TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

WEBOVÉ STRÁNKY PRO VÝUKU DIFERENCIÁLNÍHO A INTEGRÁLNÍHO POČTU NA STŘEDNÍ ŠKOLE

Bakalářská práce

Studijní program:	B1101 – Matematika
Studijní obory:	1802R023 – Informatika se zaměřením na vzdělávání
	7504R015 – Matematika se zaměřením na vzdělávání
Autor práce:	**Michal Pham**
Vedoucí práce:	RNDr. Dana Černá, Ph.D.

Liberec 2014

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: **2012/2013**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Michal Pham**
Osobní číslo:	**P10000558**
Studijní program:	**B1101 Matematika**
Studijní obory:	**Informatika se zaměřením na vzdělávání** **Matematika se zaměřením na vzdělávání**
Název tématu:	**Webové stránky pro výuku diferenciálního a integrálního počtu na střední škole**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

Zásady pro vypracování:

CÍL: Student prostuduje dostupné učebnice, sbírky úloh a webové stránky týkající se diferenciálního a integrálního počtu. Na základě prostudované literatury vytvoří vlastní webové stránky, které budou sloužit jako pomůcka pro výuku funkcí na střední škole.
Na stránkách bude umístěna teorie, řešené i neřešené příklady a také interaktivní testy.
POŽADAVKY: Znalost středoškolské matematiky.
METODY: Zpracování tématu dle literatury, tvorba příkladů a testů, tvorba webových stránek.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

[1] BARTSCH, H. J., Matematické vzorce. SNTL, Praha, 2006. ISBN 80-200-1448-9.
[2] ČERNÝ, I.; ROKYTA, M., Differential and integral calculus of one real variable. Karolinum, Praha, 1998. ISBN 80-7184-661-9.
[3] ECCHER, C., Profesionální webdesign, 2. vydání, Computer Press, Brno, 2010. ISBN 978-80-251-2677-6.
[4] HRUBÝ, D.; KUBÁT, J., Matematika pro gymnázia - diferenciální a integrální počet. Prometheus, Praha, 2010. ISBN 978-80-7196-363-9.
[5] POLÁK, J., Přehled středoškolské matematiky. Prometheus, Praha, 2010. ISBN 978-80-7196-356-1.
[6] Ročenky české matematické olympiády.
[7] http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Dana Černá, Ph.D.**
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **11. října 2012**
Termín odevzdání bakalářské práce: **13. prosince 2013**

doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.
děkan

L.S.

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

dne 15/10/12

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum:

Podpis:

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval paní RNDr. Daně Černé, Ph.D. za trpělivost a ochotu, se kterou se ujala vedení mé bakalářské práce. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přátelům, bez jejichž podpory by tato práce nevznikla.

Anotace

Bakalářská práce se věnuje webovým stránkám, které budou sloužit při výuce diferenciálního a integrálního počtu na středních školách. Webové stránky jsem vytvořil pomocí informací získaných z odborné literatury, vlastních informací a dostupných existujících odborných materiálů.

Webové stránky jsou rozděleny na tři části: diferenciální počet, integrální počet a test.

První část o diferenciálním počtu je rozdělena do tří kapitol, které se zabývají spojitostí funkce, limitou funkce a nakonec samotnou derivací funkce. Všechny kapitoly obsahují teorii a jsou doplněny názornými grafy a příklady určenými k osvojení výpočtu limit a derivací.

V druhé části o integrálním počtu jsou uvedeny kapitoly primitivní funkce a určitý integrál. Tyto kapitoly také obsahují potřebnou teorii, která je doplněna vhodnými grafy. Příklady v těchto kapitolách slouží k osvojení výpočetních metod, které se používají při integrování.

Ve třetí části je mnou vytvořený interaktivní test, který slouží k otestování nabytých znalostí. Tento bodovaný test je orientovaný především na derivace a integrály.

Cílem práce je vytvořit webové stránky, které mohou učiteli pomoci lépe vysvětlit učivo. Dále tyto webové stránky mohou sloužit jako učební text pro studenty za účelem lepšího porozumnění, případně osvěžení učiva.

Klíčová slova: spojitost, limita, derivace, integrál, střední škola

Annotation

Bachelor thesis deals with websites that will serve to teach differential and integral calculus at high school. I created the website using information obtained from the specialized literature, own information and existing specialized materials.

The website is divided into three parts: differential calculus, integral calculus, and a test.

The first part of the calculus is divided into three chapters, which are about continuity of functions, limits of functions and derivative of functions in the end. All chapters include theory and are supplemented with illustrative graphs and examples, designed to acquisition calculus of limits and derivatives.

In the second part about integral calculus are chapters Primitive functions and Definite integral. These chapters also contain the necessary theory, which is accompanied by appropriate graphs. The examples in these chapters serve to acquisition computational methods that are used in the integration.

In the third part is an interactive test doing by myself that is used to test acquired knowledge. This ranking test is oriented mainly on derivatives and integrals. The aim is to create a website that can help teachers better explain the subject matter. Furthermore website can serve as a textbook for students to improve understanding or refreshment of the curriculum.

Keywords: continuity, limits, derivative, integral, high school

Obsah

Seznam obrázků

Úvod

Tématem bakalářské práce je vytvořit webové stránky obsahující učivo zabývající se diferenciálním a integrálním počtem, který patří mezi učivo středních škol a gymnázií. Protože je toto téma součástí tématických plánů a osnov na středních školách a gymnáziích, je aktuální. Diferenciální a integrální počet je významnou součástí učiva čtvrtého ročníku. Pro studenty, kteří po středoškolském vzdělání pokračují na univerzitu, jsou znalosti diferenciálního a integrálního počtu často nezbytnou nutností, zejména to platí pro přírodovědné a technické obory.

Při tvorbě webových stránek jsem často čerpal z učebnic a literárních pramenů. Zejména z knihy Matematika pro gymnázia, diferenciální a integrální počet od RNDr. Daga Hrubého a RNDr. Josefa Kubáta. Hlavním důvodem použití této knihy při tvorbě webových stránek bylo strukturování jednotlivých kapitol ve správném pořadí a také kontrola při formulaci jednotlivých vět a definic. Tato kniha mi výrazně pomohla při mé práci.

Obsahem této bakalářské práce je kapitola o využití informací z webových stránek. Jde o znalosti, které se ve čtvrtém ročníku vyučují v závislosti na probrané látce a navazují na informace, které obsahují webové stránky. Jmenovitě jde o vyšetření průběhu funkce, výpočet objemu rotačního tělesa a výpočet obsahu pod křivkou pomocí integrálu.

Další částí obsahu je analýza webových stránek. V analýze se zabývám hodnocením jednotlivých kapitol a podkapitol a blíže popisuji tyto jednotlivé části.

Dále uvádím, že webové stránky jsou strukturovány i pro využití v tištěné podobě. Nezbytnou podmínkou je otevření všech řešení u příkladů na stránkách v případě, že mají být také zobrazeny.

1 Informace o webových stránkách

Stránky, které jsem vytvořil pro výuku integrálního a diferenciálního počtu na středních školách, mají v menu pět kapitol, úvod a interaktivní test. Těchto pět kapitol je rozděleno na deset podkapitol.

Úvod je vytvořen jako hlavní strana a jeho hlavním účelem je přivítání a krátké srozumnění o účelu webových stránek.

Témata pěti kapitol jsou rozčleněna následovně. První kapitola s názvem Spojitost funkce obsahuje podkapitoly: Bodová spojitost funkce, Spojitost funkce na intervalu. Druhá kapitola s názvem Limita funkce obsahuje podkapitoly: Limita funkce ve vlastním bodě, Limita funkce v nevlastním bodě. Třetí kapitola s názvem Derivace funkce je rozdělena následovně: Derivace funkce v bodě, Derivace elementární funkce. Čtvrtá kapitola se nazývá Primitivní funkce a je rozdělena následovně: Základní neurčité integrály, Způsoby integrování. Pátá a také poslední kapitola s názvem Určitý integrál obsahuje kapitoly: Určitý integrál, Výpočet určitého integrálu.

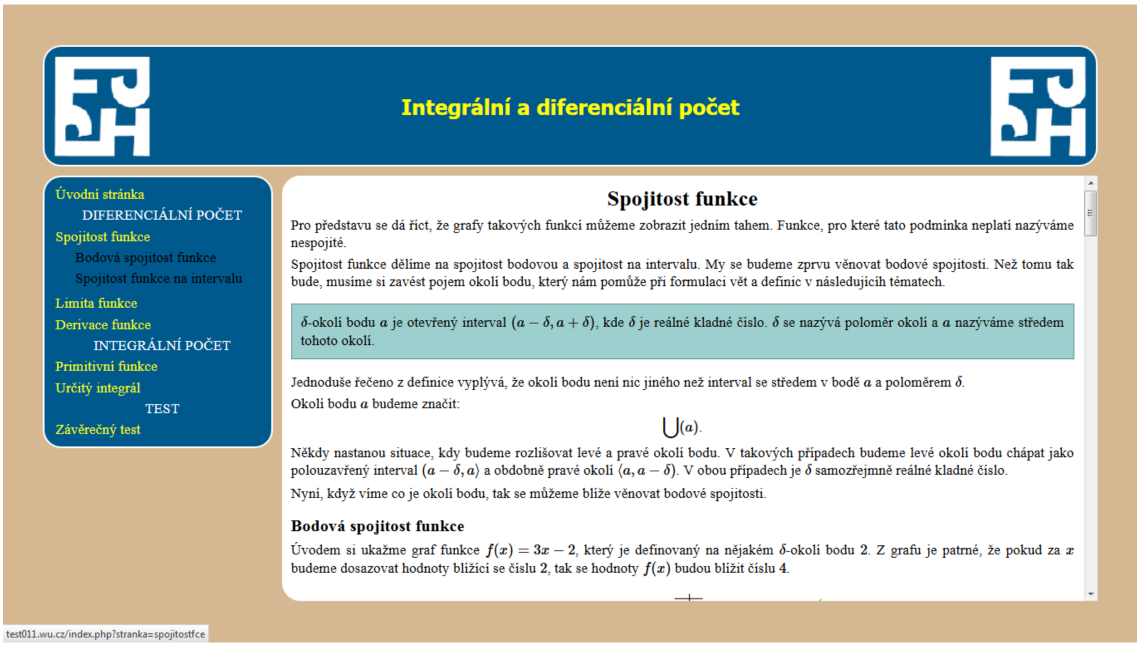
Poslední položkou v menu je interaktivní test obsahující deset otázek, na které se odpovídá formou kvízu. Pro každou otázku je vždy jen jedna správná odpověď. Po vyhodnocení test nabízí opravené odpovědi a počet bodů získaných z testu.

Kapitoly i podkapitoly fungují jako internetové odkazy. Je to jednou z výhod webových stránek oproti učebnici a to především v možnostech vyhledávání. V případě, že student nepotřebuje pročítat všechny informace o diferenciálním a integrálním počtu, ale hledá jen některou část výkladu, je pro něj vyhledávání na webových stránkách výhodnější.

Při tvorbě webových stránek jsem se snažil mít na paměti, že základem je gramatická a stylistická korektnost. Zároveň jsem se snažil zachovat jednoduchost a přehlednost. Nejdůležitější je ale správný obsah, jehož hodnota je v případě těchto webových stránek obsažena ve výkladovém textu, grafech a řešených příkladech, které vždy obsahují řešení. Mou snahou bylo zvolit správný obsah vhodný k tématům a to jsem měl na paměti po celou dobu tvorby webových stránek.

Přejděme teď k samotným stránkám. Každá podkapitola obsahuje teorii, která se vždy vztahuje k dané části učiva. Součástí této teorie mohou být definice, věty, případně vysvětlení různých pojmů. Každá definice na těchto webových stránkách je zvýrazněna sytě modrým obdélníkem, ve kterém se nachází. Obdobně zvýrazněné jsou i věty, které se nacházejí v sytě zelených obdélnících. Takto zvýrazněny jsou věty a definice proto, aby byly odlišeny od ostatní teorie. Především proto, aby bylo snadné je vyhledat, také ale proto, že definice a věty jsou základ, který k matematice jednoznačně patří. Velké množství vět i definic obsahují vzorce, které jsou pro výklad důležité a nezbytné. Nelze bez nich například vypočítat některé konkrétní integrály nebo derivace. Zbývající teorie obsahuje grafy funkcí, případně některá prostá vysvětlení.

