TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Distanční text

Michaela Šikolová

Liberec 2022

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Obsah

Úvod do problematiky a návod ke studiu

Předkládaný text je určen žákům středních školy, kteří se učí komplexní čísla. Cílem studijního modulu je uvést čtenáře do oboru komplexních čísel, seznámit čtenáře s algebraickým a goniometrickým zápisem komplexních čísel a vztahem mezi nimi. Cílem je také naučit žáka provádět základní operace s komplexními čísly v algebraickém, ale i goniometrickém tvaru a následně je umět geometricky interpretovat. Cílem distančního textu je naučit žáka také s výpočtem souřadnic vrcholů pravidelného mnohoúhelníku vepsaného do kružnice. V neposlední řadě seznámit žáka s využitelností komplexních čísel.

Text je určen studentům k samostatnému studiu, ale i učitelům jako doplňkový a podpůrný text k jejich výuce. Učitelé mohou z distančního textu zadávat domácí úkoly, odkazovat v průběhu probírané tématiky na text ve studijním modulu, zadávat žákům otázky k zamyšlení z daného textu, ale také nechat žáky prostudovat si určitou kapitolu doma a následně v hodině ucelit a procvičit poznatky a tím i rychleji zvládnout danou látku.

V průběhu textu nejsou uvedeny citace, aby nerušili studenty ve studiu. Kompletní literatura, o kterou se text opírá a z čeho čerpá, je uvedena na konci textu viz LITERATURA.

Vzdělávací cíle modulu

- Seznámení se se základní terminologií viz s. 13.
- Zápis komplexního čísla v algebraickém tvaru viz s. 14.
- Klasifikace komplexních čísel viz s. 16.
- Rovnost komplexních čísel viz s. 17.
- Vybrané operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru: sčítání, odčítání, součin a podíl, mocnění a umocňování viz s. 22.
- Seznámení se s geometrickým znázorněním komplexních čísel v algebraickém tvaru viz s. 41.

Úvod do problematiky a návod ke studiu

- Seznámení se s geometrickým znázorněním vybraných operací s komplexními čísly viz s. 45.
- Seznámení se s goniometrickým tvarem komplexního čísla viz s. 58.
- Seznámení se s geometrickým znázorněním komplexního čísla v goniometrickém tvaru viz s. 59.
- Seznámení se se souvislostí goniometrického tvaru s algebraických viz s. 61.
- Seznámení se s jednoznačností goniometrického tvaru viz s. 63.
- Seznámení se se součinem a podílem komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich geometrickou interpretací viz s. 69.
- Seznámení s Moivreovou větou viz s. 70.
- Seznámení se s umocňováním a odmocňováním komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich geometrickou interpretací viz s. 85.
- Seznámení s binomickou rovnicí a jejím použitím při řešení rovnic v oboru komplexních čísel viz s. 95.
- Seznámení s využitím komplexních čísel viz s. 102.

Doporučená literatura

Petáková, J. *Matematika příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám.* Praha: Prometheus, 2013.

Čermák, P. et al. *Odmaturuj z matematiky 1.* Brno: Didaktis, 2004.

Polák, J. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus, 2015.

Symboly užívané v učebnici

cíle	definice
studijní čas	věta
průvodce studiem	domácí úkol
vzorový příklad	upozornění
shrnutí	připomenutí
další zdroje	zamysli se
cvičení	kontrolní otázky

Jak symboly používat?

V učebním textu se nachází řada symbolů. S některými se žák může setkat v každé kapitole, s jinými se setká spíše příležitostně. Pravidelně využívané symboly jsou cíle, čas, průvodce studiem, vzorový příklad, shrnutí, kontrolní otázky, další zdroje a cvičení. Na začátku kapitoly jsou vždy vytyčeny **cíle kapitoly**. Tedy znalosti, dovednosti či schopnosti, které si žák má z dané kapitoly odnést. Následuje vytyčený **čas**, který by měl na kapitolu stačit. Je pravděpodobné, že se čas bude lišit u každého studenta. Proto čas slouží pouze orientačně. V každé kapitole následuje

průvodce studiem, který obsahuje všechny teoretické znalosti včetně úkolů, otázek k zamyšlení, upozornění, zajímavostí či vzorových příkladů a dalších. **Vzorový příklad** slouží žákům k lepšímu porozumění dané látky. Na závěr kapitoly se čtenář setká se **shrnutím** kapitoly, aby měl ucelenou představu, co se v kapitole měl naučit. Následuje **další zdroje.** V této sekci je žákovi, případně učiteli nabídnuta další literatura k prostudování či procvičení dané látky. Následuje sekce **cvičení,** ve kterém si žák může vyzkoušet, zda zvládne příklady řešit sám. Učitel z této sekce může zadávat domácí cvičení. Poslední sekcí jsou **kontrolní otázky**, které slouží k ověření dosažených znalostí. Doporučujeme, aby žáci začali novou kapitolu až poté, co zvládnou odpovědět na kontrolní otázky. Na konci studijního textu se poté nachází **klíč**, ve kterém jsou uvedeny ke všem cvičením správné výsledky.

Žák se dále může v textu příležitostně setkat také se symbolem definice, věty, domácí úlohou, upozornění, připomenutí či zamyšlení.

Definice slouží k zavedením klíčových pojmů, s kterými budou žáci dále pracovat. **Věty** zavádí nové vztahy mezi pojmy. Většina vět v textu není dokázána, neboť to není cílem tohoto modulu. V případě, že by čtenáře důkazy zajímali, nalezne je v přiložené literatuře viz LITERATURA. V rámci **domácích úloh** mají žáci za úkol si většinou připomenout znalosti z předešlých ročníků nebo zkusit si samostatně vyřešit příklad. Symbol **upozornění** má za úkol upoutat čtenáře a upozornit ho na důležitou informaci. Symbol **připomenutí** slouží žákovi k připomenutí si některých znalostí, které již žák zná z předešlých ročníků, případně odkazuje k již zavedeným pojmům z předešlých stran. Poslední použitý symbol je symbol **zamyšlení**, jehož účelem je pozastavení žáka nad informací, která nemusí být samozřejmá či nad tím, jak by v případě řešení nějakého příkladu postupovali nebo jaký jiný postup k vyřešení úlohy by mohli zvolit.

Osnova předmětu

1. Zavedení komplexních čísel **Cíle kapitoly:** • Zápis komplexního čísla v algebraickém tvaru. • Klasifikace komplexních čísel. • Rovnost komplexních čísel.
2. Vybrané základní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru **Cíle kapitoly:** • Seznámení se se základní terminologií: opačná, převrácená a komplexně sdružená čísla, absolutní hodnota komplexních čísel. • Vybrané operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru: sčítání, odčítání, součin a podíl, mocnění a umocňování.
3. Geometrické vyjádření komplexních čísel **Cíle kapitoly:** • Seznámení se s geometrickým znázorněním komplexních čísel v algebraickém tvaru. • Seznámení se s geometrickým znázorněním vybraných operací s komplexními čísly.
4. Goniometrický tvar komplexních čísel **Cíle kapitoly:** • Seznámení se s goniometrickým tvarem komplexního čísla. • Seznámení se s geometrickým znázorněním komplexního čísla v goniometrickém tvaru.

• Seznámení se se souvislostí goniometrického tvaru s algebraických. • Seznámení se s jednoznačností goniometrického tvaru.
5. Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění **Cíle kapitoly:** • Seznámení se se součinem a podílem komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich geometrickou interpretací. • Seznámení s Moivreovou větou
6. Umocňování a odmocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění **Cíle kapitoly:** • Seznámení se s umocňováním a odmocňováním komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich geometrickou interpretací.
7. Binomická rovnice **Cíle kapitoly:** • Seznámení s binomickou rovnicí a jejím použitím při řešení rovnic v oboru komplexních čísel.
8. Využití komplexních čísel **Cíle kapitoly:** • Seznámení s využitím komplexních čísel.

Úvod do komplexních čísel

Všichni již víme, jak řešit kvadratickou rovnici. Jedná se o elementární úlohu. Na úvod tohoto studijního textu si zkusme jednu takovou kvadratickou rovnici vyřešit. Jedná se o rovnici:

$$x^2 + 1 = 0,\ x \in R.$$

Zdá se, že se jedná o jednoduchou rovnici. Rovnici můžeme řešit více způsoby. Začněme nejjednodušším způsobem. Tedy vyjádříme si, čemu je rovno x:

$$x^2 + 1 = 0 / -1$$

$$x^2 = -1 / \sqrt{}$$

$$x_1 = \sqrt{-1}; x_2 = \sqrt{-1}.$$

V reálných číslech víme, že druhou odmocninu ze záporného čísla neumíme vyřešit. Rovnice tedy pro nás v tuto chvíli nemá řešení.

Zkusme vypočítat rovnici standardním mechanickým způsobem přes výpočet diskriminantu. Zopakujme si nejdříve, jakým způsobem ovlivňuje znaménko diskriminantu charakter kořenů. Označme si diskriminant písmenem D. Pokud[1]:

- $D > 0$, potom rovnice má dvě řešení, tedy existují dva různé kořeny rovnice.
- $D = 0$, potom má rovnice pouze jedno řešení. Daná rovnice má právě jeden dvojnásobný reálný kořen.
- $D < 0$, potom rovnice nemá v reálných číslech řešení, neboli nenajdeme kořen rovnice, který by splňoval uvedenou rovnost.

Napišme si vzorec pro výpočet diskriminantu, dosaďme a následně diskriminant vyřešme:

$$D = b^2 - 4ac,$$

$$D = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$D = -4.$$

1 Grafické řešení viz https://www.matweb.cz/diskriminant/.

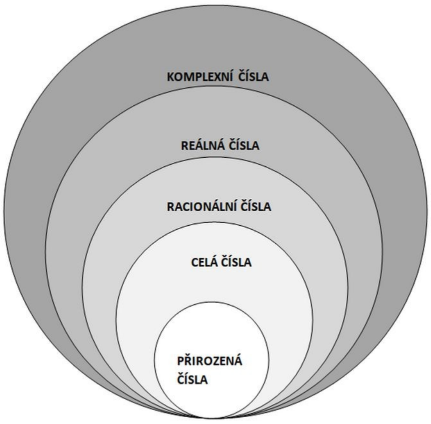
Vidíme, že $D < 0$, tedy rovnice nemá v reálných číslech řešení. Přestože zadání rovnice se zdálo být jednoduché, neumíme rovnici vyřešit. Proč? Pojďme se na to společně podívat.

Existuje něco „víc“ než reálná čísla?

Doposud jsme při řešení kvadratických rovnic uvažovali o diskriminantu jako o polynomu s kvadratickými koeficienty, který se používá při řešení kvadratických algebraických rovnic, které mají kvadratické kořeny. Reálná čísla jsme doposud vnímali jako „dokonalý“ obor čísel, ve kterém je možné již vše spočítat. Na základní škole jsme postupně zjišťovali, že přirozená, potažmo celá a racionální čísla, nejsou dostatečná. Dostatečná v našem slovníku znamená uzavřená k nějaké operaci. Můžeme si připomenout situaci, když jsme se seznámili s přirozenými čísly a učili jsme se operaci odčítání. Problém nastal, když jsme chtěli od menšího čísla odečíst větší. Tedy když jsme například chtěli spočítat, kolik dlužíme nějaké bance, kolik Kč jsme v mínusu. Jedná se názorný příklad toho, že přirozená čísla mimo jiné nejsou uzavřená k operaci odčítání.

Doposud jste se pravděpodobně nesetkali s problémem, že by reálná čísla nebyla uzavřená k některé početní operaci. Nyní však můžeme nahlédnout v rámci příkladu, který jsme výše řešili, že tomu tak není ani u reálných čísel, že reálná čísla nejsou uzavřená k operaci odmocňování. Co to pro nás znamená?

Potřebujeme číselný obor, v kterém uvedenou rovnici budeme schopni řešit. Číselný obor, který stojí nad reálnými čísly a zaplňuje mezery, které u reálných čísel můžeme také pozorovat. Tento číselný obor se nazývá Komplexní čísla. Množinu všech komplexních čísel budeme značit $\mathbb{C}$. Grafické znázornění vztahů mezi číselnými obory můžeme vidět na obrázku 1.



Obrázek 1: Číselné obory

Zápisky:

1 Zavedení komplexních čísel

1.1. Cíl

Cíle kapitoly:

- Zápis komplexního čísla v algebraickém tvaru.
- Klasifikace komplexních čísel.
- Rovnost komplexních čísel.

1.2. Studijní čas

Na zvládnutí této kapitoly, včetně cvičení, si naplánujte asi 2 – 3 hodiny. Kapitola není dlouhá a na první pohled se může zdát, že její zvládnutí nedá moc práce. Vysvětlují se však zde velmi důležité termíny, se kterými budete nadále v textu pracovat. Proto je důležité jim věnovat dostatek času.

1.3. Průvodce studiem

V této kapitole se společně podíváme na definice komplexního čísla. Ukážeme si, jak můžeme komplexní čísla klasifikovat. Povíme si také, kdy jsou si dvě komplexní čísla rovna.

Na střední škole se můžeme setkat s více definicemi komplexních čísel. Elementárními i značně nadrámcovými. V rámci zavedení komplexních čísel se společně podíváme na nejčastější dvě definice komplexních čísel, přičemž si ukážeme, že jedna z nich není příliš šťastná volba.

Zavedení komplexních čísel

Definice 1. Komplexní číslo

Komplexním číslem rozumíme číslo z, které lze zapsat ve tvaru:

$$z = a + bi, \text{ kde } \ a, b \in \mathbb{R} \ \text{ a kde } \ i = \sqrt{-1}.$$

i nazýváme komplexní jednotkou.

Jak již bylo řečeno, tato definice není dobrá volba, neboť zde dochází k rozporu. Vezměme si zlomek $\frac{1}{i}$ a nejprve ho upravme tak, že ho rozšíříme zlomkem $\frac{i}{i}$. Podruhé ho počítejme přímým dosazením za předpokladu, že $i = \sqrt{-1}$.

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i.$$

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{-1} = i.$$

Je zřejmé, že zde dochází ke sporu a to i přesto, že jsme počítali správně a v obou případech jsme vycházeli z definice komplexních čísel, kdy jsme používali rovnost $i = \sqrt{-1}$. Proto tato definice není příliš vhodná a je lepší se opírat o následující **Definici 2.**

Definice 2. Komplexní číslo

Komplexním číslem rozumíme číslo z, které lze zapsat ve tvaru:

$$z = a + bi, \text{ kde } \ a, b \in \mathbb{R} \ \text{ a kde } \ i^2 = -1.$$

Číslo a je reálná část daného komplexního čísla, číslo b je imaginární část daného komplexního čísla. Komplexní číslo je možno zapsat jako dvojici uspořádaných čísel $[a, b]$. Komplexní číslo je tímto způsobem zapsáno v tzv. **algebraickém tvaru.** Později si ukážeme, jakým jiným způsobem je komplexní číslo možné zapsat.

Vzorový příklad:

V tabulce Tabulka 1: jsou komplexní čísla zapsána v algebraickém tvaru. Ukážeme si, čemu je rovna reálná a imaginární část komplexního čísla.

Tabulka 1:

Algebraický tvar komplexního čísla	Reálná část	Imaginární část
$5i - 2$	-2	5
$9i$	0	9
$-13 + 4i$	-13	4
i	0	1
1	1	0

Ze vzorového příkladu je patrné, že v některých případech může být reálná či imaginární část nulová (viz Nula).

Zamyslete se:

Jak by vypadal algebraický tvar komplexního čísla, které by mělo reálnou i imaginární část rovnou nule?

Odpověď:

Klasifikace komplexních čísel

Komplexní čísla se tedy od reálných čísel liší zejména tím, že obsahují reálnou a imaginární část. Pokud je reálná část rovna nule, zůstává pouze imaginární část čísla. Těmto číslům říkáme *ryze imaginární čísla*. V případě, že je imaginární část rovna nule, dostáváme nám dobře známá *reálná čísla*, neboť komplexní číslo obsahuje pouze reálnou část. Napišme si tuto klasifikaci pomocí definic Definice 3. Ryze imaginární číslo, Definice 4. Reálné číslo a Definice 5. Obecné komplexní číslo.

Definice 3. Ryze imaginární číslo

Ryze imaginárním číslem rozumíme komplexní číslo tvaru $z = a + bi$, kde $a = 0 \wedge b \neq 0$.

Definice 4. Reálné číslo

Reálným číslem rozumíme komplexní číslo tvaru $z = a + bi$, kde $b = 0 \wedge a \in \mathbb{R}$.

Upozornění:

Nula: z Definice 3. Ryze imaginární číslo je zřejmé, že reálným číslem myslíme také číslo, jehož reálná i imaginární část je rovna nule tj. $b = 0 \wedge a = 0$.

Poslední možností jsou komplexní čísla, která nejsou ani ryze imaginární ani reálná čísla. Obsahují tedy nenulovou jak reálnou, tak imaginární část. Pro tuto kategorii komplexních čísel si zavedeme pracovní název *obecná komplexní čísla*.

Definice 5. Obecné komplexní číslo

Obecným komplexním číslem rozumíme komplexní číslo tvaru $z = a + bi$, kde $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

Vzorový příklad:

V následující tabulce Tabulka 2: jsou klasifikována komplexní čísla na reálná, ryze imaginární čísla a obecná komplexní čísla. Zadaná komplexní čísla zařadíme podle uvedené klasifikace.

Tabulka 2:

Algebraický tvar komplexního čísla	Reálná čísla	Ryze imaginární čísla	Obecná komplexní čísla
$5i - 2$			X
$9i$		X	
$-13 + 4i$			X
i		X	
0	X		

Rovnost komplexních čísel

Budeme-li chtít určit, zda se dvě komplexní čísla rovnají, musíme si uvědomit, že komplexní čísla, na rozdíl od reálných čísel, obsahují dvě složky. Pokud se tedy mají dvě komplexní čísla rovnat, je potřeba porovnat obě dvě složky komplexních čísel.

Vzorový příklad:

U zadaných komplexních čísel určíme, která jsou si rovna.

$$z_1 = 1 + 2i, z_2 = 0 + 2i, z_3 = 1, z_4 = 2 + i, z_5 = 1 + 2i.$$

Můžeme vidět, že čísla z_1 a z_5 jsou si rovna, neboť si jsou rovna v obou složkách $[1, 2] = [1,2]$. Tedy $z_1 = z_5$. Ostatní komplexní čísla nejsou rovna žádnému z ostatních vypsaných komplexních čísel, neboť se vždy v alespoň jedné složce liší.

1.4. Shrnutí

Seznámili jsme se se zápisem komplexního čísla v algebraickém tvaru. Seznámili jsme se s klasifikací komplexních čísel. Seznámili jsme se s tím, kdy si jsou komplexní čísla rovna.

Klíčové pojmy kapitoly:

Komplexní číslo: komplexním číslem rozumíme číslo z, které lze zapsat ve tvaru: $z = a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a kde $i^2 = -1$. Číslo a je reálná část daného komplexního čísla, číslo b je imaginární část daného komplexního čísla.

Rovnost komplexních čísel: dvě komplexní čísla se rovnají, pokud jsi jsou rovny reálné složky komplexních čísel i imaginární složky komplexních čísel.

