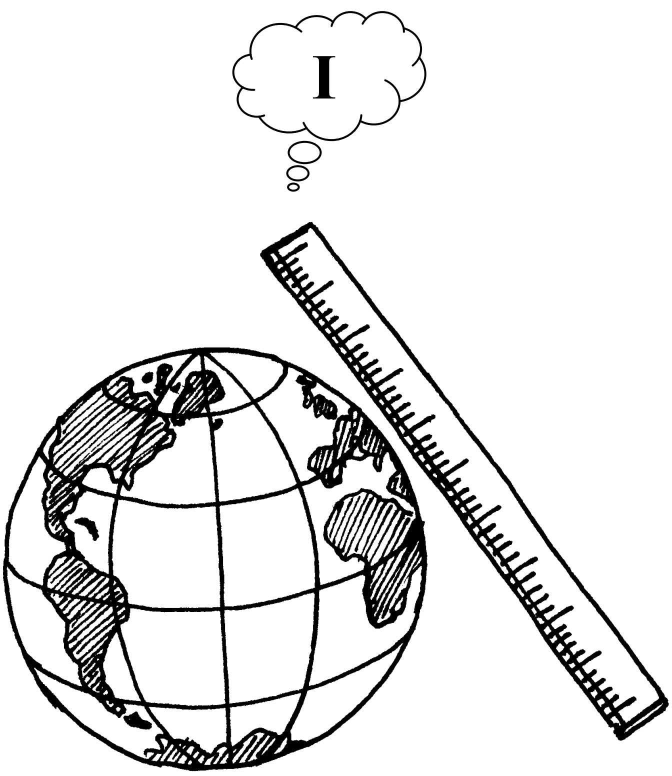
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

JAROSLAV PERNÝ

KAPITOLY

Z ELEMENTÁRNÍ GEOMETRIE



Liberec 2015

Recenzovala: doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.

ISBN 978-80-7494-205-1

OBSAH

PŘEDMLUVA

Tento učební text je určen studentům učitelství 1. stupně základní školy, především formy kombinované, případně distanční. Mohl by být jejich pomocníkem při studiu první části vysokoškolského kurzu předmětu Elementární geometrie. Jde o 3. upravené vydání.

Text vznikl proto, že v současné době je pro tento předmět obtížně dostupná literatura. Poslední obdobná publikace Základy elementární geometrie pro učitelství 1. stupně ZŠ autorů J. Kouřim, J. Hejl, J. Kučerová, F. Kuřina, O. Šedivý vyšla v roce 1985, která byla odrazovým můstkem pro předkládaný text. Některé části učiva geometrie jsou v publikacích M. Bělíka *Geometrie s didaktikou* (2005) a A. Stopenové *Základy matematiky 3 a 5* (2004, 2005).

V současné době je učivo geometrie nedílnou částí výuky matematiky již od 1. ročníku základní školy a hraje významnou úlohu při seznamování s okolním světem, při rozvíjení představivosti a poznávacích schopností žáků. Uplatňuje se zejména při vizuálním objasňování a zpřístupňování matematických pojmů, které jsou pro svou abstraktnost mladším žákům obtížně pochopitelné. Proto by měl být učitel 1. stupně na výuku geometrie dobře odborně a metodicky připraven. Je nutné, aby se uměl srozumitelně a odborně správně vyjadřovat, aby si bezpečně osvojil základní geometrické pojmy a vztahy mezi nimi, aby zdokonalil své dovednosti v rýsování a především, aby svým kladným přístupem žáky motivoval a vytvářel v nich pozitivní vztah ke geometrii.

V předkládaném učebním textu je v hrubých rysech zachováno řazení témat a pojmů podle průběhu kurzu Elementární geometrie, přičemž se využívá předchozích geometrických znalostí studentů. Pojmy jsou zaváděny pomocí definic, které jsou doplněny ilustrativními obrázky. Jsou popsány vztahy mezi pojmy a jejich základní vlastnosti, některé z nich jsou dokazovány, jiné se jen osvětlují. Využívá se množinového a logicko-matematického jazyka se střídmým použitím symboliky.

V textu jsou zařazeny řešené i neřešené příklady, na konci každé kapitoly jsou úlohy k procvičení, některé jsou citovány z výše zmíněné publikace kapitoly od J. Hejla, výsledky těchto úloh jsou v posledním článku.

Přeji hodně úspěchů ve studiu a rád přijmu všechny připomínky směřující ke zlepšení tohoto učebního textu.

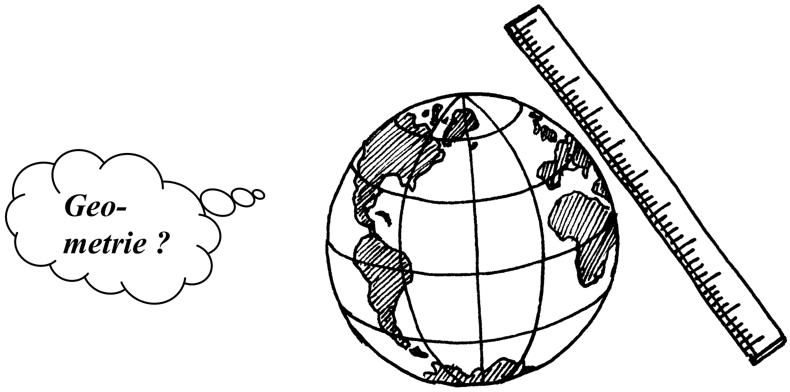
Autor

PS: Autor by se chtěl tímto omluvit, že některé obrázky nejsou v důsledku počítačového zpracování zcela korektní.

Použité symboly

Pojem	*symbol*
základní množina – prostor (rovina, přímka)	E_3 (E_2 , E_1)
bod X náleží množině M	$X \in$ M,
přímka p leží v rovině α	$p \subset \alpha$
bod B leží mezi body A, C	$B \ \mu\ A, C$
body A, B jsou různé	$A \neq B$
body A, B splývají	$A = B$
přímka AB	$\leftrightarrow AB$, *př.AB*
polopřímka AB	$\rightarrow AB$
polopřímka opačná k polopřímce AB	$\leftarrow AB$
úsečka AB	AB, *ús. AB*
úsečky AB a CD jsou shodné	$AB \cong CD$
podmnožina určená bodem A	$\mathcal{A}_1(A)$
rovina určená body A, B, C	$\leftrightarrow ABC$
polorovina určená přímkou p a bodem C	$\rightarrow pC$
sjednocení polopřímek CA a CB	$\rightarrow CA \cup \rightarrow CB$
průnik polopřímek CA a CB	$\rightarrow CA \cap \rightarrow CB$
konvexní úhel AVB	$\angle AVB$
nekonvexní úhel AVB	$nek\angle AVB$
trojúhelník ABC	ΔABC
n-úhelník $A_1A_2 \dots A_n$	$A_1A_2 \dots A_n$
kruh K se středem S a poloměrem r	$K(S; r)$
kružnice k se středem S a poloměrem r	$k(S; r)$
prostor určený body A, B, C, D	$\leftrightarrow ABCD$
poloprostor určený rovinou α a bodem K	$\rightarrow \alpha K$
přímky a, b jsou rovnoběžné	$a \parallel b$
přímky a, b jsou různoběžné	$a \times b$
přímky a, b jsou různoběžné kolmé	$a \perp b$
přímky p, q nemají společný bod	$p \cap q = \{\ \}$
přímky p, q mají společný bod	$p \cap q \neq \{\ \}$
δ-okolí bodu A v množině M	$O_M(A, \delta)$
bod A' je obrazem bodu A v zobrazení Z	$Z(A) = A'$
útvar U' je obrazem útvaru U v zobrazení Z	$Z(U) = U'$
zobrazení inverzní k zobrazení Z	Z^{-1}
skládání zobrazení Z_1 a Z_2	$Z_1 \circ Z_2$

1. ÚVOD



1.1 Úvodní poznámky

Geo - země, metrein - měření *(řec)*. Geometrie je tedy vlastně zeměměřictví, protože měla původně převážně experimentální charakter. Shromažďovala zkušenosti lidí při rozvíjení pracovních činností ve stavebnictví, mořeplavbě, zeměměřictví a postupně v dalších oborech. Rozvíjela se praktickými činnostmi např. při každoročním opakovaném vyměřování pozemků, jejichž hranice byly zničeny záplavami v Egyptě, Mezopotámii, či Indii.

Postupnou abstrakcí z konkrétních předmětů docházelo v lidské mysli ke vzniku prvních obecných geometrických pojmů, nejdříve z prostoru, který je obklopoval, jako kvádr, krychle, válec, později z plochy, jako obdélník, čtverec, kruh, kružnice, úsečka. Dalšími abstrakcemi založenými na myšlence neomezeného „prodlužování“ či „rozšiřování“ vznikaly další pojmy jako přímka, rovina, úhel, prostor, neomezeným „zmenšováním“ pak pojem bodu.

K řešení těchto praktických geometrických úloh se zpočátku užívala zvláštní izolovaná pravidla, která byla základem pozdější obecné teorie. Velký podíl na tom mají starořečtí filozofové a matematici, kteří při svém zkoumání postupně oddělují teoretický obsah geometrických návodů k řešení od jejich praktického použití. Vrcholem tohoto vývoje bylo ve 3. st. př. n. l. Eukleidovo dílo Stoicheia (Základy), ve kterém jsou shrnuty dosavadní matematické poznatky a které je prvním pokusem o systematickou, tzv. deduktivní výstavbu tehdy známé geometrie.

O kvalitě této systematické výstavby svědčí to, že teprve na konci 19. století byla nahrazena důsledněji deduktivně vybudovanou Hilbertovou axiomatickou výstavbou geometrie. Přispěla k tomu i tehdy nově vznikající matematická disciplina - teorie množin, o které se ukázalo, že může být nejobecnějším základem pro řadu matematických disciplin, mezi nimi i pro elementární geometrii.

Co se rozumí pod množinovým pojetím geometrie? I když není nyní množinová terminologie na 1. stupni základních škol příliš používána, přesto je geometrie většinou množinově chápána, jen jsou používány v komunikaci se žáky jiné termíny.

Především jsou jednotlivé geometrické útvary považovány za množiny bodů. Základní množinou je v souladu s naší zkušeností zpravidla množina všech bodů prostoru kolem nás, který bývá označován $\mathbf{E_3}$. V některých případech je vhodnější za základní množinu volit množinu všech bodů určité roviny, ta bývá označována $\mathbf{E_2}$, nebo množinu všech bodů určité přímky, označujeme $\mathbf{E_1}$.

Pro zjednodušení se pro vyjádření relací mezi body a útvary neužívá důsledně množinová terminologie jako *„je (není) prvkem“, „je (není) podmnožinou“*, ale běžnější terminologie jako *„A náleží p“, „p prochází A“, „p leží v α“.* Stejně tak nebývá množinové označení bodů jako prvků *(malými písmeny)* a dalších útvarů, ale zůstává tradiční označování *(body velkými písmeny, přímky malými písmeny, úhly řeckými písmeny apod.).*

1.2 Pojetí školské geometrie

Pojem **elementární geometrie** bývá v matematice chápán dvojím způsobem:
- jako historicky nejstarší část geometrie základních poznatků;
- jako geometrie základních poznatků pro mladší žáky.

Elementární geometrie je část matematiky, kde zrakové vnímání je dominantní.

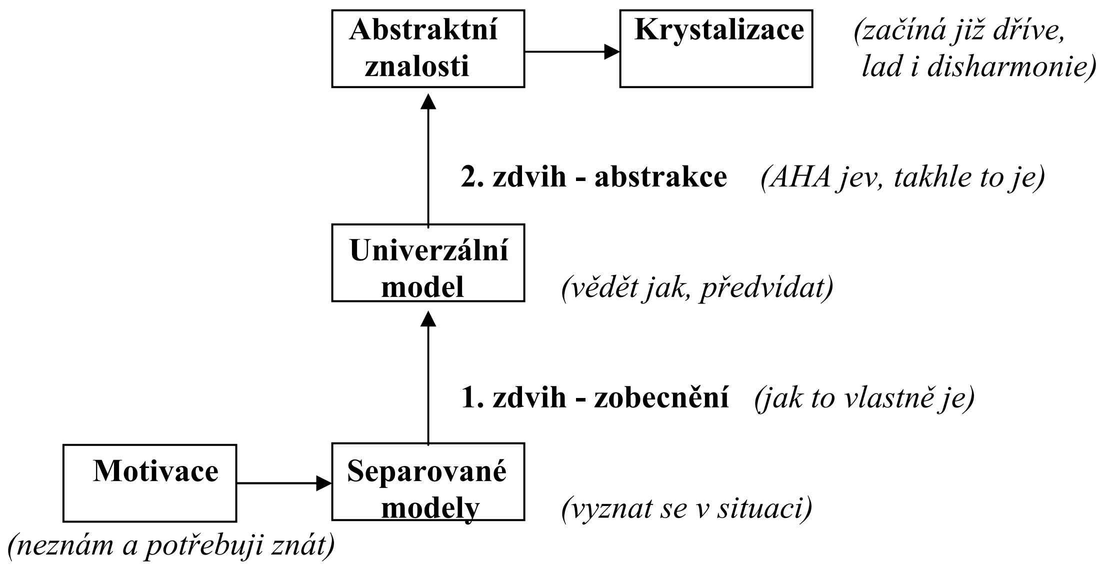
Cílem školské geometrie je naučit žáky
- orientovat se v prostoru a rovině,
- seznámit se s rovinnými a prostorovými útvary a jejich vlastnostmi,
- znázorňovat rovinné a prostorové útvary,
- užívat základní vztahy mezi útvary,
- řešit konstrukční a metrické geometrické úlohy,
- počítat obvody a obsahy obrazců, resp. objemy a povrchy těles.
- rozvíjet svou geometrickou a prostorovou představivost.

Při identifikaci geometrických útvarů a osvojování pojmů se uplatňují různé **úrovně myšlení**:
1) rozlišení podle tvaru, útvary jsou chápány jako celky;
2) rozlišení podle charakteristických vlastností, popis útvarů;
3) definice útvarů a jejich třídění podle znaků;
4) dedukce dalších vlastností útvarů;
5) abstraktní deduktivní soustava pojmů.

Úrovně 1) a 2) by měly být charakteristické pro žáky 1. stupně základní školy, úrovně 2) a 3) pro žáky 2. stupně základní školy, úroveň 4) pro studenty středních škol a úroveň 5) pro studenty vysokých škol.

Vytváření pojmu u žáka je podle prof. Hejného a prof. Mareše [v 03], dlouhodobý proces konstruování poznávacích struktur, který má určité fáze, a jehož jádrem jsou dva mentální kvalitativní zdvihy, ke kterým dochází vlivem okolních faktorů. Začíná motivací a vrcholí krystalizací a precizací.

Schematicky:



Struktura školské geometrie je chápána z různých hledisek. Např. hledisko

- ***obsahu***, jaký je objekt studia: útvary (*čtverec*), vztahy (*kolmost*), invarianty (*obsah*), transformace (*skládání*);
  jaká je metoda práce: syntetická, analytická, konstrukční, početní;
  jaký je prostor vnímání: trojrozměrný, dvojrozměrný.
- ***metodické***: činnosti - experimentování, řešení úloh;
  vědomosti a dovednosti - pravidla, algoritmy.
- ***psychologické***: zaměřené na paměť, představivost;
  tvořivost, kombinační vlastnosti;
  schopnost argumentace, abstrakce.

1.3 Pojetí vyučování geometrie na 1. stupni ZŠ

Dva přístupy k zavádění geometrických pojmů:

1. Základními pojmy jsou bod, přímka, rovina, prostor.
   Vychází se z jednoduchých pojmů ke složitějším, ale „jednoduchých“ matematicky.
2. Základními pojmy jsou krychle, čtverec, úsečka, bod.
   Vychází se z jednoduchých pojmů ke složitějším, ale „jednoduchých“ didakticky. Základem je pohyb v prostoru, ale „konečném“, proto nejdříve bližší pojmy ze zkušenosti dětí.

Obsah učiva geometrie na 1. stupni základní školy:

Pro ilustraci je zde předložen obsah učiva geometrie jednak v nejčastěji na školách používaném vzdělávacím programu Základní škola, jednak v nově navrhovaném Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání.

Vzdělávací program Základní škola:

1. r. Orientace v prostoru - skládanky a stavebnice,
   rovinné obrazce (čtverec, obdélník, kruh),
   tělesa (krychle, kvádr, válec, koule).

2. r. Rýsování a měření úseček - rovná a křivá čára, označení bodů a úseček
   měření délky úsečky,
   modelování těles.

3. r. Rovinné obrazce, obvod - rýsování přímek, polopřímek a úseček,
   rovnoběžky, různoběžky a jejich průsečík,
   rovinné obrazce a měření délek jejich stran, obvod obrazce.