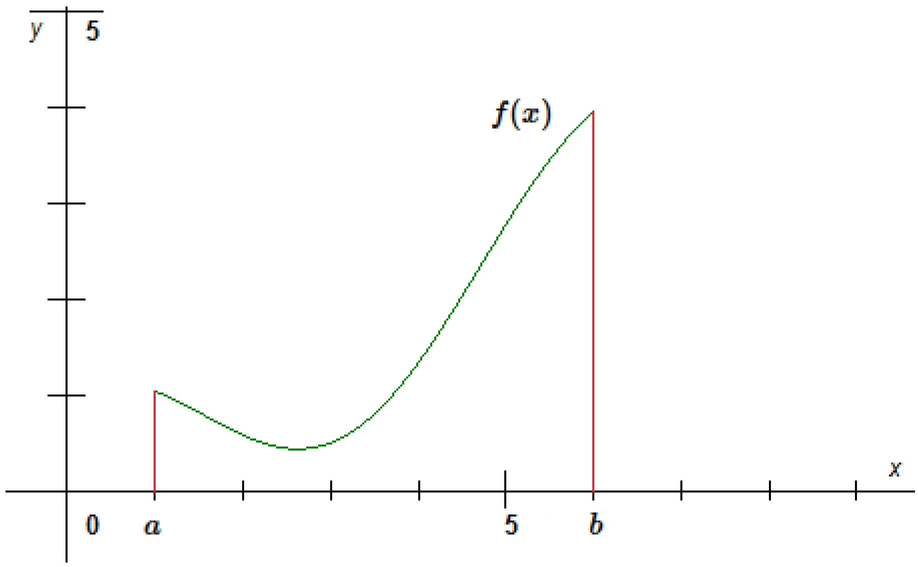
Za malý nedostatek považuji následující. Pokud budou stránky tisknuty v odstínech šedi, věty a definice nebudou zvýrazněny dostatečně. Pro lepší zobrazení je vhodné tisknout barevně, pak jsou definice a věty dostatečně zvýrazněny. Pro názornou představu o vzhledu stránek uvádím následující obrázek.



Obrázek 1: Náhled webových stránek

Cílovou skupinou, pro kterou jsem stránky vytvářel byli především studenti středních škol a jejich vyučující. Právě s touto cílovou skupinou jsem se radil o vzhledu stránek, jejichž závěrečná forma je založena na kontrastu a jednoduchosti. Obsah stránek ocení také absolventi středních škol a široká veřejnost, která projevuje zájem o diferenciální a integrální počet.

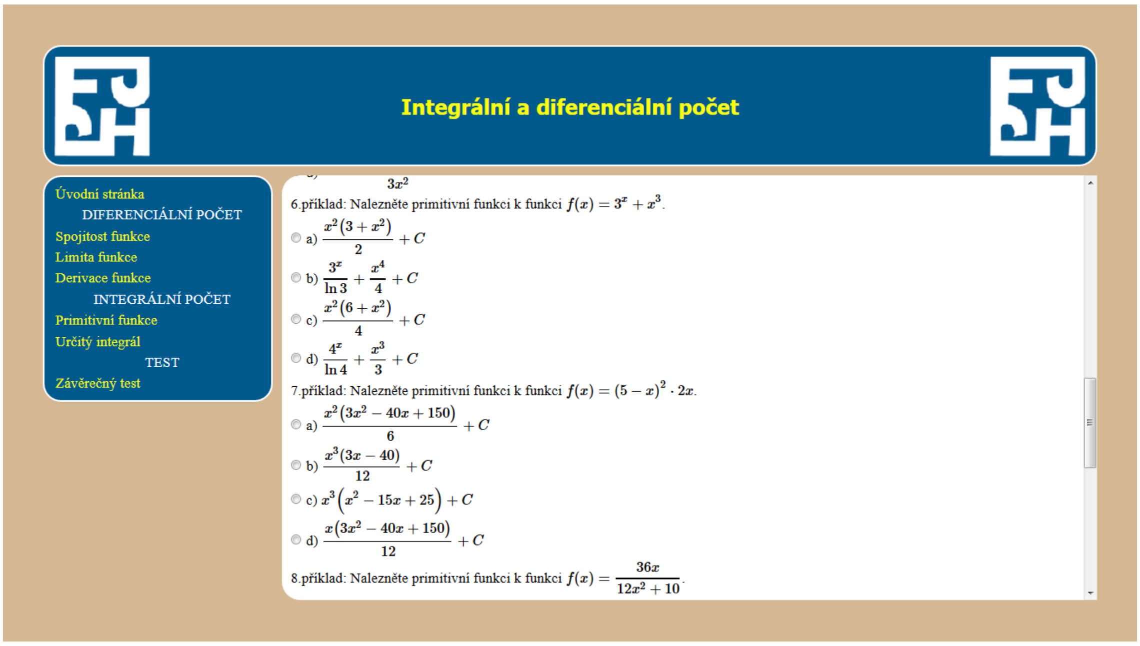
Na stránkách je velké množství obrázků. Většinu těchto obrázků tvoří především grafy funkcí, které slouží jednak k výkladu, ale také i ke konkrétním příkladům. Obrázky jsou vždy umístěny do středu stránky a tématicky plynule navazují na studovanou látku v textu. Grafy v obrázcích obsahují vždy popsané osy, počátek a měřítko. Následující ukázka obsahuje graf funkce *f(x)*, který je omezen na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.



Obrázek 2: Náhled grafu z webových stránek

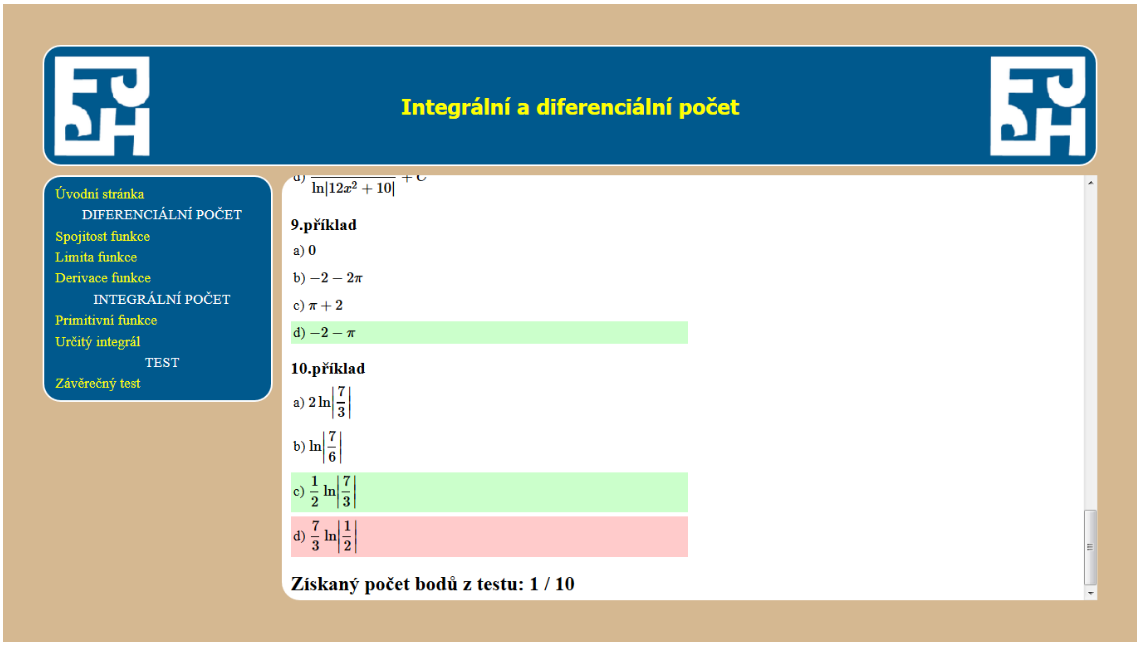
Využití těchto stránek je z velké části ovlivněno samotnou kvalitou textu, obrázků a dalších věcí, jako jsou formulace definic a vět nebo interaktivní test. Zaměření stránek bylo především na kvalitu, nikoliv na kvantitu. Z toho důvodu jsem při tvorbě stránek kladl důraz především na kvalitu informací a důvěryhodnost zdrojů, ze kterých jsem čerpal. V teorii obsažené na webových stránkách jsem se z důvodů přehlednosti snažil držet obvyklého značení a nezaváděl jsem žádné nové pojmy.

Dále mnou vytvořené webové stránky obsahují interaktivní test. Tento test je tvořen deseti jednoduchými příklady, které navazují na studijní látku obsaženou na stránkách. Při výuce může tento test posloužit jako závěrečné shrnutí informací, které vyučující se studenty probral, může také prověřit jejich základní znalost tématu nebo může sloužit jako zpestření vyučovací hodiny. Test samotný ale neprokazuje schopnosti studenta. Student si může odpovědi jednoduše tipnout a když bude odpověď správně, vyučující nepozná jakou metodou úspěchu dosáhl. Tím chci sdělit, že samotný test uvedený na stránkách má především orientační hodnotu pro studenta nebo jinou osobu, která si přeje své schopnosti prověřit. Následuje obrázek testu z webových stránek.



Obrázek 3: Náhled zadání testu z webových stránek

Když se návštěvník stránek rozhodne řešit test, přečte si zadání a následně potvrdí správnou odpověď pomocí myši. V závěru těchto otázek je hypertextový odkaz, který návštěvníka stránek odkáže k vyhodnocenému testu. Stránky jsou napsány tak, že vždy označí odpověď návštěvníka. Pokud odpověděl na otázku špatně, je jeho odpověď označena červeným obdélníkem. V případě, že odpověděl správně, je jeho odpověď zvýrazněna obdélníkem zeleným. Dále jsou webové stránky nastaveny tak, aby také vždy znázornily i správnou odpověď a to také zeleným obdélníkem. Pokud jsou tedy u jedné otázky dva barevné obdélníky, jeden červený a jeden zelený, tak to znamená, že návštěvník stránek odpověděl špatně. Pokud je u otázky znázorněn jen zelený obdélník, tak návštěvník odpověděl správně. Přehledná ukázka vyhodnocení testu vypadá následovně.



Obrázek 4: Náhled vyhodnocení testu z webových stránek

1.1 Tvorba webových stránek

Pro tvorbu webových stránek jsem využil znalosti o programovacím jazyku Java a jazyku HTML, který se používá především pro specifikaci rozvržení hypertextových odkazů. HTML je kód, ze kterého jsou webové stránky tvořeny. Tvoří syntaxi s rozložením příkazů, které na stránkách pracují v pozadí. Znalost programovacího jazyka Java jsem využil při používání zobrazovacího enginu, který je napsán v tomto programovacím jazyce. Zobrazovací engin jsem vložil na stránky. Jeho funkcí na mnou vytvořených webových stránkách byl především překlad vzorců z LaTeXového zápisu. Znalost zápisu vzorců v LaTeXu považuji za základní znalost počítačové typografie nejen pro matematika tvořícího webové stránky, ale i pro kohokoliv jiného, kdo na svém webu plánuje uveřejnit zápisy ve vzorcích.

Název zobrazovacího enginu, který jsem použil je MathJax. Je volně ke stažení na internetu. Jak jsem již uvedl, jeho funkcí je přepisovat LaTeXový zápis do vzorců. Hlavní výhodou je především kompatibilita. Bez komplikací funguje na operačním systému Linux, OS X nebo Windows, což jsou jedny z nejrozšířenějších operačních systémů. Protože je MathJax nahrán na webových stránkách, není potřeba jej dále stahovat. Návštěvník stránek pouze při načítání počká o dvě vteřiny déle než MathJax zobrazí vzorce. Při programování stránek s MathJaxem jsem ušetřil velké množství času.