Klasifikace komplexních čísel: komplexní čísla rozlišujeme na ryze imaginární, reálná a obecná komplexní čísla. Ryze imaginárním číslem rozumíme komplexní číslo tvaru $z = a + bi$, kde $a = 0 \wedge b \neq 0$. Reálným číslem rozumíme komplexní číslo tvaru $z = a + bi$, kde $b = 0 \wedge a \in \mathbb{R}$. Obecným komplexním číslem rozumíme komplexní číslo tvaru $z = a + bi$, kde $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

1.5. Další zdroje

PETÁKOVÁ, J. *Matematika příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám.* Praha: Prometheus, 2013.

ČERMÁK, P. et al. *Odmaturuj z matematiky 1*. Brno: Didaktis, 2004.

POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus, 2015.

1.6. Cvičení

Řešení → 1. 6

1. Zapište, čemu je rovna reálná a imaginární část komplexního čísla.

   a) $z_1 = 2 + i$

   b) $z_2 = 4i$

   c) $z_3 = \sqrt{10} + i$

   d) $z_4 = 0i$

   e) $z_5 = 0$

f) $z_6 = \dfrac{4-2i}{3}$

g) $z_7 = i$

2. Zadaná komplexní čísla klasifikujete na reálná, ryze imaginární a obecná komplexní čísla.

a) $z_1 = 2 + i$

b) $z_2 = 4i$

c) $z_3 = \sqrt{10} + i$

d) $z_4 = 0i$

e) $z_5 = 0$

f) $z_6 = \dfrac{4-2i}{3}$

g) $z_7 = i$

3. Určete, která ze zadaných komplexních čísel jsou si rovna.

a) $z_1 = 2 + i$

b) $z_2 = 5i$

c) $z_3 = i + 2$

d) $z_4 = 5$

e) $z_5 = 0 + 5i$

f) $z_6 = 0i + 5$

g) $z_7 = i$

h) $z_8 = 1$

Upozornění:

Správné výsledky u všech cvičení naleznete v kapitole Klíč k řešení.

1.7. Kontrolní otázky

Správně odpovědi viz Definice 10. Komplexní jednotka.

1) *Jak definujeme komplexní číslo?*

2) *Jaký je rozdíl mezi reálnou a imaginární částí komplexního čísla?*

3) *Jak klasifikujeme komplexní čísla?*

4) *Kdy se dvě komplexní čísla rovnají?*

Zápisky:

2 Vybrané základní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru

2.1. Cíl

Cíle kapitoly:

- Seznámení se se základní terminologií: opačná, převrácená a komplexně sdružená čísla, absolutní hodnota komplexních čísel.
- Vybrané operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru: sčítání, odčítání, součin a podíl, mocnění a umocňování.

2.2. Studijní čas

Na zvládnutí této kapitoly si ve svém osobním rozvrhu zajistěte větší časovou dotaci. Obsah je velmi důležitý a pro počítání s komplexními čísly zásadní. Navíc na konci kapitoly se nachází časově náročné cvičení. Naplánujte si minimálně 3 - 4 hodiny.

2.3. Průvodce studiem

V této kapitole se společně podíváme na základní operace s komplexními čísly. Konkrétně se bude jednat o sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování komplexních čísel. Dále se také podíváme na absolutní hodnotu komplexního čísla.

Než se pustíme do jednotlivých početních operací, zavedeme si některé základní pojmy, které budou potřebné k tomu, abychom některé operace mohli provádět.

Vybrané základní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru

Opačná komplexní čísla

Definice 6. Opačná komplexní čísla

Komplexní číslo opačné k číslu $z = a + bi$ je číslo $-z = -a - bi$. Říkáme, že čísla z a $-z$ jsou navzájem opačná.

Vzorový příklad:

K číslu $z = 4 - 3i$ najdeme opačné číslo.

$$-z = -4 + 3i$$

Zamyslete se:

Jak by vypadalo číslo opačné ke komplexnímu číslu, které by mělo reálnou i imaginární část rovnou nule?

Odpověď:

Převrácená komplexní čísla

Definice 7. Převrácená komplexní čísla

Komplexní číslo převrácené k číslu $z = a + bi$ je číslo $z^{-1} = \dfrac{1}{a + bi}$. Říkáme, že čísla z a z^{-1} jsou vzájemně převrácená.

Vybrané základní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru

Vzorový příklad:

K číslu $z = 4 - 3i$ najdeme převrácené číslo.

$$z^{-1} = \frac{1}{4 - 3i}$$

Zamyslete se:

Je možné nalézt převrácené komplexní číslo ke komplexnímu číslu, které by mělo reálnou i imaginární část rovnou nule?

Odpověď:

Komplexně sdružená čísla

Definice 8. Komplexně sdružená čísla

Komplexní číslo komplexně sdružené k číslu $z = a + bi$ je číslo $\overline{z} = a - bi$. Říkáme, že čísla z a $\overline{z}$ jsou vzájemně komplexně sdružená.

Vzorový příklad:

K číslu $z = 4 - 3i$ najdeme komplexně sdružené číslo.

$$\overline{z} = 4 + 3i$$

Vybrané základní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru

Zamyslete se:

Jak by vypadalo číslo komplexně sdružené ke komplexnímu číslu, které by mělo reálnou i imaginární část rovnou nule?

Odpověď:

Absolutní hodnota komplexních čísel

Definice 9. Absolutní hodnota komplexního čísla

Absolutní hodnota komplexního čísla z je reálné číslo $|z|$, pro které platí:
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Definice 10. Komplexní jednotka

Každé komplexní číslo, které má absolutní hodnotu rovnu jedné, se nazývá komplexní jednotkou, tedy $|z| = 1$.

Domácí úkol:

Najděte všechny komplexní jednotky.

Odpověď:

Vzorový příklad:

Vypočítejme absolutní hodnotu komplexního čísla $z = 4 + 3i$.

$$|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Zamyslete se:

Bez výpočtu se zkuste zamyslet, čemu by byla rovna absolutní hodnota komplexního čísla, které by mělo reálnou i imaginární část rovnou nule.

Odpověď:

Vybrané základní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru

Sčítání a odčítání komplexních čísel

Komplexní čísla můžeme sčítat a násobit. Sčítáme-li dvě komplexní čísla z_1 a z_2, musíme sečíst reálné části obou komplexních čísel a zvlášť imaginární části komplexních čísel, tj. sečteme komplexní čísla z_1 a z_2, kde $z_1 = a_1 + b_1 i$ a $z_2 = a_2 + b_2 i$.

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Vzorový příklad:

Sečteme komplexní čísla z_1 a z_2, kde $z_1 = 1 + 2i$ a $z_2 = 3 + 5i$,

$$z_1 + z_2 = (1 + 3) + (2 + 5)i = 4 + 7i.$$

Odečítáme-li dvě komplexní čísla z_1 a z_2, opět musíme odečíst zvlášť imaginární část a zvlášť reálnou část, tj. odečteme komplexní číslo z_2 od z_1, kde $z_1 = a_1 + b_1 i$ a $z_2 = a_2 + b_2 i$.

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Vzorový příklad:

Odečteme komplexní číslo z_2 od z_1, kde $z_1 = 1 + 2i$ a $z_2 = 3 + 5i$,

$$z_1 - z_2 = (1 - 3) + (2 - 5)i = 4 - 7i.$$

Shrňme tedy, že při obou těchto operacích sčítáme (odečítáme) zvlášť reálnou část a zvlášť imaginární část.

Součin a podíl komplexních čísel

Komplexní čísla můžeme také násobit a dělit. Jedná se o operace, které jsou náročnější. Je však možné si je postupně rozepsat.

Nejdříve se podíváme na součin komplexních čísel. Vynásobíme-li komplexní čísla z_1 a z_2, kde $z_1 = a_1 + b_1 i$ a $z_2 = a_2 + b_2 i$, můžeme součin rozepsat do klasického součinu závorek, tedy:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) =$$

$$= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i + b_1 i \cdot b_2 i =$$

$$= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i - b_1 \cdot b_2 =$$

$$= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) i$$

Z úprav je zřejmé, že ve třetím řádku „zmizela" ze součinu $b_1 i . b_2 i$ dvě i. Snadno si domyslíme, jak k tomu došlo. Vyjdeme z Definice 2 Komplexní číslo, kde je imaginární jednotka definovaná takto: $i^2 = -1$. Tuto jednoduchou úpravu budeme v dalších příkladech často využívat.

Vzorový příklad:

Vynásobíme komplexní čísla z_1 a z_2, kde $z_1 = 1 + 2i$ a $z_2 = 3 + 5i$.

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (3 + 5i) = 3 + 5i + 6i - 10 = -7 + 11i.$$

Zamyslete se:

Bez výpočtu se zkuste zamyslet nad tím, čemu by byl roven součin dvou komplexních čísel, přičemž jedno z komplexních čísel by mělo reálnou i imaginární část rovno nule.

Odpověď:

Jak je to tedy s podílem?

U podílu se často využívá převod podílu na součin. Jedná se o snadný způsob, při kterém využíváme znalost komplexně sdruženého čísla a součinu komplexních čísel. Vezmeme tedy komplexní číslo ve jmenovateli a celý zlomek rozšíříme komplexně sdruženým číslem k tomuto číslu ve jmenovateli. Připomeňme si, že se jedná o jednoduchou úpravu zlomku, kdy zlomek násobíme jedničkou.

Vezměme si tedy dvě komplexní čísla z_1 a z_2, kde $z_1 = a_1 + b_1 i$ a $z_2 = a_2 + b_2 i$ a vypočítáme podíl $\frac{z_1}{z_2}$. Vynásobíme zlomek zlomkem $\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$. Tím převedeme dělení na násobení dvou komplexních čísel. Po úpravách dostaneme algebraický tvar komplexního čísla.

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} =$$

$$= \frac{(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i) \cdot (a_2 - b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Vzorový příklad:

Vypočítáme podíl $\frac{z_1}{z_2}$, kde $z_1 = 1 + 2i$ a $z_2 = 3 + 5i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{1 + 2i}{3 + 5i} \cdot \frac{3 - 5i}{3 - 5i} = \frac{13 + i}{16}.$$

Upozornění:

Podstatné je to, aby komplexní číslo z_2, tj. číslo, které se nachází ve jmenovateli, bylo nenulové. Plyne z pravidel dělení.

Mocnění a odmocňování komplexních čísel

Domácí úkol:

Připomeňte si binomickou větu viz https://www.skolasnadhledem.cz/game/277.

Odpověď:

Definice 11. n-tá mocnina komplexního čísla

n-tou mocninu komplexního čísla z pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme následovně:

- $z^n = z \cdot z \cdots z$, pro každé komplexní číslo $z \in \mathbb{N}$
- $z^0 = 1$, pro každé komplexní číslo $z \neq 0$
- $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$, pro každé komplexní číslo $z \neq 0$

V oboru komplexních čísel tedy platí stejná pravidla pro výpočet mocnin s celočíselnými mocniteli jako v oboru reálných čísel.

$(a + bi)^n$ počítáme jako mocninu dvojčlenu pomocí binomické věty. Výsledkem je poté komplexní číslo, jehož reálná část je tvořena součtem členů bez imaginární jednotky, zatímco imaginární část je tvořena součtem členů s imaginární jednotkou.

Vzorový příklad:

Vypočítejte $(3 + 2i)^2$.

$$(3 + 2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$$

Domácí úkol:

Připomeňte si vzorce pro umocňování dvojčlenu viz https://www.matweb.cz/mnohocleny/.

Odpověď:

Definice 12. n-tá odmocnina komplexního čísla

n-tou odmocninu komplexního čísla z pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme následovně:

Pro $n \in \mathbb{N}$ je odmocnina z komplexního čísla z každé komplexní číslo s, pro něž platí $z = s^n$.

Vybrané základní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru

V případě, že budeme chtít určit n-tou odmocninu z komplexního čísla v algebraickém tvaru, dojdeme k rovnici n-tého stupně. Pro vyšší n je tudíž vyřešení rovnice velmi obtížné či dokonce nemožné. Později si tedy ukážeme, v jakém tvaru bude odmocňování jednodušší.

Vzorový příklad:

Nalezněte všechny druhé komplexní odmocniny komplexního čísla $z = 2i$. Následně je zobrazte (viz obrázek 2).

Označme si $s = x + iy$ jako druhou odmocninu čísla z, tedy platí $z = s^2$.

$$z = s^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Nyní porovnejme imaginární a reálné složky komplexního čísla z.

$$x^2 - y^2 = 0, 2xy = 2 \rightarrow x = \frac{1}{y}.$$

Z druhé rovnice jsme si vyjádřili x, nyní ho dosadíme do první rovnice.

$$\frac{1}{y^2} - y^2 = 0,$$

$$1 - y^4 = 0.$$

Nyní použijeme substituci $t = y^2$.

$$1 - t^2 = 0,$$

$$(t-1) \cdot (t+1) = 0.$$

Neboť je t druhou mocninou reálného čísla, smysl má pouze nezáporný kořen, tedy $t = 1$. Nyní vrátíme substituci a získáme množinu kořenů: $K = [1, 1], [-1, -1]$, tedy $s_1 = 1 + i, s_2 = -1 - i$. Komplexní čísla s_1 a s_2 máme na obrázku zobrazené jako body, tj. komplexní číslo s_1 se zobrazí v Gaussově rovině jako bod S_1 a komplexní číslo s_2 se zobrazí v Gaussově rovině jako bod S_2.

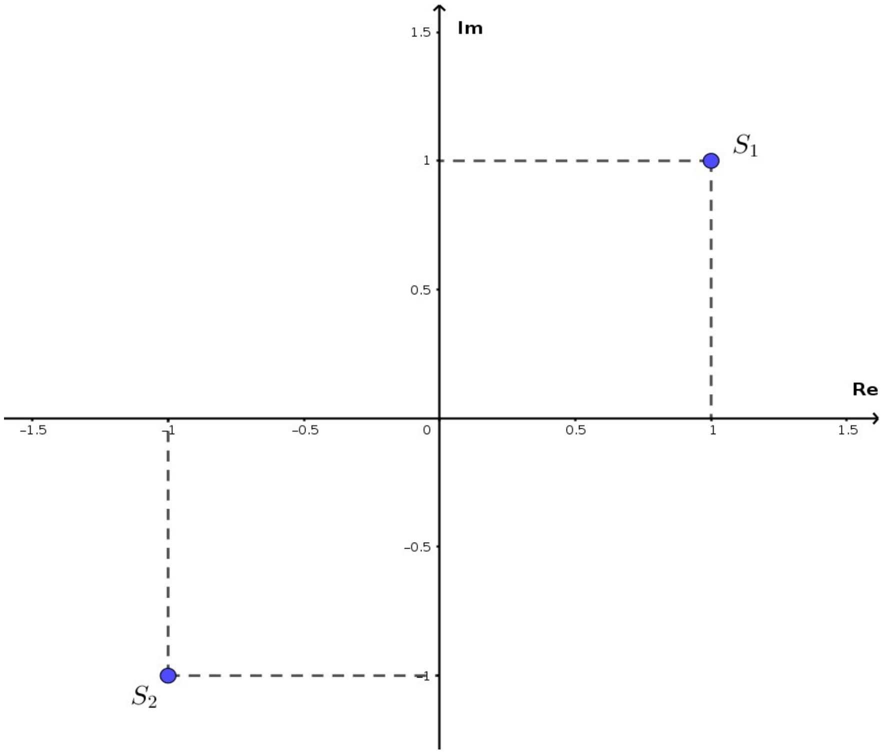
Upozornění:

Doporučujeme udělat zkoušku, která nás ujistí, že se opravdu jedná o druhou odmocninu z původního zadaného komplexního čísla.

Zkouška:

$$(1+i)^2 = 2i,$$

$$(-1-i)^2 = 2i.$$



Obrázek 2: Druhé komplexní odmocniny čísla z

2.4. Shrnutí

Seznámili jsme se se základní terminologií, tj. opačná, převrácená a komplexně sdružená čísla, absolutní hodnota komplexních čísel. Seznámili jsme se s vybranými operacemi s komplexními čísly v algebraickém tvaru, tj. sčítání, odčítání, součin a podíl, mocnění a umocňování.

Vybrané základní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru

Klíčové pojmy kapitoly

Opačná komplexní čísla: komplexní číslo opačné k číslu $z = a + bi$ je číslo $-z = -a - bi$. Říkáme, že čísla z a $-z$ jsou navzájem opačná.

Převrácená komplexní čísla: komplexní číslo převrácené k číslu $z = a + bi$ je číslo $z^{-1} = \dfrac{1}{a + bi}$. Říkáme, že čísla z a z^{-1} jsou vzájemně převrácená.

Sdružená komplexní čísla: komplexní číslo komplexně sdružené k číslu $z = a + bi$ je číslo $\overline{z} = a - bi$. Říkáme, že čísla z a $\overline{z}$ jsou vzájemně komplexně sdružená.

Absolutní hodnota komplexního čísla: absolutní hodnota komplexního čísla z je reálné číslo $|z|$, pro které platí: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Komplexní jednotka: každé komplexní číslo, které má absolutní hodnotu rovnu jedné, se nazývá komplexní jednotkou, tedy $|z| = 1$.

Vybrané základní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru

Sčítání a odečítání komplexních čísel:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Součin a podíl komplexních čísel:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Umocňování a odmocňování komplexních čísel:

n-tou mocninu komplexního čísla z pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme následovně:

- $z^n = z \cdot z \cdots z$, pro každé komplexní číslo $z \in \mathbb{N}$
- $z^0 = 1$, pro každé komplexní číslo $z \neq 0$
- $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$, pro každé komplexní číslo $z \neq 0$

n-tou odmocninu komplexního čísla z pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme následovně:

- Pro $n \in \mathbb{N}$ je odmocnina z komplexního čísla z každé komplexní číslo s, pro něž platí $z = s^n$.

2.5. Další zdroje

PETÁKOVÁ, J. *Matematika příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám.* Praha: Prometheus, 2013.

ČERMÁK, P. et al. *Odmaturuj z matematiky 1.* Brno: Didaktis, 2004, s. 20 – 22.

Vybrané základní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru

POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus, 2015, s. 103 – 110.

Škola s nadhledem [online]. [vid. 15. 12. 2021]. Dostupné:
https://www.skolasnadhledem.cz/game/266.

