu ke křivce $f(x)$. Tam kde tato tečna protne osu *x*, se nachází bod x_1. Nyní opět povedeme tečnu ke křivce, tentokrát bodem $[x_1, f(x_1)]$. Místo, kde tato tečna protne osu *x*, nazveme bodem x_2. Body $x_1, x_2, \ldots$ se blíží kořenu ξ, proto postup opakujeme do té doby, než kořen nalezneme.

Obecně můžeme definovat formuli pro vyjádření x_{i+1} pomocí x_i:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\ i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Odchylka kořene je definována jako $\varepsilon = \left| x_i - x_{i-1} \right|$.

Tato metoda není vhodná, pokud zvolíme špatný koncový bod. Jestliže bychom použili koncový bod a_0, nedostali bychom přiblížení ke kořenu, ale naopak. Proto platí pravidlo: Jestliže jsou v intervalu $<a_0, b_0>$ derivace $f'(x)$

a $f''(x)$ různé od nuly a funkční hodnoty bodů $f(a_0)$, $f(b_0)$ mají různá znaménka, použijeme metodu tečen na ten koncový bod intervalu, ve kterém jsou znaménka $f(x)$ a $f''(x)$ stejná. Tím dostaneme posloupnost přibližných hodnot pro jediný kořen rovnice $f(x)=0$ ležící v intervalu $<a_0, b_0>$.

Příklad

Zadání: Pomocí metody tečen najděte přibližný kořen rovnice $x^4 + x - 1 = 0$ v intervalu $(0;1)$ s přesností $\varepsilon = 10^{-4}$.

Řešení: Nejprve určíme první derivaci funkce: $f'(x) = 4x^3 + 1$.

Poté zvolíme první aproximaci kořene: $x_1 = 0{,}5$ - střed intervalu $(0;1)$.

Druhou aproximaci vypočítáme pomocí vzorce $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$x_2 = 0{,}5 - \frac{(0{,}5)^4 + 0{,}5 - 1}{4.0{,}5^3 + 1} \doteq 0{,}792.$$

Třetí aproximaci určíme obdobně: $x_3 = 0{,}792 - \dfrac{(0{,}792)^4 + 0{,}792 - 1}{4.(0{,}792)^3 + 1} \doteq 0{,}729$.

Čtvrtá aproximace: $x_4 = 0{,}729 - \dfrac{(0{,}729)^4 + 0{,}729 - 1}{4.(0{,}729)^3 + 1} \doteq 0{,}724\,5$.

Dosazením do vzorce pro výpočet chyby vypočítáme odchylku od kořene: $\varepsilon = |x_i - x_{i-1}| = |0{,}724\,5 - 0{,}729| = 0{,}004\,5$. Vidíme, že chyba není menší než zadaná přesnost, proto počítáme dál.

Pátá aproximace: $x_5 = 0{,}724\,5 - \dfrac{(0{,}724\,5)^4 + 0{,}724\,5 - 1}{4.(0{,}724\,5)^3 + 1} \doteq 0{,}724\,49$.

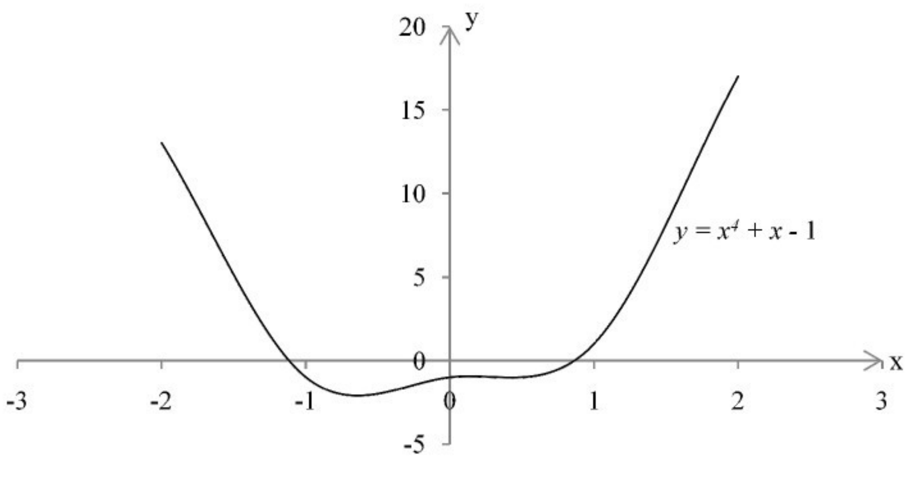
Opět vypočítáme odchylku: $\varepsilon = |x_i - x_{i-1}| = |0{,}72449 - 0{,}7245| = 5.10^{-5}$. Chyba už vyhovuje potřebné přesnosti, takže už dál nepočítáme.

Vše můžeme pro přehlednost shrnout do tabulky, viz Tab.7.

x_i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\varepsilon = \lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
x_1	0,5	- 0,437 5	1,5	0,792	
x_2	0,792	0,185 46	2,987 17	0,729	
x_3	0,729	0,011 429 5	2,549 682	0,724 5	0,004 5
x_4	0,724 5	0,000 020 3	2,521 161	0,724 49	0,000 05

Tab. 7: Výpočet přibližného kořene rovnice.

Na následujícím obrázku (Obr. 11) je vidět průběh funkce $x^4 + x - 1 = 0$ včetně průsečíků s osou *x*.



Obr. 11: Graf $y = x^4 + x - 1$

<u>Odpověď</u>: Přibližná hodnota kořene z intervalu $(0;1)$ rovnice $x^4 + x - 1 = 0$ je $x \doteq 0{,}724\,49 \pm 10^{-5}$.

2.5.5 Shrnutí

Uvedené metody jsou nejznámější přibližné metody nelineárních rovnic. Metodu půlení intervalu a metodu regula falsi můžeme použít pouze v případě jednoduchých kořenů. Jejich konvergence je poměrně pomalá. Metodu sečen už můžeme použít u vícenásobných kořenů a konvergence je většinou rychlejší než u předešlých dvou metod, ale při špatné volbě počátečních aproximací nemusí konvergovat. Poslední metoda (metoda tečen) konverguje nejrychleji, musíme však také dávat pozor na vhodnou volbu počáteční aproximace.

3 Špatně podmíněné polynomy

V této kapitole si vysvětlíme pojmy špatně podmíněné polynomy, koeficient podmíněnosti a číslo podmíněnosti. Naučíme se také, jak se dané pojmy hledají, jak se s nimi dál pracuje a k čemu nám slouží.

