recenzent: prof. Ing. Jaroslav Nosek, CSc.

ISBN 978-80-7372-783-3

Obsah

Předmluva ke 3. vydání

Milá studentko, milý studente,

úvodní kurs fyziky, jehož první polovině jsou věnována naše skripta, představuje relativně obtížnou část pedagogického i inženýrského studia. Skutečné pochopení fyziky by Vám mělo otevřít bránu k osvojení ostatních přírodních a technických věd. K takovému pochopení nestačí naučit se nazpaměť základní definice, věty a zákony. Studium tvoří cyklus, počínající expozicí látky na přednášce, pozorováním experimentů, prováděním měření v laboratoři a pokračující samostatným studiem a řešením úloh. Procvičování je školou fyzikálního myšlení i výbornou přípravou na pozdější pedagogické nebo inženýrské povolání.

T E CH N I C K Á U N I V E R Z I T A V L I B E R C I

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická Katedra fyziky

Antonín K o p a l
Lubor M a ch o n s k ý
Ladislav Š i m e k
Milan Č m e l í k
Lidmila B u r i a n o v á
Václav K a z d a

P Ř Í K L A D Y Z F Y Z I K Y I

Mechanika

Kmity, vlny

Nauka o teple

Liberec 2011

Naše skriptum je určeno v první řadě posluchačům pedagogické fakulty, dobrou službu však prokáže i studentům strojní a textilní fakulty. Představuje logický řetěz úloh, který Vás dovede k solidnímu osvojení fyzikálních principů mechaniky, kmitání, vlnění a nauky o teple. Sbírku tvoří celkem 357 úloh, z tohoto počtu je 60 řešených. Výsledky neřešených úloh jsou uvedeny na konci skript spolu s tabulkami vybraných fyzikálních parametrů. Novinkou je zařazení úloh na numerické řešení diferenciálních rovnic mechaniky.

Ve sbírce se vyskytují zkratky, na které Vás předem upozorňujeme: HB = hmotný bod, SHB = systém hmotných bodů, SI = mezinárodní soustava jednotek. Vektory jsou označeny šipkami.

Na začátku studia Vám dáme alespoň jednu radu: neřešte příklady bez minimální znalosti teorie a na druhé straně nestudujte jen teorii bez řešení úloh. Obě stránky se navzájem doplňují. Studium bez současné vazby teorie a praxe znamená často jen ztrátu času.

Přejeme Vám mnoho úspěchů při pronikání do tajů fyziky.

Autoři

Předmluva ke 4. vydání

Naše sbírka úloh k první části úvodního kurzu fyziky se setkala s pozitivní odezvou čtenářů a používá se na všech fakultách Technické univerzity v Liberci, kde je fyzika zařazena do učebních plánů. Je pochopitelné, že byla v krátké době vyprodána.

Připravili jsme proto nové, již čtvrté rozšířené vydání. Reagovali jsme na připomínky kolegů i studentů a doplnili jsme sbírku 36 relativně snadnějšími úlohami. Celkový počet příkladů je nyní 390, z toho 60 řešených. Přitom jsme se stále řídili zásadou, aby úlohy pokud možno čerpaly své náměty z praktického života a motivovaly tak čtenáře k hlubšímu studiu fyziky.

Sbírka byla přeložena do modernějšího editoru, což jistě přispělo ke zkvalitnění grafické stránky textu. Původní kolektiv autorů se rozšířil o Doc. Mgr. Lidmilu Burianovou, CSc., RNDr. Václava Kazdu, CSc. a Mgr. Milana Čmelíka.

1.5. a) Vzdálenost od Slunce k nejbližší hvězdě činí přibližně 4 ly (ly z anglického *light year* - světelný rok). Uveďte tuto vzdálenost v metrech a dále v jednotkách pc (parsek).

b) Výrobce udává, že výkon motoru jeho automobilu je 150 koní. Jak velký je tento výkon vyjádřený v jednotkách Mezinárodní soustavy jednotek?

Řešení :

a) 1 světelný rok (1 ly) je jednotka užívaná pro měření vzdáleností v astronomii a je definována jako vzdálenost, kterou urazí elektromagnetické vlnění ve vakuu za 1 rok ;
1 parsec (1 pc) je vzdálenost, ze které je astronomická jednotka (1 astronomická jednotka = 1 UA = 149,6 · 10^9 m) patrna v zorném úhlu 1 vteřiny.
Převodní vztahy nalezneme v literatuře [1,2] :

$$1\ \text{ly} = 9{,}460\,528\,4 \cdot 10^{15}\ \text{m}, \qquad 1\ \text{pc} = 3{,}085\,677\,568 \cdot 10^{16}\ \text{m}.$$

Potom se uvedená vzdálenost d převede následovně

$$d(\text{m}) = 4(\text{ly})\frac{9{,}4605284 \cdot 10^{15}\,(\text{m})}{1(\text{ly})} = 3{,}7842 \cdot 10^{16}\ \text{m} \cong 3{,}78 \cdot 10^{16}\ \text{m} ,$$

$$d(\text{pc}) = 3{,}7842 \cdot 10^{16}\,(\text{m})\frac{1(\text{pc})}{3{,}085677568 \cdot 10^{16}\ (\text{m})} = 1{,}2264\ \text{pc} \cong 1{,}23\ \text{pc} .$$

Vzdálenost k nejbližší hvězdě činí 3,78 · 10^{16} metrů nebo 1,23 parseku.

b) Převodní vztah mezi mimosoustavovou jednotkou metrický kůň a odvozenou jednotkou watt uvádí ČSN ISO 31-3 : 1 metr. kůň = 735,499 W.
Potom: 150 metr. koní = 150 · 735,499 ≅ 110 kW.
Výkon motoru automobilu je 110 kilowattů.

1.6. a) Průměrná denní spotřeba elektrické energie na TU činí 700 kWh. Kolik je to joulů ? Jaký je průměrný příkon univerzity ?

b) Na obalu určitého druhu potravin je uvedena využitelná energie 1700 kJ. Vyjádřete tento údaj v kaloriích a jednotkách kWh (kilowathodina).

c) Elementární částice mezon D^0 má hmotnost 1,99 u (u – unifikovaná atomová hmotnostní jednotka). Kolikrát je hmotnost tohoto mezonu větší než klidová hmotnost protonu ?

1.7. a) V knize R. Bradburyho " *451 °F* " se uvádí, že při této teplotě začíná hořet papír. Vyjádřete uvedenou teplotu ve stupních Celsia a kelvinech. Při kolika stupních Fahrenheita vře voda, taje měď ?

b) V původních fotbalových pravidlech činila vzdálenost značky pokutového kopu od brankové čáry 11 yd (yardů). Jaké odchylky se dopustíme, stanovíme-li ji na 10 m ?

c) Vyjádřete velikost modulu pružnosti v tahu pro ocel, mosaz a olovo v jednotkách psí (1 psí = 1 lbf·in^{-2} = 1 libra síly na čtvereční palec).

1.8. Na světových burzách surovin se běžně užívají jednotky objemu *gallon*, *bushel*, *barrel* a jednotka hmotnosti trojská unce (*troy ounce*). Vyhledejte v tabulkách převody těchto jednotek do SI a potom vypočítejte :

a) průměrnou spotřebu amerického automobilu (v litrech na 100 km), jestliže výrobce udává spotřebu 4,25 galonu na 100 mil,

b) kolik dvěstělitrových sudů je zapotřebí při nákupu 100 barelů nafty,

c) kolik dolarů zaplatíte za 1g zlata, jehož cena na burze se během roku 2011 vyšplhala až na 1900 USD za trojskou unci a kolik to bude při platném devizovém kurzu představovat korun.

1.9. Jaké rozměry mají následující fyzikální veličiny v mezinárodní soustavě veličin a jednotek : a) zrychlení, b) tlak ?

Řešení :

a) Definiční rovnice pro zrychlení je $\vec{a} = d\vec{v} / dt$, odtud dim a = dim v / dim t = = $LT^{-1}/T = LT^{-2}$. Rozměr zrychlení je : délka krát čas na minus druhou.

b) Definiční rovnice pro tlak p je $p = F/S$ (kde F je síla a S plocha), odtud dim p = dim F / dim S = $LMT^{-2}/L^2 = ML^{-1}T^{-2}$, rozměr veličiny tlak je : hmotnost krát délka na minus první krát čas na minus druhou.

1.10. Jaké rozměry mají následující fyzikální veličiny: a) hybnost, b) vlnočet (reciproká vlnová délka), c) energie, d) výkon, e) rovinný úhel ?

1.11. Rozměrovou analýzou určete (až na číselný faktor) vztah pro velikost rychlosti volného pádu tělesa z výšky h ve vzduchoprázdnu.

Řešení :

Předpokládáme, že velikost hledané rychlosti závisí na výšce h, na tíhovém zrychlení g a na hmotnosti m tělesa, tedy

$$v = k \cdot h^a \cdot g^b \cdot m^c ,$$

kde k je číselný faktor (bezrozměrný).

Rozměr levé strany předpokládaného vztahu je dim $v = LT^{-1}$; rozměr pravé strany jest dim $(k \cdot h^a \cdot g^b \cdot m^c)$ = dim $(h^a \cdot g^b \cdot m^c)$ = dim (h^a) · dim (g^b) · dim (m^c) = = $(\dim h)^a \cdot (\dim g)^b \cdot (\dim m)^c = L^a \cdot (LT^{-2})^b \cdot M^c = L^a \cdot L^b \cdot T^{-2b} \cdot M^c =$ = $L^{a+b} \cdot T^{-2b} \cdot M^c$.

Z podmínky rovnosti rozměrů pravé a levé strany předpokládaného vztahu

$$L \cdot T^{-1} = L^{a+b} \cdot T^{-2b} \cdot M^c \;\Leftrightarrow\; L^1 \cdot T^{-1} \cdot M^0 = L^{a+b} \cdot T^{-2b} \cdot M^c ;$$

pro exponenty mocnin z levé a pravé strany vztahu musí platit

$$1 = a + b , \quad -1 = -2b , \quad 0 = c .$$

Z druhé rovnice plyne $b = -1/2$ a z první rovnice $a = 1/2$. Vidíme, že velikost rychlosti volného pádu nezávisí na hmotnosti tělesa, ale pouze na výšce a na velikosti tíhového zrychlení

$$v = k \cdot h^{1/2} \cdot g^{1/2} = k\sqrt{g \cdot h} .$$

1.12. Určete vlastní kmitočet f napnuté struny. Předpokládejte, že tento kmitočet závisí pouze na délce struny l, délkové hustotě τ (kg·m^{-1}) a velikosti F napínací síly. Číselně určete tento kmitočet pro strunu délky 0,5 m, napínanou silou 100 N, víte-li, že jeden délkový metr struny má hmotnost 6,1 g.

Poznámka: bezrozměrný číselný faktor v rovnici pro kmitočet, který lze zjistit například experimentálně, má velikost ½.

1.13. Ke stanovení počtu n_V (m^{-3}) atomů v krychlovém metru materiálu postačuje znalost následujících veličin: hustota materiálu, molární hmotnost, Avogadrova konstanta. Prostřednictvím rozměrové analýzy nalezněte vztah pro výpočet a dosažený výsledek ověřte na případě stříbra.

1.14. Některé hvězdy se v průběhu své existence mohou gravitačně zhroutit. Tento jev proběhne relativně velmi rychle. Pokuste se pomocí rozměrové analýzy stanovit dobu t_k , za kterou proběhne gravitační kolaps hvězdy, za předpokladu, že tato doba závisí na poloměru R a hmotnosti M hvězdy a na gravitační konstantě G. Numericky stanovte dobu kolapsu pro Slunce.

1.15. Hvězdy, jejichž hmotnost je větší než trojnásobek hmotnosti Slunce $M_\odot$, by měly na konci své existence skončit jako černé díry: těleso se zhroutí do prostoru, jehož poloměr je menší než tzv. Schwarzschildův poloměr r_S. Jelikož se při zhroucení hvězdy jedná o gravitační a relativistické efekty, měl by poloměr r_S záviset na hmotnosti m hvězdy, gravitační konstantě G a rychlosti světla c. Pokuste se odhadnout poloměr černé díry na základě rozměrové analýzy a vyčíslete jej pro hvězdu s hmotností $m = 4\,M_\odot$.

Poznámka: bezrozměrná konstanta v rovnici pro Schwarzschildův poloměr r_S má velikost 2.

1.16. Plynová bublina, která se vytvoří při hlubinném výbuchu, osciluje s frekvencí f, úměrnou $p^a{\cdot}\rho^b{\cdot}E^c$, kde p je celkový statický tlak v dané hloubce, ρ hustota vody a E celková energie uvolněná při výbuchu. Pokuste se nejdříve na základě fyzikální představy odhadnout znaménko exponentů a, b, c, tj. zda-li je závislost f po řadě na p, ρ a E přímá nebo nepřímá. Exponenty pak vypočtěte rozměrovou analýzou.

Návod: vztah $f = \mathrm{k}{\cdot}p^a{\cdot}\rho^b{\cdot}E^c$ vyjádřete v základních jednotkách a porovnáním exponentů u kg, m a s na obou stranách dostanete soustavu tří rovnic pro a, b, c. Konstanta k je bezrozměrná. Po jejím experimentálním stanovení můžeme seismickým měřením frekvence odhadnout energii uvolněnou například při podmořském jaderném výbuchu.

1.17. Velikost atomu vodíku můžete odhadnout prostřednictvím rozměrové analýzy. Vyberte si použitelné veličiny v následujících tvarech: $h/2\pi$ (h – Planckova konstanta), m_e (hmotnost elektronu), $B = e^2/(4\pi\varepsilon_0) = 2{,}31 \cdot 10^{-28}$ N·m^2 (tento člen charakterizuje silové působení mezi dvěma elementárními náboji $+e$ a $-e$ podle Coulombova zákona).

Literatura

Doporučená literatura :

[1] OBDRŽÁLEK, J. *Fyzikální veličiny a jednotky SI s výkladem pro školu a technickou praxi.* Úvaly: ALBRA, 2004.

[2] ČMELÍK, M., MACHONSKÝ, L, ŠÍMA, Z. *Fyzikální tabulky.* Liberec: TUL, 2005.

[3] KVASNICA, J. *Matematický aparát fyziky.* Praha: Academia, 1989.

[4] ŠIMEK, L., MACHONSKÝ, L., ČMELÍK, M. *Matematika pro fyziku s příklady. Část 1.* Liberec: TUL, 2004.

[5] Kolektiv. *Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz.* Praha: Prometheus, 1999.

[6] FEYNMAN, R.P., LEIGHTON, R.B., SANDS, M. *Feynmanovy přednášky z fyziky 1.* Praha: Fragment, 2000.

[7] HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. *Fyzika, část 1: Mechanika; část 2: Mechanika - Termodynamika.* Praha: Prometheus, 2000.

[8] HORÁK, Z., KRUPKA, F. *Fyzika, svazek 1*. Praha: SNTL, 1976.

[9] KOPAL, A. a kol. *Fyzika I.* 2. vydání. Liberec: TUL, 2009.

[10] KREMPASKÝ, J. *Fyzika.* Bratislava: Alfa, 1982.

[11] KVASNICA, J., HAVRÁNEK, A., LUKÁČ, P., SPRUŠIL, B. *Mechanika.* Praha: Academia, 1988.

[12] MACHONSKÝ, L., BURIANOVÁ, L., ČMELÍK, M. *Fyzikální laboratoře.* Liberec: TUL, 2007.

[13] MACHONSKÝ, L., ČMELÍK, M., BURIANOVÁ, L. *Fyzikální laboratoře – Návody k měření* . Liberec: TUL, 2009.

[14] SOŠKA, F. a kol. *Fyzika I.* Liberec: VŠST, 1977.

Použité prameny :

FÄNHRICH, J., HAVRÁNEK, A., SLAVINSKÁ, D. *Příklady z mechaniky.* Praha: SPN, 1976.

HAJKO, V. a kol. *Fyzika v príkladoch.* 6. vydání. Bratislava: Alfa, 1989.

HRUŠKA, J., KRAVÁRIK, J. *Fyzika - příklady.* Praha: ČVUT, 1984.

IRODOV, I. Je. *Zadači po obščej fizike.* Moskva: Nauka, 1979.

KRAVÁRIK, J., KUBEŠ, P. *Fyzikální cvičení II.* 2. vyd. Praha: ČVUT, 1987.

KUNEŠ, J., VAVROCH, O., FRANTA, V. *Základy modelování.* Praha: SNTL, 1989.

OHANIAN, H. C. *Physics*. New York: Norton, 1989.

PIŠÚT, J., ZAJAC, R. *O atómoch a kvantovaní*. 2. vyd. Bratislava: Alfa,1988.

TOMANOVÁ, E. a kol. *Sbírka úloh z fyziky pro gymnázia.* Praha: SPN 1988.

UNGERMANN, Z., VOLF, I. *Pohyb těles v radiálním gravitačním poli.* Praha: SPN, 1985.

WAGNER, J. a kol. *Příklady z fyziky*. 2. vydání. Liberec: VŠST, 1988.

1. Fyzikální veličiny a jednotky. Rozměrová analýza.

1.1. Doplňte následující tabulku :

Veličina	1.	2.	3.	4.	5.
Kmitočet			$f = 1\,/\,T$		
Impuls síly				N·s	
Tepelná kapacita		*od*			
Povrchové napětí					kg·s^{-2}
Svítivost					
Úhlová rychlost	T^{-1}				
Absolutní index lomu					

Legenda : *1. sloupec*: rozměr veličiny, *2.*: veličina základní (*z*) nebo odvozená (*od*), *3.*: definiční rovnice, *4.*: jednotka v soustavě SI, *5.*: vztah jednotky k jednotkám základním (rozměr).

1.2. Rozhodněte, která z následujících kapalin má největší povrchové napětí σ při teplotě 20 °C :

voda : $\sigma_1 = 0{,}073$ J·m^{-2} petrolej : $\sigma_2 = 0{,}27$ mN·cm^{-1}

rtuť : $\sigma_3 = 0{,}472$ mN·mm^{-1} terpentýnový olej : $\sigma_4 = 27 \cdot 10^{-3}$ N·m^{-1}.

Řešení :

Všechna povrchová napětí vyjádříme v jednotkách N·m^{-1} a potom porovnáme jejich číselné hodnoty:

$$\sigma_1 = 0{,}073\ \mathrm{J{\cdot}m^{-2}} = 0{,}073\ \mathrm{N{\cdot}m{\cdot}m^{-2}} = 0{,}073\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}},$$
$$\sigma_2 = 0{,}27\ \mathrm{mN{\cdot}cm^{-1}} = 27 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N} \cdot (10^{-2}\ \mathrm{m})^{-1} = 0{,}027\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}},$$
$$\sigma_3 = 0{,}472\ \mathrm{mN{\cdot}mm^{-1}} = 0{,}472 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N} \cdot (10^{-3}\ \mathrm{m})^{-1} = 0{,}472\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}},$$
$$\sigma_4 = 0{,}027\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}}.$$

Největší povrchové napětí vykazuje při 20 °C rtuť.

1.3. Rozhodněte, která z následujících pěti látek má *nejmenší* hustotu: *1.* 5,3 Mg·m^{-3}, *2.* 7,1 g·cm^{-3}, *3.* 21 mg·mm^{-3}, *4.* 4,5 t·m^{-3} , *5.* 0,89 cg·mm^{-3} .

1.4. Seřaďte následující látky podle jejich *stoupajících* měrných tepelných kapacit (od nejmenší po největší): mléko - 0,94 cal·g^{-1}·K^{-1}, beton - 879 J·kg^{-1}·K^{-1}, glycerin - 0,57 kcal·kg^{-1}·K^{-1}, mosaz - 92 cal·kg^{-1}·K^{-1}, stříbro - 56 kcal·t^{-1}·K^{-1}.

$= (-2 ; 8 ; -3)$

d) $\vec{a}\cdot\vec{b} = (-2 ; 4 ; 0)\cdot(0 ; -4 ; 3) = (-2)\cdot 0 + 4\cdot(-4) + 0\cdot 3 = -16$,

e) $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = (4\cdot 3)\vec{i} + [-(-2\cdot 3)]\,\vec{j} + (-2)\cdot(-4)\vec{k} =$

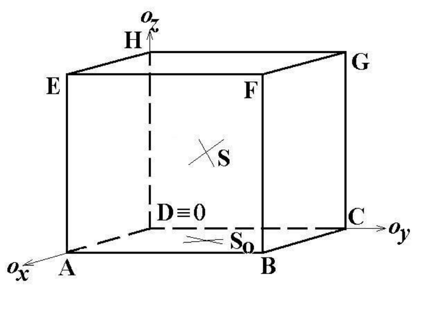
$= 12\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k} = (12 ; 6 ; 8)$,

f) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (12 ; 6 ; 8)\cdot(2 ; 0 ; -3) = 2\cdot 12 + 6\cdot 0 + 8\cdot(-3) = 24 - 24 = 0$,

g) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = |-2\vec{i} + 3\vec{k}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$,

h) úhel $(\vec{b}\ ,\ \vec{c}\,)$ = arccos $[\vec{b}\cdot\vec{c}\,/(b\cdot c)]$ = arccos $[-9/(5\cdot\sqrt{13})]$ = 119,95° = 2,09 rad .

2.4. Je zadána krychle ABCDEFGH (viz *obr. 2.3*) o velikosti hrany 2.
Dále je zvolen bod S nacházející se ve středu krychle a bod S_0, ležící ve středu stěny ABCD.
Zvolená souřadná soustava je zakreslena v obrázku.



Obr. 2.3

Řešte postupně úkoly:

a) Z následujících vektorů : ***AB, AE, EF, DH, HG, DC, CG*** vyberte všechny skupiny sobě rovných vektorů.

b) K vektoru ***BC*** najděte všechny vektory souhlasně kolineární !

c) K vektoru ***FS*** vyhledejte všechny nesouhlasně kolineární vektory !

d) Najděte všechny vektory, které jsou rovny součtu vektorů ***AE*** + ***AD*** .

e) Které vektory jsou rovny rozdílu vektorů ***HD*** – ***HC*** ?

f) Jaká je velikost vektorů ***AS***, ***AS***$_0$, ***AE*** + ***AD***, ***HD*** – ***HC*** ?

g) Určete skalární součiny: ***AB·EF***, ***AB·BC***, ***CA·CH***, ***CS***$_0$***·CG***, ***CS***$_0$***·S***$_0$***G***, ***BH·BD***, ***AF·AC*** .

h) Vypočítejte úhly mezi následujícími dvojicemi vektorů (***AC***, ***AB***), (***DF***, ***DG***), (***CA***, ***CH***), (***HA***, ***EF***), (***SF***, ***SH***) .

i) Určete vektorové součiny: ½***AB*** × ***BC***; ***FG*** × ½***EH***; ***EF*** × ½***GF***; ***CS***$_0$ × × ½***S***$_0$***D*** .

j) Vypočtěte: (***AB*** + ***BC*** + ***CG***) – ***AB***; (***AB*** × ***BC***) · ***BF***; ***AB*** × ***SS***$_0$; ***AF*** × × ***AB***; ***AB*** × ***AC*** .

2.5. Zadány jsou dva vektory: $\vec{a} = 2\vec{i} + 10\vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$. Nalezněte:

a) velikost součtu a rozdílu obou vektorů,

b) skalární a vektorový součin vektorů v pořadí $\vec{a}$, $\vec{b}$,

c) úhel sevřený oběma vektory (ověřte nákresem),

d) jednotkový vektor kolineární s vektorem $\vec{a}$,

e) jednotkový vektor kolmý k vektorům $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

2.6. Jsou zadány tři vektory : $\vec{A} = (2 ; 0 ; 1)$, $\vec{B} = (3 ; -1 ; 2)$, $\vec{C} = (2 ; 4 ; 0)$.

a) Vypočítejte souřadnice a velikost vektoru vzniklého následujícími operacemi: $\vec{A} \times (3\vec{B} - \vec{C})$.

b) Jaký úhel svírá vektor $\vec{A}$ s vektorem $\vec{C}$?

c) Jaký úhel svírá vektor $\vec{A}$ s osou o_x ?

2.7. V krychli určete úhel mezi

a) tělesovou úhlopříčkou a hranou krychle,

b) tělesovou a stěnovou úhlopříčkou.

Návod: hranu a úhlopříčky vyjádřete jako vektory.

2.8. Na těleso zanedbatelných rozměrů působí v místě B = [3 ; 1 ; 5] m současně dvě síly $\vec{F}_1 = (4 ; -5 ; 6)$ N a $\vec{F}_2 = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}\,)$ N.

a) Určete výslednici těchto sil a její velikost.

b) Jak velký je moment $\vec{M}$ výslednice těchto sil vzhledem k vztažnému bodu A = [1; 2; 3] m ?

Návod: $\vec{M} = \boldsymbol{AB} \times \vec{F}$.

2.9. Jak musíme přibližně změnit délku matematického kyvadla délky 30 cm, aby se jeho doba kmitu zvětšila o 0,1 s ? Doba kmitu T je dána vztahem $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, kde l je délka kyvadla, g - tíhové zrychlení.

Řešení :

$l_0 = 30$ cm = 0,3 m, $g = 9{,}81$ m·s^{-2}, $\mathrm{d}T \approx \Delta T = 0{,}1$ s; $\Delta l = ?$

Délce l_0 odpovídá doba kmitu T_0 : $T_0 = 2\pi\sqrt{l_0/g}$. Změnu délky kyvadla určíme užitím diferenciálu funkce $l(T) = gT^2/(4\pi^2)$ pro $T = T_0$

$$\Delta l \approx \mathrm{d}l = l'(T_0)\cdot\mathrm{d}T = \frac{g\,T_0}{2\pi^2}\,\mathrm{d}T\,,\ \text{neboť}$$

$$l'(T_0) \equiv (\mathrm{d}l/\mathrm{d}T)_{T=T_0} = [gT^2/(4\pi^2)]'_{T=T_0} = gT_0/(2\pi^2)\,.$$

Po dosazení za T_0 ve vyjádření diferenciálu dl dostáváme

$$\mathrm{d}l = [\sqrt{gl_0}/\pi]\cdot\mathrm{d}T \qquad\Rightarrow\qquad \Delta l \approx [\sqrt{g\,l_0}/\pi]\cdot\Delta T\,.$$

Číselně: $\Delta l \approx [\sqrt{9{,}81\cdot 0{,}3}/\pi]\cdot 0{,}1 = 0{,}054\,6\ \text{m} \approx 5{,}5\ \text{cm}$.

Délku matematického kyvadla nutno zvětšit přibližně o 5,5 cm.

Tabulka č. 4.: ***Periodická tabulka prvků.***

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	VIII
vodík $_1$**H** 1,008 0,0837		*vodík* ------ název prvku protonové číslo -------- $_1$ **H** ------- chemická značka 1,008 ---- relativní atomová hmotnost 0,0837 ---- hustota *						
lithium $_3$**Li** 6,941 534	*berylium* $_4$**Be** 9,012 1 848							
sodík $_{11}$**Na** 22,990 968	*hořčík* $_{12}$**Mg** 24,305 1 739	* [σ] = kg·m^{-3} – nejběžnější forma laboratorní podmínky						
draslík $_{19}$**K** 39,098 862	*vápník* $_{20}$**Ca** 40,08 1 550	*scandium* $_{21}$**Sc** 44,956 2 990	*titan* $_{22}$**Ti** 47,90 4 510	*vanad* $_{23}$**V** 50,941 6 120	*chrom* $_{24}$**Cr** 51,996 7 190	*mangan* $_{25}$**Mn** 54,938 7 440	*železo* $_{26}$**Fe** 55,847 7 874	*kobalt* $_{27}$**Co** 58,933 8 920
rubidium $_{37}$**Rb** 85,468 1 532	*stroncium* $_{38}$**Sr** 87,62 2 630	*yttrium* $_{39}$**Y** 88,906 4 472	*zirkon* $_{40}$**Zr** 91,22 6 450	*niob* $_{41}$**Nb** 92,906 8 570	*molybden* $_{42}$**Mo** 95,94 10 220	*technec.* $_{43}$**Tc** 97 11 490	*ruthenium* $_{44}$**Ru** 101,07 12 410	*rhodium* $_{45}$**Rh** 102,91 12 410
cesium $_{55}$**Cs** 132,91 1 870	*baryum* $_{56}$**Ba** 137,33 3 600	*lanthan* $_{57}$**La** 138,91 6 162	*hafnium* $_{72}$**Hf** 174,49 13 310	*tantal* $_{73}$**Ta** 180,95 16 650	*wolfram* $_{74}$**W** 183,85 19 300	*rhenium* $_{75}$**Re** 186,21 21 020	*osmium* $_{76}$**Os** 190,2 22 570	*iridium* $_{77}$**Ir** 192,22 22 420
francium $_{87}$**Fr** 223 ?	*radium* $_{88}$**Ra** 226,03 5 000	*aktinium* $_{89}$**Ac** 227,03 10 070						

lanthanoidy

lanthan $_{57}$**La** 138,91 6 160	*cer* $_{58}$**Ce** 140,12 6 770	*praseodym* $_{59}$**Pr** 140,91 6 500	*neodym* $_{60}$**Nd** 144,24 7 010	*prometh.* $_{61}$**Pm** 145 7 220	*samarium* $_{62}$**Sm** 150,40 7 500

aktinoidy

aktinium $_{89}$**Ac** 227,03 10 070	*thorium* $_{90}$**Th** 232,04 11 720	*protaktin* $_{91}$**Pa** 231,04 15 370	*uran* $_{92}$**U** 238,03 19 050	*neptunium* $_{93}$**Np** 237,05 20 250	*plutonium* $_{94}$**Pu** 244 19 820

VIII	I	II	III	IV	V	VI	VII	0
								helium $_2$**He** 4,003 0,1663
			bór $_5$**B** 10,81 2 340	*uhlík* $_6$**C** 12,011 2 240	*dusík* $_7$**N** 14,007 1,165	*kyslík* $_8$**O** 15,999 1,331	*fluor* $_9$**F** 18,998 1,580	*neon* $_{10}$**Ne** 20,179 0,839
			hliník $_{13}$**Al** 26,982 2 699	*křemík* $_{14}$**Si** 28,086 2 328	*fosfor* $_{15}$**P** 30,974 1 828	*síra* $_{16}$**S** 32,06 2 060	*chlór* $_{17}$**Cl** 35,453 2,995	*argon* $_{18}$**Ar** 39,948 1,662
nikl $_{28}$**Ni** 58,70 8 900	*měď* $_{29}$**Cu** 63,546 8 960	*zinek* $_{30}$**Zn** 65,38 7 140	*gallium* $_{31}$**Ga** 69,72 5 910	*germanium* $_{32}$**Ge** 72,59 5 327	*arsén* $_{33}$**As** 74,922 5 720	*selen* $_{34}$**Se** 78,96 4 807	*bróm* $_{35}$**Br** 79,904 3 120	*krypton* $_{36}$**Kr** 83,80 3,489
paladium $_{46}$**Pd** 106,4 12 020	*stříbro* $_{47}$**Ag** 107,87 10 503	*kadmium* $_{48}$**Cd** 112,41 8 650	*indium* $_{49}$**In** 114,82 7 362	*cín* $_{50}$**Sn** 118,69 7 298	*antimon* $_{51}$**Sb** 121,75 6 691	*tellur* $_{52}$**Te** 127,60 6 250	*jód* $_{53}$**I** 126,91 4 930	*xenon* $_{54}$**Xe** 131,30 5,49
platina $_{78}$**Pt** 195,09 21 450	*zlato* $_{79}$**Au** 196,97 19 320	*rtuť* $_{80}$**Hg** 200,59 13 546	*thallium* $_{81}$**Tl** 204,37 11 850	*olovo* $_{82}$**Pb** 207,20 11 350	*bismut* $_{83}$**Bi** 208,98 9 750	*polonium* $_{84}$**Po** 209 9 320	*astat* $_{85}$**At** 210 ?	*radon* $_{86}$**Rn** 222 9,28

lanthanoidy

europium $_{63}$**Eu** 151,96 5 166	*gadolin.* $_{64}$**Gd** 157,25 7 868	*terbium* $_{65}$**Tb** 158,93 8 260	*dyspros.* $_{66}$**Dy** 162,50 8 565	*holmium* $_{67}$**Ho** 164,93 8 800	*erbium* $_{68}$**Er** 167,26 9 050	*thulium* $_{69}$**Tm** 168,93 9 330	*ytterbium* $_{70}$**Yb** 173,04 6 960	*lutecium* $_{71}$**Lu** 174,97 9 840

aktinoidy

americ. $_{95}$**Am** 243 13 670	*curium* $_{96}$**Cm** 247 13 510	*berkelium* $_{97}$**Bk** 247 ≈14000	*kalifornium* $_{98}$**Cf** 251	*einstein.* $_{99}$**Es** 254	*fermium* $_{100}$**Fm** 257	*mendělej.* $_{101}$**Md** 258	*nobelium* $_{102}$**No** 259	*lawrenc.* $_{103}$**Lr** 260

Tabulka č.5: ***Tepelné vlastnosti některých látek.***

α - součinitel teplotní délkové roztažnosti (u pevných látek), β - součinitel teplotní objemové roztažnosti (u kapalin), c_p - měrná tepelná kapacita při stálém tlaku, l_t (l_v) - měrné skupenské teplo tání (vypařování), t_t (t_v) - bod tání (vypařování), λ - součinitel tepelné vodivosti.

Látka	α 10^{-5} K^{-1}	c_p J·kg^{-1}·K^{-1}	l_t kJ·kg^{-1}	t_t °C	λ W·m^{-1}·K^{-1}
led	5,10	2 090	334	0	2,2
sklo	0,83	840		1 700	0,92
hliník	2,38	921	394	660	209
měď	1,68	394	209	1 085	394
olovo	3,13	129	25,1	327,5	34,4
železo	1,20	450	289	1 538	80
	β 10^{-3} K^{-1}	c_p J·kg^{-1}·K^{-1}	l_v kJ·kg^{-1}	t_v °C	λ W·m^{-1}·K^{-1}
alkohol	1,10	2 430	879	78,29	0,182
rtuť	0,182	138	301	356,7	9,3
voda	0,18	4 186	2 257	100	0,598

Tabulka č.6: ***Tepelné vlastnosti plynů.***

c_p - měrná tepelná kapacita při stálém tlaku a teplotě 20 °C, γ - Poissonova konstanta (20 °C), C_p - molární tepelná kapacita při stálém tlaku, v_s a λ - střední rychlost molekul a součinitel tepelné vodivosti za normálních podmínek.

Plyn	c_p J·kg^{-1}·K^{-1}	γ	C_p J·mol^{-1}·K^{-1}	v_s m·s^{-1}	$\lambda \cdot 10^3$ W·m^{-1}·K^{-1}
dusík	1 038	1,40	29,08	454,4	24,2
helium	5 234	1,66	20,94	1 202	142,0
kyslík	913	1,40	29,34	425,1	24,4
oxid uhličitý	815	1,30	36,84	362,5	14,3
vodík	14 240	1,41	28,87	1 694	173,3
vzduch	1 006	1,40	29,11	---	24,2

2. Vektory a skaláry ve fyzice.

2.1. Těleso se pohybuje přímočaře rychlostí o velikosti 5 m·s^{-1}. Určete souřadnice jeho rychlosti, když zvolíte následovně soustavu kartézských souřadnic :

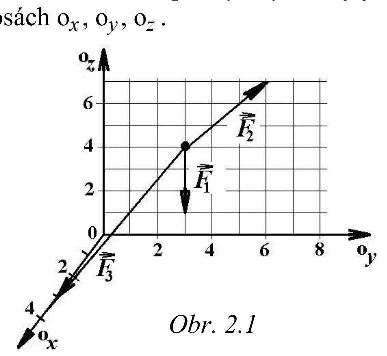
a) osa o_x má směr této rychlosti,

b) osa o_y má opačný směr než tato rychlost,

c) směr rychlosti svírá s kladnými osami o_x, o_y úhel 45°,

d) směr rychlosti je totožný se směrem tělesové úhlopříčky krychle, jejíž hrany leží na kladných souřadných osách o_x, o_y, o_z .

2.2. Jaká je výslednice sil $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2, \vec{F}_3$ v obrázku *2.1* ? Jaká je její velikost? Složky sil jsou udány v newtonech. Působiště všech sil leží v bodě o souřadnicích [0 ; 3 ; 4].



Obr. 2.1

2.3. V následujícím obrázku jsou zobrazeny vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Vypočítejte :

a) $\vec{a}+\vec{b}$

b) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

c) $\vec{a}-\vec{b}$

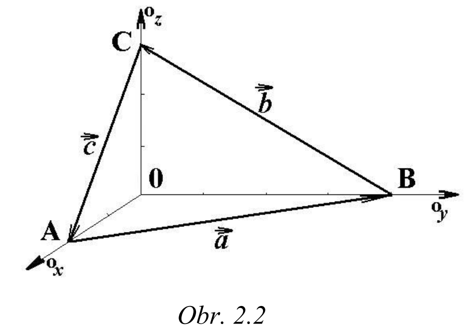
d) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

e) $\vec{a}\times\vec{b}$

f) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

g) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

h) úhel sevřený vektory $\vec{b}$ a $\vec{c}$.



Obr. 2.2

Řešení :

Souřadnice koncových bodů vektorů jsou po řadě A = [2 ; 0 ; 0], B = [0 ; 4 ; 0], C = [0 ; 0 ; 3]. Nakreslené vektory můžeme vyjádřit pomocí jednotkových vektorů $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ následovně: $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$.

a) $\vec{a}+\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + (-4)\vec{j} + 3\vec{k} = -2\vec{i} + (4-4)\vec{j} + 3\vec{k} = -2\vec{i} + 3\vec{k} = (-2; 0; 3)$,

b) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = (\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c} = (-2+2)\ \vec{i} + 0\ \vec{j} + (3-3)\vec{k} = \vec{0}$,

c) $\vec{a}-\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - (-4)\vec{j} - 3\vec{k} = -2\vec{i} + (4+4)\ \vec{j} - 3\vec{k} = -2\vec{i} + 8\ \vec{j} - 3\vec{k} =$

2.10. Rotační válec měl poloměr podstavy R_0 = 20 cm a výšku v_0 = 50 cm. Vlivem deformující síly působící ve směru osy válce se jeho výška zkrátila o $\Delta v = -3$ mm a poloměr podstavy se zvětšil o $\Delta R = 4 \cdot 10^{-1}$ mm. Jak se přibližně změnil objem válce ? Jak velká to byla procentuální změna ?

2.11. Předpokládejte, že číselná hodnota vektoru $\vec{A}$ závisí na skaláru t vztahem $\vec{A}(t)$ = [cos ωt ; sin ωt], kde ω je konstanta. Najděte derivaci d$\vec{A}$/dt vektoru $\vec{A}$ podle skaláru t a ukažte, že vzniklý vektor je kolmý na původní vektor $\vec{A}$.

Řešení :

Derivaci vektoru $\vec{A}$ podle skaláru t provedeme po složkách

$$\mathrm{d}\vec{A}\Big/\mathrm{d}t = [\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\omega t);\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin\omega t)] = [-\omega\cdot\sin\omega t;\ \omega\cdot\cos\omega t].$$

Postačující podmínkou pro to, aby na sebe byly dva vektory kolmé je, aby jejich skalární součin byl roven nule:

$$\vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = [\cos\omega t;\ \sin\omega t]\cdot[-\omega\cdot\sin\omega t;\ \omega\cdot\cos\omega t] =$$

$$= \omega\left(-\cos\omega t\cdot\sin\omega t + \sin\omega t\cdot\cos\omega t\right) = 0\,.$$

Vektory $\vec{A}$ a d$\vec{A}$/dt jsou na sebe skutečně kolmé.

2.12. Pohyb hmotného bodu je popsán časově závislým polohovým vektorem $\vec{r}(t)$, který má složky: $x(t) = 5\cdot\cos 0{,}4\{t\}$, $y(t) = 5\cdot\sin 0{,}4\{t\}$, $z(t) = 3$, kde $t \in \langle 0; \infty)$ s je čas. Určete vektory $\vec{v}(t)$ a $\vec{a}(t)$ okamžité rychlosti a zrychlení pohybu bodu (jako první a druhou derivaci polohového vektoru podle času) a pokuste se zjistit, jaký pohyb by mohl být uvedeným polohovým vektorem popsán.

Návod: vypočítejte velikosti vektorů $\vec{r}(t)$ a $\vec{v}(t)$.

2.13. Při vrhu šikmém vzhůru je poloha hmotného bodu určena souřadnicemi x a y (vodorovný a svislý směr), pro něž platí:

$$x(t) = (v_0\cdot\cos\alpha)\cdot t\ ,\qquad y(t) = (v_0\cdot\sin\alpha)\cdot t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2\,,$$

kde v_0, α, g jsou konstanty, t - čas. Určete okamžitou rychlost a zrychlení hmotného bodu (jako 1. a 2. derivaci polohového vektoru podle času t).

2.14. Dvě tělesa byla současně vržena z jednoho bodu na povrchu Země - první svisle vzhůru, druhé pod elevačním úhlem α = 60°. Velikost počáteční rychlosti obou těles byla rovna v_0 = 25 m·s^{-1}. Zjistěte vzdálenost těles 1,7 s po začátku pohybu. Odpor vzduchu zanedbejte.

Jaká bude vzdálenost těles v okamžiku, kdy druhé z nich dopadne na Zem? *Inspiraci a pomoc hledejte zejména u příkladu* **2.13.** .

Tabulka č.2: ***Materiálové konstanty vybraných materiálů.***

E a G - modul pružnosti v tahu a smyku, μ - Poissonův poměr, σ_p - mez pevnosti, ρ - hustota.

Materiál	E / GPa	G / GPa	μ	σ_p / GPa	ρ / kg·m^{-3}
hliník	71	26	0,33	0,10	2 700
měď	115	45	0,35	0,30	8 960
ocel	200	79	0,27	0,80	7 800
stříbro	76	29	0,37	0,60	10 500
sklo	60	25	0,2	0,03	2 500

Tabulka č.3: ***Sluneční soustava - astronomické údaje.***

T - doba oběhu, a - hlavní poloosa oběžné dráhy, M - hmotnost planety (jiného tělesa), R - rovníkový poloměr, τ - perioda rotace.

Planeta	T / rok	a / Gm	M / 10^{24} kg	R / Mm	τ / h
Merkur	0,24	57,9	0,330 2	2,439	1 407,5
Venuše	0,62	108,2	4,863 6	6,051	5 832,4
Země	1,00	149,6	5,973 7	6,378	23,93
Mars	1,88	227,9	0,641 9	3,397	24,62
Jupiter	11,86	778,2	1 899,2	71,492	9,92
Saturn	29,46	1 433	568,65	60,268	10,68
Uran	84,01	2 862	86,85	25,559	17,24
Neptun	164,79	4 480	102,35	24,764	16,11
Pluto*	247,7	5 914	0,012 5	1,123	152,8
Slunce			$1{,}9891\cdot10^6$	695,99	609,12
Měsíc		0,407	0,073 5	1,738	655,72

* Od roku 2006 je Pluto řazen mezi tzv. trpasličí planety

3.4. Autobus se po přímé silnici rozjížděl Δt_1 = 15 s se zrychlením velikosti a_1 = = 0,8 m·s^{-2}. Poté jel Δt_2 = 50 s rovnoměrně a za dalších Δt_3 = 10 s rovnoměrně zpomaleně zastavil. Jak velkou rychlost získal autobus rozjezdem, s jak velkým zrychlením brzdil a jaká byla velikost jeho průměrné rychlosti na celé ujeté dráze?

3.5. Automobil s nulovou počáteční rychlostí se rozjíždí s dráhovým zrychlením a = 5 m·s^{-2}. Po určité době se začne pohybovat rovnoměrně a pak s dráhovým zrychlením −5 m·s^{-2} brzdí. Celková doba jeho pohybu je t_c = 25 s při průměrné velikosti rychlosti v_p = 72 km·h^{-1}.

a) Jakou dráhu automobil projel ?

b) Jak dlouho jel automobil rovnoměrně ?

c) Jak velká byla rychlost jeho rovnoměrného pohybu ?

3.6. Za poslední sekundu svého volného pádu urazilo těleso právě polovinu své celkem uražené dráhy. Z jaké výšky h a jakou dobu t těleso padalo, jestliže zanedbáme odpor vzduchu?

3.7. Kámen padající se střechy domu volným pádem letěl těsně okolo okna výšky h_1 = 2 m po dobu Δt = 0,1 s. Jak vysoko je střecha nad horním okrajem okna? Odpor vzduchu zanedbejte.

3.8. Raketa se pohybuje po vypuštění vertikálně vzhůru po dobu t_1 = 50 s se zrychlením velikosti a = 2g. Potom jsou motory rakety vypnuty. Vypočtěte maximální výšku, které by raketa dosáhla a dobu letu od vypuštění až po návrat na zem, nepůsobil-li by odpor vzduchu.

3.9. Řidič automobilu jedoucího dráhovou rychlostí v = 90 km·h^{-1} zpozoruje na silnici překážku a začne brzdit. Vypočtěte celkovou brzdnou dráhu pro případ, že reakční doba řidiče je t_r = 0,75 s (po tuto dobu se automobil pohybuje konstantní rychlostí) a dráhové zrychlení pohybu je a = −8 m·s^{-2}.

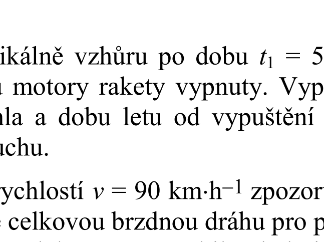
Výpočty proveďte pro počáteční rychlosti 15, 30, 45, 60 a 75 km·h^{-1} a vyneste do grafu závislost brzdné dráhy na velikosti této rychlosti.

3.10. Bod se pohybuje podél osy o_x rychlostí o souřadnici v_x. Pro t_0 = 0 s platí $x(t_0)$ = 0 m. Závislost souřadnice rychlosti pohybu na čase je na obrázku:

a) O jaké druhy pohybu jde v jednotlivých časových intervalech?

b) Nakreslete závislost souřadnice zrychlení a_x na čase.

c) Graficky znázorněte časovou závislost souřadnice x a dráhy s bodu.



Obr. 3.1

d) Odečtěte celkovou uraženou dráhu přímo z obrázku a zároveň určete, kde se bod bude nacházet v okamžiku t = 8 s.

3.11. Dokažte, že umístíme-li dělo na skalním útesu ve výšce h nad vodorovnou rovinou, vzroste jeho dostřel při elevačním úhlu α a velikosti počáteční rychlosti v_0 o hodnotu Δd, pro kterou platí

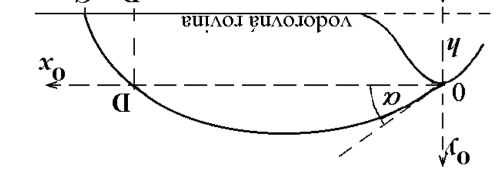
$$\Delta d = 1/2 \cdot d_0 \cdot \left[\sqrt{1 + 2gh/(v_0^2 \sin^2 \alpha)} - 1\right],$$

kde d_0 je dostřel děla při témž elevačním úhlu a téže velikosti počáteční rychlosti, když je dělo umístěno na vodorovné rovině a neuvažujeme-li odpor vzduchu.

Řešení :

Úlohu budeme řešit jako rovinnou v systému kartézských souřadnic o_x, o_y. Stanoviště děla nechť je v počátku souřadného systému (*obr.3.2*). Pro složky polohového vektoru a vektoru okamžité rychlosti při šikmém vrhu platí (viz **2.13.**) :

$x(t) = v_0 t \cos\alpha$, $y(t) = v_0 t \sin\alpha - ½ g t^2$; $v_x(t) = v_0 \cos\alpha$, $v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt$.



