Technická univerzita v Liberci
FAKULTA PEDAGOGICKÁ

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: 3. stupeň

Kombinace: matematika – zeměpis

ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI *s*-TÉHO STUPNĚ

ARITHMETIC SEQUENCES OF ORDER *s*

Diplomová práce: 06–FP–KMD–004

Autor:
Dana HAKOVÁ

Podpis:

Adresa:
Mostek 96
544 75, Mostek

Vedoucí práce: RNDr. Daniela BITTNEROVÁ, CSc.

Počet

stran	obrázků	tabulek	pramenů
51	2	18	16

V Liberci dne: 9. 5. 2006

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucí diplomové práce.

V Liberci dne: 9. 5. 2006 Dana Haková

PODĚKOVÁNÍ:

Děkuji vedoucí práce RNDr. Daniele Bittnerové, CSc. za odborné vedení a za podnětné rady při tvorbě diplomové práce. Dále děkuji řediteli Gymnázia ve Dvoře Králové nad Labem Mgr. Josefu Bělinovi a učiteli matematiky RNDr. Vladimíru Huškovi, že mi umožnili v praxi ověřit metodický postup řešení příkladů pomocí aritmetických posloupností s-tého stupně.

ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI *s*-TÉHO STUPNĚ

Resumé

Diplomová práce se zabývá aritmetickými posloupnostmi s-tého stupně, jejich definováním, odvozováním vzorců pro n-tý člen a pro součet prvních n členů a využitím při řešení příkladů na střední škole.

Práce je rozdělena do čtyř hlavních částí. První část slouží k nadefinování pojmu k-tá diference. Druhá část je zaměřena na odvozování vztahů pro n-tý člen a součet n členů aritmetických posloupností s-tého stupně. Třetí část je metodická. V ní je uvedeno, jak a v kterou dobu zařadit tematický celek aritmetické posloupnosti s-tého stupně do hodin matematiky na střední škole. V poslední (čtvrté) části je uvedeno několik řešených příkladů.

ARITHMETIC SEQUENCES OF ORDER *s*

Summary

This Diploma Thesis deals with arithmetic sequences of order s, their definition, derivation of relations of the n-th term and of the sum of their first n terms, and using to the solving of examples at secondary school.

The Diploma Thesis is divided into four parts. The first part is instrumental to define the term of difference of order k. The second part is focused on the derivation of relations of the n-th term and the sum of their first n terms. The third part is methodical. In this part, there is presented, how and in which time it is possible to include this theme in lessons of mathematics at secondary schools. Some examples are solved in the last (fourth) part.

ARITHMETISCHE FOLGEN *s*-TER ORDNUNG

Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit den arithmetischen Folgen s-ter Ordnung, mit ihrer Defination, mit der Ableitung einer Formel für ein n-tes Glied und für eine Summe der ersten n Glieder Ableitung und endlich auch mit der Applikation bei der Lösung der Exampel in der Mittelschule.

Diese Diplomarbeit ist vierteilig. Der erste Teil dient für Defination der Idee der k-ten Differenz. Der zweite Teil ist an die Ableitung einer Formel

für ein n-tes Glied und für eine Summe der ersten n Glieder der arithmetischen Folgen s-ter Ordnung orientiert. Der dritte Teil ist methodisch. In diesem Teil ist gesetzt, wie und wann dieses Thema in den Stunden der Mathematik in der Mittelschule aufnehmen möglich ist. In dem letzten (vierte) Teil ist einige Exampel gelöst.

OBSAH

SEZNAM UŽITÝCH SYMBOLŮ

N .... množina přirozených čísel

$\mathbf{N}_0$ .... množina přirozených čísel včetně 0

R .... množina reálných čísel

$\forall$ .... obecný kvantifikátor

$\in$ .... je prvkem

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .... nekonečná číselná posloupnost

a_n .... n-tý člen posloupnosti

d .... diference aritmetické posloupnosti

s_n .... součet prvních n členů posloupnosti

$\sum_{i=0}^{k} a_i$ .... součet všech a_i, kde i probíhá od 0 do k

$\Delta^k a_i$ .... k-tá diference vpřed členu a_i

$\nabla^k a_i$ .... k-tá diference zpět členu a_i

$\delta^k a_i$ .... k-tá centrální diference členu a_i

$\binom{n}{k}$ .... binomický koeficient, kombinační číslo

1. ÚVOD

Diplomová práce je zaměřená na aritmetické posloupnosti s-tého stupně. Aritmetické posloupnosti s-tého stupně jsou na středních školách zastoupeny pouze podkapitolou aritmetické posloupnosti (prvního stupně). Avšak aritmetické posloupnosti s-tého stupně mají široké uplatnění při řešení středoškolských příkladů, a to zejména při řešení příkladů z kombinatoriky. V současné době se kombinatorické příklady řeší na středních školách pomocí vzorců pro kombinace, variace a permutace, a to buď s bez opakování, nebo s opakováním. Studenti tak získají několik vzorců, do kterých často mechanicky dosazují zadaná čísla. Část studentů však obtížnější příklady takto nezvládá řešit. Zavedení tématu aritmetické posloupnosti s-tého stupně by studentům ukázalo jiný, v některých případech i snadnější způsob řešení.

Cílem této práce je seznámení s pojmem aritmetické posloupnosti s-tého stupně a s jednotlivými vztahy pro n-tý člen a pro součet prvních n členů. Část diplomové práce dále tvoří řešené příklady, na kterých je ukázáno, jak lze pomocí aritmetických posloupností s-tého stupně vybrané příklady řešit, a možnosti a způsoby zařazení tohoto tématu do učiva matematiky na střední škole.

2. DIFERENCE

2.1. Diference vpřed

Definice 2.1: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost. Rozdíl $\Delta^1 a_i = a_{i+1} - a_i$, $i \in \mathbf{N}$, se nazývá **diferencí vpřed** prvního stupně členu a_i. Diference $\Delta^k a_i$ stupně k členu a_i je definována rekurentně

$$\Delta^1 a_i = a_{i+1} - a_i,\ i \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

$$\Delta^k a_i = \Delta^{k-1} a_{i+1} - \Delta^{k-1} a_i,\ k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}. \tag{2}$$

Z definice pro k-tou diferenci vpřed platí:

$$\Delta^2 a_i = \Delta a_{i+1} - \Delta a_i = (a_{i+2} - a_{i+1}) - (a_{i+1} - a_i) = a_{i+2} - 2a_{i+1} + a_i,$$

$$\Delta^3 a_i = \Delta^2 a_{i+1} - \Delta^2 a_i = (a_{i+3} - 2a_{i+2} + a_{i+1}) - (a_{i+2} - 2a_{i+1} + a_i) =$$
$$= a_{i+3} - 3a_{i+2} + 3a_{i+1} - a_i,$$

$$\Delta^4 a_i = \Delta^3 a_{i+1} - \Delta^3 a_i = (a_{i+4} - 3a_{i+3} + 3a_{i+2} - a_{i+1}) - (a_{i+3} - 3a_{i+2} + 3a_{i+1} - a_i) =$$
$$= a_{i+4} - 4a_{i+3} + 6a_{i+2} - 4a_{i+1} + a_i,$$

...

Poznámka 2.1: Nechť $k \in \mathbf{N}_0$. Potom platí

$$\Delta^k a_i = a_{i+k} - \binom{k}{1} a_{i+k-1} + \binom{k}{2} a_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k a_i = \sum_{j=o}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} a_{i+j}. \tag{3}$$

Tento vztah lze dokázat úplnou indukcí.

Důkaz: I. $k = 0 : L = \Delta^0 a_i = a_i$

$$P = (-1)^0 \cdot \binom{0}{0} \cdot a_{i+0} = a_i$$

II. Předpokládejme, že pro libovolné $l \in \mathbf{N}_0 : \Delta^l a_i = \sum_{j=o}^{l} (-1)^{l-j} \binom{l}{j} a_{i+j}$.

Dokažme platnost $\Delta^{l+1} a_i = \sum_{j=o}^{l+1} (-1)^{l+1-j} \binom{l+1}{j} a_{i+j}$.

$$\Delta^{l+1} a_i = \Delta^l a_{i+1} - \Delta^l a_i = \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l-j} \binom{l}{j} a_{i+j+1} - \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l-j} \binom{l}{j} a_{i+j} =$$

⌈V první sumě provedeme transformaci sčítacího indexu $s = j + 1$ a v druhé pouze přeznačíme $s = j$.⌋

$$= \sum_{s=1}^{l+1} (-1)^{l+1-s} \binom{l}{s-1} a_{i+s} + \sum_{s=0}^{l} (-1)^{l+1-s} \binom{l}{s} a_{i+s} =$$

$$= (-1)^0 \binom{l}{l} a_{i+s} + \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l+1-s} \left[\binom{l}{s-1} + \binom{l}{s} \right] a_{i+s} + (-1)^{l+1} a_i =$$

$$= \sum_{s=0}^{l+1} (-1)^{l+1-s} \binom{l+1}{s} a_{i+s}$$

Dokázali jsme tedy, že uvedený vztah platí pro libovolné přirozené číslo k.

Symbol Δ můžeme chápat jako operátor, který má následující vlastnosti.