2.6. Cvičení

Řešení →*2. 6*

1. Vypočítejte:

a) $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$

b) $i^{-30} + i^{-51} + i^{-60} + i^{-43}$

c) $12i^9 - i^{13} - 14i^{-7}$

d) $(1 + i)^2$

e) $(1 + i)^3$

f) $(1 - i)^4$

g) $(1 - i)^{-4}$

h) $(i - 1)^{-5}$

i) $\sqrt{-25}$

j) $\sqrt{(3 + i)^2}$

k) $\sqrt{-3}$

2. Vypočítejte:

a) $4 + 3i + 8(i - 4)$

b) $6(3 + 2i) + 4i$

c) $(i-1)\cdot(i+1)+2(i+\frac{1}{2})^2$

d) $(\sqrt{3}-i\sqrt{2})\cdot(i\sqrt{6})+i\left(\frac{6}{\sqrt{6}}\right)$

e) $\frac{3i+1}{2i-3}$

f) $\frac{3+i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$

g) $\frac{1+5i}{i}$

h) $\frac{\frac{1}{i}+\frac{1}{-i}}{\frac{5}{i}+i}$

i) $\frac{(\sqrt{5}+2i)\cdot(1+i)^2}{-2+i\sqrt{5}}$

3. Napište čísla opačná k daným číslům:

a) $z_1 = 1+i$

b) $z_2 = 9-3i$

c) $z_3 = \sqrt{10}+i\sqrt{2}$

d) $z_4 = 6i$

e) $z_5 = \frac{i+6}{2}$

4. Napište čísla komplexně sdružená k daným číslům:

a) $z_1 = 1+i$

b) $z_2 = 9-3i$

c) $z_3 = \sqrt{10} + i\sqrt{2}$

d) $z_4 = 6i$

e) $z_5 = \dfrac{i+6}{2}$

5. Napište čísla převrácená k daným číslům:

a) $z_1 = 1 + i$

b) $z_2 = 9 - 3i$

c) $z_3 = \sqrt{10} + i\sqrt{2}$

d) $z_4 = 6i$

e) $z_5 = \dfrac{i+6}{2}$

6. Vypočítejte čísla komplexně sdružená k daným číslům:

a) $z_1 = (1+i)\cdot(3-i)$

b) $z_2 = \dfrac{3+5i}{5}$

c) $z_3 = \dfrac{i\sqrt{4}+2}{2i}$

7. Vypočítejte:

a) $z_1 = \overline{\dfrac{5+5i}{5}}$

b) $z_2 = \dfrac{\overline{1+i}}{2+i}$

c) $z_3 = \overline{\dfrac{1+i}{2-i}} \cdot \dfrac{i}{1-i}$

8. Vypočítejte všechny druhé komplexní odmocniny. Následně odmocniny graficky znázorněte.

a) -4,

b) $4+i$,

c) i.

9. Vypočítejte:

a) $z_1 = |2+4i|$

b) $z_2 = \left|\sqrt{3}+4+4i-i\sqrt{3}\right|$

c) $z_3 = \left|\dfrac{\sqrt{5}+1}{5} - \dfrac{\sqrt{5}-1}{5}\cdot i\right|$

d) $z_4 = |(5+i)\cdot(8-i)|$

e) $z_5 = \left|\dfrac{|2-6i|+2i}{2}\right|$

f) $z_6 = \left|\dfrac{|\sqrt{5}-i|\cdot(i-1)}{|i(i-1)|-3i}\right|$

g) $z_8 = \dfrac{2-|2i|-|-i|}{i-|i-1|}$

2.7. Kontrolní otázky

Správně odpovědi viz Klíčové pojmy kapitoly.

1) *Co jsou to opačná komplexní čísla? Napište příklad.*

2) *Co je to převrácené komplexní číslo? Napište příklad.*

3) *Co jsou to sdružená komplexní čísla? Napište příklad.*

4) *Co je to absolutní hodnota komplexní číslo? Napište příklad.*

5) *Jak sčítáme a odčítáme dvě komplexní čísla? Napište vzorce.*

6) *Jak násobíme a dělíme dvě komplexní čísla? Napište vzorce.*

7) *Jak umocňujeme a odmocňujeme dvě komplexní čísla? Napište vzorce.*

Zápisky:

3 Geometrické vyjádření komplexních čísel

3.1. Cíl

Cíle kapitoly:

- Seznámení se s geometrickým znázorněním komplexních čísel v algebraickém tvaru.
- Seznámení se s geometrickým znázorněním vybraných operací s komplexními čísly.

3.2. Studijní čas

Stejně jako předchozí kapitola i na prostudování této kapitoly budete potřebovat více času. Jedná se o náročnou kapitolu co se týče délky, ale i obsahu. Proto si na její prostudování vyhraďte opět nejméně 3 – 4 hodiny.

3.3. Průvodce studiem

V této kapitole se společně seznámíme s geometrickým znázorněním komplexních čísel v algebraickém tvaru. Poté se podíváme na geometrické znázornění vybraných operací s komplexními čísly.

Komplexní čísla můžeme stejně jako čísla z jiných číselných oborů znázornit geometricky. Komplexní čísla konkrétně znázorňujeme jako body roviny, ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic viz obrázek 3. Tato rovina se nazývá **rovina komplexních čísel** nebo také **Gaussova rovina.**

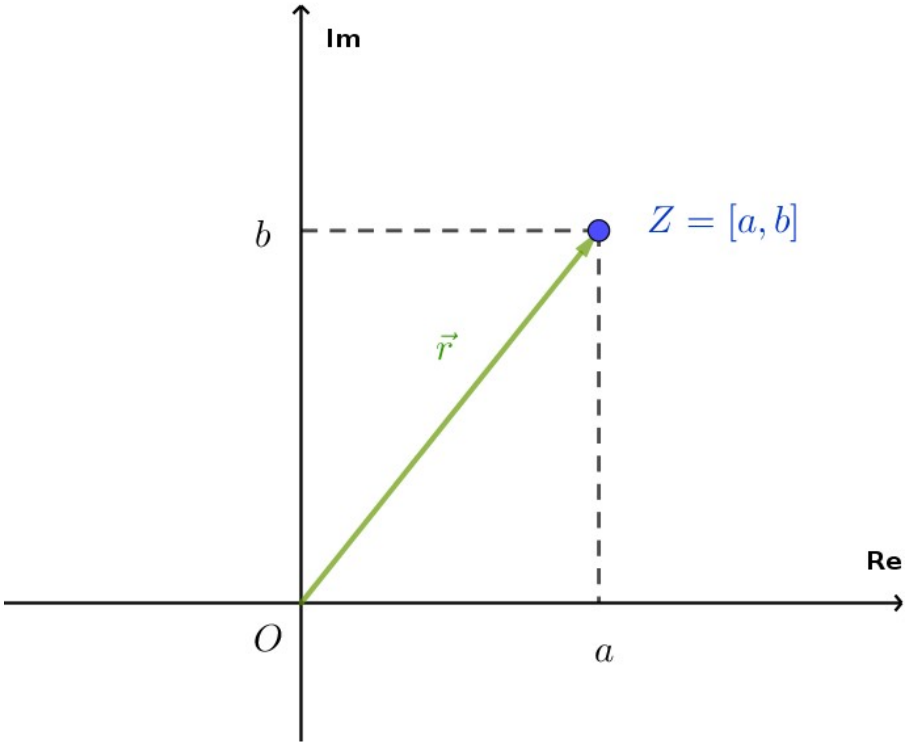
V Gaussově rovině se osa x nazývá **reálná osa**, neboť zde leží obrazy reálných čísel. Obrazy imaginárních čísel jsou body, které neleží na reálné ose. Osa y se nazývá **imaginární osa**, neboť zde leží ryze imaginární čísla. V grafech budeme reálnou osu značit **Re** a imaginární osu **Im** viz obrázek 3. Počátek kartézské soustavy souřadnic budeme značit písmenem O.

GEOMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Každé komplexní číslo $z = [a, b]$ je v této rovině znázorněno jako bod Z se souřadnicemi $x = a, y = b$.

Nyní se podívejme, jak je to s jednoznačností zobrazení komplexního čísla jako bodu roviny viz věty Věta 1.: O jednoznačnosti bodů a Věta 2.: O jednoznačnosti polohových vektorů.

Obrázek 3: Geometrické vyjádření komplexního čísla



Věta 1.: O jednoznačnosti bodů

Přiřazení komplexních čísel k bodům roviny je vzájemně jednoznačné.

Důkaz: Každému bodu Z Gaussovy roviny je možné přiřadit polohový vektor $\vec{r} = \vec{OZ}$. Z toho vyplývá, že také každému komplexnímu číslu $z = [a, b]$ lze přiřadit polohový vektor, jehož počáteční bod tvoří počátek kartézské soustavy souřadnic a koncový bod má souřadnice $[a, b]$. Důsledkem toho, že každému vektoru (a, b) lze přiřadit právě jedno komplexní číslo z, platí následující Věta 2.: O jednoznačnosti polohových vektorů.

Domácí úkol:

Připomeňte si polohové vektory.

Odpověď:

Věta 2.: O jednoznačnosti polohových vektorů

Přiřazení komplexních čísel k polohovým vektorům je vzájemně jednoznačné.

Upozornění:

Většinu vět v textu nedokazujeme viz Věty.

Znázornění komplexně sdružených čísel

Máme-li dvě čísla navzájem komplexně sdružená, potom obrazy bodů v Gaussově rovině odpovídající těmto komplexním číslům jsou osově souměrné podle osy . Je to z toho důvodu, že se tato čísla liší o znaménko u komplexní složky. Podívejme se na graf v obrázku 4, ve kterém je zobrazeno komplexní číslo z a číslo $\overline{z}$, které je k němu komplexně sdružené.

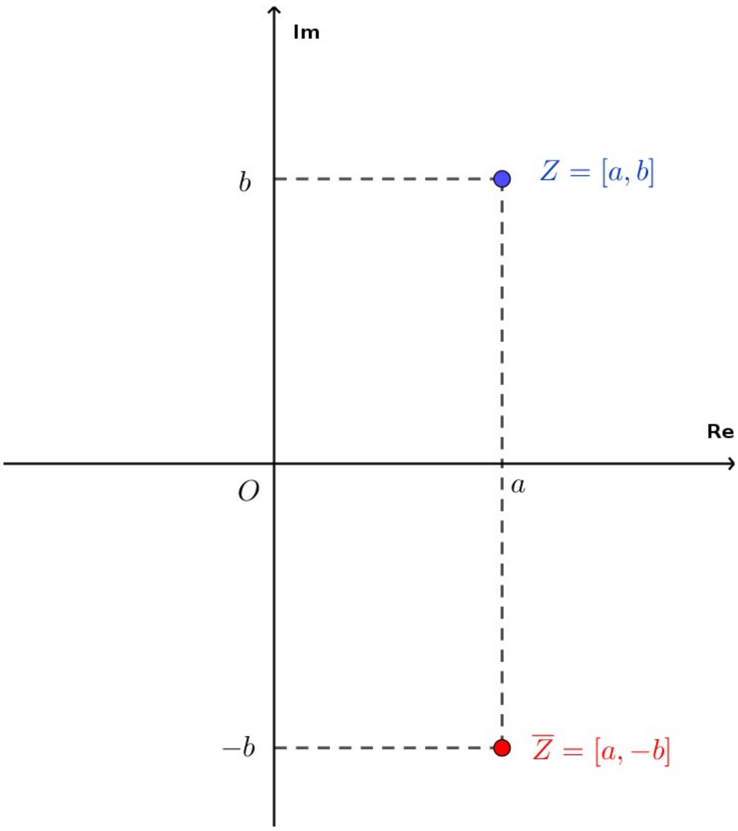
Upozornění:

Obraz bodu komplexně sdruženého čísla označíme v souladu s označením pro komplexně sdružené číslo, podobně pro opačné číslo a později pro obrazy všech komplexních čísel, tj.

$$z = a + bi \to Z = [a, b],$$

$$\overline{z} = a - bi \rightarrow \overline{Z} = [a, -b],$$

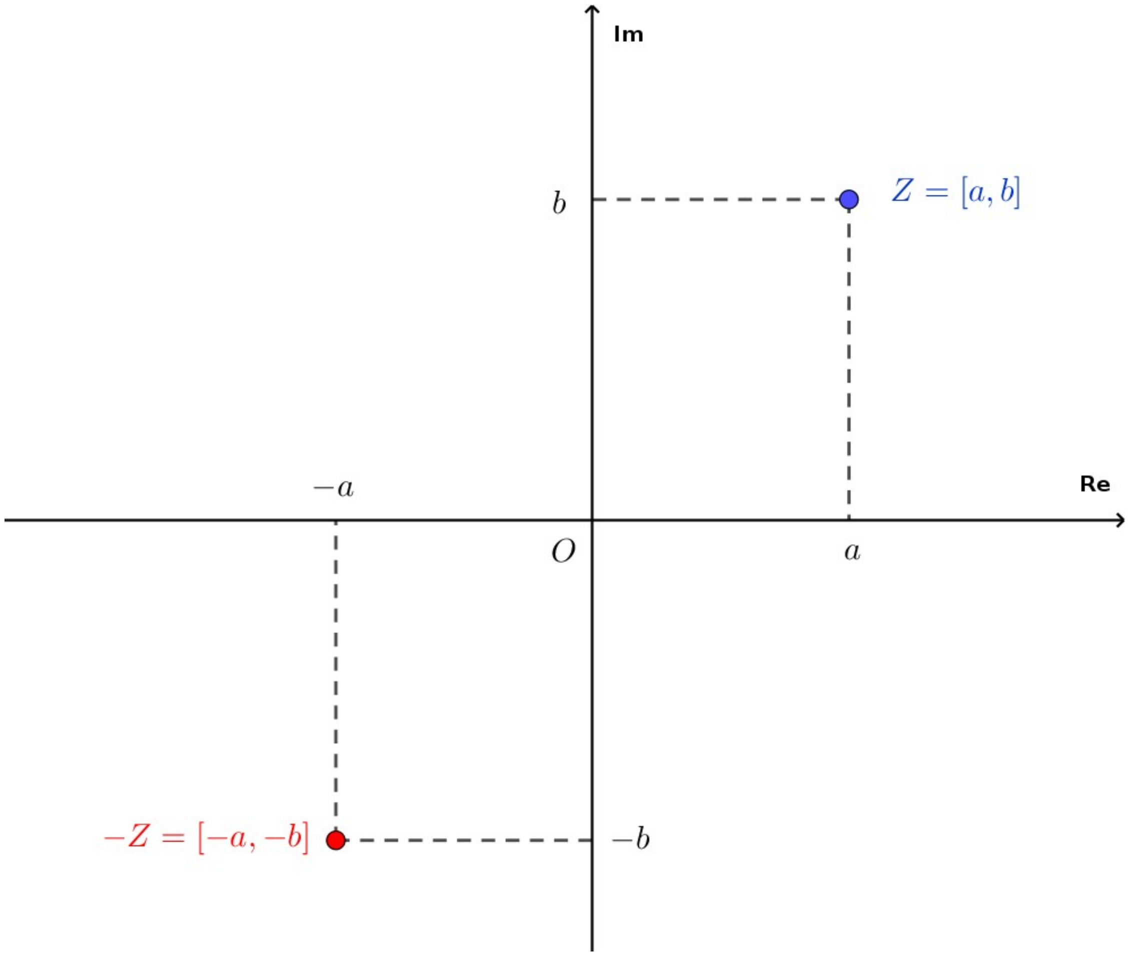
$$-z = -a - bi \rightarrow -Z = [-a, -b].$$



Obrázek 4: Komplexně sdružená čísla

Znázornění čísel opačných

Znázorňujeme-li v Gaussově rovině čísla, která jsou navzájem opačná, potom obrazy těchto čísel, jsou souměrné podle počátku tj. $Z = [a, b]$, $-Z = [-a, -b]$. Je to z toho důvodu, že se tyto dvě čísla liší o znaménka u obou složek viz obrázek 5.



Obrázek 5: Opačná komplexní čísla

Znázornění vybraných operací s komplexními čísly

Hlavní výhodou geometrického znázornění komplexních čísel pomocí polohových vektorů spočívá při následném znázorňování operací s komplexními čísly. Nejdříve se podíváme na sčítání a odčítání komplexních čísel. Není to nic těžkého. Platí zde stejná pravidla, jako při sčítání a odčítání vektorů v analytické geometrii.

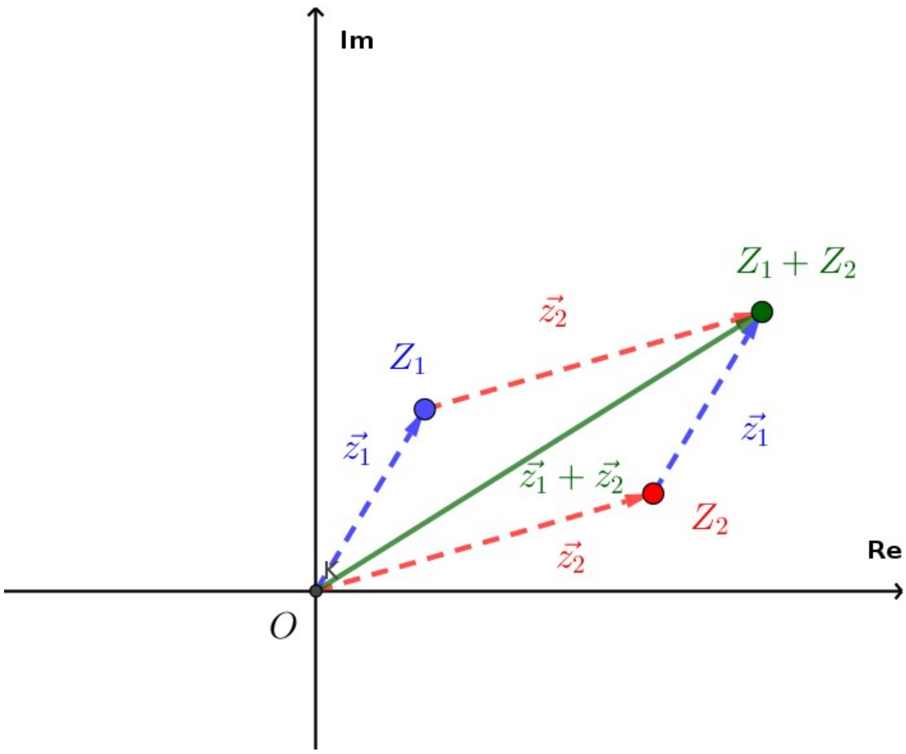
Domácí úkol:

Připomeňte si, jak se sčítají a odčítají vektory v analytické geometrii.

Odpověď:

Znázornění součtu komplexních čísel

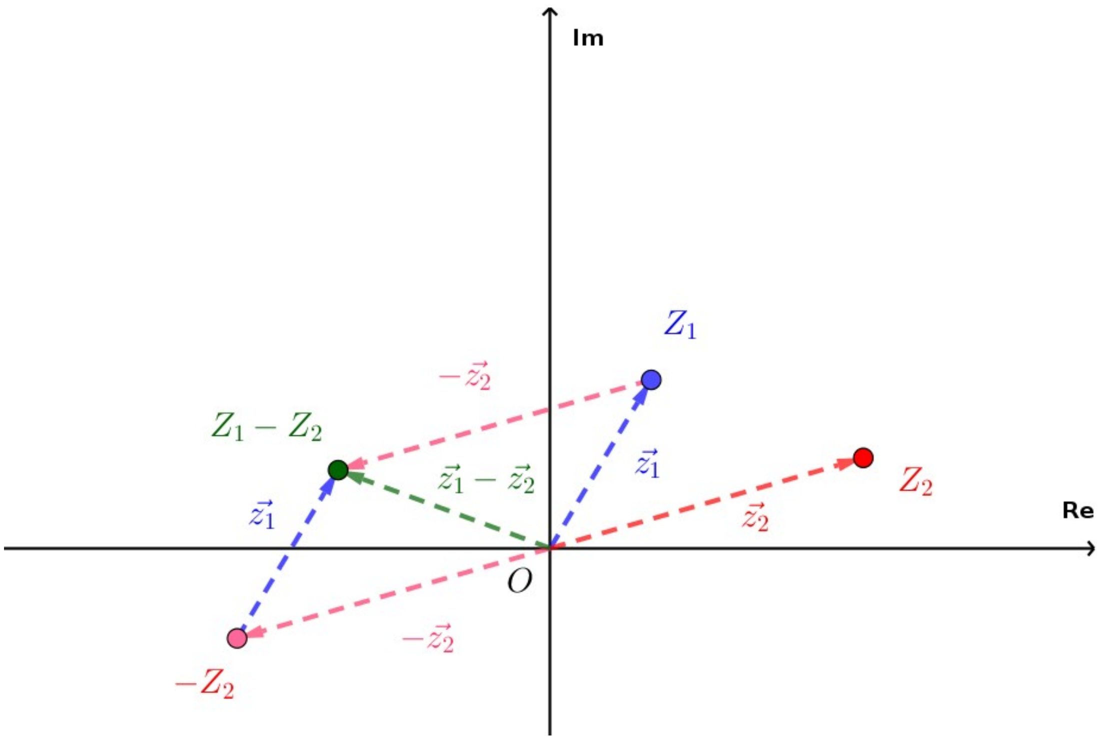
Tedy sčítání dvou komplexních čísel znázorňujeme sečtením příslušných vektorů. Na obrázku 6 můžeme vidět součet vektorů $\overrightarrow{z_1}$ a $\overrightarrow{z_2}$. Výsledkem součtu těchto dvou vektorů je vektor $\overrightarrow{z_1 + z_2}$.