OD = AB = d_0
AC = d
BC = AC − OD = Δd
AO = BD = h

Obr. 3.2

Označíme-li t_D okamžik dopadu střely v místě D (zároveň doba letu střely z místa O do místa D), a t_C dobu letu střely z místa O do C, musí pro y-ové souřadnice platit: $y(t_D) = 0$, $y(t_C) = -h$. Z první podmínky určíme dobu letu t_D

$$v_0 t_D \sin\alpha - ½ g t_D^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_D = (2 v_0 \sin\alpha)/g ,$$

a následně vodorovný dostřel d_0

$$d_0 = x(t_D) = (v_0 \cdot 2v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha)/g = (2v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha)/g .$$

Z druhé podmínky je možno určit dobu letu t_C do místa C

$$v_0 t_C \cdot \sin\alpha - ½ g t_C^2 = -h \quad \Rightarrow \quad g t_C^2 - 2 v_0 t_C \cdot \sin\alpha - 2h = 0 ;$$

$$(t_C)_{1,2} = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 + 2hg/(v_0^2 \sin^2\alpha)}\right],$$

přičemž druhý (záporný) kořen nevyhovuje. Dostřel d určíme opět jako x-ovou souřadnici pro čas t_C

$$d = x(t_C) = v_0 t_C \cdot \cos\alpha .$$

Pro přírůstek dostřelu Δd ($\Delta d = d - d_0$) potom platí

$$\Delta d = v_0 \cos\alpha \cdot (t_C - t_D) = \left(v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha\right)/g \cdot \left[\sqrt{1 + 2gh/(v_0^2 \sin^2\alpha)} - 1\right] =$$

$$= 1/2 \cdot d_0 \cdot \left[\sqrt{1 + 2gh/(v_0^2 \sin^2\alpha)} - 1\right] . \qquad \textit{Dokázáno !}$$

10.12. a) $\rho = pM/RT$ = 12,8 kg·m^{-3} , b) $m \approx$ 70 kg .

10.13. $p_2 = p_1 + \Delta mRT/MV$ = 2,5 MPa .

10.14. $p_2 = p_1 T_2 / 2T_1$ = 1,425 MPa . **10.15.** $V = mRT/(M\Delta p)$ = 16,4 l .

10.16. $n = T_1 p_2 V_2 / (T_2 p_1 V_1)$ = 211 .

10.17. $n = (\ln k) / \ln(1 + \Delta V/V)$, a) 47, b) 142 .

10.18. $T_{max} = \dfrac{M}{4mR} \dfrac{(p_1 V_2 - p_2 V_1)^2}{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}$ = 436,4 K .

10.20. $c_2 = [m_1 c_1 + K] \cdot (t - t_1) / [m_2 (t_2 - t)]$ = 430 J·kg^{-1}·K^{-1}.

10.21. $\tau_2 = (m_c c_c / m_v c_v)\, \tau_1$ = 2 min. . **10.22.** m = 0,5 Q/l_v = 0,62 kg .

10.23. $Q = m\,[c_L (t_t - t_1) + l_t + c_v (t_2 - t_t)]$ = 3,34 MJ .

10.24. $Q = m\,[c_p (t_2 - t_1) + \Phi\, l_v]$ = 462 kJ ; Φ = 0,04 .

10.25. $v_{min} = \sqrt{2[c(t_t - t_1) + l_t]}$ = 351 m·s^{-1}.

10.26. $l_0 = \Delta l / (\alpha \cdot \Delta t)$ = a) 4 167 m, b) 2 778 m, c) 2 083 m .

10.27. $t_2 \le t_1 - \sigma_p/(\alpha E)$, σ_p, E – mez pevnosti, modul pružnosti v tahu; měď: t_2 = –5,3 °C, hliník: t_2 = 90,8 °C .

10.28. $t_{min} = \left[-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}\right] / 3c$ = 3,97 °C [79,5 °C].

10.29. $p = \Delta V/V_0 \cong 3\alpha_{Cu}(t_2 - t_1) \cdot 10^3$ = 6,7 ‰ .

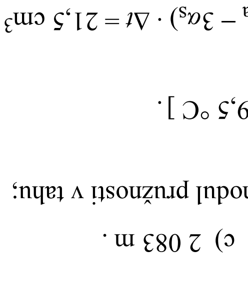
10.30. a) $\Delta V = V_0 \beta_a \Delta t$ = 22,0 cm^3 , b) $\Delta V = V_0 (\beta_a - 3\alpha_s) \cdot \Delta t$ = 21,5 cm^3.

10.32. $W = p \cdot \Delta V$ = 27 kJ, $F = p \cdot \Delta V / z$ = 90 kN .

10.33. $\Delta U = Q - p(V_2 - V_1)$ = 65 kJ .

10.34. $m = MQ / [C_p (t_2 - t_1)]$ = 3,318 g .

10.35. Q_{pr} = $^1/_2\, n R T_1$ = 2,49 kJ .



10.36. $Q_V = (m_1/M_1 + m_2/M_2) \cdot (i/2)\, R\, (t_2 - t_1)$ = = 100 J ,

$Q_p = (m_1/M_1 + m_2/M_2) \cdot [(i{+}2)/2]\, R\, (t_2 - t_1)$ = 140 J .

Směs byla zahřívána při stálém objemu.

10.37. $m = p_1 V_1 \cdot \ln(p_2/p_1) / [c\,(t_2 - t_1)]$ = 1,074 t .

10.38. $\gamma = 1 + 4R / [Q/nT_1 - R \cdot \ln(V_2/V_1)]$ = 1,39 .

10.39. $M = R/(c_p - c_V)$ = 32 g·mol^{-1}; $\gamma = c_p/c_V$ = 1,4; $i = 2c_V / (c_p - c_V)$ = 5; neznámým plynem je kyslík O_2 .

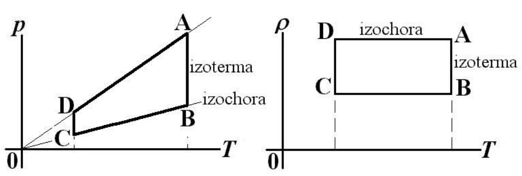
10.41. $T_2 = (p_2/p_1)^{1-1/\gamma} \cdot T_1$ = 246 K .

10.42. $p = (p_1 V_1 + p_2 V_2) / (V_1 + V_2)$,
$T = (p_1 V_1 + p_2 V_2) / (p_1 V_1/T_1 + p_2 V_2/T_2)$.

10.43. $W = m R T_0 / [M(1-n)] \cdot [1 - (V_0/V_1)^{n-1}]$, $T_1 = T_0 (V_0/V_1)^{n-1}$.

10.44. **B**: 2V_0 , **C**: $^2/_3\, p_0$, **D**: $^1/_3\, p_0$.

10.45. Při dějích DA a AB plyn teplo přijímá, při dějích BC a CD plyn teplo okolním tělesům odevzdává.



10.46. b) $\eta_i = 1 - k^{1-n}$, $\eta_s = P\,t / mq$, $z = \eta_i - \eta_s$ = 8,9 % .

10.47. $\Delta T = T_2 (\eta_2 - \eta_1) / [(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)]$ = 94 K .

10.48. $W = mcT_1 \cdot \ln(T_1/T_2) - mc(T_1 - T_2) + m l_t (T_1 - T_2)/T_2$ = 27,34 kJ, první dva členy představují práci potřebnou při ochlazení vody na teplotu 0 °C, třetí sčítanec práci, spojenou s přeměnou vody v led.

10.49. $P = q\,(T_2 - T_1) / T_1$ = 4,19 kW , $q_c = q T_2 / T_1$ = 46,1 kJ·s^{-1} .

10.50. $W = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$, $W_i = (p_2 V_2 - p_1 V_1) \cdot \ln(V_2/V_1)$,
$x = W_i / W$ = 2,1 .

10.52. $\Delta S = (p_1 V_1 / T_1) \cdot \ln(V_2/V_1)$ = 0,48 J·K^{-1} .

10.53. a) $\Delta S = m c_p \cdot \ln(T_1/T_0)$ = 0,216 J·K^{-1} ,
b) $\Delta S = m c_V \cdot \ln(T_1/T_0)$ = 0,154 J·K^{-1} .

10.54. $p_1 = n R T_1 / (V - nb) - n^2 a / V^2$ = 157,7 kPa, $n = m/M$,
$\Delta p = nR(T_2 - T_1)/(V - nb)$ = 15,10 kPa, $\Delta p_{id} = nR(T_2 - T_1)/V$ = 15,07 kPa .

10.55. $U = n \cdot [(i/2)\, R T + a\,(1/b - n/V)]$, je-li $V >> nb$, pak U = $= n \cdot (i/2)\, R T + na/b$ je pouze funkcí teploty ; U_{id} = 5 674 J , U_r = 9 996 J .

10.56. $v_p = l_v\, \Delta T / (T_v\, \Delta p) - v_v$ = 1,7 m^3·kg^{-1} .

10.57. $l_v = T_v (v_p - v_v) \cdot \langle \Delta p / \Delta T \rangle$ = 2 285 kJ·kg^{-1} .

10.59. a) $\delta h / \delta t = (T_2 - T_1) / (\rho l_t h_{led} / \lambda_{led})$ = 0,24 cm·h^{-1} ,
b) $\delta h / \delta t = (T_2 - T_1) / [\rho l_t \cdot (h_{led}/\lambda_{led} + h_{sníh}/\lambda_{sníh})]$ = 0,055 cm·h^{-1}.

10.60. $\delta Q / \delta t = S\, \Delta T / \sum (h_i / \lambda_i)$, a) 1 800 J·s^{-1}, b) 936 J·s^{-1}, c) 537 J·s^{-1} .

10.61. $\delta m / \delta t = \lambda\, S\, \Delta T / (l_s \cdot x)$ = 9,5·10^{-5} kg·s^{-1} , $m = (\delta m/\delta t)\, \tau$ = 8,3 kg ;
S - obsah povrchu boxu, x - tloušťka stěny boxu, τ = 3600·24 s .

*Tabulka č.1.: **Vybrané fyzikální konstanty.***

Název	Symbol	Hodnota
rychlost světla ve vakuu	c	$2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}$ m·s^{-1} (přesně)
permeabilita vakua	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H·m^{-1} (přesně)
permitivita vakua	ε_0	$8{,}854\,188 \cdot 10^{-12}$ F·m^{-1}
elementární náboj	e	$1{,}602\,176\,53(14) \cdot 10^{-19}$ C
Planckova konstanta	h $\hbar = h/2\pi$	$6{,}626\,069\,3(11) \cdot 10^{-34}$ J·s $1{,}054\,571\,68(18) \cdot 10^{-34}$ J·s
Avogadrova konstanta	N_A	$6{,}022\,141\,5(10) \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
atomová hmotnostní jednotka	u	$1{,}660\,538\,86(28) \cdot 10^{-27}$ kg
klidová hmotnost elektronu	m_e	$9{,}109\,382\,6(16) \cdot 10^{-31}$ kg
klidová hmotnost protonu	m_p	$1{,}672\,621\,71(29) \cdot 10^{-27}$ kg
klidová hmotnost neutronu	m_n	$1{,}674\,927\,28(29) \cdot 10^{-27}$ kg
Bohrův poloměr (atomu H)	a_0	$5{,}291\,772\,49(24) \cdot 10^{-11}$ m
gravitační konstanta	G	$6{,}672\,6(9) \cdot 10^{-11}$ m^3·s^{-2}·kg^{-1}
normální tíhové zrychlení	g_n	$9{,}806\,65$ m·s^{-2} (přesně)
Stefanova-Boltzmannova konst.	σ	$5{,}670\,40\,(4) \cdot 10^{-8}$ W·m^{-2}·K^{-4}
Wienova konstanta	b	$2{,}897\,777(5) \cdot 10^{-3}$ m·K
molární plynová konstanta	R	$8{,}314\,470(15)$ J·mol^{-1}·K^{-1}
Boltzmannova konstanta	$k_B = R/N_A$	$1{,}380\,650\,5(24) \cdot 10^{-23}$ J·K^{-1}
normální podmínky: teplota tlak	T_0 p_0	273,15 K (přesně) $1{,}013\,25 \cdot 10^{5}$ Pa (přesně)
molární objem ideálního plynu (*za normálních podmínek*)	V_{mn}	$22{,}414\,10(19) \cdot 10^{-3}$ m^3·mol^{-1}
Faradayova konstanta	$F = e \cdot N_A$	$9{,}648\,533\,8(8) \cdot 10^{4}$ C·mol^{-1}

V kulatých závorkách za číselnou hodnotou konstanty jsou uvedeny směrodatné odchylky, řád odchylky souhlasí s řádem poslední platné číslice konstanty.

3. Kinematika hmotného bodu.

3.1. Vozidlo se pohybuje na prvé šestině své dráhy konstantní rychlostí o velikosti v_1 = 10 m·s^{-1}, na dalším úseku rovném jedné třetině této dráhy konstantní rychlostí velikosti v_2 = 20 m·s^{-1} a zbývající část své dráhy projíždí konstantní rychlostí o velikosti v_3 = 30 m·s^{-1}.

a) Jak velká je průměrná velikost rychlosti vozidla na celé dráze ?

b) Jak veliká by byla průměrná velikost rychlosti vozidla v případě, kdyby se šestinu celkové doby pohybu pohybovalo rychlostí velikosti v_1, třetinu rychlostí velikosti v_2 a zbytek rychlostí velikosti v_3 ?

Řešení :

v_1 = 10 m·s^{-1}, v_2 = 20 m·s^{-1}, v_3 = 30 m·s^{-1}; v_p = ?

a) $\underbrace{\quad s/6 \quad}_{t_1} \underbrace{\quad s/3 \quad}_{t_2} \underbrace{\quad s/2 \quad}_{t_3} \qquad t_i = s_i/v_i$

$$v_p = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{s}{s/6v_1 + s/3v_2 + s/2v_3} = \frac{6 v_1 v_2 v_3}{3 v_1 v_2 + 2 v_1 v_3 + v_2 v_3} .$$

Číselně: $$v_p = \frac{6 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 30}{3 \cdot 10 \cdot 20 + 2 \cdot 10 \cdot 30 + 20 \cdot 30} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 20{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

Průměrná velikost rychlosti vozidla na celé dráze je 20 m·s^{-1}.

b) Označíme-li s_1, s_2, s_3 délky úseků dráhy projeté rychlostmi o velikostech v_1, v_2, v_3 a t celkovou dobu pohybu, můžeme psát: $s_1 = v_1\, t/6$, $s_2 = v_2\, t/3$, $s_3 = v_3\, t/2$. Průměrnou velikost rychlosti v_p pak vypočteme následovně:

$$v_p = (s_1 + s_2 + s_3)/t = (v_1\, t/6 + v_2\, t/3 + v_3\, t/2)/t =$$
$$= (v_1 + 2v_2 + 3v_3)/6 = (10 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30)\,/\,6 \text{ m·s}^{-1} = 23{,}33 \text{ m·s}^{-1}.$$

Průměrná velikost rychlosti vozidla bude v tomto případě rovna přibližně 23,3 metru za sekundu.

3.2. Cyklista jede do kopce rychlostí stálé velikosti v_1 = 10 km·h^{-1}. Na vrcholu kopce se obrátí a projede tutéž trať rychlostí velikosti v_2 = 40 km·h^{-1}. Jaká je průměrná velikost rychlosti cyklisty?

3.3. Automobil urazil třetinu své celkové dráhy s průměrnou velikostí rychlosti v_1 = 100 km·h^{-1}. Zbývající dvě třetiny dráhy projížděl městem. Jakou průměrnou velikostí rychlosti v_2 se ve městě pohyboval, jestliže průměrná velikost rychlosti na celé trase činila v_p = 50 km·h^{-1} ?

3.12. Dělo a cíl se nacházejí na stejné úrovni ve vzdálenosti d = 5,10 km od sebe. Za jakou dobu náboj mající počáteční rychlost velikosti v_0 = 240 m·s^{-1} dopadne na cíl, neuvažujeme-li odpor vzduchu?

3.13. Při bombardování z malé výšky (50 m) uvolňuje bombu letadlo letící vodorovně rychlostí velikosti 320 m·s^{-1}.

a) Za jakou dobu bomba dopadne a v jaké vodorovné vzdálenosti od místa shozu ?

b) Jaká bude velikost rychlosti bomby v okamžiku dopadu?

c) Jaká bude vzdálenost mezi místem dopadu a pozicí letadla v okamžiku dopadu bomby?

3.14. Dopravníkový pás pohybující se vodorovně rychlostí velikosti v = 1 m·s^{-1} je umístěn ve výšce h = 2 m nad zemí. V jaké vzdálenosti za jeho koncem a jak velkou rychlostí bude přepravovaný materiál dopadat na zem?

3.15. Při skocích na lyžích opouští skokan hranu mamutího můstku rychlostí velikosti v_0 = 110 km·h^{-1} (předpokládejte, že vodorovným směrem) a dopadá na 45° svah. Pro zjednodušení uvažujte, že svah je od hrany můstku rovný. Předpokládejte dále, že se skokan chová jako vržený hmotný bod. V jaké vzdálenosti od hrany na svahu dopadne ?

Ve skutečnosti skokan dosahuje délky skoku až 165 m. Proč tato hodnota nesouhlasí s vypočtenou vzdáleností ?

3.16. Hmotný bod se pohybuje po trajektorii dané v SI číselnými rovnicemi

$$x(t) = 2t^2 - 1 , \quad y(t) = t^2 + 1 , \quad z(t) = t^2 .$$

Rozhodněte, je-li trajektorie hmotného bodu přímočará nebo zakřivená v rovině či prostoru.

V okamžiku t_1 = 3 s určete rychlost a zrychlení pohybu HB a jeho dráhu během prvních tří sekund ($t \in \langle 0; 3 \rangle$ s).

O jaký pohyb se jedná vzhledem k velikosti rychlosti?

Řešení :

$x(t) = 2t^2 - 1$, $y(t) = t^2 + 1$, $z(t) = t^2$, $t_1 = 3$ s ; k_1 = ?, k_2 = ?, $\vec{v}(t_1)$ = ?, $\vec{a}(t_1)$ = ?, $s\langle 0;3 \rangle$ = ?

Nejdříve vypočteme složky vektorů rychlosti a zrychlení jako první a druhou derivaci složek polohového vektoru podle času:

$$v_x(t) = x' = 4t , \quad v_y(t) = y' = 2t , \quad v_z(t) = z' = 2t$$
$$a_x(t) = x'' = 4 , \quad a_y(t) = y'' = 2 , \quad a_z(t) = z'' = 2 ,$$
$$\vec{v}(t) = 4t\,\vec{i} + 2t\,\vec{j} + 2t\,\vec{k} , \qquad (1)$$
$$\vec{a}(t) = 4\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k} . \qquad (2)$$

9.62. $f_0 = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}} = 3{,}6$ kHz , čtyři vyšší harmonické, pro jejichž kmitočty platí $f_n = (2n+1) f_0$, kde n = 3, 4, 5, 6 .

9.63. $u_m^* = u_m(x) / [\sin(\pi x / l)] = 3{,}57$ mm , $x = 52{,}5$ cm .

9.64. $|c_2 - c_1| = f_r \cdot 2l = 2$ m·s^{-1} .

9.66. $f = [(c^2 - v^2) / (2\, v\, c)] f_r = 20{,}3$ Hz .

9.67. $v = c\,(f_1/f_2 - 1) / (f_1/f_2 + 1) = 245$ km·h^{-1} .

9.68. $T_S = \dfrac{4\pi R_S \lambda_0}{\Delta\lambda \cdot c} = 2{,}16 \cdot 10^6$ s $\cong$ 25 dnů (na slunečním rovníku).

9.69. $z = \langle \Delta\lambda / \lambda_0 \rangle = 1{,}76 = v/c$, pokud jste dobře počítali, vychází rychlost vzdalování kvasaru 1,76-krát větší než rychlost světla ve vakuu; správný výpočet je možno provést při uvážení relativistických efektů:
$v/c = [(z+1)^2 - 1] / [(z+1)^2 + 1] = 0{,}77$.
I v tomto případě vychází rychlost vzdalování velká: 230 000 km·s^{-1}!

9.70. a) $I_2 / I_1 = 10^{\Delta L/10} = 1{,}26$, b) $p_2 / p_1 = \sqrt{(I_2 / I_1)} = 1{,}12$.

9.71. $L_n - L_1 = 10 \cdot \log n$, a) 5 dB , b) 7 dB , c) 10 dB .

9.73. $p_0 = \sqrt{I_0 \rho c} = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa ; $\rho = 1{,}293$ kg·m^{-3} .

9.75. $L_2 = L_1 - 20\alpha d \cdot \log e = 55{,}7$ dB .

9.76. a) $I = 10^{L/10} \cdot I_0 = 10^{-6}$ W·m^{-2}; $p_{ef} = \sqrt{I\rho c} = 2 \cdot 10^{-2}$ Pa , c = 331 m·s^{-1},
b) $L_1 = L - 20\alpha x_1 \cdot \log e = 50$ dB , c) $x_2 = L / (20\beta \cdot \log e) = 300$ m .

10. Molekulová fyzika. Termodynamika.

10.2. a) $x = N_A\, m \sum \dfrac{\mu_i}{M_i} = 6{,}7 \cdot 10^{27}$, b) $m_D = (2k/9)\, \rho\, S \langle h \rangle \approx 2 \cdot 10^{10}$ kg, k = $1{,}16 \cdot 10^{-4}$, S, $\langle h \rangle$ - plocha a průměrná hloubka T.o., ρ = 1 030 kg·m^{-3} .

10.3. Definice molárního objemu $V_m = V/n$, $V_m = M/\rho = 1{,}823 \cdot 10^{-5}$ m^3·mol^{-1}.

10.4. $d = \sqrt[3]{M / \rho N_A} = 0{,}228$ nm .

10.5. $x = p\, V N_A / RT = 1{,}65 \approx 2$, $\langle l \rangle = \sqrt[3]{k_B\, T / p} = 8{,}5$ mm .

10.6. $m_H / m_{CO} = (p_H / p_{CO}) \cdot (M_H / M_{CO}) = 0{,}038$,
$m_H / (m_H + m_{CO}) = 0{,}037 = 3{,}7$ % , $m_{CO} / (m_H + m_{CO}) = 96{,}3$ % .

10.7. $v_k = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{(3 k_B \cdot T / m)} = 0{,}35$ mm·s^{-1} .

10.9. $Q = {}^{15}/_{2}\, m R T_1 / M = 10$ kJ .

10.11. $\rho_n = \rho\, p_n T / p T_n = 1{,}293$ kg·m^{-3} .

3.19. Pohyb částice je v SI popsán číselnou vektorovou rovnicí $\vec{r}(t) = 1{,}5\, t^2\, \vec{i}\ + (5 - 2\, t^2)\ \vec{j}\ ,\ t \in \langle 0; \infty)$ s. Najděte:

a) okamžitou rychlost a zrychlení částice,
b) závislost velikostí rychlosti a zrychlení na čase,
c) rovnici trajektorie jako funkci $y = f(x)$,
d) průměrnou velikost rychlosti v_p na úseku trajektorie v prvním kvadrantu.

3.20. Těleso bylo vrženo z vodorovné roviny pod úhlem α k horizontu počáteční rychlostí $\vec{v}(0)$. Zanedbejte odpor vzduchu, osu o_x souřadného systému volte ve vodorovném směru, osu o_y svisle vzhůru a nalezněte

a) rovnici trajektorie jako funkci $y = f(x)$,
b) celkovou dobu pohybu tělesa,
c) maximální dosaženou výšku a vzdálenost dopadu tělesa (při jakém úhlu α' se budou rovnat?),
d) poloměr křivosti počátku a vrcholu trajektorie,
e) časovou závislost velikostí tečného a normálového zrychlení.

Řešte obecně a pak pro hodnoty: $\alpha = 30°$, $v(0) = v_0 = 10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

3.21. Polohový vektor bodu A závisí na čase vztahem $\vec{r}(t)\ =\ \mathrm{a}t\,\vec{i} - \mathrm{b}t^2\,\vec{j}$, kde $\mathrm{a} = 2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $\mathrm{b} = 3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $t \in \langle 0; \infty)$ s. Nalezněte:

a) rovnici trajektorie bodu a trajektorii načrtněte,
b) závislosti okamžité rychlosti a zrychlení na čase, jakož i časové závislosti velikostí těchto vektorů,
c) časovou závislost velikosti úhlu sevřeného vektory rychlosti a zrychlení,
d) vektor průměrné rychlosti pohybu za prvních t sekund pohybu a velikost tohoto vektoru.

3.22. Bod se pohybuje v rovině xy tak, že jeho souřadnice se mění s časem t ($t \in \langle 0; \infty)$ s) podle čísel. rovnic $x(t) = 2{\cdot}\sin(\pi t/2)$, $y(t) = 2\,[1 - \cos(\pi t/2)]$. Nalezněte:

a) rovnici trajektorie (o jakou rovinnou křivku se jedná?),
b) dráhu, kterou bod urazil za prvních 5 s pohybu,
c) změnu polohového vektoru do konce 5. sekundy a její velikost,
d) úhel mezi vektory rychlosti a zrychlení a jeho závislost na čase.

3.23. Bod se pohybuje v rovině xy tak, že jeho souřadnice závisí na čase t ($t \in \langle 0; \infty)$ s) podle číselných rovnic $x(t) = 2t$, $y(t) = 2t\ (1 - 5t)$. Najděte:

a) rovnici trajektorie a trajektorii načrtněte,
b) okamžitou rychlost a zrychlení v závislosti na čase,
c) okamžik, kdy vektory rychlosti a zrychlení svírají úhel $\pi/4$,
d) změnu polohového vektoru za prvních 0,2 s pohybu.

3.24. V čase $t_0 = 0$ s prošla částice počátkem souřadného systému ve směru kladné poloosy x. Její rychlost se od tohoto okamžiku měnila s časem podle

vztahu $\vec{v}(t)\ =\ \vec{v}_0(1 - t/\tau)$, kde $\vec{v}_0$ je vektor počáteční rychlosti o velikosti $0{,}10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $\tau = 5{,}0$ s , $t \in \langle 0; \infty)$ s . Najděte:

a) polohu částice v časech 3,0 , 6,0 , 10 a 20 s,
b) okamžik, kdy se částice bude nacházet 10 cm od počátku,
c) dráhu, kterou částice vykoná za první 4 s (resp. 8 s) pohybu,
d) průměrnou velikost rychlosti za první 4 s a v časovém intervalu $\langle 4; 8\rangle$ s.

3.25. Sledováním pohybu HB v intervalu $\langle 0; 5\rangle$ s byly naměřeny tyto dráhové souřadnice:

t / s	0	1	2	3	4	5
s / m	2,0	5,9	14,0	26,3	42,8	63,5

Aproximujte naměřenou závislost $s = s\,(t)$ v časovém intervalu $\langle 0; 5\rangle$ s polynomem.Vypočtěte závislost dráhové rychlosti a dráhového zrychlení na čase.

Řešení :

Závislost dráhové souřadnice $s(t)$ na čase získáme stanovením interpolačního mnohočlenu v proměnné t. Koeficienty tohoto mnohočlenu získáme dosazením tabulkových hodnot. Stupeň polynomu nemůže mít vyšší hodnotu než 5, protože tabulka obsahuje 6 uzlů (dvojic hodnot). Hledáme tedy mnohočlen 5. řádu

$$s(t) = \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 t + \mathrm{a}_2 t^2 + \mathrm{a}_3 t^3 + \mathrm{a}_4 t^4 + \mathrm{a}_5 t^5 .$$

Soustavou určující koeficienty mnohočlenu je soustava rovnic

$$\begin{aligned} 2 &= \mathrm{a}_0 \\ 5{,}9 &= 2 + \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_3 + \mathrm{a}_4 + \mathrm{a}_5 \\ 14 &= 2 + 2\mathrm{a}_1 + 4\mathrm{a}_2 + 8\mathrm{a}_3 + 16\mathrm{a}_4 + 32\mathrm{a}_5 \\ 26{,}3 &= 2 + 3\mathrm{a}_1 + 9\mathrm{a}_2 + 27\mathrm{a}_3 + 81\mathrm{a}_4 + 243\mathrm{a}_5 \\ 42{,}8 &= 2 + 4\mathrm{a}_1 + 16\mathrm{a}_2 + 64\mathrm{a}_3 + 256\mathrm{a}_4 + 1024\mathrm{a}_5 \\ 63{,}5 &= 2 + 5\mathrm{a}_1 + 25\mathrm{a}_2 + 125\mathrm{a}_3 + 625\mathrm{a}_4 + 3125\mathrm{a}_5 . \end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme eliminační maticovou metodou :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3{,}9 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 6 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 8{,}1 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 10{,}2 \\ 1 & 2 & 25 & 125 & 625 & 12{,}3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3{,}9 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 15 & 2{,}1 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{a}_0 = 2\ ,\ \ \mathrm{a}_1 = 1{,}8\ ,\ \ \mathrm{a}_2 = 2{,}1\ ,\ \ \mathrm{a}_3 = \mathrm{a}_4 = \mathrm{a}_5 = 0\ .$$

Dráhová souřadnice HB při jeho pohybu v době $\langle 0;5\rangle$ s závisí na čase podle číselné rovnice

8.11. $h\ =\ 2m\,v_0^2 / (\pi d^2 \rho_v\, g\, l)\ =\ 1\ 071{,}5$ m , $d = 7$ mm je průměr hlavně .

8.12. $F\ =\ m\,g\ +\ ½\, f\, \rho\, g\, š\, h^2\ =\ 11{,}77$ kN .

8.13. $m\ \geq\ \rho\ š\ d\ h^2 / 2d_r\ +\ \rho\ š\ h^3 / 3d_r\ -\ m_r / 2\ =\ 111$ kg , d je vzdálenost hladiny vody a osy klapky, d_r a m_r - délka ramene a jeho hmotnost .

8.15. $\alpha\ =\ \mathrm{arc\ tan}\,(a/g)\ =\ 0{,}471\ \mathrm{rad}\ =\ 27°$.

8.16. $p_h\ =\ p_0 \cdot \exp\,(-\rho_0\, g\, h / p_0)\ =\ 33{,}7$ kPa .

8.17. $h\ =\ \ln\,(p_0/p_h) \cdot p_0 / (\rho_0\, g)\ =\ 5\ 550$ m .

8.18. $v_2\ =\ \sqrt{2\,g\,h / [1 - (S_2 / S_1)^2]}$. **8.19.** $V\ =\ (\pi d^2/4)\ \sqrt{2gh} \cdot t\ =\ 11{,}9\ \mathrm{m}^3$.

8.20. $y_m\ =\ h/2\ =\ 15$ cm . **8.21.** $v\ =\ \sqrt{2h\rho_v\, g / \rho_{vz}}\ =\ 11{,}4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

8.22. $\Delta p\ =\ {}^1/_2\ \rho_v\, v_1^2\, [1\ -\ (d_1/d_2)^4]\ =\ -4\ 836$ Pa .

8.23. $t\ =\ (d/S_2) \cdot \sqrt{\rho_v\, S_1\, (S_1^2 - S_2^2) / 2F}\ =\ 2{,}86$ s .

8.24. $t_v\ =\ (S_0/S_1) \cdot \sqrt{h/2g}\ =\ 903$ s . **8.26.** $\Delta p\ =\ \rho\ l\ v / \Delta t\ =\ 1$ MPa.

8.28. $v\ =\ 2g\,R^2\,(\rho_k\ -\ \rho_{vz}) / 9\eta = 272\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, η - dynamická viskozita vzduchu.

8.29. $v\ =\ 2\ \sqrt{2R\rho_d\, g / (3C\rho_{vz})}\ =\ 46{,}2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

8.31. a) $\eta\ =\ \pi\, R^4\, h\, \rho_v\, g\, t / (8\ l\ V)\ =\ 9{,}65 \cdot 10^{-4}$ Pa·s .
b) $Re\ =\ 2\rho_v\ V / (\pi R\ t\ \eta)\ =\ 126\ <\ 1\ 000\ =\ Re_k$.

8.32. $\sigma\ =\ R_1\, R_2\, \rho_v\, g\ \Delta h / 2(R_2 - R_1)\ =\ 72\ \mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$.

8.34. $d\ =\ mg / (\sigma\,\pi)\ =\ 1{,}0$ mm .

8.35. $h\ =\ 2\sigma \cdot \cos\,(180° - \alpha) / (\rho_{Hg}\, g\, R)\ =\ 3{,}26$ mm .

8.36. $d\ =\ 4\sigma / (h\, \rho_v\, g)\ =\ 0{,}1$ mm .

9. Kmity. Vlny.

9.2. $t_1\ =\ 5/3$ s , $t_2\ =\ 10/3$ s .

9.3. a) $u_x\,(4{,}85)\ =\ 0{,}014$ m, $v_x\ =\ 0{,}222\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $a_x\ =\ -3{,}49\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$,
b) $v_m = 0{,}314\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $a_m = 4{,}93\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, c) $s\langle 0;\, t_2\rangle\ =\ \int_0^{t_2} |v|\, \mathrm{d}t\ =\ 0{,}0259$ m.

9.4. $u(t_1)\ =\ 0{,}20$ m nebo 0,29 m ; $v(t_1)\ =\ 1{,}16$ nebo $0{,}81\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$;
$a(t_1)\ =\ 3{,}20$ nebo $4{,}64\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

9.5. a) $\langle v\rangle\ =\ 0{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, b) $\langle v\rangle\ =\ 1{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

9.8. $T\ =\ 2\pi\ \sqrt{2m/9k}\ =\ 0{,}13$ s .

9.9. $T\ =\ 2\pi\ \sqrt{m/(2S\rho g)}\ =\ 0{,}774$ s . **9.10.** $T\ =\ (4/d)\ \sqrt{\pi m / \rho g}$.

9.11. $t_S\ =\ T / 4\ =\ \pi/2\ \sqrt{R_Z / g_Z}\ =\ 1\ 267\ \mathrm{s}\ =\ 0{,}35$ h ; $v_S\ =\ v_m\ =\ \sqrt{R_Z\, g_Z} = 7{,}91\ \mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$, g_Z je zrychlení na povrchu Země.

9.13. a) $T\ =\ (2\pi/a)\ \sqrt{m/E_0}$; b) $T\ =\ 2\pi\ \sqrt{m r_0^2 / [\mathrm{A}k e^2 (\mathrm{n}-1)]}\ \approx\ 10^{-13}$ s .

9.14. $T\ =\ \pi\ \sqrt{l/g}\ \{1 +\ \sqrt{(l-d)/l}\ \}\ =\ 2{,}21$ s .

9.15. $T/T_{mat}\ =\ \sqrt{7R^2 / 5 + l(l + 2R)} \big/ (l + R)\ =\ 1{,}022$.

9.16. $T\ =\ 2\pi\ \sqrt{3l/4g}$, $T_1\ =\ 2\pi\ \sqrt{l/4g}$, $T_2\ =\ 2\pi\ \sqrt{l/2g}$, $T_3\ =\ 2\pi\ \sqrt{3l/4g}$,
$T_4\ =\ 2\pi\ \sqrt{l/g}$. $T\ =\ 2\pi\ \sqrt{2b/3g} = 1{,}04$ s , viz př. **5.41.**

9.17. $T\ =\ 2\pi\ \sqrt{2b/3g} = 1{,}04$ s , viz př. **5.41.**

9.18. $\vec{F}\ =\ \vec{i} \cdot m\, [g\ +\ (4\pi^2/T^2) \cdot u_m \cdot \cos\,(2\pi/T \cdot t\ +\ \varphi)]$,
$F\ =\ 9{,}81\ +\ 3{,}16 \cdot \cos\,(12{,}57\{t\} + \varphi)$.

9.19. $F_M\ =\ m(2\pi f)^2\, z / 2\ =\ 3\ 160$ N .

9.20. $T\ =\ 2\pi\ \sqrt{\dfrac{(m_1 + m_2)\Delta l}{m_2\, g}}\ =\ 1{,}59$ s ; $u_x(t)\ =\ 0{,}04 \cdot \sin\,(3{,}95\{t\})$,
$v_x(t)\ =\ 0{,}16 \cdot \cos\,(3{,}95\{t\})$.

9.21. $\Delta l\ =\ (1/4\pi^2)\,(T_2^2\ -\ T_1^2)\ g\ =\ 2{,}73$ cm .

9.22. $\Delta x\ =\ g\,(T / 2\pi)^2\ =\ 6{,}2$ cm . **9.23.** $u\ =\ \pm\, u_m / \sqrt{2}$.

9.24. $u(t)\ =\ u_m \cdot \cos\,[\sqrt{2E / m u_m^2} \cdot t + \varphi]$; $u(t)\ =\ 0{,}05 \cdot \cos\,(1{,}58\{t\} + \pi/3)$.

9.25. a) $T_1/T_2\ =\ \sqrt{m_1/m_2}\ =\ 2 : 1$, b) $E_1/E_2\ =\ 1 : 1$.

9.26. $T\ =\ (2\pi/r^2)\ \sqrt{2Jl/\pi G}$. **9.27.** $f\ =\ (1/2\pi)\ \sqrt{2g/l}\ =\ 0{,}71$ Hz .

9.28. $T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 2\pi / \sqrt{\pi R^2 \rho g / m - (\mathrm{K} / 2m)^2}\ =\ 1{,}15$ s ; $\lambda \cong 30$.

9.30. $u_{m2}\ =\ 0{,}4\ u_{m1}$; $\delta\ =\ (1/\mathrm{T}) \cdot \ln\,[u_{m1} / u_{m2}]\ =\ 1{,}83\ \mathrm{s^{-1}}$,
$f_0\ =\ (1/T)\ \sqrt{(1/4\pi^2) \cdot \ln^2 (u_{m1} / u_{m2}) + 1}\ =\ 2{,}02$ Hz .

9.31. $T/T_0\ =\ \sqrt{1 + (\ln^2 n) / 4\pi^2} \cdot 100\ =\ 101{,}52$ % .

9.32. $u_x(t)\ =\ 0{,}067 \cdot \exp\,(-0{,}4\ \{t\}) \cdot \cos\,[\pi\,(\{t\}\ -\ 1) / 2]$.

9.33. Odpověď záleží na tom, jaký smysl přisoudíme položené otázce. V čase se tlumí rychleji druhé kmitání, zkoumáme-li tlumení během jedné periody, pak se rychleji tlumí kmitání první .

9.34. $n_0\ =\ (n_1 n_3\ -\ n_2^2) / (n_1\ +\ n_3\ -2n_2)\ =\ 10{,}9$ (dílku) , *metoda tří kyvů:* $n_0 = [(n_1 + n_3)/2 + n_2]/2 = 11{,}0$ (dílků); $\lambda = 2{,}82$.

9.35. $s = 2u_{m1} / [1 - \exp(-\Lambda/2)] = 2{,}0$ m .

9.37. $t = (\ln n) / (2\Lambda f) = 64{,}7$ s .

9.39. $t = f_v \dfrac{\sqrt{u_r^2 - u_v^2}}{\pi u_v (f^2 - f_v^2)} \ln[u_m(0)/u_m(t)] = 0{,}5$ s .

9.40. $u_{mr} = F_m / [2\delta m \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}] = 0{,}843$ m, $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 19{,}54$ rad·s^{-1}.

9.41. $\omega_r = \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2} = 510$ rad·s^{-1} .

9.42. $u(t) = 9{,}66 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(\omega t + \pi/4)$.

9.43. a) $u_m = \sqrt{u_{m1}^2 + u_{m2}^2 + 2u_{m1}u_{m2} \cdot \cos|\varphi_2 - \varphi_1|} = 7$ cm ,

b) $u_m = \sqrt{u_{m1}^2 + u_{m2}^2 + 2u_{m1}u_{m2} \cdot \cos(|\varphi_2 - \varphi_1| + \pi/2)} = 7$ cm .

9.44. $T = 2T_1T_2/(T_1 + T_2) = 3{,}05$ s , $T_z = T_1T_2/(T_2 - T_1) = 93$ s .

9.45. $\omega_1 = 47{,}9$ rad·s^{-1}, $\omega_2 = 52{,}1$ rad·s^{-1} ; $T_z = 2\pi / |\omega_2 - \omega_1| = 1{,}50$ s .

9.46. $f_{2,1} = {}^1/_2 (2/T \pm 1/T_r)$;
a) $f_1 = 9$ Hz , $f_2 = 11$ Hz , $u_{m1} = u_{m2} = {}^1/_2 u_m = 1{,}5$ mm ,
b) $f_1 = 9{,}5$ Hz , $f_2 = 10{,}5$ Hz , $u_{m1} = u_{m2} = {}^1/_2 u_m = 3$ mm .

9.47. a) $(u_y^2/4) = (u_x^2/u_m^2) \cdot (u_m^2 - u_x^2)$, b) $u_y = u_m \cdot (1 - 2u_x^2/u_m^2)$.

9.48. $u_y(u_x) = 100 \cdot u_x^2 - 8 \cdot 10^{-2}$, $u_x(4) = 3{,}5$ cm, $u_y(4) = 4$ cm,
$v(4) = 7{,}3$ cm·s^{-1} .

9.50. $u(t) = (8a/T) \cdot [\sin \omega t + 1/3 \cdot \sin 3\omega t + 1/5 \cdot \sin 5\omega t + \ldots\ldots.]$.

9.51. $u(t) = \dfrac{u_m}{\pi} + \dfrac{u_m}{2} \sin \omega t - \dfrac{2u_m}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2n\omega t}{(2n-1)(2n+1)}$.

9.54. $f = n/t = 0{,}625$ Hz ; $n = 7{,}5$.

9.55. $\Delta\Phi = (2\pi/\lambda) \cdot d = 8\pi$.

9.56. $x = c \cdot t - (\lambda/2\pi) \cdot \arccos(u/u_m) - n\lambda = (2{,}49 - n \cdot 0{,}05)$ m, kde n = 0, 1, 2, 3,......, 49 .

9.57. $u_m^* = 2u_m \cdot \cos(|\Phi_2 - \Phi_1|/2) = 1{,}85$ mm .

9.58. a) $v_g = c$, b) $v_g = c/2$, c) $v_g = 3c/2$, d) $v_g = 2c$,
e) $v_g = c \cdot [(1 - 3b\lambda^2)/(1 - b\lambda^2)]$.

9.59. $l_2 = \dfrac{l_0 l_1}{4l_0 - 3l_1} = 55{,}5$ cm . **9.60.** $c_m = \dfrac{2l}{\lambda_{vz}} c_{vz} = 3{,}4$ km·s^{-1} .

První křivost k_1 vypočteme ze vztahu

$$k_1 = |\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''| / |\vec{r}\,'|^3 = |\vec{v} \times \vec{a}| / v^3 = 0 \text{ m}^{-1}, \text{ neboť}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4t & 2t & 2t \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{0} \text{ m}^2\text{·s}^{-3} .$$ První křivost je tedy rovna nule.

Druhá křivost k_2 závisí na třetí derivaci polohového vektoru, a ta je rovna nulovému vektoru. Proto i druhá křivost je rovna nule.

Závěr: naše **trajektorie je přímá** (bez torze i flexe).

Vektory rychlosti a zrychlení v čase t_1 vypočteme dosazením do vztahů (1) (2)

$$\vec{v}(3) = (12\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}) \text{ m·s}^{-1}, \quad \vec{a}(3) = (4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) \text{ m·s}^{-2}.$$

Vzhledem k tomu, že trajektorie je přímá, je celkové zrychlení rovno tečnému, a protože je konstantní a téhož směru jako rychlost, **jedná se o pohyb rovnoměrně zrychlený**. K tomuto závěru lze dospět i na základě znalosti časové závislosti velikosti rychlosti

$$v(t) = \sqrt{16t^2 + 4t^2 + 4t^2} = \sqrt{24t^2} = 2t\sqrt{6} \text{ m·s}^{-1} .$$

Derivace velikosti rychlosti podle času je kladná (a zároveň konstantní), rovna $2\sqrt{6}$ m·s^{-2}. Jde o pohyb rovnoměrně zrychlený.
Dráha HB během prvních tří sekund je dána číselnou rovnicí

$$s\langle 0;3\rangle = \int_0^3 2t \cdot \sqrt{6}\,\mathrm{d}t = \left[t^2\sqrt{6}\right]_0^3 = 9\sqrt{6} \text{ m}.$$

3.17. Pohyby dvou hmotných bodů souhlasným směrem jsou popsány číselnými rovnicemi:

$x_1(t) = 4t + 8t^2 - 16t^3$, $x_2(t) = 2t - 4t^2 + t^3$, kde t je čas v sekundách.

Ve kterém okamžiku budou zrychlení obou bodů stejně velká? Jaké budou v tomto okamžiku jejich rychlosti?

3.18. Částice se pohybuje po trajektorii dané v SI číselnou vektorovou rovnicí

$$\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} - t^3\,\vec{j} + \vec{k} .$$

Určete její okamžitou rychlost, okamžité zrychlení a jejich velikosti jako funkce času t, $t \in \langle 0; \infty)$ s.

Rozhodněte, je-li pohyb částice přímočarý či křivočarý, respektive rovinný či prostorový. Dále určete, jedná-li se o pohyb rovnoměrný či nerovnoměrný a jak velká jsou tečná a normálová zrychlení. Zjistěte, jakou dráhu částice urazí během prvých dvou sekund.

$s(t) = 2 + 1{,}8\,t + 2{,}1\,t^2$,

dráhová rychlost $v(t) = (1{,}8 + 4{,}2\,t)$ m·s^{-1} a dráhové zrychlení $a(t) = 4{,}2$ m·s^{-2}.
V dané aproximaci se jedná o pohyb rovnoměrně zrychlený.

*3.26. Pozorováním pohybu HB v rovině xy byly naměřeny polohy, uvedené v tabulce :

t / s	0	1	2	3	4	5	6
x / m	-0,5	1,5	3,5	5,5	7,5	9,5	11,5
y / m	3	2	-1	-6	-13	-22	-33

a) Aproximujte závislosti $x(t)$ a $y(t)$ v časovém intervalu $t \in \langle 0;6\rangle$ s polynomem 6. stupně.
b) Ze získaných parametrických rovnic trajektorie určete vektor okamžité rychlosti a jeho velikost, dráhu uraženou od $t = 0$ do daného času 6 s, vektor zrychlení a jeho velikost.

3.27. Dráhová souřadnice pohybu hmotného bodu je dána rovnicí

$s(t) = \mathrm{A} + \mathrm{B}t + \mathrm{C}t^2 + \mathrm{D}t^3$, kde C = 0,14 m·s^{-2} , D = 0,01 m·s^{-3} ,

$t \in \langle 0; \infty)$ s . Za jak dlouho od začátku pohybu ($t = 0$) bude velikost dráhového zrychlení HB rovna 1 m·s^{-2} ?

3.28. Těleso se pohybuje přímočaře rychlostí, jejíž velikost je dána číselnou rovnicí $v = \mathrm{a}\sqrt{\mathrm{b}+t}$, kde a = 1 m·s$^{-3/2}$, b = 1 s, $t \in \langle 0; \infty)$ s. Určete dráhu, kterou těleso urazí za prvních 10 s a velikost jeho zrychlení v 10. sekundě.