Věta 2.1: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti a $c \in \mathbf{R}$ je konstanta. Pak $\forall k, l, n \in \mathbf{N}$ platí

1) $\Delta(a_n + b_n) = \Delta a_n + \Delta b_n$,

2) $\Delta(c a_n) = c \Delta a_n$,

3) $\Delta(a_n b_n) = (\Delta a_n) b_n + a_n (\Delta b_n) + \Delta a_n \Delta b_n$,

4) $\Delta\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{(\Delta a_n) b_n - a_n (\Delta b_n)}{b_n b_{n+1}}$,

5) $\Delta^k(\Delta^l a_n) = \Delta^{k+l} a_n$.

Důkaz:

1) Podle definice (**Definice 2.1**) platí $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ a $\Delta b_n = b_{n+1} - b_n$. Tedy:

$$\Delta(a_n + b_n) = (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) = a_{n+1} - a_n + b_{n+1} - b_n = \Delta a_n + \Delta b_n$$

2) Z definice (**Definice 2.1**) plyne:

$$\Delta(ca_n) = ca_{n+1} - ca_n = c(a_{n+1} - a_n) = c\Delta a_n$$

3) Použitím definice (**Definice 2.1**) a různými úpravami vztah dokážeme:

$$\Delta(a_n b_n) = a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_n = a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+1}b_n - a_{n+1}b_n + a_n b_n - a_n b_n +$$

$$+ a_n b_{n+1} - a_n b_{n+1} - a_n b_n = (\Delta a_n)b_n + a_n(\Delta b_n) + a_{n+1}\Delta b_n - a_n b_{n+1} + a_n b_n =$$

$$= (\Delta a_n)b_n + a_n(\Delta b_n) + a_{n+1}\Delta b_n - a_n \Delta b_n = (\Delta a_n)b_n + a_n(\Delta b_n) + \Delta a_n \Delta b_n$$

4) Vzorec dokážeme obdobně jako předchozí vztah:

$$\Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1}}{b_n b_{n+1}} = \frac{a_{n+1}b_n - a_n b_n + a_n b_n - a_n b_{n+1}}{b_n b_{n+1}} =$$

$$= \frac{(\Delta a_n)b_n - a_n(\Delta b_n)}{b_n b_{b+1}}$$

5) Použitím definice (**Definice 2.1**) a předchozích vzorců postupnými úpravami získáme:

$$\Delta^k(\Delta^l a_n) = \Delta^k(\Delta^{l-1}a_{n+1} - \Delta^{l-1}a_n) = \Delta^k(\Delta^{l-2}a_{n+2} - 2\Delta^{l-2}a_{n+1} + \Delta^{l-2}a_n) =$$

$$= \Delta^k(\Delta^{l-3}a_{n+3} - 3\Delta^{l-3}a_{n+2} + 3\Delta^{l-3}a_{n+1} - \Delta^{l-3}a_n) = \ldots =$$

$$= \Delta^k\left[\binom{l}{0}a_{n+l} - \binom{l}{1}a_{n+l-1} + \binom{l}{2}a_{n+l-2} - \ldots + (-1)^l\binom{l}{l}a_n\right] =$$

$$= \Delta^k\binom{l}{0}a_{n+l} - \Delta^k\binom{l}{1}a_{n+l-1} + \Delta^k\binom{l}{2}a_{n+l-2} - \ldots + \Delta^k(-1)^l\binom{l}{l}a_n =$$

$$= \ldots = \Delta^{k+l-3} a_{n+3} - 3\Delta^{k+l-3} a_{n+2} + 3\Delta^{k+l-3} a_{n+1} - \Delta^{k+l-3} a_n =$$

$$= \Delta^{k+l-2} a_{n+2} - 2\Delta^{k+l-2} a_{n+1} + \Delta^{k+l-2} a_n = \Delta^{k+l-1} a_{n+1} - \Delta^{k+l-1} a_n = \Delta^{k+l} a_n$$

Uvedené vztahy tedy platí.

2.2. Diference zpět a centrální diference

Definice 2.2: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost. Rozdíl $\nabla^1 a_i = a_i - a_{i-1}, i \in \mathbf{N}$, se nazývá **diferencí zpět** prvního stupně členu a_i. Diference $\nabla^k a_i$ stupně k členu a_i je definována rekurentně

$$\nabla^1 a_i = a_i - a_{i-1}, i \in \mathbf{N}, \tag{4}$$

$$\nabla^k a_i = \nabla^{k-1} a_i - \nabla^{k-1} a_{i-1}, k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}. \tag{5}$$

Poznámka 2.2: Nechť $k \in \mathbf{N}_0$, potom také platí

$$\nabla^k a_i = \sum_{j=o}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} a_{i-j}. \tag{6}$$

Definice 2.3: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost. Rozdíl $\delta^1 a_i = a_{i+\frac{1}{2}} - a_{i-\frac{1}{2}}, i \in \mathbf{N}$, se nazývá **centrální diferencí** prvního stupně členu a_i. Diference $\delta^k a_i$ stupně k členu a_i je definována rekurentně

$$\delta^1 a_i = a_{i+\frac{1}{2}} - a_{i-\frac{1}{2}}, i \in \mathbf{N}, \tag{7}$$

$$\delta^k a_i = \delta^{k-1} a_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{k-1} a_{i-\frac{1}{2}}, k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}. \tag{8}$$

Mezi jednotlivými diferencemi platí následující vztahy:

$$\delta\, a_{i+\frac{1}{2}} = \Delta a_i = \nabla a_{i+1}$$

$$\nabla^k a_i = \Delta^k a_{i-k}$$

Následující tabulky zobrazují diferenci vpřed (Tab. 2.1), diferenci zpět (Tab. 2.2) a centrální diferenci (Tab. 2.3).

a_1		a_2		a_3		a_4		a_5		$\dots$
	$\Delta^1 a_1$		$\Delta^1 a_2$		$\Delta^1 a_3$		$\Delta^1 a_4$		$\dots$	
		$\Delta^2 a_1$		$\Delta^2 a_2$		$\Delta^2 a_3$		$\dots$		
			$\Delta^3 a_1$		$\Delta^3 a_2$		$\dots$			
				$\Delta^4 a_1$		$\dots$				
					$\dots$					

Tab. 2.1: Diference vpřed

$\dots$		a_{n-4}		a_{n-3}		a_{n-2}		a_{n-1}		a_n
	$\dots$		$\nabla^1 a_{n-3}$		$\nabla^1 a_{n-2}$		$\nabla^1 a_{n-1}$		$\nabla^1 a_n$	
		$\dots$		$\nabla^2 a_{n-2}$		$\nabla^2 a_{n-1}$		$\nabla^2 a_n$		
			$\dots$		$\nabla^3 a_{n-1}$		$\nabla^3 a_n$			
				$\dots$		$\nabla^4 a_n$				
					$\dots$					

Tab. 2.2: Diference zpět

a_{i-2}		a_{i-1}		a_i		a_{i+1}		a_{i+2}		$\dots$
	$\delta^1 a_{i-\frac{3}{2}}$		$\delta^1 a_{i-\frac{1}{2}}$		$\delta^1 a_{i+\frac{1}{2}}$		$\delta^1 a_{i+\frac{3}{2}}$		$\dots$	
		$\delta^2 a_{i-1}$		$\delta^2 a_i$		$\delta^2 a_{i+1}$		$\dots$		
			$\delta^3 a_{i-\frac{1}{2}}$		$\delta^3 a_{i+\frac{1}{2}}$		$\dots$			
				$\delta^4 a_i$		$\dots$				
					$\dots$					

Tab. 2.3: Centrální diference

3. ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI *s*-TÉHO STUPNĚ

3.1. Aritmetické posloupnosti prvního stupně

Definice 3.1: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetickou posloupností**, právě když existuje takové reálné číslo $d \neq 0$, že $\forall n \in \mathbf{N} : a_{n+1} = a_n + d$. Číslo d se nazývá **diference** aritmetické posloupnosti.

Věta 3.1: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost. Pak $\forall n, r, s \in \mathbf{N}$ platí

1) $a_n = a_1 + (n-1)\,d$,

2) $a_s = a_r + (s-r)\,d$,

3) $s_n = \frac{1}{2} n\,(a_1 + a_n)$.

Důkaz:

1) Důkaz provedeme matematickou indukcí.

I. $n = 1$: $L = a_1$

$P = a_1 + (1-1)\,d = a_1$

II. Předpokládejme, že pro libovolné $k \in \mathbf{N} : a_k = a_1 + (k-1)\,d$.

Dokažme platnost $a_{k+1} = a_1 + [(k+1)-1]\,d = a_1 + kd$.

$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)\,d + d = a_1 + kd$

Dokázali jsme tedy, že vztah platí pro libovolné přirozené číslo n.