Problematikou hledání kořenů polynomů (řešením algebraických rovnic) se lidé zabývají už více než 4 tisíciletí. Přestože jsou algoritmy pro jejich určení známé, jsou v této části matematiky i oblasti, které nejsou zcela probádané. Jednou z nich jsou tzv. špatně podmíněné polynomy. Jedná se o polynomy, u nichž i malá změna některého z koeficientu vede k velké změně v jeho kořenech.

3.1 Hledání kořenů polynomu

Hledání kořenů polynomu můžeme provádět různými metodami: početně, graficky, pomocí funkcí a jejich vlastností nebo přibližnými metodami, mezi které patří například metoda sečen, metoda tečen, atd. Všechny tyto metody a mnohé další jsou popsány v předchozí kapitole.

3.2 Teorie

Nechť má polynom p stupně $n \geq 2$ s reálnými koeficienty tvaru

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

kořeny ξ_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Zkoumejme, jak se budou měnit jeho kořeny, pokud se koeficienty polynomu (1) mírně změní.

Nyní určeme kořeny polynomu

$$p(x) + \delta p(x) \equiv p(x) + \delta a_r x^r, \text{ kde } r = 0, 1, \ldots, n \ , \qquad (2)$$

tj. budeme měnit pouze koeficient u mocniny x^r, a to z a_r na $a_r + \delta a_r$.

Jestliže označíme $\delta\xi_i$ změnu kořene ξ_i při přechodu od polynomu (1) k polynomu (2), pak platí:

$$p(\xi_i + \delta\xi_i) + \delta a_r (\xi_i + \delta\xi_i)^r = 0 \tag{3}$$

Taylorův rozvoj funkce $p(x)$ v okolí bodu $x = \xi_i$ je

$$p(\xi_i + \delta\xi_i) = p(\xi_i) + p'(\xi_i)\delta\xi_i + \frac{p''(\xi_i)}{2!}(\delta\xi_i)^2 + \ldots \tag{4}$$

Protože z (3) plyne

$$p(\xi_i + \delta\xi_i) = -\delta a_r (\xi_i + \delta\xi_i)^r \cong -\delta a^r \xi_i^r \tag{5}$$

pro $\delta\xi_i$, které je mnohem menší než ξ_i (značíme $\delta\xi_i << \xi_i$) a $p(\xi_i) = 0$, lze po uvážení prvního nenulového členu a zanedbáním ostatních členů Taylorova rozvoje, psát:

(6)

- pro jednoduchý kořen ξ_i: $\delta\xi_i = -\dfrac{\xi_i^r}{p'(\xi_i)}\delta a_r$,

  kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a $r = 0, 1, \ldots, n$

- pro dvojnásobný kořen ξ_i: $(\delta\xi_i)^2 = -\dfrac{2\xi_i^r}{p''(\xi_i)}\delta a_r$, (7)

  protože $p'(\xi_i) = 0$ a kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a $r = 0, 1, \ldots, n$

- pro trojnásobný kořen ξ_i: $(\delta\xi_i)^3 = -\dfrac{3!\xi_i^r}{p'''(\xi_i)}\delta a_r$, (8)

  protože $p'(\xi_i) = 0$, $p''(\xi_i) = 0$

  a kde $i = 1, 2, \ldots, n$ a $r = 0, 1, \ldots, n$

- pro k-násobný kořen ξ_i: $(\delta\xi_i)^k = -\dfrac{k!\xi_i^r}{p^{(k)}(\xi_i)}\delta a_r$, (9)

  protože $p'(\xi_i) = 0$, $p''(\xi_i) = 0, \ldots, p^{(k-1)}(\xi_i) = 0$

a kde $i = 1, 2, \dots, n$ a $r = 0, 1, \dots, n$

Ze vztahu (9), který je zobecněním vzorců (6), (7) a (8) plyne, že kořen vyšší násobnosti je citlivější na změnu koeficientu.

Pokud u nějakého polynomu malá změna koeficientu způsobí mnohem větší změnu jeho kořenů, pak takový polynom nazýváme ***špatně podmíněným polynomem***.

3.3 Koeficient podmíněnosti

Koeficient podmíněnosti definujeme jako podíl relativní změny kořene $\xi_i (i = 1, 2, \dots, n)$ a relativní změny koeficientu $a_r (r = 0, 1, \dots, n)$. Jinými slovy je to podíl relativních změn na výstupu a na vstupu.

Značíme ho $k_{ir} = \dfrac{\frac{\delta \xi_i}{\xi_i}}{\frac{\delta a_r}{a_r}}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$ a $r = 0, 1, \dots, n$.

Pro snazší přehlednost můžeme uspořádat všechny koeficienty podmíněnosti do tabulky, která ukazuje vztah i- tého kořenu a r- tého koeficientu – viz následující příklady.

3.4 Číslo podmíněnosti

Maximum z absolutních hodnot všech koeficientů podmíněnosti definujeme jako ***číslo podmíněnosti*** polynomu.

Značíme ho $C_p = \max_{i,r} |k_{ir}|$.

Právě pomocí tohoto čísla určujeme ***špatně podmíněný polynom***. Špatně podmíněným polynomem je totiž každý polynom, jehož číslo podmíněnosti je o mnoho větší než 1, tj. $C_p >> 1$.

3.5 Shrnutí

U špatně podmíněných polynomů může i velmi malá změna koeficientu vyvolat velkou změnu u jeho kořenů. Proto si musíme dávat pozor při přibližném určování koeficientů, případně při zaokrouhlování.