Řešení :

$v(t) = \mathrm{a}\sqrt{\mathrm{b}+t}$, a = 1 m·s$^{-3/2}$, b = 1 s, $t_1 = 10$ s ; $s\langle 0;10\rangle = ?$, $a(10) = ?$

Dráhu určíme jako časový integrál velikosti rychlosti

$$s\langle t_1;t_2\rangle = \int_{t_1}^{t_2} v\,\mathrm{d}t = \mathrm{a}\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\mathrm{b}+t}\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{a}^{-2}\int_{u_1}^{u_2} u^2\,\mathrm{d}u ,$$

při substituci $u^2 = \mathrm{a}^2(\mathrm{b} + t)$, $\mathrm{d}t = 2\mathrm{a}^{-2}\,u\,\mathrm{d}u$.

$$s = 2\mathrm{a}^{-2}\left[u^3/3\right]_{u_1}^{u_2} = (2/3)\mathrm{a}^{-2}\left[\mathrm{a}^3(\mathrm{b}+t)^{3/2}\right]_{t_1}^{t_2} = (2/3)\mathrm{a}\left[(\mathrm{b}+t)^{3/2}\right]_{t_1}^{t_2} .$$

Číselně: $s\langle 0;10\rangle = (2/3) \cdot 1 \cdot \left[(1+t)^{3/2}\right]_0^{10} = \dfrac{2}{3}\left[11^{1,5} - 1\right] = 23{,}665 \text{ m} \approx 23{,}7$ m .

$$a(t) = a_t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\left(\mathrm{a}\sqrt{\mathrm{b}+t}\right) = \mathrm{a}/(2\sqrt{\mathrm{b}+t}) .$$

Číselně: $a(10) = 1/(2\sqrt{11})$ m·s^{-2} = 0,15 m·s^{-2} .

6.23. $m(t) = m_0 \cdot \exp(-at/u)$, a) $m(100) = 1\,337$ kg, b) $m(1000) = 933$ kg,
c) $t_v = u/a \cdot \ln(m_0/m_r) = 110$ min. .

6.24. $a(t) = F/(m_0 - \mu t)$, $a(50) = 0{,}222$ m·s^{-2} ,
$v(t) = F/\mu \cdot \ln[m_0/(m_0 - \mu t)]$, $v(50) = 10{,}5$ m·s^{-1} .

7. Mechanika pevných těles.

7.1. $E_e = {}^1/_2\, m\, E\, \varepsilon^2 / \rho = 40$ J , ρ je hustota oceli.

7.2. $\Delta l = 4\pi^2 f^2\, m\, l_0 / (F_1/\Delta l_1 - 4\pi^2 f^2 m) = 16$ mm .

7.3. $\sigma_T = {}^1/_2\, \rho\, \omega^2 (l^2 - x^2)$.

7.4. $T = {}^1/_2\, m\, \omega^2\, l \cdot (1 - r^2/l^2)$, $\Delta l = {}^1/_3\, \rho\, \omega^2\, l^3 / E = 0{,}096$ mm .

7.5. x $\approx l\,[mg / (2\pi\, E\, d^2)]^{1/3} = 3{,}5$ cm , l - vzdálenost závěsů, d - průměr drátu, $g = 9{,}81$ m·s^{-2} .

7.7. $d = 2\sqrt{F\,l_0/(\pi \Delta l\, E)} = 1{,}78$ mm ,

$$\Delta d = \frac{2(2G - E)}{2G}\sqrt{\frac{F\,\Delta l}{\pi E l_0}} = -2{,}37 \cdot 10^{-4} \text{ mm} .$$

7.8. $\Delta V = a_0^2\, l_0 \cdot (\sigma/E)\,(3G - E)/G = 12$ mm^3 .

7.10. $d_{min} = [16P / (2\pi^2 f\, \tau_d)]^{1/3} = 2{,}24$ cm , $\delta = 16\, l\, P / (\pi^2 f d^4 G) = 3{,}9°$.

7.11. $f_m = \sqrt{2\sigma_p/\rho}\,/\pi l = 82{,}4$ Hz , σ_p je mez pevnosti.

7.12. $p_m = [(r_1 - r_2)/r_2] \cdot \sigma_p = 4{,}3$ MPa .

8. Mechanika tekutin.

8.1. $\rho = 3\rho_k / 8 = 300$ kg·m^{-3} .

8.2. $x = a\,(1 - \rho/\rho_v) = 3{,}36$ cm , a - délka strany průřezu .

8.3. $V = F_G / [(\rho_v - \rho_d)\, g] = 2{,}0$ m^3 , $g = 10$ m·s^{-2} .

8.4. $h = (m_1 + m_2) / (S\rho_k) = 36$ cm .

8.5. $m_Z = {}^{4\pi}/_3 \cdot [r_2^3\, \rho_k - \rho_p\,(r_2^3 - r_1^3)] = 0{,}283$ kg , ρ_p - hustota materiálu plováku.

8.6. $\rho_k = \rho_v + F_G / (a^3 g) = 2\,510$ kg·m^{-3} < 7 800 kg·m^{-3} = ρ_{ocel} ⇒ krychle má dutiny .

8.7. $t = \sqrt{2h\rho/g(\rho_v - \rho_d)}$; kulička: $t = 0{,}62$ s , bublina: $t = 0{,}02$ s .

8.9. $F = \rho g a \cdot h^2 / 2 = 6 \cdot 10^4$ N ; $x = h/3$ od spodní hrany.

8.10. $h = (p - p_b)/\rho g = 1\,969$ m, $p_b = 0{,}1$ MPa.

3.33. Úhlová souřadnice bodu na povrchu řemenice závisí při otáčení na čase číselnou rovnicí v SI

$\varphi(t) = 1 + t + t^2 + t^3\,, \quad t \in \langle 0; \infty)$ s .

Určete poloměr řemenice, víte-li, že v okamžiku 2 s byla velikost obvodové rychlosti řemenice 20,4 m·s^{-1}. Jak velké bylo v tomto okamžiku tečné zrychlení a kolik otáček řemenice vykonala během prvých dvou sekund ?

Řešení :

$\varphi(t) = 1 + t + t^2 + t^3$, $t_1 = 2$ s, $v(t_1) = 20{,}4$ m·s^{-1}; $R = ?$, $a_t(t_1) = ?$, $N\langle 0; t_1\rangle = ?$

Potřebné vztahy pro velikost obvodové rychlosti v a úhlové rychlosti ω

$v = \omega \cdot R\,, \quad \omega = |\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t|\,, \quad v = |\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t| \cdot R\,.$

Potom

$R = v / |\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t| = v / (1 + 2t_1 + 3t_1^2) = 20{,}4/17 \text{ m} = 1{,}2 \text{ m}\,.$

Podobně pro velikosti a_t a ε tečného a úhlového zrychlení

$a_t = \varepsilon \cdot R\,, \quad \varepsilon = |\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}t^2|\,, \quad a_t = |\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}t^2| \cdot v / |\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t|\,.$

Číselně: $a_t = (2 + 6t_1)\, v / (1 + 2t_1 + 3t_1^2) = 14 \cdot 20{,}4/17 \text{ m·s}^{-2} = 16{,}8 \text{ m·s}^{-2}$.

Počet otáček vypočteme z úhlu $\varphi\langle 0;t_1\rangle$ otočení řemenice do okamžiku t_1

$N = \varphi\langle 0; t_1\rangle / 2\pi = (t_1^3 + t_1^2 + t_1 + 1 - 1)/2\pi = 14/2\pi \approx 2{,}2$ ot .

Řemenice má poloměr 1,2 m, za dvě sekundy vykoná přibližně 2,2 otáčky a velikost tečného zrychlení na jejím obvodu je 16,8 m·s^{-2} na konci 2. s.

3.34. Částice se pohybuje po kružnici poloměru R = 0,1 m tak, že její úhlová souřadnice φ závisí na čase t vztahem

$\varphi(t) = \mathrm{A}t^3 + \mathrm{B}t$, kde A = 2 rad·s^{-3}, B = 4 rad·s^{-1}, $t \in \langle 0; \infty)$ s .

Určete:

a) velikost dostředivého zrychlení částice na konci druhé sekundy,

b) velikost tečného zrychlení v témž okamžiku,

c) okamžik t_2, kdy celkové zrychlení svírá s radiusvektorem úhel 0,75 π rad.

3.35. Úhel otočení setrvačníku závisí na čase vztahem

$\varphi(t) = \mathrm{k}_1 t - \mathrm{k}_2 t^3$, kde $t \in \langle 0; \infty)$ s, k$_1$ = 24 rad·s^{-1}, k$_2$ = 2 rad·s^{-3}.

Stanovte:

a) okamžik, ve kterém se setrvačník zastaví,

b) průměrnou úhlovou rychlost a průměrné úhlové zrychlení od okamžiku t_0 (t_0 = 0 s) do okamžiku zastavení,

c) úhel, o který se setrvačník za tuto dobu otočil,

d) počet otáček, které přitom vykonal.

3.36. Sekundová ručička hodinek je 3× kratší než minutová. Vypočtěte poměr velikostí obvodových a úhlových rychlostí koncových bodů těchto ručiček.

3.37. Frekvence otáčení setrvačníku klesla z f_1 = 900 ot/min na f_2 = 800 ot/min za dobu Δt = 5 s. Stanovte úhlové zrychlení setrvačníku a počet otáček opsaných za uvedenou dobu. Kolik sekund ještě uplyne do zastavení setrvačníku?

3.38. Ventilátor se otáčel s frekvencí f_0 = 900 otáček za minutu. Po vypnutí pohonu se otáčel rovnoměrně zpomaleně a po vykonání N = 75 otáček se zastavil. Jaká doba uplynula od vypnutí do zastavení?

3.39. Setrvačník, jehož úhlové zrychlení ε = 5 rad·s^{-2} je konstantní, se za Δt = 5 s otočil o úhel $\Delta\varphi$ = 75 rad. Jak dlouho byl již v pohybu (před začátkem pětisekundového intervalu), jestliže se rozbíhal z klidu ?

3.40. a) Kolik otáček za minutu musí konat ultracentrifuga, aby velikost normálového zrychlení bodu ve vzdálenosti r = 1 cm od osy byla 300 000× větší než normální tíhové zrychlení g_n ?

b) Jak velké je normálové zrychlení bodu na obvodu bubnu automatické pračky, který koná f = 600 otáček za minutu? Průměr bubnu je $2r$ = 40 cm.

3.41. Hmotný bod se pohybuje po kružnici poloměru 5 m rychlostí, jejíž velikost závisí na čase vztahem $v(t)$ = a·t, kde a = 0,5 m·s^{-2}. Vypočtěte velikost celkového zrychlení pohybu a úhel, který svírají vektory rychlosti a zrychlení v okamžicích t_1 = 1,0 s a t_2 = 4,0 s.

Řešení :

$v(t) = \mathrm{a}\cdot t$, a = 0,5 m·s^{-2}, R = 5 m ; $a_c(1) = ?$, $a_c(4) = ?$, úhel$(\vec{a}_c, \vec{v}) \equiv \beta = ?$

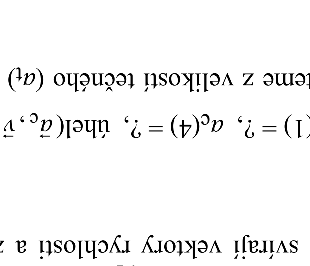
Velikost a_c celkového zrychlení vypočteme z velikostí tečného (a_t) a normálového (a_n) zrychlení

$$a_c = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}\,, \text{ kde } a_t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \mathrm{a}\,, \; a_n = v^2/R = \mathrm{a}^2 t^2/R\,.$$

$$a_c(t) = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{a}^4 t^4/R^2} = \mathrm{a}\sqrt{1 + \mathrm{a}^2 t^4/R^2}\,.$$

Číselně: $a_c(1) = 0{,}5 \cdot \sqrt{1 + 0{,}5^2 1^2 / 5^2}$ m·s^{-2} = 0,5 m·s^{-2}, $a_c(4)$ = 0,94 m·s^{-2}.

Úhel β mezi vektory rychlosti a zrychlení je zároveň úhlem mezi tečným a celkovým zrychlením. Podle náčrtku potom platí



Obr. 3.3

$\tan\beta = a_n/a_t = \mathrm{a}^2 t^2/(R\cdot \mathrm{a}) = \mathrm{a}\cdot t^2/R \;\Rightarrow\; \beta(t) = \arctan(\mathrm{a}\cdot t^2/R)\,,$

5.12. $v = \dfrac{m + M}{m}\sqrt{2gh} = 281 \text{ m·s}^{-1}\,.$

5.13. $\langle F\rangle = G^2 v^2 / (2m\,s\,g^2) = 10{,}8$ kN .

5.14. $v = m_2 v_2 \cdot (\cos\alpha) / (m_1 + m_2) = 1{,}52 \text{ m·s}^{-1}\,.$

5.15. $\vec{v} = (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) / (m_1 + m_2) = (19\vec{i} - 3\vec{j})/6 \text{ m·s}^{-1}$, $v_x = 3{,}17 \text{ m·s}^{-1}$.

5.16. $\vec{v} = -(11/3)\,\vec{v}^{\,0}$, $v = 3{,}7 \text{ m·s}^{-1}$, $-\Delta E_k = 282$ J .

5.17. $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 = v_0\vec{i}$, $\vec{v}_{2,3} = v_0\vec{i} \pm \sqrt{3}\,v_0\vec{j}$, $v_1 = v_0$, $v_2 = v_3 = 2v_0$, $E_1 = E_0/3$, $E_2 = E_3 = 4E_0/3$, $E_e = 2E_0$.

5.19. A$_2$ ≡ [0; ±2√2; 0] ; $\vec{r}_S$ = (-1/2; ±2√2/5; √3/10) .

5.20. S ≡ [0; 2R/π] (počátek ve středu půlkružnice).

5.21. S ≡ [0; (2R^2/l) · sin (l/2R)] .

5.22. x_T = (√3 a b − a^2) / (2a√3 − 8b) ; není.

5.23. y_S = 3R/8, volíme-li počátek souřadné soustavy ve středu podstavy polokoule.

5.24. $y_S = v/3$. **5.25.** $y_S = v/4$.

5.26. $J = m_1 m_2 l^2 / (m_1 + m_2) = 1{,}65$ kg·m^2 .

5.28. $J_S = {}^1/_2\, m R^2 = 0{,}2$ kg·m^2 . **5.29.** $J = {}^{39}/_{72}\, m R^2 = 0{,}158$ kg·m^2 .

5.30. $J = {}^1/_{12}\, m a^2$. **5.31.** $J = {}^2/_5\, m R^2$.

5.32. $L = {}^1/_2\, m g v_0 t^2 \cdot \cos\alpha$; $L_v = (m v_0^3 / 2g)\cdot\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha = 37$ kg·m^2·s^{-1}.

5.34. $a = \dfrac{m_z g}{m_o + m_z} = 1{,}78 \text{ m·s}^{-2}\,.$

5.35. $t = \sqrt{2h(J_r / R + m_v R)/(m_v g R)} = 9{,}1$ s .

5.36. $a = g / (3m/2m_1 + 1) = 1{,}4$ m·s^{-2} .

5.37. a) $\omega(t) = g\cdot t / [R\,(1 + M/2m)]$, b) $E_k(t) = m g^2 t^2 / [2\,(1 + M/2m)]$.

5.38. $M = \pi\, m R^2 f_0 / t = -1{,}09$ mN·m .

5.39. $\Delta t = \dfrac{2\pi^2 J f^2}{\langle P\rangle} = 6\,662$ s , $M = J\,2\pi f \omega_1 = 1{,}85\cdot 10^5$ N·m .

5.40. $\Delta t = E_{k1} / \pi f_1 M = 5{,}1$ s . **5.42.** $l_r = {}^2/_3\, l = 1{,}33$ m .

5.43. a) $a = \frac{\sqrt{2}}{2} R = 0{,}071$ m , b) $T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}R}{g}} = 0{,}75$ s .

5.44. $a = m\,g\,(\sin\alpha)\,R^2 / (m R^2 + J)$,

koule: $J = {}^2/_5\, mR^2$, $a = {}^5/_7\, g \cdot \sin\alpha$,

válec: $J = {}^1/_2\, mR^2$, $a = {}^2/_3\, g \cdot \sin\alpha$,

obruč: $J = mR^2$, $a = {}^1/_2\, g \cdot \sin\alpha$,

největší velikost zrychlení na téže nakloněné rovině má koule;

koule: $v = \sqrt{10gh/7} = 3{,}74$ m·s^{-1} , válec: $v = \sqrt{4gh/3} = 3{,}63$ m·s^{-1} ,

obruč: $v = \sqrt{gh} = 3{,}13$ m·s^{-1} .

5.45. $E_{kr} = \dfrac{4\pi^2 M_Z R_Z^2}{5T^2} = 2{,}6\cdot 10^{29}$ J , $E_{kt} = 2{,}7\cdot 10^{33}$ J .

5.46. $E_k = {}^3/_4\, m v^2 = 24$ J .

5.47. $E_{kc} = E_{kt} + E_{kr} = v^2 (m + m_k) / 2 = 266$ J .

5.48. $W = \Delta E_k = 2\pi^2 J f^2$, a) $W = 15{,}8$ kJ , b) $W = 3{,}95$ kJ .

5.50. $\Delta f = (J_1/J_2 - 1) f_1 = -0{,}71$ Hz , $W = 2\pi^2 J_1 f_1^2 (J_1/J_2 - 1) = -56$ J .

5.51. a) $f_2 = (1 + 2m_S/m_k) f_1 = 22 \text{ min}^{-1} \cong 0{,}37$ Hz ,

b) $W = \Delta E_k = 2m_S\,(1 + m_S/m_k)\,(\pi R f_1)^2 = 163$ J .

5.52. $\omega = m_1\omega_1 / (m_1 + m_2) = 3{,}33$ rad·s^{-1} ,

$-\Delta E_k = m_1 m_2 R^2 \omega_1^2 / [4\,(m_1 + m_2)] = 15$ J .

5.53. $v = \sqrt{6gl} = 7{,}7$ m·s^{-1} .

6. Gravitační pole. Pohyb těles s proměnnou hmotností.

6.1. $F_g = G\cdot M_Z^2 / (81\cdot 60^2\cdot R_Z^2) = 2{,}0\cdot 10^{20}$ N .

6.2. a) $g_M = (0{,}0123 / 0{,}273^2)\cdot g_Z = 1{,}62$ m·s^{-2} ,

b) $g_C = G\,M_C / R_C^2 = 0{,}039$ m·s^{-2} , svoji tíhu pak už snadno spočítáte ,

c) $h = R_Z\,[\sqrt{g_0/g_h} - 1] = 7\,740$ km , g_0 - zrychlení pro $h = 0$.

6.4. $M_Z = (r^3 / G)\,[\,2\pi\,(1 + \tau/T) / \tau\,]^2 = 5{,}97\cdot 10^{24}$ kg, kde T je doba jednoho otočení Země, τ - zadaná doba.

6.5. $M_1 + M_2 = 4\pi^2 d^3 / (GT^2) = 4{,}0\cdot 10^{30}$ kg .

6.6. $T = \sqrt{3\pi/G\rho}$; $T_1 = 3^h 58{,}5'$, $T_2 = 3^h 18'$, $T_3 = 1^h 24'$, ρ je hustota planety.

6.7. a) Tethys 11,36 km·s^{-1}, Dione 2,728 dne, 10,05 km·s^{-1}, Titan 15,92 dne, 5,58 km·s^{-1} , b) $M_{Sat} = 4\pi^2 r_T^3 / (G\,T_T^2) = 5{,}71\cdot 10^{26}$ kg .

6.8. a) $h_{st} = (R_Z + h)\,(T_{st} / T)^{2/3} - R_Z = 35{,}7$ Mm ,

b) $T_M = T\,[r_M / (R_Z + h)]^{1{,}5} = 27{,}6$ dne , c) $v = 2\pi\,(R_Z + h) / T = 7{,}74$ km·s^{-1}.

Těleso urazí za prvních 10 sekund dráhu 23,7 metru a na konci desáté sekundy má zrychlení o velikosti 0,15 m·s^{-2}.

3.29. Těleso se pohybuje z klidu s rovnoměrně rostoucím tečným zrychlením tak, že v čase t_1 = 4 s má zrychlení velikost a_1 = 20 m·s^{-2}. Určete velikost dráhy, kterou těleso do tohoto okamžiku urazilo a velikost jeho konečné rychlosti.

***3.30.** Výrobce automobilů uvádí u svého výrobku tyto údaje pro brzdění: z rychlosti v_0 = 280 km·h^{-1} je automobil schopen zastavit na vodorovné suché asfaltové dráze délky s_z = 150 m během tří sekund. Jakým způsobem automobil brzdí? Vyšetřete následující modely pohybu:

a) pohyb rovnoměrně zpomalený,

b) pohyb, u kterého je velikost zpomalení úměrná době brzdění,

c) pohyb, při kterém velikost rychlosti klesá podle vztahu: $v(t) = v_0 - k\sqrt{t}$ (v_0 = 280 km·h^{-1} a t [s] je doba od počátku brzdění, k [m·s$^{-3/2}$]- konstanta).

Který z pohybů nejlépe odpovídá parametrům uvedeným výrobcem, tj. pro který z modelů zastaví automobil během udané doby na dráze, co nejlépe odpovídající uvedené ? Pokud vám zbyly síly, zkuste navrhnout model průběhu brzdění, který by se co nejvíce blížil všem udaným hodnotám.

***3.31.** Dva cyklisté se rovnoměrně blíží ke křižovatce z navzájem kolmých směrů. V určitém okamžiku je první cyklista jedoucí rychlostí velikosti 4,0 m·s^{-1} vzdálen od středu křižovatky 50 m , zatímco druhý, jedoucí rychlostí velikosti 3,0 m·s^{-1}, 40 m. Po jaké době bude vzdálenost cyklistů minimální a čemu bude rovna? Domníváte se, že se cyklisté bezpečně minou ?

3.32. Část závodní dráhy se skládá ze dvou přímočarých úseků *1* a *3*, mezi nimiž je zatáčka o poloměru 100 m (úsek *2*). Průběh závislosti velikosti rychlosti automobilu na čase při projíždění jednotlivých úseků je dán číselnými rovnicemi (SI):

1.: $v(t) = 50 - 2t$ $t \in \langle 0;\, 10\rangle$ s ,

2.: $v(t) = 30 + (t-10)^2$ $t \in \langle 10;\, 15\rangle$ s ,

3.: $v(t) = 55 + 2(t-15)$ $t \in \langle 15;\, 25\rangle$ s .

a) Vyšetřete průběh funkce $v = v(t)$ pro $t \in \langle 0;\, 25\rangle$ s a představte si, jakým způsobem projíždí automobil jednotlivé úseky dráhy.

b) Vypočtěte délku jednotlivých úseků.

c) Stanovte průměrnou velikost rychlosti na celé části závodní dráhy.

d) O jaký úhel se mění směr jízdy v zatáčce?

e) Určete průběh velikostí tečného a normálového zrychlení automobilu v závislosti na čase.

f) Ve kterém okamžiku má automobil maximální celkové zrychlení a jak je velké?

g) Je zatáčka klopená?

Číselně: $\beta(1) = \arctan(0{,}5\cdot 1^2/5) = 5{,}7°$, $\beta(4) = 58{,}0°$.

Velikost celkového zrychlení s časem roste, na konci 1. sekundy pohybu je rovna 0,5 m·s^{-2}, na konci 4. s: 0,94 m·s^{-2}.

Zároveň vektor zrychlení svírá s vektorem rychlosti rostoucí úhel: v 1. sekundě 5,7° , ve 4. s 58° a v limitě $t \to \infty$ úhel 90° .

3.42. HB se pohybuje po kružnici rychlostí o velikosti $v(t) = at$ (a = 0,5 m·s^{-2} , $t \in (0;\, \infty)$ s). Najděte velikost zrychlení a úhel, který svírá zrychlení s vektorem rychlosti v okamžiku, kdy bod proběhl právě 1/10 délky kružnice od počátku pohybu.

3.43. HB se začíná pohybovat po kružnici poloměru R = 10 cm s konstantním tečným zrychlením velikosti a_t = 0,4 cm·s^{-2}. Určete:

a) velikosti tečného, normálového a celkového zrychlení v čase t_1 = 5 s ,

b) v jakém čase svírá vektor zrychlení s vektorem rychlosti úhel β = 60° ,

c) jakou dráhu proběhl bod do tohoto okamžiku,

d) o jaký úhel se přitom otočil průvodič, spojující bod se středem kružnice,

e) jak velké je úhlové zrychlení pohybu průvodiče.

3.44. Polohový vektor $\vec{r}$ popisující pohyb hmotného bodu závisí na čase t podle vztahu $\vec{r}(t) = (R\cdot\cos\omega t\,;\ R\cdot\sin\omega t\,;\ 0)$, kde R = 2 m, $\omega = \pi/2$ s^{-1}.

a) Určete okamžitou rychlost (obecně a pak v okamžiku t_1 = 2 s),

b) určete velikost vektoru rychlosti,

c) určete směr okamžité rychlosti jednotkovým vektorem,

d) určete okamžité zrychlení a jeho velikost,

e) dokažte, že pro daný pohyb jsou polohový vektor a vektor rychlosti navzájem kolmé,

f) určete velikosti tečného a normálového zrychlení,

g) zjistěte o jaký pohyb se jedná,

h) určete poloměr křivosti trajektorie pohybu.

4.42. a) $W = (F_1\cdot\cos\alpha - F_2)\,s$ = 25,2 kJ, $\langle P\rangle = \sqrt{\dfrac{(F_1\cdot\cos\alpha - F_2)^3 s}{2m}}$ = 471 W,   b) $P(t) = (F_1\cdot\cos\alpha - F_2)^2\,t/m$ = 176 W, $\langle P\rangle$ = 88 W.

4.43. $\langle P\rangle = ½\, m\, v_0\, g f$ = 2,0 W .   **4.44.** $F = \dfrac{\eta P}{2\pi R f}$ = 42,4 N .

4.45. $P = (6m/5t)\cdot(g\,h + v^2/2)$ = 3 725 W , g = 10 m·s^{-2}.

4.46. a) $p = m\,g/k$ = 0,049 m, $v_m = \sqrt{g(2h + mg/k)}$ = 7,70 m·s^{-1} ,

b) $p_m = m\,g/k + \sqrt{(mg/k)^2 + 2mgh/k}$ = 0,59 m .

4.47. $F_v = 3\,m\,g$ = 4 415 N , $a = 3g$.

4.48. $P = \dfrac{9\; m\cdot s^2}{8\;(\Delta t)^3}$ = 703 kW , $v_k = \dfrac{3\,s}{2\cdot\Delta t}$ = 75 m·s^{-1} .

4.49. $u = v\,\sqrt{m p_1/2F_1}$ = 0,10 m .

4.51. a) r_r = 2a/b ; ano ,   b) F_m = −b^3/27a^2 .

4.52. a) $\vec{F} = -\mathbf{grad}\, E_p = -2\,(a x\,\vec{i} + b y\,\vec{j})$,   b) není, neb a ≠ b .

4.54. a) $E(r_0) = -N\,k\,A\,(e^2/r_0)\,(1 - \rho/r_0)$,   b) $n\,\rho = r_0$.

4.55. $E(r_0) = -(k\,A\,e^2/r_0)\,(1 - 1/n) = -1{,}282\cdot 10^{-18}$ J = −8,01 eV .

r / nm	0,2	0,22	0,25	0,281	0,30	0,35	0,40	0,50
E₁ / eV	10,72	–1,93	–7,16	–8,01	–7,88	–7,08	–6,27	–5,04
E₂ / eV	1,73	–4,11	–7,33	–8,01	–7,89	–7,11	–6,28	–5,04

5. Mechanika SHB a tuhého tělesa.

5.1. a) F_A = 9,8 N, F_B = 17,0 N,   b) F_A = 19,6 N, F_B = 27,7 N, c) F_A = 53,6 N, F_B = 65,6 N .

5.4. $d = l/6$ = 1,0 m .

5.5. $F_{1,2}$ = 32,5 N, $F_{3,4}$ = 12,5 N , g = 10 m·s^{-2} .

5.7. $F = m\,g + ½\, m\,\omega^2\, l$ = 78,9 N .

5.9. $\dfrac{v'}{v} = \dfrac{1 - m/M}{1 + m/M} = \dfrac{11}{13}$, $\dfrac{E'_k}{E_k} = \left(\dfrac{v'}{v}\right)^2 = \left(\dfrac{11}{13}\right)^2$, $M \cong 12m$.

5.10. $\vec{v}\,' = -\vec{v}\cdot(2 - n^2)/(6 - n^2)$; při a) $n < \sqrt{2}$, b) $n = \sqrt{2}$, c) $n > \sqrt{2}$.

5.11. $v_1 = [(m_1 + m_2)/m_1]\cdot\sqrt{2fgs}$ = 595 m·s^{-1}.

6.9. $v_I = \sqrt{\dfrac{G\cdot M_Z}{R_Z + h}}$ = 7,6 km·s^{-1} ; v_I – 1. kosmická rychlost (výška 500 km).

6.10. $\Delta T = T_1\cdot[\sqrt{1 + M_M/M_Z} - 1]$ = 4,02 hodiny .

6.11. $T = T_Z\cdot 2^{-2,5}$ = 64,5 dne , T_Z je doba oběhu Země kolem Slunce.

6.12. a) $v_k = v_I = \sqrt{GM_Z/(R_Z + h_1)}$ = 7,5 km·s^{-1} ,

b) $v_t = \sqrt{2GM_Z\left(\dfrac{1}{R_Z + h_t} - \dfrac{1}{R_Z + h_1}\right)}$ = 3,6 km·s^{-1} ,

c) $a = v_t^2/2h_t$ = 351 m·s^{-2} ,

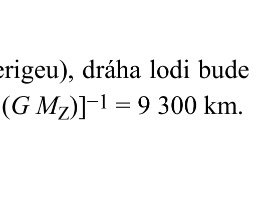
d) $v_2 = v_1/(1 - m_k/m)$ = 8,3 km·s^{-1} (rychlost v perigeu), dráha lodi bude eliptická s velkou poloosou a = $[2/(R_Z + h_1) - v_2^2/(G\,M_Z)]^{-1}$ = 9 300 km.

6.13. $h = R_Z\cdot\{\sqrt{K(R_Z)/K(h)} - 1\}$ = 57 400 km .

6.14. $\vec{K}_c = \vec{0}$ pro x = 0,9 d, měřeno od středu Země.

6.16. $\varphi(P) = -2Gm/R^2\cdot[\sqrt{R^2 + a^2} - a]$, $K(P) = 2Gm/R^2\cdot[1 - a/\sqrt{R^2 + a^2}\,]$,

Nápověda: $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx = \sqrt{x^2 + a^2}$.



6.17. Představme si nejprve tenkou sférickou vrstvu látky (obrázek). Sestrojíme kužel s malým vrcholovým úhlem a vrcholem v bodě A. Plochy elementů vyřezaných kuželem ve vrstvě jsou v poměru $dS_1 : dS_2 = r_1^2 : r_2^2$. Hmotnosti elementů jsou přímo úměrné velikostem ploch. Proto síly, které k nim přitahují částici umístěnou v bodě A jsou stejně velké a mají opačný směr. Další úvahy jsou již evidentní.

6.18. a) $E_{ka} = -\Delta E_p = m\,g_Z\,R_Z\cdot H/(R_Z + H)$,

b) $E_{kb} = \lim\limits_{H\to\infty} E_{ka} = m\,g_Z\,R_Z$ = 62,6 MJ , g_Z je zrychlení na povrchu Země.

6.19. a) $h = v_0^2\,R_Z/(2g_Z\,R_Z - v_0^2)$, $v_{II} = \sqrt{2g_Z R_Z}$ = 11,2 km·s^{-1} (druhá kosmická rychlost),

b) $½\, m v_0^2 = A\cdot(1/x_0 - 1/x_m) \;\Rightarrow\; x_m$ = 2,0 m .

6.20. $E_c = -½\, G\,M_S\,M/r$, E_c (Země) = −2,7 · 10^{33} J .

6.21. $v(m) = u\cdot\ln[m_0/m]$ = 2,1 km·s^{-1} .

6.22. $m_p = m_r\,[\exp(v_I/u) - 1]$ = 1 292 kg , v_I = 7,9 km·s^{-1} je první kosmická rychlost.

4.7. Těleso hmotnosti m bylo vrženo z nulové výšky pod úhlem α k horizontální rovině počáteční rychlostí $\vec{v}_0$. Zanedbejte odpor vzduchu a najděte

a) změnu vektoru hybnosti tělesa a její velikost za prvních t sekund pohybu,

b) změnu velikosti hybnosti za prvních t sekund pohybu,

c) velikost změny vektoru hybnosti za celou dobu pohybu.

Číselně řešte pro hodnoty: $\alpha = 37°$, $v_0 = 15\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $m = 1$ kg, $t = 1{,}2$ s.

4.8. Na částici o hmotnosti 0,1 kg pohybující se rovnoměrně přímočaře rychlostí $\vec{v}_0 = (5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ začala v okamžiku $t_0 = 0$ s působit stálá výsledná síla $\vec{F}_v = (3\vec{i} + 2\vec{j})$ N. Určete hybnost částice v okamžicích $t_0 = 0$ s a $t_1 = 2$ s, včetně její velikosti.

***4.9.** Na nepohybující se částici hmotnosti $m = 3$ kg začala v čase $t_0 = 0$ s působit výsledná síla, měnící se s časem podle vztahu $\vec{F}_v(t) = \vec{A}\, t\,(\tau - t)$, kde $\vec{A} = (3; 4)\ \mathrm{N{\cdot}s^{-2}}$ je konstantní vektor, $\tau = 3$ s. Najděte:

a) hybnost částice v okamžiku, kdy velikost síly klesne na nulu,

b) průměrnou sílu, která by způsobila stejnou změnu hybnosti jako zadaná síla za dobu $t \in \langle 0\,;3 \rangle$ s,

c) celkovou dráhu, kterou částice za tuto dobu proběhne.

4.10. Tenisový míček, vyhovující předpisům Mezinárodní tenisové federace, musí při volném pádu z výšky $h_1 = 254$ cm na pevnou podložku odskočit minimálně do výšky $h_2 = 135$ cm (a maximálně do výšky 147 cm).

a) V jakém poměru se mění velikost rychlosti míčku při minimálním odrazu?

b) Vypočítejte velikost změny hybnosti míčku při prvním odrazu.

c) Jaký celkový impuls udělí míček podložce v průběhu všech odrazů, předpokládáme-li, že výška odskoku se snižuje ve stále stejném poměru?

Předepsaná (minimální) hmotnost míčku je $m = 56{,}7$ g. Odpor vzduchu zanedbejte.

4.11. Ocelová kulička hmotnosti $m = 50{,}0$ g padá z výšky $h_1 = 1{,}0$ m na horizontální desku. Vypočtěte celkový impuls, který předá kulička desce během opakovaných odrazů, jestliže se při každém odrazu sníží velikost rychlosti kuličky na $\mu = 80\%$ předchozí hodnoty. Odpor vzduchu neuvažujte.

***4.12.** Řetízek hmotnosti $m = 1{,}0$ kg a délky $l = 1{,}40$ m visí na niti tak, že se svým dolním koncem dotýká stolu. Po přerušení nitě dopadl řetízek na stůl. Najděte velikost celkového impulsu, který byl při pádu předán stolu.

***4.13.** Tělísko začíná klouzat z vrcholu nakloněné roviny o délce základny $d = 2{,}1$ m. Součinitel tření mezi tělesem a rovinou je $f = 0{,}14$. Při jakém sklonu roviny dosáhne tělísko základny v nejkratším čase? Kolik to bude představovat sekund?

4. Dynamika hmotného bodu.

4.2. a) $\vec{F} = (0\,;0\,;0) = \vec{0}$, žádná síla nepůsobí,

b) $\vec{F} = -m\omega^2\,[a_1 \cdot \sin(\omega t)\,\vec{i} + a_2 \cdot \cos(\omega t)\,\vec{j}\,]$,

c) $|\vec{F}| = m{\cdot}2a{\cdot}\omega{\cdot}\sqrt{1 + 4\omega^2 t^4}$.

4.3. a) $a = 1/3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$; b) $F_{l\leftrightarrow v} = 2/3 \cdot 10^4$ N, $F_{v\leftrightarrow v} = 1/3 \cdot 10^4$ N.

4.4. $t = v\dfrac{m_l + 2m_v}{m_l\, g\, f} \cong 41$ s.

4.5. $F(t) = m \cdot \sqrt{a_t^2 + (v_0 + a_t\, t)^4 / R^2}$; $F(0) = 1\,059$ N, $F(20) = 4\,137$ N.

4.6. a) $\Delta m = 2m_1\, a\,/\,(a + g) = 97$ kg, b) $F_{vz} = m_1\,(g - a) = 9\,310$ N.

4.7. a) $\Delta\vec{p} = (0; -mgt) = (0; -11{,}8)\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$;

$|\Delta\vec{p}| = mgt = 11{,}8\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$,

b) $\Delta|\vec{p}| = m \cdot \left\{\sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \cdot \sin\alpha + g^2t^2} - v_0\right\} = -2{,}71\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$,

c) $|\Delta\vec{p}_c| = 2mv_0 \cdot \sin\alpha = 18{,}05\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$.

4.8. $\vec{p}_0 = (0{,}5\vec{i} + 0{,}4\vec{j} + 0{,}3\vec{k})$, $\vec{p}_1 = (6{,}5\vec{i} + 4{,}4\vec{j} + 0{,}3\vec{k})$,

$p_0 = 0{,}707$ N·s, $p_1 = 7{,}85$ N·s.

4.9. a) $\vec{p} = (13{,}5\,;18)\ /\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}/$, $t_z = \tau$,

b) $\langle F \rangle = 7{,}5$ N, c) $s\langle 0; t_z\rangle = 11{,}25$ m.

4.10. a) $v_2/v_1 = \sqrt{h_2/h_1} = 0{,}73$,

b) $|\Delta\vec{p}| = m\sqrt{2g}\,(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}) = 0{,}69\ \mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}$,

c) $I_c = m\sqrt{2gh_1}\,\dfrac{1+k}{1-k} = 2{,}55$ N·s, kde $k = \sqrt{(h_2/h_1)}$.

4.11. $I_c = m\sqrt{2gh_1}\,\dfrac{1+\mu}{1-\mu} = 2{,}0$ N·s, $\mu = 0{,}8$.

4.12. $I_c = \sqrt{8gl} \cdot m/3 = 3{,}5$ N·s.

4.13. $\alpha = \operatorname{arc\,tan}\{f + \sqrt{f^2 + 1}\} = 49°$, $t = 0{,}99$ s.

4.15. $s\langle 0; t_s\rangle = ½\,R\,\sqrt{(fg/a_t)^2 - 1} = 60{,}0$ m.

4.16. a) $F_h = 2\,m\,v\,\Omega_z \cdot \sin\varphi = 3{,}8$ kN, Ω_z – úhlová rychlost rotace Země, φ – zeměpisná šířka,

b) $F_h = m\,\Omega_z\,(\Omega_z R_z \cdot \cos\varphi \pm 2v) \cdot \sin\varphi$, R_z je poloměr Země, znaménko (+) platí při pohybu vlaku ze západu na východ, $F_h = 33$ kN, znaménko (−) při opačném směru pohybu, $F_h = 25$ kN.

3.30. Pro jednotlivé modely brždění vychází potřebná brzdná dráha:

a) $s = v_0\, t_z/2 = 117$ m, b) $s = 2v_0\, t_z/3 = 155{,}6$ m, c) $s = v_0\, t_z/3 = 77{,}8$ m; nejlépe vyhovuje model b).

„Nejdokonalejší" je model s následující závislostí velikosti rychlosti na čase:

$v(t) = v_0 - 10{,}76 \cdot \{t^{1{,}8}\}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; pak $s = 150$ m.

3.31. $t_{min} = (d_1\, v_1 + d_2\, v_2)\,/\,(v_1^2 + v_2^2) = 12{,}8$ s (d_i a v_i – počáteční vzdálenosti a velikosti rychlostí obou cyklistů), $d_{min} = 2$ m.

3.32. a) brzdí na úseku *1*, zrychluje na *2,3*; b) $s_1 = 400$ m, $s_2 = 191{,}7$ m, $s_3 = 650$ m; c) $v_p = 49{,}7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; d) $\varphi = 1{,}92$ rad $\cong 110°$; e) úsek *1*: $a_t = -2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $a_n = 0$, *2*: $a_t = 2\,(t - 10)$; $a_n = [30 + (t-10)^2]^2/100$; *3*: $a_t = 2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$; $a_n = 0$, f) $t = 15$ s; $a_t = 10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$; $a_n = 30{,}25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$; $a = 31{,}9\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

3.34. a) $a_n = R\,(3At^2 + B)^2 = 78{,}4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$,

b) $a_t = R \cdot 6At = 2{,}4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, c) tento případ nenastane.

3.35. a) $t_z = \sqrt{k_1/3k_2} = 2$ s,

b) $\omega_p\langle 0; 2\rangle = 16\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$; $\varepsilon_p\langle 0;2\rangle = -12\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-2}}$,

c) $\varphi\,\langle 0; 2\rangle = 32$ rad, d) $N\,\langle 0;2\rangle = 5$.

3.36. $v_s : v_m = 20:1$; $\omega_s : \omega_m = 60:1$.

3.37. $\varepsilon = 2\pi\dfrac{f_2 - f_1}{\Delta t} = -2{,}1\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-2}}$; $N \cong 71$; $t_z = 45$ s (40 s).

3.38. $t_z = 2N/f_0 = 10$ s. **3.39.** $t_1 = 0{,}5$ s.

3.40. a) $f = \dfrac{60}{2\pi}\sqrt{\dfrac{3 \cdot 10^5\, g_n}{r}} = 164\,000\ \mathrm{min^{-1}}$, b) $a_n = 4\pi^2\, f^2 r = 790\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

3.42. $a_c = a\sqrt{1 + (4\pi n)^2} = 0{,}80\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$; $\alpha = \arctan(4\pi\, n) = 51{,}5°$, kde $n = 1/10$.

3.43. a) $a_t(5) = a_n(5) = 4\ \mathrm{mm{\cdot}s^{-2}}$; $a_c(5) = 5{,}6\ \mathrm{mm{\cdot}s^{-2}}$,

b) $t_1 = \sqrt{\dfrac{R \cdot \tan\beta}{a_t}} = 6{,}6$ s, c) $s\langle 0; 6{,}6\rangle = 8{,}7$ cm,

d) $\varphi\,\langle 0; 6{,}6\rangle = 0{,}87$ rad, e) $\varepsilon = 0{,}04\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-2}}$.

3.44. a) $\vec{v}(t) = \pi\,[-\sin(\pi t/2)\,;\cos(\pi t/2)\,]$; $\vec{v}\,(2) = (0\,;-\pi)$,

b) $|\vec{v}(t)| = 3{,}14\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ = konst., c) $\vec{v}^{\,0} = [-\sin(\pi t/2)\,;\ \cos(\pi t/2)\,]$,

d) $\vec{a}(t) = -\pi^2/2 \cdot [\cos(\pi t/2)\,;\ \sin(\pi t/2)\,]$; $|\vec{a}(t)| = 4{,}93\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ = konst.,

e) $\vec{v}(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$, tedy $\vec{v}$ je vektor kolmý k vektoru $\vec{r}$,

f) $a_n = 4{,}93\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$; $a_t = 0$,

g) v = konst. $\Rightarrow$ pohyb rovnoměrný, r = konst. $\Rightarrow$ pohyb po kružnici,

h) $r = R = 2$ m.

4.14. Závaží hmotnosti 3 kg, připevněné na provazu délky 1 m, se otáčí ve svislé rovině. Určete nejmenší velikost úhlové rychlosti rotace, při níž se provaz přetrhne, jestliže jeho únosnost je 90 N.

Řešení :

$m = 3$ kg, $l = 1$ m, $T_k = 90$ N; $\omega = ?$

Nejprve proveďme rozbor sil : Na závaží působí v našem modelu pouze dvě síly - tíhová $\vec{F}_G$ a tahová síla $\vec{T}$ provazu mířící k místu zavěšení provazu. Tento směr považujme za směr osy o_x. Pak x – ové souřadnice těchto sil jsou

$$T_x = T, \qquad F_{G_x} = -mg \cdot \cos\beta\,,$$

kde β je odchylka provazu od svislého směru.

Nyní sestavíme pohybovou rovnici závaží pro x – ovou souřadnici:

$$T - mg \cdot \cos\beta = ma_x\,,$$

kde a_x je x-ová souřadnice normálového zrychlení, proto $a_x = l\omega^2$. Po dosazení za a_x do pohybové rovnice máme

$$T - mg \cdot \cos\beta = ml\omega^2\,.$$

Odtud lze určit velikost tahové síly $T = mg \cdot \cos\beta + ml\omega^2$. V dolní úvrati je $\cos\beta = 1$ a ω je maximální, proto je velikost T tahové síly v tomto případě také maximální. Tedy k přetržení provazu při minimální úhlové rychlosti může dojít v dolní úvrati, kdy velikost tahové síly dosáhne kritické hodnoty T_k, tj.

$$T_k = mg + ml\omega^2\,.$$

Nyní vypočteme hledanou minimální velikost úhlové rychlosti

$$\omega = \sqrt{(T_k - mg)/ml}\,.$$

Číselně: $\omega = \sqrt{(90 - 3 \cdot 9{,}81)/3 \cdot 1}\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} = 4{,}49\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.

K přetržení provazu dojde, jestliže velikost úhlové rychlosti závaží dosáhne hodnoty přibližně 4,5 rad·s⁻¹.

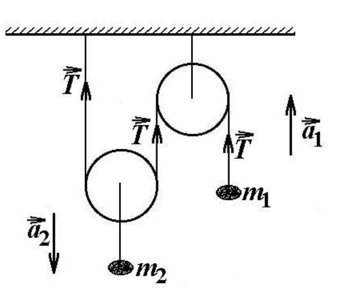
4.15. Automobil se pohybuje s konstantním tečným zrychlením velikosti $a_t = 0{,}62\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ po kruhové dráze poloměru $R = 40$ m umístěné ve vodorovné rovině. Součinitel tření mezi koly a vozovkou je $f = 0{,}2$. Jakou dráhu ujede auto bez smyku, jestliže jeho počáteční rychlost byla nulová ?

***4.16.** Vlak hmotnosti $m = 2\,000$ t se pohybuje rychlostí velikosti $v = 54\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ v oblasti se zeměpisnou šířkou $\varphi = 60°$. Určete horizontální složku tlakové síly vlaku na koleje, jestliže trať míří

a) ve směru poledníku, b) podél rovnoběžky.

4.17. Na soustavě kladek (viz *obrázek 4.1*) jsou přes vlákno zavěšena dvě tělesa o hmotnostech m_1, m_2.

Určete zrychlení, jimiž se tělesa pohybují a sílu napínající vlákno, včetně jejich velikostí. Hmotnost kladek a tření zanedbejte!



Obr. 4.1

Řešení:

Podle předpokladu uvažujeme u daných těles pouze tíhové a tahové síly. Na těleso č.2 (volnou kladku) působí tahová síla $2\vec{T}$ a tíhová síla $m_2\vec{g}$, na těleso č.1 tahová síla $\vec{T}$ a tíhová $m_1\vec{g}$. Pohybové rovnice pro obě tělesa jsou následující:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T} , \qquad m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + 2\vec{T} . \qquad (1), (2)$$

Je-li například $m_2 > 2m_1$, pak těleso č.2 klesá a č.1 stoupá. Obecně, je-li posuv tělesa č.2 roven $\vec{r}$, pak posuv tělesa č.1 je $-2\vec{r}$. Zrychlení $\vec{a}_1$ a $\vec{a}_2$ jsou podle pohybových rovnic konstantní a vztah mezi nimi určují druhé derivace posuvů $\vec{r}$ a $-2\vec{r}$ podle času

$$\vec{a}_2 = \mathrm{d}^2\vec{r}/\mathrm{d}t^2 , \qquad \vec{a}_1 = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2\,(-2\vec{r}) = -2\,(\mathrm{d}^2\vec{r}/\mathrm{d}t^2) = -2\vec{a}_2 .$$

Zrychlení $\vec{a}_2$ vypočteme následovně: do rovnice (1) dosadíme za $\vec{a}_1$ a celou rovnici vynásobíme číslem -2. Vzniklou rovnici sečteme s rovnicí (2). Po úpravě obdržíme

$\vec{a}_2 = (m_2 - 2m_1)\cdot\vec{g}\,/\,(4m_1 + m_2)$ – zrychlení tělesa č.2 ,

$\vec{a}_1 = (4m_1 - 2m_2)\cdot\vec{g}\,/\,(4m_1 + m_2)$ – zrychlení tělesa č.1 ,

$\vec{T} = -3m_1\cdot m_2\cdot\vec{g}\,/\,(4m_1 + m_2)$ – tahová síla vlákna.

