Vysoká škola strojní a textilní v Liberci
nositelka Řádu práce
Fakulta strojní

obor 23 - 40 - 8
automatizované systémy řízení výrobních procesů
ve strojírenství

Katedra technické kybernetiky

ŘEŠENÍ ÚLOH POMOCÍ PRŮBĚŽNÝCH METOD NA POČÍTAČI

Autor : Jiří Kolda

Vedoucí práce : Ing. Miroslav Olehla, CSc.

KTK ASŘ SF - 092

Počet stran : 68
Počet příloh a tabulek : 13
Počet obrázků : -

Liberec, 24. května 1985

Vysoká škola: VŠST Liberec Fakulta: strojní

Katedra: technické kybernetiky Školní rok: 1984/85

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

pro s. Jiřího Keldu

obor 23-40-8 ASŘ výrobních procesů ve strojírenství

Vedoucí katedry Vám ve smyslu nařízení vlády ČSSR č. 90/1980 Sb., o státních závěrečných zkouškách a státních rigorózních zkouškách, určuje tuto diplomovou práci:

Název tématu: Řešení úloh pomocí průběžných metod na počítači

Zásady pro vypracování:

1) Prostudovat literaturu zaměřenou na dané téma
2) Sestavit programy a ověřit na počítači pro výpočty základních statistik, řešení soustavy lineárních algebraických rovnic a další zvolené řešení

SEVT - 49 395 0 I/82 JČT 1-4672-82

Rozsah grafických prací:

Rozsah průvodní zprávy: 40 - 50 stran

Seznam odborné literatury:

1/ Olehla,M., Věchet,V., Olehla,J.: Metody matematické statistiky ve FORTRANu. NADAS Praha 1982.

2/ ACM algoritmy

Vedoucí diplomové práce: Ing. Miroslav Olehla, CSc.

Datum zadání diplomové práce: 8.10.1984

Termín odevzdání diplomové práce: 24.5.1985

VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ LIBEREC
fakulta strojního inženýrství

Doc.Ing.Ján Alaxin,CSc.

Vedoucí katedry

Doc.RNDr Bohuslav Stříž,CSc.

Děkan

V Liberci dne 5.10. 1984

Místopřísežně prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury.

V Liberci dne 24.května 1985

Kolda Jiří

Úvodem své diplomové práce bych chtěl poděkovat Ing. Miroslavovi Olehlovi, CSc., vedoucímu mé diplomové práce, za pomoc, kterou mi při jejím vytváření poskytl.

Obsah

Seznam použitých zkratek a symbolů

k	krok výpočtu

kapitola 2

$\underline{X}$	statistické jednotky, třídní znaky, realizace náhodné proměnné
$\underline{n}$	četnosti
$\underline{W}$	"váhy"
$\bar{x}$	aritmetický průměr
$\tilde{x}$	medián
$\hat{x}$	modus
s^2	rozptyl
s	směrodatná odchylka
v	variační koeficient
R	variační rozpětí
R_{xx}, R_{xy}	korelační funkce
$\mathring{R}_{xx}, \mathring{R}_{xy}$	kovarianční funkce
ρ_{xx}, ρ_{xy}	centrované korelační funkce
$\mu_x = E[x]$	střední hodnota
$\sigma_x^2 = D[x]$	rozptyl

kapitola 3

$\underline{A}$	matice soustavy
$\underline{a}^T$	řádek matice soustavy
$\underline{x}$	vektor řešení
$\underline{b}$	vektor pravých stran
$\underline{e}$	vektor odchylek
φ	koeficient exponenciálního zapomínání
$\underline{I}$	jednotková matice

1. Úvod

Naplňování základního zákona socialismu, co nejširší uspokojování lidských potřeb, je nemožné bez rozvoje našeho národního hospodářství. Rozvoj ekonomiky za dnešní situace přímo vyžaduje rychlé a účelné zavádění výsledků vědeckotechnického výzkumu do výroby a stále plnější zefektivňování řízení. V tomto procesu má nezastupitelnou úlohu využívání výpočetní techniky. Řízení, zvláště efektivní řízení, je podmíněno rychlostí a kvalitou zpracování informací.

Tématem této diplomové práce je řešení úloh pomocí průběžných metod na počítači.

Průběžné metody, on-line metody, jsou jedním ze způsobů zpracování dat. Tyto metody vyhodnocují úlohy průběžně, tj. na základě starých výsledků a na základě nově získaných dat.

V práci je řešeno použití průběžných metod při výpočtu základních statistik, korelačních funkcí a při řešení soustav lineárních rovnic na počítači.

Při výpočtu základních statistik a korelačních funkcí se průběžné metody uplatňují zvláště v případě, kdy jsou vstupní data příliš rozsáhlá a nelze všechna uložit v operační paměti počítače /13/.

Velké uplatnění mají průběžné metody při řešení soustav lineárních rovnic. Používají se s úspěchem např. při identifikaci soustav, což je určování dynamických vlastností soustav. Vlastnosti soustavy se odhadují modelem soustavy, a protože parametry tohoto modelu jsou často časově proměnné, je vhodné je upřesňovat průběžně tak, aby model co nejlépe odpovídal chování soustavy v přítomnosti. Ze stejného důvodu je vhodné zavést i exponenciální zapomínání minulých dat s koeficientem φ /18/.

2. Výpočty základních statistik a korelačních funkcí

2.1 Základní statistiky

Statistiky, statistické charakteristiky, jsou veličiny, které podávají stručné a výstižné informace o statistickém souboru. Statistický soubor, stručněji soubor, je množina statistických jednotek X vymezených stejnými podmínkami. Statistické jednotky X mají určité vlastnosti, znaky.

Znaky se rozdělují na kvantitativní a kvalitativní. Kvantitativní znaky nabývají přímo číselných hodnot a dělí se na diskrétní a spojité. Kvalitativní znaky nenabývají přímo číselných hodnot, jsou to např. barva, profese apod.

Statistické jednotky X zahrnuté v souboru musí mít některé znaky shodné, př. shodný výrobek, stejné pracoviště.

Statistické charakteristiky se dělí na charakteristiky polohy, úrovně, a na charakteristiky variability, rozptýlení.

Charakteristikami polohy jsou např. aritmetický průměr, medián, modus.

Charakteristikami rozptýlení naproti tomu jsou rozptyl, směrodatná odchylka, variační koeficient a variační rozpětí.

Velmi rozsáhlé statistické soubory se dělí na třídy. Znamená to, že variační rozpětí (viz dále) se dělí na určitý počet intervalů o zpravidla stejné délce. Každá třída je reprezentována třídním znakem a absolutní četností.

Třídní znak x_j je definován pomocí

$$x_j = \frac{1}{2}(x_{jmax} + x_{jmin}) \quad , \text{ pro } j = 1, 2, .., k \qquad (2.1 - 1)$$

kde x_{jmax} a x_{jmin} označují horní a dolní mez j- té třídy a k je celkový počet tříd.

Absolutní četnost, krátce četnost, n_j udává počet statistických jednotek v j-té třídě.

Vedle absolutní četnosti se zavádí i relativní četnost ν_j jako poměr absolutní četnosti j-té třídy k celkovému počtu statistických jednotek.

$$\nu_j = \frac{n_j}{\sum_{j=1}^{k} n_j} \qquad (2.1 - 2)$$

a kumulativní četnost N_j , což je součet absolutních četností první až j-té třídy.

$$N_j = \sum_{i=1}^{j} n_i \qquad (2.1 - 3)$$

Aritmetický průměr

Aritmetický průměr $\bar{x}$ je nejrozšířenější charakteristikou polohy. Je definován vztahem

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad (2.1 - 4)$$

v němž x_i jsou statistické jednotky a n je jejich počet v souboru.

Pro skupinové rozdělení četností, tj. v případě, kdy se soubor rozděluje na třídy, je aritmetický průměr $\bar{x}$

definovám takto

$$\overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{k} x_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} n_j}, \qquad (2.1 - 5)$$

kde x_j jsou třídní znaky, n_j absolutní četnosti a k počet tříd.

Některé vlastnosti aritmetického průměru $\overline{x}$ pro a konstantní jsou

1. platí

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0 \qquad (2.1 - 6)$$

2. definujeme-li

$$y_i = x_i + a \quad \text{pro} \quad i = 1,2,\dots,n$$

pak

$$\overline{y} = \overline{x} + a \qquad (2.1 - 7)$$

3. definujeme-li $y_i = a x_i$ pro $i = 1,2,\dots,n$

je

$$\overline{y} = a\overline{x} \qquad (2.1 - 8)$$

4. platí

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 \qquad (2.1 - 9)$$

Medián

Medián $\tilde{x}$ je charakteristikou polohy. Je definován jako hodnota, vedle níž je stejný počet případů s menší nebo větší hodnotou.

Medián se vypočítává podle vztahů

$$\tilde{x} = x'_{(n+1)/2}, \qquad \text{pro } n \text{ liché} \qquad (2.1 - 10)$$

popř.

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}\left(x'_{n/2} + x'_{n/2+1}\right), \quad \text{pro } n \text{ sudé} \qquad (2.1 - 11)$$

přičemž x'_i značí členy posloupnosti vzniklé přerovnáním prvků původního statistického souboru podle velikosti.

$$x'_1 \leq x'_2 \leq \dots \leq x'_n$$

Pro případ skupinového rozdělení četnosti se nejprve vybírá třída, ve které medián leží, tj. třída s nejnižším indexem, pro kterou kumulativní četnost dosáhne či přesáhne polovinu počtu statistických jednotek

$$\sum_{j=1}^{\ell} n_j \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} n_j, \qquad (2.1 - 12)$$

kde ℓ je index třídy, ve které leží medián.

Medián se potom vypočítá podle vztahu /7/

$$\tilde{x} = x_{\ell min} + \frac{h}{n_\ell}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} n_j - \sum_{j=1}^{\ell-1} n_j\right), \qquad (2.1 - 13)$$

ve kterém h je délka třídy

$$h = x_{\ell max} - x_{\ell min}. \qquad (2.1 - 14)$$

Modus

Modus $\hat{X}$ je další charakteristikou polohy. Definuje se jako nejčetnější hodnota souboru.

V skupinovém rozdělení četností platí, že modus leží v nejčetnější třídě. Jeho konkrétní hodnota se vypočítá z /7/

$$\hat{X} = X_{\ell min} + \frac{\delta_{\ell-1}}{\delta_{\ell-1} + \delta_{\ell}} h, \qquad (2.1 - 15)$$

kde ℓ je index třídy, ve které leží modus a $\delta_{\ell-1}$ resp. δ_{ℓ} je rozdíl mezi četností ℓ-té třídy a četností třídy předcházející, resp. následující.

$$\delta_{\ell-1} = n_{\ell} - n_{\ell-1}$$

a (2.1 - 16)

$$\delta_{\ell} = n_{\ell} - n_{\ell+1} \qquad (2.1 - 17)$$

Modus není definován, pokud ve více třídách je stejná četnost.

Rozptyl

Rozptyl S^2 je nejrozšířenější charakteristikou rozptýlení. Je definován vztahem

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2. \qquad (2.1 - 18)$$

Pro skupinové rozdělení četností platí pro výpočet rozptylu S^2 vztah

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{j=1}^{k} (x_j - \bar{x})^2 n_j}{\sum_{j=1}^{k} n_j} \qquad (2.1 - 19)$$

V některých případech je rozptyl definován vztahy

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2, \qquad (2.1 - 20)$$

resp.

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_j}{\sum_{j=1}^{k} n_j} \qquad (2.1 - 21)$$

Výhoda výpočtu podle (2.1 - 18) či (2.1 - 19) je patrná při odhadu rozptylu náhodné proměnné z výběru n hodnot. Hodnoty získané ze vztahů (2.1 - 18), resp. (2.1 - 19), dávají nestranné odhady na rozdíl od hodnot získaných ze vztahů (2.1 - 20) nebo (2.1 - 21).