4 Příklady špatně podmíněných polynomů

4.1 Příklad

Zadání: Pomocí programu Excel znázorněte průsečíky s osami x a uveďte průběhy následujících polynomů:

1) $p(x) = x^2 - 21x + 110$

2) $p_0^+(x) = x^2 - 21x + 110{,}1$ a $p_0^-(x) = x^2 - 21x + 109{,}9$

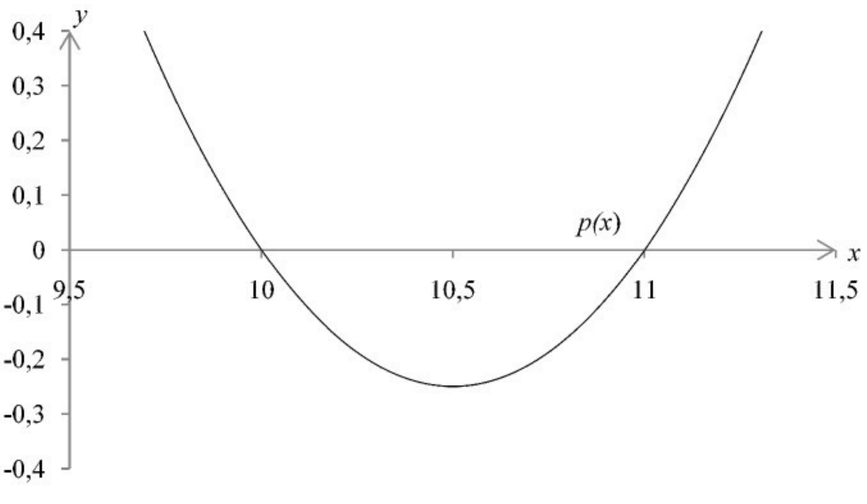
3) $p_1^+(x) = x^2 - 21{,}01x + 110$ a $p_1^-(x) = x^2 - 20{,}99x + 110$

4) $p_2^+(x) = 1{,}001x^2 - 21x + 110$ a $p_2^- = 0{,}999x^2 - 21x + 110$.

Dále zjistěte, zda je polynom $p(x) = x^2 - 21x + 110$ změněný o koeficienty $\delta a_r\,(r = 0{,}1{,}2)$ dobře či špatně podmíněný.

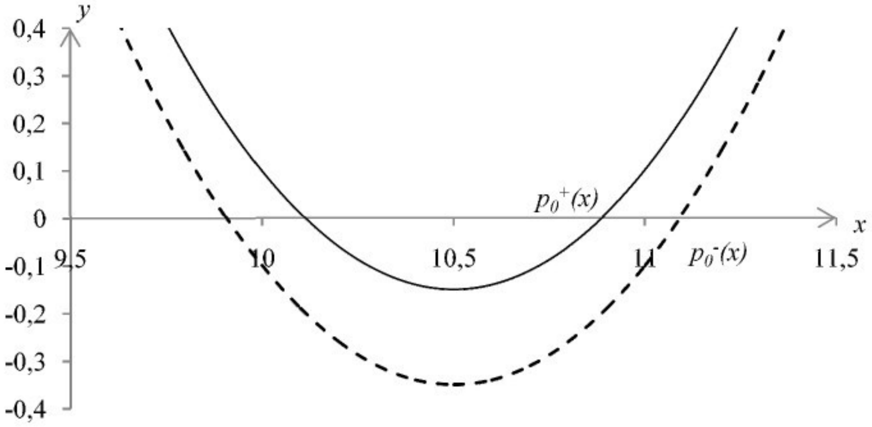
Řešení:

1) Jednoduchý polynom $p(x) = x^2 - 21x + 110$ s jeho kořeny $\xi_1 = 10$ a $\xi_2 = 11$ - viz Obr. 12.



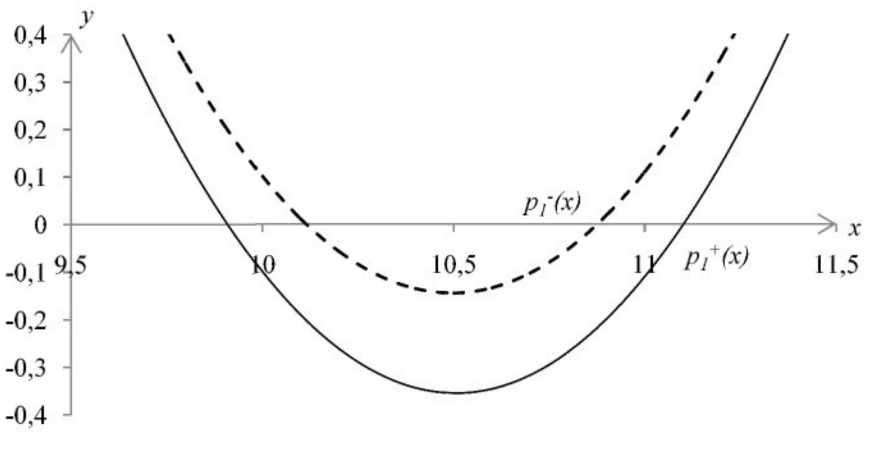
Obr. 12: Graf *p(x)* = *x*² - 21*x* + 110

2) Průběhy polynomů $p_0^+(x) = x^2 - 21x + 110{,}1$ a $p_0^-(x) = x^2 - 21x + 109{,}9$ jsou oproti původnímu polynomu $p(x) = x^2 - 21x + 110$ změněny o $\delta a_0 = \pm 0{,}1$. Na Obr. 13 jsou vidět jejich průběhy a průsečíky s osou x.



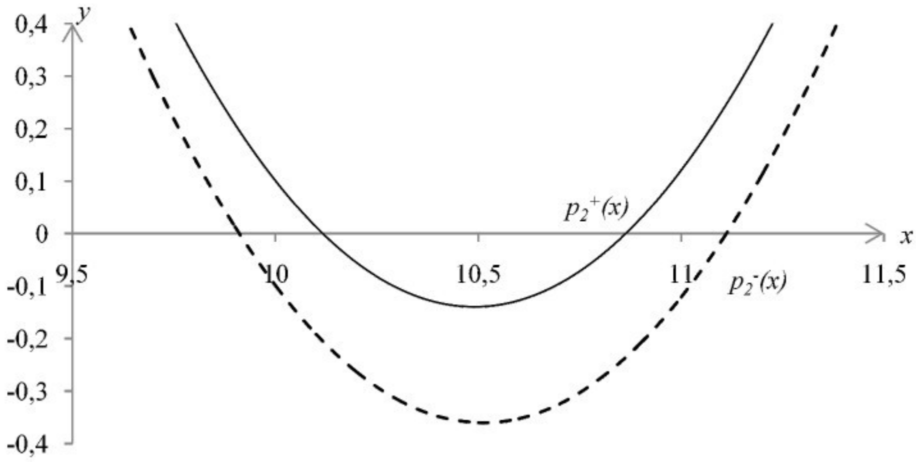
Obr. 13: Grafy $p_0^+(x) = x^2 - 21x + 110{,}1$ a $p_0^-(x) = x^2 - 21x + 109{,}9$

3) Na Obr. 14 jsou načrtnuty průběhy funkcí včetně průsečíků s osou x, $p_1^+(x) = x^2 - 21{,}01x + 110$ a $p_1^-(x) = x^2 - 20{,}99x + 110$, které se od $p(x) = x^2 - 21x + 110$ liší o $\delta a_1 = \pm 0{,}01$.