Velikosti vypočtených veličin jsou

$$a_1 = 2\cdot|2m_1 - m_2|\cdot g\,/\,(4m_1 + m_2) , \qquad a_2 = |m_2 - 2m_1|\cdot g\,/\,(4m_1 + m_2) ,$$

$$T = 3m_1 m_2 g\,/\,(4m_1 + m_2) .$$

4.18. Na vodorovném stole leží kvádřík hmotnosti m_1 = 1 kg, který je spojen lankem, vedeným přes kladku umístěnou na hraně stolu, s volně visícím závažím m_2 = 2 kg. Stanovte zrychlení, s jakým se dá soustava do pohybu, je-li součinitel tření mezi kvádříkem a deskou stolu f = 0,3. Jakou silou bude namáháno lanko? Hmotnost lanka i kladky zanedbejte.

4.19. Odvoďte, jak závisí brzdná dráha automobilu na sklonu vozovky α (měřeno od horizontály) při jízdě dolů i vzhůru při daném součiniteli vlečného tření f mezi pneumatikami a vozovkou a dané velikosti rychlosti automobilu v_0 . Řešte obecně a pak pro speciální hodnoty α = 10°, v_0 = 72 km·h⁻¹, f = 0,2.

c) $y(x) = -4x/3 + 5$ (rovnice přímky) ,

d) trajektorie protíná souřadné osy v bodech A = [0; 5], B = [3,75; 0], v_p = = AB / $(t_A - t_B)$ = 3,96 m·s⁻¹ .

3.20. Doporučujeme znovu si projít příklady **2.13.** a **3.11.**

a) $y(x) = -ax^2 + bx$, $a = g/(2v_0{}^2\cdot\cos^2\alpha)$, $b = \tan\alpha$,

b) $t_c = 2v_0\cdot(\sin\alpha)\,/\,g$,

c) $y_m = (v_0\cdot\sin\alpha)^2/2g$, $\quad x_m = v_0{}^2\cdot(\sin 2\alpha)\,/\,g$, $\quad \alpha' = 76°$,

d) počátek: $R_p = v_0{}^2/(g\cdot\cos\alpha)$, vrchol: $R_v = (v_0\cdot\cos\alpha)^2/g$,

e) $a_t(t) = g\cdot(g\,t - v_0\cdot\sin\alpha)\,/\,\sqrt{v_0^2 - 2v_0\cdot\sin\alpha\cdot gt + g^2t^2}$.

3.21. a) $y(x) = -3x^2/4$,

b) $\vec{v}(t) = 2\vec{i} - 6\{t\}\,\vec{j}$ /m·s⁻¹/, $\vec{a}(t) = -6\,\vec{j}$ /m·s⁻²/, $v = 2\sqrt{1+9\{t^2\}}$ m·s⁻¹, a = 6 m·s⁻² ,

c) $\alpha(t) = \arctan(1/3t)$,

d) $\langle\vec{v}\rangle = \Delta\vec{r}/\Delta t = 2\vec{i} - 3\{t\}\,\vec{j}$, $\quad |\langle\vec{v}\rangle| = \sqrt{4+9\{t^2\}}$.

3.22. a) $(y-2)^2 + x^2 = 4$, kružnice , $\qquad$ b) $s\langle 0; 5\rangle$ = 15,7 m ,

c) $\Delta\vec{r}\,\langle 0; 5\rangle$ = (2; 2) /m/ , $\quad |\Delta\vec{r}\,|$ = 2,8 m ,

d) $\vec{a}\cdot\vec{v} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \pi/2$, nezávisí na čase .

3.23. a) $y(x) = -2{,}5\,x^2 + x$,

b) $\vec{v}(t)$ = (2; 2 [1 − 10{t}]) , $\vec{a}(t)$ = (0; −20) ,

c) t_1 = 0,2 s , $\quad$ d) $\Delta\vec{r}\,\langle 0; 0{,}2\rangle$ = (0; 4; 0) /m/.

3.24. a) $x(t_1) = v_0\,t_1\cdot[1 - t_1/2\tau]$, $x(3)$ = 0,21 m, $x(6)$ = 0,24 m, $x(10)$ = 0 m, $x(20)$ = −2,0 m ,

b) $t_{2,3,4}$ = 1,13 s , 8,87 s , 10,92 s ,

c) $s\langle 0; 4\rangle$ = 0,24 m , $\quad s\langle 0; 8\rangle$ = 0,34 m ,

d) $v_p\langle 0; 4\rangle$ = 0,06 m·s⁻¹ , $\quad v_p\langle 4; 8\rangle$ = 0,025 m·s⁻¹ .

3.26. a) $x(t) = 2\{t\} - 0{,}5$, $\quad y(t) = 3 - \{t^2\}$,

b) $\vec{r}(t) = (2\,\{t\} - 0{,}5)\,\vec{i} + (3 - \{t^2\})\,\vec{j}$,

c) $\vec{v}(t) = 2\vec{i} - 2\{t\}\,\vec{j}$, $\quad v(t) = 2\sqrt{1+\{t^2\}}$,

d) $s\langle 0; 6\rangle = 2\displaystyle\int_0^6 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ = 37 m ,

e) $\vec{a}(t) = -2\,\vec{j}$, $\quad a(t) \equiv |\vec{a}(t)|$ = 2 m·s⁻² .

3.27. $t = (a - 2C)\,/\,(6D)$ = 12 s , a – velikost zrychlení .

3.29. $v(t_1) = a_1 t_1/2$ = 40 m·s⁻¹ , $\quad s\langle 0; t_1\rangle = a_1 t_1^2/6$ = 53,3 m, $\quad t_1$ = 4 s.

4.18. $a = (m_2 - m_1 f)\,g\,/\,(m_1 + m_2)$ = 5,56 m·s⁻² ,

$T = m_1 m_2\,g\cdot(1+f)\,/\,(m_1 + m_2)$ = 8,50 N .

4.19. $s_d = \dfrac{v_0^2}{2\,g\,(f\cdot\cos\alpha - \sin\alpha)}$ = 870 m ; $\quad s_v = \dfrac{v_0^2}{2\,g\,(f\cdot\cos\alpha + \sin\alpha)}$ = 55 m .

4.21. $d(t) = l_0\cdot\cosh\left[\sqrt{g/l}\cdot t\right]$.

4.23. Obecné řešení: $v(t) = (mg/K)\cdot[1 - \exp(-Kt/m)] = 20\cdot[1 - \exp(-t/2)]$,
$s(t) = mgt/K + (m/K)^2 g\cdot[\exp(-Kt/m) - 1] = 20t + 40\cdot[\exp(-t/2) - 1]$.

Pomoc: lineární diferenciální rovnice 1. řádu s pravou stranou typu $y' + Py = Q$ (P a Q jsou konstanty) má řešení

$$y(x) = e^{-\int P\,\mathrm{d}x}\cdot\left[C_1 + \int Q\cdot e^{\int P\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right], \quad C_1 - \text{konstanta} .$$

Číselné řešení: po 1,65 s má zrychlení tělesa velikost asi 4,2 m·s⁻², rychlost 11,7 m·s⁻¹, dráhová souřadnice 10 m.

4.24. a) ∞ , b) $s_c = v_0 m/k$ = 500 m, c) $\langle v\rangle = v_0(n-1)\,/\,[n\,(\ln n)]$ = 3,61 m·s⁻¹, viz příklad **4.22.** , d) při volbě Δt = 10 s vyjde $\langle v\rangle$ = 3,73 m·s⁻¹ .

4.25. a) $x_m \approx$ 1,97 m , $\qquad$ b) $t_{0,5} \approx$ 0,8 s .

4.26. Při dosažení maximální rychlosti bude výslednice vnějších sil rovna nule;

$$v_m = \sqrt{\frac{mg}{k\,\pi R^2}} = 144\ \text{m·s}^{-1} .$$

4.27. a) ≈ 0,05 m, ≈ 7,8 m·s⁻¹, b) ≈ 0,65 m .

4.28. $W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$ = −17 J . $\qquad$ **4.29.** $s_2 = s_1\cdot f_1/f_2$ = 180,5 m .

4.30. $W_T = m g f s_2\,/\,(1 - f\cdot\cot\alpha)$ = 0,05 J, kde s_2 je dráha na vodorovné rovině, f – součinitel tření.

4.32. $W\langle 1; 4\rangle$ = 780 J .

4.33. a) W = 16 J, $\quad$ b) W = 80 J; protože práce závisí na tvaru trajektorie, není uvedená síla silou konservativní.

4.34. $W = W_1\cdot[(x_2/x_1)^2 - 1]$ = 450 J , $\quad x_2 = 2x_1$.

4.36. a) W = 1,0 MJ , $\quad$ b) W = 1,063 MJ , $\quad g$ = 10 m·s⁻² .

4.37. $W = \pi R^2\rho g v^2/8$ = 1,54 J , ρ je hustota vody.

4.38. $W = \Delta E_k = ½\,m\,g\,l^2/(l+h)$: $\quad$ 1. 632 J , $\quad$ 2. 590 J , $\quad$ 3. 349 J .

4.39. $P(t) = \dfrac{1}{m}(2t^3 + 3t^5)$, $\quad P(3)$ = 87 W .

4.41. $|\vec{I}\,| = |\Delta\vec{p}| = 2mv\cdot\cos\beta$ = 4 N·s , $\quad \langle F\rangle = I/\Delta t$ = 400 N .

4. Dynamika hmotného bodu.

4.1. Určete, jaká výsledná síla působí na hmotný bod (HB) hmotnosti m, jehož trajektorie je popsána rovnicí:

$\vec{r}(t) = (a_1 t^2 + b_1 t)\,\vec{i} + a_2 t^2\,\vec{j}$, $\;a_1, b_1, a_2$ jsou konstanty, t – čas .

Řešení :

Podle 2. Newtonova zákona v klasické fyzice platí $\vec{F}_v = m\cdot\vec{a}$, proto k určení výsledné síly $\vec{F}_v$ postačuje určit zrychlení $\vec{a}$ z kinematických rovnic trajektorie

$$\vec{a} = \mathrm{d}^2\vec{r}/\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}/\mathrm{d}t\,[(2a_1 t + b_1)\,\vec{i} + 2a_2 t\,\vec{j}\,] = 2a_1\vec{i} + 2a_2\vec{j} ,$$

$$\vec{F}_v = 2m\,(a_1\vec{i} + a_2\vec{j}\,),\ |\vec{F}_v| = 2m\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \text{konst.} .$$

Síla působící na HB je konstantní a má konstantní velikost.

4.2. Určete výslednou sílu, která působí na hmotný bod hmotnosti m, jehož trajektorie je popsána rovnicemi:

a) $x(t) = a_1 t + x_0$, $\quad y(t) = a_2 t + y_0$, $\quad z(t) = 0$;

b) $x(t) = a_1\cdot\sin\omega t$, $\quad y(t) = a_2\cdot\cos\omega t$, $\quad z(t) = 0$;

c) $x(t) = a\cdot\sin(\omega t^2)$, $\quad y(t) = a\cdot\cos(\omega t^2)$, $\quad z(t) = 0$;

kde x_0, y_0, a, a_1, a_2 a ω jsou konstanty.

4.3. Lokomotiva hmotnosti m_l = 10⁴ kg vyvíjí při rozjíždění po vodorovné trati tahovou sílu velikosti F = 10⁴ N. Je připojena k soupravě dvou vagónů, které mají oba stejnou hmotnost m_v = 10⁴ kg .

a) S jak velkým zrychlením se dá celá souprava do pohybu?

b) Jak velkými silami jsou namáhány spojnice mezi částmi soupravy?

4.4. Za jakou minimální dobu při libovolně výkonném motoru může dosáhnout souprava z př. **4.3.** na vodorovných kolejích rychlosti o velikosti v = 72 km·h⁻¹, jestliže součinitel tření mezi koly lokomotivy a kolejnicemi je f = 0,15 ?

4.5. Automobil hmotnosti m = 1 000 kg jede zatáčkou poloměru R = 200 m. Jeho tečné zrychlení má velikost a_t = 1 m·s⁻². Při vjezdu do zatáčky má automobil velikost rychlosti v_0 = 30 km·h⁻¹. Stanovte časový průběh velikosti výsledné síly, která na automobil působí. Určete velikost této síly při vjezdu automobilu do zatáčky a po 20 s jízdy touto zatáčkou.

4.6. Balon celkové hmotnosti m_l = 1 000 kg začal po uvolnění od kotevního stožáru klesat svisle dolů se zrychlením o velikosti a = 0,5 m·s⁻².

a) Určete hmotnost Δm přítěže, kterou bylo nutno vyhodit, aby se balon začal pohybovat se stejně velkým zrychlením orientovaným opačně (vzhůru).

b) Vypočtěte vztlakovou sílu působící na balon.

Odpor prostředí zanedbejte vzhledem k malé rychlosti balonu při startu.

*4.21. Dokonale ohebné lano ležící na desce stolu má přes jeho okraj převis l_0. Určete, jak s časem narůstá délka převislé části lana, když celková délka lana je l a tření lana o desku zanedbáváme.

4.22. Těleso se pohybuje v odporujícím prostředí, kde síla $\vec{F}$ působící proti směru pohybu je úměrná rychlosti tělesa $\vec{F} = -\mathrm{K}\vec{v}$. Sestavte pohybovou rovnici tělesa o hmotnosti m a zjistěte, za jakou dobu klesne velikost rychlosti tělesa na polovinu počáteční hodnoty v_0 a jakou dráhu těleso za tuto dobu urazí.

Pro číselné řešení volte: $m = 1$ kg, K = 5 N·s·m^{-1}, $v_0 = 10$ m·s^{-1}, $\Delta t = 0{,}01$ s.

Řešení :

Pohybová rovnice bude mít podle zadání tvar

$$m \cdot \mathrm{d}^2x(t) / \mathrm{d}t^2 = -\mathrm{K}\, v_x(t)\,,$$

při počátečních podmínkách $x(0) = 0$, $v_x(0) = v_0$.

Rovnici je možno upravit na tvar (označíme-li pro stručnost v_x jako v)

$$m \cdot \mathrm{d}v(t) / \mathrm{d}t = -\mathrm{K}\, v(t)\,, \quad \text{nebo } \mathrm{d}v/v = -\mathrm{K}/m \cdot \mathrm{d}t\,;$$

jejím řešením je výraz

$$v(t) = \mathrm{C} \cdot \exp(-\mathrm{K}t/m)\,.$$

Pro konstantu C plyne z počáteční podmínky pro rychlost: C = v_0.

Závislost velikosti rychlosti tělesa na čase má potom tvar

$$v(t) = v_0 \cdot \exp(-\mathrm{K}t/m)\,.$$

Nechť rychlost klesne na polovinu počáteční hodnoty v čase τ. Potom platí

$$\mathrm{K}\tau/m = \ln[v_0/v(\tau)] = \ln 2\,, \text{ odkud } \tau = m\cdot(\ln 2)/\mathrm{K} = 1\cdot(\ln 2)/5 \text{ s} = 0{,}14 \text{ s}.$$

Dráhu, kterou těleso urazilo za prvních τ sekund vypočteme jako určitý časový integrál velikosti rychlosti

$$s\langle 0;\tau\rangle = \int_0^\tau v_0 \cdot \exp(-\mathrm{K}\,t/m)\,\mathrm{d}t = v_0\,(-m/\mathrm{K}) \cdot \exp(-\mathrm{K}t/m)$$

v mezích 0 a τ.

Číselně: $s\langle 0;0{,}14\rangle = 10\cdot(-1/5)\cdot\left[\exp(-5t/1)\right]_0^{0{,}14} = 1{,}0\,\mathrm{m}$.

Velikost rychlosti tělesa klesne na $v_0/2$ za 0,14 s, těleso urazí dráhu 1 m.

Pro numerické řešení zvolíme schéma $x_i = x_{i-1} + v_{i-1}\cdot\Delta t$, $v_i = v_{i-1} + a_{i-1}\cdot\Delta t$, kde velikost zrychlení a_i vypočteme z pohybové rovnice: $a_i = -\mathrm{K}\, v_i / m$.

Pro $i = 0$ přitom platí: $x_0 = 0$ m, $v_0 = 10$ m·s^{-1}, $a_0 = -5\cdot 10/1 = -50$ m·s^{-2},

pro $i = 1$: $x_1 = 0 + 10\cdot 0{,}01 = 0{,}1$ m, $v_1 = 10 - 50\cdot 0{,}01 = 9{,}5$ m·s^{-1}, $a_1 = -5\cdot 9{,}5 = -47{,}5$ m·s^{-2},

pro $i = 2$: $x_2 = 0{,}1 + 9{,}5\cdot 0{,}01 = 0{,}195$ m, $v_2 = 9{,}5 - 47{,}5\cdot 0{,}01 = 9{,}025$ m·s^{-1}, $a_2 = -5\cdot 9{,}025 = -45{,}125$ m·s^{-2} atd.

Výsledky pro jednotlivé kroky numerického řešení jsou zachyceny v tabulce :

i	t_i / s	x_i / m	v_i / m·s^{-1}	a_i / m·s^{-2}
0	0	0	10	-50
1	0,01	0,1	9,5	-47,5
2	0,02	0,195	9,025	-45,125
3	0,03	0,285	8,574	-42,869
4	0,04	0,371	8,145	-40,725
5	0,05	0,452	7,738	-38,690
6	0,06	0,529	7,351	-36,755
7	0,07	0,603	6,983	-34,917
8	0,08	0,673	6,634	-33,169
9	0,09	0,739	6,302	-31,512
10	0,10	0,802	5,987	-29,934
11	0,11	0,862	5,688	-28,438
12	0,12	0,919	5,404	-27,018
13	0,13	0,973	5,134	-25,670
14	0,14	1,024	4,877	

Výsledky dosažené při numerickém řešení jsou ve velmi dobré shodě s analytickým řešením. Pokles velikosti rychlosti na polovinu počáteční hodnoty byl dosažen v časovém intervalu 0,13÷0,14 s, uražená dráha je velmi blízká dříve vypočtené hodnotě 1,0 m .

4.23. Těleso hmotnosti $m = 1$ kg padá svisle dolů na zem vlivem tíhového pole ($g = 10$ m·s^{-2}). Prostředí mu klade odpor, který je úměrný prvé mocnině rychlosti (konstanta úměrnosti K = 0,5 N·s·m^{-1}). Jaké jsou časové závislosti dráhové souřadnice a velikosti rychlosti tělesa, když počáteční rychlost je nulová a počáteční dráhová souřadnice též ?

Úlohu řešte nejprve obecně a potom numericky stanovte, jak dlouho trval pád z výše 10 m (časové kroky volte 0,2 s a poslední krok 0,05 s).

4.24. Člun hmotnosti m se pohybuje po jezeře rychlostí $\vec{v}_0$. V čase $t = 0$ s byl vypnut motor. Předpokládejte, že odpor vody proti pohybu člunu je úměrný jeho okamžité rychlosti: $\vec{F} = -\mathrm{K}\vec{v}$, a vypočtěte

a) dobu pohybu člunu s vypnutým motorem,

b) celkovou dráhu do zastavení,

c) průměrnou rychlost člunu za dobu, v jejímž průběhu klesne rychlost z počáteční velikosti n – krát.

Zadané hodnoty: $m = 500$ kg, $v_0 = 5$ m·s^{-1}, K = 5 N·s·m^{-1}, $n = 2$.

d) Vhodně zvolte časový interval a úkol c) řešte číselně.

Výsledky

1. Fyzikální veličiny a jednotky. Rozměrová analýza.

1.1.

Veličina	Rozměr		Def. rovnice	Jednotka	Zákl. jedn.
kmitočet	T^{-1}	*od*	$f = 1/T$	1 Hz	s^{-1}
impuls síly	LMT^{-1}	*od*	$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\,\mathrm{d}t$	1 N·s	kg·m·s^{-1}
tepelná kapacita	ML^{2}T$^{-2}\Theta^{-1}$	*od*	$K = \lim_{\delta t\to 0}(Q/\delta t)$	1 J·K^{-1}	kg·m^{2}s^{-2}K^{-1}
povrchové napětí	MT^{-2}	*od*	$\tau = \mathrm{d}F/\mathrm{d}l$	1 N·m^{-1}	kg·s^{-2}
svítivost	J	*z*	- - -	1 cd	cd
úhlová rychlost	T^{-1}	*od*	$\vec{\omega} = \mathrm{d}\vec{\phi}/\mathrm{d}t$	1 rad·s^{-1}	s^{-1}
abs. index lomu	1	*od*	$N = c / v$	- - -	- - -

1.3. Nejmenší hustotu (4 500 kg·m^{-3}) má 4. látka.

1.4. *Pořadí:* 1. stříbro, 2. mosaz, 3. beton, 4. glycerin, 5. mléko .

1.6. a) $E = 2{,}52$ GJ; $\langle P\rangle = 29{,}2$ kW, b) $E = 406{,}0$ kcal = 0,472 kWh, c) 1,98× .

1.7. a) papír: 233 °C = 506 K, voda: 212 °F, měď: 1 984 °F ,
b) –0,058 m, c) E(ocel) = 2,90·10^7 psí, E(mosaz) = 1,44·10^7 psí, E(olovo) = = 2,3·10^6 psí .

1.8. a) Sp = 10 l/100 km , b) 80 sudů , c) c ≈ 61,09 \$/g nebo 1116 Kč/g (dle kursovního lístku ze dne 8. XI. 2011) .

1.10. a) dim p = MLT^{-1}, b) dim σ = L^{-1}, c) dim E = ML^{2}T^{-2}, d) dim P = = ML^{2}T^{-3}, e) dim α^r = 1 .

1.12. $f = \mathrm{k}\cdot\dfrac{1}{l}\sqrt{\dfrac{F}{\tau}} = 128$ Hz .

1.13. $n_V = \rho N_A / M = 5{,}862\cdot 10^{28}$ m^{-3}, ρ - hustota Ag, N_A - Avogadrova konstanta, M - molární hmotnost.

1.14. $t_k = \sqrt{R^3/(GM)}$; t_k(Slunce) ≅ 1 600 s .

1.15. $r_S = \mathrm{k}\cdot G\,m / c^2 = 11\,900$ m .

1.16. $a = 5/6$, $b = -1/2$, $c = -1/3$, $f = \mathrm{k}\cdot p^{5/6}\rho^{-1/2}E^{-1/3}$.

1.17. $r = h^2 / (4\pi^2 m_e \mathrm{K}\, e^2) = 5{,}29\cdot 10^{-11}$ m (tak zvaný *Bohrův poloměr*) .

2. Vektory a skaláry ve fyzice.

2.1. a) $\vec{v} = (5\vec{i})$ m·s^{-1}, b) $\vec{v} = (0; -5; 0)$ m·s^{-1}, c) $\vec{v} = (5\sqrt{2}/2; 5\sqrt{2}/2; 0)$ m·s^{-1},
d) $\vec{v} = (5\sqrt{3}/3; 5\sqrt{3}/3; 5\sqrt{3}/3)$ m·s^{-1} .

2.2. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (3; 0; -4)$ N ; $|\vec{F}| = 5$ N .

2.4. a) ***AB*** = ***EF*** = ***HG*** = ***DC***, ***AE*** = ***DH*** = ***CG*** ,
b) ***AD***, ***FG*** a ***EH*** , c) ***DS*** ,
d) ***AE*** + ***AD*** = ***AH*** = ***BG*** , e) ***HD*** – ***HC*** = ***CD*** = ***BA*** = ***FE*** = ***GH*** ,
f) |***AS***| = √3, |***AS*₀**| = √2, |***AD*** + ***AE***| = 2 √2, |***HD*** – ***HC***| = 2,
g) ***AB*** · ***EF*** = 4, ***AB*** · ***BC*** = 0, ***CA*** · ***CH*** = 4, ***CS*₀** · ***CG*** = 0, ***CS*₀** · ***S*₀*G*** = –2, ***BH*** · ***BD*** = 8, ***AF*** · ***AC*** = 4, h) úhel(***AC***, ***AB***) = 45,0° = π/4 rad, úhel(***DF***, ***DG***) = 35,26° = 0,615 rad, úhel(***CA***,***CH***)= 60,0° = π/3 rad, úhel(***HA***,***EF***) = = 90,0° = π/2 rad, úhel(***SF***,***SH***) = 109,47° = 1,91 rad ,
i) ½***AB*** × ***BC*** = ***BF*** = ***CG*** = ***AE*** = ***DH***, ***FG*** × ½***EH*** = **0**, ***EF*** × ½***GF*** = ***EA*** = = ***FB*** = ***GC*** = ***HD***, ***CS*₀** × ½***S*₀*D*** = ½***EA*** = ½***FB*** = ½***GC*** = ½***HD*** ,
j) (***AB*** + ***BC*** + ***CG***) – ***AB*** = ***BC*** + ***CG*** = ***BG*** = ***AH***, (***AB*** × ***BC***) · ***BF*** = 8, ***AB***×***SS*₀** = ***FG*** = ***AD*** = ***BC*** = ***EH***, ***AF*** × ***AB*** = 2***AD*** = 2***BC*** = 2***EH*** = 2***FG*** , ***AB*** × ***AC*** = 2***CG*** = 2***AE*** = 2***DH*** = 2***BF*** .

2.5. a) $|\vec{a} + \vec{b}| = 13{,}0$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 8{,}06$; b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 26$, $\vec{a}\times\vec{b} = 26\vec{k}$ = = (0; 0; 26); c) $\beta = 45°$; d) $\vec{a}^{\,0} = (1; 5; 0)/\sqrt{26}$; e) $\vec{c}^{\,0} = (0; 0; 1)$.

2.6. a) $\vec{A}\times(3\vec{B} - \vec{C}) = (7; -5; -14)$, $|\vec{A}\times(3\vec{B} - \vec{C})| = 16{,}43$;
b) $\beta = 66{,}42° = 1{,}16$ rad, c) $\beta = 26{,}57° = 0{,}464$ rad .

2.7. a) Tělesovou úhlopříčku vyjádříme jako vektor (a ; a ; a) a hranu krychle např. jako vektor (a ; 0 ; 0), pak
β = arc cos [a^2 / (a^2 √3)] = 54,74° = 0,955 rad,
b) stěnovou úhlopříčku vyjádříme např. jako vektor (a ; a ; 0), pak
β = arc cos [2a^2 / (a^2 √6)] = 35,26° = 0,615 rad .

2.8. a) $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (6; -2; 9)$ /N/, $|\vec{F}| = 11$ N ,
b) $\vec{M} = \boldsymbol{AB}\times\vec{F} = (-5; -6; 2)$ /N·m/, $|\vec{M}| = 8{,}062$ N·m .

2.10. $\Delta V = -126$ cm^3, $\Delta V/V_0 = -0{,}002 = -0{,}2$ % .

2.12. $\{\vec{v}(t)\} = 2\cdot[-\sin(0{,}4\{t\}); \cos(0{,}4\{t\})]$, $\{\vec{a}(t)\} = -0{,}8\cdot[\cos(0{,}4\{t\}); \sin(0{,}4\{t\})]$, $|\vec{r}(t)| = 5{,}83$ m = konst., $|\vec{v}(t)| = 2$ m·s^{-1} = konst. ⇒
⇒ pohyb rovnoměrný po kružnici.

2.13. $\vec{v}(t) = (v_0\cdot\cos\alpha\,;\ v_0\cdot\sin\alpha - g\cdot t\,;\ 0)$, $\vec{a}(t) = (0\,; -g\,; 0)$.

2.14. $d(t) = |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)| = v_0 t\sqrt{2(1-\sin\alpha)}$, $d(1{,}7) = 22{,}0$ m ,

$$d(\text{dopad}) = \frac{2v_0^2\cdot\sin\alpha\cdot\sqrt{2(1-\sin\alpha)}}{g} = 57{,}1\,\mathrm{m}\,,$$ v_0 je velikost počáteční rychlosti.

3. Kinematika hmotného bodu.

3.2. $v_p = \dfrac{2\,v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 16\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. **3.3.** $v_2 = \dfrac{2\,v_p\,v_1}{3\,v_1 - v_p} = 40\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

3.4. $v_1 = a_1 \cdot \Delta t_1 = 12\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $a_3 = \dfrac{0 - v_1}{\Delta t_3} = -1{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$,

$s = a_1 \Delta t_1\,(\Delta t_1 + 2\Delta t_2 + \Delta t_3)/2 = 750\,\text{m}$,

$v_p = \dfrac{a_1 \Delta t_1\,(\Delta t_1 + 2\Delta t_2 + \Delta t_3)}{2\,(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3)} = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

3.5. a) $s = 500$ m , b) $t_k = t_c\sqrt{1 - 4v_p/(a\,t_c)} = 15$ s , c) $v_k = 25\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

3.6. $h = \frac{1}{2} g t^2 = 57{,}2$ m , $t = 3{,}414$ s . **3.7.** $h = 19{,}4$ m .

3.8. $h = 3\,g\,t_1^2 = 73\,575$ m, $t_c = \left(3 + \sqrt{6}\right)\cdot t_1 = 272$ s , $t_1 = 50$ s .

3.9. $s = 57{,}8$ m .

3.10. a) $\langle 0;\,1\rangle$/s/ - rovnoměrně zrychlený, $\langle 1;\,3\rangle$ - rovnoměrný, $\langle 3;\,4\rangle$ - rovnoměrně zpomalený, $\langle 4;\,6\rangle$-rovnoměrně zrychlený, $\langle 6;\,7\rangle$ - rovnoměrně zpomalený, $\langle 7;\,8\rangle$ - klid , d) $s\langle 0;\,8\rangle = 6$ m; bod se nachází v počátku: $x\,(8) = 0$.

3.12. $t_{1,2} = \sqrt{2v_0^2 \pm 2\sqrt{v_0^4 - g^2 d^2}}\,/\,g = 24{,}6$ s nebo 42,3 s (podle velikosti elevačního úhlu).

3.13. a) $t = 3{,}19$ s , $d = 1\,021$ m ; b) $v = 321\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; c) $d' = 50$ m .

3.14. $d = v\sqrt{2h/g} = 0{,}64$ m, $v_k = \sqrt{v^2 + 2gh} = 6{,}3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

3.15. $d = 2\sqrt{2}\,v_0^2/g = 269$ m ; ve skutečnosti působí odpor prostředí.

3.17. $a_1 = a_2$ pro okamžik $t^* = 0{,}235$ s ,

$v_1(t) = 4 + 16t - 48t^2$, $v_1(t^*) = 5{,}11\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,

$v_2(t) = 2 - 8t + 3t^2$, $v_2(t^*) = 0{,}284\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

3.18. $\vec{v}(t) = 2\{t\}\,\vec{i} - 3\{t^2\}\,\vec{j}$, $\vec{a}(t) = 2\vec{i} - 6\{t\}\,\vec{j}$,

$v(t) = \{t\}\cdot\sqrt{4 + 9\{t^2\}}$, $a(t) = \sqrt{4 + 36\{t^2\}}$,

$k_1 = -6\{t^2\}\,\vec{k} \neq 0$ (pro $t \neq 0$) , $k_2 = 0$, trajektorie je rovinná křivka, pohyb je nerovnoměrný,

$a_t = \left|\,dv/dt\,\right| = \sqrt{4 + 9\{t^2\}} + 9\{t^2\}/\sqrt{4 + 9\{t^2\}}$,

$a_n = k_1 v^2 = 6\{t\}\,/\,\sqrt{4 + 9\{t^2\}}$, $s\langle 0;2\rangle = 9$ m .

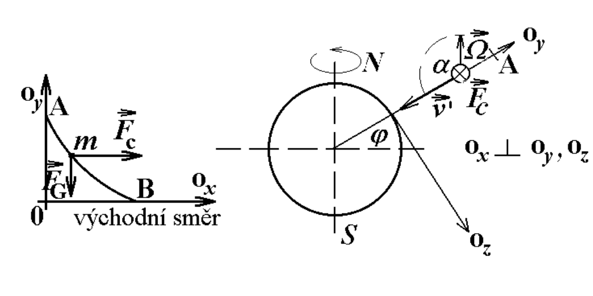
3.19. a) $\vec{v}(t) = t\,(3\vec{i} - 4\vec{j})\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\vec{a}(t) = 3\vec{i} - 4\vec{j}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$,

b) $v(t) = 5\{t\}$, $a(t) = 5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$,

*4.20.** Vypočtěte odchylku tělesa volně padajícího z výšky h na zemský povrch, způsobenou Coriolisovou silou. Tíhové zrychlení považujte za konstantní, odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení :

Souřadný systém orientujeme tak, jak je vyznačeno v obrázcích *4.2a* a *4.2b*, kde OA = = h, OB = d je hledaná odchylka, φ – zeměpisná šířka, $\vec{F}_C$ - Coriolisova síla, působící na těleso hmotnosti m. Označíme-li dále Ω úhlovou rychlost otáčení Země a v' velikost rychlosti padajícího tělesa vzhledem k Zemi, budou ve směrech os o_x a o_y působit výsledné síly (uvážíme-li, že $\alpha = \pi/2 + \varphi$)



Obr. 4.2a *Obr. 4.2b*

$F_{v_x} = m\,a_x = m \cdot d^2x/dt^2 = F_C = 2m\,v'\,\Omega \cdot \sin\alpha = 2m\,v'\,\Omega \cdot \cos\varphi$,

$F_{v_y} = m\,a_y = m \cdot d^2y/dt^2 = -\,m\,g$.

Sestavíme pohybové rovnice ve skalárním tvaru

$$d^2x\,/\,dt^2 = 2v'\,\Omega \cdot \cos\varphi\,, \tag{1}$$
$$d^2y\,/\,dt^2 = -g\,. \tag{2}$$

Z druhé rovnice dostaneme $v' = -\,g\,t$ a $y = -\,\frac{1}{2}\,g\,t^2 + h$.

Pro dobu pádu t_1 platí $y(t_1) = 0$, proto

$$t_1 = \sqrt{2h/g}\;. \tag{3}$$

Řešením rovnice (1) za použití vztahu $v'_y = g\,t$ dostáváme $v_x = g\,t^2\,\Omega \cdot \cos\varphi$ a

$$x(t) = g\,(t^3/3)\,\Omega \cdot \cos\varphi\,. \tag{4}$$

Po dosazení (3) do vztahu (4) je celková odchylka d rovna

$$d = |x(t_1)| = (g/3) \cdot \sqrt{(2h/g)^3} \cdot \Omega \cdot \cos\varphi\,.$$

Odchylka volně padajícího tělesa způsobená pouze Coriolisovou silou roste s výškou a klesá se zeměpisnou šířkou. Na zemském pólu bude nulová.

Jako příklad vypočteme odchylku pro zeměpisnou šířku $\varphi = 50°$. Při pádu z výšky 100 m je

$$d\,(100) = (9{,}81/3) \cdot \sqrt{(2 \cdot 100/9{,}81)^3} \cdot 2\pi/(24 \cdot 3600) \cdot \cos 50° \text{ m} = 0{,}014 \text{ m};$$

při pádu z výšky 1 000 m: $d\,(1\,000) = 0{,}445$ m .

4.25. Při pohybu v gravitačním poli je velikost síly působící na těleso nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti x od centra gravitace: $F = A/x^2$, kde A je konstanta.

Sestavte pohybovou rovnici pro pohyb směrem od gravitačního centra a jejím numerickým řešením zjistěte

a) maximální vzdálenost od centra gravitace, které může těleso dosáhnout,

b) okamžik, kdy velikost rychlosti tělesa poklesne na polovinu počáteční hodnoty.

Volte: A = 1 $\text{N}\cdot\text{m}^2$, $m = 1$ kg, počáteční podmínky: $x_0 = 1$ m, $v_0 = 1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, časový interval v případě a) 0,2 s , b) 0,1 s .

4.26. Určete maximální rychlost, kterou dosáhne volně puštěné těleso ve tvaru koule poloměru $R = 8$ cm a hmotnosti $m = 10$ kg při svém pádu, jestliže předpokládáme, že pro velikost síly odporu vzduchu platí vztah $F_o = k\,S\,v^2$, kde v je velikost rychlosti tělesa vzhledem k vzduchu, S – obsah průmětu tělesa na rovinu kolmou na směr pohybu, k = 0,235 $\text{N}\cdot\text{s}^2\cdot\text{m}^{-4}$.

4.27. Cvičenec hmotnosti $m = 100$ kg dopadne z výšky $h = 3$ m na trampolínu o tuhosti $k = 2\cdot 10^4\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Analyzujte síly působící na cvičence po dopadu, sestavte pohybovou rovnici a jejím numerickým řešením určete

a) při jakém prohnutí trampolíny bude velikost rychlosti cvičence maximální a jaké nabude hodnoty,

b) jaké bude maximální prohnutí trampolíny.

Návod: v případě a) volte časový interval 0,001 s, v případě b) 0,01 s.

4.28. Částice vykonala pohyb v rovině xy z bodu 1 o polohovém vektoru $\vec{r}_1 = (\vec{i} + 2\vec{j}\,)$ m do bodu 2 s vektorem $\vec{r}_2 = (2\vec{i} - 3\vec{j}\,)$ m. Při tom na ni působila síla $\vec{F} = (3\vec{i} + 4\vec{j}\,)$ N. Najděte práci vykonanou silou $\vec{F}$.

4.29. Sportovní automobil jedoucí po suché vodorovné vozovce zabrzdí na dráze $s_1 = 38$ m. Jakou dráhu k zabrždění by potřeboval tentýž automobil jedoucí stejnou rychlostí po zledovatělé vozovce?

Pro suchou vozovku předpokládejte součinitel tření $f_1 = 0{,}95$ a pro zledovatělou $f_2 = 0{,}2$.

*4.30.** Těleso hmotnosti $m = 50$ g klouže s nulovou počáteční rychlostí po nakloněné rovině svírající úhel $\alpha = 30°$ s horizontálou. Po přechodu na vodorovnou rovinu urazí ještě vzdálenost $s_2 = 50$ cm. Vypočtěte práci sil tření na celé dráze tělesa za předpokladu, že součinitel tření je všude $f = 0{,}15$.

*4.31.** Hmotný bod o hmotnosti m opisuje elipsu o parametrických rovnicích: $x\,(t) = a \cdot \cos\,(k\,t)$, $y\,(t) = b \cdot \sin\,(k\,t)$, kde t je čas, k - konstanta, $a{,}b$ – veli-

*10.59.** Jakou okamžitou rychlostí bude led z příkladu **10.58.** dále narůstat, zůstanou-li podmínky z předchozího příkladu zachovány, a bude-li

a) led bez sněhové pokrývky,

b) led pokryt pěticentimetrovou vrstvou sněhu?

Měrná tepelná vodivost sněhu je $\lambda_{\text{snih}} = 0{,}40\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

10.60. Porovnejte tepelné ztráty související s vedením tepla zdí domu o rozměrech 3 × 5 m^2, je-li zeď

a) postavena z cihel o tloušťce 10 cm,

b) navíc pokryta dřevem tloušťky 2 cm,

c) jako v případě b), ale mezi cihly a dřevo je vložena centimetrová vrstva skelné vaty.

Měrné tepelné vodivosti λ cihel, dřeva a skelné vaty jsou po řadě: 0,60, 0,13 a 0,042 $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

d) Zobecněte předchozí výsledky pro případ stěny, tvořené n rovnoběžnými vrstvami tloušťek h_i různých materiálů o měrných tepelných vodivostech λ_i, i = 1, 2, 3,....., n .

Ve všech případech je venkovní teplota 0 °C, teplota uvnitř domu 20 °C.

10.61. a) Pro převoz biologických preparátů byl použit box z pěnového polystyrenu obsahující suchý led (pevný oxid uhličitý) teploty $t_1 = -79$ °C. Tloušťka stěn boxu byla $x = 4$ cm a jeho rozměry 0,3 m × 0,3 m × 0,4 m .

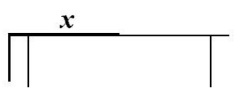
Předpokládejte, že vnější povrch boxu byl udržován na teplotě $t_2 = 20$ °C a vypočtěte, kolik gramů CO_2 musí sublimovat za 1 s, aby se uvnitř boxu udržela konstantní teplota.

b) Jaké množství suchého ledu by bylo nejméně zapotřebí, aby se tepelné podmínky v boxu nezměnily po dobu jednoho dne ?

Měrné skupenské teplo sublimační CO_2 je $l_s = 137\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$, měrná tepelná vodivost polystyrenu 0,008 $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Řešení :

$m = 0{,}8$ kg , $l = 1{,}5$ m ; $W_T = ?$



Označíme: $\tau = m/l$ /kg·m^{-1}/ délkovou hustotu řetízku, x – délku části ležící na stole, $m_x = \tau \cdot x$ hmotnost této části.

Obr. 4.3

Složka F_x síly tření působící proti směru pohybu řetízku je úměrná hmotnosti části ležící na stole

$$F_x = m_x g f = \tau x g f \, ,$$

kde f je součinitel tření mezi řetízkem a deskou stolu, který určíme z podmínky, že řetízek začne klouzat právě tehdy, když 1/3 jeho délky visí přes hranu desky. Odpovídající kritická hodnota x_k je tedy 2/3 l. Na část řetízku, ležící na stole působí ve směru pohybu tíha převislé části, proti působí tření. Z rovnováhy obou sil máme

$$\tau \cdot l/3 \cdot g = \tau \cdot 2l/3 \cdot g f \qquad \Rightarrow \qquad f = 1/2 \, .$$

Práci W_T síly tření vypočteme jako práci proměnné síly

$$W_T = \int_{x_k}^{0} F_x \,dx = \int_{x_k}^{0} \tau g f x \cdot dx = \tau g f \left[x^2/2\right]_{x_k}^{0} = -\tfrac{1}{2}\tau g f x_k^2 =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\tau g f \cdot \tfrac{4}{9} l^2 = -\tfrac{2}{9} m g f l \, .$$

Číselně: $W_T = -\tfrac{2}{9} \cdot 0{,}8 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}5 \ \ J = -1{,}31$ J .

Při sklouznutí řetízku se stolu vykoná síla tření práci –1,31 J.

4.36. Jak velkou práci vykonáme při zvednutí břemene hmotnosti 2 000 kg o 50 m lanem navíjeným na rumpál?
a) Hmotnost lana zanedbáme.
b) Předpokládáme, že 1 m lana má hmotnost 5 kg.

4.37. Válec z neznámého materiálu plave z poloviny ponořen ve vodě (o hustotě $\rho = 10^3$ kg·m^{-3}). Poloměr válce je R = 10 cm, výška v = 20 cm. Vypočítejte práci, kterou je třeba vykonat při vytažení celého válce z vody.

4.38. Porovnejte práci vykonanou silou, kterou sportovci působili na vržená nářadí ve třech atletických disciplínách
1. vrh koulí (m_1 = 7,257 kg, l_1 = 19,40 m),
2. hod diskem (m_2 = 1,99 kg, l_2 = 62,20 m),
3. hod oštěpem (m_3 = 0,806 kg, l_3 = 90,05 m,

za předpokladu, že nářadí byla vrhána pod stejným úhlem 45° z výšky h = 1,8 m nad zemí. Odpor prostředí neuvažujeme, m_i - hmotnosti nářadí a l_i délky vrhů.

4.39. Na těleso hmotnosti m = 9 kg, které bylo původně v klidu, působila po dobu t = 3 s proměnná síla $\vec{F}(t) = 2t\,\vec{i} + 3t^2\,\vec{j}$ (N). Stanovte okamžitý výkon této síly na konci třísekundového intervalu.

4.40. Na hmotný bod, který se pohybuje po trajektorii dané v SI rovnicí $\vec{r}(t) = (t^2\,\vec{i}\,)$ m, působí síla, daná v SI rovnicí $\vec{F}(t) = (2t^2\,\vec{i} + 3t\,\vec{j}\,)$ N, kde t je číselná hodnota času. Určete práci, kterou síla vykoná v době mezi 3. a 6. sekundou a průměrný výkon síly v dané době. Jak velké byly okamžité kinetické energie HB ? Hmotnost HB činí 5 kg.

Řešení :

$\vec{F}(t) = 2t^2\,\vec{i} + 3t\,\vec{j}$, $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i}$, $t_1 = 3$ s, $t_2 = 6$ s , $m = 5$ kg;
$W\langle 3;6\rangle = ?$, $P\langle 3;6\rangle = ?$, $P(3) = ?$, $P(6) = ?$

Práci síly vypočteme podle definice

$$W\langle t_1;t_2\rangle = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} (2t^2\vec{i} + 3t\vec{j}) \cdot 2t\vec{i} \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} 4t^3 \,dt \, .$$

Číselně: $W\langle 3;6\rangle = \left[t^4\right]_3^6 = 1\,215$ J .

Průměrný výkon $P\,\langle 3;6\rangle$ této síly v době $\langle 3;6\rangle$ s vypočteme z práce $W\,\langle 3;6\rangle$ a dané doby

$$P\,\langle 3;6\rangle = W\,\langle 3;6\rangle\,/\,(t_2 - t_1) = 1215\,/\,(6-3) = 405 \text{ W} .$$

Pro okamžitý výkon $P(t)$ platí

$$P(t) = \vec{F}\cdot\vec{v} = (2t^2\,\vec{i} + 3t\,\vec{j}\,)\cdot 2t\,\vec{i} = 4t^3 \, ,$$

Číselně: $P(3) = 4\cdot 3^3$ W = 108 W , $P(6)$ = 864 W.

Okamžitá rychlost HB je dána derivací polohového vektoru $\vec{r}(t)$, tj.

$$\vec{v} = d\vec{r}\,/dt = 2t\,\vec{i} \, .$$

Číselně: $\vec{v}(3) = 6\,\vec{i}$ m·s^{-1} , $\vec{v}(6) = 12\,\vec{i}$ m·s^{-1} .

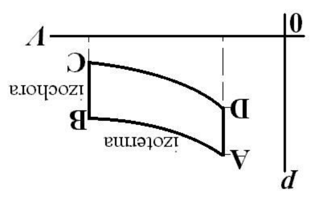
Přírůstek kinetické energie za dobu $\langle 3;6\rangle$ s činí

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}\, m \cdot [v(6)^2 - v(3)^2] = \tfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot (12^2 - 6^2) \text{ J} = 270 \text{ J.}$$

Práce dané síly působící na HB během zadané doby činí 1215 J.
Průměrný výkon síly za tutéž dobu je roven 405 W.
Okamžité výkony jsou $P(3)$ = 108 W, $P(6)$ = 864 W.
Přírůstek kinetické energie během této doby činil 270 J, z čehož plyne, že tento přírůstek kinetické energie HB není roven práci zadané síly působící na HB.

4.41. Jak velký impuls udělí stěna pružné kouli hmotnosti m = 200 g, která na ni narazí pod úhlem β = 60° (měřeno od normály ke stěně) rychlostí velikosti v = 20 m·s^{-1} ? Jak velkou střední silou na sebe koule a stěna působily, jestliže náraz trval Δt = 0,01 s ?

Zobrazte tento děj v $p - T$ diagramu a v $\rho - T$ diagramu (ρ - hustota plynu). Zjistěte, ve kterých fázích kruhového děje plyn přijímá teplo od svého okolí a ve kterých fázích děje plyn teplo odevzdává okolním tělesům.