Rozptyl s^2 má některé vlastnosti, opět pro a konstantní

1. Zavedeme-li

$$y_i = x_i + a \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

pak platí

$$S_y^2 = S_x^2 \qquad (2.1 - 22)$$

2. definujeme-li

$$y_i = a x_i \qquad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

pak

$$S_y^2 = a^2 S_x^2 \qquad (2.1 - 23)$$

3. platí vztah

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) \qquad (2.1 - 24)$$

Směrodatná odchylka

Směrodatná odchylka s, někdy též standartní odchylka, je definována vztahem

$$s = +\sqrt{s^2} \qquad (2.1 - 25)$$

Směrodatná odchylka byla zavedena, protože má stejný fyzikální rozměr jako statistické jednotky.

Variační koeficient

Variační koeficient v je zaveden pro srovnání rozptýlení tak, že je v něm vyloučen vliv absolutní velikosti dat.

$$v = \frac{s}{\bar{x}} \qquad (2.1 - 26)$$

Variační rozpětí

Variační rozpětí R je používáno jako hrubá charakteristika rozptýlení.

$$R = x_{max} - x_{min}, \qquad (2.1 - 27)$$

kde x_{max}, x_{min} jsou maximální a minimální hodnota souboru.

Kvalita variačního rozpětí je ovlivněna extrémními hodnotami souboru.

Pozn. 1 : Nestranný odhad je takový odhad, jehož střední hodnota je rovna odhadované veličině /7/.

2.2 Průběžné výpočty základních statistik

V některých případech se základní statistiky vypočítávají průběžně, tj. na základě starých základních statistik a nově načtených dat. Průběžné výpočty jsou zvlášť vhodné v případě, kdy není možné všechny hodnoty souboru uložit v operační paměti a kdy je možný pouze jediný průchod daty.

V následujícím textu označuje k obecný krok výpočtu, n celkový počet dat. Vektor $\underline{x}$ označuje vektor dat a vektor $\underline{w}$ označuje vektor jim odpovídajících "vah", četností.

Výpočty aritmetického průměru a rozptylu

Při výpočtu aritmetického průměru $\overline{x}$ a rozptylu s^2 pro nevážený případ lze vyjít přímo z definičních vztahů (2.1 - 4) a (2.1 - 18).

Tj. máme-li dosavadní data $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ a nové data x_k, pak je lze přepsat na

$$\overline{x}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i \, , \qquad (2.2 - 1)$$

$$s^2(k) = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x}(k) \right)^2 \qquad (2.2 - 2)$$

Pro nevážený případ lze analogicky vztahy (2.1 - 5) a (2.1 - 19) přepsat

$$\overline{x}(k) = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i} \, , \qquad (2.2 - 3)$$

$$s^2(k) = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i \left(x_i - \bar{x}(k)\right)^2}{\frac{k-1}{k} \sum_{i=1}^{k} w_i} . \qquad (2.2 - 4)$$

Tento způsob výpočtu není vhodný pro průběžné vyhodnocování, protože vyžaduje dvojí průchod naměřenými daty.

Pro průběžné vyhodnocování aritmetického průměru $\bar{x}$ a rozptylu s^2 byly vyvinuty průběžné algoritmy, které odstraňují nevýhodu uvedeného dvouprůchodového algoritmu (viz /2/,/3/,/5/,/9/,/13/,/19/).

Vedle algoritmů navržených Cottonem, Hansonem, Nelsonem a Westem, existuje i algoritmus jednoprůchodový využívající vztah (2.1 - 24). Tedy

$$s^2(k) = \frac{1}{k-1} \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - k\bar{x}^2(k) \right)^2 \qquad (2.2 - 5)$$

Důkaz tohoto vztahu je snadný

$$(k-1)s^2(k) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}(k))^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{k} x_i \bar{x}(k) + \sum_{i=1}^{k} \bar{x}^2(k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - k\bar{x}^2(k)$$

Pro výpočet aritmetického průměru $\bar{x}(k)$ je použit definiční vztah

$$\bar{x}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i \qquad (2.2 - 1)$$

Pro vážený případ dostáváme vztahy

$$\bar{x}(k) = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i} , \qquad (2.2 - 6)$$

$$s^2(k) = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{k} w_i \bar{x}^2(k)}{\frac{k-1}{k} \sum_{i=1}^{k} w_i} \qquad (2.2 - 7)$$

Další algoritmy jsou uvedeny přehledně

1. nevážený případ

algoritmus I. W. Cottona

```
$M_1 = x_1$
$T_1 = 0$
$j = 2, 3, \ldots, k$
    $M_j = M_{j-1} + \frac{1}{j}(x_j - M_{j-1})$
    $T_j = T_{j-1} + x_j^2 + (j-1)M_{j-1}^2 - jM_j^2$
$\bar{x}(k) = M_k$                                   (alg. 2.2 - 1)
$s^2(k) = \frac{1}{k-1} T_k$
```

algoritmus R. J. Hansona, publikovaný též Welfordem a Lingem

```
$M_1 = x_1$
$j = 2, 3, \ldots, k$                                (alg. 2.2 - 2)
    $M_j = \frac{1}{j}(M_{j-1}(j-1) + x_j)$
$\bar{x}(k) = M_k$
$T_1 = 0$
$j = 2, 3, \ldots, k$
    $T_j = T_{j-1} + \frac{j-1}{j}(M_{j-1} - x_j)^2$
$s^2(k) = \frac{1}{k-1} T_k$
```

algoritmus D.H.D. Westa, odvozený také Lingem

```
$M_1 = x_1$
$j = 2, 3, \ldots, k$
    $M_j = M_{j-1} + \frac{1}{j}(x_j - M_{j-1})$     (alg. 2.2 - 3)
$\bar{x}(k) = M_k$
$T_1 = 0$
$j = 2, 3, \ldots, k$
    $T_j = T_{j-1} + \frac{j-1}{j}(x_j - M_{j-1})^2$
$s^2(k) = \frac{1}{k-1} T_k$
```

algoritmus L. S. Nelsona, publikovaný též Yongsem s Cramerem

```
$M_1 = x_1$                                          (alg. 2.2 - 4)
$T_1 = 0$
$j = 2, 3, \ldots, k$
    $M_j = M_{j-1} + x_j$
```

$$\Big|\ T_j = T_{j-1} + \frac{1}{j(j-1)}\left(j x_j - M_j\right)^2$$

$$\overline{x}(k) = \frac{1}{k} M_k$$

$$s^2(k) = \frac{1}{k-1} T_k$$

2. Vážený případ

algoritmus I. W. Cottona

$M_1 = x_1$ (alg. 2.2 - 5)

$T_1 = 0$

$j = 2, 3, \ldots, k$

$$\Big|\ M_j = M_{j-1} + \frac{W_j}{\sum_{i=1}^{j} W_i}\left(x_j - M_{j-1}\right)$$

$$\Big|\ T_j = T_{j-1} + w_j x_j^2 + \sum_{i=1}^{j-1} w_i M_{j-1}^2 - \sum_{i=1}^{j} w_i M_j^2$$

$$\overline{x}(k) = M_k$$

$$S^2(k) = \frac{T_k}{\frac{k-1}{k}\sum_{i=1}^{k} w_i}$$

algoritmus R. J. Hansona

$M_1 = x_1$ (alg. 2.2 - 6)

$j = 2, 3, \ldots, k$

$$\Big|\ M_j = \frac{M_{j-1}\sum_{i=1}^{j-1} W_i + x_j W_j}{\sum_{i=1}^{j} W_i}$$

$$\overline{x}(k) = M_k$$

$T_1 = 0$

$j = 2, 3, \ldots, k$

$$\Big|\ T_j = T_{j-1} + \frac{W_j \sum_{i=1}^{j-1} W_i}{\sum_{i=1}^{1} W_i}\left(M_{j-1} - x_j\right)^2$$

$$s^2(k) = \frac{T_k}{\frac{k-1}{k}\sum_{i=1}^{k} W_i}$$

algoritmus D. H. D. Westa

$M_1 = x_1$ (alg. 2.2 - 7)

$j = 2, 3, \ldots, k$

$$\Big|\ M_j = \frac{M_{j-1}\sum_{i=1}^{j-1} W_i + x_j W_j}{\sum_{i=1}^{j} W_i}$$

$$\overline{x}(k) = M_k$$

$T_1 = 0$

$j = 2, 3, \ldots, k$

$$\left| \; T_j = T_{j-1} + \frac{w_j \sum_{i=1}^{j-1} w_i}{\sum_{i=1}^{j} w_i} (M_{j-1} - x_j)^2 \right.$$

$$s^2(k) = \frac{T_k}{\frac{k-1}{k} \sum_{i=1}^{k} w_i}$$

algoritmus L. S. Nelsona

(alg. 2.2 - 8)

$$M_1 = x_1$$

$$T_1 = 0$$

$$j = 2, 3, \dots, k$$

$$\left| \begin{array}{l} M_j = M_{j-1} + w_j x_j \\ T_j = T_{j-1} + \frac{w_j}{\sum_{i=1}^{j} w_i \sum_{i=1}^{j-1} w_i} \left(\sum_{i=1}^{j} w_i x_j - M_j \right)^2 \end{array} \right.$$

$$\bar{x}(k) = \frac{M_k}{\sum_{i=1}^{k} w_i}$$

$$s^2(k) = \frac{T_k}{\frac{k-1}{k} \sum_{i=1}^{k} w_i}$$

Odvození Hansonova algoritmu je uvedeno v /5/. Algoritmy Westa a Nelsona jsou optimalizací algoritmu Hansonova /2/, /8/, /13/, /19/. Cottonův algoritmus byl odvozen přímo z definičních vztahů /3/.

Výpočty ostatních základních statistik

Medián $\tilde{x}$ nelze vyhodnocovat průběžným algoritmem. Jeho vyhodnocování vyžaduje znalost všech dosavadních dat a jejich setřídění podle velikosti. To neumožňuje výpočet mediánu na základě jeho staré hodnoty a nových dat.

Pro modus $\hat{x}$ platí, že leží v nejčetnější třídě. Průběžné vyhledávání nejčetnější třídy lze snadno zajistit. Výpočet modu se pak provede podle vzorců (2.1 -14) až (2.1 - 17).

Vyhodnocení směrodatné odchylky s a variačního koeficientu v průběžným způsobem lze uskutečnit přidáním definičních vztahů (2.1 - 25) a (2.1 - 26) k již uvedeným algoritmům pro průběžný výpočet aritmetického průměru a rozptylu. Tj.

$$S^2(k) = \sqrt{S^2(k)} \quad , \qquad (2.2 - 8)$$

$$V(k) = \frac{\sqrt{S^2(k)}}{\bar{x}(k)} \qquad (2.2 - 9)$$

Problém výpočtu variačního rozpětí R podle (2.1 - 27) spočívá v nalezení maximální a minimální hodnoty z dosavadních dat, což je opět jednoduché.

2.3 Korelační funkce

Korelační funkce $R(t_1,t_2)$ je definována pro soubor realizací náhodných procesů $X(t)$ a $Y(t)$ jako spojený moment, příp. jako spojený moment kolem středů a udává závislost hodnot náhodných procesů ve dvou časových okamžicích t_1 a t_2 /6/.

Náhodným procesem $X(t)$ se nazývá soubor průběhů náhodné proměnné v závislosti na čase. Náhodná proměnná je proměnná, jejíž konkrétní hodnoty při konstantních podmínkách závisí na náhodě. Průběh náhodné proměnné se nazývá realizací.

Při stacionárních náhodných procesech korelační funkce nezávisí na konkrétních časových okamžicích t_1 a t_2, ale pouze na jejich rozdílu, posunutí

$$\tau = t_2 - t_1 \qquad (2.3 - 1)$$

Všechny dále uvedené vztahy jsou vztaženy na stacionární náhodné procesy.

Korelačních funkcí je několik druhů /6/.

Autokorelační funkce

Autokorelační funkce $R_{xx}(\tau)$ realizace $x(t)$ stacionárního náhodného procesu $X(t)$ je definována vztahem

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t)\cdot x(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\, x(t+\tau)\, dt,$$

tj. jako střední hodnota v čase.