Obr. 14: Grafy $p_1^+(x) = x^2 - 21{,}01x + 110$ a $p_1^-(x) = x^2 - 20{,}99x + 110$

4) Znázornění průsečíků a průběhů funkcí $p_2^+(x) = 1{,}001x^2 - 21x + 110$ a $p_2^- = 0{,}999x^2 - 21x + 110$ změněných od původního polygonu $p(x) = x^2 - 21x + 110$ o $\delta a_2 = \pm 0{,}001$, viz Obr. 15.



Obr. 15: Grafy $p_2^+(x) = 1{,}001x^2 - 21x + 110$ a $p_2^-(x) = 0{,}999x^2 - 21x + 110$

Přibližné hodnoty původního i pozměněných polynomů jsou přehledně shrnuty do následující tabulky, viz Tab. 8. Z ní je zřejmé, že se tyto hodnoty liší od kořenů původního polynomu maximálně o $\pm 0{,}14$.

$p(x)$	ξ_1	ξ_2	$\delta\xi_1$	$\delta\xi_2$
$x^2 - 21x + 110$	10	11	-	-
$x^2 - 21x + 110{,}1$	10,112 7	10,887 3	0,112 7	- 0,112 7
$x^2 - 21x + 109{,}9$	9,908 4	11,091 6	- 0,091 6	0,091 6
$x^2 - 21{,}01x + 110$	9,909 2	11,100 8	0,090 8	- 0,100 8
$x^2 - 20{,}99x + 110$	10,114 2	10,875 8	- 0,114 2	0,124 2
$1{,}001x^2 - 21x + 110$	10,115 7	10,863 3	0,115 7	- 0,136 7
$0{,}999x^2 - 21x + 110$	9,909 9	11,111 1	- 0,090 1	0,111 1

Tab. 8: Hodnoty kořenů a změn kořenů pro $\delta a_0 = \pm 0{,}1$, $\delta a_1 = \pm 0{,}01$ a $\delta a_2 = \pm 0{,}001$.

Hodnoty koeficientů podmíněnosti $k_{ir} = \dfrac{\dfrac{\delta\xi_i}{\xi_i}}{\dfrac{\delta a_r}{a_r}}$, které jsou určeny jako podíl relativní změny kořene $\xi_i (i = 1,2,\ldots,n)$ a relativní změny koeficientu $a_r (r = 0,1,\ldots,n)$ jsou přehledně shrnuty do tabulky, viz Tab. 9.

i/r	0	1	2
1	- 11	21	- 10
2	10	- 21	11

Tab. 9: Koeficienty podmíněnosti k_{ir} pro polynom $p(x) = x^2 - 21x + 110$.

Číslo podmíněnosti C_p, které je určeno jako maximum z absolutních hodnot koeficientů podmíněnosti, je v našem příkladě $C_p = 21$. Jelikož je toto číslo mnohem větší než jedna, je zadaný polynom ***špatně podmíněný***.

Odpověď: Polynom $p(x) = x^2 - 21x + 110$ je špatně podmíněný.

4.2 Příklad

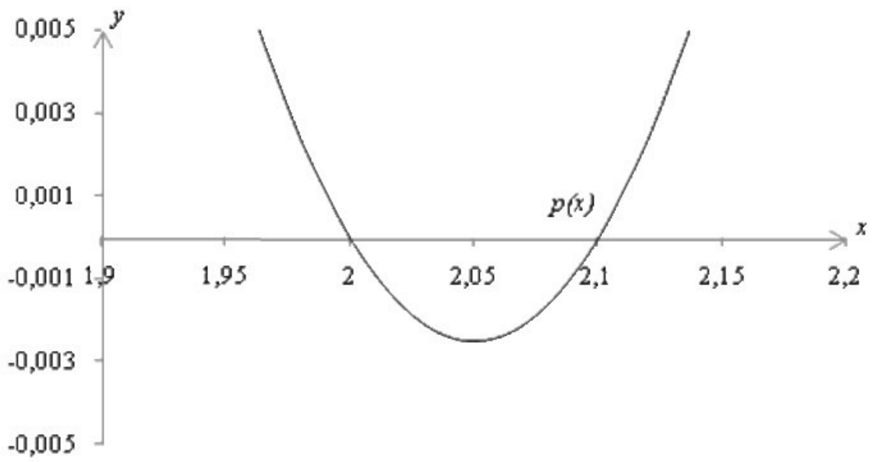
Zadání: Znázorněte průběhy následujících polynomů včetně průsečíků s osami *x* pomocí programu Excel:

1) $p(x) = x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$
2) $p_0^+(x) = x^2 - 4{,}1x + 4{,}201$ a $p_0^-(x) = x^2 - 4{,}1x + 4{,}199$
3) $p_1^+(x) = x^2 - 4{,}101x + 4{,}2$ a $p_1^-(x) = x^2 - 4{,}099x + 4{,}2$
4) $p_2^+(x) = 1{,}0001x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$ a $p_2^-(x) = 0{,}9999x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$.

Dále zjistěte, zda je polynom $p(x) = x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$ změněný o koeficienty $\delta a_r \, (r = 0{,}1{,}2)$ dobře či špatně podmíněný.

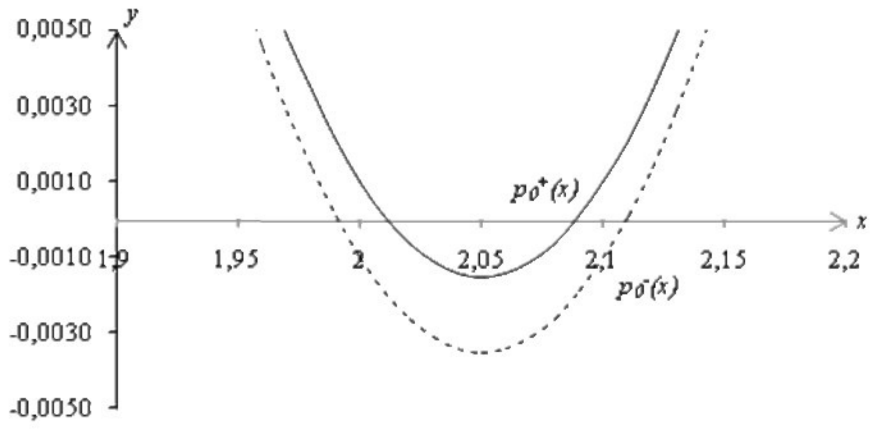
Řešení:

1) Mějme jednoduchý polynom $p(x) = x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$ s jeho kořeny $\xi_1 = 2$ a $\xi_2 = 2{,}1$, viz Obr. 16.