Obr. 10.2

*10.46.** a) Dokažte, že čtyřdobý spalovací motor (benzinový) má ideální účinnost $\eta = 1 - k^{1-n}$, kde k je kompresní poměr (viz **10.40.**), n – polytropický exponent spalovací směsi. Cykl tohoto motoru se skládá ze dvou izochor (výbuch, výfuk) a dvou polytrop (komprese, expanze).

b) Spalovací motor určitého osobního automobilu spotřebuje za hodinu pro výkon P = 1 kW m = 360 g benzinu o výhřevnosti $q = 4{,}6 \cdot 10^7$ J·kg^{-1}. Kompresní poměr automobilu je k = 6,2 a polytropický exponent benzinové směsi n = 1,2. Vypočtěte ztráty (třením, tepelnou vodivostí, atd.) v procentech dodané energie.

10.47. Carnotův stroj pracuje s účinností η_1 = 40%. Jak se má změnit teplota zásobníku tepla, aby účinnost stroje vzrostla na η_2 = 50% ? Teplota chladiče přitom zůstává stejná (t_2 = 9 °C).

10.48. Jak velkou práci vykoná chladící stroj, který pracuje v Carnotových cyklech, když při teplotě okolí t_1 = 20 °C zmrazí m = 1 kg vody 20 °C teplé na led teploty t_2 = 0 °C ?

10.49. Jaký by měl být nejmenší výkon stroje, který má odebrat velkému množství vody teploty t_1 = 17 °C za jednu sekundu teplo q = 41,9 kJ a odevzdat je tepelnému radiátoru teploty t_2 = 46 °C ?
Jaké celkové množství tepla odevzdá stroj teplejší lázni za jednu sekundu ?

10.50. Jeden kilomol ideálního plynu vykonává kruhový děj, který se skládá ze dvou izochor a dvou izobar. Objem plynu se mění z V_1 = 25 m^3 na V_2 = 50 m^3 a tlak ze p_1 = 101,3 kPa na p_2 = 202,6 kPa. Kolikrát je práce získaná tímto dějem menší, než práce Carnotova kruhového cyklu, jehož izotermy odpovídají maximálním a minimálním teplotám uvažovaného kruhového děje ?

10.51. Určete změnu entropie 1 kg ledu teploty 0 °C, jestliže ho přeměníme na páru teploty 100 °C.

Řešení:

m = 1 kg, T_1 = 273 K, T_2 = 373 K, l_t = 334 kJ·kg^{-1} , l_v = 2,255 MJ·kg^{-1}, c = = 4182 J·kg^{-1}·K^{-1}; ΔS = ?

Označíme změny entropie při jednotlivých proběhlých dějích následovně:

1) rozpuštění ledu ..... ΔS_1 ,

2) ohřev vody z teploty T_1 na teplotu T_2 ..... ΔS_2 ,

3) přeměna vody v páru ..... ΔS_3 .

Pro celkovou změnu ΔS entropie potom bude platit

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 \, . \qquad (1)$$

Pro elementární změnu entropie při vratném ději platí vztah

$$dS = dQ\,/\,T \, ,$$

celkovou změnu entropie vypočteme integrací.
Přírůstek entropie pro změny skupenství (děje 1 a 3)

$$\Delta S_{1,3} = (1/T_{1,2}) \int dQ = (1/T_{1,2})\, m\, l_{t,v} \, ,$$

pro ohřev vody (děj 2)

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{m\,c}{T}\,dT = m\,c \cdot \ln\,(T_2/T_1) \, .$$

Jednotlivé přírůstky ΔS_1, ΔS_2, ΔS_3 sečteme dle vztahu (1) a upravíme

$$\Delta S = m\,[\, l_t\,/\,T_1 + c \cdot \ln\,(T_2/T_1) + l_v\,/\,T_2\,] \, .$$

Číselně: $\Delta S = 1 \cdot [334 \cdot 10^3/273 + 4182 \cdot \ln\,(373/273) + 2{,}255 \cdot 10^6/373]$ J·K^{-1} = 8 574 J·K^{-1} .

Celková změna entropie při přeměně jednoho kilogramu ledu v páru činí 8 574 kilojouly na kelvin.

10.52. Zjistěte změnu entropie ideálního plynu teploty t_1 = 20 °C, tlaku p_1 = 101,3 kPa a objemu V_1 = 2 litry, když se rozepne do vakua na dvojnásobný objem.

10.53. Jak se změní entropie m = 2 g dusíku, jestliže ho zahřejeme z teploty t_0 = = 0 °C na t_1 = 30 °C: a) izobaricky, b) izochoricky? Dusík považujte za ideální plyn!

*10.54.** V nádobě objemu V = 2 m^3 jsou m = 4 kg kyslíku o teplotě t_1 = 29 °C. Jaký je jeho tlak? Jak se změní tlak plynu, když jej při stálém objemu ohřejeme na dvojnásobnou teplotu (t_2 = 58 °C) ? Považujte daný plyn za reálný (konstanty z van der Waalsovy rovnice jsou: a = 0,137 J·m^3·mol^{-1}, b = = 3,17 · 10^{-5} m^3·mol^{-1}).
K jaké změně tlaku by došlo, kdybychom kyslík považovali za ideální plyn ?

*10.55.** Určete vztah pro vnitřní energii reálného plynu splňujícího van der Waalsovu rovnici. Za jakých podmínek bude vnitřní energie tohoto plynu záviset pouze na teplotě (jako u ideálního plynu)? Jaká bude vnitřní energie jednoho molu O$_2$ při teplotě T = 273 K, jestliže budeme považovat kyslík jednou za ideální a podruhé za reálný plyn ? Konstanty a, b - viz příklad **10.54.** .

*10.56. Najděte měrný objem nasycené vodní páry za normálního tlaku, je-li známo, že zmenšení tlaku o Δp = 3,2 kPa vyvolá snížení bodu varu o ΔT = 0,9 K.

*10.57. Vypočtěte měrné skupenské teplo výparné vody při teplotě 100 °C! Měrné objemy páry a vody jsou v_p = 1,674 m³·kg⁻¹ a $v_v = 10^{-3}$ m³·kg⁻¹, tlak nasycených vodních par pro 90°, 100° a 110 °C postupně 70,1 , 101,3 a 143,3 kPa.

*10.58. Na jezeře je vrstva ledu tloušťky 5 cm. Teplota vody pod ledem je 0 °C, průměrná venkovní teplota je –5 °C. Za jak dlouho narostla tato vrstva ledu za nezměněných teplotních podmínek ?

Řešení:

t_1 = –5 °C, t_2 = 0 °C, h = 5 cm = $5 \cdot 10^{-2}$ m, λ = 2,2 W·m⁻¹·K⁻¹, $l_t = 3{,}34 \cdot 10^5$ J·kg⁻¹ , $\rho = 10^3$ kg·m⁻³ ; τ = ?

K vytvoření ledu tloušťky dh z vody je zapotřebí odebrat vodě této tloušťky a plochy S teplo dQ

$$\mathrm{d}Q = l_t\,\mathrm{d}m = l_t \rho S\,\mathrm{d}h \ . \qquad (1)$$

Za dobu dτ projde vrstvou tloušťky h o ploše S při teplotním spádu $t_2 - t_1$ a měrné tepelné vodivosti množství tepla dQ'

$$\mathrm{d}Q' = \lambda S \,\frac{t_2 - t_1}{h}\,\mathrm{d}\tau \ . \qquad (2)$$

Protože za dobu dτ má touto vrstvou projít teplo dQ , tj. dQ = dQ', plyne z porovnání vztahů (1) a (2) vztah

$$l_t \rho S\,\mathrm{d}h = \lambda S \,\frac{t_2 - t_1}{h}\,\mathrm{d}\tau \ .$$

Odtud

$$\mathrm{d}\tau = \frac{l_t \rho h}{\lambda\,(t_2 - t_1)}\,\mathrm{d}h \ .$$

Celková doba τ, za kterou se na jezeře vytvoří led tloušťky h je

$$\tau = \frac{l_t \rho h^2}{2\lambda\,(t_2 - t_1)} \ .$$

Číselně: $\tau = \dfrac{3{,}34 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2}{2 \cdot 2{,}2 \cdot [0 - (-5)]}$ s = $3{,}8 \cdot 10^4$ s ≅ 10,5 h .

Vrstva ledu tloušťky 5 cm rostla na jezeře přibližně 10,5 hodiny.

kosti poloos elipsy. Vypočtěte práci výsledné síly, která působila na HB v časovém intervalu $\langle 0\,;\pi/4\mathrm{k}\rangle$ s.

Řešení :

t_1 = 0 s, $t_2 = \pi/4$k s, $x = a \cdot \cos(\mathrm{k}\,t)$, $y = b \cdot \sin(\mathrm{k}\,t)$; W = ?

Kartézský souřadný systém zvolíme tak, že počátek splývá se středem elipsy, hlavní poloosa a leží v ose o_x, a vedlejší b v ose o_y. Jedná se o pohyb rovinný, proto z = 0, dz = 0 . Práci síly vypočteme podle definice

$$W = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F \cdot \mathrm{d}\vec r = \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} (F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y) = \int_{t_1}^{t_2} m\,a_x\,\mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2} m\,a_y\,\mathrm{d}y \ ,$$

kde

$$\mathrm{d}x = (\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)\cdot \mathrm{d}t = -a\,\mathrm{k}\cdot\sin(\mathrm{k}\,t)\cdot\mathrm{d}t\,, \qquad a_x = -a\,\mathrm{k}^2\cdot\cos(\mathrm{k}\,t),$$

$$\mathrm{d}y = b\,\mathrm{k}\cdot\cos(\mathrm{k}\,t)\cdot\mathrm{d}t\,, \qquad a_y = -b\,\mathrm{k}^2\cdot\sin(\mathrm{k}\,t)\ .$$

Po úpravách vychází

$$W\langle 0\,;\pi/4\mathrm{k}\rangle = \frac{m\mathrm{k}^3\left(a^2 - b^2\right)}{2}\int_0^{\pi/4\mathrm{k}} \sin(2\,\mathrm{k}\,t)\cdot\mathrm{d}t = m\mathrm{k}^2\left(a^2 - b^2\right)/4 \ .$$

4.32. Jak velkou práci vykoná proměnlivá síla $\vec F(t) = (3t^2\vec i + 2t\vec j + \vec k)$ N působící na částici, jež je posouvána po trajektorii dané v SI vektorovou rovnicí $\vec r(t) = (2t^2\vec i + t\vec j)$ m v době mezi první a čtvrtou sekundou svého působení ?

***4.33.** Těleso se přemístí tak, že jeho hmotný střed přejde z místa A = [–2; –2; 0] do místa B = [2; 2; 0] m

a) po přímé trajektorii AB,

b) po polokružnici AB se středem v počátku zvolené kartézské soustavy souřadnic.

Přitom na těleso působí síla, vyjádřená v SI rovnicí $\vec F = (y^2\vec i + 2x^2\vec j + 4y\vec k)$ N. Jakou práci vykoná síla v obou případech? Je síla $\vec F$ konzervativní?

4.34. Při protažení pružiny o x_1 = 3 cm se spotřebovala práce W_1 = 150 J. Jaké práce bude třeba na protažení téže pružiny o další 3 cm?

4.35. Řetízek hmotnosti 0,8 kg a délky 1,5 m leží na vodorovném stole tak, že jeden jeho konec visí přes hranu desky. Řetízek začne sám klouzat se stolu, jestliže přes hranu visí alespoň 1/3 jeho délky. Jakou práci vykonají síly tření při úplném sklouznutí řetízku?

4.42. Po vodorovných přímých kolejích se začal z klidu pohybovat vagón hmotnosti m = 40 t, tažený vodorovným lanem, svírajícím se směrem pohybu úhel α = 30°. Tažná síla měla stálou velikost F_1 = 1,2 kN, velikost valivého odporu činila F_2 = 200 N.

a) Určete práci výsledné síly na dráze vagónu s = 30 m a její průměrný výkon na této dráze.

b) Vypočtěte okamžitý výkon síly v 10. sekundě působení a průměrný výkon v časovém intervalu ⟨0;10⟩ s.

4.43. Tělesu hmotnosti m ležícímu na vodorovné rovině byla udělena rychlost velikosti v_0 rovnoběžná s rovinou. Jaký je průměrný výkon síly tření od startu až do zastavení, je-li součinitel vlečného tření mezi tělesem a rovinou f? Počítejte nejprve obecně a pak pro hodnoty: m = 1,0 kg, v_0 = 1,5 m·s⁻¹, f = 0,27.

4.44. Motor o výkonu P = 0,1 kW pohání soustruh, na kterém je upnut dřevěný válec poloměru R = 30 mm, otáčející se s frekvencí f = 10 Hz. Jak velkou silou působí nůž na válec, je-li účinnost soustruhu η = 80 % ?

4.45. Čerpadlo odčerpává z dolu z hloubky h = 100 m vodu a na povrchu ji vypouští rychlostí velikosti v = 30 km·h⁻¹. Za 1 s se odčerpá voda o hmotnosti m = 3 kg, přičemž jedna šestina celkové vynaložené práce se spotřebuje na přemáhání sil tření. Vypočítejte potřebný výkon čerpadla.

4.46. Řešte příklad **4.27.** pomocí zákona zachování mechanické energie!

4.47. Celková hmotnost houpačky se zátěží je m = 150 kg. Vypočtěte, jak velkou silou je namáhán závěs houpačky v nejnižším bodě její dráhy, jestliže nejvyšší bod dráhy odpovídá vodorovné poloze závěsu. Jaké přetížení pociťujeme v nejnižším bodě?

4.48. Při akceleračních závodech automobilů se startuje z klidu a měří se čas potřebný k projetí dráhy s = 400 m dlouhé. Dosažené časy se pohybují kolem Δt = 8 s. Vypočtěte velikost konečné rychlosti automobilu a potřebný výkon jeho motoru za předpokladu, že hmotnost automobilu je m = 2 000 kg a že výkon je během jízdy konstantní.

4.49. Dva vagóny o hmotnostech m = 20 t se pohybují proti sobě na vodorovné koleji, každý rychlostí o velikosti v = 2 m·s⁻¹. O kolik se při srážce vagónů stlačí každý z jejich nárazníků, jestliže na stlačení jednoho z nich o p_1 = 1 cm je třeba síly $F_1 = 4 \cdot 10^4$ N ?

***4.50.** Částice se pohybuje ve směru osy o_x v poli konzervativní síly. Její potenciální energie závisí na poloze x vztahem (E_0, a, b jsou kladné konstanty)

$$E_p = E_0 \cdot [\exp(-a\,x) + b\,x]\ .$$

Určete sílu, která působí na částici v dané poloze x. Pro částici najděte rovnovážnou polohu a určete její druh.

Řešení :

$$C_V = R/(\gamma - 1)\,,$$

a ze stavové rovnice množství n plynu účastnícího se komprese

$$n = p_1 V_1/(R\,T_1)\,;$$

dosadíme do rovnice (3) a upravíme, s výsledkem a dosazením

$$W' = p_1V_1\,(T_2 - T_1)/[(\gamma-1)\,T_1] = p_1V_1\,(k^{\gamma-1} - 1)/(\gamma - 1) =$$
$$= 10^5 \cdot 10^{-3} \cdot (15^{0{,}4} - 1)/0{,}4\ \ \mathrm{J} = 489\ \mathrm{J}\ .$$

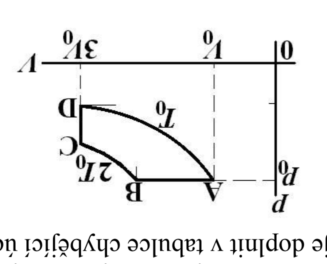
Na konci zdvihu bude tlak vzduchu ve válci 4,43 megapascalu a jeho teplota 581 stupeň celsia (854 K). Vnější síly vykonají práci 489 joulů.

10.41. Suchý vzduch teploty t_1 = 27 °C a tlaku p_1 = 0,1 MPa adiabaticky expandoval při výstupu do výšky 5 400 m, kde byl tlak $p_2 = 5 \cdot 10^4$ Pa. Vypočtěte teplotu vzduchu v této výšce.

10.42. Plynové bomby o vnitřních objemech V_1, V_2 obsahují dva spolu nereagující plyny, jejichž tlaky jsou p_1, p_2 a teploty T_1, T_2. Bomby jsou propojeny potrubím s ventilem. Po otevření ventilu nastane smísení plynů a jejich tlak se ustálí na hodnotě p a termodynamická teplota na hodnotě T.
Vypočtěte tyto stavové veličiny směsi plynů za předpokladu dokonalé tepelné izolace bomb a stejné Poissonovy konstanty γ obou ideálních plynů.

***10.43.** V nádobě objemu V_0 se při teplotě T_0 [K] vyskytuje m kg plynu známé molární hmotnosti M. Vypočtěte práci, kterou nutno vynaložit na stlačení tohoto plynu na objem V_1 a dále změnu teploty plynu, jestliže stlačování probíhá polytropicky, tj. $p \cdot V^n$ = konst., kde $1 < n < \gamma$.

10.44. Ideální plyn stálé hmotnosti vykonal kruhový děj ABCDA znázorněný na následujícím obrázku. Křivky BC a DA jsou izotermy. V připojené tabulce jsou uvedeny hodnoty stavových veličin pro stavy A,B,C a D. Vaším úkolem je doplnit v tabulce chybějící údaje.



Obr. 10.1

	p	V	T
A	p_0	V_0	T_0
B	p_0		$2\,T_0$
C		$3\,V_0$	$2\,T_0$
D		$3\,V_0$	

10.45. Ideální plyn stálé hmotnosti vykonal kruhový děj ABCDA, který se skládá ze dvou izotermických a dvou izochorických dějů (*obrázek 10.2*).

Jestliže vyjádříme vzdálenost mezi ionty jako α_{ij} násobek vzdálenosti r mezi nejbližšími sousedy

$$r_{ij} = \alpha_{ij}\, r \qquad (2)$$

a sečteme energie E_{ij} pro všechna $j \neq i$,dostaneme energii i-tého ionu v poli všech ostatních iontů

$$E_i = -\,\mathrm{k}\, A\, e^2/r + B/r^{\mathrm{n}}\,, \qquad (3)$$

kde $A = \sum_{i\neq j} \pm 1/\alpha_{ij}$, $B = \mathrm{b}\cdot \sum_{i\neq j} (\alpha_{ij})^{-\mathrm{n}}$. (4)

Konstanta A se nazývá Madelungova konstanta, znaménka (+) a (−) platí pro kladný a záporný iont.

Z rovnice (3) plyne, že celková energie $E(r)$ mřížky krystalu, obsahujícího $2N$ iontů je rovna

$$E(r) = -\,N\cdot(\mathrm{k}\,A\,e^2/r - B/r^{\mathrm{n}})\,, \qquad (5)$$

jestliže zanedbáme povrchové jevy.

Ukažte, že energii mřížky $E(r_0)$ odpovídající rovnovážné vzdálenosti mezi ionty $r = r_0$ je možno vyjádřit ve tvaru

$$E(r_0) = -N\,\frac{\mathrm{k}\,A\,e^2}{r_0}\,(1 - 1/\mathrm{n}) \ . \qquad (6)$$

Řešení :

V rovnovážném stavu musí být energie mřížky minimální, tedy

$$(\mathrm{d}E/\mathrm{d}r)(r_0) = 0 = N\cdot(\mathrm{k}\,Ae^2/r_0^2 - \mathrm{n}B/r_0^{\mathrm{n}+1})\ , \qquad (7)$$

odkud $B/r_0^{\mathrm{n}} = \mathrm{k}\,Ae^2/(\mathrm{n}\cdot r_0)$, a po dosazení do vztahu (5) při $r = r_0$ skutečně vychází (6) .

*4.54. Člen B/r^{n} v rovnici (5) př. **4.53.** odpovídající odpudivým silám, se často nahrazuje členem $\lambda\cdot\exp(-r/\rho)$ (λ a ρ jsou empirické konstanty), který je i lépe teoreticky zdůvodnitelný.

a) Jaká bude v tomto případě energie $E(r_0)$ mřížky odpovídající rovnovážné vzdálenosti $r = r_0$?

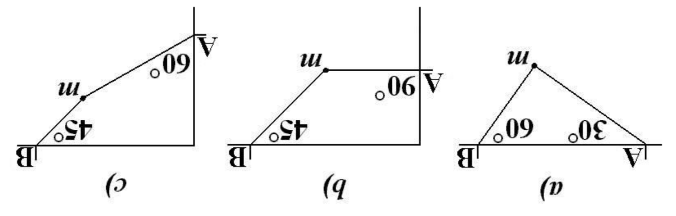
b) Při jakém ρ a n dají oba členy stejný příspěvek do celkové energie mřížky?

*4.55. Pro krystal NaCl je rovnovážná vzdálenost sousedních atomů $r_0 = 0{,}281$ nm, Madelungova konstanta $A = 1{,}75$ a experimentálně určená hodnota exponentu n = 9,4. Vyjádřete závislost energie mřížky připadající na 1 pár iontů pro oba případy (př. **4.53.** a **4.54.**), vypočítejte tuto energii (v jednotkách elektronvolt) pro vzdálenosti sousedních atomů r = 0,2 nm, 0,22 nm, 0,25 nm, 0,281 nm, 0,3 nm, 0,35 nm a 0,4 nm a vyneste závislost $E = E(r)$ do grafu.

Jaká je minimální energie mřížky připadající na 1 pár iontů ?

5. Mechanika systému hmotných bodů a tuhého tělesa.

5.1. Těleso hmotnosti 2 kg je zavěšeno v bodech A, B na vláknech (zanedbatelné hmotnosti) v různých situacích (viz *obrázky 5.1a,b,c*). Určete, jak velkými silami jsou vlákna namáhána (početně a pro kontrolu přibližně graficky).

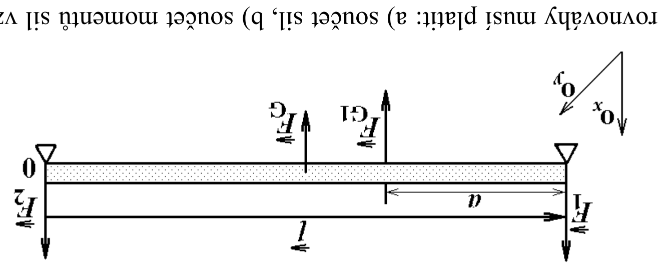


Obr. 5.1a,b,c

5.2. Homogenní nosník hmotnosti 2 000 kg délky 7 m spočívá na dvou podporách (viz *obrázek 5.2*). Ve vzdálenosti 2,3 m od levého okraje je zatížen břemenem hmotnosti 2 500 kg. Určete velikosti silových opor v pilířích.

Řešení :

$m = 2\cdot10^3$ kg, $a = 2{,}3$ m, $l = 7$ m, $m_1 = 2{,}5\cdot10^3$ kg ; $F_1, F_2 = ?$



Obr. 5.2

Za rovnováhy musí platit: a) součet sil, b) součet momentů sil vzhledem k libovolnému bodu musí být nulový. Vztažný bod O zvolíme např. v působišti síly $\vec{F}_2$. Potom podmínky rovnováhy můžeme napsat ve tvaru

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_G + \vec{F}_{G1} = \vec{0}\ , \qquad (1)$$

$$\vec{l}\times\vec{F}_1 + \vec{0}\times\vec{F}_2 + \tfrac{\vec{l}}{2}\times\vec{F}_G + (l-a)\,\vec{l}^{\,0}\times\vec{F}_{G1} = \vec{0}\ . \qquad (2)$$

Podmínky (1), (2) rozepíšeme do souřadnic (uvážíme, že síly $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ jsou rovnoběžné s osou o_x , zatímco jejich momenty s osou o_y , atd.)

$$F_1 + F_2 - F_G - F_{G1} = 0\ , \qquad (1')$$

$$l\,F_1 + 0 - (l/2)\,F_G - (l-a)\,F_{G1} = 0\ . \qquad (2')$$

Uvážíme-li, že $F_G = m\,g$ a $F_{G1} = m_1\,g$, přepíšeme (1') a (2') do tvaru

10.26. V Kalkatě (Indie) je řeka Ganga přemostěna jediným mostem. Uvádí se, že díky velkému rozdílu denních a nočních teplot přesahuje změna délky Δl mostu v průběhu dne 1 m. Odhadněte "noční" délku mostu za předpokladu, že je zhotoven ze svařené oceli a rozdíl teplot je a) 20 °C, b) 30 °C, c) 40 °C !

*10.27. Měděný drát teploty t_1 = 150 °C byl napjat a upevněn tak, že nemohl měnit svou délku. Potom byl ochlazován. Odhadněte, při jaké teplotě praskl. Při jaké teplotě by (za jinak stejných počátečních podmínek) praskl hliníkový drát?

*10.28. Přesná teplotní závislost objemu kapaliny na Celsiově teplotě je aproximována v jistém intervalu polynomem $V = V_0\,(1 + \mathrm{a}t + \mathrm{b}t^2 + \mathrm{c}t^3)$, kde a, b, c jsou empiricky zjištěné konstanty. Pro vodu má v teplotním intervalu ⟨0; 30⟩ °C daná aproximace konstanty :

a = -6,427 · 10⁻⁵ (°C)⁻¹ , b = 8,5053 · 10⁻⁶ (°C)⁻², c = -6,790 · 10⁻⁸ (°C)⁻³.

Určete, při jaké teplotě zaujímá voda minimální objem!

10.29. O kolik promile se zvětší objem měděného tělesa při zahřátí z t_1 = 18 °C na t_2 = 150 °C ?

10.30. Skleněná láhev má při teplotě t_0 = 0 °C objem V_0 = 500 cm³. Po maximálním naplnění alkoholem stejné teploty byla zahřána na t_1 = 40 °C. Kolik alkoholu při tom vyteklo? Počítejte a) bez, b) s uvážením teplotní roztažnosti skla.

10.31. Dva kilomoly oxidu uhličitého byly zahřáté z 15 °C na 25 °C za konstantního tlaku. Vypočtěte, jaké teplo bylo třeba na zahřátí dodat. O jakou hodnotu se při zahřívání změnila vnitřní energie plynu a jakou práci při tom plyn vykonal ?

Řešení:

$n = 2$ kmol (CO_2), t_1 = 15 °C, t_2 = 25 °C, p = konst.; Q = ?, ΔU = ?, W = ?

Při řešení budeme vycházet z první hlavní věty termodynamiky

$$Q = \Delta U + W\ , \qquad (1)$$

ve které Q je teplo přijaté systémem, ΔU – změna jeho vnitřní energie a W – práce systémem vykonaná. Množství tepla přijatého při izobarickém ději je úměrné změně teploty ΔT systému

$$Q = m\,c_{\mathrm{p}}\,\Delta T\ , \qquad (2)$$

m – hmotnost plynu, c_{p} – jeho měrná tepelná kapacita při stálém tlaku. Vnitřní energie závisí pouze na teplotě, pro její změnu můžeme psát

$$\Delta U = m\,c_{\mathrm{V}}\,\Delta T\ , \qquad (3)$$

c_{V} – měrná tepelná kapacita při stálém objemu. Z rovnic (2),(3) vypočteme hledané veličiny, měrné tepelné kapacity nalezneme například v [2] či v *Tabulce*

č.6, hmotnost plynu určíme z látkového množství n a molární hmotnosti M (viz **10.1.**)

$$Q = n\,M\,c_{\mathrm{p}}\,\Delta T = (2000\cdot 44{,}01\cdot 10^{-3}\cdot 815\cdot 10)\ \mathrm{J} = 717\ \mathrm{kJ}\,,$$

$$\Delta U = n\,M\,c_{\mathrm{V}}\,\Delta T = (2000\cdot 44{,}01\cdot 10^{-3}\cdot 626\cdot 10)\ \mathrm{J} = 551\ \mathrm{kJ}\,.$$

Práci vykonanou plynem na okolí vypočteme z rovnice (1)

$$W = Q - \Delta U = (717 - 551)\ \mathrm{kJ} = 166\ \mathrm{kJ}\,.$$

Na izobarický ohřev CO_2 bylo třeba dodat 717 kJ tepla, plyn zvýšil svou vnitřní energii o 551 kJ a vykonal práci 166 kJ.

Úlohu lze řešit i bez pomocí tabelovaných hodnot. Nahradíme v rovnicích (2) a (3) měrné tepelné kapacity (c) molárními (C), které podle kinetické teorie pro ideální plyn souvisí s počtem stupňů volnosti i molekuly plynu vztahy

$$C_{\mathrm{V}} = (i/2)\,R\ , \qquad C_{\mathrm{p}} = C_{\mathrm{V}} + R = [(i+2)/2]\,R\ ,$$

i = 6 pro molekulu CO_2,

$$Q = n\,[(i+2)/2]\,R\ \Delta T = 2000\cdot[(6+2)/2]\cdot 8{,}314\cdot 10\ \mathrm{J} = 665\ \mathrm{kJ}\,,$$

$$\Delta U = n\,(i/2)\,R\ \Delta\mathrm{T} = 2000\cdot(6/2)\cdot 8{,}314\cdot 10\ \mathrm{J} = 499\ \mathrm{kJ}\,,$$

$$W = (665 - 499)\ \mathrm{kJ} = 166\ \mathrm{kJ}\,.$$

Rozdílnost výsledků dosažených oběma postupy je možné vysvětlit tím, že CO_2 se ve skutečnosti nechová jako ideální plyn.

10.32. Do válce parního stroje je za stálého tlaku p = 3 MPa vpouštěna pára. Zdvih pístu parního stroje je z = 30 cm a příslušná změna objemu $\Delta V = 9\cdot10^{-3}$ m³. Jakou práci vykoná pára při jednom zdvihu a jakou silou působí pára na píst ?

10.33. Plyn expanduje z objemu V_1 = 0,4 m³ na objem V_2 = 0,6 m³ při konstantním tlaku p = 300 kPa. Dodané teplo je Q = 125 kJ. Vypočtěte změnu vnitřní energie tohoto plynu!

10.34. Jaké množství oxidu uhličitého je možno ohřát z t_1 = 20 °C na t_2 = 100 °C teplem Q = 0,222 kJ ? Předpokládáme izobarický ohřev.

10.35. Dva moly ideálního plynu teploty T_1 = 300 K byly nejprve izochoricky ochlazeny, přičemž se tlak plynu zmenšil na polovinu. Potom plyn izobaricky expandoval, až dosáhl původní teploty. Určete celkové množství tepla, pohlceného plynem při obou procesech.

Zakreslete průběh změn do p–V diagramu.

10.36. K ohřátí směsi m_1 = 2 g kyslíku a m_2 = 5 g dusíku z teploty t_1 = 20 °C na t_2 = 40 °C se spotřebovalo Q = 100 J tepla. Byla směs zahřívána izobaricky nebo izochoricky?

10.37. Kompresor nasává V_1 = 150 m³ vzduchu za 1 hodinu a stlačuje jej na tlak p_2 = 1,1 MPa. Pracovní válec kompresoru je chlazen protékající vodou (přes chladič), čímž se udržuje jeho teplota na konstantní hodnotě. Určete, kolik vody protéká chladičem za hodinu, když se v něm ohřívá voda z t_1 = 10 °C na t_2 = 18 °C ! Vnější tlak vzduchu je p_1 = 0,1 MPa.

10.38. Tři moly plynu teploty T_1 = 273 K izotermicky expandovaly na pětinásobek původního objemu. Potom byl plyn izochoricky zahříván tak dlouho, až jeho tlak dosáhl původní hodnoty. Celkem bylo dodáno Q = 80 kJ tepla. Nalezněte Poissonovu konstantu daného plynu.

10.39. Byly změřeny měrné tepelné kapacity neznámého plynu:
c_V = 650 J·kg^{-1}·K^{-1} a c_p = 910 J·kg^{-1}·K^{-1}. Určete molární hmotnost a počet stupňů volnosti molekul plynu. O jaký plyn se jedná ?

10.40. Kompresní poměr spalovacího motoru je $k = V_1/V_2 = 15$, obsah válce V_1 = 1 dm^3. Obsahuje-li válec na počátku komprese vzduch tlaku 100 kPa a teploty 16 °C, vypočtěte tlak a teplotu na konci zdvihu a práci, vykonanou vnějšími silami při kompresi.

Řešení:

$k = 15,\ V_1 = 10^{-3}\ \mathrm{m}^3,\ p_1 = 10^5\ \mathrm{Pa},\ t_1 = 16\ °\mathrm{C},\ T_1 = 289\ \mathrm{K},\ \gamma = 1{,}4;$

$p_2 = ?\ ,\ T_2 = ?\ ,\ W' = ?$

Budeme předpokládat, že stlačování vzduchu ve válci proběhne tak rychle, že při něm plyn nestačí vyměnit teplo s okolím. Jinými slovy, budeme předpokládat, že uvažovaný děj je adiabatický

$$p\,V^{\gamma} = \text{konst.}\ , \qquad (1)$$

$$p_2 = p_1\,(V_1/V_2) = p_1\,k^{\gamma} = 10^5 \cdot 15^{1,4}\ \mathrm{Pa} = 4{,}43\ \mathrm{MPa}\ .$$

Vztah mezi teplotou a objemem při adiabatickém ději odvodíme z rovnice (1) a ze stavové rovnice ideálního plynu

$$p\,V = n\,R\,T \qquad \Rightarrow \qquad p = n\,R\,T\,V^{-1}\ ,$$

$$T\,V^{\gamma-1} = \text{konst.}\ ; \qquad (2)$$

vypočítáme konečnou teplotu T_2

$$T_2 = T_1\,(V_1/V_2)^{\gamma-1} = T_1\,k^{\gamma-1} = 289 \cdot 15^{0,4}\ \mathrm{K} = 854\ \mathrm{K}\ .$$

Práce W', vykonaná vnějšími silami při kompresi, bude rovna přírůstku ΔU vnitřní energie vzduchu (adiabatický děj!)

$$W' = \Delta U = n\,C_V\,\Delta T\ . \qquad (3)$$

Ze vztahů

$$C_p/C_V = \gamma \quad \text{a} \quad C_p - C_V = R$$

vyjádříme molární tepelnou kapacitu při stálém objemu

Protože silové pole je popsáno uvedenou potenciální energií, jedná se o konservativní silové pole, pro které platí

$$\vec F = -\,\mathbf{grad}\,E_p = -\,(\partial E_p/\partial x \cdot \vec i + \partial E_p/\partial y \cdot \vec j + \partial E_p/\partial z \cdot \vec k) =$$

$$= -\vec i \cdot \partial E_p/\partial x = -\vec i \cdot \mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x = -\vec i \cdot \mathrm{E}_0 \cdot [\,-\mathrm{a}\cdot\exp(-\mathrm{a}\,x) + \mathrm{b}] =$$

$$= \vec i \cdot \mathrm{E}_0 \cdot [\mathrm{a}\cdot\exp(-\mathrm{a}\,x) - \mathrm{b}]\ .$$

V rovnovážné poloze platí $\vec F = \vec 0$, tedy

$$\vec i \cdot \mathrm{E}_0 \cdot [\mathrm{a}\cdot\exp(-\mathrm{a}\,x) - \mathrm{b}] = \vec 0 \qquad \text{i} \qquad \mathrm{a}\cdot\exp(-\mathrm{a}\,x) - \mathrm{b} = 0\ .$$

Pro rovnovážnou polohu x_r nacházíme podmínku

$$x_r = (1/\mathrm{a}) \cdot \ln(\mathrm{a}/\mathrm{b})\ .$$

Druh rovnovážné polohy určíme z chování E_p v místě x_r. Je-li v něm E_p konstantní, jedná se o polohu indiferentní, je-li E_p maximální, jedná se o polohu labilní a konečně je-li E_p minimální, pak poloha je stabilní rovnovážnou polohou.

$$(\partial^2E_p/\partial x^2)(x_r) = (\mathrm{d}^2E_p/\mathrm{d}^2x)(x_r) = \mathrm{E}_0\,\mathrm{a}^2\cdot\exp(-\mathrm{a}\,x_r) = \mathrm{E}_0\cdot\mathrm{a}^2\cdot\exp[-\ln(\mathrm{a}/\mathrm{b})] > 0\ .$$

Druhá derivace potenciální energie v bodě x_r je kladná, proto je energie v uvedeném místě minimální. Poloha x_r částice je stabilní rovnovážnou polohou.

***4.51.** Potenciální energie částice v jistém silovém poli má tvar $E_p = \mathrm{a}/r^2 - \mathrm{b}/r$, kde a,b jsou kladné konstanty, r - vzdálenost částice od počátku, $\vec r = (x; y; z)$. Najděte:

a) rovnovážnou polohu částice a rozhodněte, je-li stabilní,

b) maximální hodnotu přitažlivé síly.

***4.52.** Potenciální energie částice v jistém silovém poli má tvar $E_p = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}y^2$, kde a,b jsou různé kladné konstanty. Zjistěte

a) sílu, která působí na částici v bodě o souřadnicích $[x\,;\,y]$,

b) je-li uvedené silové pole centrální.

***4.53.** Iontové krystaly jsou složeny z kladně a záporně nabitých iontů. Ionty na sebe vzájemně působí elektrickými (coulombovskými) silami a určitými odpudivými silami, jejichž podstatu nelze popsat v rámci klasické teorie.

Energii E_{ij} vzájemného působení mezi dvěma ionty i a j v krystalu typu AB, vytvořeného z iontů s náboji $+e$ a $-e$ (e je elementární náboj), lze potom sestavit ze dvou členů

$$E_{ij} = \pm\,\mathrm{k}\,e^2/r_{ij} + \mathrm{b}/r_{ij}^{\,\mathrm{n}}\ , \qquad (1)$$

kde r_{ij} je vzdálenost mezi ionty, b a n - konstanty určované z experimentu, k = = 9·10^9 N·m^2·C^{-2}.

$$F_1 + F_2 = m\,g + m_1\,g\ , \qquad (1")$$

$$l\,F_1 - l\,m\,g/2 - (l-a)\,m_1\,g = 0\ . \qquad (2")$$

Z rovnice (2") vyjádříme velikost F_1 síly $\vec F_1$

$$F_1 = [m/2 + (l-a)\,m_1/l] \cdot g\ ,$$

a dále z rovnice (1") velikost F_2 síly $\vec F_2$

$$F_2 = (m/2 + a\,m_1/l) \cdot g\ .$$

Číselně: $F_1 = [\,2000/2 + (7-2{,}3) \cdot 2500/7\,] \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 26{,}3\ \mathrm{kN}$,
$F_2 = (\,2000/2 + 2{,}3 \cdot 2500/7\,) \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 17{,}9\ \mathrm{kN}$.

Velikosti silových opor budou 26,3 kN a 17,9 kN.

5.3. K řešení příkladu **5.1.** využijte podmínek momentové rovnováhy. Potřebné údaje odměřte z obrázků.
Návod: za vztažné body volte postupně body A a B.

5.4. Dva muži nesou na ramenou homogenní trám o délce l = 6 m . Jeden z mužů podpírá trám na jeho konci. Jak daleko od opačného konce podpírá trám druhý muž, tlačí-li trám na jeho rameno silou o 50 % větší než na rameno muže prvního?

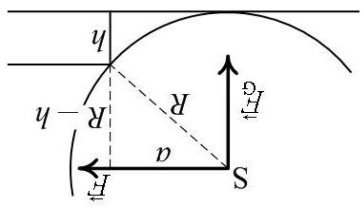
5.5. Kruhová deska stolu, jejíž hmotnost je 5 kg, stojí na čtyřech nohách k ní kolmých a symetricky rozmístěných vzhledem ke středu stolu. Poloměr desky je 0,75 m. Na desce leží uprostřed mezi dvěma sousedními nohama předmět hmotnosti 4 kg. Určete zatížení jednotlivých noh stolu. (g = 10 m·s^{-2})

5.6. Při dopravě betonové skruže o průměru 1,2 m a hmotnosti 1200 kg bylo zapotřebí překonat schod o výšce 15 cm. Jak velkou vodorovnou sílu, působící ve výši těžiště, na to bylo nutno minimálně vynaložit ?

Řešení :

d = 1,2 m, m = 1200 kg, h = 0,15 m, g = 9,81 m·s^{-1}; F = ?

V hmotném středu skruže uvažujeme působení pouze dvou sil: síly tíhové a hledané síly vodorovné. Moment síly $\vec F$ musí být větší než moment tíhy skruže vzhledem k hraně schodu, aby se skruž kolem ní otočila směrem na schod.



Obr. 5.3

Krajní případ je ten, když momenty jsou navzájem opačné a jejich velikosti jsou si rovny

Z této rovnice vypočteme teplotu výsledné fáze vody

$$t = \frac{c_1(m_1t_1 + m_2t_{t2} + m_3t_3) + c_2m_2(t_{t2} - t_2) + m_3l_{v3} + m_2l_{t2}}{c_1(m_1 + m_2 + m_3)}\ .$$

Číselně:

$$t = \frac{4200\cdot(0{,}42\cdot16 + 0{,}054\cdot100) + 2100\cdot0{,}21\cdot1 + 0{,}054\cdot2255500 + 0{,}21\cdot333700}{4200\cdot(0{,}42+0{,}21+0{,}054)}\ °\mathrm{C} =$$

$$= 60\ °\mathrm{C}\ .$$

Dosažený výsledek vede k závěru, že výsledná fáze vody je kapalná a její teplota je 60 °C.

10.20. Do m_1 = 0,975 kg vody o teplotě t_1 = 20 °C, umístěné v kalorimetru o tepelné kapacitě K = 100 J·K^{-1}, byla ponořena koule z měkké oceli hmotnosti m_2 = 0,25 kg a teploty t_2 = 100 °C. Teplota vody se ustálila na t = 22 °C. Jaká je měrná tepelná kapacita oceli? Měrná tepelná kapacita vody 4 200 J·kg^{-1}·K^{-1}.

10.21. Při převařování nálevu na konzervované ovoce byl použit vařič, na kterém V_v = 4 litry vody počáteční teploty t_1 = 20 °C začaly vřít po τ_1 = 10 min. zahřívání. Zjistěte, za jak dlouho po nasypání m_c = 2 kg cukru teploty 20 °C, začne nálev opět vřít (za předpokladů, že roztok bude vřít po dosažení téže teploty jako voda a tepelný výkon vařiče je stálý).
Měrná tepelná kapacita cukru je c_c = 1 660 J·kg^{-1}·K^{-1}.

10.22. Při běhu po vodorovné cestě produkuje lidské tělo odpadní teplo v množství přibližně Q = 3 MJ za hodinu. Předpokládáme, že odvod poloviny tohoto tepla zajišťuje odpar potu (zbytek je odváděn prouděním a vyzařováním). K odpaření 1 kg potu (při teplotě 37 °C) je zapotřebí 2,41 MJ. Kolik potu se odpaří při hodinovém běhu?

10.23. Kolik tepla musíme dodat ledu hmotnosti m = 8 kg počáteční teploty t_1 = = –10 °C, aby roztál a teplota vzniklé vody se ustálila na t_2 = 15 °C ?

10.24. Při mrazivém dnu nadechujeme vzduch teploty t_1 = -20 °C nulové vlhkosti. Nadechnutý vzduch se v těle ohřeje a zvlhčí (při teplotě 37 °C), takže vzduch vydechnutý má teplotu t_2 = 37 °C a 100% relativní vlhkost (to znamená, že 1 kg vzduchu je obsaženo 40 g vodních par). Jakou energii musí organizmus uvolnit za hodinu dýchání, projdou-li za tuto dobu plícemi m = = 3 kg vzduchu? Průměrná měrná tepelná kapacita vzduchu při stálém tlaku je c_p = 1008 J·kg^{-1}·K^{-1}, měrné skupenské teplo výparné vody (při 37 °C) l_v = = 2,41 MJ·kg^{-1}.

10.25. Jaká musí být minimální velikost rychlosti olověné kule, aby se nárazem na ocelovou desku roztavila? Teplota kule před nárazem byla t_1 = 27 °C. Předpokládejte, že veškeré teplo uvolněné při nárazu se spotřebuje pouze na zahřátí kule.

$$\vec{v}_2 = 2m_1\vec{v}_1 / (m_1 + m_2)\,, \qquad (5)$$

$$\vec{v}_3 = 2m_2\vec{v}_2 / (m_2 + m_3)\,, \qquad (6)$$

z nichž lze vyjádřit rychlost $\vec{v}_3$

$$\vec{v}_3 = 4\vec{v}_1 / [(1 + m_2/m_1) \cdot (1 + m_3/m_2)]\,.$$

Pro hledaný podíl $x = (E_{k3}/E_{k1}) \cdot 100$ /%/ pak dostáváme

$$x = [\,½\, m_3\, v_3{}^2 / (\,½\, m_1\, v_1{}^2)] \cdot 100 = (m_3/m_1) \cdot (v_3/v_1)^2 \cdot 100 =$$

$$= (16\, m_3/m_1) / [(1 + m_2/m_1)^2 \cdot (1 + m_3/m_2)^2] \cdot 100\,.$$

Číselně: $x = (16 \cdot 1/4) / [(1 + 2/4)^2 \cdot (1 + 1/2)^2] \cdot 100 = 79\ \%$.

První koule předá třetí kouli přibližně sedmdesát devět procent své mechanické energie.

5.9. Jaký bude poměr rychlosti v' a kinetické energie E'_k neutronu po přímém středovém pružném rázu s jádrem ^{12}C k rychlosti neutronu před srážkou v a kinetické energii před srážkou E_k ? Jádro je před srážkou v klidu.

***5.10.** Na dokonale hladkém ledě leží 3 stejné kotouče A, B a C. Kotouči A byla udělena rychlost $\vec{v}$ ($\vec{v}$ je vektor kolmý na spojnici středů kotoučů B a C) tak, že se dokonale pružně srazil současně s kotouči B a C. Vzdálenost jejich středů před srážkou byla n - násobkem průměru kotouče. Stanovte rychlost kotouče A po srážce.

Při jaké hodnotě n kotouč A po srážce: a) odskočí nazpět, b) se zastaví, c) se bude pohybovat vpřed ?

5.11. Střela hmotnosti m_1 = 5 g byla vodorovně vstřelena do dřevěného kvádru hmotnosti m_2 = 3 kg, jež ležel na vodorovné desce. Střela v kvádru uvízla a její náraz posunul kvádr o s = 25 cm. Určete, jaká byla velikost rychlosti střely, když součinitel smykového tření mezi kvádrem a deskou byl f = 0,2 .

5.12. Balistické kyvadlo je přístroj na měření rychlosti střel. Je možné si je představit jako bednu s pískem svisle zavěšenou na dlouhém lanku. Střela o hmotnosti m = 12 g byla vstřelena vodorovně do balistického kyvadla hmotnosti M = 6 kg, po nepružné srážce se v něm zachytila a vychýlila kyvadlo tak, že se těžiště bedny zvedlo o h = 1,6 cm. Z uvedených údajů stanovte velikost rychlosti střely před nárazem do kyvadla.

5.13. Dělo, jehož hlaveň má hmotnost m = 540 kg, vystřelilo náboj o tíži velikosti G = 50 N rychlostí velikosti v = 450 m·s^{-1}. Při výstřelu se hlaveň posunula zpět o s = 45 cm. Stanovte střední časovou velikost síly, která brzdí hlaveň při záklusu.

5.14. Na kolejích stojí vozík naložený pískem celkové hmotnosti m_1 = 200 kg. Ve směru kolejí přiletí m_2 = 10 kg koule a zaryje se do písku. V okamžiku do-

padu svírá vektor rychlosti koule s horizontálou úhel α = 37° a jeho velikost je v_2 = 40 m·s^{-1}. Jakou rychlostí se bude vozík po dopadu koule pohybovat?

5.15. Vozík hmotnosti m_1 se pohybuje po vodorovných přímých kolejích rychlostí $\vec{v}_1$. Jak se změní rychlost vozíku, dopadne-li naň předmět hmotnosti m_2 rychlostí $\vec{v}_2$? Určete rychlost vozíku s předmětem, včetně její velikosti.

Řešte pro: m_1 = 100 kg, m_2 = 20 kg, $\vec{v}_1 = (3\vec{i}\,)$ m·s^{-1}, $\vec{v}_2 = (4\vec{i} - 3\vec{j}\,)$ m·s^{-1}.