2) Důkaz provedeme pomocí předchozího vzorce. Podle předchozího vzorce platí:

$a_s = a_1 + (s-1)\,d$

$a_r = a_1 + (r-1)\,d$

Odečtením těchto dvou vztahů a následnými úpravami získáme:

$$a_s - a_r = a_1 + (s-1)d - a_1 - (r-1)d$$

$$a_s - a_r = (s-1)d - (r-1)d$$

$$a_s = a_r + (s-r)d$$

3) Důkaz provedeme pomocí předchozích vzorců. Nejprve si vyjádříme součet n členů posloupnosti. Sčítat budeme jak od prvního po n-tý člen, tak i od n-tého po první člen posloupnosti:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$$

Sečtením těchto dvou vztahů a úpravami získáme vztah pro dvojnásobek součtu. Po úpravách na pravé straně vydělíme rovnici číslem 2. Získáme tak vztah, který jsme měli dokázat:

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 - d + d + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + d - d + a_2) + (a_n + a_1)$$

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$2s_n = n(a_1 + a_n)$$

$$s_n = \frac{1}{2} n (a_1 + a_n)$$

3.2. Aritmetické posloupnosti druhého stupně

3.2.1. Definování aritmetické posloupnosti druhého stupně

Definice 3.2: Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetickou posloupností druhého stupně**, pokud posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (b_{n+1} - b_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická.

Příklad jedné z mnoha aritmetických posloupností druhého stupně najdeme v Pascalově trojúhelníku (Tab. 3.1) ve třetím šikmém sloupci.

1
1 1
1 2 **1**
1 3 **3** 1
1 4 **6** 4 1
1 5 **10** 10 5 1
1 6 **15** 20 15 6 1
… … … … … … … …

Tab. 3.1: Pascalův trojúhelník

Z definice víme, že pro aritmetickou posloupnost druhého stupně platí $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (b_{n+1} - b_n)_{n=1}^{\infty}$, tedy $(b_{n+1})_{n=1}^{\infty} = (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$. Členy aritmetické posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ závisejí na prvním členu posloupnosti b_1 a na příslušné aritmetické posloupnosti prvního stupně.

Příklad 3.1: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...)$ je aritmetická posloupnost prvního stupně. Určete první členy aritmetické posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ druhého stupně.

Řešení: Zvolíme první člen posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ $b_1 = 4$. Potom podle definice platí: $b_2 = a_1 + b_1 = 6$, $b_3 = a_2 + b_2 = 10$ atd. Postupně dostaneme posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty} = (4, 6, 10, 16, 24, 34, 46, ...)$.

Tuto posloupnost v Pascalově trojúhelníku nenajdeme. Avšak stejně jako v Pascalově trojúhelníku můžeme vyčíst členy posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ v následující tabulce (Tab. 3.2), kterou jsme obdrželi obdobným způsobem.

							2		2		**4**		-20
						2		4		**6**		-16	
					2		6		**10**		-10		
				2		8		**16**		0			
			2		10		**24**		16				
		2		12		**34**		40					
	2		14		**46**		74						
…		…		…		…							

Tab. 3.2: Aritmetické posloupnosti *s*-tého stupně

3.2.2. Odvození vzorce pro n-tý člen

K odvození vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti druhého stupně použijeme opět definici (**Definice 3.2**). Pro jednotlivé členy aritmetické posloupnosti druhého stupně $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a příslušné členy aritmetické posloupnosti prvního stupně $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$b_2 - b_1 = a_1$$

$$b_3 - b_2 = a_2$$

$$\dots$$

$$b_{n-1} - b_{n-2} = a_{n-2}$$

$$b_n - b_{n-1} = a_{n-1}$$

Sečtením těchto rovností a postupnými úpravami získáme:

$$b_n - b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1}$$

$$b_n - b_1 = \frac{1}{2}(n-1)(a_1 + a_{n-1})$$

$$b_n = \frac{n-1}{2}\left[a_1 + (n-1-1)\,d + a_1\right] + b_1$$

$$b_n = \frac{n-1}{2}\left[2a_1 + (n-2)\,d\right] + b_1$$

$$b_n = \frac{(n-1)\,2a_1}{2} + \frac{(n-1)(n-2)\,d}{2} + b_1$$

$$b_n = a_1 n - a_1 + \frac{\left(n^2 - 3n + 2\right)d}{2} + b_1$$

$$b_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{3}{2}d\right)n + (b_1 - a_1 + d) \qquad (9)$$

K výpočtu libovolného členu aritmetické posloupnosti druhého stupně tedy potřebujeme znát první člen a_1 a diferenci d příslušné aritmetické posloupnosti prvního stupně a první člen b_1 aritmetické posloupnosti druhého stupně.
Obecně lze vzorec (9) zapsat ve tvaru:

$$b_n = An^2 + Bn + C \text{, kde } A, B, C \in \mathbf{R}, A \neq 0 \qquad (10)$$

3.2.3. Odvození vzorce pro součet prvních n členů

Pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$s_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$$

Jednotlivé členy získáme ze vzorce (9).

$$s_n = \frac{d}{2}\left(1^2 + 2^2 + ... + n^2\right) + \left(a_1 - \frac{3}{2}d\right)(1 + 2 + ... + n) + (b_1 - a_1 + d)\,n$$

Pro odvození vzorce pro součet potřebujeme vzorce pro součet stejných mocnin prvních n přirozených čísel, konkrétně vzorce pro součet prvních přirozených čísel a prvních čtvercových čísel. Vzorec pro součet prvních přirozených čísel je známý:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pomocí něho odvodíme další potřebný vzorec. V Pascalově trojúhelníku je posloupnost druhého stupně tvořena členy $1, 3, 6, 10, ..., \frac{n(n+1)}{2}, ...$. Pro součet prvních několika členů posloupnosti platí:

$$1 + 3 + 6 + 10 + ... + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Postupnými úpravami získáme vzorec:

$$\frac{1(1+1)}{2} + \frac{2(2+1)}{2} + \frac{3(3+1)}{2} + \frac{4(4+1)}{2} + ... + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

$$\frac{(1+2+3+4+...+n) + \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2\right)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}+\left(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2\right)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

$$\frac{n(n+1)}{2}+\left(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2\right)=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

$$\left(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2\right)=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\left(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2\right)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Dosazením těchto dvou vzorců do námi připraveného vzorce (9) získáme:

$$s_n=\frac{d}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\left(a_1-\frac{3}{2}d\right)\frac{n(n+1)}{2}+(b_1-a_1+d)n$$

$$s_n=\frac{d}{2}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+\left(a_1-\frac{3}{2}d\right)\frac{n^2+n}{2}+(b_1-a_1+d)n$$

$$s_n=n^3\left(\frac{d}{6}\right)+n^2\left(\frac{d}{4}+\frac{a_1}{2}-\frac{3}{4}d\right)+n\left(\frac{d}{12}+\frac{a_1}{2}-\frac{3}{4}d+b_1-a_1+d\right)$$

$$s_n=\frac{d}{6}n^3+\left(\frac{a_1}{2}-\frac{d}{2}\right)n^2+\left(b_1-\frac{a_1}{2}+\frac{d}{3}\right)n \qquad (11)$$

$$s_n=An^3+Bn^2+Cn\text{, kde } A, B, C\in\mathbf{R}, A\neq 0 \qquad (12)$$

3.3. Aritmetické posloupnosti vyšších stupňů

Definice 3.3: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost, která má všechny diference stupně s, $s \in \mathbf{N}$, různé od 0, a nechť posloupnost $(\Delta^s a_1)_{n=1}^{\infty}$ je konstantní. Pak tuto posloupnost nazýváme **aritmetickou posloupností *s*-tého stupně** [1].

3.3.1. Odvození vzorce pro n-tý člen pomocí příslušné aritmetické posloupnosti (s – 1)-ního stupně

Pro jednotlivé aritmetické posloupnosti s-tého stupně platí:

Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetickou posloupností druhého stupně**, právě když $(b_{n+1} - b_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvního stupně. Posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetickou posloupností třetího stupně**, právě když je $(c_{n+1} - c_n)_{n=1}^{\infty}$ aritmetická posloupnost druhého stupě. Obecně pak tedy platí: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetickou posloupností *s*-tého stupně**, právě když je $(a_{n+1} - a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost (s – 1)-ního stupně.

Označíme-li $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ libovolnou aritmetickou posloupnost s-tého stupně a $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ k ní příslušnou aritmetickou posloupnost (s – 1)-ního stupně, dostáváme pro jednotlivé členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ následující vztahy:

$$b_2 - b_1 = a_1$$

$$b_3 - b_2 = a_2$$

$$\ldots$$

$$b_{n-1} - b_{n-2} = a_{n-2}$$

$$b_n - b_{n-1} = a_{n-1}$$

Po sečtení získáme vztah:

$$b_n - b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1}$$

Tedy n-tý člen libovolné aritmetické posloupnosti s-tého stupně můžeme získat ze vztahu

$$b_n = b_1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \,,$$

kde a_i jsou jednotlivé členy příslušné aritmetické posloupnosti (s – 1)-ního stupně.

Důkaz plyne přímo z předchozích tvrzení:

$$b_1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i = b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \ldots + (b_{n-1} + b_{n-2}) + (b_n - b_{n-1}) = b_n$$

Příklad 3.2: Vypočtěte desátý člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty} = 0, 1, 4, 10, 20, \ldots$.