Obrázek 6: Součet dvou komplexních čísel

Znázornění rozdílu komplexních čísel

Při odčítání dvou komplexních čísel odčítáme příslušné vektory. Opět se můžeme podívat na obrázek 7, kde vidíme vektory $\vec{z_1}$ a $\vec{z_2}$. Možností ke konstrukci rozdílu dvou komplexních čísel je více. V obrázku 7 jsme využili předchozí znalosti součtu dvou komplexních čísel a znalosti opačných komplexních čísel. Zobrazili jsme si tedy opačný vektor $\overrightarrow{-z_2}$ k vektoru $\vec{z_2}$. Následně jsme již zkonstruovali součet vektorů $\vec{z_1}$ a $\overrightarrow{-z_2}$ tj. $\vec{z_1} + (-\vec{z_2}) = \vec{z_1} - \vec{z_2}$.



Obrázek 7: Rozdíl dvou komplexních čísel

Zamyslete se:

Zamyslete se nad tím, jaké způsoby konstrukce rozdílu dvou vektorů znáte.

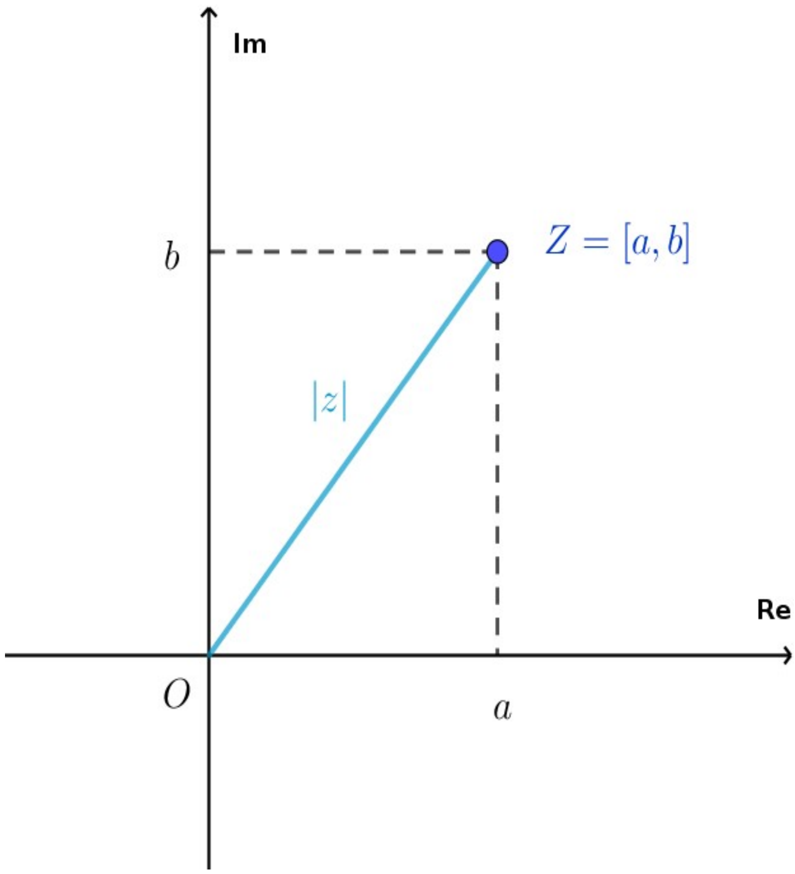
Odpověď:

Upozornění:

Násobení a dělení si necháme na později až po zavedení goniometrického tvaru komplexního čísla.

Geometrický význam absolutní hodnoty

Nyní se podíváme ještě na geometrický význam absolutní hodnoty komplexního čísla. Z reálných čísel již víme, že absolutní hodnota je spojena se vzdáleností obrazů bodů v rovině resp. na číselné ose. Stejně tomu tak bude u komplexních čísel. Absolutní hodnota komplexního čísla je rovna vzdálenosti bodu, který je obrazem tohoto čísla v Gaussově rovině, od počátku soustavy souřadnic viz obrázek 8. Jak již bylo výše zmíněno, absolutní hodnotu komplexního čísla značíme z značíme $|z|$.

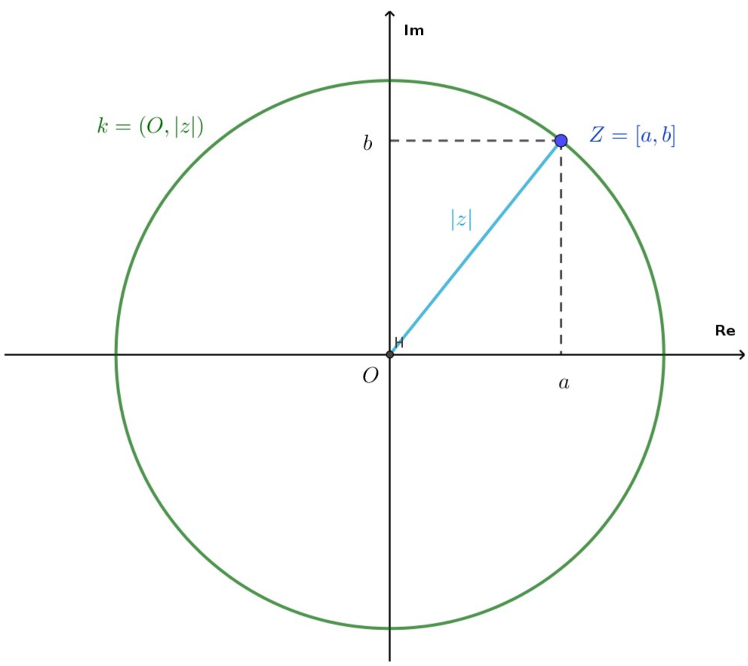


Obrázek 8: Absolutní hodnota komplexního čísla

Z obrázku 8 je patrné, že všechna komplexní čísla, která mají stejnou absolutní hodnotu, vyplní v Gaussově rovině kružnici se středem O v počátku kartézské soustavy souřadnic s poloměrem $r = |z|$ viz obrázek 9. Pro komplexní jednotky má tato kružnice poloměr rovné jedné.

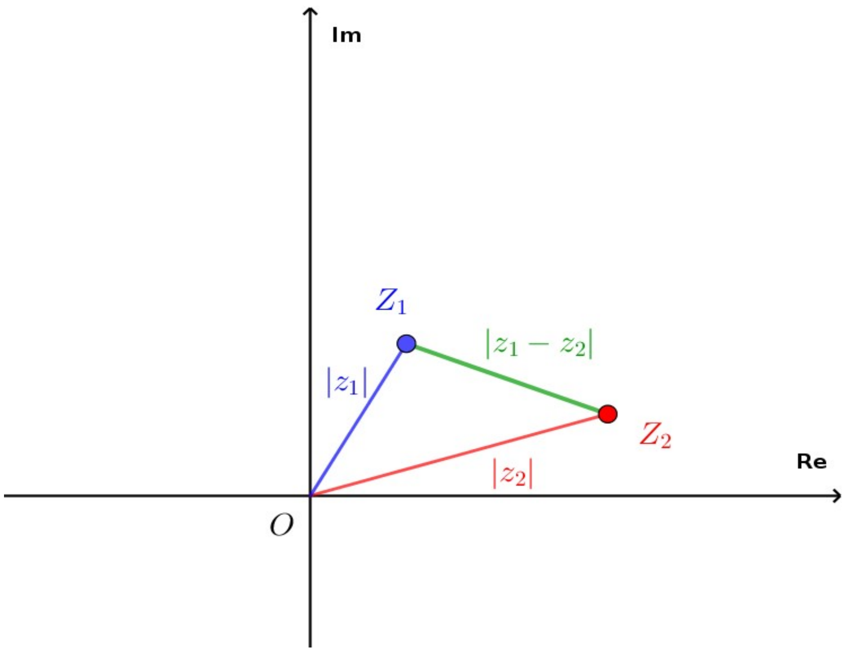
Připomenutí:

Zopakujte si, co jsou to komplexní jednotky viz Definice 10. Komplexní jednotka.



Obrázek 9: Množina komplexních čísel se stejnou vzdáleností od počátku

Poznamenejme ještě, že absolutní hodnota rozdílu dvou komplexních čísel určuje vlastně vzdálenost bodů, které jsou obrazy těchto komplexních čísel v Gaussově rovině. Pro větší porozumění se podívejme na obrázek 10, kde máme obrazy komplexních čísel z_1 a z_2 jako body Z_1 a Z_2. Absolutní hodnota rozdílu těchto dvou komplexních čísel bude poté vzdálenost mezi body Z_1 a Z_2, tj. $|z_1 - z_2|$.



Obrázek 10: Absolutní hodnota rozdílu dvou komplexních čísel

Vzorový příklad:

Mějme komplexní čísla $z_1 = 1 + i$ a $z_2 = 2 + 3i$. Graficky znázorněte:

a) $|z_1|$

b) $\overline{z_1}$

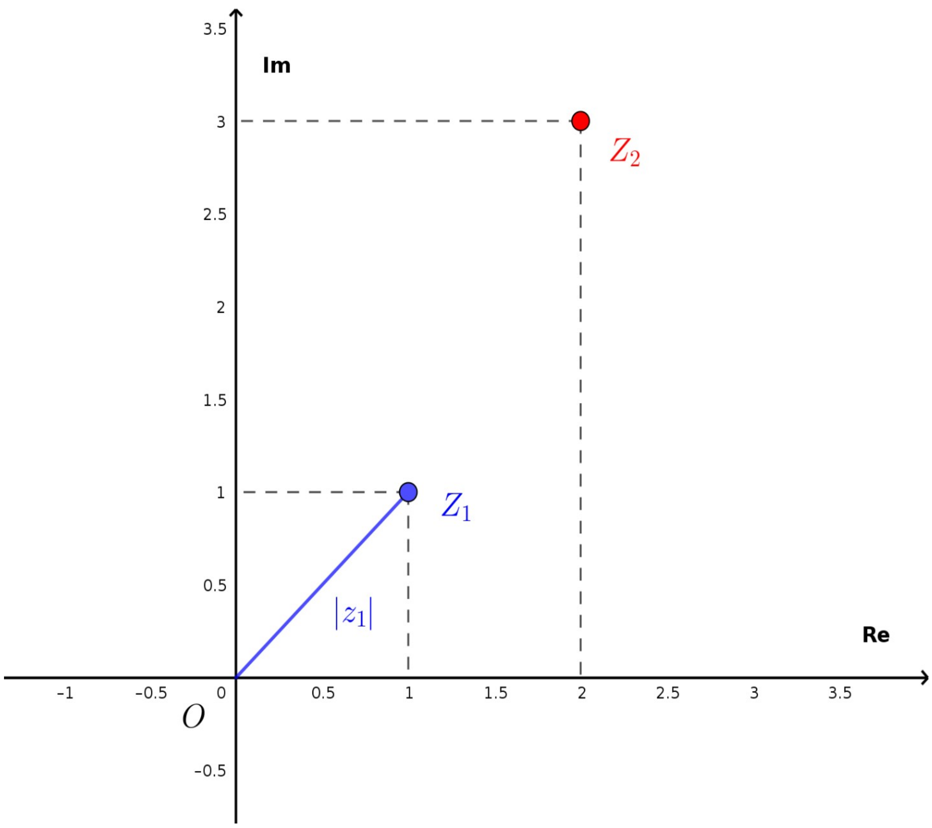
c) $-z_1$

d) $z_1 + z_2$

e) $z_2 - z_1$

a) $|z_1|$:

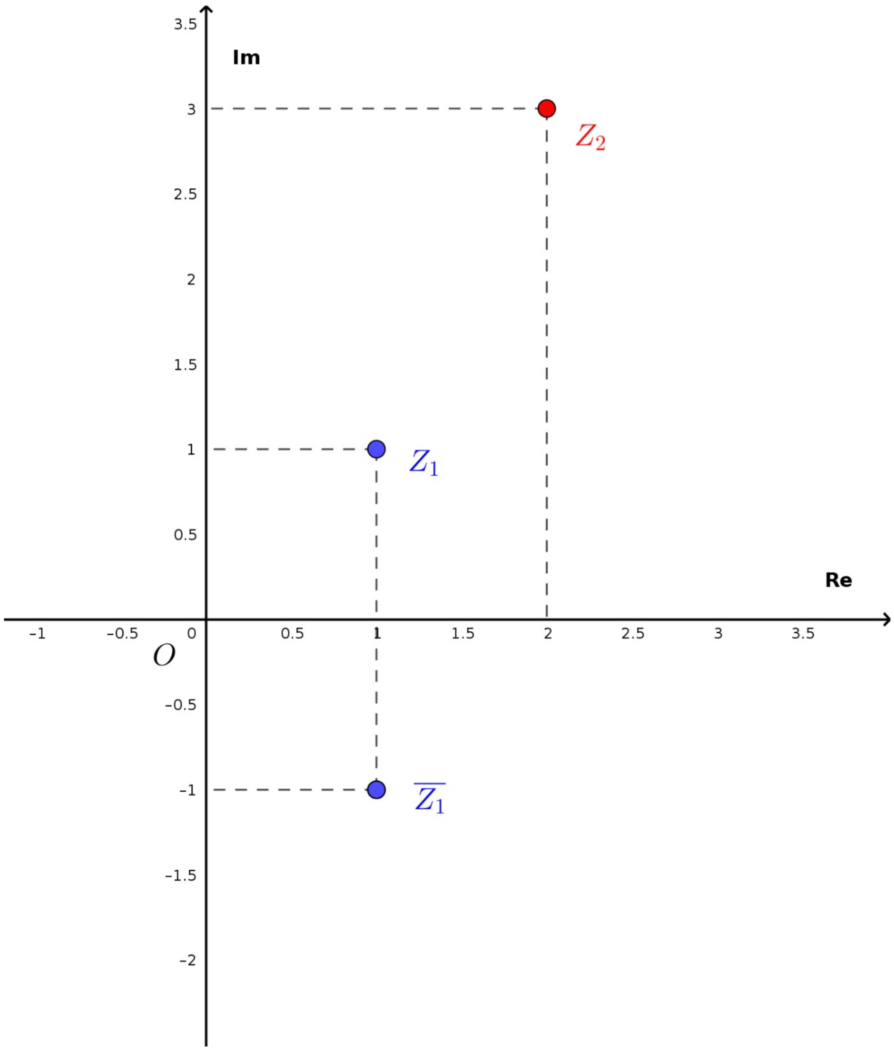
V tomto příkladu máme znázornit absolutní hodnotu komplexního čísla z_1. Jak již bylo řečeno, absolutní hodnota komplexního čísla z_1 je vlastně vzdálenost obrazu komplexního čísla Z_1 od počátku kartézské soustavy souřadnic O.



Obrázek 11: Absolutní hodnota komplexního čísla

b) $\overline{z_1}$

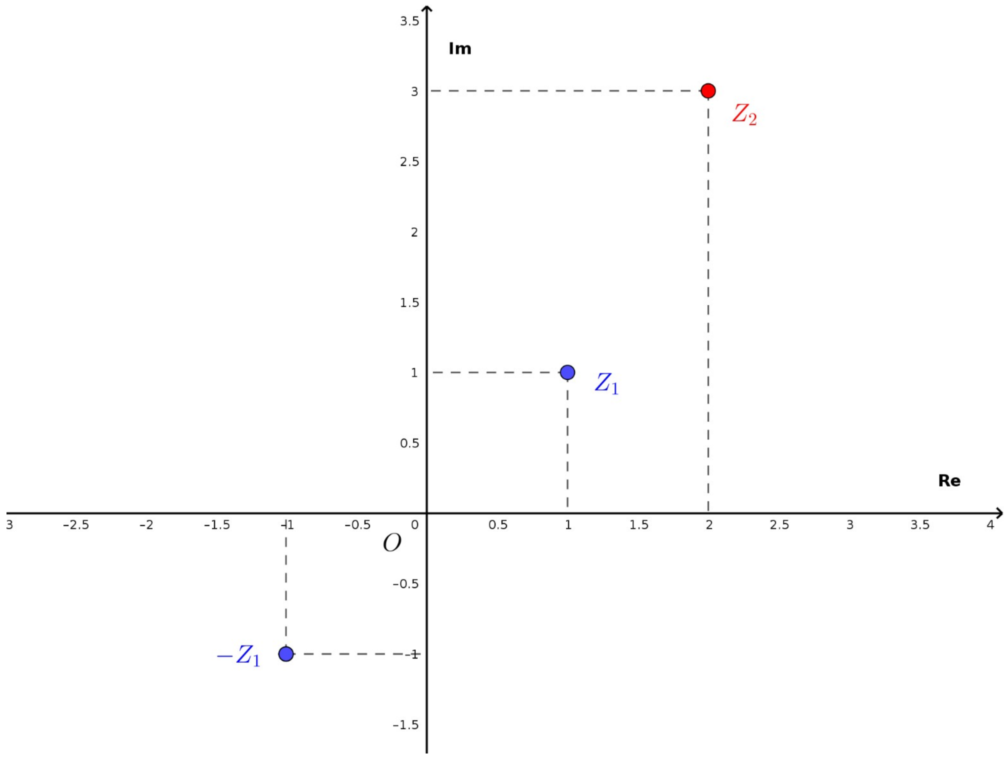
Dalším úkolem bylo znázornit sdružené komplexní číslo. Máme-li tedy komplexní číslo $z_1 = 1 + i$, sdružené komplexní číslo $\overline{z_1}$ bude komplexní číslo, u jehož imaginární části bude opačné znaménko, než u komplexního čísla z_1. Z toho důvodu budou obrazy těchto komplexních čísel osově souměrné podle reálné osy viz obrázek 12.