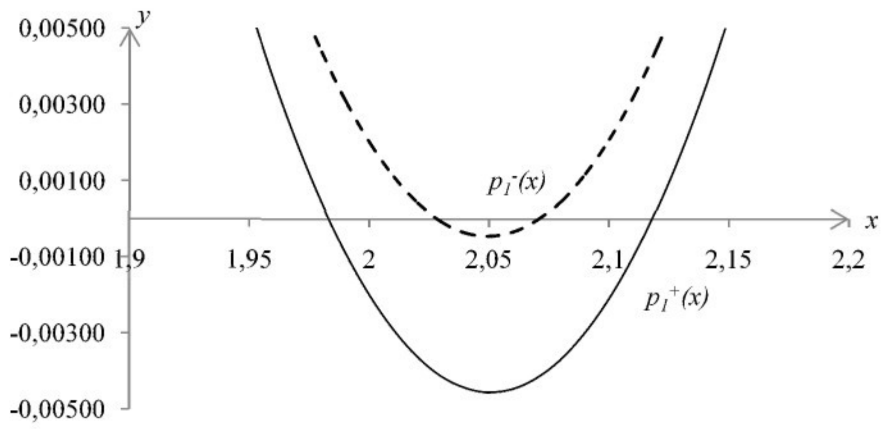
Obr. 16: Graf $p(x) = x^2 - 4.1x + 4.2$

2) Zobrazení průsečíků s osou x a průběhy funkcí $p_0^+(x) = x^2 - 4{,}1x + 4{,}201$ a $p_0^-(x) = x^2 - 4{,}1x + 4{,}199$, změněných oproti původní funkci $p(x) = x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$ o $\delta a_0 = \pm 10^{-3}$, viz Obr. 17.



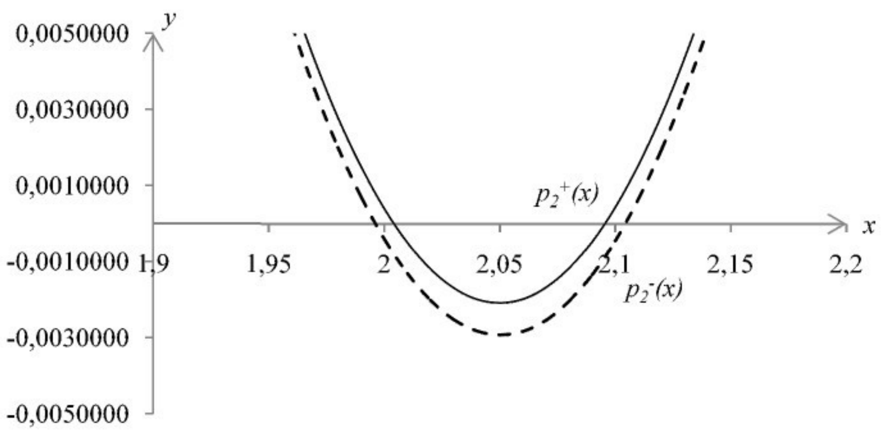
Obr. 17: Grafy $p_0^+(x) = x^2 - 4.1x + 4.201$ a $p_0^-(x) = x^2 - 4.1x + 4.199$

3) Oproti původnímu polynomu $p(x) = x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$ jsou průběhy polynomů $p_1^+(x) = x^2 - 4{,}101x + 4{,}2$ a $p_1^-(x) = x^2 - 4{,}099x + 4{,}2$ změněny o $\delta a_1 = \pm 10^{-3}$. Na Obr. 18 jsou vidět jejich průběhy a průsečíky s osou x.



Obr. 18: Grafy $p_1^+(x) = x^2 - 4{,}101x + 4{,}2$ a $p_1^-(x) = x^2 - 4{,}099x + 4{,}2$

4) Následující obrázek (Obr. 19) znázorňuje průsečíky s osou x a průběhy polygonů $p_2^+(x) = 1{,}0001x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$ a $p_2^-(x) = 0{,}9999x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$, lišících se od původního polygonu $p(x) = x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$ o $\delta a_2 = \pm 10^{-4}$.



Obr. 19: Grafy $p_2^+(x) = 1{,}0001x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$ a $p_2^-(x) = 0{,}9999x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$

V Tab. 10 jsou shrnuty přibližné hodnoty původního i pozměněných polynomů. V tomto příkladě se tyto hodnoty liší od kořenů původního polynomu maximálně o $\pm 0{,}03$.

$p(x)$	ξ_1	ξ_2	$\delta\xi_1$	$\delta\xi_2$
$x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$	2	2,1	-	-
$x^2 - 4{,}1x + 4{,}201$	2,011 3	2,088 7	0,011 3	- 0,011 3
$x^2 - 4{,}1x + 4{,}199$	1,990 8	2,109 2	- 0,009 2	0,009 2
$x^2 - 4{,}101x + 4{,}2$	1,983	2,118	- 0,017	0,018
$x^2 - 4{,}099x + 4{,}2$	2,028 3	2,070 7	0,028 3	- 0,029 3
$1{,}000\,1x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$	2,004 2	2,095 4	0,004 2	- 0,004 6
$0{,}999\,9x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$	1,996 2	2,104 2	- 0,003 8	0,004 2

Tab. 10: Hodnoty kořenů a změn kořenů pro $\delta a_0 = \pm 10^{-3}$, $\delta a_1 = \pm 10^{-3}$ a $\delta a_2 = \pm 10^{-4}$.

Další tabulka (Tab. 11) ukazuje přehled koeficientů podmíněnosti, které jsou vypočítány jako podíl relativní změny kořene $\xi_i (i = 1,2,\dots,n)$ a relativní změny koeficientu $a_r (r = 0,1,\dots,n)$.

i/r	0	1	2
1	- 21	41	- 20
2	20	- 41	21

Tab. 11: Koeficienty podmíněnosti k_{ir} pro polynom $p(x) = x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$.

Číslo podmíněnosti C_p je v daném příkladě $C_p = 41$. Jelikož je toto číslo opět mnohem větší než jedna, je zadaný polynom také ***špatně podmíněný***.