4. r. Rovnoběžky, různoběžky, kolmice, kružnice - vzájemná poloha přímek v rovině, rýsování rovnoběžek a kolmic k dané přímce,
   kružnice, kruh, jejich střed a poloměr.
   Souměrnost - osa a rovina souměrnosti, souměrné útvary,
   poznat a nakreslit souměrný útvar.
   Obsah čtverce a obdélníku, síť kvádru a krychle - obsah obrazce ve čtvercové síti, jednotky obsahu,
   vymodelovat síť kvádru, krychle, pohledy na těleso.

5. r. Obrazce, tělesa - konstrukce obdélníku, čtverce, pravoúhl.trojúhelníku,
   určit obvod a obsah obdélníku a čtverce,
   povrch kvádru a krychle sečtením obsahu stěn,
   slovní úlohy na obsah, obvod a povrch.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

1. období Geometrie v rovině a prostoru –
(1.- 3.r.) rozeznat, vymodelovat a popsat základní rovinné útvary *(přímka, úsečka, kružnice, čtverec, obdélník, kruh, trojúhelník, mnohoúhelník),*
rozeznat, vymodelovat a popsat jednoduchá tělesa *(kvádr, krychle, jehlan, válec, kužel, koule),*
porovnávat velikost útvarů, měřit a odhadovat délku úsečky,
rozeznat a modelovat jednoduché souměrné útvary v rovině.

Nestandardní aplikační úlohy – řešit jednoduché neobvyklé praktické úlohy *(magické čtverce, prostorová představivost)*.

2. období Geometrie v rovině a prostoru –
(4.- 5.r.) narýsovat a znázornit základní rovinné útvary, užívat jednoduché konstrukce *(sestrojit kolmice a rovnoběžky)*,
sčítat a odčítat graficky úsečky, určit obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran *(jednotky délky a jejich převody)*,
určit obsah obrazce pomocí čtvercové sítě, jednotky obsahu,
určit osu souměrnosti útvaru a znázornit osově soum. útvar.

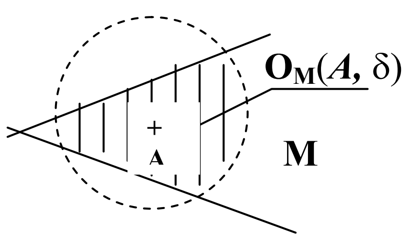
1.4 Poznámky k topologii

Při vašem dřívějším seznamování s geometrií jste poznali, že některé geometrické útvary jste mohli znázornit či vymodelovat „celé“, např. úsečku, čtverec, kvádr, zatímco u jiných můžeme znázornit či vymodelovat pouze jejich část, např. přímky, úhel. Z těchto důvodů pro potřeby následujícího textu a upřesnění některých pozdějších pojmů uvedeme nyní několik základních poznámek z oblasti topologie (geometrie zkoumající vzájemné vztahy polohy útvarů), jako pojem okolí bodu, útvar omezený a neomezený, hranice útvaru.

Def: (pomocná)

V množině **M** je dán bod A a úsečka délky δ. Množinu všech bodů $X \in \mathbf{M}$, pro které platí $AX \leq \delta$, nazýváme δ-okolí bodu A v množině **M.**
Značíme $\mathbf{O_M}(A, \delta)$.

množina **M** … úhel
okolí bodu … vyšrafovaná část



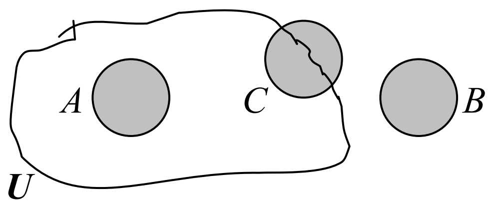
Def: (pomocná)

Útvar $\boldsymbol{U}$ se nazývá **omezený v množině M**, právě když existuje bod $A \in \mathbf{M}$ a takové jeho okolí $\mathbf{O_M}(\boldsymbol{A}, \delta)$, že útvar $\boldsymbol{U}$ je podmnožinou tohoto okolí. Útvar $\boldsymbol{U}$, který není omezený, se nazývá **neomezený**.

úsečka, čtverec, krychle - útvary omezené,
přímka, úhel - útvary neomezené.

Def: (pomocná)

a) Bod A se nazývá **vnitřní bod útvaru $\boldsymbol{U}$ v množině M**, právě když existuje okolí bodu A v množině **M**, které je podmnožinou útvaru U.
b) Bod B se nazývá **vnější bod útvaru $\boldsymbol{U}$ v množině M**, právě když existuje okolí bodu B v množině **M**, které má s útvarem $\boldsymbol{U}$ prázdný průnik.
c) Každý bod C množiny **M**, který není ani vnitřním, ani vnějším bodem útvaru $\boldsymbol{U}$ se nazývá **hraniční bod útvaru $\boldsymbol{U}$ v množině M**.
d) Množina všech hraničních (vnitřních, vnějších) bodů útvaru $\boldsymbol{U}$ v množině **M** se nazývá **hranice (vnitřek, vnějšek) útvaru $\boldsymbol{U}$ v množině M**.



Př.1 Určete hraniční body úsečky AB ($AB \subset \mathbf{E_1} \subset \mathbf{E_2}$), je-li základní množinou:
a) přímka $\mathbf{E_1}$ b) rovina $\mathbf{E_2}$

a) hraniční body … A, B, hranice … $\{A,B\}$;
b) hraniční body … všechny body úsečky AB, hranice ... celá úsečka AB.

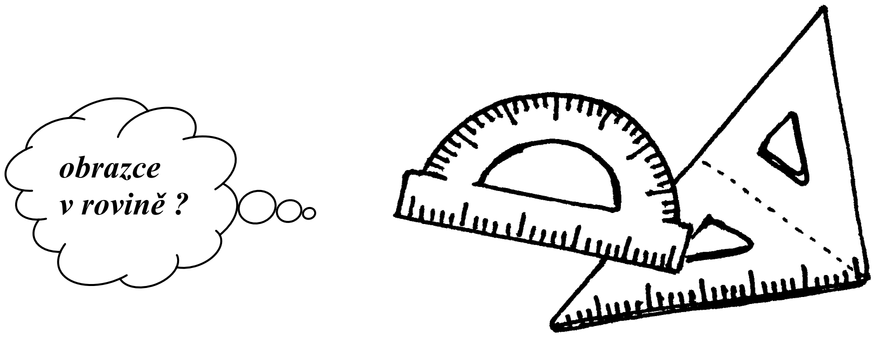
1.5 Úlohy k procvičení

1. Jaké geometrické útvary mohou být okolím bodu, jestliže základní množinou je a) polorovina, b) ostrý úhel ?

2. Uveďte rovinný útvar, který je v množině **M**
a) omezený, b) neomezený.
Za množinu **M** volte postupně rovinu, prostor, kruh.

3. Určete hranici čtverce $ABCD$ v množině **M**, je-li množinou **M**
a) rovina ABC, b) prostor, c) čtverec $ABCD$.

2. PLANIMETRIE



Planimetrie je geometrie v rovině. Patří spolu s elementární aritmetikou mezi nejstarší matematické disciplíny.

2.1 Základní planimetrické pojmy

Základní pojmy jsou přijímány intuitivně, nedefinují se, spíše jde o jejich vysvětlující popis. Pro školskou potřebu nemusí být tak přesně vymezeny jako pro případnou axiomatickou výstavbu geometrie.

Pro planimetrii jsou základními pojmy:

Objekty jako

- **bod** (*označení* $A, B, \ldots$),
- **přímka** (*označení* $p, q, \ldots, \leftrightarrow AB, \ldots$),
- **rovina** (*označení* $\alpha, \beta, \ldots, \leftrightarrow ABC, \ldots, \leftrightarrow pC, \ldots$)

a některé relace jako

- ***náležet*** (*označení* $A \in p,\ q \subset \alpha, \ldots$)
- ***ležet mezi*** (*označení* $A\ \mu\ B, C, \ldots$)
- ***být shodný*** (*označení* $\text{ús. } AB \cong \text{ús. } KL, \ldots$)

Všechny ostatní pojmy lze z těchto základních pojmů odvodit, ovšem za předpokladu užití pojmů z teorie množin, např. průnik, sjednocení apod.

Pro tyto základní pojmy platí **základní věty**, tzv. školské axiomy:

ŠA1: Každými dvěma body je určena jediná přímka.
ŠA2: Každými třemi body, které nenáleží téže přímce, je určena jediná rovina.
ŠA3: Pro každou přímku p a každou rovinu α platí: leží-li dva různé body přímky p v rovině α, leží všechny body přímky p v rovině α.

Def: (pomocná)

Body ležící v jedné přímce nazveme ***kolineární.*** *(prostor E_1)*
Body ležící v jedné rovině nazveme ***komplanární.*** *(prostor E_2)*

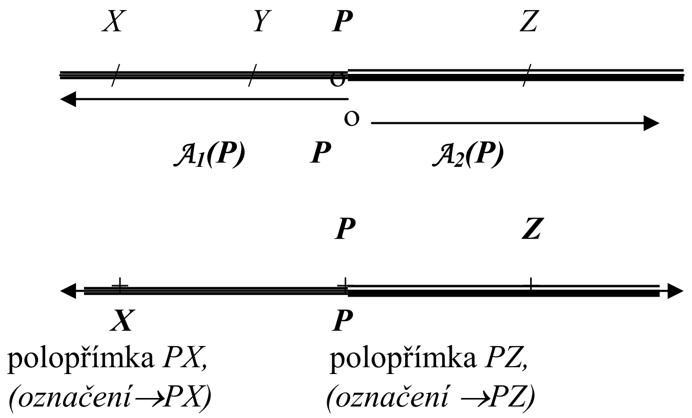
2.2 Odvozené planimetrické pojmy

2.2.1 Polopřímka

Def: Zvolme na přímce a bod P, pak bod P rozdělí body přímky a do dvou podmnožin $\mathcal{A}_1(P), \mathcal{A}_2(P)$, kde platí:

1) $\mathcal{A}_1(P), \mathcal{A}_2(P)$ jsou disjunktní;
2) mezi body X, Y podmnožiny $\mathcal{A}_1(P)$ (resp. $\mathcal{A}_2(P)$) neleží bod P;
3) mezi bod $X \in \mathcal{A}_1(P)$, $Z \in \mathcal{A}_2(P)$ leží bod P.

Pak sjednocení množiny $\mathcal{A}_1(P)$ s bodem P je **polopřímka** s počátkem P.



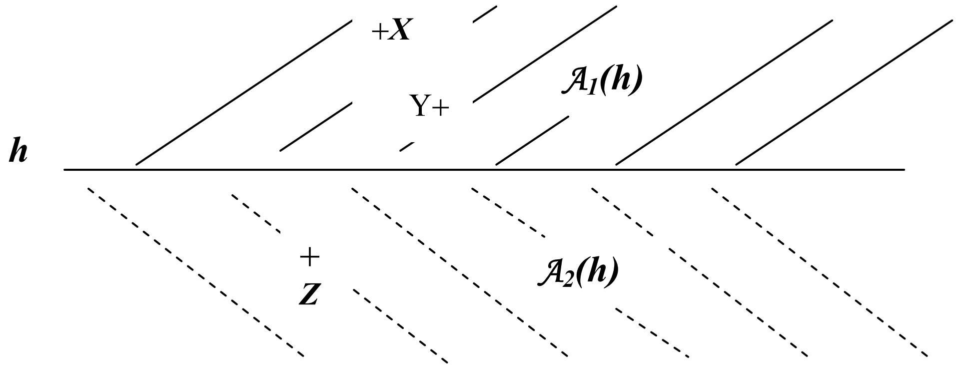
Polopřímky $\rightarrow PX$, $\rightarrow PZ$ se nazývají ***polopřímky navzájem opačné.***
(označení $\rightarrow PX = \leftarrow PZ$)

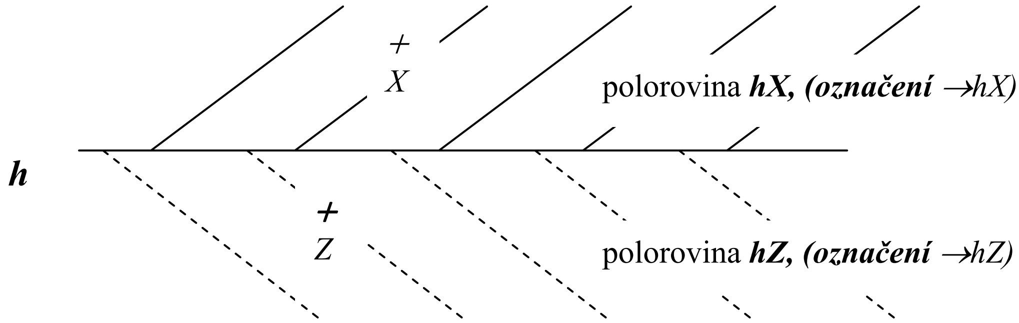
2.2.2 Polorovina

Def: Zvolme v rovině α přímku h, pak přímka h rozdělí body roviny α do dvou podmnožin $\mathcal{A}_1(h), \mathcal{A}_2(h)$, kde platí:

1) $\mathcal{A}_1(h), \mathcal{A}_2(h)$ jsou disjunktní;
2) mezi body X, Y podmnožiny $\mathcal{A}_1(h)$ (resp. $\mathcal{A}_2(h)$) neleží přímka h;
3) mezi bod $X \in \mathcal{A}_1(h)$, $Z \in \mathcal{A}_2(h)$ leží přímka h.

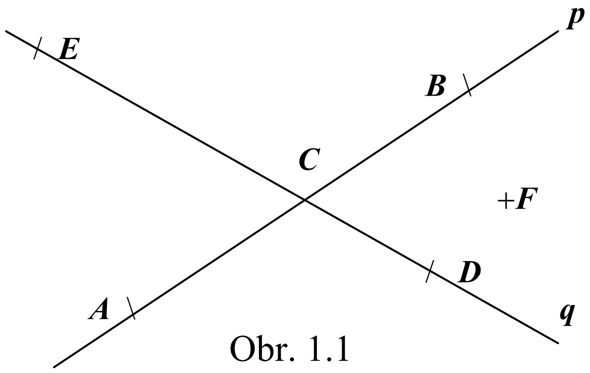
Pak sjednocení podmnožiny $\mathcal{A}_1(h)$ s přímkou h je **polorovina** s hraniční přímkou h..





Poloroviny $\rightarrow hX$, $\rightarrow hZ$ se nazývají ***poloroviny navzájem opačné.***
(označení $\rightarrow hX = \leftarrow hZ$*)*

Př.1 *Geometrický diktát*: Zvolte různoběžky *p, q*. Jejich průsečík označte *C*. Na přímce *p* zvolte body *A, B*, aby bod *C* ležel mezi nimi. Na přímce *q* zvolte body *D, E*, aby ležely v opačných polorovinách určených hraniční přímkou *p*. V průniku polorovin *pD* a *EDB* zvolte bod *F*.



Obr. 1.1

Popište situaci z obrázku 1.1 pomocí příslušných symbolů místo ...

$\rightarrow pF$ ... $\rightarrow ABD$; p ... $\rightarrow ABF$; $\rightarrow DF$ ... $\leftarrow qB$;

$\rightarrow CA \cup \rightarrow CB$ ... p ... $\leftrightarrow AB$; $\rightarrow ABD \cap \rightarrow ABE$ ... q .

2.2.3 Úsečka

Def: Na přímce zvolme dva různé body *A, B*. Pak průnik polopřímek AB a BA se nazývá **úsečka *AB*.** Body *A, B* jsou krajní body úsečky.

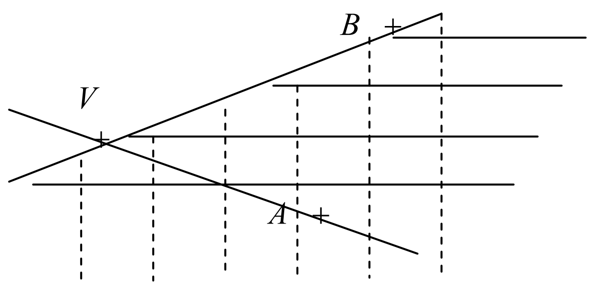
(označení ús.AB nebo |AB|)

Jiná def: Na přímce zvolme dva různé body *A, B*. Pak množina všech bodů *X*, které leží mezi *A, B* sjednocená s body *A* a *B* se nazývá **úsečka *AB***.

2.2.4 Úhel

Def: Nechť jsou body *A, B, V* nekolineární, pak průnik polorovin *VAB* a *VBA* se nazývá **konvexní úhel *AVB***.
Polopřímky *VA, VB* se nazývají ramena úhlu *AVB*, jejich společný počátek *V* se nazývá vrchol úhlu *AVB*.

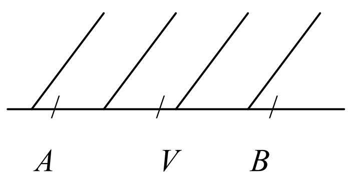
Označení $\angle AVB$



Def: Nechť jsou body *A, B, V* nekolineární, pak sjednocení polorovin opačných k *VAB* a *VBA* se nazývá **nekonvexní úhel *AVB***.