(2.3 - 2)

Vzájemně korelační funkce

Vzájemná korelační funkce $R_{xy}(\tau)$ je definována pro dvě realizace $x(t)$ a $y(t)$ jako

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)\,y(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)\,y(t+\tau)\,dt \qquad (2.3 - 3)$$

Autokovarianční funkce

Autokovarianční funkce je definována pro centrovanou realizaci $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - \mu_x$,

kde μ_x označuje střední hodnotu realizace

Autokovarianční funkce potom je

$$\overset{\circ}{R}_{xx}(\tau) = E[\overset{\circ}{x}(t)\,\overset{\circ}{x}(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}(x(t)-\mu_x)(x(t+\tau)-\mu_x)\,dt$$

(2.3 - 4)

Vzájemná kovarianční funkce

Vzájemná kovarianční funkce je definována pro dvě centrované realizace $\overset{\circ}{x}(t)$ a $\overset{\circ}{y}(t)$ vztahem

$$\overset{\circ}{R}_{xy}(\tau) = E[\overset{\circ}{x}(t)\,\overset{\circ}{y}(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}(x(t)-\mu_x)(y(t+\tau)-\mu_y)\,dt,$$

(2.3 - 5)

přičemž μ_x a μ_y označují střední hodnoty realizací $x(t)$ a $y(t)$.

Vedle těchto korelačních funkcí se užívají i tzv. normovaná autokorelační funkce a normovaná vzájemná korelační funkce. Vypočítávají se podle vztahů

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{1}{\sigma_x^2}\overset{\circ}{R}_{xx}(\tau)\,, \qquad (2.3 - 6)$$

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \overset{\circ}{R}_{xy}(\tau), \qquad (2.3 - 7)$$

kde σ_x a σ_y znamenají směrodatné odchylky realizací $x(t)$ a $y(t)$.

Vlastnosti korelačních funkcí

1. Autokorelační funkce je sudou funkcí

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau) \qquad (2.3 - 8)$$

2. pro vzájemně korelační funkci platí

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \qquad (2.3 - 9)$$

3. platí

$$R_{xx}(0) \geq |R_{xx}(\tau)| \qquad (2.3 - 10)$$

4. platí

$$\overset{\circ}{R}_{xx}(0) = \sigma_x^2 \qquad (2.3 - 11)$$

$$\rho_{xx}(0) = 1 \qquad (2.3 - 12)$$

5. Obsahuje-li realizace $X(t)$ periodickou či stejnosměrnou složku, pak i autokorelační funkce obsahuje periodickou složku, o stejné periodě, resp. stejnosměrnou složku.

Vzájemné převody

1.

$$R_{xx}(\tau) = \mathring{R}_{xx}(\tau) + \mu_x^2 \qquad (2.3 - 13)$$

$$R_{xy}(\tau) = \mathring{R}_{xy}(\tau) + \mu_x \mu_y \qquad (2.3 - 14)$$

2.

$$\rho_{xx}(\tau) = \frac{1}{\sigma_x^2}\left(R_{xx}(\tau) - \mu_x^2\right) \qquad (2.3 - 15)$$

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y}\left(R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y\right) \qquad (2.3 - 16)$$

Korelační funkce se zakresluje do tzv. korelogramu.

2.4 Průběžný výpočet korelačních funkcí

Pokud požadujeme průběžný výpočet korelačních funkcí, např. ze stejných důvodů jako v případě průběžného výpočtu základních statistik, lze použít vztahy, které jsou odvozeny níže.

V těchto vztazích k znamená obecný krok výpočtu, r označuje velikost posunutí, m je počet bodů korelační funkce.

Výpočty autokorelačních a vzájemně korelačních funkcí

Pro odvození průběžných výpočtů se vychází ze vztahů pro výpočet korelačních funkcí z diskrétních hodnot, které jsou vyvozeny z definičních vztahů (2.3 - 2) a (2.3 - 3) /13/.

$$R_{xx}(r) = \frac{1}{k+1-r} \sum_{i=0}^{k-r} x(i-r)\,x(i) \qquad (2.4 - 1)$$

a

$$R_{xy}(r) = \frac{1}{k+1-r} \sum_{i=0}^{k-r} x(i-r)\,y(i) \qquad (2.4 - 2)$$

či

$$R_{xx}(r) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} x(i-r)\,x(i) \qquad (2.4 - 3)$$

a

$$R_{xy}(r) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} x(i-r)\,y(i) \qquad (2.4 - 4)$$

Vyjdeme-li ze vztahu (2.4 - 1), můžeme průběžný algoritmus odvodit takto

$${}^{(k)}R_{xx}(r) = \frac{1}{k+1-r}\sum_{i=0}^{k-r} x(i-r)x(i) = \frac{1}{k+1-r}\left(\sum_{i=0}^{k-r-1} x(i-r)\,x(i) + x(k-r)\,x(k)\right)$$

(2.4 - 5)

protože platí

$$\frac{1}{k+1-r}\sum_{i=0}^{k-r-1} x(i-r)\,x(i) = \frac{1}{k-r}\sum_{i=0}^{k-r-1} x(i-r)\,x(i) -$$

$$-\frac{1}{k-r}\,\frac{1}{k+1-r}\sum_{i=0}^{k-r-1} x(i-r)\,x(i)$$

(2.4 - 6)

a

$${}^{(k-1)}R_{xx}(r) = \frac{1}{k-r}\sum_{i=0}^{k-r-1} x(i-r)\,x(i)$$

(2.4 - 7)

můžeme psát

$${}^{(k)}R_{xx}(r) = {}^{(k-1)}R_{xx} + \frac{1}{k+1-r}\left(x(k-r)\,x(k) - {}^{(k-1)}R_{xx}(r)\right)$$

(2.4 - 8)

Analogicky lze psát

$${}^{(k)}R_{xy}(r) = {}^{(k-1)}R_{xy} + \frac{1}{k+1-r}\left(x(k-r)\,y(k) - {}^{(k-1)}R_{xy}(r)\right)$$

(2.4 - 9)

Pokud vycházíme ze vztahů (2.4 - 3) a (2.4 - 4) dostáváme vztahy

$${}^{(k)}R_{xx}(r) = {}^{(k-1)}R_{xx}(r) + \frac{1}{k+1}\left(x(k-r)\,x(k) - {}^{(k-1)}R_{xx}(r)\right)$$

(2.4 - 10)

a

$${}^{(k)}R_{xy}(r) = {}^{(k-1)}R_{xy}(r) + \frac{1}{k+1}\left(x(k-r)\,y(k) - {}^{(k-1)}R_{xy}(r)\right)$$

(2.4 - 11)

V uvedených vztazích r nabývá hodnot $0,1,\dots,m-1$.

Výpočty ostatních korelačních funkcí

Pro průběžný výpočet kovariančních a normovaných korelačních funkcí lze využít již uvedené průběžné algoritmy (2.4 - 8), (2.4 - 9), popř. (2.4 - 10), (2.4 - 11), doplněné o převodní vztahy, upravené z (2.3 - 13) až (2.3 - 16).

Pak tedy se kovarianční funkce vyhodnocují podle vztahů

$$^{(k)}\overset{\circ}{R}_{xx}(r) = {}^{(k)}R_{xx}(r) - {}^{(k)}\mu_x^2, \qquad (2.4 - 12)$$

$$^{(k)}\overset{\circ}{R}_{xy}(r) = {}^{(k)}R_{xy}(r) - \mu_x\mu_y \qquad (2.4 - 13)$$

a normované korelační funkce

$$^{(k)}\rho_{xx}(r) = \frac{1}{^{(k)}\sigma_x^2}\left({}^{(k)}R_{xx}(r) - {}^{(k)}\mu_x^2\right), \qquad (2.4 - 14)$$

$$^{(k)}\rho_{xy}(r) = \frac{1}{^{(k)}\sigma_x\,{}^{(k)}\sigma_y}\left({}^{(k)}R_{xy}(r) - {}^{(k)}\mu_x\,{}^{(k)}\mu_y\right) \qquad (2.4 - 15)$$

Problémem zůstává určit střední hodnoty μ_x , μ_y a rozptyly σ_x^2 , σ_y^2 .

Střední hodnota a rozptyl realizace náhodné proměnné $x(t)$

Střední hodnota μ_x příp. očekávaná hodnota, udává hodnotu, kolem které se rozkládají hodnoty náhodné proměnné $x(t)$.

$$\mu_x = E[x].\qquad (2.4 - 16)$$

Pro diskrétní náhodnou proměnnou $x(t)$ lze střední hodnotu μ_x určit ze vztahu

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, p(x_i), \qquad (2.4 - 17)$$

kde $p(x_i)$ jsou pravděpodobnosti odpovídající jednotlivým hodnotám náhodné proměnné. Platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1.$$

Pro spojitou náhodnou proměnnou $x(t)$ platí vztah

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \qquad (2.4 - 18)$$

ve kterém $f(x)$ označuje hustotu pravděpodobnosti náhodné proměnné $x(t)$.

Analogicky platí $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1.$

Rozptylem σ_x^2 , disperzí, nazýváme hodnotu, která udává jak mnoho je náhodná proměnná $x(t)$ rozptýlena kolem své střední hodnoty μ_x

$$\sigma_x^2 = D[x] = E[(x - E[x])^2] \qquad (2.4 - 19)$$

Pro diskrétní náhodnou proměnnou $x(t)$ lze psát

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu_x)^2 p(x_i) \qquad (2.4 - 20)$$

a pro spojitou náhodnou proměnnou

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx. \qquad (2.4 - 21)$$

Pro diskrétní případ lze střední hodnotu μ_x a rozptyl σ_x^2 odhadnout aritmetickým průměrem $\overline{x}$ a rozptylem s^2 podle vztahů (2.1 - 4) a (2.1 - 18), resp. (2.1 - 5) a (2.1 - 19). Tyto vztahy poskytují nestranné odhady (viz poznámka v kap. 2.1).

Hodnoty středních hodnot μ_x , μ_y a rozptylů σ_x^2 , σ_y^2 lze tedy získat pomocí průběžných metod pro výpočet aritmetického průměru $\overline{x}$ a rozptylu s^2 uvedených v kapitole 2.2.

$$\mu_x = \overline{x}(k), \qquad (2.4 - 22)$$

$$\sigma_x^2 = s^2(k). \qquad (2.4 - 23)$$

3. Řešení soustav lineárních rovnic

3.1 Soustavy lineárních rovnic

Soustavou m lineárních rovnic s n neznámými nazýváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m . \end{aligned} \qquad (3.1 - 1)$$

Tuto soustavu lze zkráceně napsat

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i , \qquad \text{pro} \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (3.1 - 2)$$

či s použitím maticového zápisu

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b} . \qquad (3.1 - 3)$$

V tomto zápise se matice $\underline{A}$ nazývá maticí soustavy, vektor $\underline{b}$ vektorem pravých stran a vektor $\underline{x}$ vektorem neznámých.

Matici

$$\underline{A}_r = [\underline{A} \,\vdots\, \underline{b}] \qquad (3.1 - 4)$$

nazýváme rozšířenou maticí soustavy.

Pro řešitelnost soustavy lineárních rovnic musí platit

$$h[\underline{A}_r] = h[\underline{A}] = h. \qquad (3.1 - 5)$$

tj. hodnost matice soustavy musí být shodná s hodností rozšířené matice soustavy.

Pokud platí $h = n$, existuje právě jedno řešení, při $h < n$ je řešení nekonečně mnoho /1/.

Pro řešení soustav lineárních rovnic bylo vyvinuto množství metod. V zásadě je možné je rozdělit do dvou skupin.

metody finitní : komparační, adiční, Cramerova, Gaussova eliminační, pomocí inverze matic, odmocnin aj.

metody iterační : Gaussova - Seidelova, Jacobiho atd.

Vedle těchto neprůběžných metod byly sestaveny pro řešení soustav lineárních rovnic i průběžné algoritmy.

Při průběžném řešení se jednotlivé řádky matice soustavy $\underline{A}$ získávají postupně, např. měřením či pozorováním.

Jednotlivé rovnice matice soustavy mají tvar

$$b(k) = \underline{a}^T(k)\,\underline{x}(k), \qquad (3.1 - 6)$$

přičemž k značí krok měření.

Výsledná matice soustavy $\underline{A}(m)$ pro m měření má tvar

$$\underline{A}(m) = \begin{vmatrix} \underline{a}^T(1) \\ \underline{a}^T(2) \\ \vdots \\ \underline{a}^T(k) \\ \underline{a}^T(k+1) \\ \vdots \\ \underline{a}^T(m) \end{vmatrix} \qquad (3.1 - 7)$$

Průběžné metody se využívají např. při identifikaci soustav.