Odpověď: Polynom $p(x) = x^2 - 4{,}1x + 4{,}2$ je špatně podmíněný.

4.3 Příklad

Zadání: Opět pomocí programu Excel načrtněte průběhy funkcí, včetně průsečíků s osou x:

1) $p(x) = x^2 - 14{,}41x + 51{,}912$

2) $p_0^+(x) = x^2 - 14{,}41x + 51{,}91201$ a $p_0^-(x) = x^2 - 14{,}41x + 51{,}91199$

3) $p_1^+(x) = x^2 - 14{,}410001x + 51{,}912$ a $p_1^-(x) = x^2 - 14{,}409999x + 51{,}912$

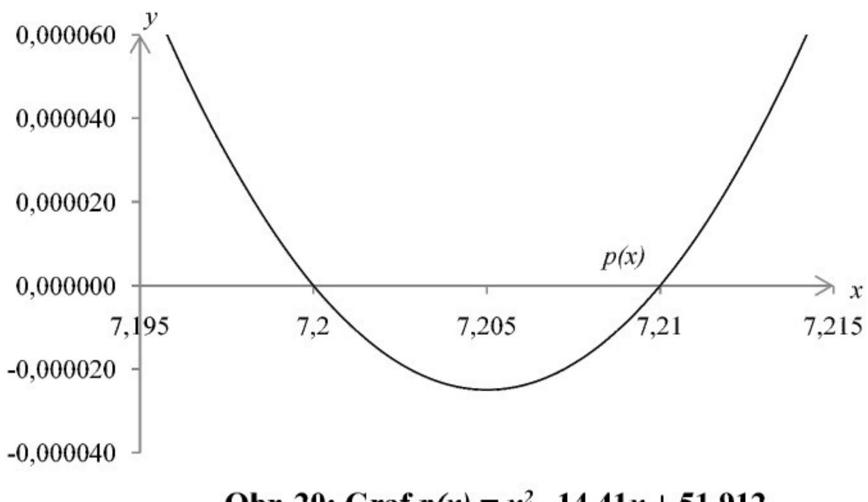
4) $p_2^+(x) = 1{,}0000001x^2 - 14{,}41x + 51{,}912$ a

   $p_2^-(x) = 0{,}9999999x^2 - 14{,}41x + 51{,}912$.

Dále zjistěte, zda je polynom $p(x) = x^2 - 14{,}41x + 51{,}912$ změněný o koeficienty $\delta a_r\ (r = 0{,}1{,}2)$ dobře či špatně podmíněný.

Řešení:

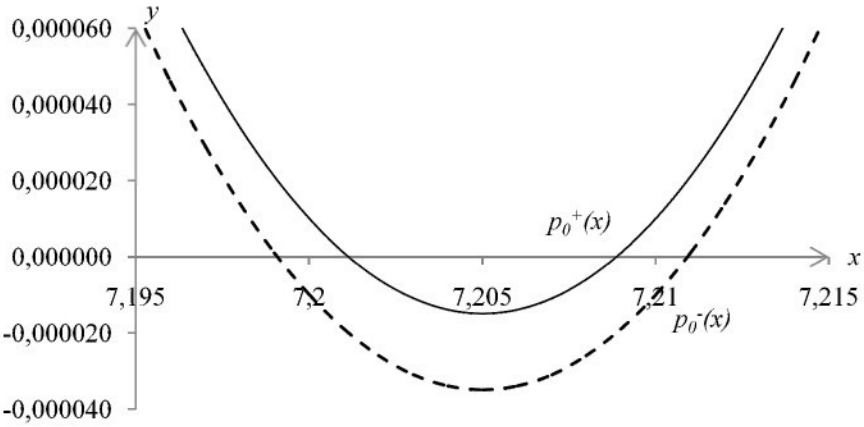
1) Uvažujme jednoduchý polynom $p(x) = x^2 - 14{,}41x + 51{,}912$. Jeho kořeny jsou $\xi_1 = 7{,}2$ a $\xi_2 = 7{,}21$, viz Obr. 20.



Obr. 20: Graf $p(x) = x^2 - 14{,}41x + 51{,}912$

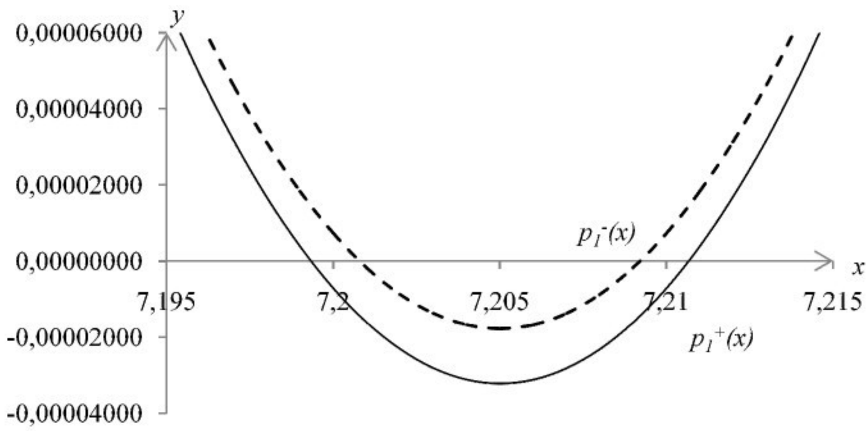
Nyní budeme zkoumat, jak se změní polynom a jeho kořeny, když budeme postupně obměňovat všechny jeho koeficienty. Tyto upravené polygony jsou graficky znázorněné na Obr. 21, Obr. 22 a Obr. 23.

2) Obr. 21 ukazuje polygon $p(x) = x^2 - 14{,}41x + 51{,}912$ změněný o $\delta a_0 = \pm 10^{-5}$.