Označení nek$\angle AVB$

Def: Jsou-li body *A, B, V* kolineární a *V* leží mezi *A, B*, pak polorovina určená hraniční přímkou *AVB* se nazývá **přímý úhel *AVB***.
Přímý úhel je konvexní.



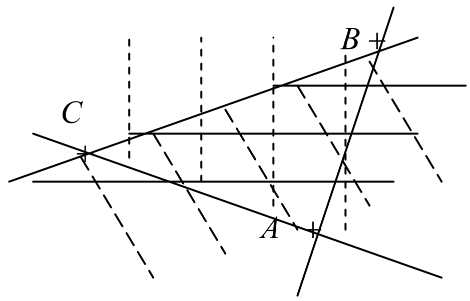
Jiná def: Nechť jsou body *A, B, V* nekolineární, pak sjednocení polopřímek *VX*, kde *X* je libovolný bod ús.*AB* se nazývá **konvexní úhel *AVB***.

2.2.5 Trojúhelník

Def: Nechť jsou body *A, B, C* nekolineární, pak průnik polorovin *ABC, BCA* a *CAB* se nazývá **trojúhelník *ABC***.

Body *A, B, C* …se nazývají vrcholy
úsečky *AB, BC, CA* … strany
úhly *ABC, BCA, CAB* … vnitřní úhly

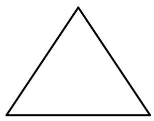
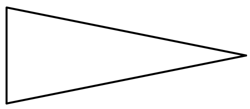
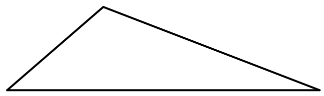
Označení ΔABC



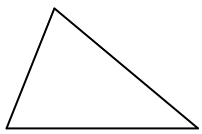
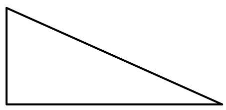
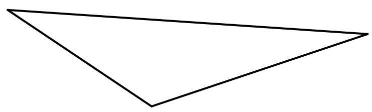
Jiná def: Nechť jsou body *A, B, C* nekolineární, pak sjednocení úseček *AX*, kde *X* je libovolný bod ús.*BC* se nazývá **trojúhelník *ABC***.

Třídění trojúhelníků:

Podle stran: rovnostranné rovnoramenné různostranné

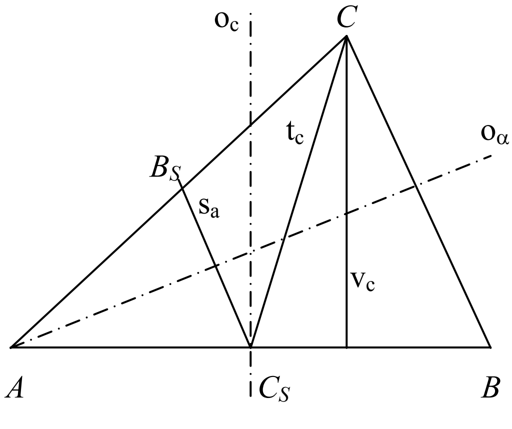




Podle úhlů: ostroúhlé pravoúhlé tupoúhlé

Další prvky trojúhelníku:

výška	v_c
těžnice	t_c
střední příčka	s_a
osa strany	o_c
osa úhlu	o_α
poloměr kružnice opsané	r
poloměr kružnice vepsané	ρ



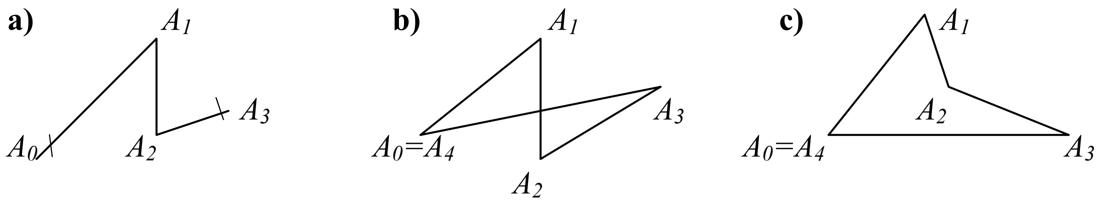
2.2.6 Mnohoúhelník

Def: (pomocné)

a) Nechť v rovině jsou body $A_0, A_1, \ldots. A_n$ a nechť sousední úsečky A_iA_{i+1}, $A_{i+1}A_{i+2}$ mají společný pouze jeden krajní bod A_{i+1}, pak sjednocení úseček $A_0A_1, A_1A_2, \ldots A_{n-1}A_n$ nazveme **lomená čára $A_0A_1 \ldots A_n$**.

b) Jestliže $A_0 = A_n$,pak sjednocení těchto úseček nazveme **uzavřená lomená čára $A_0A_1 \ldots A_n$**.

c) Jestliže žádné dvě nesousední úsečky nemají společný bod, pak sjednocení těchto úseček nazveme **jednoduchá uzavřená lomená čára $A_0A_1 \ldots A_n$**.



d) Jednoduchá uzavřená lomená čára rozdělí body roviny na dvě podmnožiny – **vnitřní a vnější oblast**.

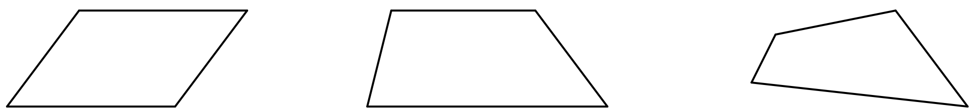
Def: Sjednocení jednoduché uzavřené lomené čáry $A_0A_1 \ldots A_n$ $(A_0=A_n , n\geq 3)$ s její vnitřní oblastí se nazývá **mnohoúhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ (n–úhelník)**.

Body $A_1, A_2, \ldots$ se nazývají vrcholy
úsečky $A_1A_2, A_2A_3, (A_iA_{i+1})$ … strany
úsečky $A_1A_3 ,(A_iA_j, \, kde\, j\neq i+1)$ ... úhlopříčky
úhly $A_1A_2A_3 , (A_iA_{i+1}A_{i+2})$ ... vnitřní úhly

2.2.7 Čtyřúhelníky

Třídění čtyřúhelníků:

rovnoběžníky	lichoběžníky	různoběžníky
(2 dvojice // stran)	*(1 dvojice // stran)*	*(0 dvojic // stran)*



Podle stran:	rovnostranné	různostranné	(rovnoramenné)
Podle úhlů:	pravoúhlé	kosoúhlé	

Podle kružnice, která jde   opsat   vepsat
tětivové   tečnové

Př.2 Uveďte pravoúhlé čtyřúhelníky.
Rovnostranný kosoúhlý rovnoběžník je …
Různoběžník, který má dvě dvojice shodných stran je …

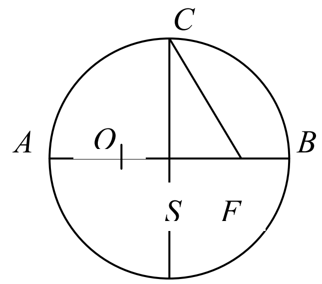
2.2.8 Pravidelné mnohoúhelníky

Def: Mnohoúhelník jehož všechny strany a všechny vnitřní úhly jsou shodné, se nazývá **pravidelný mnohoúhelník**.

Pozn.1: Pravidelné mnohoúhelníky mají řadu zajímavých vlastností, které se týkají kružnice opsané, vepsané, středového úhlu, souměrností apod.
Ne všechny pravidelné mnohoúhelníky jsou eukleidovsky sestrojitelné.

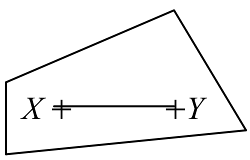
Pozn.2: Konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků:

Je-li bod O středem úsečky AS a délka OC = délce OF, pak:
SC je strana prav. 6ti úhelníka;
CF je strana prav. 5ti úhelníka;
SF je strana prav. 10ti úhelníka
vepsaného do této kružnice.

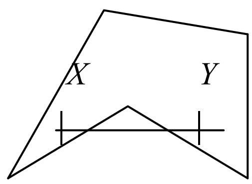


2.2.9 Konvexní množina (útvar)

Def: Bodová množina $\mathcal{M}$, která má aspoň dva prvky se nazývá **konvexní**, právě když pro každé dva její různé body X, Y platí, že úsečka XY je podmnožinou $\mathcal{M}$. Prázdná a jednoprvková množina jsou konvexní.



je



není

Pozn.1: Platí, že průnikem dvou konvexních množin je konvexní množina

2.2.10 Kruh, kružnice

Def: Sjednocení všech shodných úseček *SX*, kde *S* je pevný bod a *X* náleží rovině, se nazývá **kruh *K*** se středem *S* a poloměrem *SX*.
(označení K(S; r=SX))

Def: Sjednocení všech bodů *X*, všech shodných úseček *SX*, kde *S* je pevný bod a *X* náleží rovině, se nazývá **kružnice *k*** se středem *S* a poloměrem *SX*.
(označení k(S; r=SX))

Jiná def: V rovině je dán bod *S* a úsečka *r*. Množina všech bodů *X* roviny, pro které platí $/SX/ \leq r$ se nazývá **kruh *K*** se středem *S* a poloměrem *r*.

Jiná def: V rovině je dán bod *S* a úsečka *r*. Množina všech bodů *X* roviny, pro které platí $/SX/= r$ se nazývá **kružnice k** se středem *S* a poloměrem *r*.

2.3 Úlohy k procvičení

1. Jsou dány tři různé body *A, B, C*. Zapište všechny úsečky, polopřímky a přímky určené těmito body.

2. V rovině jsou dány čtyři různé body *A, B, C, D*.
a) Zapište všechny různé poloroviny určené těmito body.
b) Závisí jejich počet na umístění bodů *A, B, C, D* ? Jak, zdůvodněte.

3. Zvolte tři nekolineární body *A, B, C* a vyšrafujte množinu všech bodů *X* takových, že mezi body *C, X* leží bod *Y* úsečky *AB*.

4. Které bodové množiny mohou být průnikem dvou polorovin v téže rovině.

5. Jakými základními útvary může být určena rovina ?

6. Ve čtverci *ABCD* se středem *S* vytáhněte lomenou čáru *ABSCDA*.
a) Jaký útvar tato čára ohraničuje ?
b) Určete tento útvar jako sjednocení trojúhelníků.
c) Může tento útvar vzniknout průnikem jistých polorovin ?

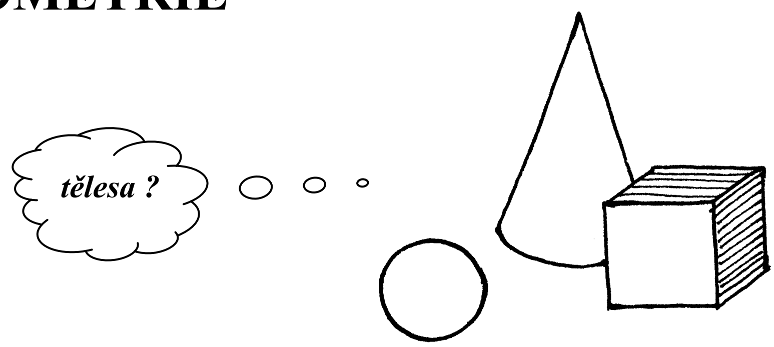
7. Odvoďte vzorec pro počet úhlopříček n-úhelníka. Nejdříve kolik úhlopříček má trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, …?

8. Uveďte příklady tečnových čtyřúhelníků.

9. Uveďte příklady tětivových čtyřúhelníků.

10. Je konvexní: a) čtverec bez vrcholu A, b) lomená čára, c) 4-cípá hvězda.

3. STEREOMETRIE



Stereometrie je geometrie v prostoru, tedy v prostředí, ve kterém se od narození pohybujeme.

Zatímco pro vyučování planimetrie je důležitá zručnost a přesnost rýsování útvarů a hledání postupů při provádění konstrukcí, pro vyučování stereometrie je důležitá názornost při zobrazování těles a prostorové vidění a představivost. Stereometrie jako část geometrie rovněž patří spolu s elementární aritmetikou mezi nejstarší matematické discipliny.

Klasifikace stereometrie (podle V. Repáše v [02]):

Spontánní (základní představy o prostorových útvarech)

- geometrická tělesa - jejich modelování, zobrazování;
- sítě těles - jejich vytváření, manipulace se sítí;
- povrch těles - pohyb po tělese;
- pohyb tělesa - odvalování těles;
- kombinatorika - barvy hran, barvy stěn;
- prostorová bludiště - jejich řešení.

Kalkulativní (výpočty objemu, povrchu, odchylek, vzdáleností)

- povrchy těles - výpočty, určování;
- objemy těles - výpočty, určování;
- určování délek - úhlopříček, výšek, vzdáleností bodů;
- určování úhlů - odchylek přímek, rovin.

Teoretická (vícerozměrné prostory, deduktivní odvozování)

- vzájemné polohy ve vícerozměrných prostorech;
- prostorové transformace a jejich skládání;
- axiomatizace stereometrie.

Konstruktivní (grafické řešení některých úloh)

- řezy těles;
- určování délek a odchylek.

3.1 Základní stereometrické pojmy

Stereometrie jako geometrie v prostoru v sobě zahrnuje i geometrii v rovině, tedy planimetrii.

I zde jsou základní pojmy přijímány intuitivně, nedefinují se, spíše jde o jejich vysvětlující popis. Pro školskou potřebu nemusí být tak přesně vymezeny jako pro případnou axiomatickou výstavbu geometrie.

Pro stereometrii jsou základními pojmy:

Objekty jako

bod (*označení* $A, B, \dots$),
přímka (*označení* $p, q, \dots, \leftrightarrow AB, \dots$),
rovina (*označení* $\alpha, \beta, \dots, \leftrightarrow ABC, \dots, \leftrightarrow pC, \dots$)
prostor (*označení* $\leftrightarrow ABCD, \leftrightarrow \alpha C \dots$)

a některé relace jako

náležet (*označení* $A \in p,\ q \subset \alpha, \dots$)
ležet mezi (*označení* $A\ \mu\ B, C., \dots$)
být shodný (*označení* *ús.* $AB \cong$ *ús.* $KL, \dots$)

Všechny ostatní pojmy lze z těchto základních pojmů odvodit, ovšem za předpokladu užití pojmů z teorie množin, např. průnik, sjednocení apod.

3.2 Odvozené pojmy stereometrie

Kromě již zmíněných odvozených pojmů planimetrie jako polopřímka, polorovina, trojúhelník, apod. jsou zde pojmy nové speciálně prostorové.

3.2.1 Poloprostor

Def: Zvolme v prostoru rovinu α, pak rovina α rozdělí body prostoru do dvou podmnožin $\mathcal{A}_1(\alpha), \mathcal{A}_2(\alpha)$, kde platí:

1) $\mathcal{A}_1(\alpha), \mathcal{A}_2(\alpha)$ jsou disjunktní;
2) mezi body X, Y podmnožiny $\mathcal{A}_1(\alpha)$ (resp. $\mathcal{A}_2(\alpha)$) neleží rovina α ;
3) mezi bod $X \in \mathcal{A}_1(\alpha),\ Z \in \mathcal{A}_2()$ leží rovina α .

Pak sjednocení podmnožiny $\mathcal{A}_1(\alpha)$ s rovinou α je **poloprostor** s hraniční rovinou α .

(*označení* $\rightarrow \alpha X$)

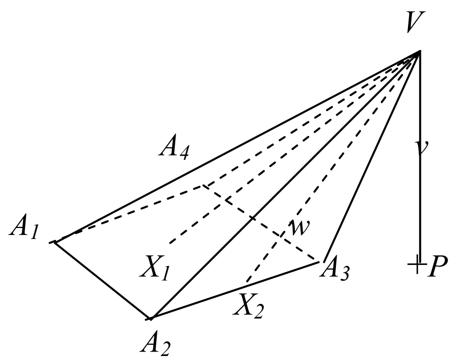
Poloprostory $\rightarrow \alpha X, \rightarrow \alpha Z$ se nazývají ***poloprostory navzájem opačné.***

Def: (pomocné)
Průnik dvou poloprostorů s různoběžnými hraničními rovinami se nazývá **klín**.
Neprázdný průnik dvou poloprostorů s rovnoběžnými různými hraničními rovinami se nazývá **vrstva**.

3.2.2 Jehlan

Def: Je dán n-úhelník $A_1 \ldots A_a$ a bod V, který nenáleží rovině n-úhelníka $A_1 \ldots A_a$. Pak sjednocení všech úseček VX, kde X je bod n-úhelníka $A_1 \ldots A_a$ se nazývá **n-boký jehlan $A_1 \ldots A_a V$**.

n-úhelník $A_1 \ldots A_a$ ... je podstava
body $A_1, \ldots A_a, V$ ... vrcholy
bod V ... hlavní vrchol
úsečky A_1A_2 ... hrany podstavné
úsečky A_1V ... hrany pobočné
trojúhelníky A_1A_2V ... stěny (boční)



úsečky A_1A_3 ...úhlopříčky podstavy
úsečka $VP = v$ ... výška tělesová
úsečka $X_2V = w$ ... výška stěnová
sjednocení bočních stěn … plášť jehlanu

Def: **Síť jehlanu** je sjednocení bočních stěn a podstavy.
(neboli povrch jehlanu rozvinutý do roviny)

Def: (pomocná)
Jsou-li dány nekomplanární body A,B,C,V, pak průnik poloprostorů $ABCV$, $BCVA$, $CVAB$ a $VABC$ se nazývá **trojboký jehlan $ABCV$**. (**čtyřstěn $ABCV$.**)

Def: Je-li n-úhelník podstavy pravidelný a tělesová výška prochází těžištěm podstavy, jedná se o **pravidelný n-boký jehlan**.