Obrázek 12: Komplexně sdružené komplexní číslo

c) $-z_1$

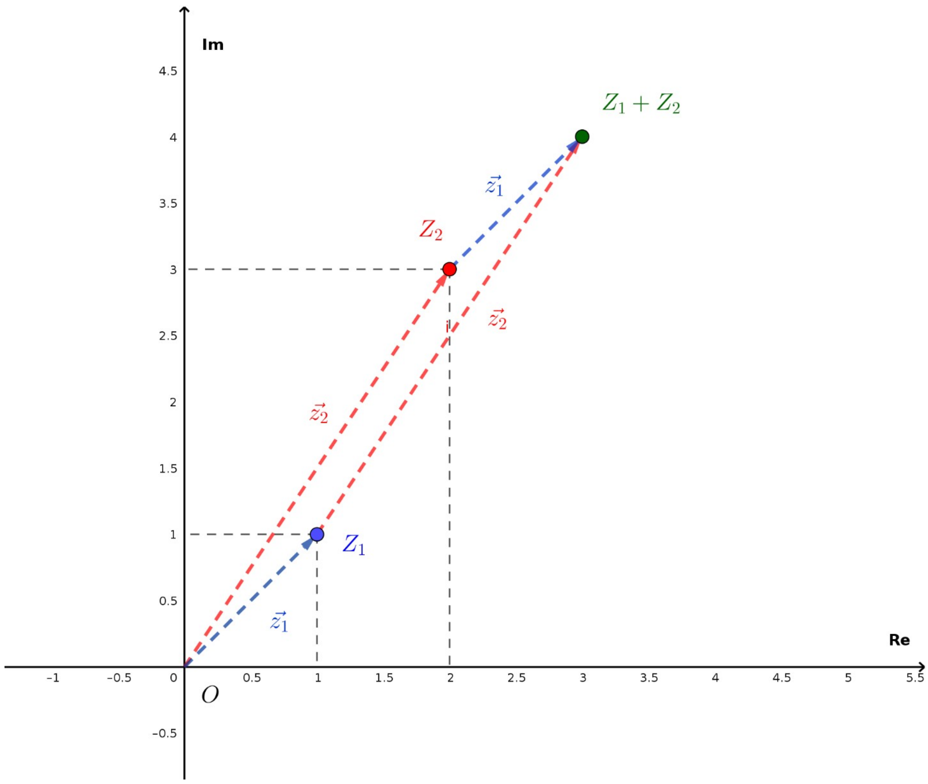
Znázornění opačného komplexního čísla je obdobné, jako znázornění sdruženého komplexního čísla. Rozdíl spočívá v tom, že opačné číslo $-z_1$ k číslu $z_1 = 1 + i$ má opačná znaménka u obou složek tj. $-z_1 = -1 - i$. Obrazy opačných komplexních čísel Z_1 a Z_2 budou tedy středově souměrné podle počátku soustavy souřadnic.



Obrázek 13: Opačné komplexní číslo

d) $z_1 + z_2$

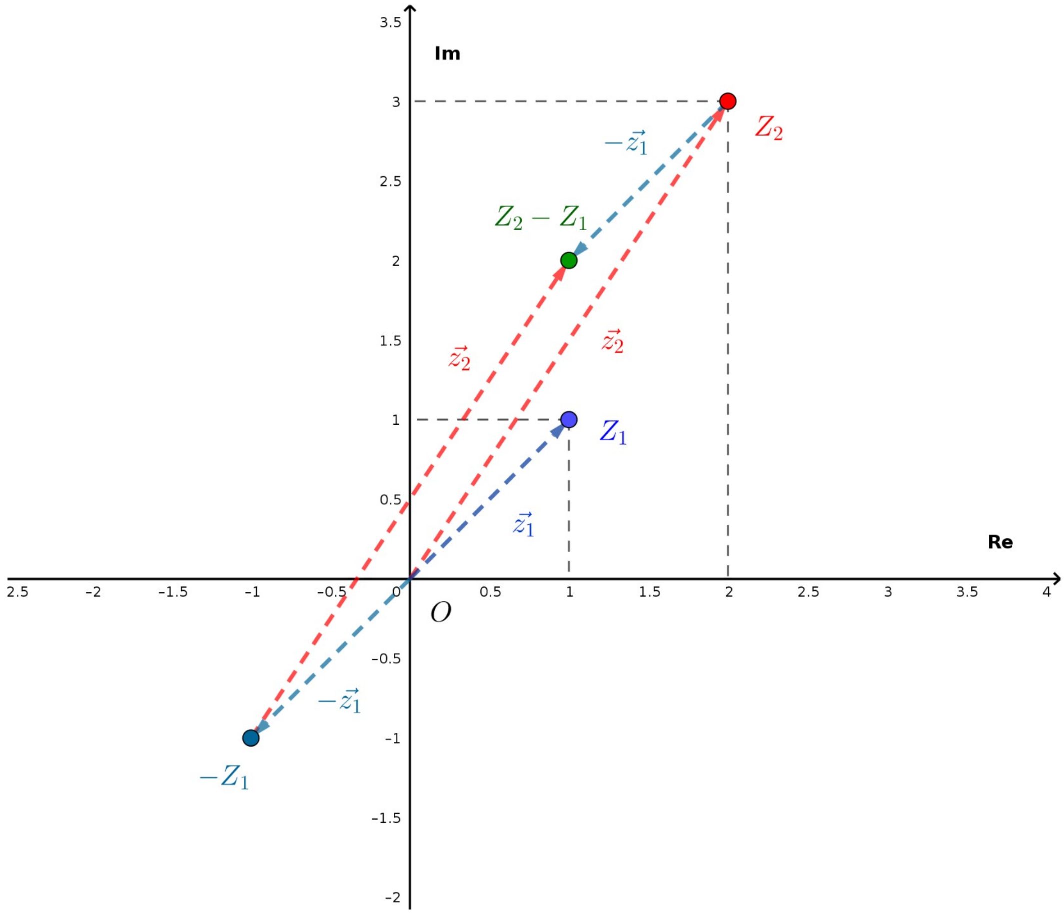
Dalším úkolem bylo znázornění součtu komplexních čísel $z_1 = 1 + i$ a $z_2 = 2 + 3i$, tj. $z_1 + z_2$. Opět si tedy znázorníme obrazy komplexních čísel Z_1 a Z_2 a použijeme rovnoběžníkové pravidlo stejně jako u sčítání vektorů viz Domácí úkol. Tím dostaneme obraz komplexního čísla $Z_1 + Z_2$, který vznikne jakou součet komplexních čísel z_1 a z_2.



Obrázek 14: Součet komplexních čísel

e) $z_2 - z_1$

Posledním úkolem bylo znázornit rozdíl komplexních čísel tj. $z_2 - z_1$. Rozdíl jsme převedli na součet dvou komplexních čísel $-z_1$ a z_2. Nejdříve jsme tedy zkonstruovali opačné komplexní číslo $-z_1$ ke komplexnímu číslu z_1. Tím jsme dostali bod $-Z_1$, který je obrazem komplexního čísla $-z_1$. Následně jsme již postupovali stejně jako u předchozího příkladu. Geometricky sečteme komplexní čísla $-z_1$ a z_2. Tím dostaneme rozdíl komplexních čísel $z_2 - z_1$.



Obrázek 15: Rozdíl komplexních čísel

3.4. Shrnutí

Seznámili jsme se s geometrickým znázorněním komplexních čísel v algebraickém tvaru a geometrickým znázorněním vybraných operací s komplexními čísly.

Klíčové pojmy kapitoly

Znázornění komplexních čísel: každé komplexní číslo $z = [a, b]$ je v této rovině znázorněno jako bod Z se souřadnicemi $x = a, y = b$. Přiřazení komplexních čísel k bodům roviny je vzájemně jednoznačné. Přiřazení komplexních čísel k polohovým vektorům je vzájemně jednoznačné.

Geometrické znázornění součtu a rozdílu komplexních čísel: sčítání dvou komplexních čísel znázorňujeme sečtením příslušných vektorů, odčítání dvou komplexních čísel znázorňujeme odečtením příslušných vektorů viz Znázornění vybraných operací s komplexními čísly.

Geometrický význam absolutní hodnoty: absolutní hodnota komplexního čísla je rovna vzdálenosti bodu, který je obrazem tohoto čísla v Gaussově rovině, od počátku soustavy souřadnic viz Geometrický význam absolutní hodnoty.

3.5. Další zdroje

PETÁKOVÁ, J. *Matematika příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám.* Praha: Prometheus, 2013, s. 135.

ČERMÁK, P. et al. *Odmaturuj z matematiky 1*. Brno: Didaktis, 2004, s. 19 – 20.

POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus, 2015, s. 104 – 107.

3.6. Cvičení

Řešení →*3. 6*

1. Mějme komplexní čísla $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 + 2i$ a $z_3 = i$.

a) Graficky znázorněte absolutní hodnotu daných komplexních čísel.

b) Graficky znázorněte čísla komplexně sdružená k daným komplexním číslům.

c) Graficky znázorněte čísla opačná k daným komplexním číslům.

d) Graficky znázorněte součet komplexních čísel: $z_1 + z_2$.

e) Graficky znázorněte rozdíl komplexních čísel: $z_2 - z_3$.

f) Graficky znázorněte: $z_1 + z_2 - z_3$.

3.7. Kontrolní otázky

Správně odpovědi viz Klíčové pojmy kapitoly.

1) *Jak znázorňujeme komplexní číslo v Gaussově rovině? Vysvětlete obrázkem.*

2) *Může se stát, že dvě různá komplexní čísla přiřadíme k jednomu bodu roviny?*

3) *Jak geometricky znázorňujeme součet a rozdíl komplexních čísel? Nakreslete obrázek.*

Zápisky:

4 Goniometrický tvar komplexních čísel

4.1. Cíl

Cíle kapitoly:

- Seznámení se s goniometrickým tvarem komplexního čísla.
- Seznámení se s geometrickým znázorněním komplexního čísla v goniometrickém tvaru.
- Seznámení se se souvislostí goniometrického tvaru s algebraických.
- Seznámení se s jednoznačností goniometrického tvaru.

4.2. Studijní čas

Tato kapitola je klíčová k pochopení goniometrického tvaru komplexního čísla a jeho souvislost s algebraickým tvarem komplexního čísla. Proto si na prostudování této kapitoly vyhraďte dostatek času, tedy alespoň 3 hodiny.

4.3. Průvodce studiem

V této kapitole se seznámíme s dalším možným způsobem, jak zapsat komplexní číslo, tj. goniometrickým tvarem komplexního čísla. Poté navážeme na předchozí kapitolu s geometrickým znázorněním komplexního čísla, tentokrát v goniometrickém tvaru. Řekneme si také, jaká je souvislost mezi algebraickým a goniometrickým tvarem komplexního čísla. V neposlední řadě se podíváme na to, kdy je komplexní číslo v goniometrickém tvaru zadáno jednoznačně.

Doposud jsme se bavili o komplexních číslech v algebraickém tvaru. Již jsme si ale naznačili, komplexní čísla můžeme vyjádřit i v jiném tvaru. V následujících kapitolách se budeme zabývat geometrickým tvarem komplexních čísel, který sebou bude přinášet řadu výhod jak z hlediska aritmetického, tak z hlediska geometrického. Nejdříve uveďme na následující definici Definice 11. Goniometrický tvar komplexního čísla.

Definice 11. Goniometrický tvar komplexního čísla

Zápis nenulového komplexního čísla z ve tvaru $|z|\,(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$ nazýváme goniometrickým tvarem komplexního čísla z. Kladné číslo $|z|$ nazýváme absolutní hodnotou čísla z. Reálné číslo φ nazýváme argumentem komplexního čísla z. Zadáváme ho ve stupních nebo v radiánech.

Domácí úkol:

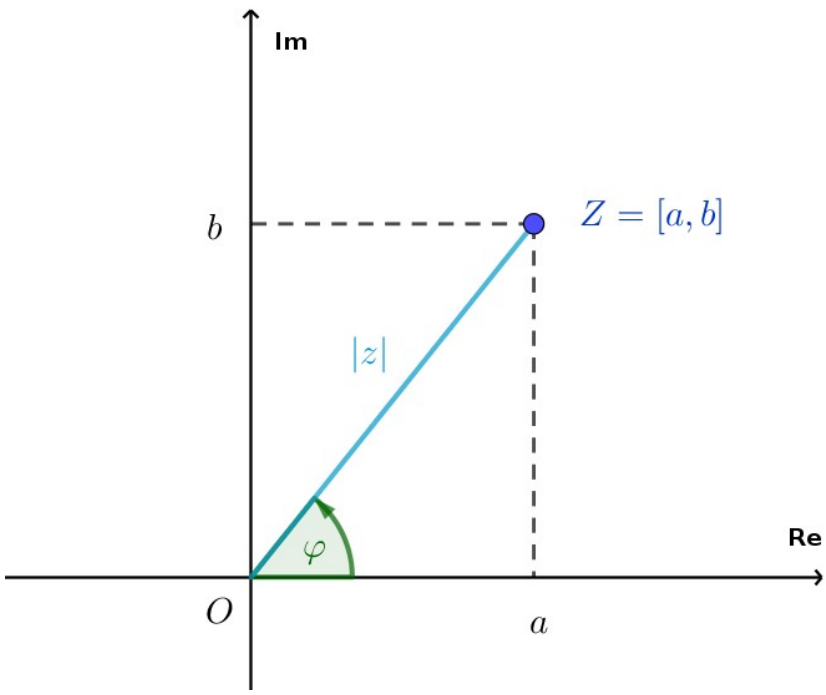
Připomeňte si, jaký je převod mezi radiány a stupni viz https://www.matweb.cz/radian/.

Odpověď:

Geometrické znázornění komplexních čísel v goniometrickém tvaru

Připomeňme si, že obrazem libovolného komplexního čísla z v Gaussově rovině je bod Z, který lze zapsat pomocí kartézských souřadnic. Za $x-$osovu souřadnici dosazujeme reálnou část čísla z, za $y-$ovou souřadnici dosazujeme imaginární část čísla z. Tento způsob zadávání obrazů komplexních čísel se využívá pro komplexní čísla v algebraickém tvaru.

Podívejme se nyní na znázornění komplexního čísla ve tvaru goniometrickém. Obraz Z nenulového komplexního čísla z lze totiž také určit geometricky pomocí jeho vzdálenosti od počátku O kartézské soustavy souřadnic a velikosti orientovaného úhlu φ, který svírá kladná poloosa x, jakožto jeho počáteční rameno a polopřímka OZ, která je jeho koncovým ramenem. Jak již bylo řečeno, vzdálenost komplexního čísla z od počátku soustavy souřadnic se nazývá absolutní hodnota daného komplexního čísla $|z|$. Tento způsob se využívá pro komplexní čísla ve zmiňovaném goniometrickém tvaru. Podívejme se na geometrické znázornění na obrázku 16.



Obrázek 16: Geometrická interpretace goniometrického tvaru komplexního čísla

Zamyslete se:

Zamyslete se nad tím, jak souvisí zápis komplexního čísla v goniometrickém tvaru s geometrickým znázorněním tohoto komplexního čísla. Najdete v zápisu čísla důležité informace, pomocí kterých jste schopní číslo zanést do Gaussovy roviny?

Odpověď:

Upozornění:

Řekli jsme si, že toto platí pro nenulové komplexní číslo. Obraz komplexního čísla nelze takto zadat, neboť bod splývá s počátkem soustavy O a tudíž body O, Z neurčují žádnou polopřímku. Z toho vyplývá, že nelze určit velikost orientovaného úhlu.

Souvislost goniometrického tvaru s algebraickým tvarem

Jak již bylo řečeno, někdy se vyplatí pracovat s komplexním číslem v goniometrickém tvaru, někdy ve tvaru algebraickém. Bylo by tedy příhodné, kdybychom uměli mezi těmito tvary přecházet.

Domácí úkol:

Připomeňte si, jak jsou definované goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku viz https://www.matweb.cz/pravouhly-trojuhelnik/.

Odpověď:

Podívejme se, jakou najdeme souvislost mezi goniometrickým a algebraickým tvarem komplexního čísla. Nechť bod Z je obrazem komplexního čísla z v Gaussově rovině. Jak již víme, algebraický tvar komplexního čísla z je $z = a + bi$. Dále ze znalosti absolutní hodnoty víme, že platí $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Využijeme definice goniometrických funkcí pro pravoúhlý trojúhelník. Vidíme, že platí také $\sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$, $\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}$.

Nyní vyjádřeme a a b a následně dosaďme do algebraického tvaru komplexního čísla. Tím dostaneme požadovaný goniometrický tvar:

$$z = a + bi = |z| \cos(\varphi) + i\,|z| \sin(\varphi) =$$

$$= |z| \left(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)\right).$$

Je patrné, že přecházet mezi algebraickým a goniometrickým tvarem není složité. V řadě příkladů toho budeme využívat.

Připomenutí:

Praktické pro nás bude také připomenutí, že funkce kosinus je funkcí sudou, proto platí $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$. Sinus je naproti tomu funkce lichá, proto pro ni platí $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$. Z toho plyne $\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos(\varphi) - i\sin(\varphi)$.

Jednoznačnost goniometrického tvaru

Musíme si také uvědomit, že funkce kosinus a sinus jsou funkce periodické s periodou 2π. Z toho nám plyne, že goniometrický tvar komplexního čísla z není určen jednoznačně. Tedy to znamená, že je-li číslo φ argumentem komplexního čísla z, pak jím je také každé reálné číslo tvaru $\acute{\varphi} = \varphi + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Z toho důvodu zavádíme takzvanou hlavní **hodnotu argumentu** čísla, ke které se vztahují následující dvě věty Věta 3.: Hlavní hodnota argumentu a Věta 4.: Jednoznačnost komplexního čísla v goniometrickém tvaru.

Věta 3.: Hlavní hodnota argumentu

Je-li argument φ komplexního čísla z zadán tak, že $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, pak mu říkáme hlavní hodnota argumentu komplexního čísla.

Věta 4.: Jednoznačnost komplexního čísla v goniometrickém tvaru

Má-li komplexní číslo v goniometrickém tvaru hlavní hodnotu argumentu, potom je komplexní číslo určeno jednoznačně.

Upozornění:

V řešení příkladů na procvičení jsou výsledky komplexních čísel v goniometrickém tvaru převedeny na hlavní hodnoty argumentu čísla.