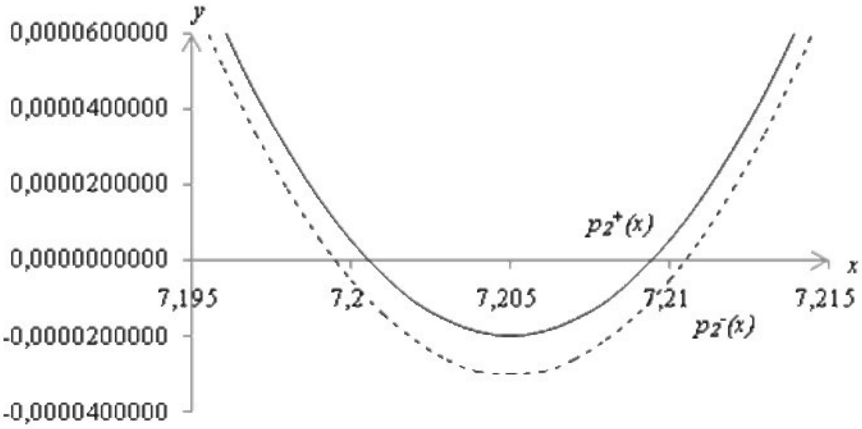
Obr. 21: Grafy $p_0^+(x) = x^2 - 14{,}41x + 51{,}91201$ a $p_0^-(x) = x^2 - 14{,}41x + 51{,}91199$

3) Původní polygon změněný o $\delta a_1 = \pm 10^{-6}$, viz Obr. 22.



Obr. 22: Grafy $p_1^+(x) = x^2 - 14{,}410001x + 51{,}912$ a $p_1^-(x) = x^2 - 14{,}409999x + 51{,}912$

4) Obr. 23 znázorňuje průběhy polygonů $p_2^+(x) = 1{,}0000001x^2 - 14{,}41x + 51{,}912$ a $p_2^-(x) = 0{,}9999999x^2 - 14{,}41x + 51{,}912$, lišících se od původního polygonu $p(x) = x^2 - 14{,}41x + 51{,}912$ o $\delta a_2 = \pm 10^{-7}$.



Obr. 23: Grafy $p_2^+(x) = 1{,}0000001x^2 - 14{,}41x + 51{,}912$ a $p_2^-(x) = 0{,}9999999x^2 - 14{,}41x + 51{,}912$

V následující tabulce jsou přehledně shrnuty přibližné hodnoty původního i pozměněných polynomů. Z Tab. 12 je zřejmé, že se tyto hodnoty liší od kořenů původního polynomu maximálně o $\pm 0{,}001$.

$p(x)$	ξ_1	ξ_2	$\delta\xi_1$	$\delta\xi_2$
x^2 - 14,41x + 51,912	7,2	7,21	-	-
x^2 - 14,41x + 51,912 01	7,201 1	7,208 9	0,001 1	- 0,001 1
x^2 - 14,41x + 51,911 99	7,199 1	7,210 9	- 0,000 9	0,000 9
x^2 - 14,410 001x + 51,912	7,199 3	7,210 7	- 0,000 7	0,000 7
x^2 - 14,409 999x + 51,912	7,200 8	7,209 2	0,000 8	- 0,000 8
1,000 000 1x^2 - 14,41x + 51,912	7,200 5	7,209 5	0,000 5	- 0,000 5
0,999 999 9x^2 - 14,41x + 51,912	7,199 5	7,210 5	- 0,000 5	0,000 5

Tab. 12: Hodnoty kořenů a změn kořenů pro $\delta a_0 = \pm 10^{-5}$, $\delta a_1 = \pm 10^{-6}$ a $\delta a_2 = \pm 10^{-7}$.

Koeficienty podmíněnosti k_{ir} jsou přehledně uvedeny v Tab. 13.

i/r	0	1	2
1	-721	1 441	-720
2	720	-1 441	721

Tab. 13: Koeficienty podmíněnosti k_{ir} pro polynom $p(x) = x^2 - 14{,}41x + 51{,}912$.

Číslo podmíněnosti C_p je v daném příkladě $C_p = 1441$. Jelikož je toto číslo opět o mnoho větší než jedna, jedná se i v tomto případě o ***špatně podmíněný*** polynom.

Odpověď: Polynom $p(x) = x^2 - 14{,}41x + 51{,}912$ je špatně podmíněný.

5 Závěr

Tato kapitola nastiňuje, kdy a jakým způsobem výše zmíněnou problematiku aplikovat při výuce matematiky na různých stupních škol.

Na základních školách se i přes rozvolnění učiva díky Rámcovému vzdělávacímu programu vyučují lineární rovnice, neboli algebraické rovnice prvního stupně, většinou v 8. třídě. Lépe řešeno, s jednoduchými lineárními rovnicemi se studenti setkávají už na prvním stupni ZŠ, avšak až v 8. třídě se učí ekvivalentní úpravy rovnic. Díky těmto úpravám pak mohou vyjádřit neznámou z rovnice – tento postup se nazývá početní metoda (viz str. 23)

Lineární rovnice by však mohli žáci ZŠ řešit i grafickou metodou (viz str. 30). Přestože většinou znají průběh jen několik speciálních tvarů lineárních funkcí, mohou složitější rovnice rozložit na dvě, u kterých už průběh znají, nebo lehce určí. Například by rovnici $4x+9=0$ mohli rozložit na $y=4x$ a $y=-9$. Průběhy těchto funkcí už nakreslit umí, nebo rychle a snadno určí. Potom už vyčtou z grafu x-ovou hodnotu jejich průniku neboli řešení dané lineární rovnice.

I když se kvadratické rovnice většinou na základních školách nevyučují (nebo jen výjimečně, třeba na seminářích z matematiky), setkávají se žáci 9. ročníků s kvadratickou funkcí $y=ax^2$, $a\in \mathbf{R}$, $a\neq 0$. Znají-li její průběh, transformace této funkce vytvoří nejčastěji pomocí tabulky hodnot. Proto by pro bystřejší a zkoumavější žáky neměl být problém sestrojit grafy jednodušších kvadratických rovnic, např. $x^2-4=0$, $4x^2+7=0$, $2x^2-x=0$. Opět by tyto rovnice mohli rozložit na dvě funkce, u kterých by neměli problém sestrojit jejich grafy, a pak by pouze vyčetli x-ovou hodnotu jejich průniku. S malou nápovědou by si s těmito rovnicemi měl poradit i zbytek třídy.

V prvních ročnících středních škol se studenti setkávají s kvadratickou rovnicí, kterou většinou řeší buď pomocí diskriminantu (viz str. 10), nebo pomocí Viètových vzorců (viz str. 11). Oba tyto způsoby se řadí do početní metody řešení kvadratických rovnic. Tyto rovnice se však dají řešit i graficky. U grafického znázornění např. rovnice $x^2 - 6x + 5 = 0$ si mohou studenti vybrat, zda chtějí kořeny vypočítat pomocí zmíněného diskriminantu či Viètových vzorců, nebo si tuto rovnici rozdělit na dvě funkce, např. $y = x^2$ a $y = 6x - 5$, a určit x-ové hodnoty jejich průniků. Když budou znát kořeny původní rovnice, mohou pak bez problémů načrtnout celou funkci $y = x^2 - 6x + 5$.