Pozn. 1 : hodností $h[\underline{A}]$ matice $\underline{A}$ nazýváme maximální počet lineárně nezávislých řádkových vektorů, který je roven maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupcových vektorů matice $\underline{A}$ /1/

Pozn. 2 : vektory $\underline{a}_i$, $i=1,2,\ldots,m$ jsou lineárně nezávislé, právě tehdy, když každá jejich lineární kombinace je nenulovým vektorem, tj.

$$c_1\underline{a}_1 + c_2\underline{a}_2 + \ldots + c_m\underline{a}_m \neq \underline{0} \qquad (3.1 - 8)$$

pro c_i, $i=1,2,\ldots,m$ z oboru reálných čísel, z nichž aspoň jedno je nenulové /1/.

3.2 Průběžné řešení soustav lineárních rovnic

Při odvozování průběžných metod znamená s ohledem na (3.1 - 3) a (3.1 - 4) vektor $\underline{a}$ řádek měření nezávislých a závislé, tj. řádek rozšířené matice soustavy, vektor $\underline{x}$ pak označuje vektor řešení, n je počet neznámých.

Metoda odmocnin

Metoda odmocnin, známá jako Refil, rozkládá matici $\underline{C}(k)$

$$C(k) = [\underline{A}^T(k)\,\underline{A}(k)]^{-1} \tag{3.2 - 1}$$

na součin dvou trojúhelníkových matic

$$\underline{C}(k) = \underline{G}(k)\,\underline{G}^T(k), \tag{3.2 - 2}$$

kde $\underline{G}(k)$ je horní trojúhelníková matice, tzv. Cholského odmocnina.

Algoritmus pro řešení soustavy lineárních rovnic je následující.

Pro aktualizaci matice $\underline{A}$ lze psát

$$\underline{A}^T(k+1)\,\underline{A}(k+1) = \varphi^2\,\underline{C}^{-1}(k) + \underline{a}(k+1)\,\underline{a}^T(k+1) \tag{3.2 - 3}$$

pro

$$\underline{C}^{-1}(k+1) = \varphi^2\,\underline{C}^{-1}(k) + \underline{a}(k+1)\,\underline{a}^T(k+1), \tag{3.2 - 4}$$

kde φ je koeficient exponenciálního zapomínání, $0 < \varphi \leq 1$, a $$\underline{A}(k) = \begin{vmatrix} \underline{a}^T(1) \\ \underline{a}^T(2) \\ \vdots \\ \underline{a}^T(k) \end{vmatrix} \qquad (3.2 - 5)$$

je matice soustavy.

Po dosazení do (3.2 - 1) a (3.2 - 2) dostáváme

$$\underline{G}(k+1)\underline{G}^T(k+1) = \left[\varphi^2 \underline{G}^{-T}(k)\underline{G}^{-1}(k) + \underline{a}(k+1)\,\underline{a}^T(k+1)\right]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\varphi^2}\,\underline{G}(k)\left[\underline{I} + \underline{f}\,\frac{1}{\varphi^2}\,\underline{f}^T\right]^{-1}\underline{G}^T(k), \qquad (3.2 - 6)$$

při označení

$$\underline{f} = \underline{G}^T(k)\,\underline{a}(k+1). \qquad (3.2 - 7)$$

Použijeme-li tzv. Woodburyho identitu matic /7/, /13/

$$[\underline{A}+\underline{B}\underline{C}\underline{B}^T]^{-1} = \underline{A}^{-1} - \underline{A}^{-1}\underline{B}[\underline{C}^{-1} + \underline{B}^T\underline{A}^{-1}\underline{B}]^{-1}\underline{B}^T\underline{A}^{-1} \qquad (3.2 - 8)$$

O platnosti tohoto vztahu se lze přesvědčit jednoduše

$$[\underline{A}+\underline{B}\underline{C}\underline{B}^T][\underline{A}^{-1} - \underline{A}^{-1}\underline{B}\,[\underline{C}^{-1} + \underline{B}^T\underline{A}^{-1}\underline{B}]^{-1}\underline{B}^T\underline{A}^{-1}] = \underline{I}$$

Tedy

$$[\underline{I} + \underline{f}\,\frac{1}{\varphi^2}\,\underline{f}^T]^{-1} = [\underline{I} - \underline{f}[\varphi^2 + \underline{f}^T\underline{f}\,]^{-1}\underline{f}^T\,] \qquad (3.2 - 9)$$

Tímto způsobem jsme zcela vyřešili problém inverze, neboť $\varphi^2 + \underline{f}^T\underline{f}$ je skalár. Označme jej σ^2 , tj.

$$\sigma^2 = \varphi^2 + \underline{f}^T\underline{f} \qquad (3.2 - 10)$$

Potom lze vztah (3.2 - 6) přepsat na

$$\underline{G}(k+1)\,\underline{G}^T(k+1) = \frac{1}{\varphi^2}\,\underline{G}(k)\left[\underline{I} - \underline{f}\,\frac{1}{\sigma^2}\,\underline{f}^T\right]\underline{G}^T(k)$$

Provedeme rozhodující úpravu

$$\underline{G}(k+1)\,\underline{G}^T(k+1) = \frac{1}{\varphi}\,\underline{G}(k)\left[\underline{I} \,\vdots\, i\frac{\underline{f}}{\sigma}\right]\underline{U}\,\underline{U}^T\left|\begin{array}{c}\underline{I}\\ \cdots \\ i\frac{\underline{f}}{\sigma}\end{array}\right|\underline{G}(k)\frac{1}{\varphi},$$

(3.2 - 11)

kde i označuje imaginární jednotku, pro níž platí $i^2 = -1$.

Je zřejmé, že platí

$$\underline{I} - \underline{f}\,\frac{1}{\sigma^2}\,\underline{f}^T = \left[\underline{I} \,\vdots\, i\frac{\underline{f}}{\sigma}\right]\left|\begin{array}{c}\underline{I}\\ \cdots \\ i\frac{\underline{f}^T}{\sigma}\end{array}\right| \qquad (3.2 - 12)$$

Ze vztahu (3.2 - 11) vyplývá, že k nalezení rekurzivního vztahu pro výpočet $\underline{G}(k+1)$ je třeba nalézt matici $\underline{U}$, aby platilo

$$\left[\underline{I} \,\vdots\, i\frac{\underline{f}}{\sigma}\right]\underline{U} = \left[\underline{H} \,\vdots\, \underline{0}\right] \qquad (3.2 - 13)$$

To znamená vynulovat imaginární vektor a do matice $\underline{H}$ tak přetransformovat prvky vektoru $\frac{\underline{f}}{\sigma}$.

Matice $\underline{U}$ je ortogonální, platí pro ni

$$\underline{U}\,\underline{U}^T = \underline{I}$$

Její rozměr je $(n+1)\times(n+1)$.

Matice $\underline{H}$ je horní trojúhelníková s rozměrem $n\times n$, vektor $\underline{0}$ je nulovým vektorem $n\times 1$.

Jelikož součin dvou trojúhelníkových matic je opět horní trojúhelníková matice, bude platit

$$\underline{G}(k+1) = \frac{1}{\varphi}\,\underline{G}(k)\,\underline{H} \qquad (3.2 - 14)$$

Transformační ortogonální matici $\underline{U}$ rozdělme na součin elementárních ortogonálních matic

$$\underline{U} = \underline{U}^{(n)} \underline{U}^{(n-1)} \dots \underline{U}^{(1)}, \qquad (3.2 - 15)$$

kde $\underline{U}^{(j)}$ není reálná a má tvar

$$\underline{U}^{(j)} = \begin{array}{|ccccc|l} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c_j & \cdots & is_j & j\text{ -tý řádek} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & -is_j & \cdots & c_j & (n+1)\text{ -vý řádek} \end{array} \qquad (3.2 - 16)$$

Ostatní prvky jsou nulové.

Má-li matice $\underline{U}^{(j)}$ splňovat podmínku ortogonality, musí být koeficienty c_j , s_j vázány podmínkou

$$c_j^2 + (is_j)^2 = 1 . \qquad (3.2 - 17)$$

Uvažujme nejprve součin

$$\left[\underline{I} \;\vdots\; i\frac{\underline{f}^{(n)}}{\delta^{(n)}} \right] \underline{U}^{(n)},$$

kde $\underline{f}^{(n)} = \underline{f}$ a $\delta^{(n)} = \delta$, přeznačení je provedeno s ohledem na další kroky.

Abychom anulovali prvek $i\frac{f_n^{(n)}}{\delta^{(n)}}$ musí být splněna podmínka

$$is_j + ic_j \frac{f_j^{(n)}}{\delta_j} = 0 \qquad \text{pro } j = n \qquad (3.2 - 18)$$

Dosazením tohoto vztahu do (3.2 - 17) bude pro koeficienty c_n a s_n platit

$$c_n = \frac{\delta^{(n)}}{\sqrt{\delta^{2(n)} - (f_n^{(n)})^2}} = \frac{\delta^{(n)}}{\delta^{(n-1)}}, \qquad (3.2 - 19)$$

$$s_n = -\frac{f_n^{(n)}}{\delta^{(n)}} c_n = -\frac{f_n^{(n)}}{\delta^{(n-1)}}, \qquad (3.2 - 20)$$

přičemž

$$\delta^{(n-1)} = \sqrt{\varphi^2 + \sum_{\ell=1}^{n-1} (f_\ell^{(n)})^2} \qquad (3.2 - 21)$$

a

$$\underline{f}^{(n)} = \underline{f} = \underline{G}^T(k)\,\underline{a}(k+1) \qquad (3.2 - 22)$$

Při volbě C_n a S_n podle (3.2 - 19) a (3.2 - 20) se transformací vynuluje prvek $i\frac{f_n^{(n)}}{\delta^{(n)}}$,

tj. $$\left|\begin{array}{c:c} 0 & i\frac{f_1^{(n)}}{\delta^{(n)}} \\ 0 & i\frac{f_2^{(n)}}{\delta^{(n)}} \\ \vdots & \\ 1 & i\frac{f_n^{(n)}}{\delta^{(n)}} \end{array}\right| \left|\begin{array}{cc} C_n & iS_n \\ -iS_n & C_n \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c:c} h_{1n} & \frac{f_1^{(n-1)}}{\delta^{(n-1)}} \\ h_{2n} & \frac{f_2^{(n-1)}}{\delta^{(n-1)}} \\ \vdots & \\ h_{n-1,n} & \frac{f_{n-1}^{(n-1)}}{\delta^{(n-1)}} \\ h_{nn} & 0 \end{array}\right| \qquad (3.2 - 23)$$

tudíž

$$f_n^{(n-1)} = 0$$

$$f_\ell^{(n-1)} = f_\ell^{(n)} = f_\ell \qquad \text{pro} \quad \ell < n$$

$$h_{\ell n} = \frac{f_\ell^{(n)}}{\delta^{(n)}} S_n = -\frac{f_\ell f_n}{\delta_n \delta_{n-1}} \qquad \text{pro } \ell < n$$

$$h_{nn} = C_n + \frac{f_n^{(n)}}{\delta^{(n)}} S_n = \frac{\delta^{(n-1)}}{\delta^{(n)}}$$

Pomocí matice $\underline{U}^{(n-1)}$ provedeme nulování dalšího prvku vektoru $i\frac{\underline{f}^{(n-1)}}{\delta^{(n-1)}}$ a získáme $(n-1)$ sloupec hledané trojúhelníkové matice $\underline{H}$.