5.16. Dvě koule o hmotnostech m_1 = 5 kg, m_2 = 10 kg, se pohybují přímočaře ve vodorovném směru proti sobě rychlostmi $\vec{v}_1 = 5\vec{v}^{\,0}$ m·s^{-1}, $\vec{v}_2 = -8\vec{v}^{\,0}$ m·s^{-1} tak, že jejich středy se pohybují po téže vodorovné přímce. Narazí na sebe přímým středovým nepružným rázem. Určete rychlost $\vec{v}$ vzniklého tělesa po rázu. $\vec{v}^{\,0}$ [m·s^{-1}] je jednotkový vektor. Určete, jaká část mechanické energie soustavy těles se přitom přemění na jiné formy energie.

5.17. Kosmická sonda pohybující se rychlostí $\vec{v}_0$ za letu exploduje a rozpadne se na tři části stejné hmotnosti. Jedna část pokračuje v letu původním směrem, další dvě různými směry, svírajícími s původním směrem letu úhel 60°.

Určete rychlosti jednotlivých částí a jejich velikosti i energie částí okamžitě po explozi. Porovnejte energii vyvinutou při explozi s kinetickou energií sondy před explozí.

Rychlosti všech zbytků sondy jsou komplanární (leží v jedné rovině). Původní směr rychlosti $\vec{v}_0$ označte vektorem $\vec{i}$, směr kolmý vektorem $\vec{j}$.

5.18. Vyhledejte souřadnice hmotného středu soustavy hmotných bodů o hmotnostech m_1 = 5 kg, m_2 = 20 kg, m_3 = 10 kg, jež jsou po řadě umístěny v bodech A_1 = [0; 1; 2], A_2 = [1; 2; –3], A_3 = [–2; 0; 5]. Souřadnice jsou zadány v metrech.

Řešení :

m_1 = 5 kg, x_1 = 0 m, y_1 = 1 m, z_1 = 2 m,
m_2 = 20 kg, x_2 = 1 m, y_2 = 2 m, z_2 = –3 m,
m_3 = 10 kg, x_3 = –2 m, y_3 = 0 m, z_3 = 5 m ; x_S, y_S, z_S = ?

Souřadnice vypočteme podle vztahů

$$x_S = (\textstyle\sum m_i\, x_i) / \sum m_i\,, \quad y_S = (\sum m_i\, y_i) / \sum m_i\,, \quad z_S = (\sum m_i\, z_i) / \sum m_i\,,$$

ve kterých sečítáme přes všechny body soustavy; v našem případě i = 1, 2, 3

$$x_S = [5 \cdot 0 + 20 \cdot 1 + 10 \cdot (-2)]/(5 + 20 + 10) = 0\ \mathrm{m},$$

$$y_S = 9/7\ \mathrm{m} = 1{,}29\ \mathrm{m}\,, \qquad z_S = 0\ \mathrm{m}\,.$$

Hmotný střed soustavy hmotných bodů má souřadnice [0; 1,29; 0] m .

Číselně: $v_S = \sqrt{\dfrac{8 \cdot 8{,}314 \cdot 273}{\pi \cdot 32 \cdot 10^{-3}}}$ m·s^{-1} = 424,992 m·s^{-1} .

Střední velikost rychlosti molekuly kyslíku při teplotě 0 °C je přibližně 425 metrů za sekundu.

Nejpravděpodobnější rychlost v_p molekul je taková rychlost, při které nabývá distribuční funkce f(v) maxima. Z rozboru chování této funkce plyne, že dané maximum nastává pro velikost rychlosti v, pro kterou platí

$$v = v_p = \sqrt{\frac{2k_B\,T}{m_m}} = \sqrt{\frac{2\,R\,T}{M}}\ .$$

Největší počet molekul má velikosti rychlosti blízké hodnotě v_p a proto jí říkáme nejpravděpodobnější

Číselně: $v_p = \sqrt{2 \cdot 1{,}381 \cdot 10^{-23} \cdot 273 \cdot 5{,}314^{-1} \cdot 10^{26}}$ m·s^{-1} = 376,689 m·s^{-1} .

Nejpravděpodobnější rychlost molekul kyslíku za teploty 0 °C je přibližně 377 metrů za sekundu.

Střední kvadratická rychlost v_k je definována jako druhá odmocnina z aritmetického průměru druhých mocnin velikostí okamžitých rychlostí molekul. U plynů s jednoatomovými molekulami je to rychlost, kterou by musely mít všechny molekuly, aby jejich celková kinetická energie byla rovna skutečné kinetické energii molekul. Pro v_k platí pak vztahy

$$v_k = \sqrt{\frac{3k_B\,T}{m_m}} = \sqrt{\frac{3\,R\,T}{M}}\ .$$

Číselně: $v_k = \sqrt{3 \cdot 1{,}381 \cdot 10^{-23} \cdot 273 \cdot 5{,}314^{-1} \cdot 10^{26}}$ m·s^{-1} = 461,347 m·s^{-1} .

Střední kvadratická rychlost molekul kyslíku za teploty 0 °C činí přibližně 461 metr za sekundu.

10.9. Dusík hmotnosti m = 15 g teploty t = 27 °C se nachází v uzavřené nádobě. Kolik tepla mu musíme dodat, aby se velikost střední kvadratické rychlosti jeho molekul zdvojnásobila?

10.10. V dílně byl ke sváření použit acetylén (C_2H_2) obsažený v tlakové nádobě o objemu 1,9 m^3. Na počátku směny byl tlak plynu v nádobě 11 MPa, na konci směny poklesl na hodnotu 6 MPa. Jaká byla spotřeba acetylénu v průběhu směny?

Předpokládejte, že teplota v dílně byla stále 24 °C.

Řešení:

V = 1,9 m^3, p_1 = 11 · 10^6 Pa, p_2 = 6 · 10^6 Pa, T = 297 K; Δm = ?

Budeme předpokládat, že acetylén se chová jako ideální plyn. V tom případě platí na počátku směny (index 1) a na konci (2) stavové rovnice

$$p_1 V = m_1\, R\, T / M\,, \qquad p_2\, V = m_2\, R\, T / M\,,$$

kde $m_{1,2}$ jsou hmotnosti plynu v nádobě na počátku a na konci směny, R – plynová konstanta, M – molární hmotnost acetylénu.

Pro zjištění změny hmotnosti Δm acetylénu v nádobě odečteme první rovnici od druhé a upravíme

$$(p_2 - p_1)\ V = (m_2 - m_1)\ R\ T / M\,,$$

$$\Delta m = m_2 - m_1 = (p_2 - p_1)\ V M / (R\ T)\,.$$

Při číselném výpočtu použijeme hodnotu plynové konstanty 8,314 J·mol^{-1}·K^{-1} , molární hmotnost acetylénu určíme z relativních atomových hmotností A_r vodíku a uhlíku (*tabulka 4*)

$$M(C_2H_2) = 2M(C) + 2M(H) = 2 \cdot (12{,}011 + 1{,}008) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}} =$$

$$= 26{,}038 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}\,.$$

Zadané a nalezené hodnoty dosadíme do obecného vztahu

$$\Delta m = (6 \cdot 10^6 - 11 \cdot 10^6) \cdot 1{,}9 \cdot 26{,}038 \cdot 10^{-3} / (8{,}314 \cdot 297)\ \mathrm{kg} =$$

$$= -100\ \mathrm{kg}\,.$$

Úbytek plynu v nádobě můžeme rovněž vyjádřit jako úbytek Δn látkového množství

$$\Delta n = \Delta m / M = -100 / (26{,}038 \cdot 10^{-3})\ \mathrm{mol} = -3\ 841\ \mathrm{mol}\,.$$

Během směny se spotřebovalo 100 kg (3,8 kmol) acetylénu.

10.11. Hustota vzduchu při tlaku 202 650 Pa a teplotě 27 °C je 2,354 kg·m^{-3}. Jaká je hustota vzduchu za normálních podmínek (*viz tabulku č.1*) ?

10.12. a) V uzavřené tlakové lahvi je kyslík tlaku p = 1 MPa při teplotě t = 27 °C. Jaká je jeho hustota?

b) Odhadněte, jaká je hmotnost vzduchu v prázdné místnosti, jejíž rozměry jsou 4×5×3 m^3. Teplota v místnosti je 20 °C a tlak 0,1 MPa. Molární hmotnost vzduchu je přibližně 29 g·mol^{-1}.

10.13. Vodík teploty t = 27 °C a tlaku p = 5 MPa je v tlakové nádobě objemu V = = 0,5 m^3. Netěsným ventilem uniklo zvolna množství Δm = 1 kg vodíku. Jaký tlak bude ukazovat tlakoměr připojený k nádobě?

10.14. Bomba obsahuje při teplotě t_1 = 27 °C stlačený plyn o tlaku p_1 = 3 MPa. Jak se změní tlak, když poloviční množství plynu z bomby vypustíme a jeho teplota poklesne o 15 °C ?

$$F_G \cdot a \;=\; F\,(R\;-\;h),$$

kde $R = d/2$ a a je rameno tíhové síly F_G , jehož velikost vypočteme z pravoúhlého trojúhelníka o přeponě R a odvěsně $(R - h)$

$$a^2 \;=\; [R^2 - (R-h)^2] \;=\; [h\,(2R-h)] \;.$$

Z momentové podmínky a ze vztahu pro délku a ramene plyne

$$F \;=\; F_G \cdot a \,/\, (R-h) \;=\; mg \cdot \sqrt{h\,(d-h)} \;/\; (d/2 - h)\;.$$

Číselně: $F = 1200{\cdot}9{,}81\,\sqrt{0{,}15\cdot(1{,}2-0{,}15)}\,/(1{,}2/2 - 0{,}15) = 10\,382\ \mathrm{N} \;\approx\; 10{,}4\ \mathrm{kN}.$

Na překulení skruže přes schod potřebujeme vynaložit vodorovnou sílu o velikosti větší než 10 382 newtony.

5.7. Tyč hmotnosti m = 2 kg a délky l = 1 m je volně otáčivá kolem vodorovné osy procházející koncovým bodem tyče. Jakou silou je namáhána osa tyče v okamžiku průchodu tyče nejnižší polohou (dolní úvratí), známe-li úhlovou rychlost v tomto okamžiku (ω = 7,7 rad·s^{-1}) ?

5.8. Tři pružné koule o hmotnostech v poměru 4:2:1 jsou zavěšeny podle následujícího obrázku. První kouli vychýlíme a ta narazí rychlostí $\vec{v}_1$ na ostatní koule. Výsledkem bude vychýlení třetí koule. Kolik procent původní mechanické energie předá 1. koule kouli číslo 3 ?

Řešení :

$m_1 : m_2 : m_3 = 4 : 2 : 1$, v_1 ; $x\,(\%) = (E_{k3}/E_{k1}) \cdot 100 = ?$

Předpoklad: soustava je uzavřená, mezi koulemi dochází k pružným středovým rázům. Pro takové rázy platí nejen zákon zachování hybnosti, ale rovněž zákon zachování mechanické energie.
Srážky budeme vyšetřovat postupně.

Obr. 5.4

Označení: $\vec{v}_1'$ - rychlost 1. koule po rázu s 2. koulí
$\vec{v}_2$ - rychlost 2. koule po rázu s 1. koulí
$\vec{v}_2'$ - rychlost 2. koule po rázu s 3. koulí
$\vec{v}_3$ - rychlost 3. koule po rázu s 2. koulí

Pro tyto rázy tedy platí:

$$m_1\,\vec{v}_1 \;=\; m_1\,\vec{v}_1' \;+\; m_2\,\vec{v}_2\;, \qquad (1)$$

$$\tfrac{1}{2}\,m_1\,(\vec{v}_1)^2 \;=\; \tfrac{1}{2}\,m_1\,(\vec{v}_1')^2 \;+\; \tfrac{1}{2}\,m_2\,(\,\vec{v}_2)^2\;, \qquad (2)$$

$$m_2\,\vec{v}_2 \;=\; m_2\,\vec{v}_2' \;+\; m_3\,\vec{v}_3\;, \qquad (3)$$

$$\tfrac{1}{2}\,m_2\,(\vec{v}_2)^2 \;=\; \tfrac{1}{2}\,m_2\,(\vec{v}_2')^2 \;+\; \tfrac{1}{2}\,m_3\,(\vec{v}_3)^2\;. \qquad (4)$$

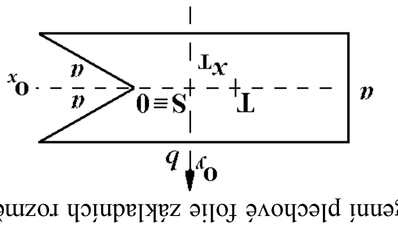
Řešením soustav rovnic (1), (2) a (3), (4) dostaneme vztahy

5.19. Ve vrcholech $A_1 = [2;\,0;\,0]$ m, $A_2 = [?;\,?;\,?]$ m, $A_3 = [-1;\,0;\,-\sqrt{3}\,]$ m, $A_4 = [-1;\,0;\,\sqrt{3}\,]$ m pravidelného čtyřstěnu jsou po řadě umístěny hmotné body o hmotnostech 1, 2, 3 a 4 kg. Určete polohu jejich hmotného středu.

***5.20.** Určete polohu hmotného středu tenkého homogenního drátu hmotnosti m ohnutého do tvaru půlkružnice poloměru R.

***5.21.** Určete polohu hmotného středu tenkého homogenního drátu délky l, $l < \pi\,R$, ohnutého do tvaru kruhového oblouku poloměru R .

5.22. Nalezněte souřadnice těžiště homogenní plechové folie základních rozměrů a, b a následujícího tvaru (*obr.5.5*) .
Orientaci souřadných os volte podle obrázku.
Po nalezení obecného řešení rozhodněte, je-li poloha těžiště T v obrázku zakreslena správně.



Obr. 5.5

***5.23.** Určete polohu hmotného středu plné homogenní polokoule poloměru R.

***5.24.** Najděte polohu hmotného středu pláště přímého rotačního kužele (trychtýř) poloměru podstavy R a výšky v.

***5.25.** Zjistěte polohu hmotného středu plného homogenního kužele poloměru podstavy R a výšky v.

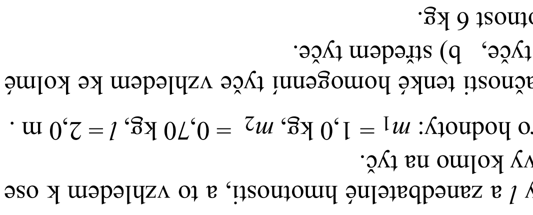
5.26. Určete moment setrvačnosti dvou malých kuliček o hmotnostech m_1 a m_2, které jsou spojeny tyčí délky l a zanedbatelné hmotnosti, a to vzhledem k ose procházející těžištěm soustavy kolmo na tyč.
Číselný výpočet proveďte pro hodnoty: m_1 = 1,0 kg, m_2 = 0,70 kg, l = 2,0 m .

5.27. Vypočtěte moment setrvačnosti tenké homogenní tyče vzhledem ke kolmé ose procházející a) koncem tyče, b) středem tyče.
Délka tyče je 2 m a její hmotnost 6 kg.

Řešení :

l = 2 m, m = 6 kg ; J = ?

Vzhledem k zjevné jednorozměrnosti řešené úlohy orientujeme osu o_x rovnoběžně s podélnou osou tyče.



Obr. 5.6

b) V mořské vodě připadá na 10 000 atomů vodíku 1,16 atomu těžkého vodíku - deuteria, které je perspektivním palivem fúzních jaderných elektráren. Odhadněte hmotnost veškerého deuteria nacházejícího se ve vodách Tichého oceánu.

10.3. Dokažte, že molární objem V_m látky lze také vypočíst dle vztahu: $V_m = M/\rho$, kde M je molární hmotnost látky, ρ její hustota. Podle tohoto vztahu vypočtěte objem 1 molu olova při teplotě 20 °C.

10.4. Odhadněte průměr atomu mědi!

10.5. Současné špičkové vývěvy dovolují snížit tlak plynu až na $p = 6{,}6 \cdot 10^{-15}$ Pa (při pokojové teplotě). Předpokládejte, že plynem je dusík a stanovte počet jeho molekul v objemu V = 1 cm^3 a jejich střední vzdálenost při uvedeném tlaku.

10.6. Směs plynů se skládá z vodíku (H_2) a oxidu uhelnatého (CO). V jakém procentuálním množství jsou hmotnosti těchto plynů ve směsi zastoupeny, jsou-li jejich parciální tlaky v dané směsi: p_H = 68,6 kPa, p_{CO} = 127,5 kPa ?

10.7. Jaká je střední kvadratická rychlost Brownova pohybu saze hmotnosti $m = 10^{-10}$ g ve vzduchu teploty t = 17 °C ?

10.8. Určete hmotnost molekuly kyslíku, její střední velikost rychlosti, nejpravděpodobnější a střední kvadratickou rychlost při teplotě 0 °C !

Řešení:

t = 0 °C, T = 273 K, $k_B = 1{,}381 \cdot 10^{-23}$ J·K^{-1}, $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ mol^{-1};
m_m = ?, v_s = ?, v_p = ?, v_k = ?

Protože 1 mol látky obsahuje N_A molekul, lze z molární hmotnosti M látky vypočíst hmotnost molekuly m_m podle vztahu

$$m_m \;=\; M \,/\, N_A\;.$$

Tedy hmotnost molekuly kyslíku je rovna

$$m_m(O_2) \;=\; \frac{M\,(O_2)}{N_A} \;=\; \frac{32 \cdot 10^{-3}}{6{,}022 \cdot 10^{23}}\ \mathrm{kg} \;=\; 5{,}314 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}\;.$$

Hmotnost molekuly kyslíku je přibližně $5 \cdot 10^{-26}$ kg.

Střední velikost rychlosti v_s je veličina, určená aritmetickým průměrem velikostí okamžitých rychlostí všech molekul

$$v_s \;=\; \int v \cdot \mathrm{f}(v)\ \mathrm{d}\,v \;=\; \sqrt{8 k_B\,T\,\pi^{-1}\,m_m^{-1}} \;=\; \sqrt{\frac{8\,R\,T}{\pi\,M}}\;,$$

kde f(v) je distribuční funkce rychlosti molekul (Maxwellova rozdělovací funkce).

10.15. Na autogenní svár se spotřebovalo m = 3,2 kg kyslíku z jedné bomby. Jaký minimální objem musí mít tato bomba, jestliže materiál z něhož je vyrobena snese přetlak maximálně Δp = 14,7 MPa ? Teplota plynu v bombě je stále 17 °C.

10.16. Kompresor nasává při každém zdvihu V_1 = 4 litry vzduchu o tlaku p_1 = = 0,1 MPa, teplotě t_1 = –3 °C a stlačuje jej do nádrže objemu V_2 = 0,5 m^3 . Teplota v nádrži kolísá kolem t_2 = 47 °C. Kolik zdvihů musí učinit kompresor, aby se tlak v jeho nádrži zvýšil na p_2 = 200 kPa ?

***10.17.** Pístovou vývěvou je vyčerpávána nádoba objemu V. V jednom cyklu odčerpá vývěva objem ΔV plynu. Kolik cyklů je třeba udělat, aby tlak plynu v nádobě klesl k-krát? Proces považujte za izotermický. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $\Delta V \,/\, V$ = 1/20, a) k = 10, b) k = 1 000.

10.18. m = 0,1 kg argonu o výchozím tlaku $p_1 = 10^5$ Pa a objemu V_1 = 40 l stlačíme na objem V_2 = 8 l a tlak p_2 = 0,5 MPa tak, že počáteční a konečná teplota je stejná. Jaká bude nejvyšší teplota argonu při této změně, je-li závislost tlaku na objemu lineární?

10.19. Do 420 g vody teploty 16 °C byl vhozen led hmotnosti 210 g, teploty –1 °C. Poté bylo do této lázně vpuštěno 54 g vodní páry teploty 100 °C. Určete teplotu výsledné fáze vody. Tepelné ztráty zanedbejte.(Měrné tepelné kapacity vody a ledu počítejte 4200 a 2100 J·kg^{-1}·K^{-1}, měrné skupenské teplo výparné vody 2255,5 kJ·kg^{-1}, měrné skupenské teplo tání ledu 333,7 kJ·kg^{-1}, při teplotě tání ledu 0 °C).

Řešení:

m_1 = 420g = 0,42 kg, m_2 = 210g = 0,21 kg, m_3 = 54g = 0,054 kg, t_1 = 16 °C, t_2 = –1 °C, t_3 = 100 °C, c_1 = 4 200 J·kg^{-1}·K^{-1}, c_2 = 2100 J·kg^{-1}·K^{-1}, t_{t2} = 0 °C, l_{v3} = 2 255 500 J·kg^{-1} , l_{t2} = 333 700 J·kg^{-1}; t = ?

Q_v ..... část vnitřní energie předaná teplejší částí soustavy (pára) části chladnější (led + voda) při vzájemné tepelné výměně,

Q_p ..... část vnitřní energie přijatá chladnější částí soustavy od původně teplejší části při dané tepelné výměně.

Za předpokladu, že soustava nevyměňuje žádné formy energie s okolím (izolovaná soustava), platí zákon zachování vnitřní energie, tak zvaná *kalorimetrická rovnice*

$$Q_v \;=\; Q_p\;, \qquad (1)$$

$$Q_v \;=\; m_3\,l_{v3} \;+\; m_3\,c_1\,(t_3 - t)\;, \qquad (2)$$

$$Q_p \;=\; m_1\,c_1\,(t - t_1) \;+\; m_2\,c_2\,(t_{t2} - t_2) \;+\; m_2\,l_{t2} \;+\; m_2\,c_1\,(t - t_{t2})\;. \qquad (3)$$

Po dosazení (2) a (3) do (1) máme

$$m_3\,l_{v3} + m_3\,c_1\,t_3 - m_3\,c_1\,t \;=\; m_1\,c_1\,t \;-\; m_1\,c_1\,t_1 + m_2\,c_2\,t_{t2} \;-\; m_2\,c_2\,t_2 \;+$$
$$+\; m_2\,l_{t2} \;+\; m_2\,c_1\,t \;-\; m_2\,c_1\,t_{t2}\;.$$

Řešení :

$m_1 = 5$ kg, $m_2 = 6$ kg, $m_3 = 3$ kg, $g = 10$ m·s^{-2} ; $a_x = ?$

Osu o_x orientujeme svisle vzhůru, moment setrvačnosti pevné kladky označíme J_0, těleso 1 se bude pohybovat se zrychlením a_x vzhůru, těleso 2 se stejně velkým zrychlením dolů. Časová změna $\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t$ točivosti soustavy těles a kladky bude rovna výslednému momentu $\vec{M}$ vnějších sil

$$\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t = \vec{M} \ .$$

Předchozí rovnici rozepíšeme do složek, nenulové hodnoty dostaneme pouze pro směr kolmý na nákresnu:

změna točivosti kladky: $J_0\,\varepsilon = \tfrac{1}{2}\, m_3 R^2 \varepsilon = \tfrac{1}{2}\, m_3 R^2 \cdot a_x/R$,

změna točivosti těles 1,2 : $m_{1,2} \cdot (\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t) \cdot R = m_{1,2}\, a_x R$,

výsledný moment vnějších sil: $(m_2 - m_1) \cdot gR$.

$$\tfrac{1}{2}\, m_3 R\, a_x + m_1 a_x R + m_2 a_x R = (m_2 - m_1) \cdot gR \ .$$

Po zjednodušení vyjádříme zrychlení prvního tělesa

$$a_x = 2\,(m_2 - m_1) \cdot g \,/\, (2m_1 + 2m_2 + m_3) \ .$$

Číselně: $a_x = 2\cdot(6 - 5) \cdot 10 \,/\, (2\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3)$ m·s^{-2} $= 0{,}8$ m·s^{-2} .

První těleso se bude pohybovat se zrychlením velikosti 0,8 m·s^{-2} svisle vzhůru, druhé těleso se stejně velkým zrychlením opačným směrem.

5.34. Na tenké obruči hmotnosti $m_o = 9$ kg volně otáčivé kolem vodorovné osy je namotána šňůra, na jejímž konci je upevněno závaží hmotnosti $m_z = 2$ kg. S jak velkým zrychlením se závaží pohybuje při odmotávání šňůry?

5.35. Za jak dlouho spadne vědro hmotnosti $m_v = 5$ kg do studny hluboké 10 m ? Vědro je zavěšené na provaze, který se odvíjí z rumpálu majícího moment setrvačnosti $J_r = 2$ kg·m^2 a poloměr $R = 10$ cm. Hmotnost provazu, tření a odpor vzduchu raději zanedbejme.

***5.36.** Na válci hmotnosti m a poloměru R, položeném kolmo přes dva rovnoběžné horizontální nosníky, je navinuto vlákno, zatížené závažím hmotnosti m_1. Určete velikost posuvného zrychlení válce ve vodorovném směru. Hmotnost vlákna a odpor vzduchu zanedbejte. Číselně řešte pro $m/m_1 = 4$.

5.37. Na kladku válcového tvaru poloměru R a hmotnosti M je namotána nit zanedbatelné hmotnosti, na jejímž konci je připevněno těleso hmotnosti m. V čase $t = 0$ se celý systém uvedl do pohybu. Najděte (při zanedbání tření v ose kladky) časovou závislost

a) úhlové rychlosti otáčení kladky,

b) kinetické energie celého systému.

5.38. V důsledku tření se talíř gramofonu, konající 33 a 1/3 otáčky za minutu, zastaví po vypnutí pohonu za $t = 1{,}2$ min. Talíř je disk hmotnosti $m = 2$ kg a poloměru $R = 15$ cm. Jaký je průměrný moment sil tření způsobující zastavení?

***5.39.** Lodní stabilizační setrvačník má moment setrvačnosti $J = 112{,}5\cdot 10^3$ kg·m^2 a otáčí se s frekvencí $f = 15$ Hz kolem svislé osy. Za jakou dobu je možno setrvačník takto roztočit motorem o výkonu $P = 75$ kW a jakým momentem napřimuje loď, která je nucena kývat s úhlovou rychlostí $\omega = 1$ úhlový stupeň za sekundu ?

5.40. Setrvačník rotující s frekvencí $f_1 = 10$ Hz má kinetickou energii $E_{k1} = 8\,000$ J. Za jakou dobu je možné momentem síly velikosti $M = 50$ N·m zdvojnásobit frekvenci otáčení?

5.41. Homogenní kruhová deska o hmotnosti 2 kg a poloměru 10 cm kýve jako fyzické kyvadlo kolem vodorovné osy procházející obvodem desky. Určete periodu a redukovanou délku tohoto kyvadla.

Řešení :

$m = 2$ kg, $R = 0{,}1$ m, $g = 9{,}81$ m·s^{-2}; $T = ?$, $l_r = ?$

Dobu kmitu T fyzického kyvadla vypočteme z odvozeného vztahu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}} \ , \qquad (1)$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose kývání, m – hmotnost kyvadla, a – vzdálenost osy kyvu od těžiště (pro náš případ $a = R$).
K výpočtu momentu setrvačnosti J použijeme Steinerovu větu:

$$J = J_S + ma^2 = \tfrac{1}{2}\, mR^2 + mR^2 = 3mR^2/2 \ ,$$

kde J_S je moment setrvačnosti desky vzhledem k ose procházející středem desky a kolmé na její rovinu (viz **5.28.**).
Po dosazení za J do vztahu (1) dostaneme pro dobu kmitu vztah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}} = 2\pi \sqrt{\frac{3\cdot 0{,}1}{2\cdot 9{,}81}}\ \mathrm{s} = 0{,}78\ \mathrm{s} \ .$$

Redukovaná délka l_r fyzického kyvadla je rovna délce matematického kyvadla majícího stejnou dobu kmitu. Odtud

$$l_r / g = J / (mgR) \quad \Rightarrow \quad l_r = 3R/2 = 3\cdot 0{,}1 / 2\ \mathrm{m} = 0{,}15\ \mathrm{m} \ .$$

Doba kmitu desky nezávisí na její hmotnosti a je rovna 0,78 s, redukovaná délka kyvadla je 15 centimetrů.

9.72. V prostředí, jehož hladina hluku pozadí jsou 73 dB, byl měřen hluk stroje. Byla naměřena hodnota 80 dB. Jak velký by byl hluk stroje (jeho hladina hluku), kdybychom prováděli měření v tiché laboratoři ?

Řešení:

$L_p = 73$ dB, $L = 80$ dB ; $L_x = ?$

Podle principu aditivnosti intenzity hluku platí

$$I = I_p + I_x \ , \qquad (1)$$

kde I je intenzita hluku stroje s hlučným pozadím, I_p je intenzita hluku pozadí a I_x intenzita hluku stroje v tiché laboratoři (bez pozadí). Z rovnice (1) plyne vztah

$$I_x = I - I_p \ . \qquad (2)$$

Protože hladiny těchto intenzit jsou definovány vztahy

$$L = 10 \cdot \log\,(I/I_0) \ , \qquad L_{p,x} = 10 \cdot \log\,(I_{p,x}/I_0) \ ,$$

($I_0 = 10^{-12}$ W·m^{-2}, L – hladina hluku stroje s pozadím, L_p – hladina hluku pozadí a L_x – hladina hluku stroje bez pozadí), platí

$$10^L = (I/I_0)^{10} \ , \qquad (10)^{Lp,x} = (I_{p,x}/I_0)^{10} \ ,$$

a rovněž

$$I = I_0\,(10)^{0{,}1L} \ , \qquad I_{p,x} = I_0 \cdot (10)^{Lp,x/10} \ . \qquad (3)$$

Dosazením rovnic (3) do vztahu (2) dostaneme

$$I_x = I_0 \cdot [\,(10)^{L/10} - (10)^{Lp/10}\,] \ ,$$

odkud

$$L_x = 10 \cdot \log\,[(10)^{L/10} - (10)^{Lp/10}\,] \ .$$

Číselně: $L_x = 10 \cdot \log\,(10^8 - 10^{7{,}3})$ dB $= 79{,}0$ dB .

Hladina hluku stroje (bez pozadí) je 79 dB.

9.73. Vypočtěte efektivní akustický tlak tónu frekvence 1 000 Hz, jehož intenzita odpovídá prahu slyšitelnosti I_0 . Výpočet proveďte pro normální podmínky.

***9.74.** Jaký je vyzařovaný výkon zvukového zdroje o malých rozměrech (bodový zdroj), je-li ve vzdálenosti 100 m od něho tlaková amplituda ve vzduchu 0,1 Pa ?

Úlohu řešte za předpokladu, že intenzita zvuku je ve všech směrech stejná a že útlum je zanedbatelný. Vlnový odpor prostředí (akustická impedance) vzduchu je $Z_c = 415$ Pa·s·m^{-1}.

Řešení:

$r = 100$ m , $p_m = 0{,}1$ Pa , $Z_c = \rho\cdot c = 415$ Pa·s·m^{-1} ; $P = ?$

Elementární vyzářený akustický výkon dP zdroje je roven d$P = I\cdot$dS ; celkový výkon P vyzářený zdrojem do okolí

$$P = \int_{(S)} I\, \mathrm{d}S \ .$$

Podle předpokladu je intenzita zvuku ve všech směrech stejná, pak

$$P = I \cdot 4\pi r^2 \ . \qquad (1)$$

Intenzita I zvuku závisí na amplitudě p_m akustického tlaku vztahem

$$I = \frac{p_m^2}{2\rho\, c} \ . \qquad (2)$$

Po dosazení do rovnice (1) vychází pro výkon zdroje vztah

$$P = 2\pi \cdot p_m^2\, r^2 / (\rho\cdot c) \ .$$

Číselně: $P = 2\pi\cdot 10^{-2}\cdot 10^4 / 415$ W $= 1{,}514$ W $\approx 1{,}5$ W .

Výkon akustického zdroje je přibližně 1,5 wattu.

***9.75.** Zvuk se šíří potrubím délky $d = 50$ m. Střední součinitel zeslabení je $\alpha = 10^{-2}$ m^{-1}. Jaká je hladina intenzity zvuku na konci potrubí, když na začátku potrubí je jeho hladina $L_1 = 60$ dB?

Poznámka: Součinitel zeslabení α popisuje pokles amplitudy vlny se vzdáleností x od zdroje způsobený absorpcí v homogenním prostředí; pro případ rovinné vlny šířící se ve směru osy o_x je potom $u\,(x;t) = u_m \cdot \mathrm{e}^{-\alpha x} \cdot \cos\,(\omega t - kx)$.

***9.76.** Kompresor vydává v bezprostřední blízkosti při práci hluk o hladině intenzity $L = 60$ dB. Za daných podmínek je součinitel zeslabení zvukové vlny ve vzduchu roven $\alpha = 0{,}023$ m^{-1}. Předpokládejte, že zvuk vydávaný strojem se šíří jako tlumená rovinná vlna. Vypočtěte

a) intenzitu hluku a efektivní akustický tlak těsně u kompresoru,

b) hladinu intenzity L_1 ve vzdálenosti $x_1 = 50$ m,

c) souřadnici x_2 místa, ve kterém už hluk nebude slyšet.

10. Molekulová fyzika. Termodynamika.

10.1. Určete hustotu směsi, která obsahuje 4 g vodíku a 32 g kyslíku při teplotě 7 °C za tlaku 700 torrů.

Řešení:

$m_H = 4 \text{ g} = 4 \cdot 10^{-3}$ kg, $m_O = 32 \text{ g} = 32 \cdot 10^{-3}$ kg, $t = 7$ °C, $T = 280$ K, $p = 700$ torr; $\rho = ?$

Převod torrů na pascaly: 700 torrů je tlak rtuťového sloupce výšky 700 mm. Tlak vzduchu za normálních podmínek vyjádřený v pascalech činí 101 325 Pa, což odpovídá tlaku rtuťového sloupce výšky 760 mm, tj. 760 torr = 101 325 Pa. Odtud platí

$$1 \text{ torr} = \frac{101\,325}{760} \text{ Pa}, \quad 700 \text{ torrů} = \frac{700 \cdot 101\,325}{760} \text{ Pa} = 93\,325{,}657 \text{ Pa}.$$

Hustotu ρ homogenního tělesa definujeme jako podíl jeho hmotnosti m a objemu V

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_H + m_O}{V}, \tag{1}$$

kde objem směsi určíme ze stavové rovnice ideálního plynu

$$p\,V = n\,R\,T. \tag{2}$$

Pro látkové množství n směsi plynů platí

$$n = m_H / M_{H_2} + m_O / M_{O_2}. \tag{3}$$

Užitím (2) a (3) dostáváme pro objem vztah

$$V = (R\,T/p) \cdot (m_H / M_{H_2} + m_O / M_{O_2}). \tag{4}$$

Výsledný vztah pro výpočet hustoty dané směsi plynů dostaneme užitím vztahů (1) a (4):

$$\rho = \frac{(m_H + m_O)\,p}{RT(m_H / M_{H_2} + m_O / M_{O_2})}.$$

Číselně: $\rho = \dfrac{36 \cdot 10^{-3} \cdot 93\,325{,}657}{8{,}314 \cdot 280 \cdot [4/(2 \cdot 1{,}008) + 32/(2 \cdot 15{,}999)]}$ kg·m^{-3} =
$= 0{,}483$ kg·m^{-3}.

Hustota směsi plynů je 0,483 kg·m^{-3} (při teplotě 7 °C a tlaku 700 torr).

10.2. a) Kolik atomů je v lidském těle o hmotnosti $m = 73$ kg ? Hmotnostní zastoupení μ jednotlivých prvků v organizmu je následující: 65% O_2, 18,5% C, 9,5% H_2, 3,3% N_2, 1,5% Ca, 1% P (zbylých 1,2 % dalších prvků ignorujte). Kterých atomů je v lidském těle nejvíce ?

Moment setrvačnosti dJ_a úseku tyče o délce dx a hmotnosti dm (dm = (m/l) dx) vzdáleného od osy o_a o délku x se vypočte ze vztahu

$$\mathrm{d}J_a = x^2\,\mathrm{d}m = (m/l)\,x^2\,\mathrm{d}x,$$

a moment celé tyče integrací přes její délku

$$J_a = \int_0^l \mathrm{d}J_a = \frac{m}{l}\int_0^l x^2\,\mathrm{d}x = \frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{m\,l^2}{3}.$$

K výpočtu momentu setrvačnosti vzhledem k ose o_b použijeme Steinerovu větu

$$J_a = J_S + m\,a^2,$$

kde $a = l/2$ je vzdálenost os o_a a o_b, $J_S \equiv J_b$ moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm. Potom

$$J_b = J_a - m\,(l/2)^2 = m\,l^2\,(1/3 - 1/4) = m\,l^2/12.$$

Číselně: $J_a = 6 \cdot 2^2/3$ kg·m^2 = 8,0 kg·m^2, $J_b = 6 \cdot 2^2/12$ kg·m^2 = 2,0 kg·m^2.

Moment setrvačnosti tyče vzhledem ke kolmé ose procházející jejím koncem je 8 kilogram krát metr na druhou, vzhledem k ose procházející jejím těžištěm je menší a roven 2 kg·m^2.

*__5.28.__ Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní kruhové desky hmotnosti m = = 10 kg a poloměru R = 20 cm vzhledem k ose, jdoucí kolmo středem desky.

5.29. V homogenním disku poloměru R = 0,20 m je udělán kruhový výřez poloměru 0,10 m, jehož střed leží ve vzdálenosti 0,10 m od středu disku. Celková hmotnost zbytku disku je m = 7,3 kg. Vypočtěte moment setrvačnosti objektu vzhledem k ose procházející těžištěm a kolmé k rovině disku.

*__5.30.__ Určete moment setrvačnosti homogenní desky tvaru čtverce hmotnosti m a o straně délky a, vzhledem k ose ležící v jeho úhlopříčce.

*__5.31.__ Určete moment setrvačnosti plné homogenní koule hmotnosti m a poloměru R vzhledem k ose jdoucí jejím středem.

5.32. Kulička hmotnosti m byla vržena pod úhlem α k horizontu počáteční rychlostí $\vec{v}_0$. Najděte časovou závislost velikosti momentu hybnosti (točivosti) kuličky vzhledem k místu vrhu. Vypočtete velikost tohoto vektoru ve vrcholu trajektorie, je-li m = 0,130 kg, α = 45° a v_0 = 25,0 m·s^{-1}.

5.33. Dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 ($m_2 > m_1$) jsou spojena vláknem zanedbatelné hmotnosti vedeným přes kladku, kterou považujeme za homogenní válec hmotnosti m_3 a poloměru R. Určete zrychlení soustavy těles.
Číselně řešte pro hodnoty m_1 = 5 kg, m_2 = 6 kg, m_3 = 3 kg, g = 10 m·s^{-2}.

5.42. Tyč délky l = 2 m kýve jako fyzické kyvadlo kolem vodorovné osy jdoucí koncovým bodem tyče. Určete redukovanou délku tohoto fyzického kyvadla.

*__5.43.__ a) V jaké vzdálenosti a od středu bychom měli zavěsit desku z příkladu **5.41.**, aby kývala s minimální dobou kmitu?

b) Jak velká bude tato minimální doba kmitu?

5.44. Které ze tří těles (koule, válec a obruč) se bude pohybovat (bez klouzání) na téže nakloněné rovině s náklonem α s největším zrychlením ? Úlohu řešte

a) pomocí druhé impulsové věty,

b) prostřednictvím zákona zachování mechanické energie.

c) Jak velké translační rychlosti dosáhnou uvedená tělesa na konci nakloněné roviny, valí-li se z výšky h = 1 m ?

Odpor vzduchu proti pohybu těles zanedbejte.

5.45. Vypočtěte kinetickou energii rotačního pohybu Země a kinetickou energii jejího oběžného pohybu. Srovnejte velikosti obou energií.

5.46. Disk má hmotnost m = 2 kg a valí se bez tření po vodorovné rovině rychlostí velikosti v = 4 m·s^{-1}. Určete jeho kinetickou energii.

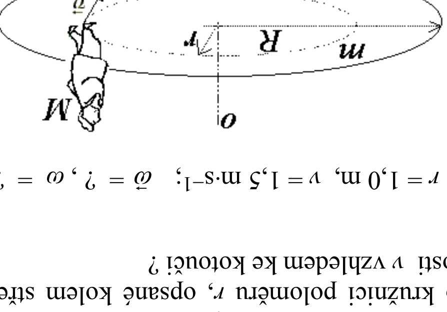
5.47. Vypočtěte kinetickou energii cyklisty včetně kola jedoucího stálou rychlostí velikosti v = 9 km·h^{-1}. Hmotnost cyklisty včetně kola je m = 81 kg. Předpokládejte, že celková hmotnost kol m_k = 4 kg je soustředěna na jejich obvodu.

5.48. Jakou práci musíme vynaložit, chceme-li roztočit tyč z příkladu **5.27.** tak, aby rotovala s frekvencí f = 10 Hz ?

5.49. Na vodorovně umístěném homogenním kotouči hmotnosti m a poloměru R, který je v klidu, stojí člověk hmotnosti M. Kotouč se může otáčet kolem svislé osy, procházející jeho středem. Jakou úhlovou rychlostí se bude kotouč otáčet, rozběhne-li se člověk po kružnici poloměru r, opsané kolem středu kotouče, relativní rychlostí velikosti v vzhledem ke kotouči ?

Řešení :

m = 15 kg, M = 80 kg, R = 1,5 m, r = 1,0 m, v = 1,5 m·s^{-1}; $\vec{\omega}$ = ? , ω = ?



Obr. 5.7

Můžeme předpokládat, že točivost soustavy člověk-kotouč se po rozběhnutí člověka nezmění. Celkovou točivost soustavy vzhledem k inerciálnímu systému označíme $\vec{L}$ ($\vec{L} = \vec{0}$), točivost člověka $\vec{L}_č$ a točivost kotouče $\vec{L}_k$. $\vec{\omega}'$ nechť je úhlová rychlost pohybu člověka vzhledem ke kotouči a $\vec{\omega}$ - úhlová rychlost kotouče vzhledem k nehybnému

$$f_e = \frac{c + v_2}{c - v_1}\,f_0 = \frac{340 + 15}{340 - 30}\,500 \text{ Hz} = 572{,}6 \text{ Hz}.$$

f) Pohybují-li se zdroj a pozorovatel navzájem opačnými směry, platí pro vnímaný kmitočet

$$f_f = \frac{c - v_2}{c + v_1}\,f_0 = \frac{340 - 15}{340 + 30}\,500 \text{ Hz} = 439{,}2 \text{ Hz}.$$

9.66. Masivní zvučící ladička se kolmo přibližuje ke stěně rychlostí velikosti v = = 25 m·s^{-1}. Pozorovatel, který je na opačné straně ladičky než stěna, slyší rázy kmitočtu f_r = 3 Hz. Vypočítejte kmitočet ladičky.
Rychlost zvuku ve vzduchu má velikost c = 340 m·s^{-1}.

9.67. Pozorovatel stojící blízko trati expresního vlaku slyší tón vydávaný píšťalou vlaku při jeho přibližování o kvintu vyšší než při jeho vzdalování. Jak velká je rychlost vlaku?
V intervalu kvinty je poměr kmitočtů $f_1 : f_2$ = 3:2, rychlost zvuku ve vzduchu má za daných podmínek velikost 340 m·s^{-1}.

*__9.68.__ Při pozorování záření spektrálních čar přicházejícího ze směrů odpovídajících opačným okrajům slunečního disku (na slunečním rovníku) byl zjištěn relativní rozdíl v naměřených vlnových délkách $\Delta\lambda/\lambda_0$ rovný $1{,}36 \cdot 10^{-5}$.
Z naměřených údajů a ze známého poloměru Slunce stanovte periodu sluneční rotace. Rychlost šíření elektromagnetického vlnění ve vakuu $3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}.

*__9.69.__ Ve spektru kvasaru 3C – 454 byly objeveny emisní čáry vodíku, které mají v pozemských laboratořích vlnové délky 121,6 nm, 410,2 nm a 486,1 nm, výrazně posunuty k "červenému konci" elektromagnetického spektra. Nechť naměřené vlnové délky byly po řadě 339,3 nm, 1123,9 nm a 1336,8 nm.
Z experimentálně stanoveného relativního posuvu vlnových délek spektrálních čar je možné prostřednictvím Dopplerova principu určit rychlost vzdalování kvasaru od naší galaxie. Pokuste se o to !
Rychlost šíření elektromagnetického vlnění ve vakuu $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}.

AKUSTIKA

9.70. Rozdíl hladin intenzity dvou zvuků je ΔL = 1 dB.

a) Jaký je poměr jejich intenzit ?

b) Jaký je poměr jejich akustických tlaků ?

9.71. V dílně je zapnut jeden stroj, který vytváří hluk o určité hladině intenzity. O kolik decibelů se hladina intenzity hluku zvýší, pokud bude v činnosti
a) 3, b) 5, c) 10 stejných strojů?
(Předpokládáme nekoherentní zvuková vlnění, jejichž intenzity jsou zhruba stejné ve všech místech dílny.)

6. Gravitační pole. Pohyb těles s proměnnou hmotností.

6.1. Hmotnost Země je asi 81× větší než hmotnost Měsíce. Průměrná vzdálenost středů obou těles je 60 zemských poloměrů. Jak velkou gravitační silou působí Země na Měsíc a naopak ?

6.2. a) Vypočítejte velikost gravitačního zrychlení na Měsíci a vaši tíhu tamtéž. Hmotnost Měsíce je 0,0123 hmotnosti Země a poloměr Měsíce je 0,273 poloměru Země. Gravitační zrychlení g_Z na povrchu Země počítejte 9,81 m·s^{-2}.

b) Asteroid *Ceres* má poloměr 1100 km a hmotnost $7 \cdot 10^{20}$ kg. Jaké je gravitační zrychlení na povrchu asteroidu ? Jaká by byla vaše tíha na Ceresu ?

c) V jaké výšce h nad povrchem Země má gravitační zrychlení danou velkost g_h ? Řešte nejprve obecně a potom pro hodnotu $g_h = 2$ m·s^{-2} .

***6.3.** Dokažte, že geometrické místo bodů, v nichž je velikost přitažlivých sil Slunce a Země, působících na totéž těleso, stejná, je kulová plocha se středem na úsečce Země - Slunce ve vzdálenosti $M_Z \cdot d\,/\,(M_S - M_Z)$ od středu Země a o poloměru $d\sqrt{M_S M_Z / (M_S - M_Z)}$, kde M_S je hmotnost Slunce, M_Z – hmotnost Země, d – vzdálenost Země–Slunce.

6.4. Družice, pohybující se po kruhové dráze poloměru $r = 2{,}0 \cdot 10^4$ km v rovníkové rovině Země ze západu na východ, se objevuje nad určitým bodem na rovníku každých $\tau = 11{,}6$ hodiny. Vypočtěte z těchto údajů hmotnost Země.

6.5. Dvojhvězda je systém skládající se ze dvou hvězd, pohybujících se pod vlivem přitažlivé síly kolem společného těžiště. Měřením bylo zjištěno, že vzdálenost složek dvojhvězdy je $d = 1{,}5 \cdot 10^{10}$ m doba jednoho oběhu činí T = = 196,3 h a. Jaká je celková hmotnost systému?

6.6. Dokažte, že doba oběhu pasivní družice, pohybující se bezprostředně u povrchu planety (bez ovzduší) závisí pouze na střední hustotě ρ sféricky symetrické planety. Stanovte dobu oběhu takové družice kolem planet o středních hustotách 690 kg·m^{-3}, 1 000 kg·m^{-3} a 5 500 kg·m^{-3} !

6.7. V tabulce jsou uvedeny údaje pro některé Saturnovy měsíce, jejichž oběžná dráha je kruhová.

Měsíc	Poloměr ob. dráhy	Doba oběhu	Oběžná rychlost
Tethys	$2{,}95 \cdot 10^5$ km	1,888 dne	
Dione	$3{,}77 \cdot 10^5$ km		
Titan	$12{,}22 \cdot 10^5$ km		

a) Doplňte chybějící údaje.

b) Vypočtěte hmotnost Saturnu.