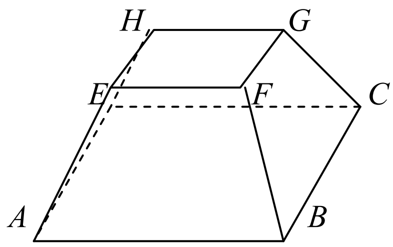
Jeho všechny boční stěny jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky.

Def: Pravidelný trojboký jehlan, jehož všechny stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky, se nazývá **tetraedr** (a patří mezi tzv. Platonská tělesa).

Def: (pomocná)
Je dán n-úhelník A_1 ... A_a a bod V, který nenáleží rovině n-úhelníka $A_1 ... A_a$. Pak sjednocení všech přímek VX, kde X je bod n-úhelníka $A_1 ... A_a$ (resp. bod hranice n-úhelníka $A_1 ... A_a$) se nazývá **n-boký jehlanový prostor** (resp. **n-boká jehlanová plocha).**

Pozn: Řezem n-bokého jehlanu rovinou rovnoběžnou s podstavou a odstraněním části s hlavním vrcholem vzniká **n-boký komolý jehlan**.

ABCD, EFGH ... podstavy
ABFE, BCGF, … boční stěny (lichoběžníky)
vzdálenost podstav … výška kom.jehlanu
výšky lichoběžníků … stěnové výšky



Př.1: Určete počet vrcholů, hran, stěn, výšek, úhlopříček n-bokých jehlanů, obecně i konkrétně.
Určete jak vypadají sítě některých n-bokých jehlanů.
Určete jak vypadají sítě některých n-bokých komolých jehlanů.

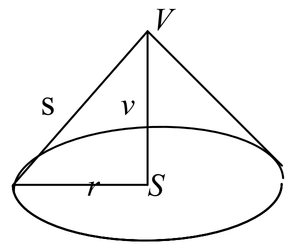
3.2.3 Kužel

Def: Je dán kruh K a bod V, který nenáleží rovině kruhu K. Pak sjednocení všech úseček VX, kde X je bod kruhu K se nazývá **kužel** s kruhovou podstavou.

Def: (školská) Část prostoru vymezená rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jedné jeho odvěsny se nazývá **rotační kužel**.
Tato odvěsna je jeho výškou, druhá odvěsna je poloměrem podstavy a přepona je stranou kužele.

výška kužele v
poloměr podstavy r
strana kužele s

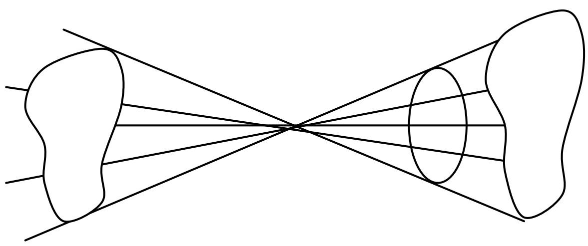
vrchol kužele V
střed podstavy S



Def: **Síť kužele** je sjednocení podstavy a pláště.

Def: (pomocná)

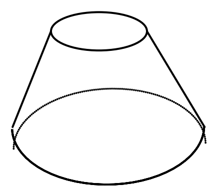
Je dán kruh K a bod V, který nenáleží rovině kruhu K. Pak sjednocení všech přímek VX, kde X je bod kruhu K (resp. bod hranice kruhu K) se nazývá **kuželový prostor (**resp. **kuželová plocha).**



Pozn.1: Řezem kuželové plochy rovinou vznikají **kuželosečky** - kružnice, elipsa, parabola a hyperbola.
Typ kuželosečky závisí na úhlu roviny řezu a osy, resp. na úhlu roviny řezu a povrchové přímky kuželové plochy.

Pozn.2: Řezem rotačního kužele rovinou rovnoběžnou s podstavou a odstraněním části s hlavním vrcholem vzniká **rotační komolý kužel**.

Sítí rotačního komolého kužele je výseč mezikruží spojená s oběma kruhovými podstavami.

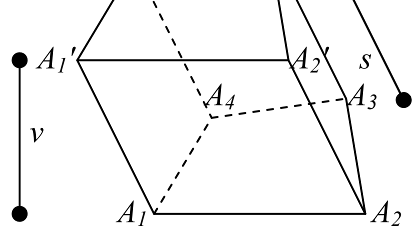


3.2.4 Hranol

Def: Je dán n-úhelník $A_1 \dots A_n$ a úsečka s, která není rovnoběžná s rovinou n-úhelníka $A_1 \dots A_n$. Pak sjednocení všech úseček XX' shodných a souhlasně rovnoběžných s úsečkou s, kde X je bod n-úhelníka $A_1 \dots A_n$ se nazývá **n-boký hranol $A_1 \dots A_n A_1' \dots A_n'$**.

body $A_1, \dots A_n, A_1', \dots A_n'$ ... vrcholy
úsečky A_1A_2, A_2A_3 ... podstavné hrany
úsečky A_1A_1', A_2A_2' ... pobočné hrany
n-úhelníky $A_1 \dots A_n$ $A_1', \dots A_n'$ ... podstavy
rovnoběžníky $A_1A_2A_2'A_1'$ ... stěny(boční)

úsečky A_1A_3, A_1A_2' ... úhlopříčky stěnové
úsečky A_1A_3', A_2A_4' ... úhlopříčky tělesové
vzdálenost podstav v ... výška hranolu



Def: **Síť hranolu** je sjednocení bočních stěn a obou podstav.

Def: Je-li úsečka s kolmá k n-úhelníku $A_1 \dots A_n$ podstavy, jedná se o **kolmý hranol.** Není-li kolmá, jedná se o **kosý hranol**.

Def: Je-li n-úhelník podstavy pravidelný a úsečka s je kolmá k n-úhelníku $A_1 \dots A_n$ podstavy, jedná se o **pravidelný n-boký hranol**.

Jeho všechny boční stěny jsou shodné obdélníky.

Def: Pravidelný čtyřboký hranol, jehož všechny stěny jsou shodné čtverce, se nazývá **hexaedr (krychle)** (a patří mezi tzv. Platonská tělesa).

Def: (pomocná)
Čtyřboký hranol s obdélníkovou podstavou a různými rozměry se nazývá **kvádr**.

Def: (pomocná)
Je dán n-úhelník $A_1 \dots A_n$ a přímka s, která není rovnoběžná s rovinou n-úhelníka $A_1 \dots A_n$ .Pak sjednocení všech přímek XX' rovnoběžných s přímkou s, kde X je bod n-úhelníka $A_1 \dots A_n$ (resp. bod hranice n-úhelníka $A_1 \dots A_n$) se nazývá **n-boký hranolový prostor** (resp. **n-boká hranolová plocha).**

Př.2: Určete počet vrcholů, hran, stěn, výšek, úhlopříček n-bokých hranolů, obecně i konkrétně.
Určete, jak vypadají sítě některých n-bokých hranolů.

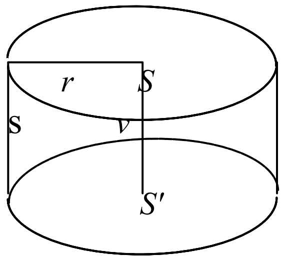
3.2.5 Válec

Def: Je dán kruh K a úsečka s, která není rovnoběžná s rovinou kruhu K. Pak sjednocení všech úseček XX' shodných a souhlasně rovnoběžných s úsečkou s, kde X je bod kruhu K se nazývá **válec** s kruhovou podstavou.

Def: (školská) Část prostoru vymezená rotací obdélníku kolem jedné jeho strany se nazývá **rotační válec**.
Tato strana je jeho výškou, protější strana obdélníku je stranou válce, sousední strana je poloměrem podstavy.

výška válce v
poloměr podstavy r
strana kužele s

středy podstav S,S'



Def: **Síť válce** je sjednocení pláště a obou podstav.

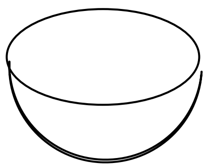
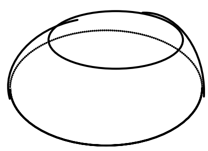
Def: Je-li úsečka s kolmá k rovině kruhu K, jedná se o **kolmý válec.**

Def: (pomocná)
Je dán kruh K a směr s, který nenáleží rovině kruhu K. Pak sjednocení všech přímek rovnoběžných se směrem s a procházejících bodem X kruhu K (resp. hranicí kruhu K) se nazývá **válcový prostor (**resp. **válcová plocha).**

3.2.6 Koule (kulová plocha)

Def: Je dán bod S a úsečka r. Sjednocení všech úseček SX shodných s úsečkou r v prostoru se nazývá **koule** se středem S a poloměrem r**,** body X těchto sjednocených úseček tvoří **kulovou plochu.**

Pozn.: Řezem koule (kulové plochy) rovinou vznikají její části.

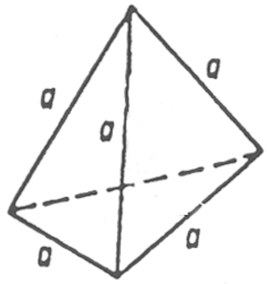
koule:		kulová plocha:
kulová úseč		**kulový vrchlík**
kulová vrstva		**kulový pás**

3.2.7 Mnohostěn

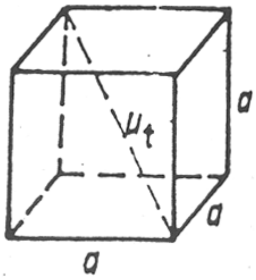
Def: Těleso, jehož hranice je sjednocením hraničních mnohoúhelníků, které mají společné pouze své strany a žádné dva mnohoúhelníky neleží v téže rovině, se nazývá **mnohostěn** (n-stěn).

3.2.8 Platónská tělesa

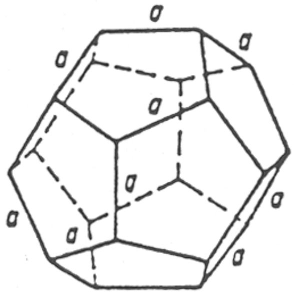
Def: Konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a v každém jeho vrcholu je stejný počet hran se nazývá **pravidelný mnohostěn (Platónské těleso).**



Pravidelný čtyřstěn
(tetraedr)
4 vrcholy, 4 stěny



Pravidelný šestistěn
(hexaedr)
8 vrcholů, 6 stěn



Pravidelný dvanáctistěn
(dodekaedr)
20 vrcholů, 12 stěn

Pravidelný osmistěn
(oktaedr)
6 vrcholů, 8 stěn

Pravidelný dvacetistěn
(ikosaedr)
12 vrcholů, 20 stěn

3.3 Úlohy k procvičení

1. Které bodové množiny mohou být průnikem dvou poloprostorů?
2. Odvoďte vztah mezi počtem vrcholů v, hran h a stěn s některých mnohostěnů (Eulerova formule). Nejdříve zjišťujte na troj-, čtyř-, pěti-, šesti-, … bokých hranolech, pak na troj-, čtyř-, pěti-, šesti-, … bokých jehlanech.
3. Kolik různých sítí má krychle?
4. Kolik různých sítí má pravidelný čtyřstěn (tetraedr)?

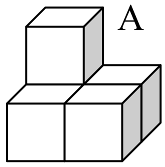
5. Trojboký hranol s výškou 6 cm má podstavu pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami 3 cm a 4 cm. Sestrojte jeho síť.

6. Sestrojte síť rotačního kužele s poloměrem podstavy 3 cm a výškou 4 cm.

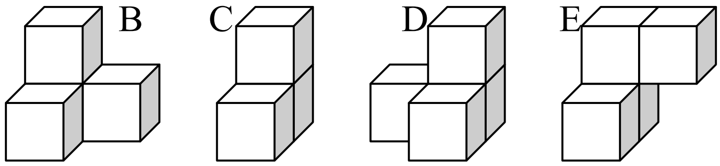
7. Vytvořte všechna prostorová tetramina (krychlová tělesa ze 4 shodných krychlí, které mají společnou stěnu).

8. Obarvenou krychli o hraně 3 cm rozřežeme na krychličky o hraně 1 cm. Kolik malých krychliček bude mít obarveno 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 stěn ?

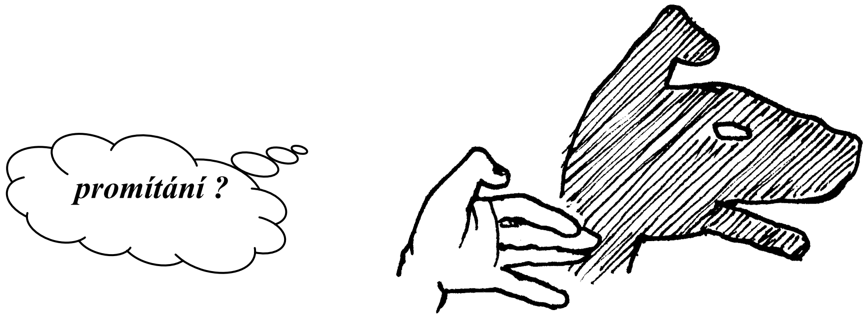
9. Kolik má krychlové těleso A na obrázku
vrcholů (kde dochází k lomu hrany),
hran (kde dochází k lomu plochy)
a stěn (kde se nelámeme plocha)?
Platí pro něj Eulerova formule?


A

10. Která z krychlových těles A, B, C, D, E spolu tvoří krychli? Které je navíc ?



4. GEOMETRICKÉ ZNÁZORŇOVÁNÍ



Funkce názornosti - osvojování geometrického učiva u mladších žáků se opírá především o smyslové poznání - zrakové (vizuální)
- hmatové (taktilní)

Používané názorné prostředky
- ***modelování*** (vznikají před žákem, nebo je žák vytváří);
- ***modely*** (jsou předem připravené);
- ***črtání a rýsování*** (vznikají před žákem, nebo je žák vytváří);
- ***obrazy a rysy*** (jsou předem připravené).

Postup používání - od modelování a práci s modely ke grafickému vyjadřování až k postupné abstrakci.

Vytváření pojmu u žáka je podle prof. Hejného a prof. Mareše (jak bylo již výše uvedeno), dlouhodobý proces konstruování poznávacích struktur, který má určité fáze, a jehož jádrem jsou dva mentální kvalitativní zdvihy, ke kterým dochází vlivem okolních faktorů. Začíná motivací a vrcholí krystalizací a precizací.

Zpočátku vidění schematické, neproporcionální. Od nepodstatných vlastností (barva, materiál, tvrdost,…) k podstatným (tvar, stěny, hrany, vrcholy,…).

Např. kostka (krychle) - z jednoho vrcholu vychází 3 hrany,
- stěna je čtyřúhelník, …

Učitel by si měl uvědomovat rozdíl mezi:

předmětem - pojmem - názvem - modelem

míč *koule* *„koule“* *dřevěná koule*

4.1 Modelování a modely

Modelování - významná činnost umožňující pochopení především prostorových geometrických útvarů a vztahů.
- objasňování a vysvětlování abstraktních geometrických pojmů.
- je i konstrukčním prostředkem ve školské geometrii.

Modely - průmyslově vyráběné (plastové, dřevěné, drátěné, průhledné,..)
- běžně dostupné (špejle a plastelína, papír a nůžky, krabice, gumičky, provázky, …)
- je důležité používat různorodé a rozmanité modely, aby nedocházelo k jednostranné představě.

4.2 Rýsování a rysy

Vytváření dovednosti rýsovat

Získání základních dovedností a návyků přesného a správného rýsování geometrických útvarů.

V nižších třídách ZŠ nelze náročnost přehánět (dokončování osifikace kostí ruky a rozvíjející se motorika), ale neměly by vznikat návyky chybné. Existují přiměřené úlohy, na kterých lze přesnost rýsování sledovat a diagnostikovat příčiny nedostatků.

Př.1 Narýsuj úsečku AB a sestroj její střed S. Narýsuj kružnici se středem S, aby procházela bodem B. Prochází i bodem A ?

Narýsuj čtverec $ABCD$.