Stejným způsobem můžeme postupovat dále a pro obecný krok s indexem j dostaneme následující vztahy pro prvky matice $\underline{H}$

$$h_{\ell j} = \frac{f_\ell^{(j)}}{\delta^{(j)}} S_j = -\frac{f_\ell f_j}{\delta^{(j)}\delta^{(j-1)}} \qquad \text{pro} \quad \ell < n$$

$$h_{jj} = C_j + \frac{f_j^{(j)} S_j}{\delta^{(j)}} = \frac{\delta^{2(j)} - f_j^2}{\delta^{(j)}\delta^{(j-1)}} = \frac{\delta^{(j-1)}}{\delta^{(j)}}$$

$$h_{\ell j} = 0 \qquad \text{pro } \ell > j$$

$$f_\ell^{(j)} = f_\ell^{(n)} = f_\ell \qquad \text{pro } \ell < j$$

$$\delta^{(j)} = \sqrt{\varphi^2 + \sum_{\ell=1}^{j} f_\ell^2}$$

Pak pro prvky matice $\underline{G}(k+1)$ bude platit

$$g_{ij}(k+1) = \frac{1}{\varphi} \sum_{\ell=i}^{j} g_{i\ell}(k) h_{\ell j} \tag{3.2 - 24}$$

a po úpravě

$$g_{ij}(k+1) = \frac{1}{\varphi}\left[g_{ij}(k)\frac{\delta^{(j-1)}}{\delta^{(j)}} + \sum_{\ell=i}^{j-1} g_{i\ell}(k)\frac{-f_\ell f_j}{\delta^{(j)}\delta^{(j-1)}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\varphi}\frac{\delta^{(j-1)}}{\delta^{(j)}}\left[g_{ij}(k) - \frac{f_j}{(\delta^{(j-1)})^2}\sum_{\ell=i}^{j-1} g_{i\ell}(k) f_\ell\right] \tag{3.2 - 25}$$

Označme

$$s_i^{(m)} = \sum_{\ell=i}^{m} g_{i\ell}(k) f_\ell \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.2 - 26}$$

a pak můžeme vztah (3.2 - 25) upravit na tvar

$$g_{ij}(k+1) = \frac{1}{\varphi}\frac{\delta^{(j-1)}}{\delta^{(j)}}\left(g_{ij}(k) - \frac{f_j\, s_i^{(j-1)}}{(\delta^{(j-1)})^2}\right) \tag{3.2 - 27}$$

Výpočet vlastního řešení je dán vztahy

$$e(k+1) = a_{n+1}(k+1) - \underline{x}^T(k)\, \underline{a}(k+1), \tag{3.2 - 28}$$

$$\underline{x}(k+1) = \underline{x}(k) + \frac{1}{\delta^2} S(k+1) e(k+1), \tag{3.2 - 29}$$

kde $S(k+1)$ a δ^2 jsou výsledkem vlastního algoritmu.

Algoritmus řešení soustav lineárních rovnic metodou Refil je dán následujícími vztahy

```
$\sigma_0 = \varphi$
$\sigma_0^2 = \varphi^2$                                        (alg. 3.2 - 1)
$e = a_{n+1}(k+1) - \sum_{i=1}^{n} a_i(k+1) x_i(k)$
$j = 1, 2, \ldots, n$
    $f_j = \sum_{i=1}^{j} g_{ij}(k) a_i(k+1)$
    $\alpha = \frac{\sigma_{j-1}}{\varphi}$
    $\beta = \frac{f_j}{\sigma_{j-1}^2}$
    $\sigma_j = \sqrt{\sigma_{j-1}^2 + f_j^2}$
    $\alpha = \frac{\alpha}{\sigma_j}$
    $s_j = g_{jj}(k) f_j$
    $g_{jj}(k+1) = \alpha g_{jj}(k)$
    $i = 1, 2, \ldots, j-1$
        $\delta = g_{ij}(k)$
        $g_{ij}(k+1) = \alpha(\delta - \beta s_i)$
        $s_i = \delta f_j + s_i$
$i = 1, 2, \ldots, n$
    $x_i(k+1) = x_i(k) + \frac{s_i e}{\sigma_n^2}$
```

/14/, /18/

Metoda Cholského

Pro řádek soustavy lineárních rovnic

$$a_{n+1}(k) = \underline{x}^T \underline{a}(k) + e(k), \tag{3.2 - 30}$$

kde $e(k)$ je odchylka řešení, zaveďme kritérium

$$I(k, \underline{x}) = \sum_{i=1}^{k} \varphi^{2(k-i)} e^2(i) = \sum_{i=1}^{k} \varphi^{2(k-i)} (a_{n+1}(i) - \underline{a}^T(i)\, \underline{x})^2 \tag{3.2 - 31}$$

$$e(i) = \left[1 \vdots -\underline{x}^T\right] \left|\begin{matrix} a_{n+1}(i) \\ \cdots\cdots \\ \underline{a}(i) \end{matrix}\right|, \qquad (3.2 - 32)$$

φ znamená koeficient exponenciálního zapomínání, $0 < \varphi \leq 1$.

Označme

$$\underline{V}(k) = \sum_{i=1}^{k} \varphi^{2(k-i)} \left|\begin{matrix} a_{n+1}(i) \\ \cdots\cdots \\ \underline{a}(i) \end{matrix}\right| \left[a_{n+1}(i) \vdots \underline{a}^T(i)\right] \qquad (3.2 - 33)$$

Tato matice je pozitivně definitivní.

Matici $\underline{V}(k)$ rozložíme pomocí U-D rozkladu, Cholského metodou, na součin tří matic

$$\underline{V}^{-1}(k) = \underline{U}(k)\,\underline{D}(k)\,\underline{U}^T(k), \qquad (3.2 - 34)$$

tj.

$$\underline{V}(k) = \underline{U}^T(k)\,\underline{D}^{-1}(k)\,\underline{U}^{-1}(k). \qquad (3.2 - 35)$$

Matice $\underline{U}$ je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na hlavní diagonále a matice $\underline{D}$ je diagonální.

Vztah (3.2 - 34) můžeme dále rozepsat na

$$\underline{V}^{-1}(k) = \underline{U}(k)\,\underline{D}(k)\,\underline{U}^T(k) =$$

$$= \left[\varphi^2 \underline{U}^{-1}(k-1)\,\underline{D}(k-1)\,\underline{U}^{-T}(k-1) + \underline{a}(k)\,\underline{a}^T(k)\right]^{-1}, \qquad (3.2 - 36)$$

čímž dostáváme rekurentní vztah pro aktualizaci dat, φ je koeficient exponenciálního zapomínání.

Úpravou dostáváme

$$\underline{U}(k)\,\underline{D}(k)\,\underline{U}^T(k) = \underline{U}(k-1)\left[\varphi^2 \underline{D}^{-1}(k-1) + \underline{h}\,\underline{h}^T\right]^{-1} \underline{U}^T(k-1), \qquad (3.2 - 37)$$

kde

$$\underline{h} = \underline{U}^T(k-1)\,\underline{a}(k) \qquad (3.2 - 38)$$

Aplikujeme-li analogicky formuli pro inverzi, vztah (3.2 - 8), lze psát

$$\left[\varphi^2 \underline{D}^{-1}(k-1) + \underline{h}\,\underline{h}^T\right]^{-1} = \frac{1}{\varphi}\left(\underline{D}(k-1) - \frac{\underline{D}(k-1)\underline{h}\,\underline{h}^T\underline{D}(k-1)}{\varphi^2 + \underline{h}^T\underline{D}(k-1)\,\underline{h}}\right) \qquad (3.2 - 39)$$

a pak

$$\underline{U}(k)\underline{D}(k)\underline{U}^T(k) = \underline{U}(k-1)\frac{1}{\varphi^2}\left(\underline{D}(k-1) - \frac{\underline{D}(k-1)\underline{h}\,\underline{h}^T\underline{D}(k-1)}{\varphi^2 + \underline{h}^T\underline{D}(k-1)\underline{h}}\right)\underline{U}^T(k-1), \qquad (3.2 - 40)$$

Výraz

$$\frac{1}{\varphi^2}\left(\underline{D}(k-1) - \frac{\underline{D}(k-1)\underline{h}\,\underline{h}^T\underline{D}(k-1)}{\varphi^2 + \underline{h}^T\underline{D}(k-1)\,\underline{h}}\right)$$

je symetrickou maticí, kterou lze opět rozložit na součin tří matic

$$\frac{1}{\varphi^2}\left(\underline{D}(k-1) - \frac{\underline{D}(k-1)\underline{h}\,\underline{h}^T\underline{D}(k-1)}{\varphi^2 + \underline{h}^T\underline{D}(k-1)\,\underline{h}}\right) = \underline{H}\,\underline{D}(k)\underline{H}^T, \qquad (3.2 - 41)$$

tj.

$$\underline{U}(k)\underline{D}(k)\underline{U}^T(k) = \underline{U}(k-1)\underline{H}\,\underline{D}(k)\,\underline{H}^T\,\underline{U}^T(k-1). \qquad (3.2 - 42)$$

Potom

$$\underline{U}(k) = \underline{U}(k-1)\underline{H}. \qquad (3.2 - 43)$$

Matice $\underline{V}$, $\underline{U}$, $\underline{D}$ můžeme rozčlenit na bloky

$$\underline{V}(k) = \left|\begin{array}{cc} \underline{V}_b(k) & \underline{V}_{ba}^T(k) \\ \underbrace{\underline{V}_{ba}(k)}_{1} & \underbrace{\underline{V}_a(k)}_{n} \end{array}\right| \begin{array}{l} \}1 \\ \}n \end{array} \qquad (3.2 - 44)$$

$$\underline{U}(k) = \left|\begin{array}{cc} \underline{U}_b(k) & \underline{0} \\ \underbrace{\underline{U}_{ba}(k)}_{1} & \underbrace{\underline{U}_a(k)}_{n} \end{array}\right| \begin{array}{l} \}1 \\ \}n \end{array} \qquad (3.2 - 45)$$

$$\underline{D}(k) = \left|\begin{array}{cc} \underline{D}_b(k) & \underline{0} \\ \underbrace{\underline{0}}_{1} & \underbrace{\underline{D}_a(k)}_{n} \end{array}\right| \begin{array}{l} \}1 \\ \}n \end{array} \qquad (3.2 - 46)$$

Matice $\underline{0}$ označuje nulovou matici.

Odhad řešení $\underline{x}(k)$ se vypočítá podle vztahu

$$\underline{x}(k) = \underline{V}_a^{-1}(k)\,\underline{V}_{ba}(k) \qquad (3.2 - 47)$$

Tento vztah lze odvodit následujícím postupem.

Kritérium $I(k,\underline{x})$ je skalár, a proto pro něj platí

$$I(k,\underline{x}) = tr\{I(k,\underline{x})\}, \qquad (3.2 - 48)$$

tedy, že skalár je roven svojí stopě. S využitím tohoto poznatku můžeme psát

$$I(k,\underline{x}) = tr\left\{\sum_{i=1}^{k}\varphi^{2(k-i)}e^2(i)\right\} = tr\left\{[1 \vdots -\underline{x}^T]\,\underline{V}\left|\begin{array}{c} 1 \\ \hdashline -\underline{x}^T \end{array}\right|\right\} = tr\{b\} \qquad (3.2 - 49)$$

$$\min_{\underline{x}} I(k, \underline{x}) = \min_{\underline{x}} \mathrm{tr}\{b\} = \mathrm{tr}\{b_{min}\} \qquad (3.2 - 50)$$

$$b = [1 \vdots -\underline{x}^T]\, \underline{V} \begin{vmatrix} 1 \\ \cdots \\ -\underline{x}^T \end{vmatrix} = \underline{V}_b - \underline{V}_{ba}\underline{x}^T - \underline{x}^T \underline{V}_{ba} + \underline{x}^T \underline{V}_a \underline{x} =$$

$$= (\underline{x}^T \underline{V}_a - \underline{V}_{ba}) \underline{V}_a^{-1} (\underline{V}_a \underline{x} - \underline{V}_{ba}) + \underline{V}_b - \underline{V}_{ba}^T \underline{V}_a^{-1} \underline{V}_{ba} \qquad (3.2 - 51)$$

Protože $\underline{V}_a$ a $\underline{V}_a^{-1}$ jsou pozitivně semidefinitní matice, platí

$$b_{min} = \underline{V}_b - \underline{V}_{ba}^T \underline{V}_a^{-1} \underline{V}_{ba} \qquad (3.2 - 52)$$

pro

$$\underline{V}_a \underline{x} - \underline{V}_{ba} = \underline{0} \qquad (3.2 - 53)$$

Z toho pro odhad řešení vyplývá

$$\underline{x}(k) = \underline{V}_a^{-1}(k)\, \underline{V}_{ba}(k) \qquad (3.2 - 47)$$