Vzorový příklad:

Převeďte na goniometrický tvar komplexní číslo $z = 1 + i$.

$$z = 1 + i$$

$$a = 1, b = 1$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \wedge \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \wedge \varphi_2 = \frac{7\pi}{4}$$

Vidíme, že pro argument u funkce sinus nám vyšly dvě možnosti. Stejně tak u funkce cosinus. Vezmeme si tedy argument, který vyšel u obou funkcí a tedy je kořenem pro obě uvedené rovnice. Vyjádříme si reálnou a imaginární část komplexního čísla a následně do něj dosadíme vypočítanou číselnou hodnotu absolutní hodnoty čísla z a vypočítaný argument φ:

$$a = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$b = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Nyní již můžeme dosadit do algebraického tvaru komplexního čísla hodnoty a a b. Tím z algebraického tvaru komplexního čísla dostaneme goniometrický tvar:

$$z = a + bi =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{4}) + i\sqrt{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) =$$

$$z = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4})).$$

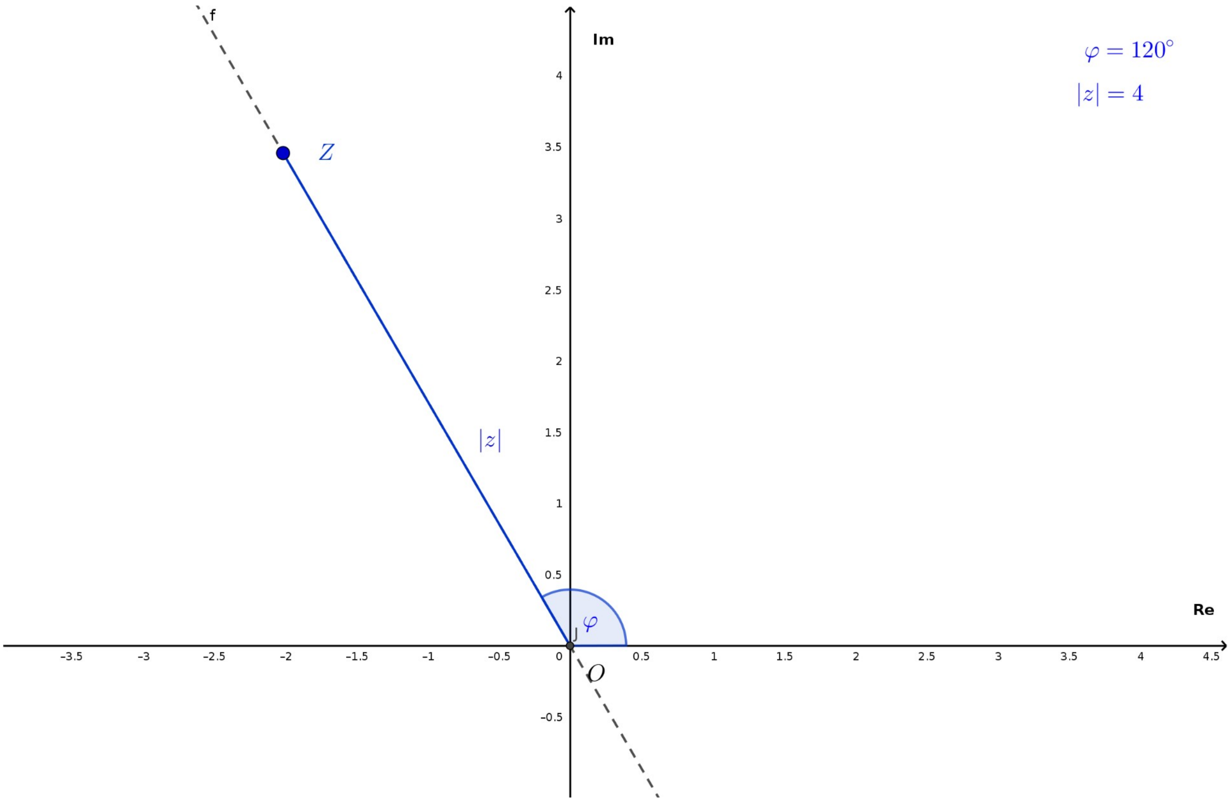
Vzorový příklad:

Mějme komplexní číslo $z = 4(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$. Určete u tohoto komplexního čísla absolutní hodnotu, argument a komplexní číslo znázorněte v Gaussově rovině. Poté ho zapište v algebraickém tvaru.

Když porovnáme předpis goniometrického tvaru komplexního čísla se zadaným komplexních číslem, snadno uvidíme, že absolutní hodnota $|z| = 4$. Stejně tak argument je ze zadání patrný, tedy $\varphi = 120^\circ$. Dalším úkolem je převod z goniometrického tvaru na algebraický, což uděláme jednoduše tak, že si vypočítáme, čemu je roven kosinus a sinus daného úhlu.

$$z = 4(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = 4(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -2 + i2\sqrt{3}.$$

Nyní již stačí komplexní číslo znázornit viz obrázek 17. V konstrukci postupujeme tedy tak, že si nejdříve narýsujeme přímku p, která s reálnou osou svírá úhel 120° a zároveň prochází počátkem soustavy souřadnic O. Následně na přímku p naneseme od počátku O délku 4 jednotky (centimetry). Tím dostaneme jednoznačně určené komplexní číslo z.



Obrázek 17: Zobrazení komplexního čísla v goniometrickém tvaru

4.4. Shrnutí

Seznámili jsme se s goniometrickým tvarem komplexního čísla a jeho geometrickým znázorněním. Seznámili jsme se, jaká je souvislost goniometrického tvaru s tvarem algebraickým a kdy je komplexní číslo v goniometrickém tvaru zadáno jednoznačně.

Klíčové pojmy kapitoly

Goniometrický tvar komplexního čísla: zápis nenulového komplexního čísla z ve tvaru $|z|\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ nazýváme goniometrickým tvarem komplexního čísla z. Kladné číslo $|z|$ nazýváme absolutní hodnotou čísla z. Reálné číslo φ nazýváme argumentem komplexního čísla z. Zadáváme ho ve stupních nebo v radiánech.

Vztah goniometrického a algebraického tvaru: $z = a + bi = |z| \cos(\varphi) + i\,|z| \sin(\varphi) = |z|\,(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$.

Hlavní hodnota argumentu komplexního čísla: Je-li argument φ komplexního čísla z zadán tak, že $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, pak mu říkáme hlavní hodnota argumentu komplexního čísla. Má-li komplexní číslo v goniometrickém tvaru hlavní hodnotu argumentu, potom je komplexní číslo určeno jednoznačně.

4.5. Další zdroje

PETÁKOVÁ, J. *Matematika příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám.* Praha: Prometheus, 2013, s. 137.

ČERMÁK, P. et al. *Odmaturuj z matematiky 1.* Brno: Didaktis, 2004, s. 22 – 25.

POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus, 2015, s. 187 – 190.

4.6. Cvičení

Řešení → 4. 6

1. Určete u daných komplexních čísel absolutní hodnotu, argument a potom je také zapište v algebraickém tvaru.

a) $z_1 = 6(\cos 60° + i \sin 60°)$,

b) $z_2 = (\cos 90° + i \sin 90°)$,

c) $z_3 = 16(\cos 0° + i \sin 0°)$.

2. Převeďte komplexní čísla na goniometrický tvar:

a) $z_1 = i$,

b) $z_2 = 5 + 3i$,

c) $z_3 = 8 + 2i$.

4.6.1 Kontrolní otázky

Správně odpovědi viz **Klíčové pojmy kapitoly.**

1) *Jak vypadá goniometrický tvar komplexního čísla?*

2) *Jaký vztah má goniometrický tvar s algebraickým tvarem komplexního čísla?*

3) *Co je to hlavní hodnota argumentu komplexního čísla?*

4) *Kdy je komplexní číslo v goniometrickém tvaru určeno jednoznačně?*

Zápisky:

5 Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění

5.1. Cíl

Cíle kapitoly:

- Seznámení se se součinem komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich geometrickou interpretací.
- Seznámení se s podílem komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich geometrickou interpretací.
- Seznámení s Moivreovou větou.

5.2. Studijní čas

Na zvládnutí této kapitoly si opět zajistěte větší časovou dotaci, neboť se jedná o kapitolu velmi obsáhlou. Navíc se v této kapitole setkáte kromě výpočtů také s grafickým znázorněním vybraných operací, což je časově náročné. Proto si na tuto kapitolu vyhraďte přibližně 4 hodiny. Dostatečnou časovou rezervu si nechte také na zvládnutí cvičení a zodpovězení kontrolních otázek.

5.3. Průvodce studiem

V této kapitole se seznámíme s podílem a součinem komplexních čísel v goniometrickém tvaru. Opět se podíváme, jak tyto operace s komplexními čísly můžeme geometricky znázornit. Seznámíme se také s Moivreovou větou, která pro nás bude důležitá i v následujících kapitolách.

Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění

Abychom mohli zavést operace s komplexními čísly v goniometrickém tvaru, bude zapotřebí nejdříve zavést Moivreovu větu viz Věta 5.: Moivreova věta a připomenout si součtové vzorce pro goniometrické funkce viz Definice 12. Součtové vzorce.

Moivreova věta a součtové vzorce

Moivreova věta bude podstatná pro výpočet mocniny komplexního čísla s přirozeným mocnitelem. Její obdoba se bude dále využívat také pro odmocniny komplexních čísel v goniometrickém tvaru. K jejímu praktickému využití se dostaneme v následující kapitole.

Věta 5.: Moivreova věta

Pro všechna přirozená čísla n platí: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Je patrné, že Moivreova věta vychází ze součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus, které si připomeneme v následující definici.

Definice 12. Součtové vzorce

Pro každá dvě reálná čísla α, β platí:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha$$

Nyní již můžeme přejít k tomu, jakým způsobem můžeme dvě komplexní čísla násobit a dělit.

Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění

Součin komplexních čísel

Nejdříve se podíváme na odvození součinu komplexních čísel. Následně si odvození shrneme do definice pro součin komplexních čísel viz Definice 13. Součin komplexních čísel.

Vezměme komplexní číslo $z_1 = |z_1|\,(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ a komplexní číslo $z_2 = |z_2|\,(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$.

Vynásobíme dvě komplexní čísla, dostaneme výraz:

$$z_1 \cdot z_2 = [|z_1|\,(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))] \cdot [|z_2|\,(\cos(\beta) + i\sin(\beta))] =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2| \cdot [(\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)] + i(\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta))].$$

Nyní využijeme zmíněné součtové vzorce viz Definice 12. Součtové vzorce:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - sin(\alpha)\sin(\beta),$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + cos(\alpha)\sin(\beta).$$

Dostaneme:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\,(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)).$$

Definice 13. Součin komplexních čísel

Máme-li dvě nenulová komplexní čísla z_1 a z_2:

$$z_1 = |z_1|\,(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))\,,\ z_2 = |z_2|\,(\cos(\beta) + i\sin(\beta)),$$

pak jejich součinem nazveme komplexní číslo z_3

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\,(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)).$$

Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění

Z Moivreovy věty viz Věta 5.: Moivreova věta je patrné, že pravidlo pro násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru lze zobecnit na součin libovolného počtu činitelů:

$$|z_1|\,(\cos(\varphi_1)+i\sin(\varphi_1))\cdot|z_2|\,(\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2))\cdots|z_n|\,(\cos(\varphi_n)+i\sin(\varphi_n)) =$$

$$= |z_1|\cdot|z_2|\cdots|z_n|\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2...+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2...+\varphi_n)).$$

Vzorový příklad:

Vypočítejte součin $z_1 \cdot z_2$ komplexních čísel z_1 a z_2, kde $z_1 = 4(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$.

Použijeme vzorec pro součin dvou komplexních čísel (Definice 13. Součin komplexních čísel) a dosadíme:

$$z_3 = z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\,(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)),$$

$$z_3 = z_1\cdot z_2 = 4\cdot 2(\cos(120^\circ+60^\circ)+i\sin(120^\circ+60^\circ)),$$

$$z_3 = 8(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ).$$

Vzorový příklad:

Vypočítejte součin $z_1 \cdot z_2$ komplexních čísel z_1 a z_2, kde $z_1 = 4(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$.

Použijeme vzorec pro součin dvou komplexních čísel a dosadíme:

$$z_3 = z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\,(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)),$$

$$z_3 = z_1\cdot z_2 = 4\cdot 2(\cos(300^\circ+60^\circ)+i\sin(300^\circ+60^\circ)),$$

$$z_3 = 8(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ),$$

$$z_3 = 8(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ).$$

Upozornění:

V příkladu jsme použili převod argumentu z čtvrtého kvadrantu do prvního kvadrantu, který již čtenář zná z goniometrických funkcí. Jak již bylo řešeno, vždy výsledky zapisujeme s hlavní hodnotou argumentu, aby byl výsledek jednoznačný.

Podíl komplexních čísel

Ačkoliv by se mohlo zdát, že podíl dvou komplexních čísel v goniometrickém tvaru bude komplikovaný, opět použijeme stejný postup odvození jako u podílu komplexních čísel v algebraickém tvaru. Následně si opět odvození shrneme do definice o podílu komplexních čísel viz Definice 14. Podíl komplexních čísel.

Rozšíříme zlomek číslem komplexně sdruženým k číslu ve jmenovateli zlomku, tj. $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$ a dále upravíme dle předchozího postupu. Vezměme dvě nenulová komplexní čísla $z_1 = |z_1| (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ a $z_2 = |z_2| (\cos(\beta) + i \sin(\beta))$.

Zapíšeme si podíl čísel $\frac{z_1}{z_2}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)}{|z_2| (\cos(\beta) + i \sin(\beta)} = \frac{|z_1| (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) - i \sin(\beta))}{|z_2| (\cos(\beta) + i \sin(\beta)) \cdot ((\cos(\beta) - i \sin(\beta))} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} =$$

$$= \frac{|z_1| (\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)) + i(\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta))}{|z_2| (((\cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2)}.$$

Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění

Využijeme součtové vzorce (Definice 12. Součtové vzorce) a znalosti, že $(\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2 = 1$ a dostaneme $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)]$.

Nyní si již můžeme zavést definici na podíl dvou komplexních čísel.

Definice 14. Podíl komplexních čísel

Máme-li dvě nenulová komplexní čísla $z_1 = |z_1|\,(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ a $z_2 = |z_2|\,(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$, pak jejich podílem nazveme komplexní číslo $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)]$.

Vzorový příklad:

Vypočítejte podíl $\dfrac{z_1}{z_2}$ komplexních čísel z_1 a z_2, kde kde $z_1 = 4(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$, $z_2 = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$.

Použijeme tedy vzorec pro podíl dvou komplexních čísel (Definice 14. Podíl komplexních čísel) a dosadíme do něj:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)]\,,$$

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2} \cdot [\cos(120^\circ - 60^\circ) + i\sin(120^\circ - 60^\circ)]\,,$$

$$z_3 = 2\,[\cos(60^\circ) + i\sin(60^\circ)]\,.$$

Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění

Geometrické znázornění součinu

Již víme, jak vypadá goniometrický tvar komplexního čísla, jak lze zakreslit komplexní číslo v goniometrickém tvaru, ale také to, jak vypadá komplexní číslo v goniometrickém tvaru, které vzniklo součinem dvou komplexních čísel. Teď tyto znalosti využijeme všechny najednou a ukážeme si, jakým způsobem můžeme součin komplexních čísel znázornit.

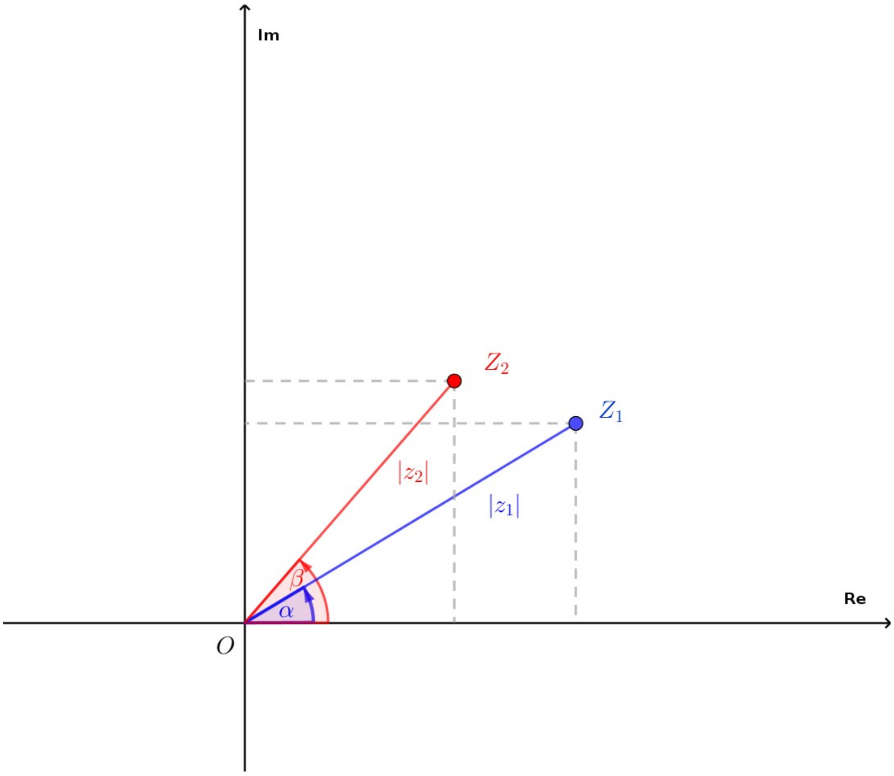
Domácí úkol:

Připomeňte si, jak se konstruuje součin dvou úseček.

Odpověď:

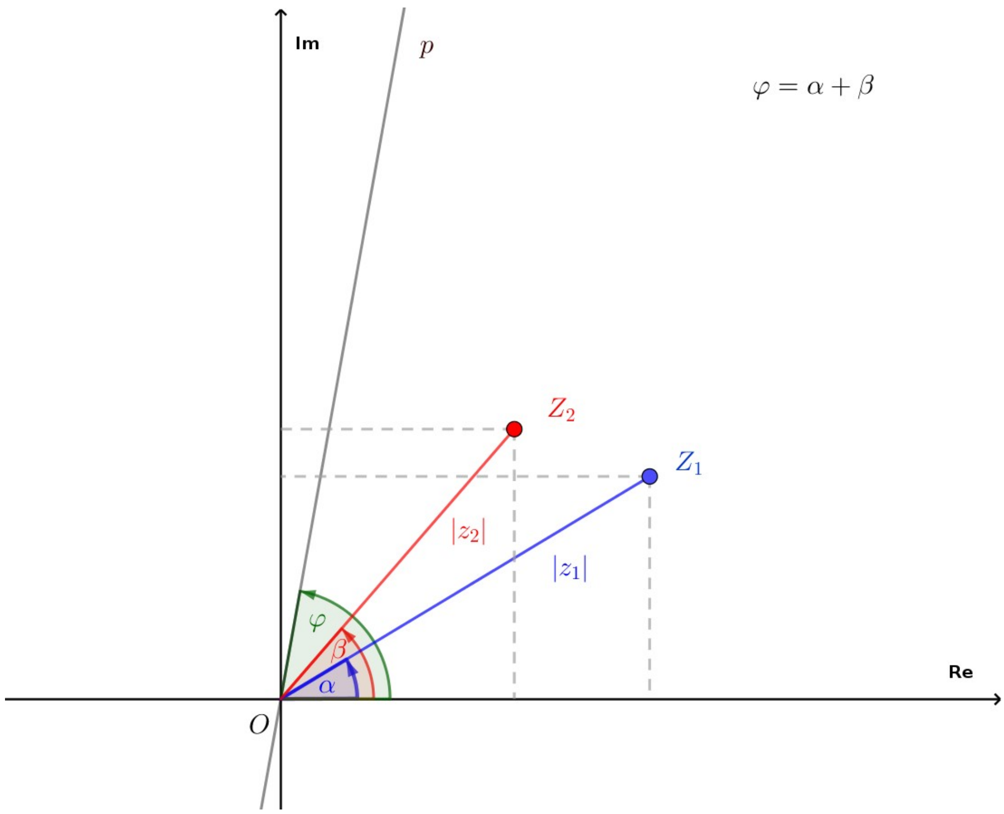
Na obrázku 18 jsou znázorněny obrazy dvou komplexních čísel z_1 a z_2 jako body Z_1 a Z_2. Každé z těchto komplexních čísel má svůj argument a dále známe u těchto čísel vzdálenost jejich obrazu od počátku, nebo-li absolutní hodnotu tohoto komplexního čísla. Komplexní číslo z_1 má argument α a absolutní hodnotu $|z_1|$, komplexní číslo z_2 má argument β a absolutní hodnotu $|z_2|$.

Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění



Obrázek 18: Konstrukce součinu_Komplexní čísla

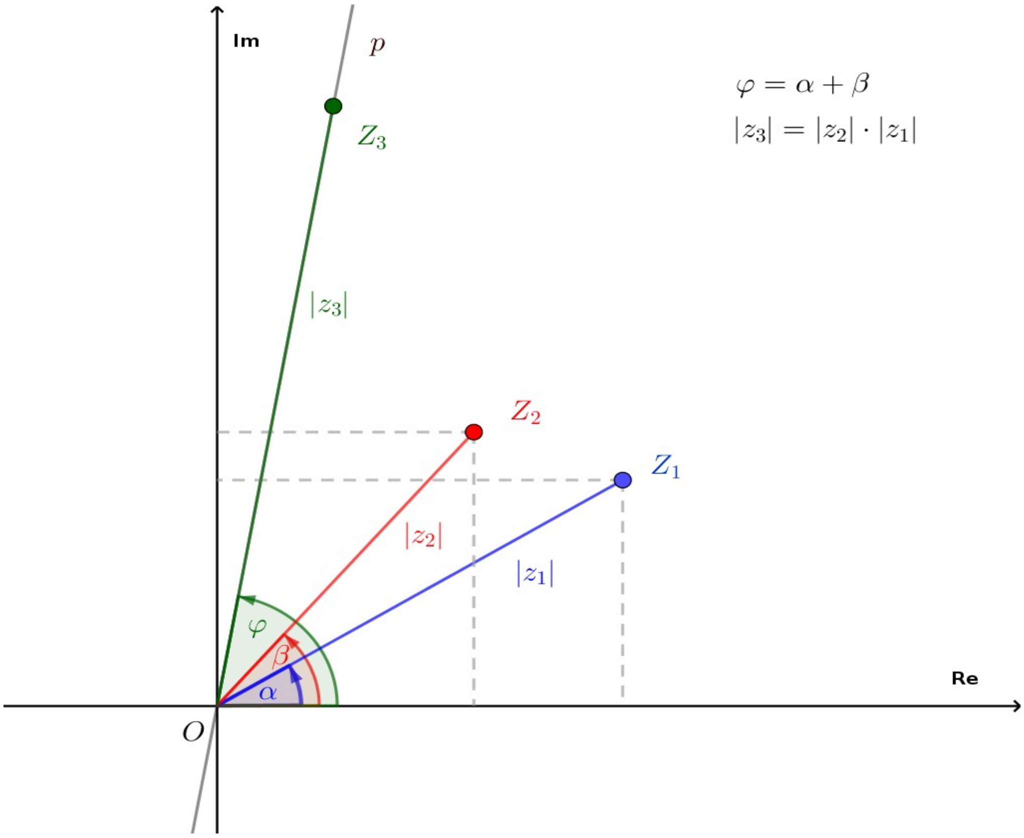
Abychom znázornili komplexní číslo $z_3 = z_1 \cdot z_2$, budeme muset znát souřadnice tohoto komplexního čísla. Výhodou goniometrického tvaru komplexního čísla je to, že nám postačí znát u komplexního čísla argument a jeho absolutní hodnotu. Tím je číslo jednoznačně určené. Z definice součinu komplexních čísel (Definice 13. Součin komplexních čísel) je patrné, že když násobíme dvě komplexní čísla, jejich argumenty se sčítají. Tedy argument komplexního čísla, které vznikne součinem těchto dvou komplexních čísel, bude $\varphi = \alpha + \beta$. Úhel mezi osou x a úsečkou Oz_3 známe. Geometricky stačí tedy zkonstruovat součet dvou úhlů viz obrázek 19.



Obrázek 19: Konstrukce součinu_Součet argumentů

Nyní potřebujeme ještě zjistit vzdálenost čísla z_3 od počátku. Stačí si opět z definice součinu komplexního čísla uvědomit, že $|z_3| = |z_1| \cdot |z_2|$. Geometricky tedy stačí zkonstruovat součin dvou úseček. Z toho zjistíme, jakou má komplexní číslo z_3 vzdálenost od počátku O soustavy souřadnic. Tuto vzdálenost nanášíme na přímku p. Tím dostaneme komplexní číslo z_3 viz obrázek 20.

Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění



Obrázek 20: Konstrukce součinu_Vzdálenost komplexního čísla od počátku

Geometrické znázornění podílu

U podílu dvou komplexních čísel to bude velmi podobné. Argument komplexního čísla $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$ je z definice podílu komplexních čísel (Definice 14. Podíl komplexních čísel) roven $\varphi = \alpha - \beta$.

Vzdálenost komplexního čísla z_3 je potom z definice $|z_3| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

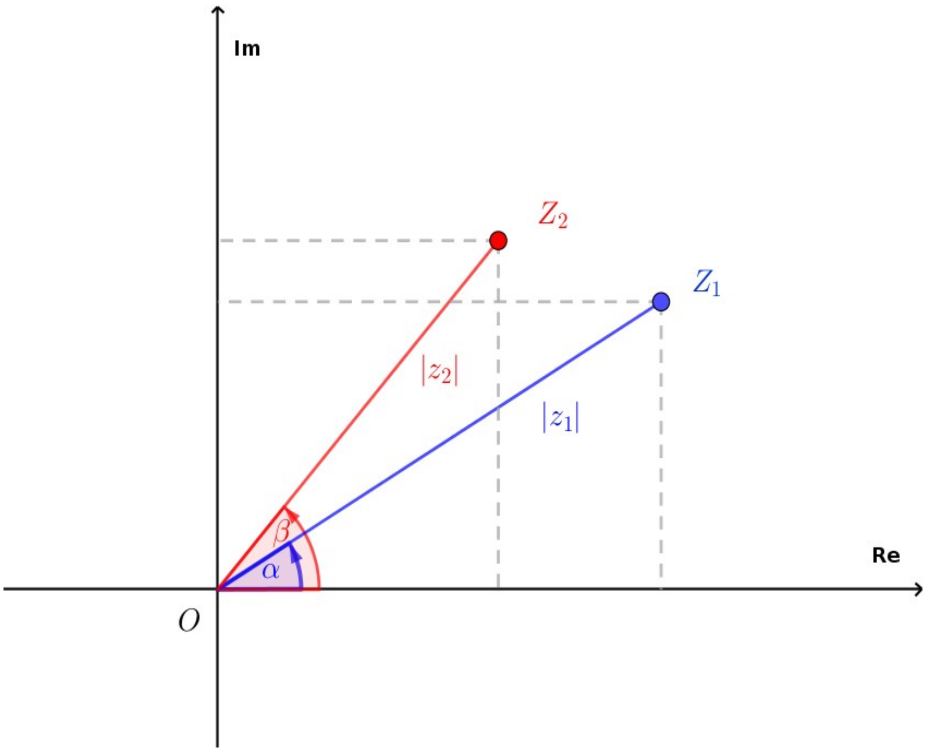
Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění

Domácí úkol:

Odpověď:

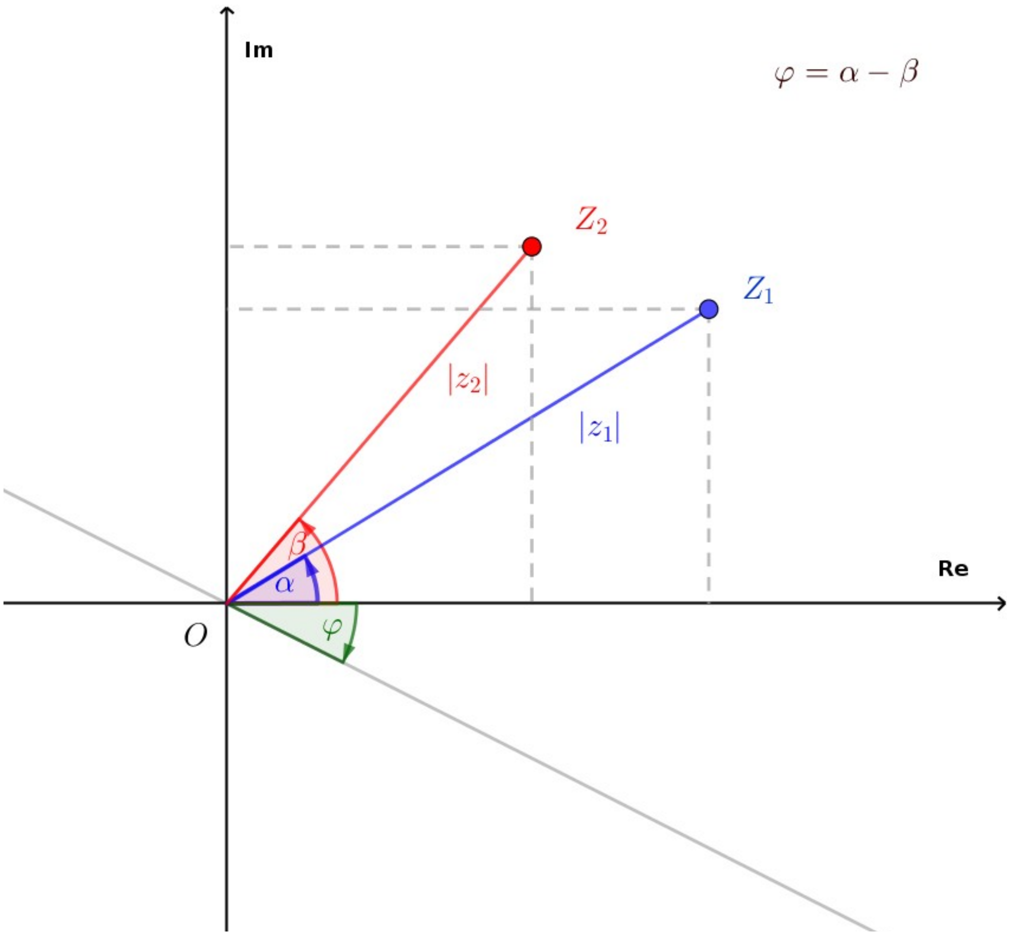
Připomeňte si, jak se konstruuje podíl dvou úseček.

Opět jsme nejdříve zkonstruovali obrazy komplexních čísel viz obrázek 21.



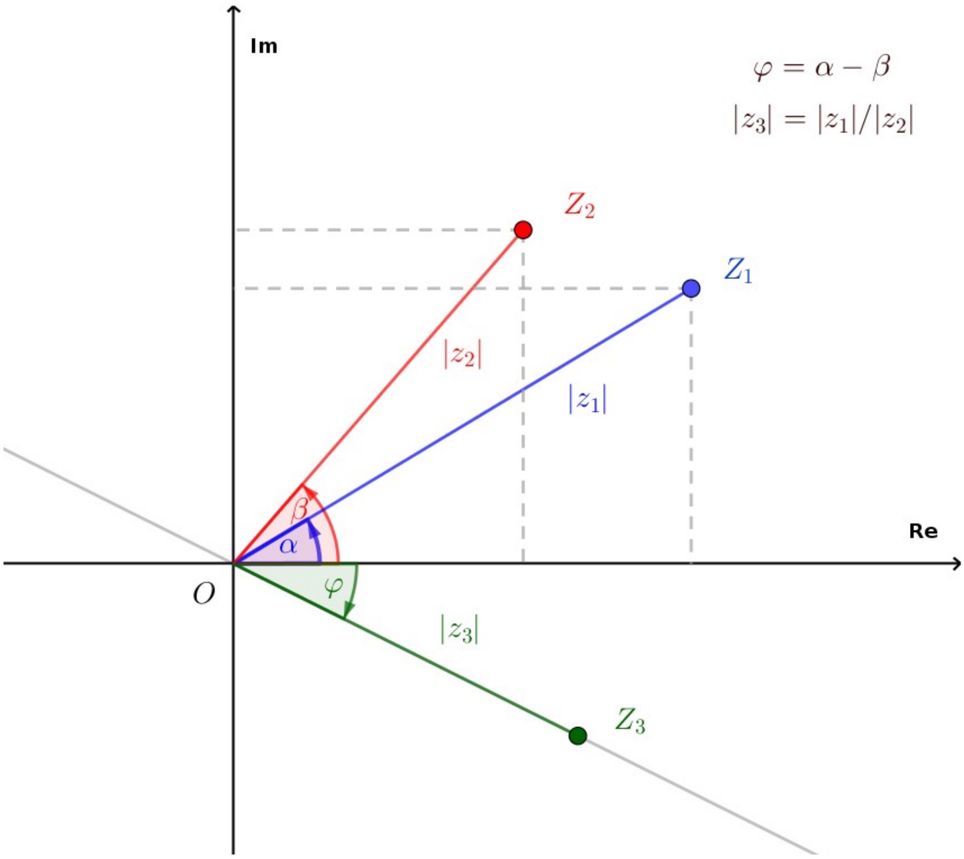
Obrázek 21: Konstrukce podílu_Komplexní čísla

Následně jsme zkonstruovali rozdíl úhlů α a β, tedy $\alpha - \beta$. Tím jsme zjistili argument $\varphi = \alpha - \beta$ komplexního čísla z_3 viz obrázek 22.



Obrázek 22: Konstrukce podílu_Rozdíl argumentů

Teď už pouze vydělíme absolutní hodnoty $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ a tím zjistíme vzdálenost $|z_3|$ komplexního čísla z_3 od počátku a zjištěnou vzdálenost naneseme od počátku O soustavy souřadnic na přímku h. Tím dostaneme obraz komplexního čísla viz obrázek 23.



Obrázek 23: Konstrukce podílu_ Vzdálenost komplexního čísla od počátku

5.4. Shrnutí

Seznámili jsme se se součinem a podílem v goniometrickém tvaru a jeho geometrickým znázorněním. Seznámili jsme se s Moivreovou větou.

Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění

Klíčové pojmy kapitoly

Moivreova věta: pro všechna přirozená čísla n platí: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$, $n \in \mathbb{N}$

Součtové vzorce: pro každá dvě reálná čísla α, β platí:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha$$

Součin komplexních čísel v goniometrickém tvaru: máme-li dvě nenulová komplexní čísla z_1 a z_2:

$$z_1 = |z_1|\left(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right),\ z_2 = |z_2|\left(\cos(\beta) + i\sin(\beta)\right),$$

pak jejich součinem nazveme komplexní číslo z_3

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right).$$

Podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru: máme-li dvě nenulová komplexní čísla $z_1 = |z_1|\left(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right)$ a $z_2 = |z_2|\left(\cos(\beta) + i\sin(\beta)\right)$, pak jejich podílem nazveme komplexní číslo

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \left[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\right].$$

5.5. Další zdroje

PETÁKOVÁ, J. *Matematika příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám.* Praha: Prometheus, 2013, s. 137 – 138.

ČERMÁK, P. et al. *Odmaturuj z matematiky 1.* Brno: Didaktis, 2004, s. 25.

POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus, 2015, s. 190 – 193.

5.6. Cvičení

Řešení →*5. 6*

1. Vypočítejte součin komplexních čísel $z_1 \cdot z_2$. Výsledek vyjádřete v goniometrickém i algebraickém tvaru. Následně tento součin graficky znázorněte.

a) $z_1 = 2(\cos 225° + i \sin 225°)$, $z_2 = 4(\cos 105° + i \sin 105°)$.

b) $z_1 = 2(\cos 300° + i \sin 300°)$, $z_2 = 4(\cos 60° + i \sin 60°)$

2. Vypočítejte podíl komplexních čísel $\frac{z_1}{z_2}$. Výsledek vyjádřete v goniometrickém i algebraickém tvaru. Následně tento součin graficky znázorněte.

a) $z_1 = 2(\cos 225° + i \sin 225°)$, $z_2 = 4(\cos 105° + i \sin 105°)$.

b) $z_1 = 2(\cos 300° + i \sin 300°)$, $z_2 = 4(\cos 60° + i \sin 60°)$.

5.7. Kontrolní otázky

Správně odpovědi vizKlíčové pojmy kapitoly

1) *Co nám říká Moivreova věta?*

2) *Jaké součtové vzorce znáte?*

3) *Jak vypočítáme součin komplexních čísel v goniometrickém tvaru? Zkuste si udělat příklad a součin znázornit.*

4) *Jak vypočítáme podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru? Zkuste si udělat příklad a podíl znázornit.*

Zápisky:

6 Umocňování a odmocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění

6.1. Cíl

Cíle kapitoly:

- Seznámení se s umocňováním komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich geometrickou interpretací.
- Seznámení se s odmocňováním komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich geometrickou interpretací.

6.2. Studijní čas

Pro tuto kapitolu si naplánujte alespoň 2 hodiny času. Kapitola není obsáhlá, ale obsah je náročnější. Počítejte tedy, že vymezený čas vám nebude muset stačit. Proto mějte časovou rezervu.

6.3. Průvodce studiem

V této kapitole se společně podíváme na n-tou mocninu a n-tou odmocninu komplexního čísla v goniometrickém tvaru. Podíváme se na tuto problematiku jak z pohledu výpočtu, tak z pohledu geometrického.

Umocňování a odmocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění

Výpočet mocniny komplexního čísla v goniometrickém tvaru

Připomeňme si, že v oboru komplexních čísel platí stejná pravidla pro výpočet mocnin jako v reálném oboru. Doposud jsme umocňovali komplexní čísla v algebraickém tvaru. Při umocňování dvojčlenu druhou nebo třetí mocninou jsme používali binomickou větu (binomickou větu). Pro výpočet vyšších mocnin, než je třetí mocnina, se však vyplatí převést komplexní číslo z z tvaru algebraického na goniometrický. Následně vypočítat mocninu komplexního čísla v goniometrickém tvaru, což je jednodušší.

Výpočet mocniny komplexního čísla z v goniometrickém tvaru lze odvodit ze vzorce pro součin komplexních čísel v goniometrickém tvaru (Definice 13. Součin komplexních čísel).

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)).$$

Pro $z^2 = z \cdot z = |z| \cdot |z|(\cos(\alpha + \alpha) + i\sin(\alpha + \alpha)) = |z|^2(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha))$.

Výsledek zobecníme viz Definice 15. Umocňování komplexních čísel.

Definice 15. Umocňování komplexních čísel

Máme-li komplexní číslo z v goniometrickém tvaru a číslo $n \in \mathbb{N}$, potom z^n vypočítáme podle vzorce:

$$z_k{}^n = |z|^n(\cos(n(\alpha + 2k\pi)) + i\sin(n(\alpha + 2k\pi))), k \in \mathbb{Z}.$$

Tedy n–tá mocnina komplexního čísla z je komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna n–té mocnině absolutní hodnoty čísla z a argument je roven n–násobku argumentu čísla z. Tato informace nám pomůže při geometrické konstrukci n–té mocniny. Poznamenejme, že z definice výše dostáváme opět důležitý vztah tzv. Moivreovu větu (Věta 5.: Moivreova věta).