Rýsovací pomůcky:

žákovské tužka (správně ořezaná - kužel, tvrdost 2 a 3)
pravítka a trojúhelníky (čisté, neolámané)
kružítko (pevné s hrotem a ořezanou tuhou - dláto)
úhloměr, šablony, guma (kvalitní)

učitelské křída (správně ořezaná - dláto)
pravítko a trojúhelník (čisté, neolámané)
kružítko (pevné s hrotem či přísavkou a ořezanou křídou)
úhloměr

Zásady správného rýsování:

- pořádek na pracovní desce;
- správné držení tužky (sklon asi 75^0, ve směru sklon asi 60^0, stejný tlak ruky, jedním tahem, nenastavovat);
- správné rýsování kružítkem (od zdola, sklon ve směru asi 70^0, jedním tahem, nenastavovat).

Druhy čar:	*podle tloušťky*	tlusté
		střední
		tenké
	podle způsobu	plné
		čárkované
		čerchované

Rysy:	**formát**	A4 … 297x210,	(A3 … 420x297, A5 … 210x149)
	měřítka	1:2, 1:5, 1:10, 1:20, …	2:1, 5:1, 10:1, …
	písmo	normalizované, kolmé	písmena 5, číslice 4
	druhy čar (užití)	tlustá plná	na viditelné obrysy a hrany
		tenká plná	na pomocné čáry, šrafování
		tenká čárkovaná	na neviditelné obrysy a hrany
		tenká čerchovaná	na osy

4.3 Zobrazovací metody

Zobrazovací neboli promítací metody jsou způsoby grafického znázornění prostorových útvarů v rovině. Je jich celá řada a důležitými hledisky jsou

- názorná představa zobrazovaného útvaru,
- zachování velikosti rozměrů zobrazovaného útvaru.

4.3.1 Volné rovnoběžné promítání (vrp)

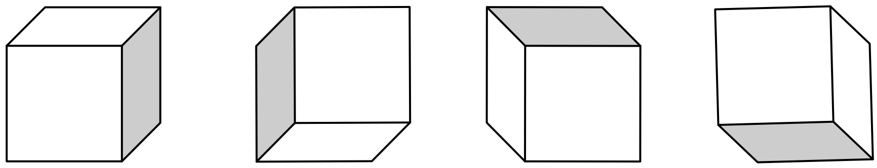
Základní pravidla:

- zobrazujeme na jednu svislou průmětnu - nákresnu;
- obrazce v rovinách rovnoběžných s nákresnou (průčelné) zobrazujeme ve skutečné velikosti a tvaru;
- zobrazení zachovává rovnoběžnost;
- zobrazení zachovává dělicí poměr;

- přímky a úsečky kolmé k nákresně (hloubkové) zobrazujeme pod určitým úhlem (většinou 45^0);
- úsečky kolmé k nákresně (hloubkové) zobrazujeme s určitým zkrácením (většinou na polovinu).

Postup při zobrazování:
- těleso postavíme jednou stěnou v průčelné poloze;
- zobrazíme průčelnou (přední) stěnu;
- z vrcholů stěny vedeme hloubkové přímky (úsečky) pod určitým úhlem (45^0) a délky hloubkových úseček patřičně zkrátíme (na polovinu);
- zobrazíme další stěny (zadní);
- vyznačíme viditelnost.

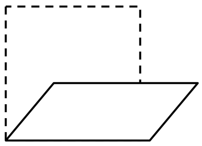
Př. Obraz krychle



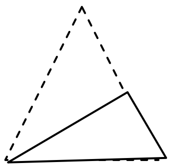
podle viditelnosti *nadhled zprava* *podhled zleva* *nadhled zleva* *podhled zprava*

Př. Obraz

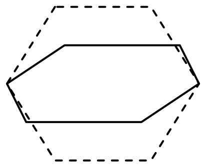
čtverce



rovnostranného trojúhelníku

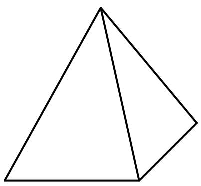


pravidelného šestiúhelníku

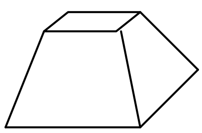


Př. Obraz

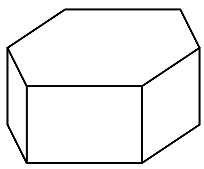
pravidelného 4bokého jehlanu



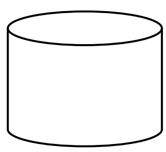
komolého 4bokého jehlanu



pravidelného 6bokého hranolu



rotačního válce



Výhody vrp: je názorné
Nevýhody vrp: příliš mění rozměry

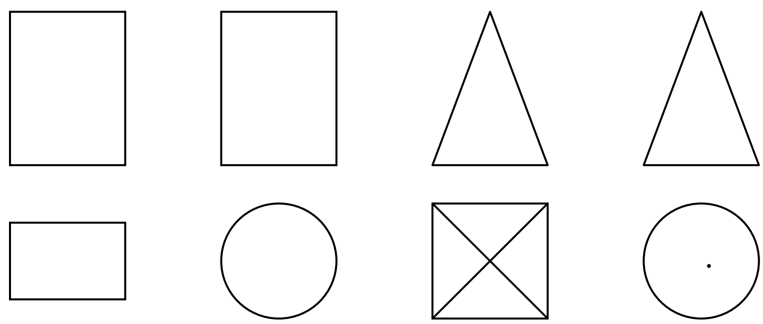
4.3.2 Mongeovo promítání (Mp) (Pravoúhlé promítání na dvě (tři) průmětny)

Základní pravidla:
- zobrazujeme kolmo na dvě průmětny
  - nárysnu ν (svislou, zepředu) - vzniká nárys
  - půdorysnu π (vodorovnou, shora) - vzniká půdorys

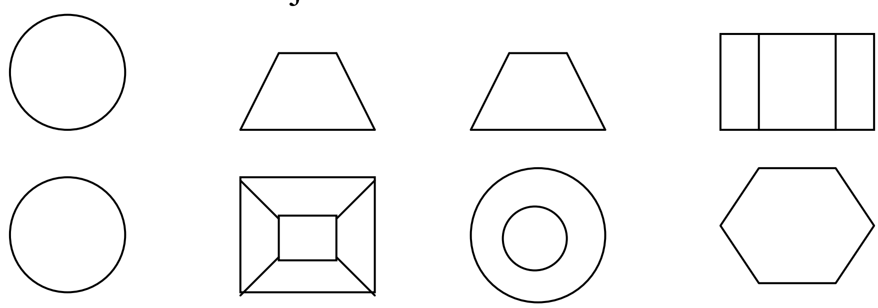
  (někdy na 3. průmětnu bokorysnu μ ze strany - bokorys)
- nárys a půdorys tvoří sdružené průměty tělesa;
- sdružené průměty téhož bodu leží na ordinále (kolmici k průsečnici průměten);
- obrazce v rovinách rovnoběžných s některou průmětnou se v ní zobrazují ve skutečné velikosti a tvaru;
- zobrazení zachovává rovnoběžnost;
- zobrazení zachovává dělicí poměr;
- zobrazení zachovává shodnost rovnoběžných úseček.

Postup při zobrazování:
- těleso postavíme jednou stěnou v průčelné poloze;
- zobrazíme těleso na nárysnu při pohledu zepředu;
- zobrazíme těleso na půdorysnu při pohledu shora, aby průměty příslušných bodů ležely na ordinálách;

Př. Sdružené průměty hranolu válce jehlanu kužele



koule kom. jehlanu kom. kužele 6bok. hranolu



Výhody Mp: zachovává řadu rozměrů

Nevýhody Mp: není příliš názorné

4.4 Zobrazování řezů a průniků těles

4.4.1 Řez těles rovinou (ve vrp)

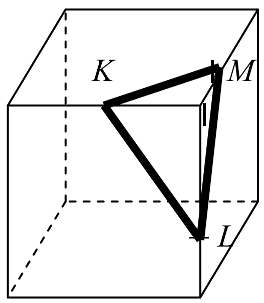
Řezem tělesa rovinou je mnohoúhelník (výjimečně hrana, bod), pro jehož určení platí následující pravidla.

V1: Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží také v této rovině.

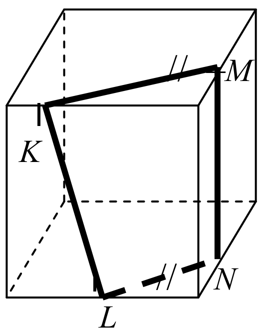
V2: Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách.*(//)*

V3: Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto společným bodem všechny tři průsečnice rovin.*(1)*

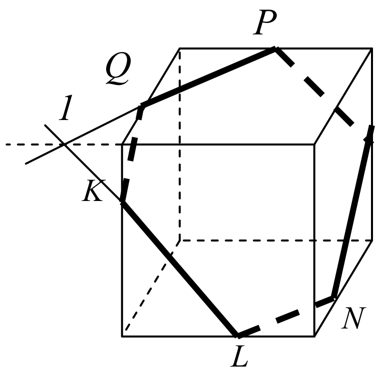
Př.2 Určete řez krychle rovinou KLM.



řezem je
trojúhelník *KLM*

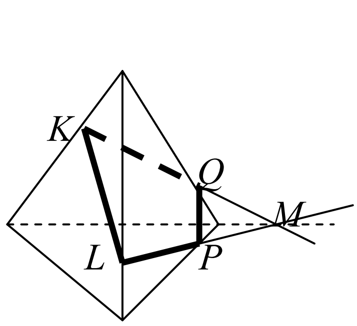


řezem je
čtyřúhelník *KLNM*

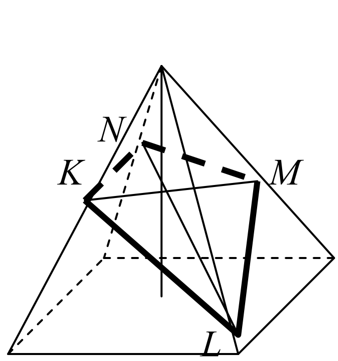


řezem je
šestiúhelník *KLNMPQ*

Př.3 Určete řez jehlanu rovinou KLM



řezem je
čtyřúhelník *KLPQ*

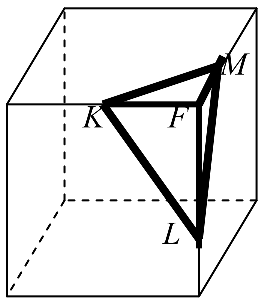


řezem je
čtyřúhelník *KLMN*

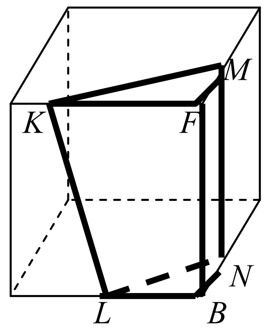
4.4.2 Průnik tělesa a poloprostoru (ve vrp)

Průnikem tělesa a poloprostoru je mnohostěn - část tělesa (výjimečně stěna, hrana, bod). První tři písmena poloprostoru určují rovinu řezu tělesem, čtvrté písmeno určuje, o kterou část tělesa se jedná. Úlohy tedy vycházejí z řezu tělesa rovinou.

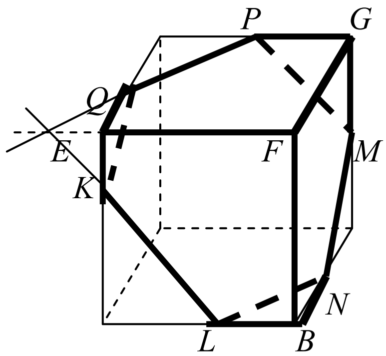
Př.4 Určete průnik krychle ABCDEFGH s poloprostorem KLMF.



průnikem je
jehlan *KLMF*

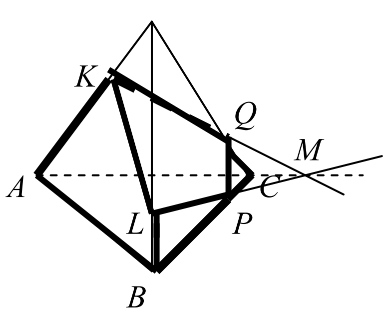


průnikem je
mnohostěn *LBNKFM*

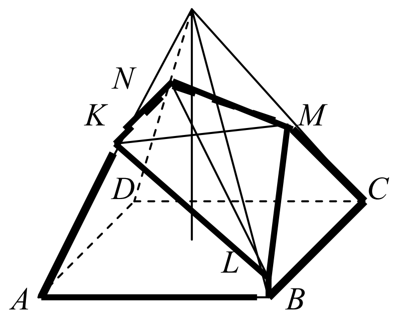


průnikem je
mnohostěn
KLNMPQEFBG

Př.*5* Určete průnik jehlanu s poloprostorem KLMA.



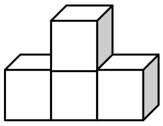
průnikem je mnohostěn
ABCKLPQ



průnikem je mnohostěn
ABCDKLMN

4.5 Zobrazení krychlových těles „kótováním“

Krychlová tělesa se skládají ze shodných krychlí, které mají společné celé stěny. Jedním ze způsobů jejich zobrazování mladšími žáky je tzv. kótování, což je vlastně půdorys, nárys nebo bokorys tělesa doplněný čísly, která popisují, ve kterých vrstvách jsou krychle umístěny.

Např. Těleso  se zobrazí

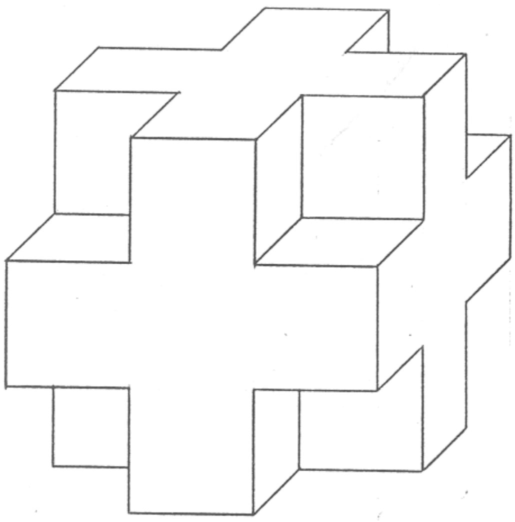
1	**12**	**1**

nebo

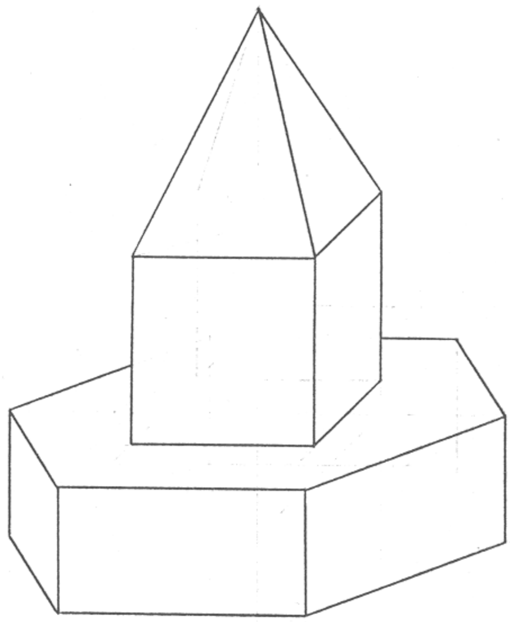
	1	
1	**1**	**1**

4.6 Náměty pro rys

Jednou z možností semestrální práce pro tento předmět je zadání rysu. Přitom může být jeden objekt zobrazen ve volném rovnoběžném promítání, druhý v Mongeově promítání.



Obr. A



Obr. B

4.7 Úlohy k procvičení

1. Zobrazte krychli *ABCDEFGH* a určete její řez rovinou *KLF*, kde *K* je střed hrany *EH*, *L* je střed *AB*.

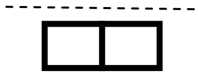
2. Zobrazte trojboký kolmý hranol *ABCA'B'C'* a určete jeho průnik s poloprostorem *KLC'B*, kde *K* je střed hrany *AA', B* je střed *LA*.

3. Zobrazte trojboký jehlan *ABCV* a určete jeho řez rovinou *KLM*, kde *K* je střed hrany *AV, B* je střed *LV* a *M* je střed *CV*.

4. Sestrojte sdružené průměty a) pravidelného trojbokého hranolu;
b) pravidelného trojbokého jehlanu;
c) pravidelného trojbokého komolého jehlanu.

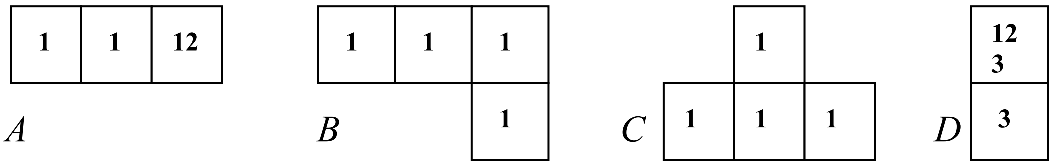
5. Sestrojte sdružené průměty složeného tělesa na obr. B článku 4.6.