6.8. J. Gagarin s lodí *Vostok* oběhl Zemi ve výšce h = 200 km nad jejím povrchem za T = 89 minut. Vypočítejte z těchto údajů:

a) výšku nad rovníkem, ve které se nachází geostacionární družice *ASTRA*,

b) periodu oběhu Měsíce, který obíhá po dráze poloměru $r_M = 3{,}84 \cdot 10^8$ m,

c) velikost oběžné rychlosti uvažované kosmické lodi.

6.9. Jak velkou rychlost ve vodorovném směru je třeba udělit tělesu ve výšce h = = 500 km nad zemským povrchem, aby se pohybovalo jako umělá družice Země po kruhové dráze? Poloměr Země měří přibližně 6 400 km.

6.10. O kolik by se zvětšila oběžná doba Měsíce, kdyby jeho hmotnost byla zanedbatelná vůči hmotnosti Země? Předpokládejte, že vzdálenost středů obou těles by se nezměnila.
Hmotnost Měsíce počítejte za 1/81,3 hmotnosti Země a jeho oběžnou dobu T_1 = = 27,32 dne.

***6.11.** Malé těleso začíná padat na Slunce ze vzdálenosti rovné poloměru zemské oběžné dráhy. Počáteční rychlost tělesa vzhledem k inerciálnímu systému spojenému se Sluncem je nulová. Najděte (s pomocí Keplerova zákona) dobu, za kterou těleso dopadne na Slunce.

Návod: pád tělesa na Slunce je možné považovat za pohyb po velice protáhlé elipse (v limitě degenerující v úsečku) s velkou poloosou rovnou polovině poloměru zemské oběžné dráhy.

***6.12.** Kosmická loď se pohybuje po kruhové trajektorii kolem Země ve výšce h_1 = = 740 km nad jejím povrchem. Z lodi na Zemi byl vyslán kontejner s výsledky vědecko-výzkumné práce. Hmotnost kontejneru je rovna 10 % hmotnosti celé kosmické lodi.

a) Stanovte jak velkou rychlost vzhledem k lodi a Zemi musí mít kontejner, aby se zastavil (v inerciálním systému spojeném se středem Země) a začal k Zemi padat volným pádem.

b) Určete velikost rychlosti kontejneru, se kterou se dostane na hranici troposféry (h_t = 18 km).Odpor vzduchu proti pohybu kontejneru zanedbejte.

c) Na hranici troposféry se otevřely padáky a kontejner koná přibližně rovnoměrně zpomalený pohyb. Určete velikost zpomalení tohoto pohybu, pokládáme-li rychlost dopadu na Zem za přibližně nulovou.

d) Popište pohyb lodi od okamžiku odpojení kontejneru. Jak se změní její trajektorie a jaká bude její rychlost po odpoutání kontejneru ?

***6.13.** V jaké vzdálenosti h od povrchu Země je velikost intenzity jejího gravitačního pole 100× menší než na jejím povrchu ?

***6.14.** V kterém místě na přímé spojnici mezi Zemí a Měsícem se intenzita společného gravitačního pole rovná nule? Hmotnost Měsíce počítejte jako 1/81 hmotnosti Země, vzdálenost d středů Země a Měsíce považujte za známou.

e) Fází Φ nazýváme argument funkce kosinus v rovnici (1). Budeme-li vztahovat fáze v různých místech ke stejnému časovému okamžiku bude rozdíl fází záviset pouze na vzdálenosti

$$|\Phi_2 - \Phi_1| = k_x |x_1 - x_2| = k_x |\Delta x| \,.$$

Po dosazení vychází rozdíl fází v prvním případě roven 2π, ve druhém pak π.

9.54. Jakou frekvenci má rovinná vlna, jejíž jistá vlnoplocha se za T = 12 s posune o n = 7,5 vlnových délek ?

9.55. Jaký je fázový rozdíl dvou v bodové řadě kmitajících HB, když jejich vzájemná vzdálenost je d = 2 m a vlnová délka λ = 0,5 m ?

9.56. Rovinná vlna je popsána rovnicí $u\,(x\,;\,t) = u_m \cdot \cos\,(\omega t - k_x x)$. Amplituda vlny je u_m = 10 cm, fázová rychlost c = 0,5 m·s^{-1} a vlnová délka λ = 5 cm. Najděte rovnovážnou polohu (souřadnici x) těch hmotných bodů, které budou mít v čase t = 5 s okamžitou výchylku 4 cm.

9.57. Dvě vlnění, která spolu interferují, mají stejné amplitudy (u_m = 1 mm) i vlnové délky a postupují stejným směrem. Jejich fáze se liší v každém bodě o $\Delta\Phi = \pi/4$ rad. Jaká je amplituda výsledného vlnění? Řešte početně i graficky.

***9.58.** Vyjádřete grupovou rychlost pro dané typy vlnění. V závorce je uveden vztah pro fázovou rychlost, platný pro vlnění daného typu:

a) šíření zvuku ve vzduchu (c = konst) ,

b) šíření gravitačních vln na povrchu kapalin ($c = \sqrt{g\lambda / 2\pi}$) ,

c) šíření kapilárních vln ($c = \mathrm{a} / \sqrt{\lambda}$) ,

d) šíření mechanických příčných vln v pružné tyči ($c = \mathrm{a} / \lambda$) ,

e) šíření elektromagnetických vln v ionosféře ($c = \mathrm{a} / (1 - \mathrm{b}\lambda^2)$) ;

a, b jsou konstanty, λ - vlnová délka.

STOJATÉ VLNĚNÍ

9.59. Nenapnuté kaučukové vlákno má délku l_0 = 40 cm. Napneme je do délky l_1 = 43 cm. Brkneme-li o ně při této délce, vydává nízký tón o frekvenci f_1.
Do jaké délky musíme toto vlákno napnout, aby při brnknutí vydávalo tón o dvojnásobné frekvenci ($2 f_1$) ?

9.60. Mosazná tyč délky l = 1 m je ve svém středu upevněna a její konec s pístem je vsunut do otevřeného rezonátoru *Kundtovy trubice*. Podélným rozkmitáním tyče vznikne chvění a v trubici se utvoří stojaté vlnění o vlnové délce λ_2 = = 20 cm. Určete rychlost zvuku v mosazi. Rychlost zvuku ve vzduchu je 340 m·s^{-1}.

9.61. Při podélném rozkmitání piezoelektrického rezonátoru ve tvaru destičky délky 2,53 cm uprostřed upevněné byl naměřen základní rezonanční kmitočet

66 kHz. Hustota materiálu byla 7 400 kg·m^{-3}. Z experimentálních údajů vypočtěte modul pružnosti v tahu piezoelektrika.

Kolik vyšších harmonických můžeme ještě pozorovat, máme-li k dispozici zařízení k měření kmitočtů o rozsahu 0 – 300 kHz ?

Řešení:

$d = 2{,}53 \cdot 10^{-2}$ m , f_0 = 66 kHz , ρ = 7 400 kg·m^{-3} ; E = ? , n = ?

Pro základní kmitočet f_0 vzniklého stojatého vlnění platí, že délka destičky d je rovna polovině vlnové délky (na koncích destičky kmitny, uprostřed uzel)

$$d = \lambda / 2 \,, \tag{1}$$

základní kmitočet souvisí s vlnovou délkou λ_0 a rychlostí c šíření vlny vztahem

$$f_0 = c / \lambda_0 \,. \tag{2}$$

Rychlost šíření podélného vlnění závisí na modulu pružnosti E a na hustotě materiálu ρ

$$c = \sqrt{E / \rho} \,. \tag{3}$$

Pomocí vztahů (1-3) vyjádříme závislost modulu pružnosti na zadaných veličinách

$$E = 4 d^2 f_0^2 \rho \,.$$

Číselně: $E = 4 \cdot (2{,}53 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (66 \cdot 10^3)^2 \cdot 7\,400$ Pa = 82,5 GPa .

Pro vyšší harmonické platí, že uprostřed vzorku musí být stále uzel, připadají tedy v úvahu pouze liché násobky základního kmitočtu, které musí splňovat navíc nerovnost

$(2n + 1) \cdot 66 \leq 300$ (v jednotkách kHz) .

Tato nerovnost je v celočíselném oboru splněna pouze pro n = 0 a n = 1. Frekvence odpovídající vyšší harmonické je f_1 = (2+1) · 66 = 198 kHz.

Modul pružnosti v tahu zkoumaného materiálu je roven 82,5 gigapascalu, na daném zařízení lze pozorovat pouze jednu vyšší harmonickou.

9.62. Měděná tyč délky l = 0,5 m je v prostředku upevněna. Po podélném rozkmitání začne vydávat tón. Určete základní kmitočet rozkmitané tyče a stanovte, kolik vyšších harmonických vln připadne na frekvenční interval 20 až 50 kHz.
Jaké jsou kmitočty těchto vyšších harmonických vln?

9.63. Na struně délky l = 1,2 m se vytvořila stojatá vlna se základním kmitočtem. Body struny, pro něž byla amplituda rovna $u_m(x)$ = 3,5 mm, byly od sebe vzdáleny 15 cm. Jaká byla v tomto případě maximální amplituda ?

9.64. Dvě struny stejné délky l = 0,5 m kmitají základním tónem. Ozývají se rázy frekvence f_r = 2 Hz. O kolik se liší fázové rychlosti zvuku c v obou strunách?

DOPPLERŮV PRINCIP

9.65. Automobil jede za bezvětří rychlostí velikosti 30 m·s^{-1} po přímé silnici. Kmitočet zvuku vydávaného klaksonem automobilu je 500 Hz. Jaká je vlnová délka zvukové vlny klaksonu

a) před automobilem, b) za automobilem ?

Jaký kmitočet zvuku slyší pozorovatel stojící u silnice

c) před automobilem, d) za automobilem ?

Jaký bude kmitočet zvuku, který uslyší jiný pozorovatel, sedící v automobilu jedoucím opačným směrem rychlostí o velikosti 15 m·s^{-1}

e) před setkáním obou aut, f) po jejich setkání ?

Řešení:

$v_1 = 30$ m·s^{-1}, $f_0 = 500$ Hz , $c = 340$ m·s^{-1}, $v_2 = 15$ m·s^{-1} ;
$\lambda_{a,b} = ?$, $f_{c,d} = ?$, $f_{e,f} = ?$

V případech a-d) jde o aplikaci Dopplerova principu při pohyblivém zdroji: pro kmitočet f vnímaný pozorovatelem (v klidu) platí vztah

$$f = \frac{c}{c \pm v} f_0 ,$$

kde c je rychlost šíření vlnění, v – rychlost pohybu zdroje a f_0 – kmitočet jím vydávaného zvuku. Znaménko (+) platí pro vzdalování, (–) pro přibližování zdroje k pozorovateli. Vlnové délky λ a λ_0 souvisí s kmitočty f a f_0 vztahy

$$\lambda = c / f \quad \text{a} \quad \lambda_0 = c / f_0 .$$

Z uvedených vztahů je možné vypočítat vlnové délky zvukového vlnění (λ_a a λ_b) před a za automobilem

$$\lambda_a = \frac{c - v_1}{f_0} = \frac{340 - 30}{500}\ \text{m} = 0{,}62\ \text{m} , \quad \lambda_b = 0{,}74\ \text{m} ,$$

kmitočty f_c a f_d vnímané pozorovatelem před a za automobilem

$$f_c = \frac{340}{340 - 30}\ 500\ \text{Hz} = 548{,}4\ \text{Hz}, \quad f_d = 459{,}5\ \text{Hz} .$$

e) Jestliže se pozorovatel pohybuje směrem ke zdroji vlnění rychlostí velikosti v_2 , je jím vnímaný kmitočet

$$f = \frac{c + v_2}{c} f_0 ,$$

při současně se pohybujícím zdroji (vstříc pozorovateli)

(inerciálnímu) systému, $J_č$ a J_k - jejich momenty setrvačnosti vzhledem k ose rotace. Potom

$$\vec{L}_č + \vec{L}_k = \vec{L}, \quad J_č(\vec{\omega} + \vec{\omega}') + J_k \vec{\omega} = \vec{0} ,$$

$$J_č\vec{\omega} + J_k \vec{\omega} = -J_č \vec{\omega}' \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = J_č(-\vec{\omega}') / (J_č + J_k) .$$

Uvážíme-li dále zřejmé vztahy (*viz* **5.26.** a **5.28.**)

$$J_č = Mr^2 , \quad \omega' = v/r , \quad J_k = ½\, mR^2,$$

vychází pro úhlovou rychlost kotouče výraz

$$\vec{\omega} = M\,r\,v \cdot (-\vec{\omega}'^{0}) / (Mr^2 + ½\, mR^2) ,$$

kde $\vec{\omega}'^{0}$ je jednotkový vektor ve směru vektoru $\vec{\omega}'$ ($\vec{\omega}' = \omega' \cdot \vec{\omega}'^{0}$).
Ještě vypočteme velikost úhlové rychlosti kotouče

$$\omega = M\,r\,v / (M\,r^2 + ½\, m\,R^2) .$$

Číselně: $\omega = 80 \cdot 1 \cdot 1{,}5 / (80 \cdot 1^2 + ½ \cdot 15 \cdot 1{,}5^2)$ rad·s^{-1} = 1,24 rad·s^{-1},

$$\vec{\omega} = -1{,}24 \cdot \vec{\omega}'^{0} .$$

Kotouč se bude otáčet úhlovou rychlostí velikosti 1,24 rad·s^{-1} opačným směrem, než jakým poběží člověk.

5.50. Krasobruslař se otáčí okolo svislé osy se stálou frekvencí $f_1 = 2$ Hz, přičemž jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose rotace je $J_1 = 2$ kg·m^2. O kolik se zmenší frekvence otáčení, jestliže krasobruslař rozpažením rukou zvětší moment setrvačnosti na $J_2 = 3{,}1$ kg·m^2 ?

Jakou práci musí krasobruslař vykonat při rozpažení?

5.51. Lehký kolotoč hmotnosti $m_k = 100$ kg (homogenní kruhová deska - př. **5.28.**) se otáčí spolu se svým správcem (hmotnost $m_s = 60$ kg), stojícím na okraji desky, s frekvencí $f_1 = 10$ min^{-1}. Správce přejde od kraje do středu kolotoče.

a) Jaká bude nová frekvence f_2 otáčení kolotoče ?

b) Jakou práci správce vykoná při svém přechodu do středu, je-li poloměr kolotoče $R = 1{,}5$ m ?

5.52. Na dvou souosých hřídelích jsou umístěny dva homogenní válcové setrvačníky hmotností $m_1 = 10$ a $m_2 = 20$ kg a stejných poloměrů $R = 30$ cm. První setrvačník se otáčí úhlovou rychlostí o velikosti $\omega_1 = 10$ rad·s^{-1}, druhý je v klidu. Setrvačníky byly spojeny třecí spojkou. Vypočtěte velikost společné úhlové rychlosti setrvačníků a pokles kinetické energie soustavy.

5.53. Homogenní tyč o hmotnosti $m = 2{,}0$ kg a délce $l = 1{,}0$ m je uložena na vodorovné ose procházející koncovým bodem tyče. Jak velkou rychlostí se bude pohybovat druhý konec tyče při dosažení nejnižší polohy, když tyč pustíme z nejvyšší polohy ?

***9.52.** Oscilografem byla sňata křivka průběhu tlaku zvukové vlny houslového tónu. Harmonický analyzátor vyhodnotil pro koeficienty Fourierova rozvoje tyto hodnoty:

$a_0 = 0,\ a_1 = -67,\ a_2 = 55,\ a_3 = 5,\ a_4 = a_5 = \ldots = 0$,
$b_0 = 0,\ b_1 = 151,\ b_2 = 24,\ b_3 = 27,\ b_4 = b_5 = \ldots = 0$.

Rekonstruujte graficky analyzovanou zvukovou vlnu!

VLNĚNÍ

9.53. Číselná rovnice netlumené rovinné zvukové vlny má v SI tvar
$u_x(x\,;t) = 6 \cdot 10^{-5} \cdot \cos(1800\,t - 5{,}3\,x)$. Najděte:

a) amplitudu, frekvenci a periodu vlny,

b) úhlové vlnové číslo (velikost vlnového vektoru) a vlnovou délku,

c) fázovou rychlost šíření vlny,

d) poměr maximální rychlosti částic prostředí ku fázové rychlosti vlny,

e) fázový rozdíl mezi dvěma místy, vzdálenými od sebe 1,186 či 0,593 m ve směru šíření vlny.

Řešení:

Veličiny charakterizující rovinnou vlnu stanovíme porovnáním s obecnou rovnicí rovinné vlny šířící se podél osy o_x :

$$u_x(x\,;t) = u_m \cdot \cos(\omega t - k_x x + \varphi) , \qquad (1)$$

kde u_m je amplituda, ω - úhlová frekvence, k_x - úhlové vlnové číslo. Je tedy

a) $u_m = 6 \cdot 10^{-5}$ m, $\omega = 1800$ rad·s^{-1}, $f = \omega/2\pi = 1800/2\pi = 286{,}5$ Hz,
$T = 1/f = 1/286{,}5$ s $= 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ s ,

b) $k_x = 5{,}3$ m^{-1}, $\lambda = 2\pi / k_x = 2\pi / 5{,}3$ m $= 1{,}186$ m ,

c) fázovou rychlost vlnění vypočteme buď podle vztahu $c = \lambda\, f$, nebo ze vztahu $c = \omega / k_x = 1800 / 5{,}3$ m·s^{-1} = 339,6 m·s^{-1},

d) x – ovou souřadnici okamžité rychlosti kmitajících částic prostředí určíme derivací

$$v_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\,\omega\, u_m \cdot \sin(\omega t - k_x x + \varphi) , \qquad (2)$$

přičemž její maximální hodnota bude rovna

$$v_{xm} = \omega\, u_m = 1800 \cdot 6 \cdot 10^{-5}\ \text{m·s}^{-1} .$$

Pro poměr p rychlostí pak platí

$$p = v_{xm} / c = u_m\, \omega / c = u_m\, k_x = 6 \cdot 10^{-5} \cdot 5{,}3 = 3{,}2 \cdot 10^{-4} ,$$

***6.15.** a) Vypočítejte potenciál a velikost intenzity gravitačního pole hmotné úsečky délky 1 m a hmotnosti 1 kg v místě P, ležícím na prodloužení úsečky ve vzdálenosti 1 m od jejího konce.

b) Jak velká síla bude v bodě P působit na HB hmotnosti 1 g ?

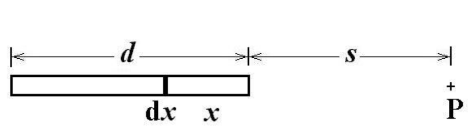
Řešení:

$d = 1$ m, s = 1 m, $m = 1$ kg, $\mu = 0{,}001$ kg ; $\varphi(\text{P}) = ?$, $K(\text{P}) = ?$, $F = ?$

a) Potenciál φ gravitačního pole hmotného bodu (i kulově symetrického homogenního tělesa) o hmotnosti m je dán vztahem

$$\varphi(r) = -G\,m / r ,$$

kde r je vzdálenost od gravitačního centra. V našem případě rozdělíme úsečku na elementy délky dx a hmotnosti dm, které přispívají do celkového potenciálu v místě P (ve vzdálenosti $x + s$) příspěvky



Obr. 6.1

$$d\varphi = -G\,\text{d}m / (x + s) = -G\,(m/d)\,\text{d}x / (x + s) ,$$

a tyto příspěvky složíme

$$\varphi = -\int_0^d G\,(m/d)/(x+s) \cdot \text{d}\,x = -G\,(m/d) \cdot \ln[(s+d)/s] .$$

Číselně: $\varphi(\text{P}) = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1 \cdot \ln[(1+1)/1]$ J·kg^{-1} = $-4{,}6 \cdot 10^{-11}$ J·kg^{-1}.
Intenzitu pole určíme pomocí vztahu mezi intenzitou a potenciálem

$$\vec{K} = -\textbf{grad}\,\varphi.$$

V našem případě

$$|\vec{K}| = |\text{d}\varphi/\text{d}s| = |\text{d}/\text{d}s\,\{G\,(m/d) \cdot \ln[(d+s)/s]\}| =$$

$$= G\,(m/d) \cdot [s/(s+d)] \cdot (s - s + d) / s^2 = G\,m / [s(s+d)] .$$

Číselně: $K(\text{P}) = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1/[1 \cdot (1+1)]$ N·kg^{-1} = $3{,}34 \cdot 10^{-11}$ N·kg^{-1} .
Hmotná úsečka vytváří v bodě P gravitační pole o potenciálu $-4{,}6 \cdot 10^{-11}$ J·kg^{-1} a intenzitě velikosti $3{,}34 \cdot 10^{-11}$ N·kg^{-1} .

b) Velikost síly působící v bodě P na hmotný bod o hmotnosti μ souvisí s velikostí intenzity v tomto bodě vztahem

$$F(\text{P}) = \mu \cdot K(\text{P}) ,$$

Číselně: $F = 0{,}001 \cdot 3{,}34 \cdot 10^{-11}$ N $= 3{,}34 \cdot 10^{-14}$ N .

Na HB hmotnosti 1 gram bude v bodě P působit gravitační síla o velikosti 33,4 femtonewtonu.

7. Mechanika pevných těles.

*7.1.** Vypočtěte energii E_e pružné deformace ocelového sloupku hmotnosti m = = 3,1 kg, který byl protažen tak, že jeho relativní prodloužení činilo $\varepsilon = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$.

*7.2.** Závaží hmotnosti m = 200 g se na závěsu otáčí v horizontální rovině s frekvencí f = 120 min^{-1}. Určete elastické prodloužení závěsu, je-li známo, že tahová síla F_1 = 10 N prodlouží závěs o Δl_1 = 1 cm. Počáteční délka závěsu je l_0 = 50 cm, hmotnost závěsu a účinek tíhy možno zanedbat.

*7.3.** Homogenní tyč z materiálu o hustotě ρ a modulu pružnosti v tahu E, délky l, rotuje konstantní úhlovou rychlostí ω kolem osy jdoucí jedním koncem tyče kolmo k její podélné ose. Vypočtěte tahové napětí (jako funkci vzdálenosti x od osy rotace) a prodloužení tyče. Účinek tíhy zanedbejte.

*7.4.** Tenká homogenní měděná tyč délky l a hmotnosti m se rovnoměrně otáčí s úhlovou rychlostí ω v horizontální rovině kolem vertikální osy, procházející jedním jejím koncem. Najděte napěťovou sílu v tyči jako funkci vzdálenosti r od osy rotace; určete protažení tyče.

Číselně řešte pro l = 1 m, ω = 62,8 rad·s^{-1}.

*7.5.** Hliníkový drát průměru d = 1 mm a délky l = 2 m je vodorovně natažen a na koncích upevněn. Ke středu drátu bylo zavěšeno závaží hmotnosti m = 0,25 kg. O kolik centimetrů poklesl střed drátu ?

*7.6.** Homogenní měděný válec výšky 65 cm, postavený na vodorovnou desku, byl zatížen stlačující silou 1 kN rovnoměrně rozloženou po průřezu válce. Stanovte změnu objemu válce, ke které došlo v důsledku stlačení!

Řešení:

v_0 = 0,65 m, F = 1 000 N, $E = 1{,}23 \cdot 10^{11}$ Pa, μ = 0,35 ; ΔV = ?

Označíme-li původní poloměr podstavy válce R_0, byl objem V_0 válce před deformací roven

$$V_0 = \pi R_0^2\, v_0 .$$

Rozměry válce se po deformaci změnily na hodnoty R a v

$$v = v_0\,(1 - \sigma/E) , \qquad R = R_0\,(1 + \sigma\,\mu\,/E) ,$$

kde $\sigma = F/\pi R_0^2$ je aplikované napětí, μ - Poissonovo číslo.

Objem V válce po deformaci je pak roven

$$V = \pi R^2\, v = \pi R_0^2\,(1 + \sigma\,\mu/E)^2\, v_0\,(1 - \sigma/E) =$$
$$= \pi R_0^2\, v_0\,(1 + 2\sigma\,\mu/E + \sigma^2\mu^2/E^2 - \sigma/E - 2\sigma^2\mu/E^2 - \sigma^3\mu^2/E^3) \approx$$
$$\approx V_0\,(1 + 2\sigma\,\mu\,/\,E - \sigma\,/\,E) ,$$

jestliže zanedbáme členy, které výsledek prakticky neovlivní (tj. členy, ve kterých vystupuje mocnina E větší než 1). Potom pro změnu objemu ΔV vychází

$$\Delta V = V - V_0 = V_0\,\sigma\,(2\mu - 1)\,/\,E = \pi R_0^2\, v_0\,(F/\pi R_0^2)\,(2\mu - 1)\,/\,E =$$
$$= (2\mu - 1)\,F\,v_0\,/\,E = (2 \cdot 0{,}35 - 1) \cdot 10^3 \cdot 0{,}65\,/\,(1{,}23 \cdot 10^{11})\ \mathrm{m}^3 =$$
$$= -1{,}585 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}^3 \approx -1{,}6\ \mathrm{mm}^3 .$$

Objem válce se v důsledku stlačování zmenší asi o 1,6 mm^3.

7.7. Drát původní délky l_0 = 10 m je na jednom konci upevněn a na druhém napínán silou velikosti F = 200 N, čímž se prodlouží o Δl = 4 mm. Určete původní průměr drátu a jeho změnu při prodloužení, když materiál, ze kterého je drát zhotoven, má modul pružnosti v tahu E = 200 GPa a ve smyku G = 75 GPa.

*7.8.** Ocelový sloup tvaru hranolu délky l_0 = 5 m, s příčnými hranami délky a_0 = = 10 cm, je namáhán tahovým napětím σ = 0,1 MPa ve směru délky. Jak se změní objem tohoto sloupu protažením?

*7.9.** Homogenní kruhová deska hmotnosti 2 kg a poloměru 10 cm je zavěšena ve svém středu na železném drátě délky 1 m a průměru 2 mm. Deska kývе jako torzní kyvadlo.

Určete modul pružnosti ve smyku pro železo, je-li známo, že změřená doba kmitu uvedeného kyvadla byla rovna 1,9 s !

Řešení:

m = 2 kg , R = 0,1 m , d = 1 m , $\phi = 2 \cdot 10^{-3}$ m , T = 1,9 s ; G = ?

Doba kmitu T torzního kyvadla je určena vztahem

$$T = 2\pi\sqrt{J/M_0} , \qquad (1)$$

kde J je moment setrvačnosti (kruhové desky) vzhledem k ose otáčení a M_0 – velikost direkčního momentu torze, pro kterou platí

$$M_0 = \pi\,G\,r^4\,/\,2d = \pi\,G\,\phi^4\,/\,32d . \qquad (2)$$

Moment setrvačnosti kruhové desky vzhledem k ose procházející středem a kolmé na rovinu desky je roven (viz **5.28.**)

$$J = \tfrac{1}{2}\,m\,R^2 . \qquad (3)$$

Z rovnice (2) plyne

$$G = 32d\,M_0\,/\,(\pi\,\phi^4) . \qquad (4)$$

Velikost direkčního momentu určíme ze vztahů (1) a (3)

$$M_0 = 4\pi^2\,J\,/\,T^2 = 2\pi^2\,m\,R^2\,/\,T^2 ,$$

a dosadíme do vztahu (4)

NUCENÉ KMITÁNÍ

*9.39.** Ocelová struna je natažena před póly elektromagnetu, napájeného střídavým proudem. Kmitočet nutící síly je f_r = 100 Hz. Při tomto kmitočtu je amplituda výchylek mechanických kmitů struny maximální, rovna u_r = 5 mm. Zvětšíme-li kmitočet budící síly na f_v = 101 Hz, zmenší se amplituda výchylek nucených kmitů na u_v = 2 mm. Odstraníme-li elektromagnet, bude struna konat tlumené kmity. Za jak dlouho se amplituda těchto kmitů zmenší ze 4 mm na 1 mm ?

Poznámka: Nutící silou je magnetická síla působící na proudovodič.

*9.40.** Hmotný bod hmotnosti m = 100 g koná nucené tlumené kmity. Součinitel tlumení δ = 3 s^{-1} a amplituda nutící síly F_m = 10 N. Harmonická vazba má takovou tuhost, že úhlová frekvence (netlumených) vlastních kmitů je ω_0 = = 20 s^{-1}. Určete rezonanční frekvenci nutící síly a rezonanční amplitudu kmitů.

*9.41.** Z rezonační křivky daného systému jsme zjistili, že amplitudy vynucených kmitů byly stejné při úhlových frekvencích ω_1 = 400 s^{-1} a ω_2 = 600 s^{-1}. Najděte úhlovou frekvenci, při které bude amplituda maximální.

SKLÁDÁNÍ KMITŮ

9.42. Vypočtěte amplitudu a počáteční fázi výsledného harmonického pohybu, který vznikl složením dvou harmonických kmitů téhož směru, stejných amplitud (5 cm) a frekvencí, s počátečními fázemi π/6 rad a π/3 rad.

9.43. Stanovte graficky i početně amplitudu kmitů,které vzniknou složením následujících kmitání stejného směru:

a) $\vec{u}_1(t) = \vec{u}_{1m} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$, $|\vec{u}_{1m}|$ = 3 cm, $\varphi_1 = 5\pi/6$ rad

a $\vec{u}_2(t) = \vec{u}_{2m} \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$, $|\vec{u}_{2m}|$ = 8 cm, $\varphi_2 = \pi/6$ rad,

b) $\vec{u}_1(t) = \vec{u}_{1m} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$, $|\vec{u}_{1m}|$ = 3 cm, $\varphi_1 = \pi/3$ rad

a $\vec{u}_2(t) = \vec{u}_{2m} \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$, $|\vec{u}_{2m}|$ = 8 cm, $\varphi_2 = \pi/6$ rad .

9.44. Dva kmity téhož směru stejné amplitudy u_m, stejné počáteční fáze φ a blízkých period T_1 = 3 s, T_2 = 3,1 s se skládají ve výsledný pohyb. Určete periodu výsledného kmitavého pohybu a periodu rázů (záznějů).

9.45. Při skládání dvou harmonických kmitů téhož směru má číselná rovnice výsledného kmitání tvar $u(t) = u_m \cdot \cos(2{,}1\,t) \cdot \cos(50\,t)$, kde t je čas v sekundách. Najděte úhlové frekvence skládaných kmitů a periodu rázů výsledného kmitání!

9.46. Při skládání dvou harmonických kmitavých pohybů stejného směru, stejné amplitudy i počáteční fáze vznikly rázy s periodou T_r a výsledný kmitavý

pohyb měl periodu T a maximální amplitudu výchylky u_m. Stanovte frekvence a amplitudy původních kmitů. Řešte pro hodnoty**:**

a) T_r = 0,5 s , T = 0,1 s , u_m = 3 mm ,

b) T_r = 1,0 s , T = 0,1 s , u_m = 6 mm .

9.47. Najděte rovnici trajektorie $u_y(u_x)$ bodu, vykonávajícího současně dva harmonické, navzájem kolmé kmitavé pohyby, popsané rovnicemi

a) $u_x(t) = u_m \cdot \sin\omega t$, $u_y(t) = u_m \cdot \sin 2\omega t$,

b) $u_x(t) = u_m \cdot \sin\omega t$, $u_y(t) = u_m \cdot \cos 2\omega t$.

Trajektorie načrtněte.

9.48. Světelná stopa osciloskopu vykonává současně dva sinusové kmity. Prvé se dějí ve směru o_x , mají amplitudu výchylky u_{xm} = 4 cm, dobu kmitu T_1 = 12 s a nulovou počáteční fázi. Druhé kmity se dějí ve směru osy o_y , mají amplitudu u_{ym} = 8 cm, dobu kmitu T_2 = 6 s a počáteční fázi $\varphi = -\pi/2$ rad. Určete rovnici trajektorie výsledného kmitu, polohu a velikost rychlosti světelné stopy v okamžiku t_1= 4 s.

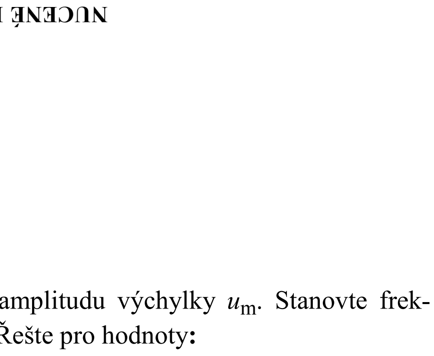
HARMONICKÁ ANALÝZA

*9.49.** Z jakých harmonických kmitů lze vytvořit kmity pilové ?

Řešení:

Podle obrázku závisí výchylka pilového kmitu na čase vztahem

$$u(t) = (2a/T)\,t - a \quad \text{pro} \quad 0 \le t \le T .$$



Obr. 9.3

Tato funkce $u(t)$ je na intervalu $\langle 0;T \rangle$ integrabilní, proto ji můžeme rozvinout ve *Fourierovu řadu*

$$u(t) = a_0/2 + \sum_k [a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t)] ,$$

kde sčítáme přes index k = 1, 2, 3,... . Koeficienty a Fourierovy řady se určí ze vztahů

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T \left(\frac{2a}{T}t - a\right)\mathrm{d}t = \frac{2a}{T}\left[\frac{t^2}{T} - t\right]_0^T = 0 ,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(t) \cdot \cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T \left(\frac{2a}{T}t - a\right) \cdot \cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{4a}{T^2}\int_0^T t\cdot\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t - \frac{2a}{T}\int_0^T \cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{4a}{T^2}\int_0^T t\cdot\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t - \frac{a}{k\pi}\left[\sin\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)\right]_0^T .$$

Poslední výraz (menšitel) je roven 0. Menšence vypočteme *metodou per partes*

$$a_k = \frac{4a}{T^2}\int_0^T t\cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{Tt}{2k\pi}\sin\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)\right]_0^T - \frac{2a}{k\pi T}\int_0^T \sin\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2a}{k\pi T}\left[-\frac{T}{2\pi k}\cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)\right]_0^T = 0 .$$

Výpočet koeficientů b_k:

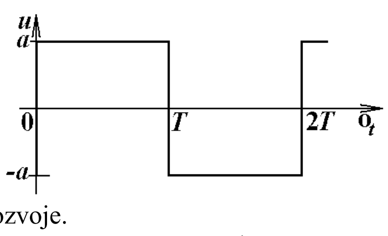
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T\left(\frac{2a}{T}t - a\right)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{4a}{T^2}\int_0^T t\cdot\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t - \frac{2a}{T}\int_0^T \sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{a}{\pi^2 k^2}\sin(k\omega t) - \frac{2at}{\pi kT}\cos(k\omega t)\right]_0^T + \frac{2a}{k\omega t}\left[\cos(k\omega t)\right]_0^T = -\frac{2a}{k\pi} .$$

Výsledná Fourierova řada je sinová bez absolutního členu. Dané pilové kmity lze získat složením sinových kmitů. Výchylky pilových kmitů je možné vyjádřit nekonečnou Fourierovou řadou

$$u(t) = -\frac{2a}{\pi}\sin\omega t - \frac{2a}{2\pi}\sin 2\omega t - \frac{2a}{3\pi}\sin 3\omega t - \ldots\ldots = -\frac{2a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\omega t}{k} .$$

***9.50.** Nechť výchylky obdélníkových kmitů $u = u(t)$ mají časový průběh znázorněný na následujícím obrázku. Rozviňte výchylky $u(t)$ těchto kmitů ve Fourierovu řadu. Graficky aproximujte výchylky těchto kmitů alespoň prvními dvěma nenulovými členy Fourierova rozvoje.



Obr. 9.4

***9.51.** Stanovte koeficienty Fourierova rozvoje časového průběhu kmitu s periodou T, pro který platí:

$u(t) = u_m \cdot \sin\omega t$ pro $0 \le t \le T/2$,

$u(t) = 0$ pro $T/2 \le t \le T$.

***6.16.** Vypočítejte potenciál a intenzitu gravitačního pole kruhové desky (velmi malé tloušťky) hmotnosti m a poloměru R v bodě P ležícím na kolmé ose desky ve vzdálenosti a od jejího středu.

6.17. Ukažte, že gravitační síla, působící na hmotnou částici nacházející se uvnitř homogenní sférické vrstvy látky, je rovna nule.

6.18. a) Vypočítejte kinetickou energii tělesa hmotnosti m, volně padajícího z velké výšky H, při jeho dopadu na zemský povrch, jestliže poloměr Země je R_Z a gravitační zrychlení na jejím povrchu má velikost g_Z.

b) Jakou energii by mělo těleso hmotnosti 1 kg při dopadu z velmi velké výšky ($H >> R_Z$) ? $g_Z = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

***6.19.** a) Těleso bylo vrženo ze zemského povrchu svisle vzhůru rychlostí velikosti v_0. Do jaké výšky vystoupí? Jaká by musela být velikost počáteční rychlosti, aby těleso nespadlo zpátky na Zem?

b) Užitím pojmu potenciálu řešte exaktně příklad **4.25.** a).

6.20. Jaká je celková mechanická energie planety hmotnosti M, pohybující se po kruhové dráze poloměru r okolo Slunce hmotnosti M_S ? Jakou energii má v tomto přiblížení Země ? Energii spojenou s rotací planety neuvažujte.

***6.21.** Raketa se pohybuje bez působení vnějších sil, přičemž relativní výtoková rychlost spalin má stálou velikost $u = 3\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Najděte velikost rychlosti rakety v okamžiku, kdy její hmotnost poklesla na polovinu počáteční hodnoty m_0 . Předpokládejte, že počáteční rychlost byla nulová.

***6.22.** Jaké množství paliva musí obsahovat jednostupňová raketa, aby mohla po spálení veškerého paliva dosáhnout první kosmické rychlosti? Hmotnost rakety bez paliva je $m_r = 100$ kg a relativní výtoková rychlost spalin $u = 3000\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

***6.23.** Zjistěte, jak se s časem mění hmotnost rakety, která se pohybuje bez působení vnější síly s konstantním zrychlením velikosti a, mají-li spaliny konstantní výtokovou rychlost u vzhledem k raketě. Raketa měla počáteční hmotnost m_0. Jaká bude hmotnost rakety po

a) 100 sekundách,

b) 1000 sekundách letu?

c) Za jak dlouho vyhoří palivo, je-li vlastní hmotnost rakety 100 kg?

$m_0 = 1\,392$ kg, $a = 1{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $u = 3\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

***6.24.** Automobil s pískem celkové počáteční hmotnosti m_0 se rozjíždí po vodorovné silnici s konstantní tažnou silou velikosti F. Sypacím zařízením volně padá písek na vozovku v stálém množství μ ($\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$). Najděte velikosti zrychlení a rychlosti automobilu v závislosti na čase. Odpory a tření zanedbejte.

Jak velké budou zrychlení a rychlost automobilu po $t = 50$ s jízdy, je-li $m_0 = 10$ t, $F = 2\,000$ N, $\mu = 20\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$?

$$G = 32d \cdot 2\pi^2 mR^2 / (\pi\phi^4 T^2) = 64\pi\, d\, mR^2 / (\phi^4 T^2) .$$

Číselně: $G = 64\pi \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0{,}1^2 / (2^4 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}9^2)\ \mathrm{Pa} = 70\ \mathrm{GPa}$.

Zjištěný modul pružnosti ve smyku pro železo je 70 gigapaskalů, což je v dobré shodě s tabulkovými hodnotami (viz např. ocel: $G = 79$ GPa; *tabulka č.2*) .

***7.10.** Jaký průměr musí mít ocelová hřídel, která přenáší výkon $P = 10$ kW při $f = 1\,440$ otáčkách za minutu ? Jaké bude celkové zkroucení hřídele, má-li tato činnou délku $l = 2$ m a dovolené tečné napětí je $\tau_d = 30$ MPa ?

***7.11.** Horizontálně uložená měděná tyč délky $l = 1{,}0$ m byla roztočena kolem vertikální osy procházející středem tyče. Při jaké frekvenci otáčení by se mohla roztrhnout ?

***7.12.** Jak velký vnitřní tlak vydrží skleněná trubka, jestliže její vnější poloměr je $r_1 = 4$ mm a vnitřní $r_2 = 3{,}5$ mm ?

8. Mechanika tekutin.

8.1. Těleso plave v parafinovém oleji hustoty $\rho_k = 800\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a je v něm ponořeno 3/8 svého objemu. Určete hustotu tělesa!

8.2. Dřevěný trám délky $l = 5$ m a čtvercovém průřezu o straně $a = 12$ cm a hustoty $\rho = 720\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ plave na vodě hustoty $\rho_v = 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Jak vysoko vyčnívá trám nad hladinu vody ?

8.3. Určete nejmenší objem borových trámů potřebných ke zhotovení voru, který by unesl vůz s nákladem o tíze $F_G = 12$ kN.

Hustota borového dřeva je $\rho_d = 400\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, vody $\rho_v = 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

8.4. Hustoměr vyrobený ze skleněné trubičky má stálý průřez $S = 50\ \mathrm{mm^2}$. Trubička má hmotnost $m_1 = 20$ g a je na spodním konci zatížena olověnými broky o hmotnosti $m_2 = 5$ g. Jak hluboko se hustoměr ponoří v kyselině dusičné, jejíž hustota je $\rho_k = 1\,390\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$?

8.5. Plovák tvaru duté kovové koule, jejíž vnitřní a vnější poloměry jsou $r_1 = 49$ mm, $r_2 = 50$ mm, plave na povrchu kapaliny. Hustoty kovu a kapaliny jsou po řadě $\rho_p = 2\,720\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a $\rho_k = 700\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Jaká musí být hmotnost závaží vloženého do dutiny, aby se plovák vznášel pod povrchem kapaliny ?

8.6. Ocelová krychle o hraně $a = 30$ cm je zavěšena na siloměru a celá ponořena do vody hustoty $\rho_v = 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Siloměr je napínán silou $F_G = 400$ N. Je krychle plná nebo má dutiny ?

8.7. Za jak dlouho vystoupí malá dřevěná kulička a vzduchová bublinka z hloubky $h = 1$ m k hladině vody?

Hustota dřeva je $\rho_d = 650\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, vody $\rho_v = 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Při řešení neuvažujte odpor vody a změnu jejího tlaku.

$d = 5\ \mathrm{cm} = 5\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}$, $u_m = 3\ \mathrm{cm} = 3\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}$, $T = 3\cdot10^{-1}$ s , $\eta = 1{,}1\cdot10^{-3}\ \mathrm{Pa\cdot s}$,
$F = 3\pi\, d\, v\, \eta$; $\langle P\rangle = ?$

Aby se kmitání kuličky pod vodou udrželo, musí být tlumící síla $\vec{F}$ kompenzována nutící silou $\vec{F}_n$, pro kterou platí $\vec{F}_n = -\vec{F}$. Okamžitý výkon nutící síly je potřebným okamžitým příkonem P pro kmitání kuličky pod vodou, jež je roven skalárnímu součinu nutící síly $\vec{F}_n$ a rychlosti $\vec{v}$ kmitání

$$P = \vec{F}_n\cdot\vec{v} = F\,v\cdot\cos 0 = F\,v ,$$

kde $v = u_m\cdot\omega\cdot\cos(\omega t + \varphi)$. Hledaný příkon $\langle P\rangle$ se vypočte jako střední hodnota okamžitých příkonů $P(t) = \vec{F}_n(t)\cdot\vec{v}(t)$ během jedné periody (podle věty o střední hodnotě pro určitý integrál)

$$\langle P\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{F}_n\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi d\eta}{T}\int_0^T v^2\,\mathrm{d}t = \frac{12\pi^3 u_m^2 d\eta}{T^3}\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t .$$

Uvedený integrál vypočteme metodou *per partes*:

$$x'(t) = \cos(\omega t + \varphi) , \qquad y(t) = \cos(\omega t + \varphi) ,$$

$$x(t) = \frac{T}{2\pi}\sin(\omega t + \varphi) , \qquad y'(t) = -\frac{2\pi}{T}\sin(\omega t + \varphi) ;$$

$$\int\cos^2(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{T}{4\pi}\sin 2(\omega t + \varphi) + \int\sin^2(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{T}{4\pi}\sin 2(\omega t + \varphi) + \int\mathrm{d}t - \int\cos^2(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t .$$

Konečný výsledek:

$$\int\cos^2(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{T}{8\pi}\sin 2(\omega t + \varphi) .$$

Na základě těchto výsledků je potřebný příkon kuličky kmitající pod vodou roven

$$\langle P\rangle = \frac{12\pi^3 u_m^2 d\eta}{T^3}\left[\frac{t}{2} + \frac{T}{8\pi}\sin 2(\omega t + \varphi)\right]_0^T = \frac{12\pi^3 u_m^2 d\eta}{T^3}\,\frac{T}{2} =$$

$$= \frac{6\pi^3 u_m^2 d\eta}{T^2} .$$

Číselně: $\langle P\rangle = \dfrac{6\pi^3\cdot 9\cdot10^{-4}\cdot 5\cdot10^{-2}\cdot 1{,}1\cdot10^{-3}}{9\cdot10^{-2}}\ \mathrm{W} = 1{,}023\cdot10^{-4}\ \mathrm{W}$.

Potřebný příkon umožňující kmitání kuličky pod vodou je asi 0,1 mW.

*8.14. **Ve válcové nádobě poloměru R je umístěna kapalina. Nádoba rotuje kolem své geometrické osy y stálou úhlovou rychlostí velikosti ω.

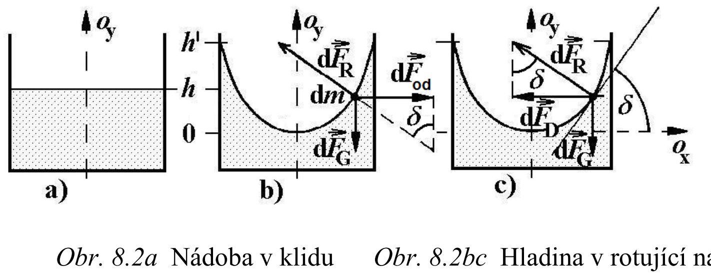
1. Určete tvar povrchu kapaliny v nádobě.
2. Jaký pokles bude vykazovat hladina kapaliny v ose nádoby oproti původní poloze, když se nádoba neotáčela?

Řešení:

1.Určení tvaru povrchu kapaliny v rotující nádobě lze provést dvěma způsoby:

a) v neinerciální soustavě,

b) v inerciální soustavě.



Obr. 8.2a Nádoba v klidu *Obr. 8.2bc* Hladina v rotující nádobě

a) Řešení v neinerciální soustavě, tj. v soustavě spojené s rotující nádobou.
Na každou částici kapaliny hmotnosti dm působí 3 síly - tíhová d$\vec{F}_G$, odstředivá d$\vec{F}_{od}$ a reakce d$\vec{F}_R$ ostatních částic, kde

$$\mathrm{d}\vec{F}_G = \vec{g}\cdot \mathrm{d}m\,, \qquad \mathrm{d}\vec{F}_{od} = (v^2/x)\cdot \mathrm{d}m\,\vec{i} = \omega^2 x\cdot \mathrm{d}m\,\vec{i}\,.$$

Směrnice tečny řezu povrchu kapaliny je dy/dx = tan δ = dF_{od}/dF_G = $\omega^2\, x/g$. Odtud vyjádříme rovnici osového řezu hladiny

$$y = (\omega^2 / 2g)\, x^2\,.$$

Hladina má tvar rotačního paraboloidu s vrcholem v počátku 0.

b) Úlohu lze řešit v inerciální soustavě, pevně spojené se zemským povrchem.
Na každou částici kapaliny působí tíhová síla d$\vec{F}_G$ = d$m\cdot\vec{g}$ a síla d$\vec{F}_R$, která je reakcí na částici od ostatních částic (*viz obr. 8.2c*). Tato síla d$\vec{F}_R$ je z důvodu symetrie kolmá na povrch kapaliny. Výslednice těchto sil musí být silou dostředivou, aby částice kapaliny mohla konat kruhový pohyb v inerciální soustavě

$$\mathrm{d}\vec{F}_v = \mathrm{d}\vec{F}_G + \mathrm{d}\vec{F}_R = \mathrm{d}\vec{F}_D\,.$$

Označíme-li úhel mezi tečnou povrchu kapaliny v místě částice a horizontální rovinou kolmou k ose rotace jako δ, potom dle *obr. 8.2c* platí

$$\tan\delta = \frac{\mathrm{d}F_D}{\mathrm{d}F_G} = \frac{\omega^2 x\,\mathrm{d}m}{g\,\mathrm{d}m} = \frac{x\omega^2}{g} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,,$$

odkud plyne rovnice řezu hladiny $y = \omega^2 x^2 /2g$, což je rovnice paraboly. Tedy hladina kapaliny v rotující nádobě má tvar rotačního paraboloidu.