Pro samotné programování jsem použil program Sublime Text 2. Jde o program určený především k tvorbě webových stránek, který je opět volně ke stažení na internetu. Programování usnadňuje především přehledností, kterou nabízí jeho doplňující lišty a vhodné zabarvení příkazů v textu.

Na závěr této podkapitoly, která byla věnována informacím o prostředcích k vytvoření těchto webových stránek, bych chtěl zdůraznit, že pro úspěšnou tvorbu webových stránek je nezbytná základní znalost programování v jazyce HTML a Java.

1.2 Cíle webových stránek

Výukovým cílem u studentů je představa o změnách kvantitativních a kvalitativních v oblastech afektivních, kognitivních a psychomotorických, kterých se snažíme dosáhnout ve stanoveném čase během výukového procesu. Pro učitele pracujícího s interaktivními webovými stránkami to znamená, že stanoví jednotlivé cíle, jejichž plněním by se mělo dosáhnout obecného cíle vzdělávání. Zpracování těchto obecných cílů směřuje k tvořivosti studenta. Student se tak rozvíjí esteticky, eticky a sociálně. Proč tvoříme cíle výuky? Především se snažíme zprostředkováním vhodného výukového cíle dát výuce řád. To pomáhá při volbě hodnocení a vyučování.

Cílem mnou vytvořených webových stránek bylo sjednotit výukový materiál potřebný k výuce matematiky u témat diferenciálního a integrálního počtu. Tento materiál jsem nevytvořil pouze pro svojí budoucí potřebu v učitelské praxi, ale i pro jiné učitele středních škol a gymnázií, případně pro jejich studenty nebo veřejnost zajímající se o konkrétní látku. Teorie k tématu diferenciálního a integrálního počtu uvedená na webových stránkách se dá obecně použít při výuce ve všech typech školských zařízení, která vzdělávají podle rámcového vzdělávacího programu. Může také posloužit studentům, kteří zaostávají ve studiu, případně chyběli na vyučování a potřebují si doplnit některé konkrétní znalosti.

Jedním z dalších cílů bylo zakomponovat ICT do výuky matematiky a vytvořit tak možnosti využití internetu při výuce. Podle mých prozatímních zkušeností využití ICT při výkladu udržuje u značné části posluchačů pozornost, ale i aktivitu. Z toho usuzuji, že ICT může oživit výuku a tím i aktivně ovlivnit pozornost studentů při vyučování.

2 Využití obsahu stránek

Tato kapitola se zabývá především využitím obsahu stránek. Důraz je kladen na využití osvojeného učiva především v matematice. Konkrétní témata jsou rozdělena do podkapitol této kapitoly. Využití obsahu stránek jsem rozdělil do podkapitol o limitách, diferenciálním počtu a závěrem o integrálním počtu. Tato témata v podkapitolách se dají využít například pří šetření průběhu funkce a výpočtu obsahu pod křivkou pomocí integrálu. Jak pro průběh funkce, tak pro výpočet obsahu pod křivkou je nezbytným předpokladem ovládání znalostí obsažených na mnou vytvořených webových stránkách. V následujících podkapitolách si vysvětlíme využití látky z webových stránek.

2.1 Využití limity funkce

Pro využití znalostí o limitě funkce při hledání asymptot je předpoklad, že čtenář má znalosti učiva o hyperbole a asymptotách. V matematice se s asymptotami nesetkáváme jen u hyperboly, ale také u velkého množství elementárních funkcí. Mezi tyto funkce patří například $f(x)=\ln x$, $f(x)=5^x$ a jiné. Asymptoty využíváme například při šetření průběhu funkce, kde s jejich pomocí můžeme sestrojit graf funkce.

V tomto ohledu je důležité znát vlastností funkce v jejích nevlastních bodech $+\infty$ a $-\infty$. V těchto bodech funkce není definovaná, ale má v nich alespoň jednu jednostrannou nevlastní limitu. Na webových stránkách jsou tyto limity prezentovány pomocí vhodných grafů. Asymptoty dělíme na asymptoty se směrnicí a asymptoty bez směrnice.

2.1.1 Asymptota se směrnicí

Při hledání asymptoty se směrnicí je rovnice asymptoty $y=ax+b$. Naším cílem je určit a a b tak, aby $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ nebo popřípadě, aby $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$. Pomocí spočtené limity určíme rovnici asymptoty funkce.

2.1.2 Asymptota bez směrnice

Asymptota bez směrnice je přímka, která je kolmá na osu *x*, její rovnice je $x = c$, kde *c* náleží množině reálných čísel. Když hledáme asymptotu bez směrnice nějaké funkce, hledáme nejdříve body, ve kterých funkce není definována. Poté v těchto bodech určíme jednostranné limity. Pokud funkce v těchto bodech bude mít nevlastní limity, bude funkce mít v těchto bodech asymptoty bez směrnice.

2.2 Využití derivace

Obdobně jako limita funkce se znalost diferenciálního počtu uplatňuje u šetření průběhu funkce. V případě průběhu funkce využíváme první derivace funkce a druhé derivace funkce. První derivace funkce nám slouží ke zjištění monotónnosti funkce na intervalu. Také jejím prostřednictvím odhalujeme stacionární body, nebo-li body „podezřelé z extrému“. Druhá derivace funkce nám pak pomáhá určit potenciální inflexní body funkce a také konvexnost a konkávnost funkce na intervalech.

2.2.1 První derivace

Pomocí první derivace f' funkce f určujeme stacionární body, které jsou kořeny rovnice $f'(x)=0$, protože platí, že směrnice tečny je v bodě lokálního extrému nulová. Z těchto stacionárních bodů lze poté pomocí intervalů monotónnosti určit ty, které jsou lokálními extrémy.

Intervaly monotónosti a lokální extrémy určíme z první derivace, protože platí následující:

1. Je-li $f'(x)>0$ pro všechna x z určitého intervalu, potom je na tomto intervalu funkce f rostoucí.

2. Je-li $f'(x)<0$ pro všechna x z určitého intervalu, potom je na tomto intervalu funkce f klesající.

2.2.2 Druhá derivace

Pomocí druhé derivace f'' funkce f určujeme body v nichž je druhá derivace nulová. Body v nichž je druhá derivace nulová jsou potenciální inflexní body. To znamená, že by mohlo jít o body, které vymezují intervaly konvexnosti a konkávnosti. Tyto body získáme řešením rovnice $f''(x)=0$.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti určíme z druhé derivace, protože platí následující:

1. Je-li $f''(x)>0$ pro všechna x z určitého intervalu, potom je na tomto intervalu funkce f konvexní.

2. Je-li $f''(x)<0$ pro všechna x z určitého intervalu, potom je na tomto intervalu funkce f konkávní.

2.3 Využití určitého integrálu

Výpočet určitého integrálu uplatníme především chceme-li vypočítat obsah plochy některých rovinných útvarů nebo objemy a povrchy rotačních těles. Dále lze výpočet určitého integrálu uplatnit u výpočtu délek rovinných křivek. Určitý integrál má široké využití i ve fyzice a chemii, což jsou předměty, které nejsou obsahem této bakalářské práce. Pro úlohy tohoto typu lze využít znalostí, které může návštěvník webových stránek čerpat z jejich obsahu.

2.3.1 Obsah rovinného útvaru

Z definice Riemannova integrálu, která je uvedena na mnou vytvořených webových stránkách plyne následující věta.

Nechť $f(x)$ je nezáporná funkce a $I=\langle a,b\rangle$ je uzavřený interval. Pokud je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu I, potom pro obsah U křivočarého lichoběžníka ohraničeného grafem funkce $f(x)$ shora, přímkami $x=a$, $x=b$ a osou x platí:

$$U=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Tento uvedený vztah platí pro nezápornou funkci. Z definice určitého integrálu, která je na již existujících webových stránkách uvedena, je zřejmé, že pro nekladnou funkci na stejném intervalu bude určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0.$

Pro obsah takového křivočarého lichoběžníka, který je ohraničený grafem funkce $f(x)$ zdola, přímkami $x=a$, $x=b$ a osou x platí:

$$U=-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Pro obsah útvaru ohraničeného křivkami dvou funkcí platí:

Nechť *f(x)* a *g(x)* jsou integrovatelné funkce a platí $g(x) \leq f(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$. Potom pro obsah *U* křivočarého lichoběžníka ohraničeného grafem funkce *f(x)* shora, grafem funkce *g(x)* zdola, přímkami *x=a* a *x=b* platí:

$$U = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx.$$

Pomocí těchto integrálů lze spočítat jednotlivé příklady, které jsou vymezeny dle výše uvedených zadání. K jejich výpočtu je potřeba základní znalost integrálního počtu, která je uvedena na webových stránkách.

2.3.2 Objem a povrch rotačního tělesa

Výpočet objemu rotačního tělesa je jedna z dalších úloh, které řešíme pomocí znalostí určitého integrálu. Pro objem rotačního tělesa *R*, které vznikne rotací útvaru *U* kolem osy *x*, platí následující věta. Před uvedením této věty si dovolím připomenout, že tento útvar *U* je vymezen podle výše zmíněných pravidel, týkajících se obsahu křivočarého lichoběžníka.

Platí následující věta:

Nechť *f(x)* je spojitá nezáporná funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť *R* je těleso, které vznikne rotací útvaru *U* kolem osy *x*, potom objem *V* rotačního tělesa *R* vypočteme pomocí vzorce:

$$V(R) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Povrch rotačního tělesa se počítá podle vzorce, který vychází z následující věty.

Nechť *f(x)* je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a má na tomto intervalu derivaci a nechť *R* je těleso, které vznikne rotací útvaru *U* kolem osy *x*, potom lze povrch *P* vypočítat podle vzorce:

$$P(R) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Vidíme, že při výpočtu objemu i povrchu rotačního tělesa se lze snadno řídit zde uvedenými dvěma vzorci. Opět je pro osvojení této látky znalost učiva z webových stránek minimálním předpokladem.

3 Obsah webových stránek

Generace od generace se technický pokrok stále posouvá kupředu a my, lidé 21. století, se měníme společně s dobou ve které žijeme. Pokrok, na který se chci zaměřit se týká odvětví internetu a poskytování jeho služeb. Internet za posledních několik desetiletí výrazně změnil svoji tvář. V současné době tvoří v podstatě nikde nekončící komunikační síť, která obsahuje bezmezné množství informací. Tyto informace jsou navíc v naprosté většině případů volně dostupné jakémukoliv uživateli. Volbou slov „volně dostupné" je myšleno, že na internet se lze připojit z prakticky jakékoliv části světa a v kteroukoliv denní dobu. Informace poskytované na internetu jsou také z velké části permanentní a často bývají i pravidelně aktualizované. Neexistuje žádný maximálně vyměřený čas, který na internetu můžeme setrvat. Setrvání na internetu, neboli surfování ve virtuálním světě, totiž není časově omezováno. Využívání internetu je v dnešní době podmíněno jen možnostmi připojení.

Lidé 21. století tráví velké množství času využíváním internetových služeb. Dá se tvrdit, že většina studentů středních škol, ale také žáků základních škol v dnešní době ovládá internetové služby a je schopná aktivně vyhledávat informace umístěné na internetu. Z tohoto pohledu je logické umístit výukové materiály na internet. Studenti a žáci, kteří zameškali výuku mají pak možnost vyučované informace najít a pracovat s nimi při samostudiu. Pokud vyučující využívá konkrétní webovou stránku při výuce, například jako webovou prezentaci, je jen na místě, aby svůj zdroj studentům odhalil. V případě samostudia poté studenti čerpají ze stejných zdrojů jako vyučující a nemusí se při vyučování zdržovat například s formalitami jako je zavádění odlišného značení veličin nebo návaznost jednotlivých témat. Mnou vytvořené webové stránky jsou navrženy nejen pro internetovou prezentaci, ale mohou sloužit i jako příprava na hodinu pro studenty nebo vyučující.