Řešení: Takto zadanou posloupnost zapíšeme do tabulky a určíme příslušné diference.

n	1		2		3		4		5		…
a_n	0		1		4		10		20		…
$\Delta^1 a_n$		1		3		6		10		…	

Tab. 3.3

Z kapitoly 3.2.3 víme, že posloupnost tvořená čísly 1, 3, 6, 10, … je aritmetická posloupnost druhého stupně a pro součet prvních n členů platí $s_n = \frac{1}{6} n (n+1)(n+2)$. Tedy pro součet prvních $n - 1$ členů platí $s_n = \frac{1}{6} n (n+1)(n-1)$. Potom n-tý člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ získáme ze vztahu:

$$a_n = a_1 + \frac{1}{6} n (n+1)(n-1)$$

Desátý člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty} = 0, 1, 4, 10, 20, \ldots$ je tedy

$$a_{10} = 0 + \frac{1}{6} \cdot 10 (10+1)(10-1) = 165 \,.$$

3.3.2. *Obecný vzorec pro n-tý člen*

Věta 3.2: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná aritmetická posloupnost, $\Delta^k a_1$, kde $k = 2, 3, \dots, n-1, n \in \mathbf{N}, n \geq 3$, je diference stupně k členu a_1, $\Delta^1 a_1$ je diference prvního stupně členu a_1. Pak pro n-tý člen obdržíme

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta^1 a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 a_1 + \dots + \binom{n-1}{n-1} \Delta^{n-1} a_1 \text{ [1].} \qquad (13)$$

Důkaz: Vztah dokážeme matematickou indukcí.

I. $n = 1$: $L = a_1$

$P = a_1$

II. Předpokládejme, že

$$\forall k \in \mathbf{N} : a_k = \binom{k-1}{0} a_1 + \binom{k-1}{1} \Delta^1 a_1 + \binom{k-1}{2} \Delta^2 a_1 + \dots + \binom{k-1}{k-1} \Delta^{k-1} a_1 .$$

Dokažme platnost $a_{k+1} = \binom{k}{0} a_1 + \binom{k}{1} \Delta^1 a_1 + \binom{k}{2} \Delta^2 a_1 + \dots + \binom{k}{k} \Delta^k a_1$.

$$a_{k+1} = a_k + \Delta^1 a_k = \binom{k-1}{0} a_1 + \binom{k-1}{1} \Delta^1 a_1 + \dots + \binom{k-1}{k-1} \Delta^{k-1} a_1 +$$

$$+ \binom{k-1}{0} \Delta^1 a_1 + \binom{k-1}{1} \Delta^2 a_1 + \dots + \binom{k-1}{k-2} \Delta^{k-1} a_1 + \binom{k-1}{k-1} \Delta^k a_1 =$$

$$= \binom{k-1}{0} a_1 + \left[\binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{0} \right] \Delta^1 a_1 + \left[\binom{k-1}{2} + \binom{k-1}{1} \right] \Delta^2 a_1 +$$

$$+ \dots + \left[\binom{k-1}{k-1} + \binom{k-1}{k-2} \right] \Delta^{k-1} a_1 + \binom{k-1}{k-1} \Delta^k a_1 =$$

$$= \binom{k}{0} a_1 + \binom{k}{1} \Delta^1 a_1 + \binom{k}{2} \Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{k}{k-1} \Delta^{k-1} a_1 + \binom{k}{k} \Delta^k a_1$$

Dokazovaný vztah platí pro všechna přirozená čísla n.

3.3.3. Odvození vzorce pro n-tý člen pomocí Pascalova trojúhelníku

Jak už bylo zmíněno, členy aritmetické posloupnosti druhého stupně můžeme nalézt ve třetím šikmém sloupci Pascalova trojúhelníku.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & &
\end{array}$$

Tab. 3.4: Pascalův trojúhelník

Podle Pascalova trojúhelníku (Tab. 3.4) tedy platí:

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \ldots,\ \frac{n(n+1)}{2}, \ldots = \binom{2}{2}, \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \binom{5}{2}, \binom{6}{2}, \ldots, \binom{n+1}{2}, \ldots$$

Tedy libovolný člen aritmetické posloupnosti druhého stupně najdeme pomocí kombinačního čísla $\binom{n+1}{2}$, což je kvadratický výraz.

Jednotlivé členy vybrané aritmetické posloupnosti třetího stupně se nacházejí ve čtvrtém šikmém sloupci Pascalova trojúhelníku (Tab. 3.4). Pro jednotlivé členy aritmetické posloupnosti třetího stupně platí:

$$1, 4, 10, 20, \ldots, \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \ldots = \binom{3}{3}, \binom{4}{3}, \binom{5}{3}, \binom{6}{3}, \ldots, \binom{n+2}{3}, \ldots$$

Tedy n-tý člen aritmetické posloupnosti třetího stupně získáme z čísla $\binom{n+2}{3}$, což je kubický výraz.

Obecně lze tedy říci, že n-tý člen libovolné aritmetické posloupnosti s-tého stupně získáme z polynomu stupně s.

3.3.4. Obecný vzorec pro součet prvních n členů

Věta 3.3: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná aritmetická posloupnost stupně s, $s \in \mathbf{N}, s \leq n-1$. Nechť $\Delta^s a_1$ je diference stupně s členu a_1. Součet s_n prvních n členů získáme ze vztahu

$$s_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta^1 a_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{n}{s+1} \Delta^s a_1 \text{ [1]}. \tag{14}$$

Důkaz: Vztah dokážeme matematickou indukcí.

I. $n = 1$: $L = s_1 = a_1$

$P = a_1$

II. Předpokládejme, že

$$\forall k \in \mathbf{N}: s_k = \binom{k}{1} a_1 + \binom{k}{2} \Delta^1 a_1 + \binom{k}{3} \Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{k}{s+1} \Delta^s a_1 .$$

Dokažme platnost

$$s_{k+1} = \binom{k+1}{1} a_1 + \binom{k+1}{2} \Delta^1 a_1 + \binom{k+1}{3} \Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{k+1}{s+1} \Delta^s a_1 .$$

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = \binom{k}{1} a_1 + \binom{k}{2} \Delta^1 a_1 + \binom{k}{3} \Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{k}{s+1} \Delta^s a_1 + a_{k+1} =$$

$$= \binom{k}{1} a_1 + \binom{k}{2} \Delta^1 a_1 + \ldots + \binom{k}{s+1} \Delta^s a_1 + \binom{k}{0} a_1 + \binom{k}{1} \Delta^1 a_1 + \ldots + \binom{k}{k} \Delta^k a_1 =$$

$$= \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0} \right] a_1 + \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right] \Delta^1 a_1 + \ldots + \left[\binom{k}{s+1} + \binom{k}{s} \right] \Delta^s a_1 + 0 =$$

$$= \binom{k+1}{1} a_1 + \binom{k+1}{2} \Delta^1 a_1 + \ldots + \binom{k+1}{s+1} \Delta^s a_1$$

Vztah tedy platí pro libovolné přirozené číslo n.

3.3.5. *Odvození vzorce pro součet prvních n členů pomocí Pascalova trojúhelníku*

Stejně jako u hledání obecného vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti vyššího stupně použijeme i nyní Pascalův trojúhelník. Ve třetím šikmém sloupci se nachází aritmetická posloupnost druhého stupně:

$$\binom{2}{2},\binom{3}{2},\binom{4}{2},\binom{5}{2},\dots,\binom{n+1}{2},\dots$$

Ve čtvrtém šikmém sloupci se nachází aritmetická posloupnost třetího stupně:

$$\binom{3}{3},\binom{4}{3},\binom{5}{3},\binom{6}{3},\dots,\binom{n+2}{3},\dots$$

Obecně v $(k+1)$-ním šikmém sloupci se nachází aritmetická posloupnost k-tého stupně:

$$\binom{k}{k},\binom{k+1}{k},\binom{k+2}{k},\binom{k+3}{k},\dots,\binom{n+k-1}{k},\dots$$

Uplatníme tedy vztah mezi kombinačními čísly:

$$\forall n\in\mathbf{N}\ \forall k\in\mathbf{N}_0:\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\dots+\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k}{k+1}$$

Tedy pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti druhého stupně $(b_n)_{n=1}^{\infty}=1,3,6,10,\ \dots$ platí:

$$1+3+6+\dots+\frac{n(n+1)}{2}=\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\dots+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{3},$$

což je kubický výraz.

Pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti třetího stupně $(c_n)_{n=1}^{\infty} = 1, 4, 10, 20, 35, \ldots$ platí:

$$1+4+10+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\ldots+\binom{n+2}{3} = \binom{n+3}{4}$$

Jedná se tedy o polynom čtvrtého stupně. Obecně tedy součet prvních několika členů aritmetické posloupnosti s-tého stupně získáme z polynomu (s + 1)-ního stupně.

3.3.6. Odvození vzorce pro součet prvních n členů využitím vzorců pro součet prvních přirozených čísel stejných mocnin

Další způsob odvození vzorce pro součet prvních několika členů aritmetické posloupnosti s-tého stupně je, jak už napovídá nadpis, pomocí vzorců pro součet prvních přirozených čísel stejných mocnin.
Princip odvození vzorce pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti s-tého stupně si ukážeme na příkladu aritmetické posloupnosti druhého stupně.

Příklad 3.3: Určete součet prvních n členů aritmetické posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty} = 4, 8, 15, 25, 38, \ldots, \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 3$ použitím vzorců pro součet prvních přirozených čísel stejných mocnin.