6. K danému půdorysu sestrojte několik nárysů tak, aby byly vytvořeny sdružené průměty zcela různých těles.

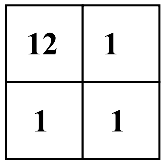


7. K danému nárysu sestrojte několik půdorysů tak, aby byly vytvořeny sdružené průměty zcela různých těles.

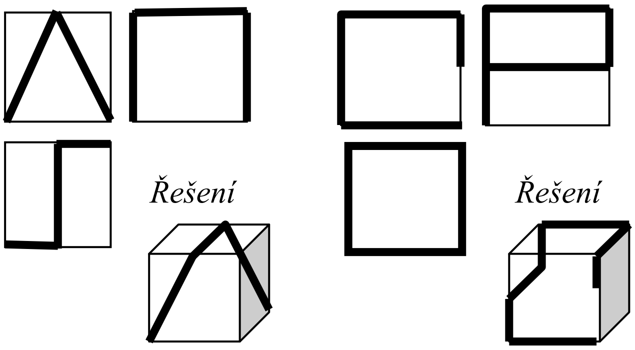
8. Kolik různých krychlových těles je zde zobrazeno kótováním ?



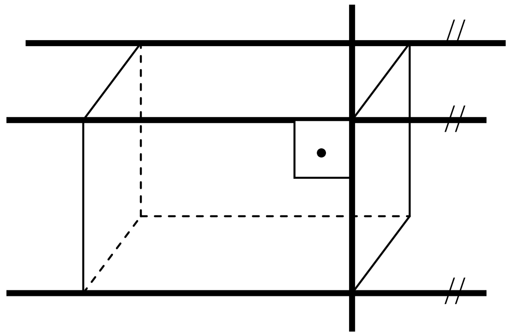
9. Kótováním zobrazené krychlové těleso zobrazte
a) ve volném rovnoběžném promítání
b) v Mongeově promítání



10. Ve volném rovnoběžném promítání vyznačte, jak je namotán drát na povrchu průhledné krychle, jestliže vidíme jeho půdorys, nárys a bokorys.



5. RELACE V GEOMETRII



5.1 Opakování pojmů z Elementární aritmetiky

Def: Podmnožinu kartézského součinu **M**x**M** nazveme **binární relací** v množině **M.**

Def: Vlastnosti relací: ***reflexivnost, symetričnost, tranzitivnost, konektivnost.***
Jak jsou definovány, způsoby grafického znázorňování, příklady.

Def: Typy relací: ***ekvivalence, uspořádání.***
Jak jsou definovány, co vytvářejí, příklady.

5.2 Relace mezi zobrazeními

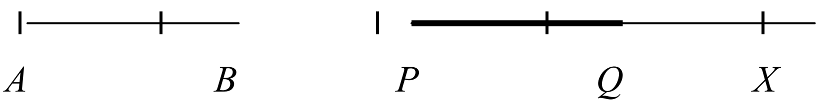
5.2.1 Relace shodnost

Základní žákovská představa shodnosti dvou útvarů je, že při jejich přemístění se vzájemně „kryjí“.

Od 2. ročníku ZŠ se žáci seznamují se shodností úseček, trojúhelníků a dalších útvarů.

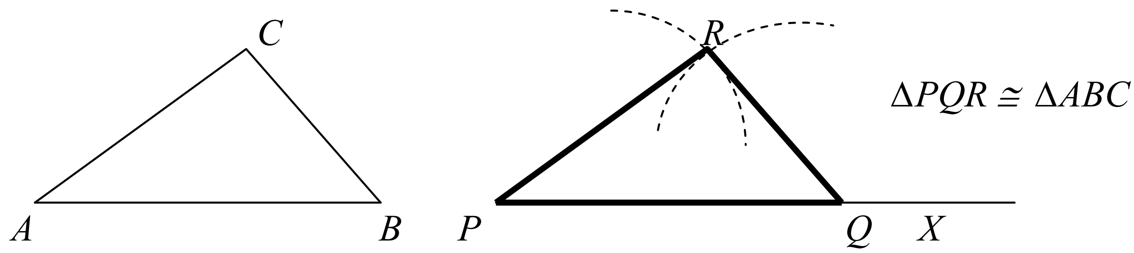
Rozlišují i shodnost přímou - stačí pouze přesun průsvitky mezi útvary
a nepřímou - průsvitku s obrazem útvaru nutno převrátit.

Př.1 Danou úsečku *AB* přeneste na polopřímku *PX* (papírkem, kružítkem)



$AB \cong PQ$

Př.2 Daný trojúhelník ABC přeneste k polopřímce PX (kružítkem, pravítkem)



Př.3 ΔABC má rozměry $AB = 3cm,\ BC = 4cm,\ CA = 5cm.$
ΔKLM má rozměry $KM = 3cm,\ KL = 4cm,\ LM = 5cm.$
Je trojúhelník ABC shodný s trojúhelníkem KLM ?

Není, ΔABC je shodný s ΔKML.

Př.4 Jsou tyto dva útvary shodné?

Matematicky jsou dva útvary $\boldsymbol{U_1}$,$\boldsymbol{U_2}$ shodné, pokud existuje shodné zobrazení **Z**, ve kterém obrazem útvaru $\boldsymbol{U_1}$ je útvar $\boldsymbol{U_2}$.

Shodnost bude probírána později se shodnými geometrickými zobrazeními.

Relace shodnost je ekvivalence, rozkládá množinu geometrických útvarů na třídy navzájem shodných útvarů.

5.2.2 Relace podobnost

Základní žákovská představa podobnosti dvou útvarů je, že jeden je zvětšením nebo zmenšením druhého. Např. zvětšenina fotografie.

Podobnost bude probírána později s podobnými geometrickými zobrazeními.

Př.5 Rozhodněte, jaký typ relace je podobnost.

5.3 Relace mezi mírami útvarů

5.3.1 Relace rovnost

Relace mezi velikostmi, tzn. mezi mírami geometrických útvarů.

Např. Úsečky mají sobě rovné délky.

Úhly mají sobě rovné velikosti.

Obdélníky mají sobě rovné odvody, ale nemusí být shodné.
ABCD má délku 5cm, šířku 2cm; *KLMN* má délku 4cm, šířku 3cm.

Obdélníky mají sobě rovné obsahy, ale nemusí být shodné.
ABCD má délku 6cm, šířku 2cm; *KLMN* má délku 4cm, šířku 3cm.

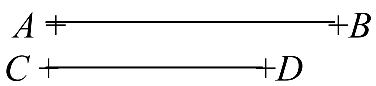
Relace rovnost je **ekvivalence**.

5.3.2 Relace „je menší", „je větší"

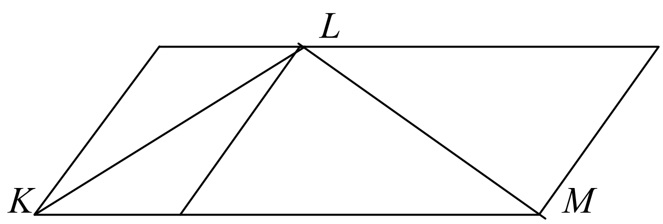
Opět relace mezi velikostmi, tzn. mezi mírami geometrických útvarů.

Relace „je menší", „je větší" je relace **uspořádání.**

Např. Porovnávání úseček, která je větší (menší).
(Lze i bez pojmu geometrická míra – proužkem papíru a pod.)

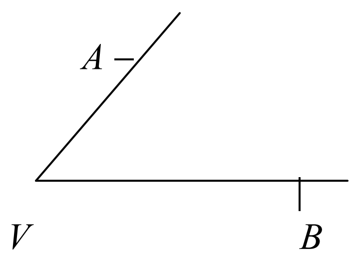


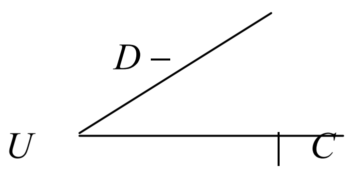
$AB > CD$



Je na obrázku delší úsečka *KL* nebo úsečka *LM* ?

Porovnávání úhlů. Lze i bez pojmu geometrická míra.





úhel AVB > *úhel CUD*

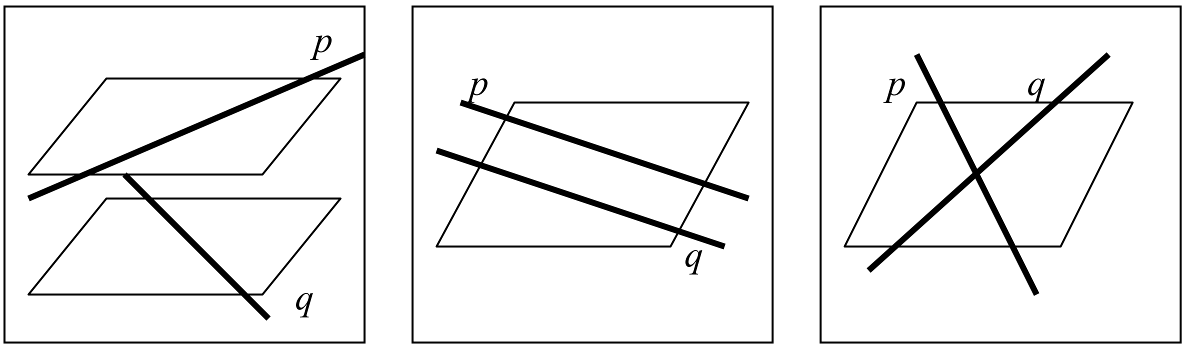
5.4 Relace vzájemných poloh přímek a rovin

5.4.1 Vzájemné polohy přímek

Vzájemné polohy přímek p,q se třídí podle toho, zda leží v téže rovině a co je jejich průnikem.

$p \cap q = \{\ \}$ – p, q nekomplanární – přímky **mimoběžné**
↘ p, q komplanární – přímky **rovnoběžné** $\boldsymbol{p \parallel q}$

$p \cap q \neq \{\ \}$ – $p \cap q = p$ – přímky **rovnoběžné** *splývající*
↘ $p \cap q = \{P\}$ – přímky **různoběžné** $\boldsymbol{p \times q}$
zvl.případ ***různoběžné kolmé*** $\boldsymbol{p \perp q}$

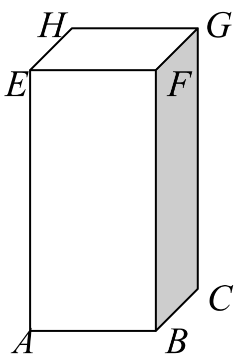


Def: Přímky p, q, které mají od sebe stále stejnou vzdálenost, se nazývají **rovnoběžné.**

Rovnoběžnost přímek je relace ekvivalence.
Ta vytváří rozklad na třídy navzájem rovnoběžných přímek, každá z těchto tříd se nazývá ***směr.***

Př.6 Kvádr *ABCDEFGH*, přímky vyjádřené pomocí jeho vrcholů:

1) s využitím hran kvádru uveďte
   a) příklady přímek mimoběžných;
   b) příklady přímek rovnoběžných (např. patřících směru *AE*);
   c) příklady přímek různoběžných a jejich průsečíků;
   d) příklady přímek různoběžných kolmých a jejich průsečíků .



2) bez využití hran kvádru

   a) příklady přímek mimoběžných;
   b) příklady přímek rovnoběžných
      (např. patřících směru *AH*);
   c) příklady přímek různoběžných
      a jejich průsečíků;
   d) příklady přímek různoběžných kolmých
      a jejich průsečíků.

Def: Přímky p, q, které rozdělí rovinu na čtyři shodné části, se nazývají navzájem **kolmé**.
Tyto shodné části nazýváme pravé úhly.

Kolmost přímek je relace symetrická, není tranzitivní.

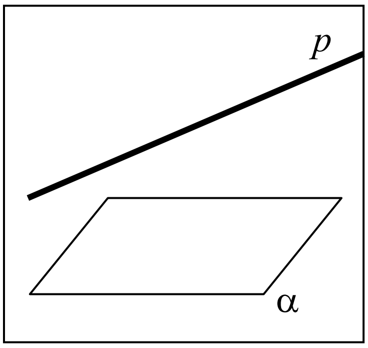
Pozn: Kolmost přímek je zvláštní případ různoběžnosti přímek.

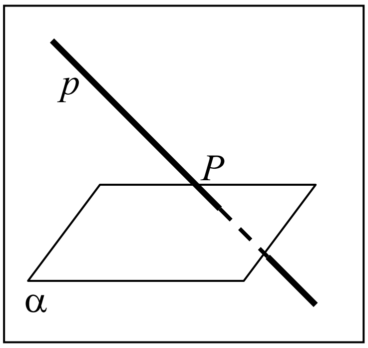
Pozn: Mimoběžky *p, q* jsou k sobě kolmé, právě když existuje přímka *q‘*, *q‘//q* taková, že *p, q‘* jsou k sobě kolmé různoběžky.

5.4.2 Vzájemné polohy přímek a rovin

Vzájemné polohy přímek *p* a roviny α se třídí podle toho, zda leží v téže rovině a co je jejich průnikem.

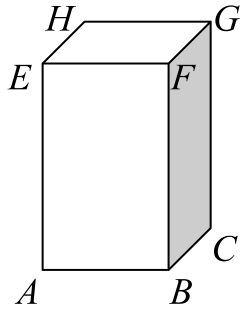
$p \cap \alpha = \{\ \}$ –		– jsou **rovnoběžné**	$\boldsymbol{p \parallel \alpha}$
$p \cap \alpha \neq \{\ \}$ –	$p \cap \alpha = p$	– jsou **rovnoběžné** (*p leží v* α)	
	$p \cap \alpha = \{P\}$	– jsou **různoběžné**	$\boldsymbol{p \times \alpha}$
		zvl.případ ***různoběžné kolmé***	$\boldsymbol{p \perp \alpha}$





Př. *7* Kvádr *ABCDEFGH*, přímky a roviny vyjádřené pomocí jeho vrcholů:

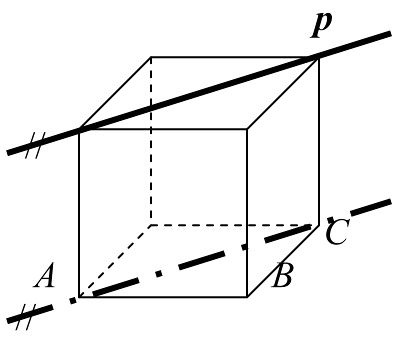
1) s využitím hran a stěn kvádru uveďte
   a) příklady rovin rovnoběžných s přímkou;
   b) příklady rovin různoběžných s přímkou a jejich průsečíků;
   c) příklady rovin různoběžných kolmých s přímkou a jejich průsečíků .



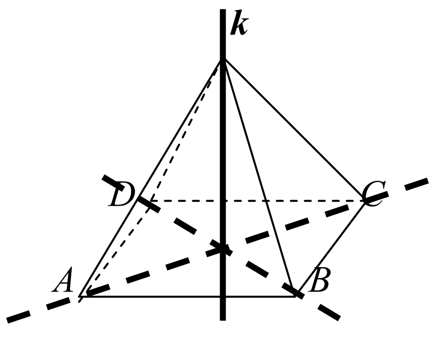
2) bez využití stěn kvádru uveďte
   a) příklady rovin rovnoběžných s přímkou;
   b) příklady rovin různoběžných s přímkou a jejich průsečíků;
   c) příklady rovin různoběžných kolmých s přímkou a jejich průsečíků.

Kritérium rovnoběžnosti *přímky s rovinou:*
Přímka p je rovnoběžná s rovinou α právě když je rovnoběžná alespoň s jednou přímkou q roviny α.

Kritérium kolmosti *přímky s rovinou:*
Přímka p je kolmá k rovině α právě když je kolmá alespoň ke dvěma různoběžkám a, b roviny α.



$př.AC \subset rov.ABC \wedge př.AC \parallel p$
$\Rightarrow$ přímka $p \parallel$ s rovinou ABC

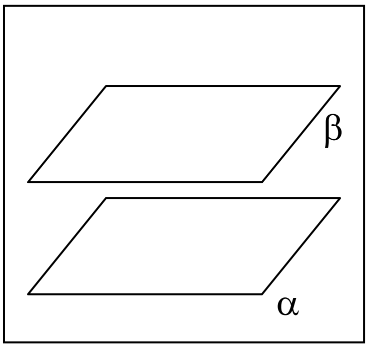


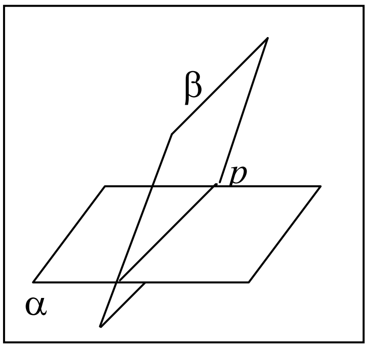
$př.AC \subset rov\ ABC \wedge př.BD \subset rov\ ABC$
$\wedge\ př.k \perp př.AC \wedge př.k \perp př.BD \Rightarrow$
$\Rightarrow$ přímka $k \perp$ k rovině ABC

5.4.3 Vzájemné polohy rovin

Vzájemné polohy rovin α a β se třídí podle toho, co je jejich průnikem.