V následujících podkapitolách bych chtěl uvést jednotlivá témata probíraná na mnou vytvořených webových stránkách v pořadí, v jakém jsou témata seřazena i na webu. Protože informační text umístěný na mnou vytvořených webových stránkách je velice obsáhlý, uvedu z něj v následujících podkapitolách jen ty nejdůležitější části teorie.

3.1 Spojitost funkce

Spojitost funkce dělíme na spojitost bodovou a spojitost na intervalu. My se budeme zprvu věnovat bodové spojitosti. Než tomu tak bude, musíme si zavést pojem okolí bodu, který nám pomůže při formulaci vět a definic v následujícíh tématech.

δ-okolí bodu a je otevřený interval $(a-\delta, a+\delta)$, kde δ je reálné kladné číslo. δ se nazývá poloměr okolí a a nazýváme středem tohoto okolí.

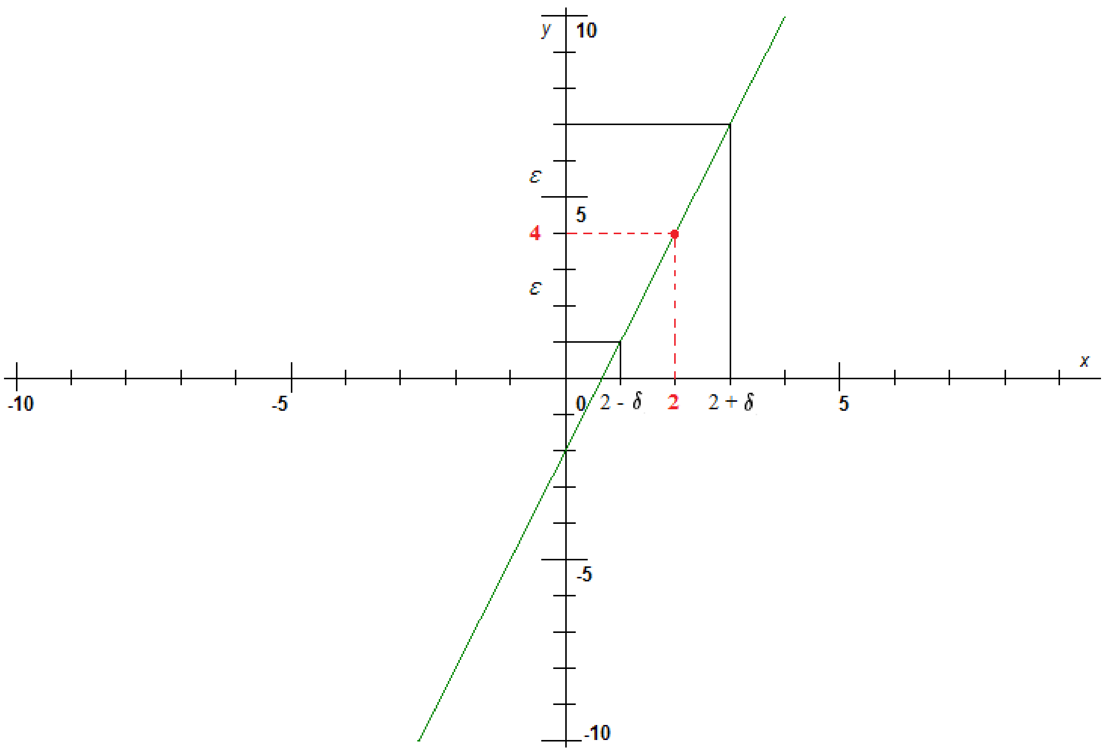
Okolí bodu a budeme také značit:

$U(a)$.

Někdy nastanou situace, kdy budeme rozlišovat levé a pravé okolí bodu. V takových případech budeme levé okolí bodu chápat jako polouzavřený interval $(a-\delta, a\rangle$ a obdobně pravé okolí $\langle a, a-\delta)$. V obou případech je δ reálné kladné číslo.

3.1.1 Bodová spojitost funkce

Úvodem si ukažme graf funkce $f(x)=3x-2$, definovaný na nějakém δ-okolí bodu 2. Z grafu je patrné, že pokud za x budeme dosazovat hodnoty blížící se číslu 2, tak se hodnoty $f(x)$ budou blížit číslu 4.



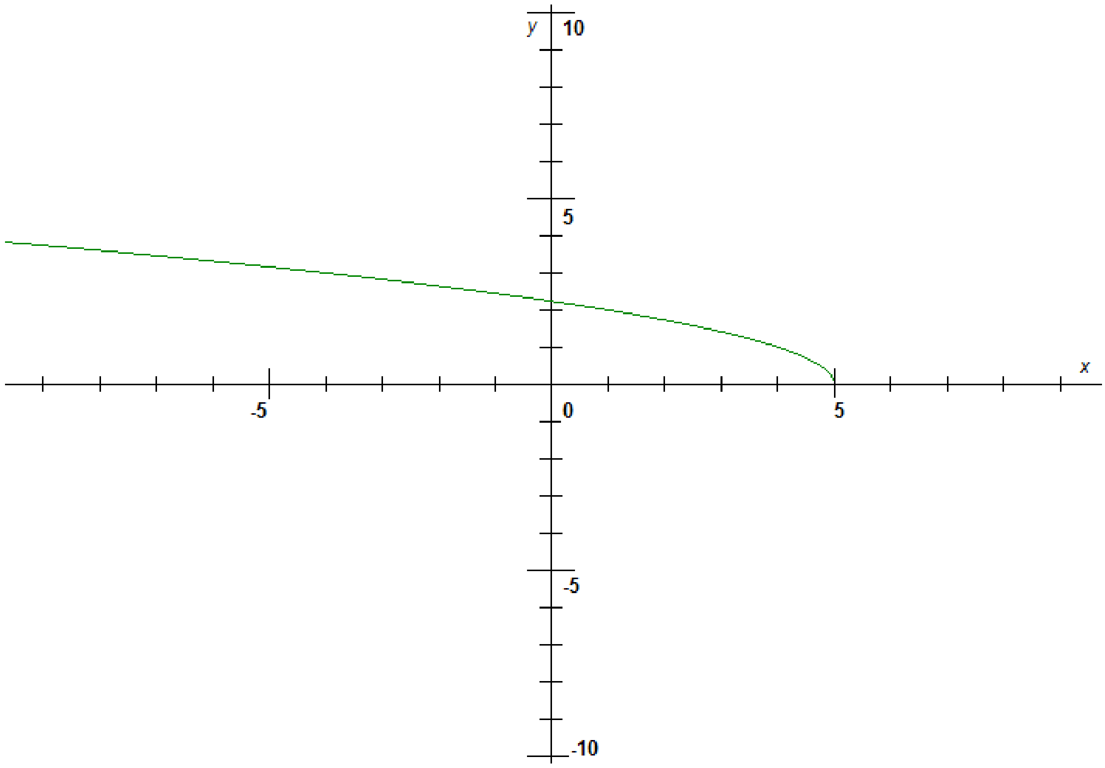
Obrázek 5: Graf pro popis spojitosti funkce

Nyní přejděme k definici.

Předpokládejme, že existuje $\delta > 0$, takové, že f je definována v $U\delta(a)$. Funkce f je spojitá v bodě a, pokud k libovolně zvolenému ε-okolí bodu $f(a)$ existuje takové δ-okolí bodu a, že pro všechna x z δ-okolí a patří všechny hodnoty $f(x)$ do zvoleného ε-okolí bodu $f(a)$.

Dále platí, že všechny elementární funkce a funkce složené z elementárních funkcí jsou spojité v každém bodě svého definičním oboru.

Abychom mohli tuto část o spojitosti v bodě uzavřít, musíme si zavést ještě dva pojmy. Spojitost funkce v bodě zleva a spojitost funkce v bodě zprava. Pro bližší pochopení se podívejne na graf funkce $f(x)=\sqrt{5-x}$.



Obrázek 6: Graf pro názorný příklad spojitosti v bodě zleva

Z grafu je patrné, že definiční obor funkce spadá do intervalu $(-\infty, 5\rangle$. Zaměřme se teď na bodovou spojitost v bodě 5. Můžeme říci, že je funkce v bodě 5 spojitá i přesto, že v pravém okolí tohoto bodu není definovaná? Pokud se budeme spoléhat jen na definici spojitosti v bodě, tak ne. Proto zaveďme pojmy jako spojitost v bodě zprava a spojitost v bodě zleva. Jinak řečeno také jako spojitost v bodě v levém okolí a spojitost v bodě v pravém okolí.

Nechť f je funkce a a bod. Řekneme, že funkce f je v bodě a spojitá zprava, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna x z intervalu $\langle a, a+\delta)$ platí nerovnost $\varepsilon > |f(x) - f(a)|$.

Nechť f je funkce a a bod. Řekneme, že funkce f je v bodě a spojitá zleva, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna x z intervalu $(a-\delta, a\rangle$ platí nerovnost $\varepsilon > |f(x) - f(a)|$.

Když známe tyto definice, můžeme podle nich prohlásit, že funkce $f(x) = \sqrt{5-x}$. je v bodě 5 spojitá zleva. Není ale spojitá v tomto bodě. Platí následující věta.

Pokud je funkce f spojitá v bodě a zprava i zleva, pak je v tomto bodě spojitá.

3.1.2 Spojitost funkce na intervalu

Spojitost funkce v bodě je lokální vlastnost, protože popisuje chování funkce v nějakém okolí jednoho bodu. Oproti tomu spojitost na intervalu označujeme jako globální vlastnost, protože popisuje chování funkce na nějaké množině bodů (často popsanou intervalem).

Přejděme k definici:

Nechť f je funkce a $I=(a,b)$ je otevřený interval. Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu I, jestliže je spojitá v každém bodě tohoto intevalu.

Výše zmíněná definice platí pouze pro spojitost funkce na otevřeném intervalu. Definice pro spojitost na uzavřeném intervalu zní takto.

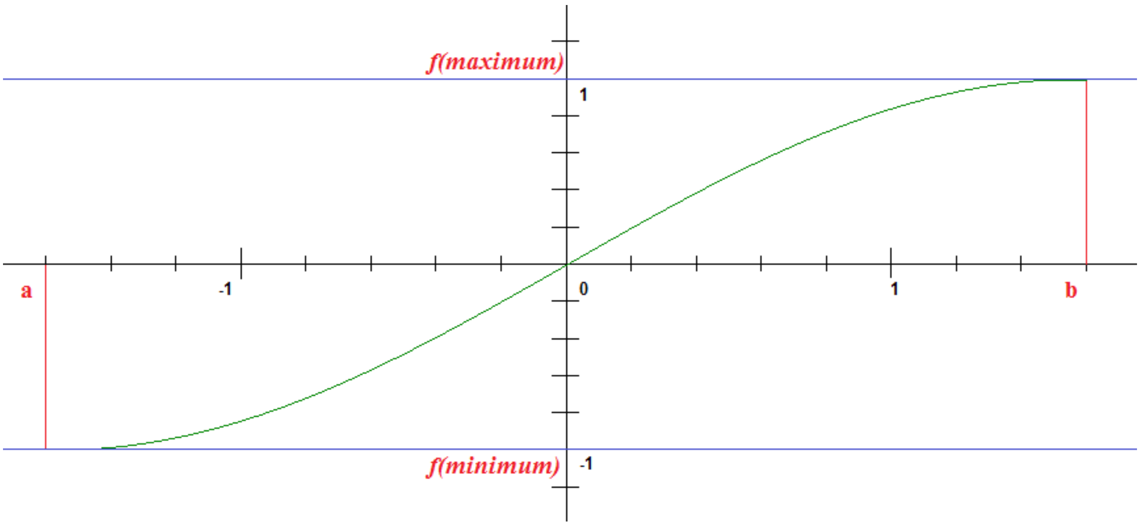
Nechť f je funkce a $I = \langle a, b \rangle$ je uzavřený interval. Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu I, jestliže je spojitá na intervalu (a,b), v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

K tématu spojitosti funkce na intervalu nás zajímají mimo uvedené definice následující tři věty.