Řešení: Pro součet prvních n členů této posloupnosti platí:

$$s_n = 4+8+\ldots+\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 3$$

Vyjádříme si každý člen posloupnosti pomocí vztahu pro n-tý člen. Výraz na pravé straně upravíme tak, že získáme posloupnost čtvercových čísel a posloupnost prvních n přirozených čísel. Vztahy pro součet prvních členů těchto posloupností již byly odvozeny.

$$s_n = \left(\frac{3}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 1 + 3\right) + \left(\frac{3}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot 2 + 3\right) + \ldots + \left(\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 3\right)$$

$$s_n = \frac{3}{2}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) - \frac{1}{2}\left(1 + 2 + \ldots + n\right) + 3n$$

$$s_n = \frac{3}{2}\cdot\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{n\,(n+1)}{2} + 3n$$

$$s_n = \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + 3n$$

Odpověď: Součet prvních n členů zadané posloupnosti je $s_n = \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + 3n$, kde $n \in \mathbf{N}$.

4. METODIKA

4.1. Požadavky

Tematický celek aritmetické posloupnosti s-tého stupně není v současné době zařazen mezi povinné ani rozšiřující celky v osnovách matematiky na střední škole.

Zařazením kapitoly aritmetické posloupnosti s-tého stupně získají studenti větší rozhled a naučí se jiným metodám řešení příkladů z kombinatoriky i z jiných kapitol.

Při řešení příkladů pomocí aritmetických posloupností s-tého stupně studenti potřebují znát pojmy diference a n-tý člen. Dále při odvozování vztahů využívají řešení soustav rovnic a vlastností kombinačních čísel. V neposlední řadě je důležité ovládat princip důkazu matematickou indukcí. Na střední škole gymnaziálního typu se studenti s kombinačními čísly setkají ve 2. pololetí 3. ročníku. Na začátku 4. ročníku se seznámí s pojmy diference a n-tý člen a naučí se dokazovat vztahy matematickou indukcí.

4.2. Postup při odvozování

Při odvozování vztahů společně se studenty vycházíme z dosavadních znalostí studentů. Vhodné je zaměřit se zprvu pouze na aritmetickou posloupnost druhého stupně. Konkrétně na odvození vzorců pro n-tý člen a pro součet prvních n členů pomocí příslušné aritmetické posloupnosti prvního stupně (kapitoly 3.2.2, 3.2.3). Studenti tak snáze pochopí vztah mezi aritmetickou posloupností prvního a druhého stupně.

Se vztahy pro n-tý člen a součet prvních n členů aritmetických posloupností vyšších stupňů se studenti seznámí pomocí Pascalova trojúhelníku. Využijeme vztahů pro kombinační čísla. Studenti si tak mohou sami odvodit nejprve konkrétní vztahy pro aritmetické posloupnosti zobrazené v Pascalově trojúhelníku, poté obecné vztahy (kapitoly 3.3.3, 3.3.5).

O dost složitější může být pro studenty definování diferencí a následné odvození vzorců pomocí kombinačních čísel (kapitoly 3.3.2, 3.3.4). Je vhodné postupovat pomalu a opět nechat studenty, aby vztah pro k-tou diferenci odvodili sami s co

nejmenší pomocí učitele. Při odvozování vztahů by měl být kladen důraz na porozumění vztahům a jejich aplikaci.
Při řešení jednotlivých příkladů by měli mít studenti možnost využít všechny způsoby řešení, se kterými se seznámili.

4.3. Časový plán

Časové rozvržení tematického celku aritmetické posloupnosti s-tého stupně záleží na schopnostech studentů, na jejich prospěchu a zájmu. Minimální doba věnovaná tomuto tématu by měla být 5 vyučovacích hodin, a to v posledním ročníku gymnázia po probrání posloupností, konkrétně aritmetické a geometrické, a po probrání matematické indukce. Studenti by měli mít dostatek času na odvození a pochopení jednotlivých vztahů a jejich následnou aplikaci.
V první hodině by studenti měli být seznámeni s pojmem aritmetická posloupnost s-tého stupně. Případně je možné zařadit i odvození vzorců pro n-tý člen a pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti druhého stupně pomocí aritmetické posloupnosti prvního stupně (kapitoly 3.2.2, 3.2.3). Zařazení těchto vztahů však není pro další práci důležité. Na konci hodiny by studenti měli být schopni definovat aritmetickou posloupnost s-tého stupně a stupeň libovolné aritmetické posloupnosti určit. Výhodnou pozicí pro práci v následujících hodinách by bylo, kdyby žáci sami dokázali libovolnou posloupnost s-tého stupně sestavit, například pomocí tabulky diferencí.
Náplní druhé hodiny by mělo být odvozování vzorců pomocí Pascalova trojúhelníku (kapitoly 3.3.3, 3.3.5). Studenti využijí dosavadních znalostí z kombinatoriky. Pokud by potřebné vztahy neznali, vyčtou jednotlivá pravidla přímo z Pascalova trojúhelníku. Následovalo by několik příkladů. Studenti by na konci hodiny měli znát potřebné obecné vzorce pro výpočet n-tého členu a pro výpočet součtu prvních n členů aritmetických posloupností vyšších stupňů a měli by je dokázat použít při řešení jednoduchých příkladů.
Třetí hodina by sloužila jako procvičovací. Studenti by řešili příklady z kombinatoriky pomocí vztahů, které ve druhé hodině odvodili.
Ve čtvrté hodině by se studenti seznámili s pojmem k-tá diference. Dále by byli seznámeni se vztahy pro výpočet n-tého členu a součtu prvních n členů

aritmetických posloupností vyšších stupňů pomocí kombinačních čísel a diferencí (kapitoly 3.3.2, 3.3.4). Opět by následovalo několik příkladů na procvičení. V této hodině by se tedy studenti měli seznámit s dalšími vztahy a tyto vztahy by studenti měli být schopni použít při řešení příkladů.

Pátá hodina by opět byla procvičovací. Nejprve by studenti procvičovali řešení příkladů pomocí vztahů z předchozí hodiny. Poté by bylo na studentech, který způsob jim vyhovuje. Znát by ale měli oba způsoby, jak pomocí vztahů ze druhé hodiny, tak pomocí vztahů z hodiny čtvrté.

Další případné hodiny by opět sloužily pro zopakování naučeného a pro procvičování na příkladech. Při volbě příkladů by učitel měl dbát, aby se postupovalo od příkladů snadnějších (často příklady na aritmetickou posloupnost druhého stupně) po příklady obtížnější (příklady na aritmetické posloupnosti vyšších stupňů).

4.4. Vyzkoušení postupu v praxi

Postupy a metody uvedené výše jsem měla možnost vyzkoušet ve 4. ročníku čtyřletého gymnázia ve Dvoře Králové nad Labem. Měla jsem k dispozici pouze 2 vyučovací hodiny, což bylo opravdu málo. Studenti neměli dostatek času na procvičení vztahů.

V první vyučovací hodině jsem se studenty po definování posloupností vyšších stupňů odvodila vztahy pomocí Pascalova trojúhelníku. Poté jsme vyřešili 2 příklady – jeden na hledání vzorce pro n-tý člen a druhý na hledání vzorce pro součet prvních n členů. Druhá hodina pak byla zaměřena na řešení příkladů podle vzorců odvozených pomocí k-té diference a následné procvičení vztahů. Opět jsme stihli pouze 2 příklady.

Studenti byli zprvu zaskočeni jiným přístupem, ale poměrně rychle se začali orientovat. Odvozování vztahů pomocí Pascalova trojúhelníku jim nečinilo žádné větší obtíže. Nejvíce problémů měli při řešení soustav rovnic a při dokazování vztahů matematickou indukcí.

5. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 5.1: Zjistěte, kolik průsečíků tvoří *n* kružnic roviny, z nichž každé dvě se protínají ve dvou bodech roviny a žádné tři kružnice nemají společný průsečík.

Řešení: Pro ilustraci je vhodné nakreslit si obrázek. Dva průsečíky získáme, protínají-li se dvě kružnice v rovině. Budeme-li mít v rovině tři kružnice, získáme šest různých průsečíků. Čtyři kružnice roviny se protínají ve dvanácti bodech a pět kružnic roviny se protíná ve dvaceti bodech. Jednotlivé počty průsečíků zapíšeme do tabulky (Tab. 5.1).

n	1		2		3		4		5		…
a_n	0		2		6		12		20		…
$\Delta^1 a_n$		2		4		6		8		…	
$\Delta^2 a_n$			2		2		2		…		

Tab. 5.1

Z tabulky (Tab. 5.1) vyplývá, že by se mohlo jednat o posloupnost druhého stupně. Pro posloupnost druhého stupně platí, že její n-tý člen získáme z polynomu druhého stupně, tj. $a_n = An^2 + Bn + C$, kde $A, B, C \in \mathbf{R}, A \neq 0$. Tedy platí:

$$0 = A + B + C$$
$$2 = 4A + 2B + C$$
$$6 = 9A + 3B + C$$

$$6 = 8A + 2B$$
$$2 = 3A + B$$

$$2 = 2A$$

Tedy $A = 1,\ B = -1,\ C = 0$.

Pro n-tý člen této posloupnosti platí $\forall n \in \mathbf{N} : a_n = n\,(n-1)$.

Vztah dokážeme matematickou indukcí.