S uvažováním vztahu (3.2 - 35) při

$$\underline{U}^{-1}(k) = \left| \begin{array}{cc} \underline{U}_b^{-1}(k) & \underline{0} \\ -\underline{U}_a^{-1}(k)\underline{U}_{ba}(k)\underline{U}_b^{-1}(k) & \underline{U}_a^{-1}(k) \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{1} & \underbrace{\qquad}_{n} \end{array} \right| \begin{array}{l} \}1 \\ \}n \\ \end{array} \qquad (3.2 - 54)$$

lze psát

$$\underline{x}(k) = -\underline{U}_a(k)\underline{D}_a(k)\underline{U}_a^T(k)\underline{U}_a^{-T}(k)\underline{D}_a^{-1}(k)\underline{U}_a^{-1}(k)\underline{U}_{ba}(k)\underline{U}_b^{-1}(k) =$$

$$= -\underline{U}_{ba}(k)\underline{U}_b^{-1}(k) \qquad (3.2 - 55)$$

Protože matice $\underline{U}$ má na hlavní diagonále jedničky

$$\underline{U}_b = \underline{U}_b^{-1} = 1 \qquad (3.2 - 56)$$

platí

$$\underline{x}(k) = -\underline{U}_{ba}(k) \qquad (3.2 - 57)$$

Algoritmus metody U-D filtru je následující

(alg. 3.2 - 2)

```
$\delta_{n+2} = \varphi$
$j = n+1, n, n-1, \dots, 1$
    $h_j = a_j(k+1) + \sum_{l=j+1}^{n+1} u_{lj}(k)\, a_l(k+1)$
    $\alpha = \frac{h_j}{\delta}$
    $g_j^{(j)} = d_{jj}(k) h_j$
    $\delta_j = \delta_{j+1} + g_j h_j$
    $d_j(k+1) = \frac{1}{\varphi} \frac{\delta_{j+1}}{\delta_j} d_j(k)$
    $i = j+1, j+2, \dots, n+1$
        $\beta = u_{ij}(k)$
        $u_{ij}(k+1) = u_{ij}(k) - \alpha g_i^{(j+1)}$
        $g_i^{(j)} = g_i^{(j+1)} + \beta g_j^{(j)}$
$i = 1, 2, \dots, n$
    $x_i(k+1) = -u_{i+1,1}(k+1)$
```

/8/,/18/

Metoda elementární matice rotací

Zapišme soustavu lineárních rovnic ve tvaru

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{a}_{n+1} + \underline{e}, \qquad (3.2 - 58)$$

tj.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{n+1,i} + e_i, \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad m > n \qquad (3.2 - 59)$$

Řešení $\underline{X}$ hledáme z minimálnosti součtů kvadrátů chyb řešení

$$\sum_{i=1}^{m} e_i^2 \longrightarrow min. \qquad (3.2 - 60)$$

Soustavu (3.2 - 58) můžeme zapsat ve tvaru

$$\underline{\underline{Z}}\,\underline{r} = \underline{e}\,, \qquad (3.2 - 61)$$

kde

$$\underline{\underline{Z}} = [\,\underline{\underline{A}} \,\vdots\, \underline{a}_{n+1}] \qquad (3.2 - 62)$$

a

$$\underline{r} = \left|\begin{array}{c} \underline{X} \\ \cdots\cdots \\ -1 \end{array}\right| \qquad (3.2 - 63)$$

Soustava rovnic z technické úlohy má koeficienty získané zpravidla experimentálně, a pak je nutno znát nejen řešení této soustavy, ale též vliv změn koeficientů na měření. Může totiž nastat případ, že malá změna koeficientů vede k velkým změnám v řešení, a tím je výsledek bezcenný. Tento problém malé stability vzniká u soustavy lineárních rovnic se špatně podmíněnou maticí, což je čtvercová regulární matice, u níž je inverzní matice nestabilní.

Je výhodné použít modifikaci eliminační metody, při které se jako pomocné matice volí elementární matice rotací. Je doporučeno použít ortogonální matice, tzv. elementární matice rotací $\underline{\underline{T}}_{ij}$

$$\underline{T}_{ij} = \begin{array}{|cccccc|l}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & c & \cdots & -s & & \text{i -tý řádek} \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
 & & s & \cdots & c & & \text{j - tý řádek} \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & 1 & \\
\hline
 & & \text{i -tý} & & \text{j -tý} & & \\
 & & \text{sloupec} & & \text{sloupec} & &
\end{array} \qquad (3.2 - 64)$$

kde z ortogonality platí

$$c^2 + s^2 = 1 \qquad (3.2 - 65)$$

Tato matice se liší od jednotkové matice nejvýše ve čtyřech prvcích, ležících v průsečících řádků a sloupců s indexy i a j , $i<j$.

Při vynásobení matice $\underline{A}$ maticí $\underline{T}_{ij}$ zleva se změní jen prvky v i-tém a j-tém řádku matice $\underline{A}$. Pro prvky matice

$${}^{(1)}\underline{A} = \underline{T}_{ij}\,\underline{A} \qquad (3.2 - 66)$$

bude platit

$${}^{(1)}a_{il} = c a_{il} - s a_{jl} ,\quad l = 1,2,\dots,n \qquad (3.2 - 67)$$

$${}^{(1)}a_{jl} = s a_{il} + c a_{jl} ,\quad l = 1,2,\dots,n \qquad (3.2 - 68)$$

Analogicky při násobení matice $\underline{A}$ zprava maticí $\underline{T}_{ij}$ se změní jen prvky v i-tém a j-tém sloupci. Prvky

$${}^{(1)}\underline{A} = \underline{A}\,\underline{T}_{ij} \qquad (3.2 - 69)$$

se vypočítají podle vztahů

$$ {}^{(1)}a_{li} = c\,a_{li} + s\,a_{lj}\,, \quad l=1,2,\ldots,n \qquad (3.2 - 70)$$

$$ {}^{(1)}a_{lj} = -s\,a_{li} + c\,a_{lj}\,, \quad l=1,2,\ldots,n \qquad (3.2 - 71)$$

Je-li aspoň jeden z prvků a_{il} , a_{jl} různý od nuly, je možné volit čísla C a S tak, aby prvek ${}^{(1)}a_{jl}$ matice ${}^{(1)}\underline{A} = \underline{T}_{ij}\,\underline{A}$ byl roven nule.

Tedy

$$ S = -\frac{a_{jl}}{\sqrt{a_{il}^2 + a_{jl}^2}} \qquad (3.2 - 72)$$

$$ C = \frac{a_{il}}{\sqrt{a_{il}^2 + a_{jl}^2}} \qquad (3.2 - 73)$$

Z toho vyplývá, že

$$ {}^{(1)}a_{il} = \sqrt{a_{il}^2 + a_{jl}^2} > 0 \qquad (3.2 - 74)$$

$$ {}^{(1)}a_{jl} = 0 \qquad (3.2 - 75)$$

Platí, že každou regulérní matici lze řetězcem násobení elementárními maticemi rotací $\underline{T}_{ij}$ převést v horní trojúhelníkovou matici, jejíž všechny diagonální prvky, popř. s vyjímkou posledního, jsou kladné.

Soustavu popsanou rovnicí (3.2 - 61) vynásobíme zleva elementární maticí rotací $\underline{T}$. Označme potom

$$ \underline{\underline{Z}}^{*} = \underline{T}\,\underline{\underline{Z}} \qquad (3.2 - 76)$$

$$ \underline{e}^{*} = \underline{T}\,\underline{e} \qquad (3.2 - 77)$$

Hodnota kritéria (3.2 - 60) se tím nezmění, neboť platí

$$\underline{e}^{*T}\underline{e}^{*} = \underline{e}^{T}\underline{T}^{T}\underline{T}\underline{e} = \underline{e}^{T}\underline{e}, \qquad (3.2 - 78)$$

využili jsme přitom, že pro ortogální matici $\underline{T}$ platí

$$\underline{T}^{T}\underline{T} = \underline{I}.$$

Po ukončení eliminace obdržíme horní trojúhelníkovou matici s upravenými koeficienty, ostatní prvky jsou nulové.

$$\left|\begin{array}{cccc:c} z^*_{11} & z^*_{12} & \cdots & z^*_{1n} & z^*_{1,n+1} \\ z^*_{21} & z^*_{22} & \cdots & z^*_{2n} & z^*_{2,n+1} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & z^*_{nn} & z^*_{n,n+1} \\ 0 & 0 & & 0 & z^*_{n+1,n+1} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \\ r_{n+1} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} e^*_1 \\ e^*_2 \\ \vdots \\ e^*_m \\ e^*_{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right| \qquad (3.2 - 79)$$

Platí pro kriterium (3.2 - 60)

$$\sum_{i=1}^{m} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n+1} e_i^{*2} \qquad (3.2 - 80)$$

Z toho vyplývá, že dosáhneme-li řešením (3.2 - 79) minima součtu kvadrátů e_i^* , dosáhneme též minima součtu kvadrátů e_r . Pro minimalizaci (3.2 - 80) musíme nalézt vhodné hodnoty r_j , což je jednoduché. Ze systému (3.2 - 79) vyplývá, s ohledem na (3.2 - 63), že není možno nulovat prvek e^*_{n+1}

$$r_{n+1} = -1 \qquad (3.2 - 81)$$

$$e^*_{n+1} = -z^*_{n+1,n+1} \qquad (3.2 - 82)$$

Koeficienty r_j , $j=1,2,\dots,n$ můžeme tedy nalézt řešením systému rovnic

$$\left|\begin{array}{ccc|c} z^*_{11} & z^*_{12} \cdots & z^*_{1n} & z^*_{1,n+1} \\ 0 & z^*_{22} \cdots & z^*_{2n} & z^*_{2,n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & z^*_{n,n} & z^*_{n,n+1} \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right| \qquad (3.2 - 83)$$

Počáteční matici $\underline{Z}$ volíme s nulovými prvky a přidáme jen podmínkovou rovnici z m rovnic počínaje první.

$$\underline{Z} = \left|\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} & z_{1n+1} \end{array}\right| \qquad (3.2 - 84)$$

Tento řádek vynulujeme postupným násobením matic $\underline{T}$. Po vynechání celého řádku by se měl nulovat další řádek. Na výpočtu koeficientů r_j se však nic nezmění, jestliže novou rovnici zapíšeme na místo vynulovaného řádku, ten znova vynulujeme a znovu nahradíme další rovnicí. Při vynulováním prvních n rovnic se nám vždy změní nulová řádka matice $\underline{Z}$ na nenulovou, počínaje první, a je již možno vypočítat r_j . Výpočet lze opakovat pro další rovnice.

Algoritmus metody elementární matice rotací lze zapsat

(alg.3.2 - 3)

```
$i = 1,2,\dots,n$
  | $\delta = \sqrt{a_i^2(k+1) + z_{ii}^2}$
  | $\gamma = \frac{z_{ii}}{\delta}$
```

```
|  $\beta = \frac{a_i(k+1)}{\delta}$
|  $j = 1,2,\dots,n,n+1$
|  |  $\delta = \gamma a_j(k+1) - \beta z_{ij}$
|  |  $z_{ij} = \beta a_j(k+1) + \gamma z_{ij}$
|  |  $a_j(k+1) = \delta$
|  |  $b_{ij} = z_{ij}$
$i = n,n-1,\dots,2,1$
|  $x_i(k+1) = \frac{b_{i,n+1}}{b_{ii}}$
|  $j = i-1,i-2,\dots,1$
|  |  $b_{j,n+1} = b_{j,n+1} - b_{ji} x_i(k+1)$
```

/13/,/17/

Rekurentní metoda

Při soustavě rovnic

$$\underline{a}_{n+1}(k) = \underline{A}(k)\underline{x} \qquad (3.2 - 85)$$

můžeme matici soustavy $\underline{A}$ definovat takto

$$\underline{A}(k) = \begin{vmatrix} \underline{a}^T(1) \\ \underline{a}^T(2) \\ \vdots \\ \underline{a}^T(k) \end{vmatrix} \qquad (3.2 - 5)$$

a po aktualizaci

$$\underline{A}(k+1) = \begin{vmatrix} \underline{a}^T(1) \\ \underline{a}^T(2) \\ \vdots \\ \underline{a}^T(k) \\ \underline{a}^T(k+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{A}(k) \\ \hdashline \underline{a}^T(k+1) \end{vmatrix}, \qquad (3.2 - 86)$$

kde $\underline{a}^T(k+1)$ reprezentuje $(k+1)$ měření nezávisle proměnné.