Weierstrassova věta:

Nechť f je funkce a $I = \langle a, b \rangle$ je uzavřený interval. Je-li funkce f spojitá na intervalu I, pak je f na tomto intervalu ohraničena a nabývá na něm své maximální a minimální hodnoty.

Weierstrassova věta tedy říká, že pokud je funkce na uzavřeném intervalu spojitá, tak na tomto intervalu najdeme maximum a minimum této funkce. Je dobré si uvědomit, že tohoto maxima či minima může na daném intervalu funkce nabýt vícekrát. Pro ilustraci se můžeme podívat na graf funkce $f(x)=\sin\ x,$ který bude vymezen intervalem $I=\langle a,b\rangle$.



Obrázek 7: Graf omezené funkce

Z grafu je vidět, že funkce f je na uzavřeném intervalu omezena svým maximem a minimem. Toto omezení je ilustrováno modrými rovnoběžkami s osou x. Tyto rovnoběžky procházejí maximem a minimem, které funkce nabývá na tomto intervalu. Tím chceme poukázat, že z Weierstrassovy věty vyplývá, že na uzavřeném intervalu je spojitá funkce omezená.

Bolzanova věta:

Nechť f je funkce a $I=\langle a,b\rangle$ je uzavřený interval. Je-li funkce f spojitá na intervalu $I,$ pak funkce f nabývá všech hodnot mezi svým maximem a minimem na tomto intervalu.

Bolzanova věta neříká nic jiného, než že funkce nabývá na uzavřeném intervalu všech hodnot mezi svou nejvyšší a nejnižší hodnotou. Což je důležité, neboť z této vlastnosti odvozujeme důsledek, kterému říkáme Darbouxova vlastnost spojitých funkcí.

Darbouxova věta:

Nechť f je funkce a $I=\langle a,b\rangle$ je uzavřený interval. Je-li funkce f spojitá na intervalu I a čísla $f(a)$ a $f(b)$ mají různá znaménka, pak existuje alespoň jeden bod $c\in(a,b)$ takový, že $f(c)=0$.

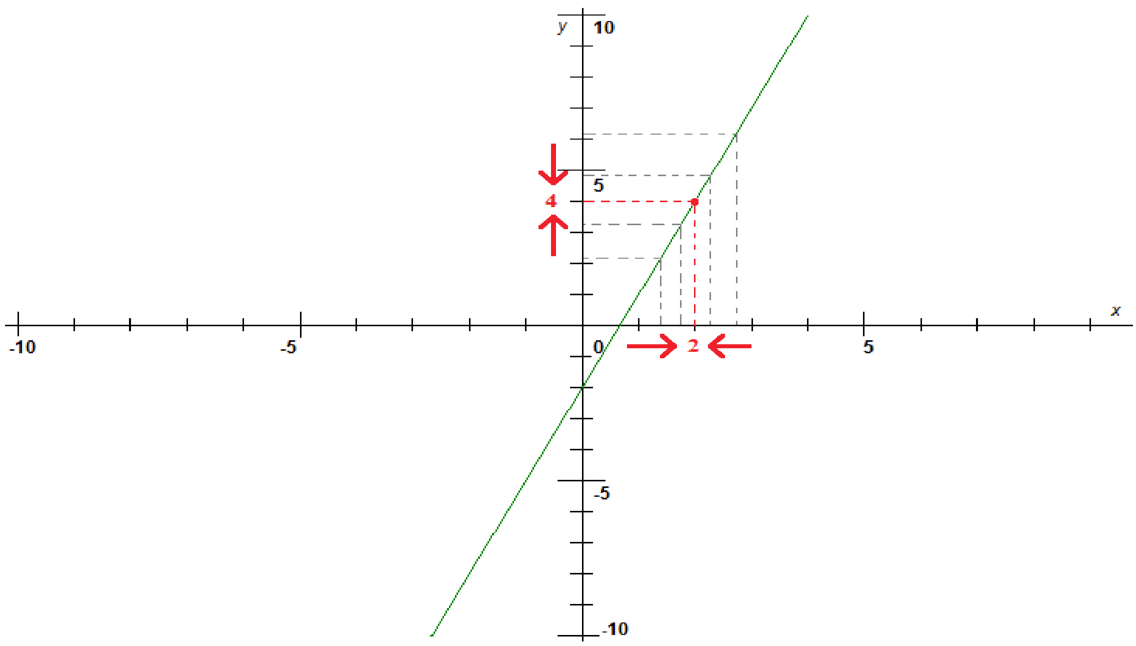
Pokud $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znaménka a funkce f je spojitá, potom graf funkce f musí nutně protínat osu x alespoň v jednom bodě. Tedy existuje alespoň jeden kořen rovnice $f(x)=0$.

Tento poznatek používáme při řešení rovnic a nerovnic. V praxi vždy zjistíme právě tyto body (kořeny rovnice) a jimi vymezíme intervaly, na kterých zkoumáme znaménka funkce.

3.2 Limita funkce

Představme si, že je dána funkce f a bod a. Co se stane s hodnotami f, pokud do funkce f začneme dosazovat hodnoty blízké a? Limita funkce je v podstatě způsob, jakým se snažíme zodpovědět tuto otázku.

Pro názornost si uveďme funkci $f(x)=3x-2$ a bod $a=2$. Pokud za x budeme dosazovat hodnoty blízké a, výsledky se budou blížit 4. Tedy čím blíže je dosazená hodnota x k číslu 2, tím blíže je $f(x)$ ke 4. Jinak řečeno budeme-li se hodnotami x blížit k a, tak se odpovídající hodnoty $f(x)$ budou blížit 4.



Obrázek 8: Graf funkce pro vysvětlení principu limity

Pro výše zmíněný příklad říkáme, že 4 je limita funkce f pro x jdoucí k 2.

Dále je dobré si uvědomit, že bod a je jen cílový bod pro hodnoty x. Hodnoty x se k bodu a přibližují, ale nikdy se mu nerovnají. Je tedy možné hledat limitu v bodě, který není v definičním oboru funkce. Když doplníme výše zmíněný příklad o informaci v zadání, že bod $a=2$ nepatří do definičního oboru. Pro limitu se nic nezmění.

3.2.1 Limita funkce ve vlastním bodě

Řekněme, že funkce f má v bodě a limitu L, jestliže pro libovolné okolí bodu L existuje okolí bodu a takové, že pro všechna x z tohoto okolí taková, že $x \neq a$, leží hodnoty funkce $f(x)$ ve zvoleném okolí bodu L. To zapisujeme:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.

To neznamená nic jiného, než že jedna funkce nemůže mít dvě a více různých limit v jednom bodě.

Funkce f je spojitá v bodě a právě když $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Pokud máme funkci spojitou v bodě a, tak v tomto bodě a můžeme spočítat limitu. Takové limita pak bude rovna funkční hodnotě v bodě a.

Věta o limitě dvou funkcí:

Jestliže $f(x)=g(x)$ pro všechna $x \neq a$ z okolí bodu a, a platí, že $\lim_{x \to a} g(x) = L$, potom má v bodě a limitu i funkce f a platí $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L.$

Jinak řečeno, rovnají-li se dvě funkce a jedna z nich má limitu v nějakém bodě, potom druhá z těchto funkcí má v tomto bodě stejnou limitu.

Další věta, která rozšiřuje způsoby, jakými lze limity počítat je věta o třech limitách, jinak nazývaná srovnávací kritérium.

Srovnávací kritérium:

Jestliže pro všechna $x \neq a$ z okolí bodu a platí, že $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, potom funkce $g(x)$ má v bodě a limitu L.

Z této věty vychází jedna důležitá limita. Jejíž odvození zde nebude uvedeno, protože je zdlouhavé. Tato limita se zapisuje

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Tato limita nám pomáhá při řešení příkladů typu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{kx} \quad \text{pro } k \neq 0.$$

Následující je věta o limitě součinu, součtu, podílu a rozdílu dvou funkcí.

Tato věta říká, že limita součinu se rovná součinu limit. Obdobně to platí pro součet, rozdíl a podíl. U podílu je podmínkou nenulový jmenovatel.

Jestliže $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ a $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, potom platí:

1) $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$,

2) $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$,

3) Pokud $L_2 \neq 0$, pak $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$.

Dalším druhem limity je jednostranná limita. Mezi jednostranné limity funkce patří limita funkce zleva a limita funkce zprava.

Doposud, když jsme mluvili o limitě v bodě a, chápali jsme, že se k bodu a přibližujeme z obou stran. V případě, že se k bodu a budeme blížit zleva, mluvíme o jednostranné limitě funkce zleva. Budeme-li se blížit zprava, mluvíme o jednostranné limitě funkce zprava.

Definice limity funkce zleva:

Jestliže ke každému ε-okolí bodu L existuje levé δ-okolí bodu a a pro všechna $x \neq a$ náležící levému δ-okolí bodu a patří funkční hodnoty $f(x)$ do ε-okolí bodu L, potom řekneme, že funkce f má v bodě a limitu zleva rovnu L.

Tuto limitu zapisujeme jako:

$$\lim_{x \to -a} f(x) = L.$$

Analogicky pak podle již uvedené definice limity funkce zleva definujeme i limitu funkce zprava, kterou zapisujeme jako:

$$\lim_{x \to +a} f(x) = L.$$

Limity zleva a zprava nám pomáhají dojít k výsledku i v případě, že se samotná limita v bodě dá jen těžko spočítat. Pokud existují limity zleva a zprava funkce f v bodě a a rovnají se, znamená to, že pro funkci f existuje i limita L v tomto bodě a.

Další variantou limity je nevlastní limita ve vlastním bodě. Nevlastní limita ve vlastním bodě se od předchozích příkladu liší tím, že její výsledná hodnota nabývá $+\infty$ nebo $-\infty$. Jde o případy, kdy funkce f v řešeném bodě a roste nade všechny meze.

Definice takové limity vypadá následovně.

Jestliže pro každé k náležící reálným číslům existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x) > k$ pro všechna $x \neq a$ z okolí $(a-\delta, a+\delta)$ bodu a, potom říkáme, že funkce f má v bodě a nevlastní limitu $+\infty$ a zapisujeme jí:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

Obdobná definice platí i pro limitu v $-\infty$. a její zápis je analogický podle již uvedené definice pro limitu v $+\infty$. Takovou limitu pak zapisujeme:

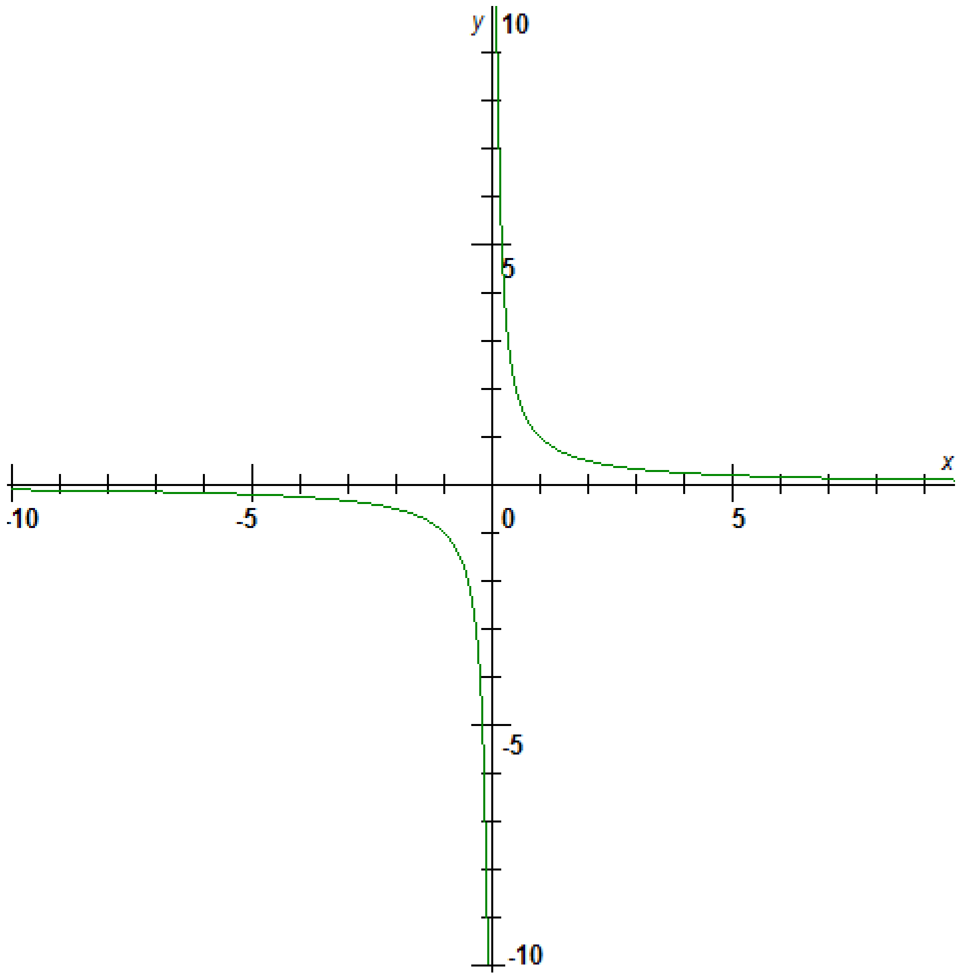
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

3.2.2 Limita funkce v nevlastním bodě

Doposud jsme počítali limity ve vlastním bodě. Naším dalším tématem jsou limity funkce v nevlastním bodě. Tedy limity, kde se x blíží k $+\infty$ nebo $-\infty$. Nyní se zaměříme na ty limity funkce v nevlastním bodě, které mají konečnou limitu L náležící reálným číslům. Uveďme si nyní definici.

Jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje x_0 náležící reálným číslům takové, že pro všechna $x > x_0$, kde x náleží množině reálných čísel, jsou funkční hodnoty $f(x)$ z okolí $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, potom řekneme, že funkce f má v nevlastním bodě $+\infty$ limitu L.

Jako ukázku můžeme použít následující příklad, ve kterém budeme hledat limitu lomené funkce $f(x)=\frac{1}{x}$ pro $x\to\infty$. Naší limitou tedy bude $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$. Uveďme si nyní graf funkce $f(x)=\frac{1}{x}$.



Obrázek 9: Graf lomené funkce

Z obrázku je patrné, že čím větší čísla dosazujeme za x, tím více se funkční hodnoty $f(x)$ blíží k 0. Předpokládáme tedy, že v $+\infty$ je naše limita rovna 0. Pro názornost si můžeme zvolit za $x=\frac{1}{\varepsilon}$.

V takovém případě říkáme, že $f(x)=\frac{1}{x}$ má v nevlastním bodě $+\infty$ limitu $L=0$. To zapisujeme takto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Analogicky definujeme i limitu v nevlastním bodě $-\infty$.

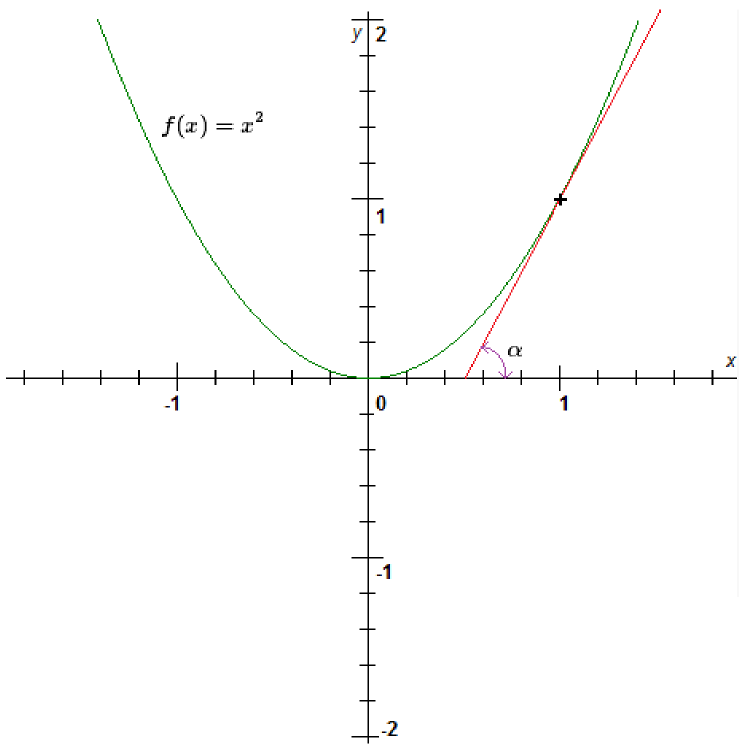
Jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje x_0 náležící reálným číslům takové, že pro všechna $x < x_0$, kde x náleží množině reálných čísel, jsou funkční hodnoty $f(x)$ z okolí $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, potom řekneme, že funkce f má v nevlastním bodě -∞ limitu L.

3.3 Derivace funkce

Další kapitola uvedená na mnou vytvořených webových stránkách se zabývá derivací funkce. Opět zde uvedu především nejnutnější informacem, které se k danému tématu vyskytují na již existujících webových stránkách. Kapitolu zaměřenou na derivace jsem rozdělil do dvou podkapitol. První z nich pojednává o derivaci funkce v bodě. Ta druhá pak o derivacích elementárních funkcí. Přejděme tedy k samotnému obsahu stránek.

3.3.1 Derivace funkce v bodě

Derivace funkce v bodě určuje směrnici tečny v daném bodě. Pro srozumitelnost na následujícím grafu funkce $f(x)=x^2$ předvedeme derivaci v bodě $A=[1;1]$ a všechny její důležité části.



Obrázek 10: Graf kvadratické funkce

Graf funkce $f(x)=x^2$ je na obrázku znázorněn zeleně. Bod A je zobrazen černým křížkem na grafu funkce. Červená přímka znázorňuje tečnu ke grafu funkce *f* v bodě A. Tato přímka svírá s osou x úhel α znázorněný fialově. Směrnice tečny představuje tangens úhlu α.

Směrnice tečny je tedy tangens úhlu α, který svírá osa x a daná tečna. Tuto směrnici dokážeme vypočítat pomocí derivací. Přejděme tedy k definici.

Nechť *f* je funkce, D_f je definiční obor funkce *f*, x_0 bod náležící D_f a okolí bodu x_0 leží v D_f, jestliže existuje limita $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, potom je tato limita konečná, mluvíme o vlastní derivaci.

Derivaci funkce *f* v bodě x_0 značíme $f'(x_0)$. Kompletní zápis tedy vypadá takto:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Označme $\Delta x=x-x_0$. Z toho vyplývá, že platí:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Podobně jako u spojitosti funkce, kde jsme rozlišovali spojitost v bodě a na intervalu, tak i u derivace funkce rozlišujeme zda má funkce derivaci v bodě nebo na intervalu a to jak pro otevřený tak pro uzavřený interval. Nejdříve ale musíme uvést definice derivace v bodě zleva a zprava.

Nechť f je funkce definovaná v levém okolí bodu x_0. Existuje-li $\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, potom ji nazveme derivací funkce *f* v bodě x_0 zleva.

Opět podobně definujeme derivaci funkce f v bodě x_0 zprava.

Teď uveďme definici derivace funkce na otevřeném intervalu.

Nechť f je funkce a $I=(a,b)$ je otevřený interval. Řekneme, že funkce f má derivaci na intervalu *I*, jestliže má derivaci v každém bodě tohoto intervalu.

Náseleduje definice derivace funkce na uzavřeném intervalu.

Nechť f je funkce a $I=\langle a,b\rangle$ je uzavřený interval. Řekneme, že funkce f má derivaci na intervalu I, jestliže má derivaci na intervalu (a,b), v bodě a má derivaci zprava a v bodě b má derivaci zleva.

Dále platí, že pokud má funkce v bodě derivaci, tak je v tomto bodě spojitá. To však neplatí obráceně. Pokud je funkce v bodě spojitá, nemusí ve stejném bodě existovat i derivace.

3.3.2 Derivace elementární funkce

Při počítání derivací některé složitější příklady řešíme jejich rozložením na derivace elementárních funkcí, jejichž řešení je snazší. Pro začátek uveďme tedy tabulku s derivacemi těchto funkcí.

Funkce	Derivace funkce
$f(x)=c; c\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$f(x)=x^n; x\in\mathbb{R}; n\in\mathbb{N}$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\sin x; x\in\mathbb{R}$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x; x\in\mathbb{R}$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\operatorname{cotg} x; x\neq k\pi; k\in\mathbb{Z}$	$f'(x)=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$
$f(x)=\operatorname{tg} x; x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=x^n; x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}; n\in\mathbb{Z}$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=e^x; x\in\mathbb{R}$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=a^x; x\in\mathbb{R}; a\in(0;1)\cup(1;\infty)$	$f'(x)=a^x\ln a$
$f(x)=\ln x; x\in(0;\infty)$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\log_a x; x\in(0;\infty); a\in(0;1)\cup(1;\infty)$	$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$
$f(x)=x^n; x\in(0;\infty); n\in\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$

Obrázek 11: Tabulka derivací elementárních funkcí

Jak již bylo řečeno výše, složitější příklady se počítají rozložením na tyto dílčí prosté derivace. Pro vzájemné vztahy derivací, které chceme takto upravovat platí následující pravidla.

Nechť funkce *f* a *g* mají derivaci v bodě x_0, potom platí:

1. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,

2. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$,

3. pokud $g(x_o) \neq 0$, pak $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$,

4. $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

K demostraci těchto pravidel uvedeme i jeden z příkladů, který mohou studenti na webových stránkách řešit.

Pro 1.případ z výše uvedené věty, vypočtěte derivaci funkce $z(x) = x^7 + 3x^4$.

Řešení:

Podle $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$ počítáme, že $f = x^7$ a $g = 3x^4$, pak vyřešíme elementární funkce *f* a *g* podle tabulky uvedené na předchozí straně. $z'(x) = 7x^{7-1} + 3 \cdot 4x^{4-1} = 7x^6 + 12x^3$.

Některé derivace vypadají na první pohled komplikovaně. V zásadě jde ale stále o opakování výše zmíněných případů a derivace elementárních funkcí.

3.4 Primitivní funkce

Co to je primitivní funkce si vysvětlíme pomocí následujících dvou funkcí. Mějme funkci $f(x) = x$ a funkci $F(x) = \frac{x^2}{2}$. Pro všechna x náležící reálným číslům splňují tyto dvě funkce následující vztah:

$f(x) = F'(x)$.

Jinak řečeno, když zderivujeme funkci *F*, dostaneme funkci *f*. Také říkáme, že funkce *f* je derivací funkce *F*.

Nechť *f* a *F* jsou funkce a *I* je otevřený interval, na kterém jsou tyto funkce definovány. Jestliže pro všechna $x \in I$ platí, že $f(x) = F'(x)$, potom funkce *F* je primitivní funkcí k funkci *f* na intervalu *I*.