U tohoto tematického celku bychom se také mohli lehce zmínit o teorii špatně podmíněných polynomů (viz str. 47), aby si studenti dávali větší pozor při zaokrouhlování kořenů kvadratických rovnic a věděli tak, že i malá změna koeficientu může znamenat velkou změnu v řešení a obráceně. Dále by se mohlo pro názornost uvést několik příkladů s grafickým řešením.

Ve druhých ročnících gymnázií se téměř polovinu školního roku probírají různé typy rovnic, např. logaritmické, exponenciální, goniometrické, cyklometrické či hyperbolické. Všechny tyto typy se řeší početně, lehčí příklady se však mohou pro názornost řešit i graficky – např. $y = \sin 2x$, $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$. Po probrání těchto rovnic se dá pro zpestření navázat ukázkou grafického řešení obtížnějších rovnic – např. $\sin x - x = 0$, $x^2 - \log x = 0$ či $y = \cos x - 2^x = 0$. U těchto příkladů se grafické řešení přímo nabízí. Studenti by měli sami přijít na to, jak si s řešením těchto příkladů poradit, tzn. rozdělit si dané rovnice na dvě funkce, u kterých umí určit průběh. Řešením pak jsou x-ové hodnoty jejich průniků.

Ve třetím ročníku gymnázií se na seminářích z matematiky mohou studenti setkat s početním řešením rovnic vyššího stupně (viz str. 11), mezi které patří binomické rovnice (např. $x^5 + 10 = 0$), kubické rovnice (např. $x^3 + 2x - 4 = 0$) či reciproké rovnice (např. $2x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2 = 0$). Tyto rovnice však lze řešit také graficky, a to tak, že opět rozdělíme danou rovnici na dvě funkce, u kterých známe průběh. Hledaným řešením jsou zase x-ové hodnoty jejich průniků.

V posledním ročníku gymnázií se jako zpestření hodin po probrání derivací a kubických rovnic může studentům ukázat řešení těchto rovnic pomocí funkcí a jejich vlastností (viz str. 25).

Také se v tomto ročníku mohou vyučující okrajově zmínit o přibližných metodách řešení rovnic, mezi které patří Metoda půlení intervalů (viz str. 33), Metoda regula falsi (viz str. 37), Metoda sečen (viz str. 40) či Metody tečen (viz str. 43). Všechny tyto metody slouží k najití neceločíselných kořenů rovnic.

6 Použitá literatura

Knižní zdroje:

[1] POLÁK, J.: *Přehled středoškolské matematiky*. 2 vydání. Státní pedagogické nakladatelství. Praha 1972. ISBN 14 – 192 – 79

[2] REKTORIS, K.: *Přehled užité matematiky I*. 5. vydání. Státní nakladatelství technické literatury. Praha 1988. ISBN 04 – 022 – 88 – 01

[3] REKTORIS, K.: *Přehled užité matematiky II*. 5. vydání. Státní nakladatelství technické literatury. Praha 1988. ISBN 04 – 022 – 88 – 02

[4] BARTSCH, H. J.: *Matematické vzorce*. 3. vydání. Mladá fronta. Praha 1 996. ISBN 80 – 204 – 0607 – 7

[5] SMIRNOV, V. I.: *Učebnice vyšší matematiky I*. 1. vydání. Nakladatelství československé akademie věd. Praha 1954. ISBN neuvedeno

[6] KOŘÍNEK, V.: *Základy algebry*. 2. vydání. Nakladatelství československé akademie věd. Praha 1956. ISBN neuvedeno

[7] ODVÁRKO, O. – CALDA, E. – ŠEDIVÝ, J. – ŽIDEK, S.: *Metody řešení matematických úloh*. 1. vydání. Státní pedagogické nakladatelství. Praha 1990. ISBN 80 – 04 – 20434 – 1

[8] MAŠKA, O.: *Řešené úlohy z matematiky*. 1. vydání. Státní nakladatelství technické literatury. Praha 1958. ISBN neuvedeno

Periodika, sborníky, příspěvky

[9] BITTNEROVÁ, D.: *Rovnice třetího stupně*. In: Sborník mezinárodní 27. Konference VŠTEZ – Matematika v inženýrském vzdělávání. Hejnice 2002

[10] ŠMEREK, M.: *Citlivost kořenů polynomů.* Učitel matematiky 2 (54). Jednota českých matematiků a fyziků. Praha 2005

[11] ŠMEREK, M.: *Metody řešení nelineárních rovnic.* In: XVIII. Mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu. Sborník příspěvků. VVŠ PV. Vyškov 2001

[12] ŠMEREK, M.: *Výpočet kořenů polynomu.* In: XIX. Mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu. Sborník příspěvků. VVŠ PV. Vyškov 2001

[13] ŠMEREK, M.: *Špatně podmíněné polynomy.* In: XX. Mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu. Sborník příspěvků. VVŠ PV. Vyškov 2002

[14] ŠMEREK, M.: *Citlivost polynomů a podmíněnost matic.* In XIX. Mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu. Sborník příspěvků. Vyškov 2003

Internetové zdroje

[15] KOCUR, P.: *Úvod do numerických metod* [online]. © 2000. Poslední revize neuvedena [citováno 3. 11. 2008]. Dostupné z: <http://www.kvd.zcu.cz/cz/materialy/numet/_numet.html #_Toc5011 78906>

[16] VOGEL, J.: *Základy algoritmizace a programování* [online]. Poslední revize neuvedena [citováno 5. 11. 2008]. Dostupné z: <http://www.fsid.cvut.cz/cz/U201/ZAPG6.htm>

[17] Autor neuveden, Citováno 7. 11. 2008. Dostupné z <http://vydra.troja.mff.cuni.cz/bobo/fyzika/num3/metoda puleniintervalu.gif>

[18] Autor neuveden, Citováno 7. 11. 2008. Dostupné z <http://vydra.troja.mff.cuni.cz/bobo/fyzika/num3/metoda regula falsi.gif>

[19] Autor neuveden, Citováno 7. 11. 2008. Dostupné z <http://vydra.troja.mff.cuni.cz/bobo/fyzika/num3/metoda
secen.gif>

[20] Autor neuveden, Citováno 7. 11. 2008. Dostupné z <http://www.fs.vsb.cz/books/ZaklInfSbirka/TEOROZ/
Image57.gif>