Důkaz: I. $n = 1: L = a_1 = 0$

$$P = 1\,(1-1) = 0$$

II. Nechť pro libovolné $k \in \mathbf{N} : a_k = k\,(k-1)$.

Dokažme platnost $a_{k+1} = k\,(k+1)$.

$$a_{k+1} = a_k + 2k = k\,(k-1) + 2k = k[(k-1)+2] = k\,(k+1)$$

Odpověď: Leží-li v rovině n různých kružnic, z nichž každé dvě se protínají ve dvou bodech roviny a žádné tři kružnice nemají společný průsečík, určují tyto kružnice $n\,(n-1)$, $n \in \mathbf{N}$ průsečíků.

Příklad 5.2: Určete, kolik přímek určuje 20 různých bodů roviny, z nichž žádné 3 neleží v jedné přímce.

Řešení: Přímka je v rovině určena dvěma různými body. Vezmeme-li tedy v úvahu, že máme v rovině jeden bod, nezískáme žádnou přímku. Dva body nám určí právě jednu přímku, tři body tři přímky, čtyři body šest přímek a pět bodů deset přímek. Máme tak první členy nějaké posloupnosti $(a_m)_{m=1}^{\infty} = (0, 1, 3, 6, 10, \ldots)$. Naším úkolem je zjistit, kolik přímek je určeno 20 různými body. Podle tabulky (Tab. 5.2) vyslovíme hypotézu, že se jedná o posloupnost druhého stupně.

m	1		2		3		4		5		…
a_m	0		1		3		6		10		…
$\Delta^1 a_m$		1		2		3		4		…	
$\Delta^2 a_m$			1		1		1		…		

Tab. 5.2

Tedy podle věty (**Věta 3.3**) platí:

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3 : a_n = 0\binom{n-1}{0} + 1\binom{n-1}{1} + 1\binom{n-1}{2} = \frac{1}{2}n\left(n-1\right)$$

Nyní tento vztah dokážeme matematickou indukcí.

Důkaz: I. $n = 3 : L = a_3 = 3$

$$P = \frac{1}{2}3\left(3-1\right) = 3$$

II. Nechť pro libovolné $k \in \mathbf{N}, k \geq 3 : a_k = \frac{1}{2}k\left(k-1\right)$.

Dokažme platnost $a_{k+1} = \frac{1}{2}k\left(k+1\right)$.

$$a_{k+1} = a_k + k = \frac{1}{2}k\left(k-1\right) + k = \frac{1}{2}k\left[\left(k-1\right)+2\right] = \frac{1}{2}k\left(k+1\right)$$

Pro 20 různých bodů ležících v rovině platí $a_{20} = \frac{1}{2} \cdot 20\left(20-1\right) = 190$.

Odpověď: Dvacet různých bodů roviny, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce, určuje 190 různých přímek.

Příklad 5.3: Určete, kolik přímek určuje 20 různých bodů roviny, z nichž právě 4 leží v jedné přímce.

Řešení: Příklad se řeší obdobně jako **Příklad 5.2**. Nebudeme však začínat od jednoho bodu v rovině, ale začneme čtyřmi body v rovině, které leží v jedné přímce. Tyto čtyři body určují právě jednu přímku. Položme $m = p - 3$, kde $p \in \mathbf{N}, p \geq 4$. Přidáním dalšího bodu roviny, který na dané přímce neleží, se počet přímek zvýší o 4. Další bod nám počet přímek zvýší o dalších pět na celkový počet 10 přímek. Sedmý bod roviny počet přímek zvýší na 16.

p	4	5	6	7	…
m	1	2	3	4	…
a_m	1	5	10	16	…
$\Delta^1 a_m$	4	5	6	…	
$\Delta^2 a_m$		1	1	…	

Tab. 5.3

Z tabulky (Tab. 5.3) vychází, že by se mohlo jednat o posloupnost druhého stupně. Pro ni platí:

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3 : a_n = 1\binom{n-1}{0} + 4\binom{n-1}{1} + 1\binom{n-1}{2} =$$

$$= 1 + 4(n-1) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = \frac{1}{2}\left(n^2 + 5n - 4\right)$$

Tedy $\forall p \in \mathbf{N}, p \geq 4 : a_p = \frac{1}{2}\left[(p-3)^2 + 5(p-3) - 4\right] = \frac{1}{2}\left(p^2 - p - 10\right)$.

Vztah dokážeme matematickou indukcí.

Důkaz: I: $p = 4 : L = 1$

$$P = \frac{1}{2}(16 - 4 - 10) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

II. Nechť pro libovolné $k \in \mathbf{N}, k \geq 4 : a_k = \frac{1}{2}\left(k^2 - k - 10\right)$.

Dokažme, že platí $a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(k^2 + k - 10\right)$.

$$a_{k+1} = a_k + k = \frac{1}{2}\left(k^2 - k - 10\right) + k = \frac{1}{2}\left(k^2 - k - 10 + 2k\right) =$$

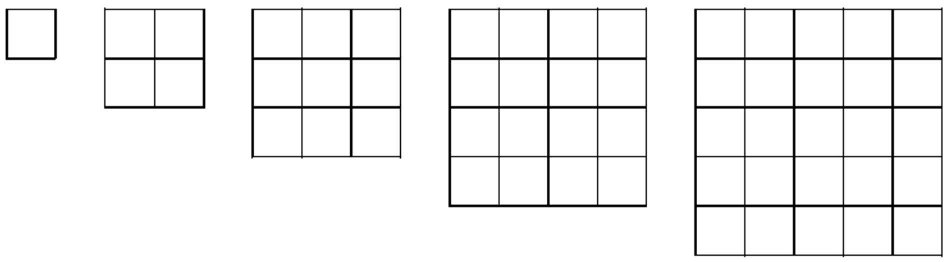
$$= \frac{1}{2}\left(k^2 + k - 10\right)$$

Pro $p = 20$ platí $a_{20} = \frac{1}{2}\left(20^2 - 20 - 10\right) = \frac{1}{2} \cdot 370 = 185$.

Odpověď: Dvacet různých bodů roviny, z nichž právě 4 leží v jedné přímce, určuje 185 různých přímek.

Příklad 5.4: Najděte vztah vyjadřující počet čtverců ve čtvercové síti o rozměrech $n \times n$.

Řešení: Při řešení tohoto příkladu se zaměříme na počet čtverců ve čtvercové síti o rozměrech 1×1, 2×2, 3×3, 4×4 a 5×5.



Obr. 5.1

Budeme-li nejprve zkoumat počty jednotkových čtverců, zjistíme, že čtvercová síť o rozměrech 1×1 obsahuje pouze 1 jednotkový čtverec, čtvercová síť o rozměrech 2×2 se skládá se 4 jednotkových čtverců, čtvercová síť 3×3 je tvořena 9 jednotkovými čtverci, čtvercovou síť 4×4 získáme z 16 jednotkových čtverců a čtvercovou síť 5×5 tvoří 25 jednotkových čtverců.

Čtverce o rozměrech 2×2 se nacházejí jednou ve čtvercové síti 2×2, čtyřikrát ve čtvercové síti 3×3, devětkrát ve čtvercové síti 4×4 a šestnáctkrát ve čtvercové síti 5×5. Dále bychom našli čtverce o rozměrech 3×3 ve čtvercové síti 3×3, a to jednou, čtyřikrát ve čtvercové síti 4×4 a devětkrát ve čtvercové síti 5×5. Čtverec o rozměrech 4×4 najdeme jednou ve čtvercové síti 4×4 a čtyřikrát ve čtvercové síti 5×5, kde je obsažen i čtverec o rozměrech 5×5. Výsledné počty ukazuje tabulka (Tab. 5.4).

m	1×1		2×2		3×3		4×4		5×5		…
a_m	1		5		14		30		55		…
$\Delta^1 a_m$		4		9		16		25		…	
$\Delta^2 a_m$			5		7		9		…		
$\Delta^3 a_m$				2		2		…			

Tab. 5.4

Pro n-tý člen aritmetické posloupnosti třetího stupně platí:

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 4: a_n = 1\binom{n-1}{0} + 4\binom{n-1}{1} + 5\binom{n-1}{2} + 2\binom{n-1}{3} =$$

$$= \frac{1}{6} n\,(n+1)(2n+1)$$

Důkaz provedeme matematickou indukcí.

Důkaz: I. $n = 4$: $L = a_4 = 30$

$$P = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9 = 30$$

II. Nechť pro libovolné $k \in \mathbf{N}, k \geq 4: a_k = \frac{1}{6} k\,(k+1)(2k+1)$.

Dokažme, že $a_{k+1} = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$.

$$a_{k+1} = a_k + (k+1)^2 = \frac{1}{6} k\,(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\left[k\,(2k+1) + 6\,(k+1)\right] = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

<u>Odpověď</u>: Pro výpočet čtverců ve čtvercové síti o rozměrech $n \times n$ platí $\forall n \in \mathbf{N}: a_n = \frac{1}{6} n\,(n+1)(2n+1)$.

Příklad 5.5: Kolik krychlí se nachází v krychli o velikosti $n \times n \times n$?

Řešení: Příklad budeme řešit obdobně jako **Příklad 5.4**. Nejprve zjistíme počty krychlí o rozměrech $1\times1\times1$, poté $2\times2\times2$, $3\times3\times3$, $4\times4\times4$ a na konec $5\times5\times5$. Výsledné počty krychlí ukazuje tabulka (Tab. 5.5).

m	1		2		3		4		5		6		...
a_m	1		9		36		100		225		441		...
$\Delta^1 a_m$		8		27		64		125		216		...	
$\Delta^2 a_m$			19		37		61		91		...		
$\Delta^3 a_m$				18		24		30		...			
$\Delta^4 a_m$					6		6		...				