$\alpha \cap \beta = \{\ \}$ –	– jsou **rovnoběžné**	$\alpha \parallel \beta$
$\alpha \cap \beta \neq \{\ \}$ – $\alpha \cap \beta = \beta$	– jsou **rovnoběžné** *(splývající*)	
$\searrow$ $\alpha \cap \beta = p$	– jsou **různoběžné**	$\alpha \times \beta$
	zvl.případ ***různoběžné kolmé***	$\alpha \perp \beta$





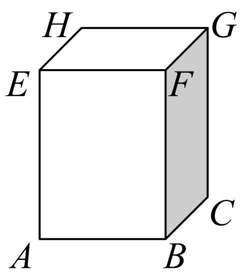
Def: Roviny α, β, které mají od sebe stále stejnou vzdálenost, se nazývají **rovnoběžné.**

Rovnoběžnost rovin je relace ekvivalence.
Ta vytváří rozklad na třídy navzájem rovnoběžných rovin, každá z těchto tříd se nazývá ***dvojsměr (osnova).***

Př.8 Kvádr *ABCDEFGH*, roviny vyjádřené pomocí jeho vrcholů:

1) s využitím hran a stěn kvádru uveďte

a) příklady rovin rovnoběžných;
b) příklady rovin různoběžných a jejich průsečnic;
c) příklady rovin různoběžných kolmých a jejich průsečnic.



2) bez využití stěn kvádru

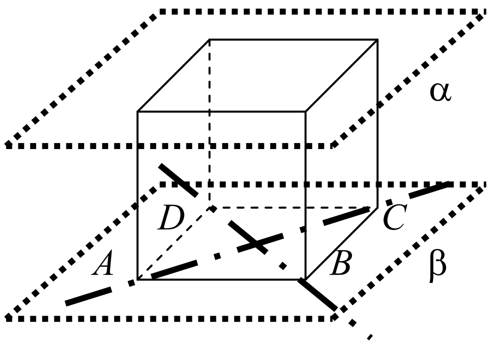
a) příklady rovin rovnoběžných;
b) příklady rovin různoběžných a jejich průsečnic;
c) příklady rovin různoběžných kolmých a jejich průsečnic.

Kritérium rovnoběžnosti *rovin:*

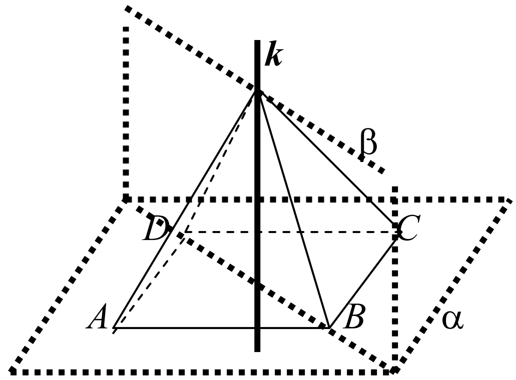
Roviny α, β jsou rovnoběžné právě když je rovina α rovnoběžná alespoň se dvěma různoběžkami roviny β.

Kritérium kolmosti *rovin:*

Rovina α je kolmá k rovině β právě když je rovina α kolmá alespoň k jedné přímce roviny β.



$př.AC \subset rov.\beta \wedge př.BD \subset \beta$
$př.AC \,//\, rov.\alpha \wedge př.BD \,//\, \alpha$
$\Rightarrow rov.\alpha \,//\, rov.\beta$



$př.k \subset rov.\ \beta \wedge př.k \perp\ rov.\ \alpha$
$\Rightarrow rov.\alpha \perp\ rov.\beta$

5.5 Úlohy k procvičení

1. Vyšetřete všechny možné vzájemné polohy tří různých přímek v rovině.

2. Vyšetřete všechny možné vzájemné polohy tří různých rovin v prostoru.

3. Jsou-li přímky *AB, CD* mimoběžné, jakou polohu mají přímky *AD, BC* ?

4. Je dána krychle *ABCDEFGH*. Jaká je vzájemná poloha rovin *DBF, AGH*? Určete co průnikem těchto rovin.

5. Kvádr *ABCDEFGH*, přímky vyjádřené pomocí jeho vrcholů:
a) s využitím hran kvádru uveďte k přímce *BC* příklady přímek k ní mimoběžných; rovnoběžných; různoběžných; různoběžných kolmých.
b) bez využití hran kvádru uveďte k přímce *BC* příklady přímek k ní mimoběžných; rovnoběžných; různoběžných; různoběžných kolmých.

6. Krychle *ABCDEFGH*, přímky a roviny vyjádřené pomocí jeho vrcholů:
a) s využitím stěn krychle uveďte k přímce *BC* příklady rovin k ní mimoběžných; rovnoběžných; různoběžných; různoběžných kolmých.
b) bez využití stěn krychle uveďte k přímce *BC* příklady rovin k ní mimoběžných; rovnoběžných; různoběžných; různoběžných kolmých.

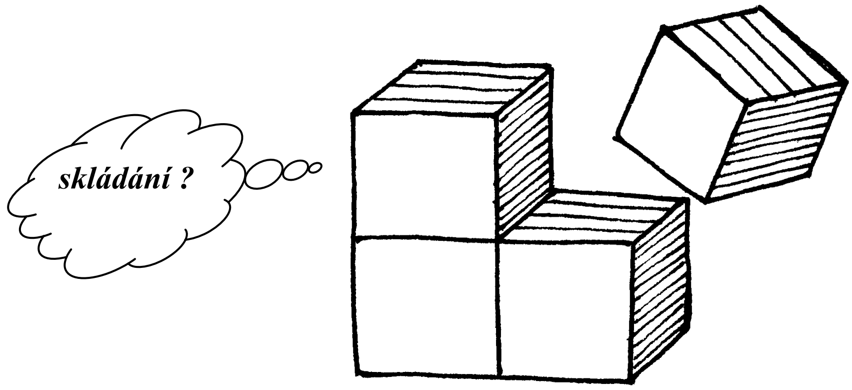
7. Krychle *ABCDEFGH*, roviny vyjádřené pomocí jeho vrcholů:
a) s využitím stěn krychle uveďte k rovině *BCG* příklady rovin k ní mimoběžných; rovnoběžných; různoběžných; různoběžných kolmých.
b) bez využití stěn krychle uveďte k rovině *BCG* příklady rovin k ní mimoběžných; rovnoběžných; různoběžných; různoběžných kolmých.

8. Přímky *a, b* jsou různé rovnoběžky ležící v rovině α . Přímka *p* je kolmá s přímkou *a* i s přímkou *b*. Je přímka *p* kolmá k rovině α ?

9. Přímka *p* je rovnoběžná s rovinou α , přímka *q* leží v rovině α . Jaká je vzájemná poloha přímek *p, q* ?

10. Je dán čtyřstěn *ABCD*, body *K, L, M* jsou středy hran *AD, BD, CD*. Jaká je vzájemná poloha rovin *ABC, KLM* ? Zdůvodněte.

6. OPERACE V GEOMETRII



6.1 Opakování pojmů z Elementární aritmetiky

Def: Zobrazení kartézského součinu **M**x**M** do množiny **M** nazýváme **binární operace.**

Def: Vlastnosti operací: ***úplnost, asociativnost, komutativnost, existence neutrálního a inverzních prvků, distributivnost.***

Jak jsou definovány, způsoby grafického zápisu, příklady ze základní školy.

Def: Dvojice (**M**, o), kde **M** je množina a o je operace se nazývá **algebraická struktura.**

Def: Typy algebraických struktur s jednou a dvěma operacemi: ***pologrupa, grupa, polookruh, okruh, těleso...***

Jak jsou definovány, příklady ze základní školy.

6.2 Aritmetické operace s geometrickými útvary

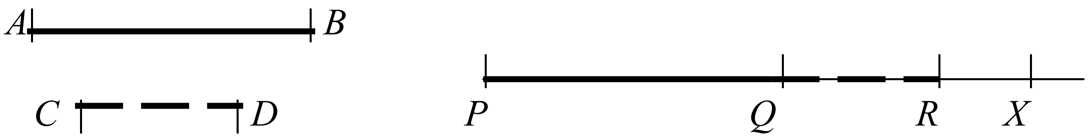
6.2.1 Operace sčítání úseček

Ve škole se provádí grafické sčítání úseček přenesením na polopřímku tak, aby sčítané úsečky měly společné pouze své krajní body a součet úseček je pak jejich sjednocení.

Při sjednocení jsou průnikem geometrických útvarů pouze hraniční body.

Odlišnost od sčítání čísel v aritmetice, kde sčítání je pomocí sjednocení, kde průnik je prázdný!

Př.1 Graficky proveďte součet úseček AB a CD.



$$PQ \cong AB \wedge QR \cong CD \Rightarrow PR = AB + CD$$

Na polopřímku PX přeneseme úsečku AB tak, že $PQ \cong AB$, dále na polopřímku QX přeneseme CD tak, aby $QR \cong CD$. Úsečka PR se nazývá grafický součet úseček AB a CD.

Matematicky přenášením neprovádíme sjednocení úseček AB a CD, ale sjednocujeme jiné vhodné úsečky shodné s těmi původními, tedy sjednocujeme jiné reprezentanty ze tříd úseček shodných s AB, resp. CD.

Def: Relace shodnost provede na množině úseček rozklad na třídy navzájem shodných úseček.
Nechť úsečka AB je reprezentantem třídy T_{AB}, do které patří i úsečka PQ a úsečka CD je reprezentantem třídy T_{CD}, do které patří i úsečka QR. Pak **součtem** úseček $AB \in T_{AB}$ a $CD \in T_{CD}$ nazveme úsečku $PR \in T_{PR}$, právě když $PQ \cup QR = PR$ a bod Q leží mezi body P, R a Q je jediným prvkem průniku PQ a QR.

$AB \in T_{AB} \wedge PQ \in T_{AB} \wedge CD \in T_{CD} \wedge QR \in T_{AB}$,pak $AB+BC = PR$, kde $PR \in T_{PR} = T_{AB+CD}$

Lze dokázat, že sčítání úseček (vhodných reprezentantů ze shodných tříd) je úplné, asociativní, komutativní a tvoří tedy komutativní pologrupu.

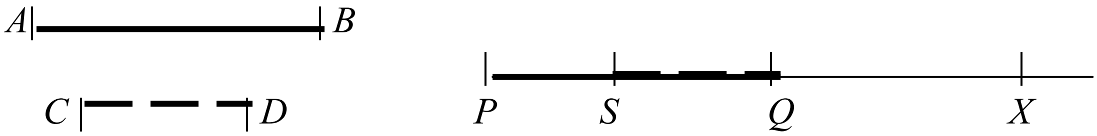
Pozn: Nutno dobře rozlišovat součet a sjednocení.

6.2.2 Operace odčítání úseček

Pozn: **Odčítání** v množině tříd shodných úseček je inverzní operací ke sčítání. Odčítání úseček není operace úplná. Ve škole se tato operace používá.

Je-li úsečka PR součtem úseček AB a CD, pak úsečka AB je rozdílem úseček PR a CD.

Př.2 Graficky určete rozdíl úseček AB a CD ($AB > CD$).



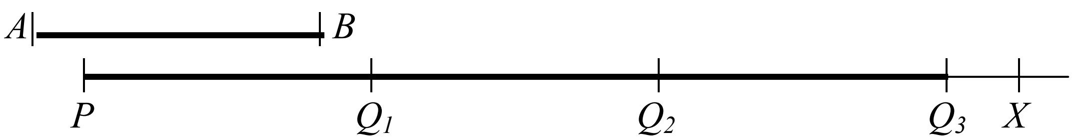
$$PQ \cong AB \wedge QS \cong CD \Rightarrow PS = AB - CD$$

Na polopřímku PX přeneseme úsečku AB tak, že $PQ \cong AB$, dále na polopřímku QP přeneseme CD tak, aby $QS \cong CD$. Úsečka PS se nazývá grafický rozdíl úseček AB a CD.

6.2.3 Operace (přirozený) násobek úsečky

Def: Operace (přirozený) n-tý násobek úsečky je opakovaný součet n shodných úseček.

Př.3 Graficky určete trojnásobek úsečky AB.



$$PQ_1 \cong AB \wedge Q_1Q_2 \cong AB \wedge Q_2Q_3 \cong AB \Rightarrow PQ_3 = 3 \,.\, AB$$

Na polopřímku PX přeneseme úsečku AB tak, že $PQ_1 \cong AB$, dále na polopřímku Q_1X přeneseme AB tak, aby $Q_1Q_2 \cong AB$, na polopřímku Q_2X přeneseme AB tak, aby $Q_2Q_3 \cong AB$. Úsečka PQ_3 je trojnásobkem úsečky AB.

6.2.4 Operace sčítání (konvexních) úhlů

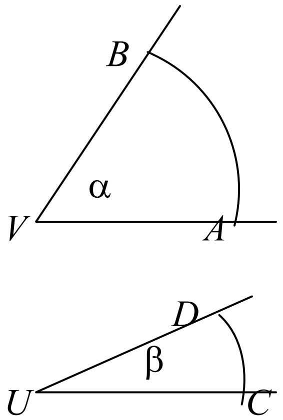
Ve škole se provádí grafické sčítání úhlů přenesením k polopřímce tak, aby sčítané úhly měly společné pouze jedno rameno a součet úhlů je pak jejich sjednocení.

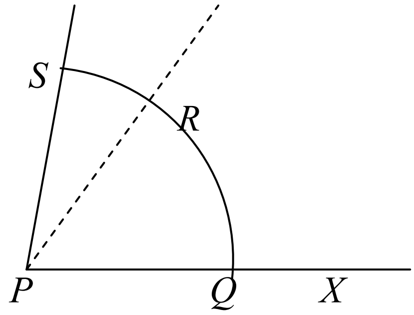
Při sjednocení jsou průnikem geometrických útvarů pouze hraniční body.

Odlišnost od sčítání čísel v aritmetice, kde sčítání je pomocí sjednocení, kde průnik je prázdný!

Pozn: Pro zjednodušení se již nebudeme nadále zabývat třídami shodných úhlů, ale přímo úhly, tak jak se probírá ve škole.

Př.4 Graficky určete součet úhlů α a β.





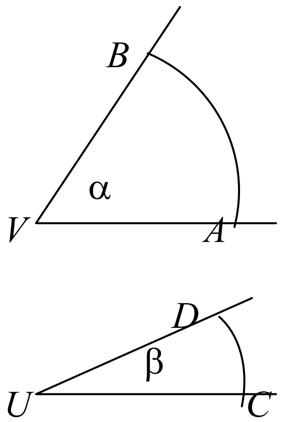
$$\alpha = \angle AVB \cong \angle QPR \wedge \beta = \angle CUD \cong \angle RPS \Rightarrow \alpha + \beta = \angle QPS$$

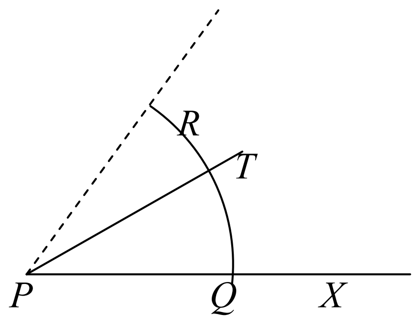
K polopřímce *PX* přeneseme úhel α tak, že $\alpha \cong \angle QPR$, dále k polopřímce *PR* přeneseme ve stejné orientaci úhel β tak, aby $\beta \cong \angle RPS$. Úhel $\angle QPS$ se nazývá grafický součet úhlů α a β .

Pozn: Dvojici úhlů $\angle QPR$ a $\angle RPS$ nazýváme ***úhly styčné***.
Je-li součet styčných úhlů úhel přímý, pak se nazývají ***úhly vedlejší***.

6.2.5 Operace odčítání (konvexních) úhlů

Př.5 Graficky určete rozdíl úhlů α a β ($\alpha > \beta$).





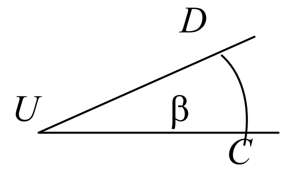
$$\alpha = \angle AVB \cong \angle QPR \wedge \beta = \angle CUD \cong \angle RPT \Rightarrow \alpha - \beta = \angle QPT$$

K polopřímce *PX* přeneseme úhel α tak, že $\alpha \cong \angle QPR$, dále k polopřímce *PR* přeneseme v opačné orientaci úhel β tak, aby $\beta \cong \angle RPT$. Úhel $\angle QPT$ se nazývá grafický rozdíl úhlů α a β .

6.2.6 Operace (přirozený) násobek úhlu

Operace (přirozený) n-tý násobek úhlu je opakovaný součet n shodných úhlů. Pro grafické řešení je omezující hodnota plný úhel (360^0).

Př.6 Graficky určete trojnásobek úhlu β.