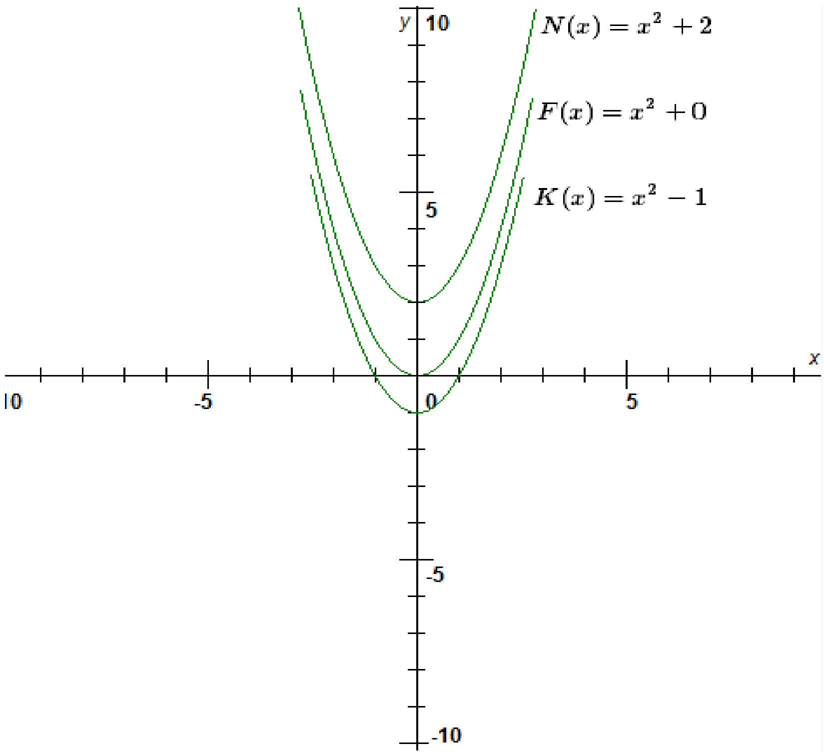
Pro úvahu si uveďme následující příklad. Hledáme primitivní funkci k funkci $f(x)=6x^5-3x^2$ na intervalu $I=(-\infty,+\infty)$. Následně shledáme, že touto funkcí je $F(x)=x^6-x^3$, protože pro všechna x z intervalu I platí $F'(x)=6x^5-3x^2=f(x)$.

To ale není celé řešení. Primitivní funkcí k funkci f je také funkce $F(x)=x^6-x^{3,}$ nebo například funkce $N(x)=x^6-x^3-3$, protože platí, že $K'(x)=N'(x)=f(x)$.

To nás vede k myšlence, že pokud na otevřeném intervalu I k dané funkci f známe alespoň jednu primitivní funkci F, potom jich známe nekonečně mnoho a všechny se od sebe liší jen o konstantu.

Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f na otevřeném intervalu I, potom každá primitivní funkce k funkci f má tvar $F(x)+C$, kde C náleží množině reálných čísel.

To, že se funkce liší jen o konstantu C si můžeme na grafu představit tak, že se tyto primitivní funkce posouvají po ose y.



Obrázek 12: Geometrická interpretace konstanty C

Určování primitivní funkce $F(x)+C$ k dané funkci f nazýváme integrování. Pro označení primitivní funkce se v souvislosti s integrováním používá následující zápis:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,\ x \in I.$$

Funkce $f(x)$ je v tomto zápise integrovanou funkcí, symbol $\int$ je integrační znaménko, C je integrační konstanta a symbol dx určuje podle které proměnné se bude integrovat.

O zápise $\int f(x)\,dx$ také hovoříme jako o neurčitém integrálu. O hledání primitivní funkce k funkci hovoříme jako o výpočtu neurčitého integrálu.

Dále platí, že ke každé funkci spojité na otevřeném intervalu existuje primitivní funkce.

3.4.1 Základní neurčité integrály

Stejně jako u derivací, tak i u hledání primitivních funkcí se musíme řídit pravidly. V následující tabulce se můžeme seznámit se základními vzorci primitivních funkcí. Znalost těchto vzorců je nezbytným předpokladem pro pozdější integrování složitějších příkladů.

Tabulka neurčitých integrálů	
$\int dx = x + C$	pro $x \in \mathbb{R}$
$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	pro $x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}; a \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x \rvert + C$	pro $x \in \mathbb{R}; x \neq 0$
$\int e^x dx = e^x + C$	pro $x \in \mathbb{R}$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	pro $x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}; a \neq -1; a > 0$
$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	pro $x \in \mathbb{R}$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	pro $x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	pro $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right); k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$	pro $(k\pi, (k+1)\pi); k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	pro $x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}; a \neq 0$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$	pro $x \in \langle -a, a \rangle, a \in \langle -a, a \rangle, a \neq 0$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x) \rvert + C$	pro intervaly, kde $f(x) \neq 0$ je spojitá.

Obrázek 13: Tabulka neurčitých integrálů

První pravidla, která nám rozšiřují naše možnosti při počítání integrálů jsou následující.

Existují-li na otevřeném intervalu I primitivní funkce k funkcím f a g a je-li c libovolná konstanta, potom platí následující:

1. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$,
2. $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

Tyto pravidla procvičíme na příkladě, který si zde uvedeme. Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = 1 - 7\sin x + 5^x$.

Řešení:

Integrál součtu/rozdílu převedeme na součet/rozdíl integrálů a násobení kostantou vytkneme před integrál.

$$\int 1-7\sin x+5^x dx=\int 1\,dx-7\int \sin x\,dx+\int 5^x dx.$$

Poté jen každý integrál zvlášť vypočítáme.

$$x-7(-\cos x)+\frac{5^x}{\ln 5}+C=x+7\cos x+\frac{5^x}{\ln 5}+C,$$

pro x náležící kladným reálným číslům bez 0.

3.4.2 Způsoby integrování

První metodou, se kterou se seznámíme, je metoda per partes. Jak už název naznačuje, jde o integrování po částech. Tuto metodu používáme, když chceme integrovat součin.

Její odvození vychází ze vzorce pro derivaci součinu dvou funkcí.

$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$

Jsou-li dány dvě funkce $u(x)$ a $v(x)$ a jejich vlastní derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, potom podle výše zmíněného vzorce platí:

$$\int (u\cdot v)'(x)\,dx=\int u'(x)\cdot v(x)\,dx+\int u(x)\cdot v'(x)\,dx.$$

Z levé strany můžeme odstranit derivaci a integrál, protože pokud funkci po derivování budeme integrovat, dostaneme tu samou funkci (samozřejmně s konstantou C).

$$u(x)\cdot v(x)=\int u'(x)\cdot v(x)\,dx+\int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

Ze vzorce vyjádříme integrál, ve kterém derivujeme funkci $v(x)$.

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Výsledný vzorec se používá při integrování pomocí metody per partes. Jeho využití si předvedeme na příkladě.

Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x)=x\cdot\sin x$.

Řešení:

Dosadíme-li funkci do levé strany vzorce pro řešení metodou per partes, získáme následující:

$u = x$ a $v' = \cos x$.

Nyní, abychom mohli dosadit do pravé strany vzorce, musíme spočítat derivaci u' a zintegrovat v':

$u' = (x)' = 1$,

$v = \int v' \, dx = \int \cos x \, dx = \sin x$.

Nyní dosadíme zjištěné hodnoty i do pravé strany vzorce:

$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx$.

Nyní jsme integrál upravili do podoby, kterou již řešit umíme a proto postupujeme jako v předchozích případech.

$x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = x \cdot \sin x - (-\cos x) + C = x \cdot \sin x + \cos x + C$.

To, že jsme dosadili za $u = x$ a $v' = \cos x$ je naše volba, která vedla ke správnému řešení. Je ale důležité si uvědomit, že pokud bychom do stejného vzorce dosadili za $u = \cos x$ a $v' = x$, ke správnému řešení by to nevedlo. Dosazením do vzorce by vznikl výraz $\cos x \cdot \frac{x^2}{2} + \int \sin x \cdot \frac{x^2}{2}$. Na první pohled je vidět, že jsme si od zadání moc neulehčili.

Účelem per partes je, aby integrál napravo ve vzorci byl snazší ke spočítání než integrál nalevo. Pro správnou volbu dosazení do vzorce za u a v' není žádná metoda. Je to otázka cviku. Proto je na mnou vytvořených webových stránkách uvedeno více příkladů.

Nyní se seznamíme s další metodou, kterou používáme při výpočtu integrálů a to substitucí. Princip substituční metody je prostý. Zavedením nové promněnné převedeme integrovanou funkci na takovou funkci, kterou můžeme snadněji integrovat. Substituční metoda vychází z věty o derivaci složené funkce. Uveďme si větu o substituci, kterou se při řešení příkladů budeme řídit.

Nechť $F(y)$ je primitivní funkcí k funkci $f(y)$ na intervalu (α,β) a nechť funkce $g(x)$ má derivaci $g'(x)$ na intervalu (a,b). Nechť pro každé x z intervalu (a,b) hodnota $g(x)$ patří do intervalu (α,β). Potom je funkce $F(g(x))$ primitivní funkcí k funkci $f(g(x))\cdot g'(x)$ na intervalu (a,b).

Výše uvedenou větu zapisujeme:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx=\int f(y)dy.$$

To neznamená nic jiného, než že integrál na levé straně vzorce můžeme spočítat pomocí integrálu na pravé straně. Do pravé strany musíme pouze po integraci zpětně dosadit za proměnou y.

Nejlépe si větu o substituci opět předvedeme na příkladě. Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x)=\frac{1}{(5x+1)^5}$.

Řešení:

Obdobně jako pro předchozí příklad zvolíme substituci za novou proměnou y a spočteme její derivaci dy:

$y=5x+1,$

$dy=5dx.$

Teď dosadíme y a dy:

$$\int \frac{1}{y^5}\cdot\frac{dy}{5}=\frac{1}{5}\int y^{-5}dy=\frac{1}{5}\cdot\frac{y^{-4}}{-4}+C=\frac{-1}{20y^4}+C.$$

Nakonec zpětně dosadíme za y původní funkci:

$$\frac{-1}{20(5x+1)^4}+C.$$

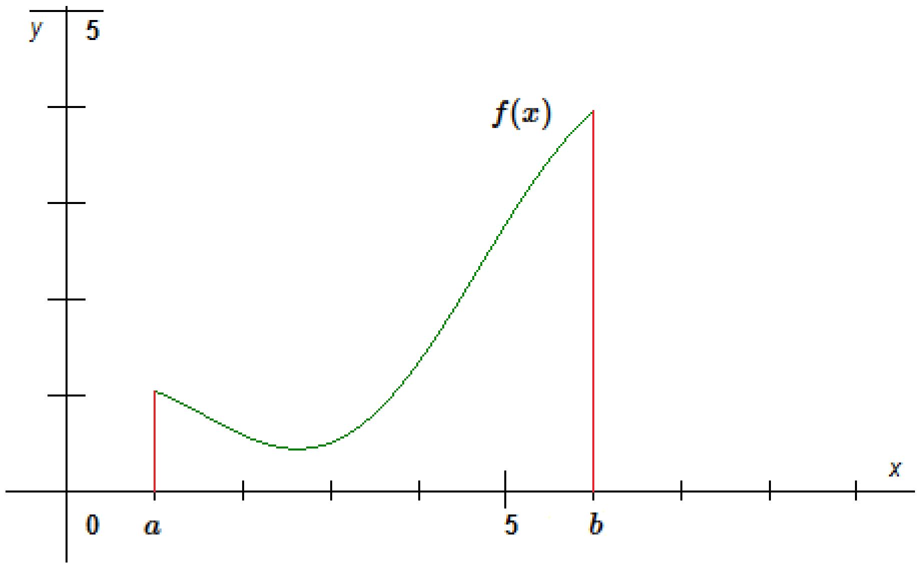
To platí pro všechna x náležící reálným číslům.

Pro některé příklady mohou postupy k řešení obsahovat jak metodu per partes, tak metodu substituční, případně se některé z metod můžou opakovat.

3.5 Určitý integrál

Prostřednictvím určitého integrálu jsme schopni spočítat obsahy rovinných útvarů, případně objemy rotačních těles. Hodnota určitého integrálu je číslo představující obsah plochy, která je mezi grafem funkce a osou x. Tuto myšlenku si předvedeme na následující situaci.

Na obrázku je graf funkce $f(x)$ omezené na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.