Tab. 5.5

Stanovíme hypotézu, že se jedná o aritmetickou posloupnost čtvrtého stupně. Tedy předpokládáme, že platí:

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 5 : a_n = 1\binom{n-1}{0} + 8\binom{n-1}{1} + 19\binom{n-1}{2} + 18\binom{n-1}{3} + 6\binom{n-1}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

Platnost tohoto vztahu nyní dokážeme.

Důkaz: I. $n = 5 : L = a_5 = 225$

$$P = \frac{1}{4} \cdot 25 \cdot 36 = 225$$

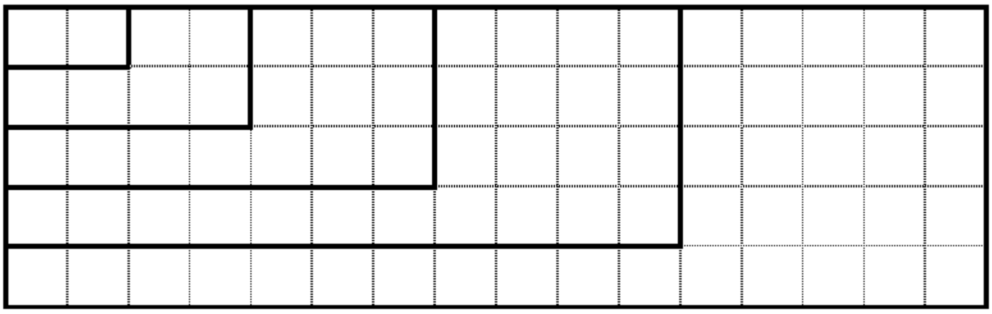
II. Nechť pro libovolné $k \in \mathbf{N}, k \geq 5 : a_k = \frac{1}{4} k^2 (k+1)^2$.

Dokažme, že platí $a_{k+1} = \frac{1}{4}(k+1)^2 (k+2)^2$.

$$a_{k+1} = a_k + (k+1)^3 = \frac{1}{4} k^2 (k+1)^2 + (k+1)^3 = \frac{1}{4}(k+1)^2 (k+2)^2$$

Odpověď: V krychli o rozměrech $n \times n \times n$ se nachází celkem $\frac{1}{4} n^2 (n+1)^2, n \in \mathbf{N}$ krychlí.

Příklad 5.6: Najděte obecný vzorec pro vyjádření počtu jednotkových čtverců v jednotlivých obrazcích.



Obr. 5.2

Řešení: Do tabulky zapíšeme počty jednotkových čtverců v jednotlivých obrazcích.

m	1		2		3		4		5		…
a_m	2		6		13		23		36		…
$\Delta^1 a_m$		4		7		10		13		…	
$\Delta^2 a_m$			3		3		3		…		

Tab. 5.6

Počty jednotkových čtverců v obrazci se liší od počtu jednotkových čtverců v předchozím obrazci vždy o $3m+1$. Předpokládejme tedy, že v tabulce (Tab. 5.6) jsou zapsány první členy posloupnosti druhého stupně. Pak by platilo:

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3: a_n = 2\binom{n-1}{0}+4\binom{n-1}{1}+3\binom{n-1}{2}=$$

$$=2+4(n-1)+\frac{3}{2}(n-1)(n-2)=\frac{1}{2}\left(3n^2-n+2\right)$$

Dokažme tento vztah matematickou indukcí.

Důkaz: I. $n=3: L=a_3=13$

$$P=\frac{1}{2}(27-3+2)=13$$

II. Nechť pro libovolné $k \in \mathbf{N}, k \geq 3: a_k = \frac{1}{2}\left(3k^2-k+2\right)$.

Dokažme, že platí $a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(3k^2+5k+4\right)$.

$$a_{k+1}=a_k+3k+1=\frac{1}{2}\left(3k^2-k+2\right)+3k+1=\frac{1}{2}\left(3k^2+5k+4\right)$$

<u>Odpověď</u>: Počet jednotkových čtverců v jednotlivých obrazcích vypočítáme podle vzorce $\forall n \in \mathbf{N}: a_n = \frac{1}{2}\left(3n^2-n+2\right)$.

Příklad 5.7: Najděte vzorec pro součet vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku.

Řešení: Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku (180°) a čtyřúhelníku (360°) je všeobecně známý. Pětiúhelník můžeme rozdělit na tři trojúhelníky. Součet vnitřních úhlů v pětiúhelníku tedy je $3 \cdot 180° = 540°$. Šestiúhelník můžeme také rozdělit na trojúhelníky. Nejmenší počet možných trojúhelníků je 4 trojúhelníky. Proto součet vnitřních úhlů v šestiúhelníku je

$4 \cdot 180° = 720°$. Protože n-úhelník s nejmenším možným počtem vrcholů je trojúhelník, položme $m = p - 2, p \in \mathbf{N}, p \geq 3$, kde p značí počet vrcholů n-úhelníku. Součty vnitřních úhlů v n-úhelnících ukazuje Tab. 5.7.

p	3		4		5		6		…
m	1		2		3		4		…
a_m	180		360		540		720		…
$\Delta^1 a_m$		180		180		180		…	

Tab. 5.7

Z tabulky je patrné, že se jedná o aritmetickou posloupnost prvního stupně. Předpokládejme tedy, že platí:

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2 : a_n = 180\binom{n-1}{0} + 180\binom{n-1}{1} = 180 + 180\,(n-1) = 180n$$

Tedy $\forall p \in \mathbf{N}, p \geq 3 : a_p = 180 + 180\,(p-3) = 180\,(p-2)$.

Vztah nyní dokážeme matematickou indukcí.

Důkaz: I: $p = 3 : L = 180$

$$P = 180\,(3-2) = 180$$

II. Nechť pro libovolné $k \in \mathbf{N}, k \geq 3 : a_k = 180\,(k-2)$.

Dokažme, že platí $a_{k+1} = 180\,(k-1)$.

$$a_{k+1} = a_k + 180 = 180\,(k-2) + 180 = 180\,(k-1)$$

Odpověď: Pro součet vnitřních úhlů v konvexním n-úhelníku platí $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3 : a_n = 180\,(n-2)$.

Příklad 5.8: Najděte vzorec vyjadřující počet úhlopříček v konvexním n-úhelníku.

Řešení: n-úhelník s nejmenším možným počtem vrcholů je trojúhelník. Položme tedy $m = p - 2, p \in \mathbf{N}, p \geq 3$, kde p značí počet vrcholů n-úhelníku. Počty úhlopříček v jednotlivých n-úhelnících ukazuje Tab. 5.8.

p	3		4		5		6		…
m	1		2		3		4		…
a_m	0		2		5		9		…
$\Delta^1 a_m$		2		3		4		…	
$\Delta^2 a_m$			1		1		…		

Tab. 5.8

Předpokládejme tedy, že se jedná o posloupnost druhého stupně a platí:

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3: a_n = 0\binom{n-1}{0} + 2\binom{n-1}{1} + 1\binom{n-1}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$$

Tedy platí $\forall p \in \mathbf{N}, p \geq 3: a_p = \frac{1}{2}(p-2)^2 + \frac{1}{2}(p-2) - 1 = \frac{1}{2}p(p-3)$.

Vztah nyní dokážeme matematickou indukcí.

Důkaz: I. $p = 3: L = 0$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0 = 0$$

II. Nechť pro libovolné $k \in \mathbf{N}, k \geq 3 : a_k = \frac{1}{2} k (k-3)$.

Dokažme platnost $a_{k+1} = \frac{1}{2}(k+1)(k-2)$.

$$a_{k+1} = a_k + k - 1 = \frac{1}{2} k (k-3) + k - 1 = \frac{1}{2}(k+1)(k-2)$$

Odpověď: Počet úhlopříček v konvexním n-úhelníku vypočítáme podle vztahu $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3 : a_n = \frac{1}{2} n (n-3)$.

Příklad 5.9: Najděte vzorec pro výpočet součtu prvních n trojúhelníkových čísel.

Řešení: První trojúhelníková čísla jsou: 1, 3, 6, 10, 15, 21, … Jejich součty zapíšeme do tabulky (Tab. 5.9).

m	1		2		3		4		5		6		…
a_m	1		4		10		20		35		56		…
$\Delta^1 a_m$		3		6		10		15		21		…	
$\Delta^2 a_m$			3		4		5		6		…		
$\Delta^3 a_m$				1		1		1		…			

Tab. 5.9

Z tabulky vyplývá, že by se mohlo jednat o posloupnost třetího stupně. Podle věty (**Věta 3.2**) tedy platí:

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 4 : a_n = 1\binom{n-1}{0} + 3\binom{n-1}{1} + 3\binom{n-1}{2} + 1\binom{n-1}{3} =$$

$$= 1 + 3(n-1) + \frac{3}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) =$$

$$= \frac{1}{6} n \left(n^2 + 3n + 2\right)$$

Vztah dokážeme později.