Definujme matici $\underline{P}^{-1}(k)$ za předpokladu regularity takto

$$\underline{P}^{-1}(k) = \underline{A}^T(k)\,\underline{A}(k) \qquad (3.2 - 87)$$

Potom matice $\underline{P}^{-1}(k+1)$ je dána vztahem

$$\underline{P}^{-1}(k+1) = \underline{A}^{T}(k+1)\,\underline{A}(k+1) = [\underline{A}^{T}(k) \vdots \underline{a}(k+1)] \begin{vmatrix} \underline{A}(k) \\ \cdots \\ \underline{a}^{T}(k+1) \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{P}^{-1}(k) + \underline{a}(k+1)\underline{a}^{T}(k+1) \qquad (3.2 - 88)$$

Rozměr matice $\underline{P}(k)$ se nemění se vzrůstajícím k .

Pomocí identity (3.2 - 8) můžeme pro matici $\underline{P}(k+1)$ psát

$$\underline{P}(k+1) = \underline{P}(k) - \underline{P}(k)\underline{a}(k+1)[\underline{a}^{T}(k+1)\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)+1]^{-1}\underline{a}^{T}(k+1)\,\underline{P}(k)$$

(3.2 - 89)

V tomto vztahu je výraz $[\underline{a}^{T}(k+1)\underline{P}(k)\underline{a}(k+1) + 1]^{-1}$ zřejmě skalár.

(3.2 - 90)

Užijeme-li označení

$$\underline{a}_{n+1}(k) = \begin{vmatrix} a_{n+1}(1) \\ a_{n+1}(2) \\ \vdots \\ a_{n+1}(k) \end{vmatrix} \qquad (3.2 - 91)$$

pak aproximaci odhadů řešení $\underline{x}$ získáme pomocí vztahu

$$\underline{x}(k) = [\underline{A}^{T}(k)\underline{A}(k)]^{-1}\underline{A}^{T}(k)\underline{a}_{n+1}(k) =$$

$$= \underline{P}(k)\,\underline{A}^{T}(k)\,\underline{a}_{n+1}(k) , \qquad (3.2 - 92)$$

$$\underline{x}(k+1) = \underline{P}(k+1)\underline{A}^{T}(k+1)\,\underline{a}_{n+1}(k+1) =$$

$$= \underline{P}(k+1)[\underline{A}^{T}(k)\,\underline{a}_{n+1}(k) + \underline{a}(k+1)a_{n+1}(k+1)] \qquad (3.2 - 93)$$

Pokud do této rovnice dosadíme vztah (3.2 - 89), můžeme psát

$$\underline{x}(k+1) = [\underline{P}(k) - [\underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)+1]^{-1}\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)\underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k)] \cdot$$

$$\cdot [\underline{A}^T(k)\underline{a}_{n+1}(k) + \underline{a}(k+1)a_{n+1}(k+1)] =$$

$$= \underline{P}(k)\underline{A}^T(k)\underline{a}_{n+1}(k) + \underline{P}(k)\underline{a}(k+1)[\underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)+1]^{-1} \cdot$$

$$\cdot [\underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)+1] - \underline{P}(k)\underline{a}(k+1)[\underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)+1]^{-1} \cdot$$

$$\cdot \underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k)[\underline{A}^T(k)\underline{a}_{n+1}(k)+\underline{a}(k+1)a_{n+1}(k+1)] \quad (3.2 - 94)$$

s použitím vztahu (3.2 - 91) a pro

$$[\underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)+1]^{-1}[\underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)+1] = 1$$

lze psát

$$\underline{x}(k+1) = \underline{x}(k) + \underline{P}(k)\underline{a}(k+1)[\underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)+1]^{-1} \cdot$$

$$\cdot \{[\underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)+1]a_{n+1}(k+1) - \underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{A}^T(k)\underline{a}_{n+1}(k) -$$

$$- \underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)a_{n+1}(k+1)\} =$$

$$= \underline{x}(k) + \underline{P}(k)\underline{a}(k+1)[\underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)+1]^{-1} \cdot$$

$$\cdot [a_{n+1}(k+1) - \underline{a}^T(k+1)\underline{x}(k)] \quad (3.2 - 95)$$

Odhad řešení $\underline{x}(k+1)$ je dán tedy vztahy

$$\underline{x}(k+1) = \underline{x}(k) + [\underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)+1]^{-1}\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)[a_{n+1}(k+1) - \underline{a}^T(k+1)\underline{x}(k)] \quad (3.2 - 96)$$

$$\underline{P}(k+1) = \underline{P}(k) - [\underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)+1]^{-1}\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)\underline{a}^T(k+1)\underline{P}(k) \quad (3.2 - 89)$$

Z uvedených vztahů vyplývá, že pro výpočet řešení není třeba provádět operaci inverze a že se v nich uplatňují pouze staré informace a nová měření.

Obdobně jako u metody odmocnin a metody Cholského se v rekurentní metodě může zavést tzv. exponenciální zapomínání starých informací s koeficientem φ, $0<\varphi\leq 1$

Potom vztah (3.2 - 88) se upraví na

$$\underline{P}^{-1}(k+1) = \underline{A}^{T}(k+1)\,\underline{A}(k+1) = [\varphi\,\underline{A}(k)]^{T}[\varphi\,\underline{A}(k)] + \underline{a}(k+1)\,\underline{a}^{T}(k+1), \qquad (3.2 - 97)$$

tj.

$$\varphi^{-2}\underline{P}^{-1}(k+1) = \underline{P}^{-1}(k) + \underline{a}(k+1)\,\varphi^{-2}\,\underline{a}^{T}(k+1) \qquad (3.2 - 98)$$

Přeoznačíme-li

$$\varphi^{2}=q$$

změní se vztahy (3.2 - 96) a (3.2 - 89) na

$$\underline{x}(k+1) = \underline{x}(k) + [\underline{a}^{T}(k+1)\,\underline{P}(k)\,\underline{a}(k+1) + q]^{-1}\,\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)\cdot$$
$$\cdot[a_{n+1}(k+1) - \underline{a}^{T}(k+1)\,\underline{x}(k)] \qquad (3.2 - 99)$$

$$\underline{P}(k+1) = q^{-1}[\underline{P}(k) - [\underline{a}^{T}(k+1)\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)+q]^{-1}\underline{P}(k)\underline{a}(k+1)\,\underline{a}^{T}(k+1)\,\underline{P}(k)] \qquad (3.2 - 100)$$

Při volbě $\varphi=1$ je exponenciální zapomínání vyřazeno a vztahy (3.2 - 99), (3.2 - 100) přecházejí na (3.2 - 96) a (3.2 - 89).

Algoritmus pro výpočet řešení systému lineárních rovnic rekurentní metodou se zavedeným exponenciálním zapomínáním je následující

(alg. 3.2 -4)

```
$q=\varphi^2$
$j=1,2,\dots,n$
    | $s_j = \sum_{i=1}^{n} \underline{P}_{ij}(k)\,a_i(k+1)$
$\alpha = \dfrac{1}{q + \sum_{j=1}^{n} s_j\, a_j(k+1)}$
```

```
$\beta = a_{n+1}(k+1) - \sum_{j=1}^{n} a_j(k+1)\, x_j(k)$
$j = 1, 2, \ldots, n$
    $x_j(k+1) = s_j \beta \alpha + x_j(k)$
$i = 1, 2, \ldots, n$
    $j = 1, 2, \ldots, n$
        $\underline{P}_{ij}(k+1) = \frac{\underline{P}_{ij}(k) - s_j \alpha s_i}{q}$
```

/11/, /18/

Pozn. 1 : Ortogonální matice je taková matice $\underline{A}$, jejíž všechny řádky či sloupce jsou jednotkové a lineárně nezávislé.

Pozn. 2 : Stopou $tr\{\underline{A}\}$ matice $\underline{A}$ se nazývá součet prvků na hlavní diagonále /1/

$$tr\{\underline{A}\} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{3.2 - 101}$$

Pozn. 3 : Matice $\underline{A}$ je pozitivně semidefinitivní právě tehdy, když její kvadratická forma $\underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x}$ nabývá nezáporných hodnot pro všechny hodnoty x_i

$$\underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} \overset{\cdot}{\geq} 0 \tag{3.2 - 102}$$

4. Programové řešení a zhodnocení průběžných metod

Na základě uvedených průběžných metod jsou sestaveny podprogramy pro výpočet základních statistik, korelačních funkcí a pro řešení soustav lineárních rovnic.

Výpočet základních statistik

Výpočet aritmetického průměru a rozptylu je řešen v podprogramech uvedených v tabulce 4 - 1.

tabulka 4 - 1

algoritmus	nevážený případ	vážený případ
Hansonův	HANSON	VHAN
Westův	WEST	VWEST
Nelsonův	NELSON	VNELS
Cottonův	COTTON	VCOT
jednoprůchodový	JPR	VJPR

V těchto podprogramech je možnost výpočtu jak v jednoduché, tak i v dvojnásobné přesnosti.

Pro vyhodnocování modu byl sestaven podprogram MODUS, pro vyhodnocování variačního rozpětí pak podprogram VR.

Význam všech proměnných uvedených ve výše zmíněných podprogramech je zřejmý přímo z popisu v podprogramech. Podprogramy jsou sestaveny tak, aby bylo možno základní statistiky počítat vždy po načtení posloupnosti nových dat.

Protože algoritmy pro výpočet aritmetického průměru a rozptylu vyžadují znalost dosavadního počtu dat, vstupují do podprogramů, řešících tento problém, nová data s indexy K1 až K2 , které odpovídají průběžnému pořadí v posloupnosti všech načtených dat. Do podprogramů MODUS, VR vstupují nově načtená data jako samostatný vektor.

Výpočet korelačních funkcí

Výpočet korelačních funkcí je řešen v podprogramu KOREL (viz /11/, /13/). Tento podprogram vypočítává autokorelační a vzájemně korelační funkce pro dvě vstupující realizace podle vztahů (2.4 - 8) a (2.4 - 9).

Výpočet se provádí vždy po načtení dvojice dat, kterou jsou aktualizovány vektory obou realizací, přičemž nepotřebné hodnoty realizací jsou zapomínány.

Význam proměnných je opět zřejmý z popisu v podprogramech.

Řešení soustav lineárních rovnic

Průběžné řešení soustav lineárních rovnic je zabezpečeno v podprogramech UDFIL, REFIL, REDUCE a REKURZ (viz např. /8/, /11/, /13/, /14/, /17/).

Všechny podprogramy vypočítávají vektor řešení vždy po načtení jednoho řádku matice soustavy a pravé strany.

Řešení se provádí přesně podle algoritmů (alg. 3.2 -1) až (alg. 3.2 - 4) uvedených v kapitole 3.2. S vyjímkou podprogramu REDUCE existuje možnost exponenciálního zapomínání načítaných dat.

Význam proměnných lze snadno zjistit v popisech v jednotlivých podprogramech.

Ověřovací programy

Pro ověření uvedených podprogramů bylo sestaveno šest programů.

1. Program DP O 1

Tento program porovnává výsledky výpočtu aritmetického průměru a rozptylu pro nevážený případ získané ze subroutin HANSON, WEST, NELSON, COTTON, JPR.

Tisk vypočítaných hodnot je prováděn po načtení posloupnosti nových dat.

Program je možné upravit pro výpočty v dvojnásobné přesnosti.

2. Program DP O 2

Program DP 0 2 je analogický s předcházejícím programem. Na rozdíl od něho porovnává výpočty aritmetického průměru a rozptylu pro vážený případ. Zahrnuje subroutiny VHAN, VWEST, VNELS, VCOT a VJPR.

3. program DP O 3

Program byl sestaven pro přehledné uvedení výpočtů základních statistik. Zahrnuje subroutiny VWEST a MODUS a function VR.

Vedle výpočtů aritmetického průměru, rozptylu, modu a variačního rozpětí je v hlavní programové jednotce zajištěn i výpočet směrodatné odchylky (podle vztahu (2.2 - 8)) a variačního koeficientu (viz (2.2 - 9)).