Obrázek 14: Graf funkce na uzavřeném intervalu

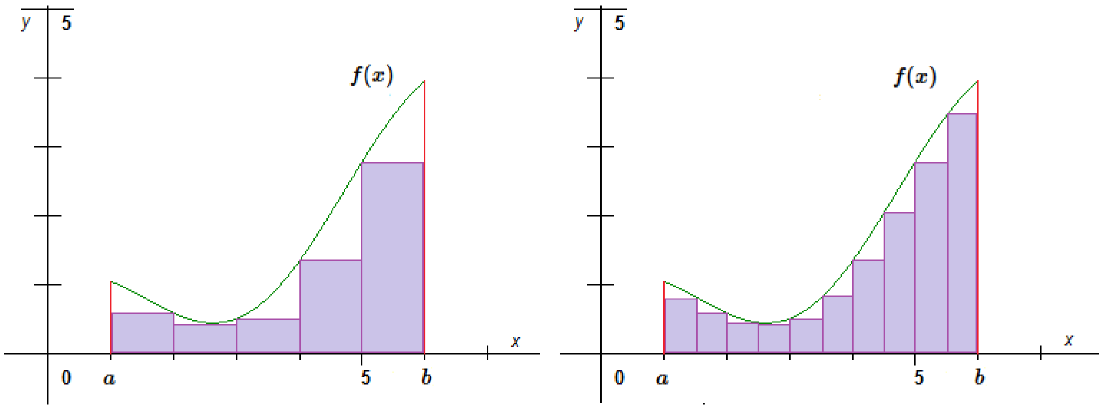
Chceme-li spočítat obsah plochy mezi grafem funkce a osou x na intervalu $\langle a, b\rangle$, je logické rozdělit si tuto plochu na menší plošné obrazce (nejlépe obdélníky), jejichž obsah umíme spočítat a ty pak sečíst. Tyto obdélníky vytvoříme následovně.

Zvolíme body $x_0, x_1, .. x_n$ takové, že $b = x_n > x_{n-1} > ... > x_1 > x_0 = a.$ Dostaneme tak množinu intervalů, kterou si označíme D.

$$D = \{\langle a, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \langle x_2, x_3\rangle, ... \langle x_{n-1}, b\rangle\}.$$

Tuto množinu D nazýváme dělení.

Nalezneme-li pro každý z těchto intervalů minimální hodnotu, kterou v něm funkce $f(x)$ nabývá, vymezíme tak naše obdélníky. Z následujícího grafu vlevo je vidět kde se tyto obdélníky nachází. Na grafu vpravo je vidět, že pokud zvolíme větší počet intervalů, námi spočítaný obsah bude přesnější.



Obrázek 15: Grafy funkce s obdélníky pod křivkou

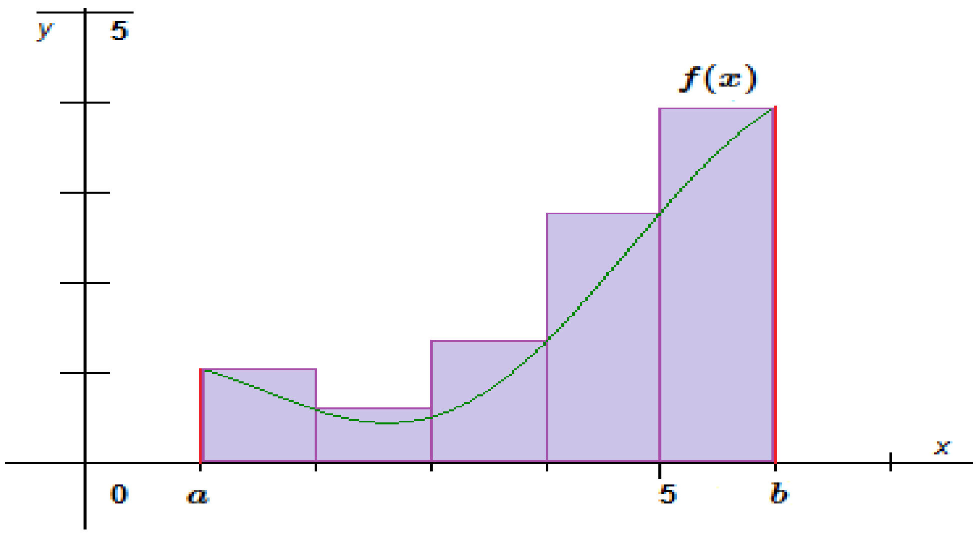
Označme m_i minimální hodnotu funkce f na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Součet všech obdélníků pod křivkou tedy můžeme napsat jako

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Když budeme postupovat tak, že zvolíme výšku obdélníků podle maximální hodnoty funkce v těchto intervalech, označíme tyto funkční hodnoty M_i. Součet všech obdélníků pak zapisujeme jako

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Graf pro takové obdélníky vypadá následovně.



Obrázek 16: Graf pro obdélníky podle maximální hodnoty funkce

O $s=\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ mluvíme také jako o dolním integrálním součtu. Zaveďme si tedy tento pojem a označme jej $s(D,f)$. V tomto označení je f spojitá funkce na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ a D je námi výše popsané dělení do intervalů. Hodnota $s(D,f)$ je rovna

$$s(D,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Obdobně si zaveďme pojem horní integrální součet $S(D,f)$. Jeho hodnota je

$$S(D,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Platí, že čím více intervalů zvolíme, tím jsou hodnoty $S(D,f)$ a $s(D,f)$ blíže. Dále tedy platí, že pro všechna D existuje právě jedno K náležící množině reálných čísel takové, že

$$S(D,f) \geq K \geq s(D,f).$$

Toto číslo K je právě obsah mezi osou x a grafem funkce $f(x)$, protože je to jediná hodnota menší nebo rovna součtu obdélníků pod křivkou a také je to jediná hodnota větší nebo rovna součtu těchto obdelníků nad křivkou.

Nyní můžeme přejít k definici Riemannova integrálu.

Mějme uzavřený interval $\langle a,b \rangle$, funkci f spojitou na tomto intervalu a horní a dolní integrální součet $S(D,f)$ a $s(D,f)$. Pokud pro K náležící množině reálných čísel platí $S(D,f) \geq K \geq s(D,f)$, potom se K nazývá Riemannův určitý integrál. Určitý integrál zapisujeme

$$K=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Při počítání určitých integrálů vycházíme z definice pro Newtonův určitý integrál. Proto si uvedeme i tuto definici.

Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ a číslo K náležící reálným číslům. Pokud $K=F(b)-F(a)$, potom K se nazývá Newtonův určitý integrál.

S ohledem na výše zmíněné definice používáme k výpočtu určitého integrálu vzorec:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ten někdy v příkladech zapisujeme:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b.$$

3.6 Výpočet určitého integrálu

Stejně jako jsme uvedli jistá pravidla pro derivace, uvedeme i zde některé věty, které při výpočtu určitého integrálu používáme. Tyto věty zahrnují vlastnosti určitých integrálů a jejich účelem je usnadnit nám výpočet.

Mějme dvě funkce f_1 a f_2 spojité na uzavřeném intervalu J, nechť a, b jsou libovolné body náležící uzavřenému intervalu J a c_1, c_2 jsou libovolné reálné konstanty, potom

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\,dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Tuto větu si předvedeme na příkladě. Ve kterém vypočítáme určitý integrál

$$\int_1^2 3\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x} - 12\,dx.$$

Řešení:

Podle výše zmíněné věty rozložíme integrál součtu/rozdílu na součet/rozdíl integrálů.

$$3\int_1^2 x^2\,dx + 6\int_1^2 x\,dx - 12\int_1^2 dx$$

Potom vše zvlášť integrujeme.

$$3\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - 12[x]_1^2$$

Nyní dosadíme horní a dolní meze za x podle vzorce, který jsme odvodili z Newtonova určitého integrálu.

$$3\left(\frac{2^3-1^3}{3}\right)+6\left(\frac{2^2-1^2}{2}\right)-12(2-1)=\frac{21}{3}+\frac{18}{2}-12=7+9-12=4$$

Uveďme si nyní několik dalších vět, které nám při výpočtech mohou pomoci.

Pokud je funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nezáporná a spojitá, potom

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Pokud jsou funkce f a g spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a pro každé a z tohoto intervalu platí $f(x)\geq g(x),$ potom také platí

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Dále věta o záměně mezí integrálu.

Pokud určitému integrálu zaměníme meze, potom se změní i znaménko.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Věta o aditivnosti určitého integrálu.

Pokud je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu J a pokud body $a,b,c \in J$, potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Další věta, kterou uvedeme se týká substituční metody.

Nechť $\langle a, b\rangle$ je uzavřený interval, $g(x)$ je prostá funkce spojitá na tomto intervalu a $g'(x)\neq 0$ je její derivace spojitá na tomto intervalu. Pokud je spojitá i funkce $f(y)$ pro všechna $y=g(x)$, kde x náleží uzavřenému intervalu $\langle a, b\rangle$, potom

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy.$$

Věta říká, že pokud aplikujeme substituční metodu na určitý integrál, musíme po změně proměnné změnit i její meze. Nové meze určíme jako funkční hodnoty nové funkce. Tuto větu o substituci si předvedeme na příkladě.

Vypočítejte určitý integrál $\int_1^e \frac{4\ln^3 x}{x}\,dx.$

Řešení:

Zvolíme substituci za novou proměnou y a spočteme její derivaci dy:

$$y = \ln x,$$

$$dy = \frac{1}{x} dx.$$

Dosadíme za x do substituce pro dolní mez.

$$x = 1, \text{ takže } y = \ln 1 = 0.$$

Obdobně za x dosadíme i pro horní mez.

$$x = e, \text{ takže } y = \ln e = 1.$$

Teď dosadíme y a dy společně s přepočítanými mezemi a dopočítáme příklad.

$$\int_0^1 4y^3\, dy = 4 \int_0^1 y^3\, dy = 4\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = 4\left(\frac{1^4 - 0^4}{4}\right) = 1.$$

Jak pro neurčitý integrál, tak pro určitý integrál se dá použít metoda per partes. Na jejím využití se nic nemění.

Pokud funkce $u = u(x)$ a funkce $v = v(x)$ jsou spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, potom

$$\int_a^b u v'\, dx = [uv]_a^b - \int_a^b u' v\, dx.$$

To je celá teorie obsažená na mnou vytvořených internetových stránkách.

Závěr

Jako cíl své bakalářské práce jsem se rozhodl vytvořit webové stránky, které mají sloužit jako pomůcka pro vyučujícího při přípravě na hodinu. Tyto stránky mohou vyučujícímu sloužit také jako internetová prezentace při samotném vyučování. Dále stránky mohou být využity studenty například při oprášení starých znalostí nebo pro doučení látky, na kterou ve škole chyběli. Webové stránky jsou také volně přístupné široké veřejnosti, takže z nich informace může čerpat nejen vyučující a studenti, ale také jakákoliv osoba, kterou zajíma studijní materiál obsažený na stránkách.

V dnešní době je vkládání studijních materiálů na internet běžné. Nicméně zdaleka ne ve všech předmětech je zvykem používat při výuce internetové zdroje. Svou bakalářskou prací jsem chtěl poukázat na možnosti, které využití internetu představuje pro středoškolské vyučování matematiky. Především pak na výhody, které z využívání stálých internetových zdrojů při hodině plynou.

Obsah mé bakalářské práce jsem se snažil zaměřit především na informace, které mnou vytvořené webové stránky obsahují. Při tvorbě webových stránek jsem si uvědomil, že pro mojí budoucí pedagogickou praxi by bylo vhodné vytvořit navazující stránky i pro další středoškolská témata. Chtěl bych tím dosáhnout jisté celistvosti a utvořit tak ucelenou teorii matematiky pro střední školu, která bude pokrývat tématické plány.

Literatura

[1] BARTSCH, H. J., *Matematické vzorce*. SNTL, Praha, 2006. ISBN 80-200-1448-9.

[2] ČERNÝ, I.; ROKYTA, M., *Differential and integral calculus of one real variable. Karolinum*, Praha, 1998. ISBN 80-7184-661-9.

[3] ECCHER, C., *Profesionální webdesign*, 2. vydání, Computer Press, Brno, 2010. ISBN 978-80-251-2677-6.

[4] HRUBÝ, D.; KUBÁT, J., *Matematika pro gymnázia - diferenciální a integrální počet*. Prometheus, Praha, 2010. ISBN 978-80-7196-363-9.

[5] POLÁK, J., *Přehled středoškolské matematiky.* Prometheus, Praha, 2010. ISBN 978-80-7196-356-1.