Při řešení tohoto příkladu můžeme využít i větu o součtu (**Věta 3.3**). Nebudeme tedy za členy posloupnosti pokládat součty jednotlivých trojúhelníkových čísel, ale zapíšeme do tabulky (Tab. 5.10) samotná trojúhelníková čísla.

n	1		2		3		4		5		6		…
a_n	1		3		6		10		15		21		…
$\Delta^1 a_n$		2		3		4		5		6		…	
$\Delta^2 a_n$			1		1		1		1		…		

Tab. 5.10

Podle tabulky (Tab. 5.10) by se mohlo jednat o posloupnost druhého stupně. Pro součet prvních několika členů aritmetické posloupnosti druhého stupně platí:

$$\forall n \in \mathbf{N} : s_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta^1 a_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{n}{s+1} \Delta^s a_1$$

Předpokládejme tedy, že platí:

$$\forall n \in \mathbf{N} : s_n = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 1\binom{n}{3} = n + n - 1 + \frac{1}{6}\left(n^3 - 3n^2 + 2\right) =$$

$$= \frac{1}{6} n \left(n^2 + 3n + 2\right)$$

Vztah, který nám vyšel v tomto případě, se shoduje se vztahem z předchozího případu. Zdali naše úvahy byly správné, dokážeme matematickou indukcí.

Důkaz: I. $n = 1$: $L = s_1 = 1$

$$P = \frac{1}{6} \cdot 1\,(1 + 3 + 2) = 1$$

II: Nechť pro libovolné $k \in N : s_k = \frac{1}{6} k\,(k^2 + 3k + 2)$.

Dokažme, že platí $s_{k+1} = \frac{1}{6}\,(k+1)(k^2 + 5k + 6)$.

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = \frac{1}{6}\,k\,(k^2 + 3k + 2) + \frac{1}{2}(k+1)(k+2) =$$

$$= \frac{1}{6}\,(k^3 + 3k^2 + 2k + 3k^2 + 9k + 6) = \frac{1}{6}\,(k^3 + 6k^2 + 11k + 6) =$$

$$= \frac{1}{6}\,(k+1)(k^2 + 5k + 6)$$

Odpověď: Součet prvních n trojúhelníkových čísel určíme ze vztahu $\forall n \in \mathbf{N} : s_n = \frac{1}{6} n\,(n^2 + 3n + 2)$.

Příklad 5.10: Na záhoně před hotelem jsou květiny vysázeny do devíti soustředných kružnic. První kružnice je tvořena 4 květinami, druhá 9 květinami, třetí 16 květinami atd. Uprostřed je samostatná květina. Kolik květin je na záhoně?

Řešení: Vezmeme-li v úvahu, že samostatná květina uprostřed tvoří kružnici, dostáváme posloupnost tvořenou prvními čtyřmi čtvercovými čísly $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 4, 9, 16, ...)$. Budeme tedy předpokládat, že i další členy této posloupnosti jsou čtvercová čísla. Z tabulky (Tab. 5.11) zjistíme, že by se mohlo jednat o posloupnost druhého stupně.

n	1		2		3		4		...
a_n	1		4		9		16		...
$\Delta^1 a_n$		3		5		7		...	
$\Delta^2 a_n$			2		2		...		

Tab. 5.11

Pro tuto posloupnost tedy platí:

$$\forall n \in \mathbf{N} : s_n = 1\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} = n + \frac{3}{2}n\,(n-1) + \frac{1}{3}n\,(n-1)(n-2) =$$

$$= \frac{1}{6}n\,(2n^2 + 3n + 1) = \frac{1}{6}n\,(n+1)(2n+1)$$

Vztah dokážeme matematickou indukcí.

Důkaz: I. $n = 1$: $L = s_1 = 1$

$$P = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

II: Nechť pro libovolné $k \in N : s_k = \frac{1}{6}k\,(k+1)(2k+1)$.

Dokažme, že platí $s_{k+1} = \frac{1}{6}\,(k+1)(k+2)(2k+3)$.

$$s_{k+1} = s_k + (k+1)^2 = \frac{1}{6}\,k\,(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\left(k^2 + 7k + 6\right) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

Protože jsme počítali samostatnou květinu jako kružnici, nehledáme součet květin v devíti soustředných kružnicích, ale v deseti. Tedy pro n = 10 platí $s_{10} = \frac{1}{6}\cdot 10\,(10+1)(20+1) = \frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21 = 385$.

<u>Odpověď</u>: V záhoně je celkem 385 květin.

6. ZÁVĚR

Diplomová práce se zabývala aritmetickými posloupnostmi s-tého stupně, konkrétně odvozením základních vztahů, řešením příkladů pomocí aritmetických posloupností s-tého stupně a možnostmi uvedení aritmetických posloupností s-tého stupně na střední školy.

Kapitoly 2 a 3 posloužily k odvození jednotlivých vztahů. Nejprve byly v kapitole 2 odvozeny vztahy pro k-tou diferenci. Tyto vztahy byly využity při odvozování vztahů pro n-tý člen a součet prvních n členů aritmetické posloupnosti s-tého stupně v následující kapitole, a to pomocí aritmetické posloupnosti $(s - 1)$-ního stupně, poté využitím předem odvozené k-té diference a nakonec pomocí Pascalova trojúhelníku.

Poslední kapitola (5) byla zaměřena na řešení příkladů pomocí aritmetických posloupností s-tého stupně. Jednotlivé vztahy pro n-ý člen a součet prvních n členů aritmetické posloupnosti s-tého stupně byly použity převážně při řešení příkladů z kombinatoriky nebo při řešení příkladů, kde se objevovala figurální čísla.

I když téma aritmetické posloupnosti s-tého stupně je v osnovách matematiky na střední škole zastoupeno pouze podkapitolou aritmetické posloupnosti (prvního stupně), ukázalo se, že je možné ve čtvrtém ročníku vybraných středních škol zařadit i aritmetické posloupnosti vyšších stupňů. Postup odvozování, který je diplomové práci uveden, se zdá být, jak se projevilo při ověřování metodického postupu ve čtvrtém ročníku na Gymnáziu ve Dvoře Králové na Labem, srozumitelný i pro studenty středních škol.

7. LITERATURA

[1] BITTNEROVÁ, Daniela: *Aritmetické posloupnosti s-tého stupně*. The Mathematics Education into the 21st Century Project. Proceedings of the International Conference, The Special Czech/Slovak Teachers Day – The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education. Brno 2003

[2] ČERNÁ, Růžena – MACHALICKÝ, Miroslav – VOGEL, Jiří – ZLATNÍK, Čeněk: *Základy numerické matematiky a programování*. Praha, SNTL, ALFA, 1987, 448 s.

[3] DĚMIDOVIČ, Boris Pavlovič – MARON, Issak Abramovič: *Základy numerické matematiky*. Praha, SNTL, 1966

[4] NEKVINDA, Miloslav – ŠRUBAŘ, Jiří – VILD, Jaroslav: *Numerická matematika*. Liberec, 1976 , 223 s.

[5] ODVÁRKO, Oldřich: *Matematika pro gymnázia. Posloupnosti a řady*. Praha, Prometheus, 2000, 126 s. ISBN 80-7196-195-7

[6] PETÁKOVÁ, Jindra: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha, Prometheus, 2004, 287 s. ISBN 80-7196-099-3

[7] RALSTON, Anthony: *Základy numerické matematiky*. Praha, Academia, 1973, 636 s.

[8] REKTORYS, Karel: *Přehled užité matematiky II*. Praha, Prometheus, 1995, 874 s. ISBN 80-85849-62-3

[9] ZHOUF, Jaroslav: *Aritmetická posloupnost druhého řádu*. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 80, č. 3

[10] ZHOUF, Jaroslav: *Figurální čísla, Pascalův trojúhelník, posloupnosti vyšších řádů*. Dva dny s didaktikou matematiky, 2004, PF UK.

[11] ZHOUF, Jaroslav: *Rozšíření pojmu aritmetické posloupnosti na střední škole, aritmetické posloupnosti vyšších řádů*. Dva dny s didaktikou matematiky, 2005, PF UK. ISBN 80-7290-223-7

[12] ZHOUF, Jaroslav: *Středoškolské úlohy na aritmetické posloupnosti vyšších řádů*. MAKOS 2004. Sborník materiálů z podzimní školy péče o talenty v matematice. Ústí na Labem, 2004. ISBN 80-7044-582-3

[13] ZHOUF, Jaroslav: *Úlohy na aritmetické posloupnosti vyšších řádů v české (československé) MO*. Ani jeden matematický talent nazmar. Hradec Králové, 2005. ISBN 80-7290-224-5

[14] *Diference a diferenční rovnice* [online]. Ostrava, VŠB – TU Ostrava. [cit. 2006-01-23]. Dostupné na WWW: <http://ws.vsb.cz/kat/k151/predmety/15186/stud_mat/p8.doc>.

[15] *Difference Operator* [online]. Indian Institute of Technology, Kanpur. [cit. 2006-02-15]. Dostupné na WWW: <http://home.iitk.ac.in/~arlal/book/nptel/mth102/node104.html>.

[16] *Finite Differences* [online]. Knowledge Representation Laboratory. [cit. 2006-02-15]. Dostupné na WWW: <http://kr.cs.ait.ac.th/~radok/math/mat7/step19.htm#STEP19>.