Tisk výpočtů je prováděn po načtení určené posloupnosti dat.

4. Program DP O 4

Tento program ověřuje výpočet autokorelačních a vzájemně korelačních funkcí pro dvě realizace pomocí subroutiny KOREL.

Výsledky se tiskou po načtení předem určeného počtu dat.

5. Program DP 05

Program realizuje výpočet korelačních funkcí pro jednu realizaci. Je vypočítávána autokorelační funkce, autokovarianční funkce a normovaná korelační funkce. K provedení těchto výpočtů jsou do programu zahrnuty subroutiny KOREL a WEST.

Subroutina KOREL je jednoduchým způsobem upravena pro výpočet korelační funkce pouze z jedné realizace. Vyhodnocení autokovarianční funkce a normované korelační funkce je provedeno přímo v hlavní programové jednotce, odhady aritmetického průměru a rozptylu se provádějí pomocí subroutiny WEST.

Výsledky se opět tisknou po načtení předem určeného počtu dat.

6. Program DP 06

V tomto programu se porovnávají jednotlivé metody řešení soustav lineárních rovnic. Jsou do něho včleněny subroutiny UDFIL, REFIL, REDUCE, REKURZ.

V hlavní programové jednotce je napevno stanoven koeficient exponenciálního zapomínání, $\varphi = 1$.

Jako v každém programu, tak i zde se výsledky tisknou až po předem daném počtu volání podprogramů.

Zhodnocení

Všechny programy byly odladěny v programovacím jazyce Fortran IV s rozšířením pro počítače řady EC a IBM /15/.

Ověřovací výpočty byly provedeny na počítači EC 1033 instalovaném ve Výpočetním středisku VŠST Liberec.

Počítač EC 1033 je počítačem 3.generace, délka jeho slova je 4 byty, pro dvojnásobnou délku pak 8 bytů. Počítač je vyráběn v Sovětském svazu a je zařazen do Jednotné soustavy elektronických počítačů /10/.

Přesnost výpočtů aritmetického průměru a rozptylu je negativně ovlivněna poměrně krátkou délkou slova počítače. Za této situace už kontrolní výpočet aritmetického průměru a rozptylu, prováděný podle definičních vztahů (2.2 - 1) až (2.2 - 4), byl zatížen určitou zaokrouhlovací chybou. V některých případech dokonce průběžné algoritmy dosáhly ve výsledku větší přesnosti než výpočet podle uvedených definičních vztahů.

Při výpočtu aritmetického průměru v jednoduché přesnosti selhává Hansonův algoritmus, jehož výsledky jsou oproti ostatním algoritmům zatíženy větší chybou. Při použití dvojnásobné přesnosti se výsledky jednotlivých algoritmů neliší a vzhledem k jednoduché přesnosti jsou zatíženy mnohem menší chybou.

Při výpočtu rozptylu dávají nejlepší výsledky algoritmy Hansonův, Westův a Nelsonův. Algoritmy Cottonův a jednoprůchodový dávají výsledky s větší chybou, zvláště pokud nová data se přibližně rovnají dosavadnímu aritmetickému průměru.

Pro výpočet aritmetického průměru a rozptylu na počítači se stejnou délkou slova jako EC 1033 se ukazuje jako nejlepší algoritmus Westův. Přesností se mu přibližuje i algoritmus Nelsonův. Algoritmus Hansonův není vhodný pro výpočet aritmetického průměru,algoritmy Cottonův a jednoprůchodový selhávají pro výpočet rozptylu. Z hlediska rychlosti je nejvhodnější jednoprůchodový algoritmus /2/. Podrobnou analýzu lze najít v /2/.

Průběžné výpočty variěčního rozpětí a modu jsou prováděny podle definičních vztahů a dávají s ohledem na délku slova počítače výsledky dostatečně přesné.

Výpočet korelačních funkcí je závislý na kvalitě vztahů (2.4 - 1) a (2.4 - 2). Tento vztah pro nedostatečný počet dat, tj. pokud počet dat odpovídá počtu bodů korelační funkce či při pomalu měnících se datech může dávat hodnoty odporující vztahu (2.3 -10). Rovněž při výpočtu normovaně korelační funkce dostáváme výsledky odlišné od (2.3 - 12).

Nedostakem průběžného výpočtu korelačních funkcí je fakt, že vyhodnocuje výsledky pouze pro nezáporné posunutí. Toto lze ale překlenout aplikací vztahů (2.3 - 8) a (2.3 - 9), které umožní určit hodnoty korelačních funkcí i pro záporná posunutí.

Všechny metody pro řešení soustav lineárních rovnic dávají s ohledem na to, že koeficienty rozšířené matice soustavy jsou získávány experimentálně, tudíž i s možnými nepřesnostmi, a i vzhledem k tomu, že se tyto koeficienty mohou časově měnit, výsledky s uspokojivou přesností.

Výsledky získané jednotlivými metodami se navzájem prakticky neliší, s vyjímkou metody rekurentní, která oproti zbývajícím metodám má výsledky zatížené určitou chybou. Naproti tomu výsledky získané matodami Refil a Reduce jsou za předpokladu, že je výpočet prováděn pro počet rovnic větší než je počet neznámých, identické.

Metoda elementárních rotací, Reduce, má výhodu v malé citlivosti na špatnou podmíněnost úloh, její nevýhodou je nemožnost exponenciálního zapomínání vstupních dat /11/. U ostatních metod je exponenciální zapomínání umožněno.

Problémem při řešení metodou rekurentní je požadavek semidefinitnosti matice $\underline{P}$ ze vztahu (3.2 - 100), který není pomocí vztahů (3.2 - 99) a (3.2 - 100) zajištěn /13/.

Z uvedených metod řešení soustav lineárních rovnic je nejčastěji užívána metoda Cholského, U-D filtr, která je dostatečně přesná a má možnost exponenciálního zapomínání vstupních informací.

Závěrem lze říci, že s určitými výhradami metody uvedené v této práci splňují vlastnosti požadované na průběžných metodách, tj. výpočet na základě starého výsledku a nových dat s dostatečnou přesností.

5. Závěr

Diplomová práce se zabývala použitím průběžných metod při řešení úloh.

V první kapitole je uveden stručný popis průběžných metod.

V první části druhé kapitoly jsou popsány základní statistiky a algoritmy umožňující jejich průběžný výpočet.

V druhé části téže kapitoly jsou uvedeny korelační funkce a taktéž algoritmy jejich výpočtu.

Kapitola 3 je věnována popisu soustav lineárních rovnic a jsou zde rovněž rozebrány metody jejich průběžného řešení.

V kapitole 4 jsou popsány podprogramy, které zabezpečují řešení úloh pomocí výše uvedených průběžných metod. Jsou zde uvedeny i programy, sloužící k ověření těchto podprogramů. Kapitola také obsahuje zhodnocení průběžných metod uvedených v diplomové práci.

Seznam použité literatury

/1/ Bartsch, H. - J. : Matematické vzorce. 1. vydání, Praha, SNTL, 1983

/2/ Chan, T.F., Lewis, J.G. : Computing Standard Deviations : Accuracy. Comm. ACM,22, 1979, č. 9, str. 526 - 531

/3/ Cotton, I. W. : Remark on Stably Updating Mean and Standard Deviation. Comm. ACM, 18, 1975, č. 8, str. 458

/4/ Fabian, V. : Základní statistické metody. 1. vydání, Praha, Nakladatelství ČSAV 1964

/5/ Hanson, R.J. : Stably Updating Mean and Standard Deviation of Data. Comm. ACM, 18, 1975, č. 1, str. 57 - 58

/6/ Hanuš, B., Balátě, J., Švarc, I., Zikeš, F. : Teorie automatického řízení I., I. část, Skriptum VŠST Liberec. 1. vydání, Liberec, VŠST 1982

/7/ Kadeřábek, J., Kracík, V. : Úvod do teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a příbuzných oblastí. Skriptum VŠST Liberec. 1. vydání, Liberec, VŠST 1970

/8/ Kracík, V., Janeček, B., Hanousek, V., Štemberk, P. : Ověření programu UDFIL. Výzkumná zpráva KTK - 0066. Liberec, VŠST 1980

/9/ Nelson, L.S. : Futher remarks on Stably Updating Mean and Standard Deviation Estimates. Comm. ACM, 22, 1979, č. 8, str. 483

/10/ Němeček, S. : Technické prostředky automatického řízení, 1. část. Skriptum VŠST Liberec, 1. vydání, Liberec, VŠST 1982

/11/ Olehla, M. : Průběžná identifikace. Výzkumná zpráva KTK - 0022. Liberec, VŠST 1977

/12/ Olehla, M., Král, F., Švarc, I., Tišer, J. : Programování, programovací jazyky a operační systémy. Skriptum VŠST Liberec. 1. vydání, Liberec, VŠST 1980

/13/ Olehla, M., Věchet,V., Olehla, J. : Řešení úloh matematické statistiky ve Fortranu. 1. vydání, Praha, Nadas 1982

/14/ Peterka, V. : Číslicové řízení procesů s náhodnými poruchami a neurčitými charakteristikami. Doktorská disertační práce. Praha, ÚTIA 1975

/15/ Proskurjakov, S. A., Olehla, M., Tišer, J. : Základy numerických metod a programování. Skriptum VŠST Liberec. 3. vydání, Liberec, VŠST 1979

/16/ Reisenauer, R. : Metody matematické statistiky a jejich aplikace. 1. vydání, Praha, SNTL, Práce 1965

/17/ Slánská, D. : Porovnání metod neprůběžné a průběžné identifikace. Diplomová práce ASŘ TF 030. Liberec, VŠST 1982

/18/ Soukup, J. : Identifikace soustav, Skriptum ČVUT Praha. 2. vydání, Praha, ČVUT 1982

/19/ West, D.H.D. : Updating Mean and Variance Estimates : An Improved Method. Comm. ACM, 22, 1979, č. 9, str. 532 - 535

Seznam podprogramů

COTTON	výpočet aritmetického průměru a rozptylu
HANSON	výpočet aritmetického průměru a rozptylu
JPR	výpočet aritmetického průměru a rozptylu
KOREL	výpočet korelačních funkcí
MODUS	výpočet modu
NELSON	výpočet aritmetického průměru a rozptylu
REDUCE	řešení soustav lineárních rovnic
REFIL	řešení soustav lineárních rovnic
REKURZ	řešení soustav lineárních rovnic
UDFIL	řešení soustav lineárních rovnic
VCOT	výpočet aritmetického průměru a rozptylu
VHAN	výpočet aritmetického průměru a rozptylu
VJPR	výpočet aritmetického průměru a rozptylu
VNELS	výpočet aritmetického průměru a rozptylu
VR	výpočet variačního rozpětí
VWEST	výpočet aritmetického průměru a rozptylu
WEST	výpočet aritmetického průměru a rozptylu

Seznam příloh

Prohlášení

Souhlasím, aby moje diplomová práce byla podle Směrnice uveřejněné v Pokynech a informacích VŠST č. 1/1975, se kterou jsem byl seznámen, zapůjčena nebo odprodána za účelem využívání jejího obsahu. Jsem si vědom, že práce je majetkem školy a že s ní nemohu sám disponovat.

Souhlasím, aby po pěti letech byla diplomová práce vrácena na níže uvedenou adresu nebo v případě nedoručitelnosti skartována.

Jméno a příjmení :	Jiří Kolda
Adresa trvalého bydliště :	431 41 Údlice, Kamenná cesta 317
Adresa podniku :	Elitex, k.p., 463 31 Chrastava

Seznam příloh

1 Program DP01 Porovnání výpočtů aritmetického průměru a rozptylu

2 Ověření programu DP01

3 Program DP02 Porovnání výpočtů aritmetického průměru a rozptylu pro vážený případ

4 Ověření programu DP02

5 Program DP03 Výpočty základních statistik

6 Ověření programu DP03

7 Program DP04 Výpočet korelačních funkcí pro dvě realizace

8 Ověření programu DP04

9 Program DP05 Výpočet korelačních funkcí pro jednu realizaci

10 Ověření programu DP05

11 Program DP06 Porovnání řešení soustav lineárních rovnic

12 Ověření programu DP06