2. Výpočet poklesu h hladiny v ose rotující nádoby: Objem V_1 vystoupivší kapaliny nad klidnou hladinou se musí rovnat úbytku objemu V_2 kapaliny pod touto hladinou, tj.

$$V_1 = V_2\,, \tag{1}$$

kde

$$V_2 = \int_0^h \pi x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^\zeta x^3\omega^2/g\cdot \mathrm{d}x = \pi g h^2/\omega^2\,, \qquad \zeta = \sqrt{\frac{2gh}{\omega^2}}\,.$$

$$V_1 = \int_h^{h'} \pi(R^2 - x^2)\,\mathrm{d}y = \pi\int_\zeta^R [(R^2\omega^2/g)x - (\omega^2/g)x^3]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \pi\omega^2 R^4/4g - \pi R^2 h + \pi g h^2/\omega^2\,.$$

Dosazením V_1 a V_2 do (1) máme postupně

$$\pi\,\omega^2 R^4/4g - \pi R^2 h + \pi g h^2/\omega^2 = \pi g h^2/\omega^2\,,$$

$$\pi R^2 h = \pi\,\omega^2 R^4/4g \quad\Rightarrow\quad h = \omega^2 R^2/4g\,.$$

Pokles hladiny při ose rotace roste se čtvercem velikosti úhlové rychlosti.

8.15. O jaký úhel se odchýlí od vodorovné roviny hladina kapaliny v cisternovém voze, který brzdí se zpomalením velikosti a = 5 m·s^{-2} ? (g = 9,81 m·s^{-2})

8.16. Najděte závislost tlaku vzduchu na výšce nad povrchem zemským za předpokladu, že teplota vzduchu je všude stejná a vypočítejte tlak na vrcholcích Himálaje (h = 8 800 m n.m.), jestliže na hladině moře je tlak p_0 = 101,3 kPa a hustota vzduchu ρ_0 = 1,29 kg·m^{-3}.

8.17. V určité výšce h nad povrchem zemským naměřili tlak vzduchu p_h = = 50,65 kPa. V jaké výšce bylo měření provedeno, předpokládáme-li, že teplota vzduchu je všude stejná ? Ostatní podmínky viz **8.16.** .

8.18. V nádobě průřezu S_1 je kapalina hustoty ρ. Jakou rychlostí vytéká kapalina z nádoby malým otvorem průřezu S_2 v okamžité hloubce h ?

8.19. Jaký objem vody (jako ideální kapaliny) vyteče z nádoby kruhovým otvorem, jehož vnitřní průměr je d = 20 cm, za dobu t = 1 minuta, jestliže střed výtokového otvoru je h = 2 m pod hladinou ?
Předpokládáme, že výška hladiny se nemění, g = 10 m·s^{-2}.

b) celkové energie těchto mechanických oscilátorů, jestliže jejich potenciální elastické energie pokládáme v rovnovážné poloze za nulové ?

*9.26. **Vypočtěte periodu torzních kmitů homogenního vodorovně uloženého disku, zavěšeného v jeho středu na svislé struně. Struna má délku l, poloměr průřezu r, modul pružnosti ve smyku G. Moment setrvačnosti disku vzhledem k ose splývající se strunou je J. Vliv zemského tíhového pole zanedbáme.

*9.27. **Jaká je frekvence torzních gravitačních kmitů vodorovného homogenního disku, který je zavěšen na třech svislých navzájem rovnoběžných nitích délky l = 1 m ? Nitě jsou upevněny na obvodu disku s úhlovou odlehlostí 120° .

LINEÁRNĚ TLUMENÉ KMITÁNÍ

9.28. Válcový hustoměr poloměru R = 1 cm a hmotnosti m = 0,1 kg plave ve svislé poloze v glycerinu. Po udělení malého impulsu ve svislém směru začne kmitat.

a) Určete periodu malých kmitů hustoměru za předpokladu, že odpor prostředí je přímo úměrný rychlosti $\vec{v}$ při pohybu: $\vec{F}_o$ = K $\vec{v}$, K = –0,6 N·s·m^{-1}.

b) Stanovte útlum kmitů.

Návod: použijte analogie pohybové rovnice hustoměru s pohybovou rovnicí lineárně tlumených kmitů. Hustota glycerinu ρ = 1 260 kg·m^{-3}.

9.29. Počáteční amplituda lineárně tlumeného kmitavého pohybu je 3 cm. Za dobu 10 s bylo vykonáno 100 kmitů a amplituda poklesla na 1 cm.
Stanovte: součinitel tlumení, útlum, logaritmický dekrement a dále dobu, která uplyne od spuštění pohybu do okamžiku, kdy amplituda nabude hodnoty 0,3 cm.

Řešení:

u_{m0} = 3 cm, u_{m1} = 1 cm, u_{m2} = 0,3 cm, t_1 = 10 s, n_1 = 100 ;
δ = ? , λ = ? , Λ = ? , t_2 = ?

Rovnice pro výchylku tlumeného kmitání má tvar

$$u_x(t) = u_{m0}\cdot \exp(-\delta t)\cdot \cos(\omega t + \varphi)\,,$$

kde δ je součinitel tlumení. Pro amplitudu výchylky u_m tlumených kmitů platí

$$u_m(t) = u_{m0}\cdot \exp(-\delta t)\,,$$

kde u_{m0} je amplituda v čase t = 0 s, $u_m(t)$ - amplituda v čase t. Pro čas t_1 tedy musí platit vztah

$$u_{m1} = u_{m0}\cdot \exp(-\delta t_1)\,; \tag{1}$$

z této rovnice vyjádříme součinitel tlumení

$$\delta = -\frac{1}{t_1}\cdot \ln\frac{u_{m1}}{u_{m0}} = \frac{1}{10}\cdot \ln\frac{3}{1}\ \mathrm{s}^{-1} = 0{,}11\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Útlum je podíl amplitud u_m dvou po sobě jdoucích kmitů

$$\lambda = \frac{u_m(t)}{u_m(t+T)} = \exp(\delta T)\,. \tag{2}$$

Logaritmický dekrement Λ se vypočte jako přirozený logaritmus útlumu λ

$$\Lambda = \ln\lambda = \delta T\,, \tag{3}$$

přičemž T je perioda kmitání. Jelikož za 10 s bylo vykonáno 100 kmitů, je perioda kmitů 0,1 s. Po dosazení do vztahů (2), (3) je

$$\lambda = \exp(0{,}11\cdot 0{,}1) = 1{,}011\,, \qquad \Lambda = 0{,}11\cdot 0{,}1 = 0{,}011\,.$$

Pro čas t_2 platí rovnice obdobná vztahu (1)

$$u_{m2} = u_{m0}\cdot \exp(-\delta t_2)\,,$$

ze které vyjádříme čas t_2 a dosadíme za součinitel tlumení

$$t_2 = -\frac{1}{\delta}\cdot \ln\frac{u_{m2}}{u_{m0}} = -\frac{1}{0{,}11}\cdot \ln\frac{0{,}3}{6}\ \mathrm{s} = 21\ \mathrm{s}\,.$$

9.30. Pozorováním lineárně tlumeného harmonického pohybu se zjistilo, že po dvou za sebou následujících kmitech se amplituda kmitů zmenšila o 60% původní hodnoty a že doba kmitu je T = 0,5 s. Určete součinitel tlumení a frekvenci netlumených kmitů.

9.31. Amplituda lineárně tlumeného kmitavého pohybu se zmenší během jedné periody n = 3× . O kolik procent je jeho perioda větší než perioda kmitů netlumených?

9.32. Perioda lineárně tlumených kmitů je T = 4 s, logaritmický dekrement Λ = = 1,6 a počáteční fáze φ = –π/2 rad. Výchylka v čase T/4 (T je perioda kmitů) je rovna 4,5 cm.

a) Napište rovnici pro časovou závislost okamžité výchylky.

b) Graficky zachyťte pohyb v intervalu dvou period.

9.33. Uvažujme dvě lineárně tlumená kmitání se známými periodami T a součiniteli tlumení δ: T_1 = 10 ms, δ_1 = 10 s^{-1} a T_2 = 0,1 ms, δ_2 = 100 s^{-1}. Které z nich se rychleji tlumí? Posouzení proveďte pomocí útlumu a pomocí poměru výchylek za stejnou dobu od počátku pohybu, například za dobu ⟨0;10⟩ ms.

*9.34. **Tři po sobě následující amplitudy jazýčku vah byly postupně 14, 9 a 12. Předpokládejte, že součinitel tlumení je konstantní a stanovte rovnovážnou polohu vah. Výsledek porovnejte s hodnotou zjištěnou metodou tří kyvů [12], [13]. Stanovte útlum vah.

*9.35. **Jaká je celková dráha, kterou urazí kmitající HB, než se jeho pohyb zcela utlumí? Počáteční amplituda u_{m0} = 1 mm a logaritmický dekrement Λ = 2·10^{-3}.

9.36. Stanovte logaritmický dekrement matematického kyvadla délky 1 m, které pozbude za 10 minut kmitání 90 % své mechanické energie. Mechanická energie oscilátoru je dána vztahem $E = \frac{1}{2}\, k\, u_m^2$.

Řešení:

$l = 1$ m, $t = 10$ min $= 600$ s, $-\Delta E = 0{,}9\, E_1$; $\Lambda = ?$

Pohyb kyvadla budeme považovat za lineárně tlumený kmitavý pohyb, jehož mechanická energie v čase t je dána výrazem

$$E(t) = \tfrac{1}{2}\, k\, u_m^2(t)\,, \qquad (1)$$

kde amplituda výchylky $u_m(t)$ závisí na čase t vztahem

$$u_m(t) = u_{m0} \cdot \exp(-\delta\, t)\,,$$

u_{m0} je amplituda v čase $t_0 = 0$ s. Podobně počáteční mechanickou energii, tj. energii v okamžiku t_0, označíme E_0. Podle (1) pro ni platí vztah

$$E_0 = \tfrac{1}{2}\, k\, u_{m0}^2\,. \qquad (2)$$

Podle (1) a (2) plyne pro poměr počáteční a konečné energie v čase t vztah

$$E_0 / E(t) = [u_{m0} / u_m(t)]^2 = \exp(2\delta t) \quad \Rightarrow$$

$$\delta = (1/2t) \cdot \ln\,[E_0/E(t)]\,, \qquad (3)$$

kde $E(t) = 0{,}1\, E_1$.

Podle definice je logaritmický dekrement Λ roven

$$\Lambda = \delta\, T\,,$$

kde T je doba kmitu matematického kyvadla délky l

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}\,. \qquad (4)$$

Dosazením (3) a (4) do vztahu pro logaritmický exkrement získáme vztah

$$\Lambda = (1/2t) \cdot \ln\,[E_0/E(t)] \cdot 2\pi \sqrt{l/g} = (\pi/t) \cdot \ln\,[E_0/E(t)] \cdot \sqrt{l/g}\,.$$

Číselně: $\Lambda = (\pi/600) \cdot \ln(10) \cdot \sqrt{1/9{,}81} = 0{,}0038$.

Logaritmický dekrement kyvadla je 0,0038.

9.37. Za jak dlouho se mechanická energie kmitající ladičky o frekvenci $f = 600$ Hz zmenší $n = 500\times$, když logaritmický dekrement Λ = je $8 \cdot 10^{-5}$?

***9.38.** Určete potřebný příkon pro udržení konstantní amplitudy 3 cm při kmitání kuličky pod vodou. Průměr kuličky je 5 cm, perioda kmitů 0,3 s. Předpokládejte, že velikost tlumící síly pod vodou je udána Stokesovou rovnicí $F = 3\pi\, d\, v\, \eta$, kde dynamická viskozita η vody je $1{,}1 \cdot 10^{-3}$ Pa·s .

Řešení:

8.8. Stanovte velikost celkové tlakové síly vody působící na stěnu nádoby tvaru kvádru, a) když je nádoba naplněna vodou zcela, b) když je naplněna touž kapalinou jen do výše 1 m. Daná stěna má výšku 1,5 m a šířku 2 m.

Řešení:

$a = 2$ m, $h = 1{,}5$ m, $h_1 = 1$ m, $\rho = 10^3$ kg·m^{-3} ; $F = ?$

V hloubce x od horního okraje plné nádoby je tlak $p(x) = \rho\, g\, x$. Na elementární plošku dS stěny nádoby v hloubce x působí tlaková síla velikosti $\mathrm{d}F = p(x)\, \mathrm{d}S = \rho\, g\, a\, x \cdot \mathrm{d}x$.

a) $$F = \int_0^h \rho g a x\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \rho\, g\, a\, h^2 = 22\,072{,}5 \text{ N}\,,$$

b) $$F = \int_0^{h_1} \rho g a x\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \rho\, g\, a\, h_1^2 = 9\,810 \text{ N}\,.$$

V případě a) je celková tlaková síla na stěnu vyvolaná kapalinou 22 072,5 newtonu, v případě b) 9 810 newtonů.

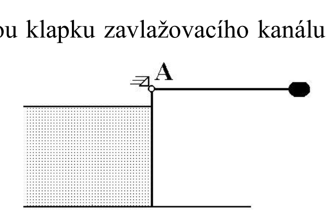
8.9. Jakou tlakovou silou F působí voda na stavidlo šířky $a = 3$ m, jež je ponořeno do hloubky $h = 2$ m ? Určete působiště této síly.

8.10. Vzorek piezoelektrického kompozitu je umístěn v tlakové komoře v silikonovém oleji. Vliv hydrostatického tlaku na jeho vlastnosti je možné sledovat až do hodnoty $p = 20$ MPa. V jaké hloubce oceánu by byl celkový tlak téže velikosti? Hustota mořské vody je $\rho = 1\,030$ kg·m^{-3}.

***8.11.** Pistole ráže $d = 7$ mm má délku hlavně $l = 12$ cm. Velikost rychlosti střely hmotnosti $m = 10$ g opouštějící hlaveň (ve vzduchu) je $v = 100$ m·s^{-1}. V jaké hloubce v moři neopustí střela hlaveň zbraně? Hustota mořské vody je $\rho_v = 1\,030$ kg·m^{-3}. Tření střely o hlaveň zanedbáme a pohyb střely v hlavni považujme za rovnoměrně zrychlený.

8.12. Vypočtěte velikost počáteční síly, potřebné ke zvednutí stavidlové desky zavlažovacího kanálu. Deska je ponořena do hloubky $h = 1{,}5$ m, šířka stavidla je $\check{s} = 2$ m, hmotnost $m = 300$ kg, součinitel vlečného tření mezi deskou a oporami $f = 0{,}4$.

8.13. Jakým závažím je třeba zatížit obdélníkovou klapku zavlažovacího kanálu o šířce $\check{s} = 0{,}9$ m, nemá-li se otevřít ani při výšce vody $h = 0{,}7$ m ? Klapka je otočná kolem osy kolmé k nákresně a procházející bodem A. Vzdálenost hladiny od bodu A je $d = 0{,}15$ m, délka ramene závaží je $d_r = 1{,}2$ m a hmotnost homogenního ramene závaží $m = 5$ kg .



Obr. 8.1

8.20. V nádobě je voda s hladinou o výšce $h = 30$ cm. Jak vysoko nad dnem nádoby musíme udělat otvor ve stěně, aby jím voda stříkala co nejdále na vodorovnou podložku nádoby?

8.21. Pomocí mikromanometru byl změřen rozdíl celkového a statického tlaku proudícího vzduchu ve vodorovném potrubí. Rozdíl odpovídá hydrostatickému tlaku sloupce vody o výšce $h = 8$ mm. Vypočtěte velikost rychlosti proudícího vzduchu, je-li jeho hustota při 20 °C $\rho_{vz} = 1{,}2$ kg·m^{-3} ($g = 9{,}81$ m·s^{-2}).

8.22. Voda proudí vodorovným potrubím o průměru $d_1 = 4$ cm rychlostí o velikosti $v_1 = 1{,}2$ m·s^{-1}. Potrubí se zužuje na průměr $d_2 = 2{,}4$ cm. Vypočtěte pokles tlaku vody v zúženém místě potrubí oproti rozšířenému.

8.23. Injekční stříkačka má plochu pístu $S_1 = 3{,}2$ cm^2 a její otvor průřez $S_2 = 0{,}8$ mm^2. Jak dlouho bude volně vytékat voda (jako neviskózní kapalina) ze stříkačky fixované ve vodorovné poloze, když na její píst tlačíme silou velikosti $F = 5$ N, a ten se posune o celkovou délku $d = 4$ cm ?

***8.24.** Za jak dlouho vytečou 3/4 objemu vody ze zcela plné válcové nádrže výtokovým otvorem v jejím dnu. Výška celé nádrže je $h = 4$ m, dno nádrže má obsah $S_0 = 2$ m^2 a průřez výtokového otvoru je roven $S_1 = 10$ cm^2.

8.25. Z hadice o průřezu 3 cm^2 proudí voda rychlostí o velikosti 72 km·h^{-1} a dopadá kolmo na rovinnou stěnu.

a) Jak velkou silou působí proud vody na tuto stěnu?

b) Jak velkou silou působí tento vodní proud na tutéž stěnu, která se pohybuje rychlostí velikosti 5 m·s^{-1} ve směru proudu vody?

c) Při jak velké rychlosti pohybu stěny je výkon zmíněné síly maximální?

Řešení:

$v = 72$ km·h^{-1} $= 20$ m·s^{-1}, $S = 3$ cm^2 $= 3\cdot10^{-4}$ m^2, $u = 5$ m·s^{-1}; $F_a = ?$ $F_b = ?$ $u_{max} = ?$

Před dopadem vodního proudu na stěnu je hybnost vody hmotnosti Δm dopadající za dobu Δt rovna

$$\vec{p} = \Delta m \cdot \vec{v} = (\Delta m/\Delta t) \cdot \vec{v} \cdot \Delta t = Q_m \cdot \vec{v} \cdot \Delta t\,. \qquad (1)$$

Předpokládáme, že při dopadu na kolmou stěnu se vodní proud rozdělí rovnoměrně na všechny strany v rovině stěny. Ke každé části kapaliny, která odtéká určitým směrem, můžeme najít stejně velkou část kapaliny odtékající opačným směrem. Proto výsledná hybnost kapaliny $\vec{p}_2$ a její střední rychlost $\vec{v}_{2stř}$ je po dopadu na stěnu nulová. Označíme-li $\vec{F}_1$ sílu, kterou působí stěna na vodu, potom její impuls je roven změně hybnosti vody :

$$\vec{F}_1 \cdot \Delta t = \Delta m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\,, \qquad (2)$$

budeme-li danou soustavu považovat za matematické kyvadlo délky $l + r = 15$ cm. Hmotnost nitě a odpor vzduchu neuvažujeme.

9.16. Na tyčce kyvadla délky l, ale zanedbatelné hmotnosti, jsou upevněny 4 stejné kuličky ve vzdálenostech $l/4$, $l/2$, $3l/4$ a l od místa závěsu. Určete dobu kmitu tohoto kyvadla a srovnejte ji s dobami kmitů jednoduchých kyvadel, u nichž zůstane vždy jediná kulička na původním místě.

9.17. Velmi tenká homogenní obdélníková deska hmotnosti $m = 2$ kg o rozměrech $a = 16$ cm, $b = 40$ cm kýve kolem osy splývající s hranou a. Vypočtěte periodu malých kmitů tohoto fyzického kyvadla.

Moment setrvačnosti tenké desky vzhledem k rovnoběžné ose procházející jejím hmotným středem je $J_S = \frac{1}{12}\, m\, b^2$.

9.18. Na vodorovné desce v zemském tíhovém poli leží závaží o hmotnosti $m = 1$ kg. Deska kmitá ve svislém směru s periodou $T = 0{,}5$ s a amplitudou $u_m = 2$ cm. Jak se bude s časem měnit tlaková síla $\vec{F}$, kterou závaží působí na desku ?

9.19. Vypočítejte velikost síly, kterou působí píst ve spalovacím motoru (motor běží naprázdno), nacházející se v mrtvém bodě, na lomenou hřídel, která koná $f = 2\,000$ otáček za minutu. Hmotnost pístu je $m = 1{,}2$ kg, zdvih $z = 0{,}12$ m. Předpokládejte, že pohyb pístu lze považovat za harmonický.

9.20. Na pružině visí závaží hmotnosti $m_1 = 234$ g. Zvětšíme-li závaží o $m_2 = 16$ g, prodlouží se pružina o $\Delta l = 4$ cm. Jak velká je doba kmitu zvětšeného závaží?

Napište číselné rovnice závislostí okamžité výchylky, rychlosti a zrychlení harmonického pohybu na čase t při amplitudě $u_{xm} = 4$ cm a nulové počáteční fázi.

9.21. Mechanický oscilátor tvoří pružina, na níž je zavěšena miska se závažím. Perioda oscilátoru je $T_1 = 0{,}5$ s. Přidáním dalšího závaží se perioda oscilátoru zvětší na $T_2 = 0{,}6$ s. Určete, o kolik centimetrů se prodloužila pružina přidáním závaží v rovnovážném stavu !

9.22. Těleso zavěšené na pružině kmitá s periodou $T = 0{,}5$ s. Po zastavení kmitání bylo těleso odstraněno. O kolik se přitom pružina zkrátila ?

9.23. Při jaké výchylce z rovnovážné polohy je kinetická energie hmotného bodu, konajícího harmonický kmitavý pohyb, rovna jeho elastické potenciální energii? V rovnovážné poloze je elastická potenciální energie rovna nule.

9.24. HB kmitá s amplitudou $u_m = 5$ cm a má hmotnost $m = 10$ g . Celková energie (kinetická + potenciální elastická) HB je $E = 3{,}1 \cdot 10^{-5}$ J. Napište číselný vztah pro výchylku kmitů v závislosti na čase při počáteční fázi $\varphi = \pi/3$ rad.

9.25. Na dvou samostatně zavěšených stejných pružinách jsou připevněna dvě závaží, jejichž hmotnosti jsou v poměru $m_1 : m_2 = 4 : 1$. Závaží kmitají ve svislém směru se stejnými amplitudami. V jakém poměru jsou

a) periody jejich kmitů,

zásobujícího vodou vysoko položená místa. Před uzávěrem hlavního potrubí odbočuje potrubí vedlejší, kterým je voda tlačena v impulsech vzhůru.

8.27. Jak velkou ustálenou rychlostí se budou snášet kapičky postřikového roztoku k zemi, mají-li tvar kuliček poloměru 0,01 mm a hustotu 1 g·cm^{-3} ? Hustota vzduchu je při dané teplotě 1,2 kg·m^{-3} a dynamická viskozita 1,8·10^{-5} Pa·s .

Řešení:

r = 0,01 mm = 10^{-5} m, ρ_v = 1,2 kg·m^{-3}, ρ = 10^3 kg·m^{-3}, η = 18·10^{-6} Pa·s , g = = 9,81 m·s^{-2} ; v = ?

Na každou kapičku působí 3 síly:

tíhová $\vec{F}_G = (4/3)\,\pi r^3 \rho\, \vec{g}$;

odporová $\vec{F}_o = 6\pi\, r\, v\, \eta\, (-\vec{g}^{\,0})$, $\qquad \vec{g}^{\,0} = \vec{g}/g$;

vztlaková $\vec{F}_{vz} = (4/3)\pi r^3 \rho_v (-\vec{g})$.

Po ustálení rychlosti pádu je výsledná síla nulová a pro velikosti uvedených sil platí

$$F_o + F_{vz} = F_G \quad \Rightarrow \quad 6\pi\, \eta\, r\, v + 4/3\, \pi r^3 \rho_v g = 4/3\, \pi r^3 \rho\, g \ .$$

Velikost v rychlosti snášejících se kapiček roztoku je rovna

$$v = 2r^2 g \cdot (\rho - \rho_v) / 9\eta \ .$$

Číselně: $v = 2\cdot10^{-10}\cdot 9{,}81\cdot(10^3 - 1{,}2)/(9\cdot18\cdot10^{-6})$ m·s^{-1} = 0,0121 m·s^{-1}.

Kapičky postřiku se snášejí k zemi rychlostí velikosti asi 1,2 cm·s^{-1}.

8.28. Vypočtěte velikost rychlosti dešťové kapky padající na zem (kapku považujeme za kuličku poloměru R = 1,5 mm). Dynamická viskozita vzduchu je přibližně η = 1,8·10^{-5} Pa·s, jeho hustota ρ_{vz} = 1,2 kg·m^{-3} a velikost tíhového zrychlení g = 9,81 m·s^{-2}. Předpokládejte, že kapky dopadaly na zem rovnoměrným pohybem. Hustota vody je ρ_k = 10^3 kg·m^{-3}.

8.29. Jak velká musí být rychlost vzduchu ve svislém potrubí, aby se v něm umístěná dřevěná koule poloměru R = 2,5 cm vznášela? Hustota dřeva je ρ_d = = 900 kg·m^{-3}, profilová konstanta C = 0,24 a hustota vzduchu je 1,15 kg·m^{-3}.

*__8.30.__ Pod jakým přetlakem je nutno pumpovat vodu do vodorovně uloženého přímého potrubí kruhového průřezu, jež je součástí zavlažovacího systému, aby bylo přemístěno 16 000 l vody za den ? Průměr potrubí je 10 cm, jeho délka 2 km, dynamická viskozita vody při zadané teplotě 12·10^{-4} Pa·s a kritické Reynoldsovo číslo pro dané potrubí je 2 300 .

Určete odpovídající ztráty mechanické energie v daném potrubí na 1 kg tekutiny.

Řešení:

ρ = 10^3 kg·m^{-3}, l = 2 km = 2·10^3 m, d = 10 cm = 0,1 m , V = 16·10^3 dm^3 = 16 m^3, t = 24 h = 24·3600 s, η = 12·10^{-4} Pa·s ; Δp = ? , Δe_p = ?

Poisseuilleův vztah, určující objem proteklé kapaliny o dané viskozitě potrubím určité délky a kruhového průřezu a rozdílu tlaků Δp mezi konci potrubí, platí při laminárním proudění tekutiny. Tuto kvalitu určuje Reynoldsovo číslo

$$Re = v\, d\, \rho / \eta \ . \qquad (1)$$

Zjistíme, zda-li $Re < Re_k$ (Re_k je kritické Reynoldsovo číslo).

Velikost v průtočné rychlosti určíme ze vztahu

$$V = S\, v\, t = \pi\,(d^2/4)\, v\, t \quad \Rightarrow \quad v = 4V/(\pi d^2\, t) \ ,$$

a dosadíme do rovnice (1)

$$Re = 4V\rho / (\pi\, d\, t\, \eta) = 4\cdot16\cdot10^3 / (\pi\cdot0{,}1\cdot24\cdot3600\cdot12\cdot10^{-4}) = = 1\,965 < 2300 = Re_k \ .$$

Proudění je laminární a proto lze užít Poisseuilleova zákona.

Poisseuilleův zákon tvrdí, že objem V tekutiny, proteklé potrubím kruhového průřezu za dobu t, při zadaném přetlaku Δp mezi konci potrubí, je roven

$$V = \pi R^4 \cdot \Delta p\, t / (8\eta\, l) \quad \Rightarrow \quad \Delta p = 8\eta\, V\, l / (\pi R^4\, t) \ .$$

Číselně: $\Delta p = 8\cdot12\cdot10^{-4}\cdot16\cdot2\cdot10^3 / [\pi\,(5\cdot10^{-2})^4\cdot24\cdot3600]$ Pa = 181 Pa .

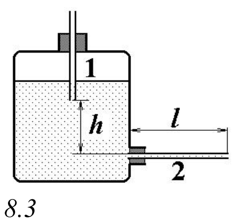
Vodu do potrubí je nutno čerpat pod přetlakem 181 Pa, aby se docílilo dodávky 16 000 litrů (160 hl) vody během 24 hodin.

Odpovídající ztráta mechanické, v tomto případě tlakové energie na 1 kg vody

$$\Delta e_p = \Delta p/\rho = 181/10^3 = 0{,}18 \text{ J/kg} \ .$$

Odpovídající ztrátová výška je $h_z = \Delta p/\rho g$ = 0,018 m, což znamená, že stejného průtoku by se dosáhlo bez přetlaku při spádu 1,8 cm na 2 km potrubí.

*__8.31.__ K absolutnímu měření viskozity kapalin lze použít Mariotteovy lahve (*viz obrázek*). Sestava zaručuje konstantní tlakový rozdíl mezi konci kapiláry 2 při výtoku kapaliny z lahve. Při výtoku totiž klesá tlak vzduchu nad hladinou kapaliny tak dlouho, až začne probublávat z trubice 1 vzduch. Potom je hydrostatický tlak u ústí trubice 1 roven barometrickému a kapalina vytéká vlivem konstantního tlakového rozdílu, který odpovídá výškovému rozdílu h mezi ústím trubice 1 a výtokem kapiláry 2.



Obr. 8.3

S kapilárou 2 o průměru $2R$ = 0,8 mm, dlouhou l = 20 cm byl při rozdílu výšek h = 15 cm naměřen za dobu t = 5 minut vyteklý objem V = 23 cm^3. Danou kapalinou je voda o teplotě 22 °C.

a) Vypočtěte dynamickou viskozitu vody při dané teplotě.

b) Rozhodněte, zda proudění kapilárou bude laminární (kritické Reynoldsovo číslo pro trubici s kruhovým průřezem za těchto podmínek je Re_k = 1 000).

9.3. Závaží zavěšené na pružině vykonává netlumený harmonický pohyb s periodou T = 0,4 s a amplitudou u_{xm} = 2 cm. Určete

a) výchylku závaží z rovnovážné polohy, jeho rychlost a zrychlení 4,85 s od okamžiku, kdy závaží procházelo rovnovážnou polohou,

b) maximální velikosti rychlosti a zrychlení pohybu závaží,

c) dráhu, kterou závaží urazilo během 0,15 s po průchodu rovnovážnou polohou.

9.4. Částice kmitá harmonicky s úhlovou frekvencí ω = 4 rad·s^{-1}. V čase t_0 = 0 s má výchylka částice z rovnovážné polohy velikost $u(t_0)$ = 0,25 m, velikost rychlosti je $v(t_0)$ = 1 m·s^{-1}. Určete velikosti výchylky, rychlosti a zrychlení částice v okamžiku t_1 = 2,4 s .

9.5. Částice kmitá harmonicky s periodou T = 0,6 s a amplitudou 0,1 m. Vypočtěte průměrnou velikost rychlosti částice za dobu, ve které urazí dráhu rovnou polovině amplitudy:

a) z krajní polohy, b) z rovnovážné polohy.

9.6. Ověřte, zda výrazy pro časovou závislost výchylky z rovnovážné polohy

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) \ ,$$

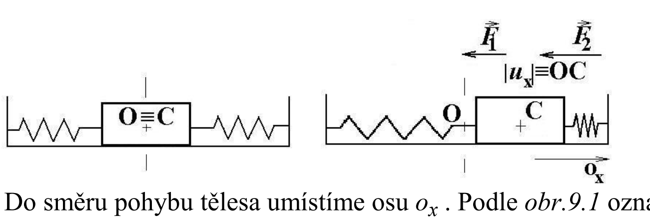
$$\vec{u}(t) = \vec{u}_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) \ ,$$

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_m \cdot \exp\,[\mathrm{i}\,(\omega t + \varphi)] \ , \quad (\mathrm{i} = \sqrt{-1}) \ ,$$

vyhovují pohybové rovnici netlumených harmonických kmitů.

9.7. Těleso hmotnosti m se může pohybovat po podložce bez tření. V rovnovážné poloze je se svislými stěnami spojeno dvěma nedeformovanými pružinami stejné tuhosti k a zanedbatelné hmotnosti. Určete periodu podélných kmitů tělesa.

Řešení:



Obr.9.1

Do směru pohybu tělesa umístíme osu o_x . Podle *obr.9.1* označíme elastické síly levé a pravé pružiny po řadě $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$, jež představují dílčí harmonické síly. x - ové souřadnice F_{1x} a F_{2x} těchto sil vyhovují podmínkám (*viz obr.9.1*)

$$F_{1x} = -k\,u_x \ , \qquad F_{2x} = k\,(-u_x) = -k\,u_x \ .$$

x - ová souřadnice F_x výslednice těchto sil je rovna

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = -k\,u_x - k\,u_x = -2k\,u_x \ .$$

Protože žádné jiné síly v dané úloze neuvažujeme, má pohybová rovnice popisující pohyb tělesa tvar

$$m\frac{\mathrm{d}^2 u_x}{\mathrm{d}t^2} = -2k\,u_x \ .$$

Tuto rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2k}{m}\,u_x = 0 \ ,$$

což je diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty, o které víme, že dává periodické řešení představující jednoduchý kmitavý pohyb ve směru o_x s úhlovou frekvencí ω. Čtverec této úhlové frekvence je roven

$$\omega^2 = 2k/m \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{2k/m} \ . \qquad (1)$$

Dobu kmitu pak vypočteme dle vztahu

$$T = 2\pi/\omega \ . \qquad (2)$$

Dosazením vztahu (1) do (2) získáme závislost doby kmitání tělesa na jeho hmotnosti a tuhosti pružin :

$$T = 2\pi\,\sqrt{m/2k} \ .$$

9.8. Konce nedeformované pružiny o tuhosti k = 13 N·m^{-1} jsou upevněny. Tělísko hmotnosti m = 25 g je uchyceno v ose pružiny v jedné třetině její délky. Vypočtěte periodu malých podélných kmitů tělíska při zanedbání hmotnosti pružiny.

9.9. Vypočtěte periodu kmitání rtuti hmotnosti m = 121 g, která je ve svislé trubici tvaru písmene **U**. Vnitřní průřez trubice má velikost S = 0,3 cm^2 . Povrchové jevy a tření zanedbejte, hustotu rtuti naleznete v *tabulce č.4*.

9.10. Válcový hustoměr hmotnosti m a průměru d plave ve svislé poloze v kapalině hustoty ρ. Ve svislém směru byl danému hustoměru udělen malý impuls. Určete dobu kmitu T hustoměru. Pohyb kapaliny a tření zanedbejte.

*__9.11.__ Studujte pohyb hmotné kuličky v přímém kanálu, procházejícím středem Země, za předpokladu, že síla působící na kuličku v kanálu závisí pouze na hmotnosti té části zeměkoule, která se nachází "pod" kuličkou (viz př.**6.17.**) a že hustota Země je všude stejná. Kulička byla spuštěna do kanálu s nulovou počáteční rychlostí.

Určete dobu, za kterou dosáhne kulička středu Země a jak velkou rychlostí jím proběhne. Poloměr Země je 6 380 km. Odpor prostředí zanedbejte.

Návod: využijte analogie pohybové rovnice kuličky a pohybové rovnice harmonického pohybu.

*__9.12.__ Potenciální energie částice hmotnosti m v poli centrální síly je dána vztahem $E_p(u)$ = a/u^2 − b/u , kde u je vzdálenost částice od centra pole a a,b jsou libovolné kladné konstanty. Najděte periodu malých kmitů částice kolem rovnovážné polohy.

Řešení:

Nejprve vyjádříme radiální souřadnici F_r síly působící na částici při jejím malém vychýlení $u = r - r_0$, kde r_0 je průvodič centra pole (1. polární souřadnice) a r průvodič polohy částice. Protože platí

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\,\mathbf{grad}\, E_p(\vec{r}) ,$$

je v našem případě

$$F_r = -\,dE_p(r) / dr .$$

K tomuto účelu rozvineme potenciální energii v okolí rovnovážné polohy v *Taylorovu řadu*

$$E_p(r) = E_p(r_0) + (r - r_0)\,(dE_p / dr)_{r=r_0} + ½\,(r - r_0)^2\,(d^2E_p / dr^2)_{r=r_0} + .. ,$$

ve které jsme se omezili na první tři členy (tzv. harmonické přiblížení), přičemž první člen rozvoje je konstantní, druhý je roven nule (představuje sílu působící na částici v rovnovážné poloze $r_0 = 2a/b$ – viz př. **4.51.**). V tom případě platí

$$F_r = -\,dE_p / dr = -\,(r - r_0)\left(d^2E_p / dr^2\right)_{r=r_0} = -\,b^4/(2a)^3\,u .$$

Pohybová rovnice má potom tvar

$$m\,(d^2u / dt^2) + b^4 / (2a)^3\,u = 0 ,$$

který porovnáme s pohybovou rovnicí netlumených harmonických kmitů. Z porovnání plynou pro úhlovou frekvenci ω a periodu T kmitů vztahy

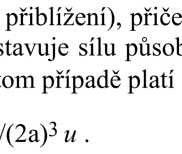
$$\omega = \sqrt{b^4/(8a^3\,m)} , \qquad T = 4\pi\,(a/b^2)\,\sqrt{2a\,m} .$$

*9.13.** Stejný úkol jako v předchozím případě řešte

a) pro potenciální energii částice v poli centrální síly danou vztahem $E_p(u) = E_0\,[1 - \cos(a\,u)]$, kde E_0, a jsou konstanty.

b) alespoň přibližně pro atom sodíku v krystalické mřížce NaCl (viz př. **4.55.**).

9.14. Určete periodu kmitů matematického kyvadla, znázorněného na vedlejším obrázku. Délka nitě kyvadla je $l = 1{,}5$ m, vzdálenost mezi místem závěsu O a zarážkou A je $d = 54$ cm .



Obr.9.2

9.15. Koule o poloměru $r = 5$ cm je zavěšena na niti délky $l = 10$ cm . Vypočítejte procentuelní chybu, které se dopustíme při výpočtu doby kmitu,

kde $\vec{v}_2 = \vec{0}$, $\vec{v}_1 = \vec{v}$. Potom dle (2) a (1) platí

$$\vec{F}_1 = -Q_m \cdot \vec{v} ,$$

kde Q_m je hmotnostní průtok

$$Q_m = \rho S \cdot (\Delta l/\Delta t) = \rho S\,v ;$$

ρ je hustota vody, S kolmý průřez vodního toku.

Dosazením předposledního vztahu do vztahu posledního je

$$\vec{F}_1 = -\rho S\,v^2 \cdot \vec{v}^{\,0} ,$$ kde $\vec{v}^{\,0}$ je jednotkový vektor ve směru $\vec{v}$.

Síla $\vec{F}$, kterou působí vodní proud na stěnu je podle 3. Newtonova pohybového zákona rovna $\vec{F} = -\vec{F}_1 = \rho S\,v^2 \cdot \vec{v}^{\,0}$. Velikost této síly je

$$F = \rho S\,v^2 . \qquad (3)$$

Číselně: $F = 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 20^2$ N $= 120$ N .

b) Velikost relativní rychlosti vodního proudu dopadajícího na pohyblivou stěnu je v tomto případě $v_b = v - u$. Potom velikost síly, kterou působí voda na pohyblivou stěnu je

$$F_b = \rho S \cdot (v - u)^2 . \qquad (4)$$

Číselně: $F_b = 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-4}\,(20 - 5)^2$ N $= 67{,}5$ N .

c) Okamžitý mechanický výkon P síly F_b je

$$P = F_b \cdot u , \qquad (5)$$

kde u je velikost rychlosti působiště síly $\vec{F}_b$, tj. rychlost stěny. Dosazením vztahu (4) do vztahu (5) dostaneme pro výkon vodního proudu

$$P = \rho S \cdot (v - u)^2 \cdot u . \qquad (6)$$

Výpočet maxima výkonu: $dP/du = 0 \;\Rightarrow\; \rho S \cdot [2\,(u - v)\,u + (v - u)^2] = 0 \;\Rightarrow\; (v - u) \cdot (v - 3u) = 0 \;\Rightarrow$ buď $u = v$ nebo $u = v/3$. V těchto případech nastává extrém.

Druhá derivace $d^2P/du^2 = 2\rho S \cdot (3u - 2v)$ ukazuje, že při $u = v$ nastává minimum, protože $P''(u)_{u=v} = 2\rho S\,v > 0$, a při $u = v/3$ nastává **maximum**, protože $P''(u)_{u=v/3} = -2\rho S\,v < 0$.

Výkon vodního proudu je největší při dopadu vody na stěnu pohybující se rychlostí velikosti $u = v / 3$, tj. při $u = 20/3$ m·s$^{-1} \cong 6{,}67$ m·s^{-1}.

8.26. O kolik se zvýší tlak v místě uzávěru při uzavírání potrubí o délce $l = 10$ km, je-li velikost rychlosti proudu $v = 1{,}5$ m·s^{-1} a předpokládáme-li, že uzavírání je rovnoměrné a trvá $\Delta t = 15$ s ? Hustota vody je 10^3 kg·m^{-3}. Značné zvýšení tlaku při rychlém uzavření potrubí tvoří princip tzv. *trkače*,

8.32. Do vody jsou ponořeny dvě kapiláry s vnitřními poloměry $R_1 = 1$ mm a $R_2 = 1{,}5$ mm. Vypočtěte povrchové napětí vody, když rozdíl hladin vodních sloupců v těchto kapilárách je $\Delta h = 4{,}9$ mm a předpokládáme-li dokonalou smáčivost vody.

*8.33.** Stanovte přetlak uvnitř kulové mýdlové bubliny způsobený povrchovým napětím.

Řešení:

Vlivem povrchového napětí σ vzniká uvnitř bubliny přetlak Δp. Jeho vlivem se může vykonat práce dW při zvětšení bubliny z poloměru R na poloměr $R + dR$

$$dW = \Delta p \cdot dV = \Delta p \cdot [4/3\,\pi\,(R + dR)^3 - 4/3\,\pi R^3] =$$
$$= \Delta p \cdot 4/3\,\pi \cdot [R^3 + 3R^2\,dR + 3R\,(dR)^2 + (dR)^3 - R^3] .$$

Když v hranaté závorce zanedbáme třetí a čtvrtý člen, dostaneme

$$dW = \Delta p \cdot 4\pi R^2\,dR ;$$

touto prací se zvýší povrchová energie bubliny o hodnotu dE

$$dE = \sigma \cdot 2dS = 2\sigma \cdot [4\pi\,(R + dR)^2 - 4\pi R^2] = 8\pi\,\sigma \cdot [2R\,dR + (dR)^2] .$$

Druhý člen v závorce zanedbáme a pro přírůstek povrchové energie získáme vztah

$$dE = 16\pi\,\sigma\,R\,dR .$$

Protože práce je rovna přírůstku energie ($dW = dE$), platí

$$\Delta p \cdot 4\pi R^2\,dR = 16\pi\,\sigma\,R\,dR \quad \Rightarrow \quad \Delta p = 4\sigma / R .$$

Přetlak v bublině je nepřímo úměrný poloměru bubliny. Povrch bubliny je dvojnásobný proti povrchu kapky.

8.34. Jaký průměr d trubice musíme zvolit, aby z ní (při dostatečně malém přetlaku) volně vytékaly kapky o průměrné hmotnosti $m = 235 \cdot 10^{-4}$ g ? Povrchové napětí kapaliny je $\sigma = 75$ mN·m^{-1}, velikost tíhového zrychlení počítejte $g = 10{,}0$ m·s^{-2}.

8.35. Jak velká je kapilární deprese rtuti ve skleněné trubičce poloměru $R = 1$ mm, když povrchové napětí rtuti má velikost $\sigma = 433 \cdot 10^{-3}$ N·m^{-1} a krajní úhel (úhel, který svírá rozhraní rtuť-vzduch se skleněnou stěnou) je $\alpha = 120°$?

8.36. Jaký střední průměr d mají póry filtračního papíru, když jimi vystoupí voda do výše $h = 30$ cm ? Povrchové napětí vody je $\sigma = 72$ mN·m^{-1} a tíhové zrychlení má velikost 9,81 m·s^{-2}.

9. Kmity. Vlny.

JEDNODUCHÉ HARMONICKÉ KMITÁNÍ

9.1. Určete amplitudu a počáteční fázi netlumeného harmonického pohybu HB po přímce, když souřadnice jeho výchylky v okamžiku $t = 0$ s je $u_x(0) = 5$ cm a souřadnice jeho rychlosti $v_x(0) = 20$ cm·s^{-1}. Frekvence kmitů je 1 Hz.

Řešení:

$u_x(0) = 0{,}05$ m, $v_x(0) = 0{,}02$ m·s^{-1}, $f = 1$ Hz ; $u_{xm} = ?$, $\varphi = ?$

Při netlumeném harmonickém pohybu má rovnice okamžité výchylky tvar

$$u_x(t) = u_{xm} \cdot \cos(\omega t + \varphi) , \qquad (1)$$

kde u_{xm} je amplituda výchylky, ω - úhlová frekvence, φ - počáteční fáze, t - čas. Rovnice souřadnice okamžité rychlosti pohybu je pak

$$v_x(t) = du_x/dt = -u_{xm}\,\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) . \qquad (2)$$

Uvážíme-li ještě vztah mezi úhlovou frekvencí a frekvencí $\omega = 2\pi f$, můžeme z rovnic (1) a (2) vyjádřit souřadnice výchylky a rychlosti v čase $t = 0$ s

$$u_x(0) = u_{xm} \cdot \cos\varphi , \qquad v_x(0) = -u_{xm} \cdot 2\pi f \cdot \sin\varphi . \qquad (3)$$

Abychom vyjádřili hledané veličiny, v rovnicích (3) osamostatníme harmonické funkce, rovnice umocníme a sečteme, popřípadě podělíme:

$$u_x(0) / u_{xm} = \cos\varphi , \qquad v_x(0) / (2\pi f\,u_{xm}) = -\sin\varphi , \qquad (3')$$

$$[u_x(0) / u_{xm}]^2 = \cos^2\varphi , \qquad [v_x(0) / (2\pi f\,u_{xm})]^2 = \sin^2\varphi ; \qquad (3'')$$

součet: $[u_x(0) / u_{xm}]^2 + [v_x(0) / (2\pi f\,u_{xm})]^2 = 1$,

podíl: $v_x(0) / [2\pi f\,u_x(0)] = -\tan\varphi$.

Z posledních dvou rovnic vyjádříme u_{xm} a φ

$$u_{xm} = \sqrt{u_x^2(0) + v_x^2(0)/(4\pi^2 f^2)} = \sqrt{(0{,}0025 + 0{,}04 / 4\pi^2} = 5{,}93 \cdot 10^{-2}\ \text{m},$$

$$\varphi = \arctan\,[-v_x(0) / 2\pi f\,u_x(0)] = \arctan\,[-0{,}2 / 2\pi \cdot 0{,}05]\ \text{rad} = -\,0{,}567\ \text{rad}.$$

Amplituda kmitavého pohybu je přibližně 6 centimetrů a počáteční fáze –0,567 radiánu.

9.2. V kterých okamžicích (v prvé půlperiodě) nabývá HB při harmonickém pohybu s periodou $T = 10$ s výchylky $(\sqrt{3} / 2)\,u_{xm}$ (u_{xm} je amplituda), je-li výchylka v čase $t = 0$ s rovna 0 m ? Vyznačte graficky!