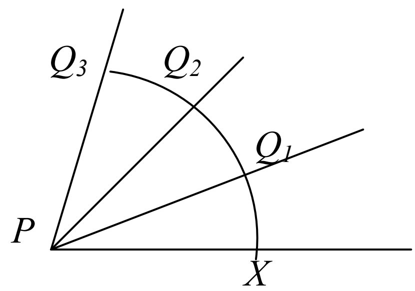


$\beta \cong \angle XPQ_1$ $\qquad$ $\beta = \angle CUD$

$\beta \cong \angle Q_1PQ_2$

$\underline{\beta \cong \angle Q_2PQ_3}$

$3 \,.\, \beta = \angle XPQ_3$



6.3 Množinové operace s geometrickými útvary

Na 1. stupni základní školy se nezdůrazňuje chápání geometrických útvarů jako bodových množin (žáci nechápou nekonečnost, spojitost apod.).

Přesto je výhodné vyjadřovat některé vztahy mezi geometrickými útvary pomocí množinových operací, i když s žáky množinovou terminologii většinou nepoužíváme.

6.3.1 Průnik bodových množin

Žáci používají místo průnik termíny - průsečík (průsečnice), co mají útvary společného apod.

Průnik - umožňuje třídění, např. při vzájemných polohách přímek...
Rovnoběžky nemají společný žádný bod.

- je využíván při určování prvků spontánní stereometrie.
Společná část sousedních stěn tělesa se nazývá hrana.

- je využíván při konstruktivních úlohách.
Hledaný vrchol obrazce je průsečíkem dvou přímek.

6.3.2 Sjednocení bodových množin

Žáci používají místo sjednocení termíny - souhrn, spojení, všechny možné, z jednoho nebo z druhého útvaru apod.

Sjednocení - umožňuje definování některých geometrických útvarů.

Body kruhu jsou body na kružnici nebo body uvnitř kružnice.

Osu úsečky tvoří všechny body, které mají od krajních bodů úsečky stejnou vzdálenost.

- zavádí se pomocí něho sčítání úseček.

Součet úseček je spojení úseček nanesených za sebou na polopřímku tak, aby měly společný jen krajní bod.

- umožňuje výpočet velikosti míry složených geometrických útvarů.

Velikost obsahu útvaru vzniklého spojením čtverce a obdélníka, které se nepřekrývají, určíme sečtením obsahů těchto jednotlivých útvarů.

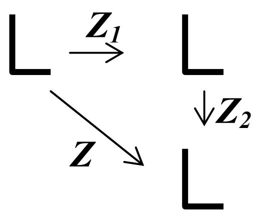
6.4 Operace skládání zobrazení

Geometrická zobrazení shodná a podobná budou součástí textu Kapitoly z elementární geometrie II. Proto zde pouze naznačíme některé základní myšlenky operace skládání zobrazení a podrobněji se k tomuto tématu vrátíme později.

Mějme dvě zobrazení $\boldsymbol{Z_1}$, $\boldsymbol{Z_2}$ množiny **M**. Proveďme nejdříve zobrazení $\boldsymbol{Z_1}$ a potom zobrazení $\boldsymbol{Z_2}$. Každý bod X množiny **M** se zobrazením $\boldsymbol{Z_1}$ zobrazí nejdříve do bodu $X' = \boldsymbol{Z_1}(X)$ a potom se bod X' zobrazením $\boldsymbol{Z_2}$ zobrazí do bodu $X'' = \boldsymbol{Z_2}(X')$ množiny **M**. Můžeme psát $X'' = \boldsymbol{Z_1}[\boldsymbol{Z_2}(X)]$. Dostáváme zobrazení $\boldsymbol{Z}$ množiny **M**, v němž je bodu X jednoznačně přiřazen bod X'', tedy $\boldsymbol{Z}$ (X)= X". Uvedenou operaci nazýváme **skládání zobrazení**. Zapisujeme $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z_1} \circ \boldsymbol{Z_2}$**.**

Např. Složením posunutí $\boldsymbol{Z_1}$ o 4 jednotky doprava a posunutí $\boldsymbol{Z_2}$ o 3 jednotky dolu vznikne …

posunutí $\boldsymbol{Z}$ o 5 jednotek šikmo vpravo dolu.



Operaci skládání zobrazení označujeme kolečkem nebo tečkou. Připomíná operaci násobení čísel. Je možno dokazovat základní vlastnosti této operace jako úplnost, asociativnost, komutativnost, existenci neutrálního a inverzních prvků.

Jestliže obrazem bodu A je týž bod A, $\boldsymbol{Z}(A) = A$, říkáme, že A je ***samodružný bod***. Obdobně je-li obrazem útvaru U týž útvar U, $\boldsymbol{Z}(U) = U$, je U ***samodružný útvar***.

Zobrazení, v němž jsou všechny body množiny samodružné, se nazývá **identita** a označuje se $\boldsymbol{J}$.

Je-li zobrazení $\boldsymbol{Z}$ prosté zobrazení množiny **M**, pak k němu existuje **zobrazení inverzní** $\boldsymbol{Z}^{-1}$, také prosté. Platí, že $\boldsymbol{Z}^{-1}(A') = A$, právě když $\boldsymbol{Z}(A) = A'$ pro všechny body A, A' množiny **M**.

Prostá zobrazení množiny **M** se nazývají také **transformace množiny M.**

Platí zřejmě, že složením prostého zobrazení $\boldsymbol{Z}$ a k němu inverzního zobrazení $\boldsymbol{Z}^{-1}$ vznikne identita $\boldsymbol{J}$. Zapisujeme $\boldsymbol{Z} \circ \boldsymbol{Z}^{-1} = \boldsymbol{J}$.

Zobrazení $\boldsymbol{Z}$, které není identita a pro které platí $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}^{1}$ se nazývá **involutorní zobrazení**. Platí něj tedy $\boldsymbol{Z} \circ \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{J}$.

6.5 Úlohy k procvičení

1. Sestrojte trojúhelník ABC a graficky určete jeho obvod.

2. Sestrojte trojúhelník ABC a graficky určete součet jeho vnitřních úhlů.

3. Jsou dány úhly α a β ($\alpha > \beta$). Sestrojte graficky úhel $\varphi = 2\alpha - \beta$.

4. Dokažte asociativnost sčítání úseček.

5. Sestrojte trojúhelník ABC a porovnejte jeho vnější úhel při vrcholu A s grafickým součtem vnitřních úhlů při vrcholech B a C. Co platí ?

6. V rovině je dána přímka p a bod $A \in p$. Pouze pomocí přímého pravítka a kružítka sestrojte bodem A přímku k kolmou k přímce p. Zdůvodněte.

7. Jaké útvary mohou být průnikem dvou trojúhelníků v rovině ?

8. Jaké množiny mohou být průnikem trojúhelníku a konvexního úhlu v rovině?

9. Lze vyjádřit nekonvexní pětiúhelník pomocí sjednocení nepřekrývajících se trojúhelníků se společným vrcholem a) v jednom vrcholu pětiúhelníku,
b) ve vnitřním bodě pětiúhelníku.

10. Určete maximální počet částí roviny, na které ji rozdělí sjednocení hranic dvou trojúhelníků.

VÝSLEDKY ÚLOH

1.5

1. a) kruh, kruhová výseč;
b) kruh, kruhová úseč, kruhová výseč, kruh bez 2 kruhových úsečí.

2.

M rovina:	a) např. čtverec,	b) např. konvexní úhel;
M prostor:	a) např. čtverec,	b) např. konvexní úhel;
M kruh:	a) např. čtverec, je-li částí M,	b) neexistuje.

3. a) lomená čára *ABCDA*; b) čtverec *ABCD;* c) prázdná množina.

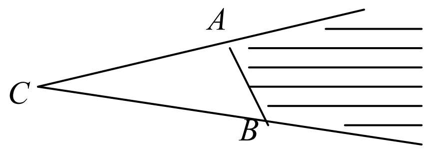
2.3

1.

A, B, C kolineární:	3 úsečky,	12 polopřímek,	3 přímky;
A, B, C nekolineární:	3 úsečky,	6 polopřímek,	1 přímka.

2. a) každé tři body nekolineární 12 polorovin, b) závisí.
jedna trojice bodů kolineární 8 polorovin,
všechny body kolineární 2 poloroviny;

3.



4. Prázdná množina, přímka, polorovina, konvexní úhel, rovinný pás.

5. a) třemi nekolineárními body, b) přímkou a bodem, který na ní neleží,
c) dvěma různoběžkami, d) dvěma různými rovnoběžkami.

6. a) nekonvexní pětiúhelník *ABSCD*; b) např. $\Delta ABS \cup \Delta ACD$; c) ne.

7. u = n.(n-3)/2 , pro n > 3.

8. Např. čtverec, kosočtverec, deltoid.

9. Např. čtverec, obdélník, rovnoramenný lichoběžník.

10. a) ne, b) ne, c) ne.

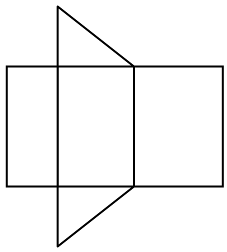
3.3

1. Prázdná množina, rovina, poloprostor, klín, vrstva.

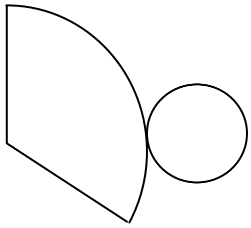
2. $v + s = h + 2$

3. 11 sítí . ***4.*** 2 sítě .

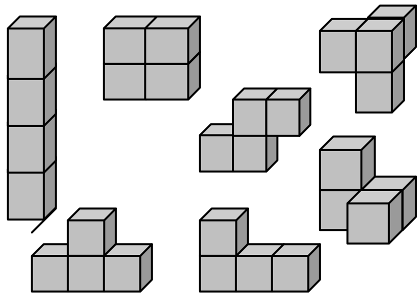
5. tvarově



6. tvarově



7.



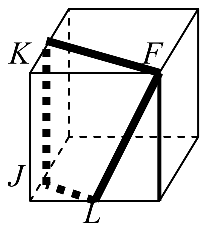
8. Obarvené 3 stěny … 8x, 2 stěny … 12x, 1 stěna … 6x, 0 stěn … 1x .

9. 14 vrcholů, 9 stěn, 21 hran . Formule platí.

10. Krychli tvoří: A+C, B+D . Navíc je E.

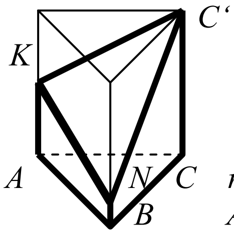
4.7

1.



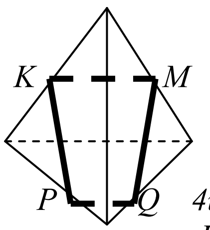
4úhelník
KJLF

2.



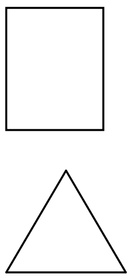
mnohostěn
ABCKNC‘

3.

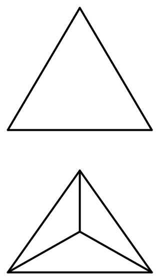


4úhelník
KPQM

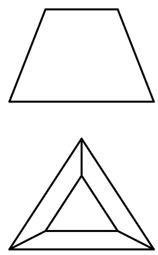
4. a)



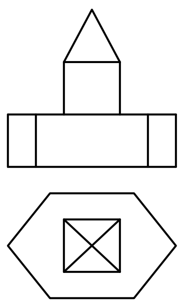
b)



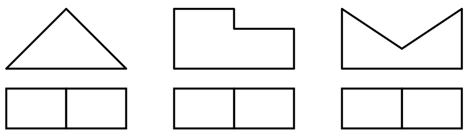
c)



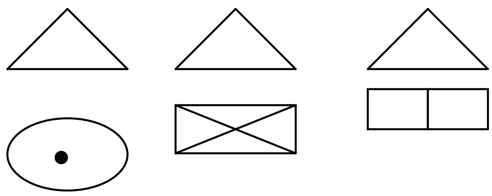
5.



6.

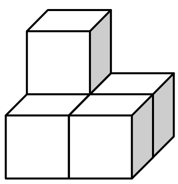


7.

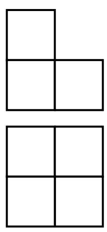


8. Dvě různá tělesa. A, B, D je stejné těleso.

9. a)



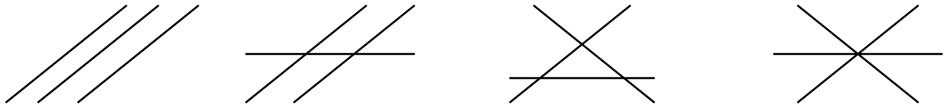
b)



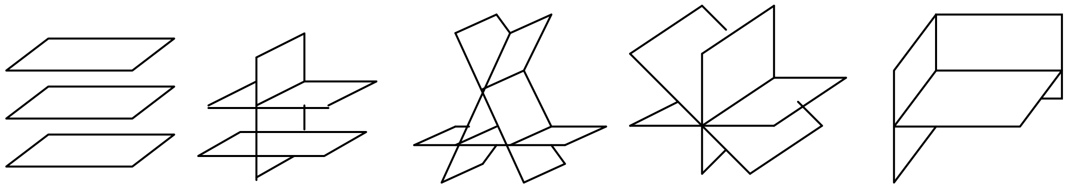
10. Je řešeno v textu.

5.5

1.



2.



3. Přímky *AD, BC* jsou mimoběžné.

4. Jsou různoběžné, jejich průnikem je přímka *BH*.

5. a) *AE; AD; AB; AB*. b) *FH; neex.; DB; neex*.

6. a) *neex.; EAD; ABF; ABF*. b) *neex.; DAF; DBF; neex*.

7. a) *neex.; EAD; ABF; ABF*. b) *neex.; DAF; DBF; neex*.

8. Je-li *p* kolmá k přímce *c,* která leží v rovině α a je různoběžné s *a*, pak je kolmá, jinak není.

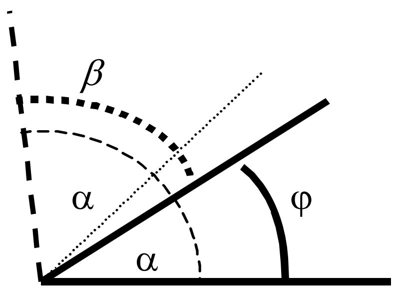
9. Mohou být mimoběžné, rovnoběžné, různoběžné.

10. Roviny jsou rovnoběžné. (Pomocí vlastností střední příčky trojúhelníka.)

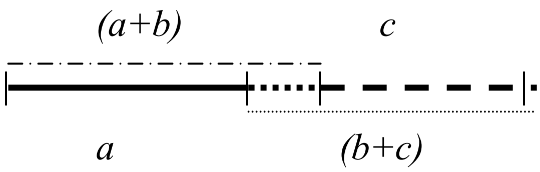
6.5

2. Součtem vnitřních úhlů je přímý úhel.

3.



4.



5. Vnější úhel trojúhelníku je součtem zbývajících vnitřních úhlů.

6. Kružnice $k_1(A;r)$, $r > v(A,p)$ protne přímku *p* v bodech *K, L*. Kružnice $k_2(K;r)$ a $k_3(L;r)$ se protnou v bodě *A'*. Kolmice $k = AA'$.

7. Bod, úsečka, trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník.

8. Prázdná množina, bod, úsečka, trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník.

9. a) pouze v určitém bodě; b) pouze v určitém bodě.

10. Na 8 částí.

LITERATURA

[01] BRINCKOVÁ, J.: *„Pekne dievča“ v geometrii.* In: Sborník Dva dny s didaktikou matematiky, Univerzita Karlova Praha 2001.

[02] HEJNÝ, M. A KOL.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava, SPN 1990.

[03] HEJNÝ, M., KUŘINA, F.: *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha, Portál 2001.

[04] KOUŘIM, J. a kol.: *Základy elementární geometrie pro učitelství 1.stupně ZŠ.* Praha, SPN 1985.

[05] KUŘINA, F.: *10 pohledů na geometrii.* Praha, MÚ AV ČR 1996.

[06] LEISCHNER. P.: *Pravoúhelníkové sítě čtyřstěnu.* In: Učitel matematiky, č. 3, ročník 11, Praha, JČMF 2003.

[07] MOLNÁR, J.: *K ověřování prostorové představivosti.* In: Matematika, fyzika ve škole, č. 9, Praha 1986.

[08] PERNÝ, J.: *Kapitoly z elementární geometrie I.* Liberec, Technická univerzita v Liberci 2004.

[09] PERNÝ, J.: *Prostorová představivost v prostředí krychle a pohyb*. Dizertační práce, Univerzita Karlova Praha 2001.

[10] PERNÝ, J.: *Tvořivostí k rozvoji prostorové představivosti.* Liberec, Technická univerzita v Liberci 2004.

[11] POMYKALOVÁ, E.: *Stereometrie. Matematika pro gymnázia.* Praha, Prometheus 1995.

[12] PŘÍHONSKÁ, J.: *Morfismy aneb netradiční přístup k úlohám.* In: Sborník z konference s mezinárodní účastí „Od činnosti k poznatku“, Plzeň, Západočeská univerzita 2003.

[13] PŘÍVRATSKÁ, J.: *Planimetrie.* Liberec, Technická univerzita v Liberci 2002.