Upozornění:

Umocňování a odmocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění

Při umocňování dostáváme n kořenů, které ale **graficky splývají**, neboť další kořen dostaneme tím způsobem, že ke komplexnímu číslu, které je kořenem, přičteme úhel 2π. Proto při umocňování komplexního čísla budeme hledat **pouze jedno číslo**, kterému odpovídá a to s **hlavní hodnotou argumentu** (Věta 3.: Hlavní hodnota argumentu).

Geometrické znázornění mocniny komplexního čísla v goniometrickém tvaru

Mocniny komplexních čísel můžeme opět znázornit. Podívejme se na vzorový příklad výpočtu mocniny komplexního čísla a jeho následné znázornění.

Vzorový příklad:

Užitím Moivreovy věty (Věta 5.: Moivreova věta) nalezněte $(1+i)^6$ a výsledek převeďte do algebraického tvaru. Následně výsledek geometricky znázorněte viz obrázek 24.

Vyjádříme tedy číslo v goniometrickém tvaru:

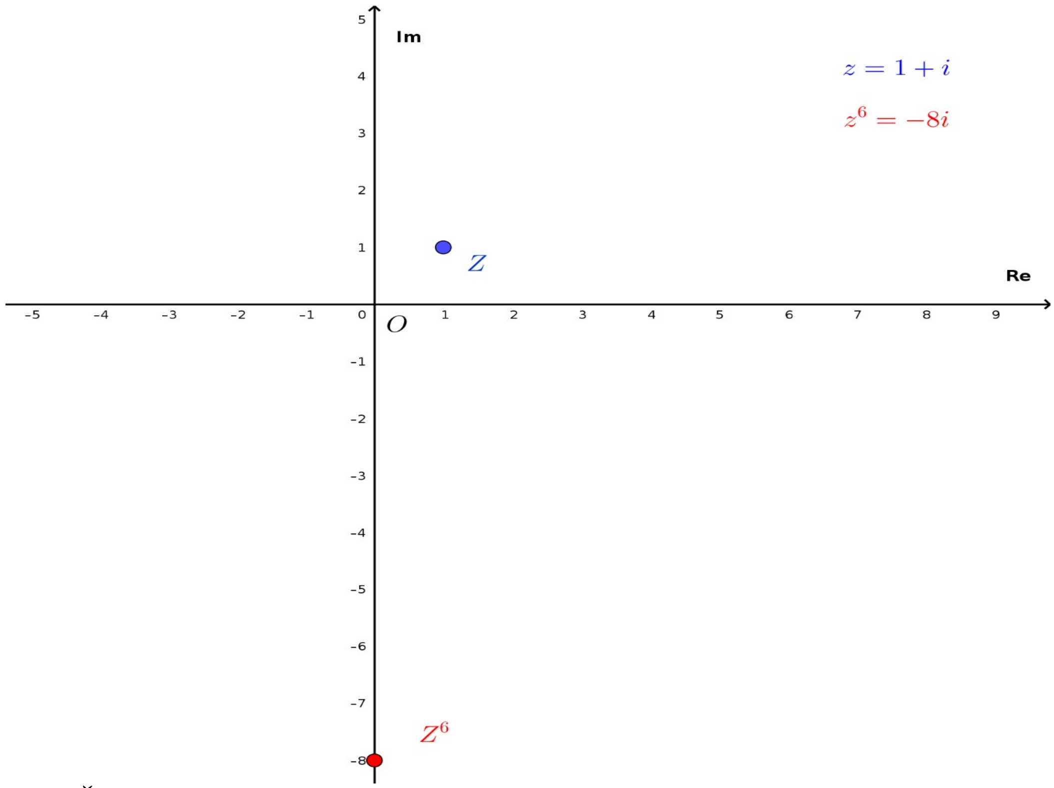
$$(1+i) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

Následně užijeme vzorec Definice 15. Umocňování komplexních čísel:

$$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow 45^\circ = \frac{\pi}{4}.$$

$$(1+i)^6 = (\sqrt{2})^6 \cdot (\cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4}) = -8i.$$



Obrázek 24: Šestá mocnina komplexního čísla

Výpočet odmocniny komplexního čísla v goniometrickém tvaru

Připomeňme si, že odmocninu z komplexního čísla v algebraickém tvaru jsme již také viděli. Problematické u odmocniny z komplexního čísla v algebraickém tvaru bylo to, když odmocnina byla vyššího řádu, neboť když jsme si vzali například n-tou odmocninu nějakého dvojčlenu, získali jsme rovnici $n-$tého stupně. Řekli jsme si, že u vyšších odmocnin se tedy problém stává v algebraickém tvaru neřešitelný. Proto využijeme převod komplexního čísla na goniometrický tvar, ve kterém komplexní číslo odmocníme podle definice Definice 16. Odmocňování komplexních čísel. Výpočet se nám tím značně ulehčí.

Umocňování a odmocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění

Definice 16. Odmocňování komplexních čísel

Máme-li komplexní číslo z v goniometrickém tvaru a číslo $n \in \mathbb{N}$, potom $\sqrt[n]{z}$ vypočítáme podle vzorce:

$$s_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Jedná se tedy o obdobu Moivreovy věty (Věta 5.: Moivreova věta).

Upozornění:

Na co si však musíme dát pozor, je to, kolik kořenů budeme dostávat. U mocnění jsme dostávali n kořenů, které ale graficky splývali, neboť jsme další kořen dostali tím způsobem, že jsme ke komplexnímu číslu, které bylo kořenem, přičetli úhel 2π. Dostali jsme se tedy po kružnici se středem v počátku a poloměrem $|z|^n$ do stejného bodu (komplexního čísla). Všimněme si, jak je to u odmocňování komplexního čísla. Zvolme si v daném vzorci:

$$s_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right), k \in \mathbb{Z}. \text{ postupně } k = 0, 1, , n-1.$$

Dostaneme n odmocnin z_0, z_1, z_{n-1}, které jsou navzájem různé, neboť i úhly $\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}, \frac{\alpha}{n} + \frac{4\pi}{n}, \frac{\alpha}{n} + \frac{(n-1)2\pi}{n}$ jsou navzájem různé a současně žádné dva z nich se neliší o celý násobek čísla π.

Shrňme tedy, že každé komplexní číslo z má v $\mathbb{C}$ právě n různých n-tých odmocnin z_0, z_1, z_{n-1}. Všechny n-té odmocniny komplexního čísla z mají tedy tutéž absolutní hodnotu rovnou $\sqrt[n]{|z|}$, ale jejich argumenty jsou různé, neboť jsou rovny $\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}$, kde $k = 0, 1, , n - 1$. Liší se tedy o celočíselný násobky čísla $\frac{2\pi}{n}$.

Geometrické znázornění odmocniny komplexního čísla v goniometrickém tvaru

Nyní se podívejme, jakým způsobem můžeme znázornit n–tou odmocninu z komplexního čísla v Gaussově rovině.

Je-li $n = 2$, pak odmocninou komplexního čísla z jsou dvě opačná komplexní čísla. Tedy jejich obrazy v Gaussově rovině jsou body souměrně sdružené podle počátku a zároveň ležící na kružnici se středem v počátku a poloměrem rovným číslu $\sqrt[n]{|z|}$.

Je-li $n > 2$, pak obrazy n-tých odmocnin komplexního čísla z v Gaussově rovině tvoří vrcholy pravidelného n–úhelníka vepsaného kružnici se středem v počátku a poloměrem rovným číslu $\sqrt[n]{|z|}$.

Pro grafické sestrojení obrazů n-tých odmocnin čísla z je nejjednodušší sestrojit kružnici k s poloměrem $r = \sqrt[n]{|z|}$ a středem S v počátku soustavy souřadnic, tj. $S = O$. Následně je potřeba sestrojit nejprve vrchol, který odpovídá odmocnině s_0. Jeho argument je roven $\frac{\alpha}{n}$. Další vrcholy dostaneme velice jednoduše. Stačí přičíst k úhlu $\frac{\alpha}{n}$ postupně úhel $\frac{2\pi}{n}$. Vrcholy n–úhelníku budou ležet na dané kružnici.

Vzorový příklad:

Nalezněte všechny odmocniny komplexního čísla z = 1+i. Následně odmocniny graficky znázorněte viz obrázek 25.

Nejdříve převedeme komplexní číslo z do goniometrického tvaru.

$$|z| = \sqrt{2}, \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Umocňování a odmocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění

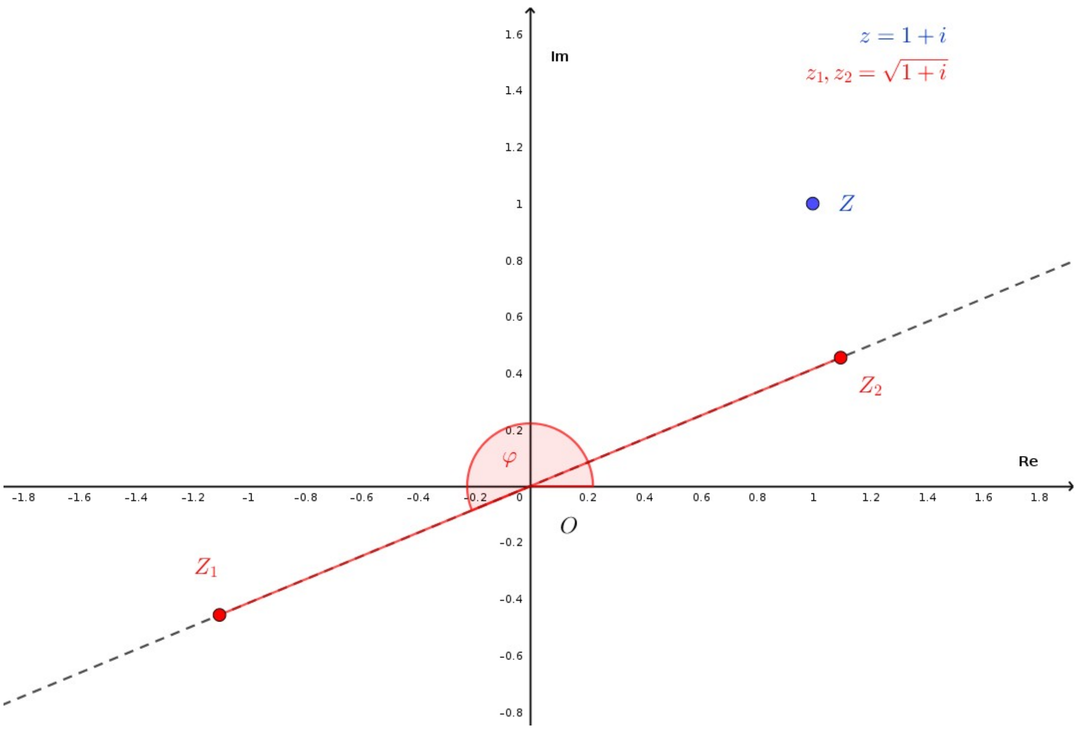
$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

Nyní použijeme vzorec pro odmocnění (Definice 16. Odmocňování komplexních čísel) a dosadíme. Chceme druhou odmocninu, proto $n = 2$.

$$s_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right), k \in \mathbb{Z}.$$

$$s_0 = \sqrt{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$$

$$s_1 = \sqrt{\sqrt{2}}(\cos(\frac{\pi}{8} + \pi) + i\sin(\frac{\pi}{8} + \pi)) = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{9\pi}{8}) + i\sin\frac{9\pi}{8})$$



Obrázek 25: Druhé odmocniny komplexního čísla

6.4. Shrnutí

Seznámili jsme se s umocňováním a odmocňováním komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jeho geometrickým znázorněním.

Klíčové pojmy kapitoly

Umocňování komplexního čísla v goniometrickém tvaru: máme-li komplexní číslo z v goniometrickém tvaru a číslo $n \in \mathbb{N}$, potom z^n vypočítáme podle vzorce:

$$z_k{}^n = |z|^n(\cos(n(\alpha + 2k\pi)) + i\sin(n(\alpha + 2k\pi))), k \in \mathbb{Z}.$$

Odmocňování komplexního čísla v goniometrickém tvaru: máme-li komplexní číslo z v goniometrickém tvaru a číslo $n \in \mathbb{N}$, potom $\sqrt[n]{z}$ vypočítáme podle vzorce:

$$s_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right), k \in \mathbb{Z}.$$

6.5. Další zdroje

PETÁKOVÁ, J. *Matematika příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám.* Praha: Prometheus, 2013, s. 138.

ČERMÁK, P. et al. *Odmaturuj z matematiky 1.* Brno: Didaktis, 2004, s. 26.

POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus, 2015, s. 193 – 196.

6.6. Cvičení

Řešení → *6. 6*

1. Užitím Moivreovy věty umocněte daná komplexní čísla a výsledek následně převeďte do algebraického tvaru. Mocniny také graficky znázorněte.

a) $(1+i)^5$,

b) $(1-i\sqrt{2})^5$,

c) $(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)^5$.

2. Vypočítejte všechny druhé komplexní odmocniny daných komplexních čísel. Následně odmocniny graficky znázorněte.

a) $3+4i$,

b) i,

c) $\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$.

6.7. Kontrolní otázky

Správně odpovědi viz Klíčové pojmy kapitoly.

1) *Jak můžeme umocnit komplexní číslo v goniometrickém tvaru? Napište vzorec.*

2) *Jak můžeme odmocnit komplexní číslo v goniometrickém tvaru? Napište vzorec.*

Zápisky:

7 Binomická rovnice

7.1. Cíl

Cíle kapitoly:

- Seznámení s binomickou rovnicí a jejím použitím při řešení rovnic v oboru komplexních čísel.

7.2. Studijní čas

Kapitola není příliš obsáhlá, avšak vyřešení příkladů je časově náročnější. Vymezte si na prostudování kapitoly 2 – 3 hodiny.

7.3. Průvodce studiem

V této kapitole, jak již z názvu vyplývá, se budeme zabývat binomickou rovnicí. Konkrétně se podíváme, jak vypadá obecný tvar binomické rovnice. Zjistíme, že speciální případy binomické rovnice známe již ze základní školy. Podíváme se také na to, jak binomickou rovnici v obecném tvaru řešit. V neposlední řadě se také podíváme na geometrické znázornění kořenů binomické rovnice.

Podívejme se první tedy na obecný tvar binomické rovnice v definici Definice 17. Binomická rovnice.

Definice 17. Binomická rovnice

Obecný tvar binomické rovnice je rovnice $ax^n + b = 0$, kde a, b jsou libovolná reálná či komplexní čísla. Dále předpokládáme, že $a, b \neq 0$ a $n \in \mathbb{N}$.

Speciální případy binomické rovnice

Podívejme se na speciální případy binomické rovnice, které již známe:

- $n = 1$: rovnice pak má tvar $ax + b = 0$ (lineární rovnice).
- $n = 2$: rovnice má tvar $ax^2 + b = 0$ (kvadratická rovnice).

Řešení binomické rovnice

Jak takovouto rovnici ale řešit? Každou binomickou rovnici můžeme převést do normovaného tvaru $x^n + \frac{b}{a} = 0$. Pro jednoduchost provedeme substituci $c = \frac{b}{a}$, tedy $x^n + c = 0$. Následně c převedeme na pravou stranu rovnice. Tím získáme tvar rovnice $x^n = -c$. Nyní již odmocníme celou rovnici n-tou odmocninou:

$$x = \sqrt[n]{-c}$$

Nyní využijeme znalost odmocňování komplexních čísel (Definice 16. Odmocňování komplexních čísel). Použijeme nám již známý vztah pro odmocňování komplexních čísel:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right), k \in \mathbb{Z}.$$

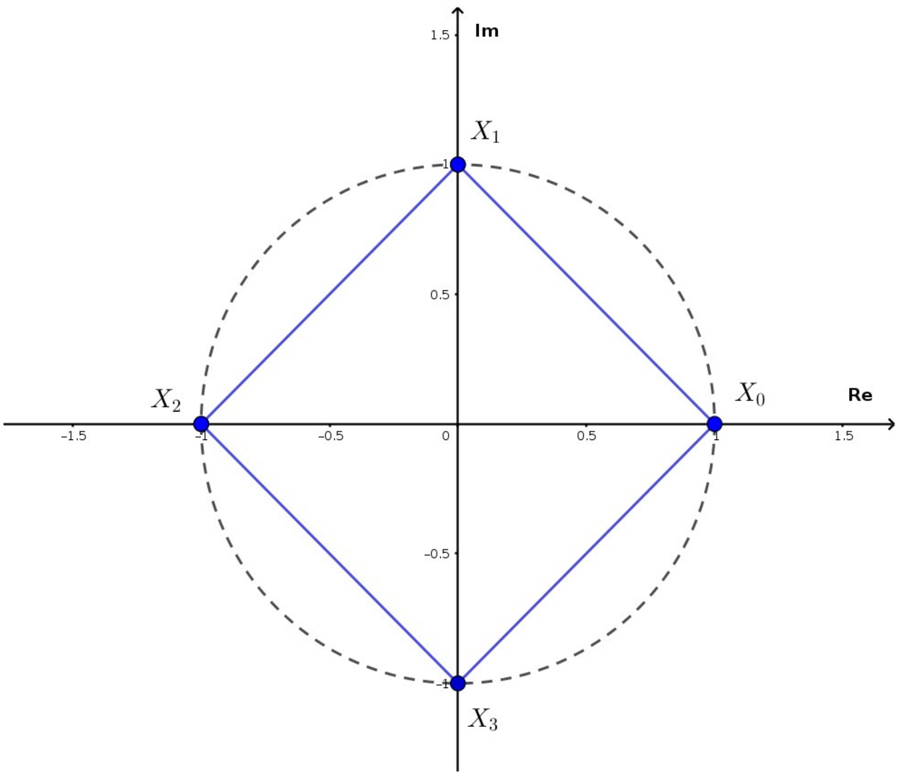
Obrazy kořenů binomické rovnice tvoří vrcholy pravidelného n–úhelníku, který je vepsán do kružnice se středem v počátku a poloměrem $r = \sqrt[n]{-c}$. Podívejme se na obrázek Obrázek 26: Kořeny binomické rovnice, na kterém jsou znázorněny kořeny rovnice $x^4 - 1 = 0$. Můžeme vidět, že se jedná o pravidelný čtyřúhelník, který je vepsán kružnici o poloměru $r = 1$. Jeho kořeny a zároveň vrcholy pravidelného čtyřúhelníku, což je vidět na první pohled již ze samotné rovnice, jsou

$$x_1 = 1,$$

$$x_2 = -1,$$

$$x_3 = i,$$

$$x_4 = -i.$$



Obrázek 26: Kořeny binomické rovnice

Vzorový příklad:

Vypočítejte kořeny rovnice $x^6 - 1 = 0$ a následně kořeny graficky znázorněte viz obrázek 27.

Všimněme si, že imaginární složka chybí. To znamená, že úhel bude $\varphi = 0°$. Tedy binomickou rovnici si můžeme upravit:

$$x_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Nyní již budeme hledat kořeny $x_0, ..., x_5$ pro $k = 0, ..., 5$.

$$k = 0 : x_0 = \sqrt[6]{|1|}\left(\cos 0° + i\sin 0°\right) = 1,$$

$$k = 1 : x_1 = \left(\cos 60° + i\sin 60°\right) = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

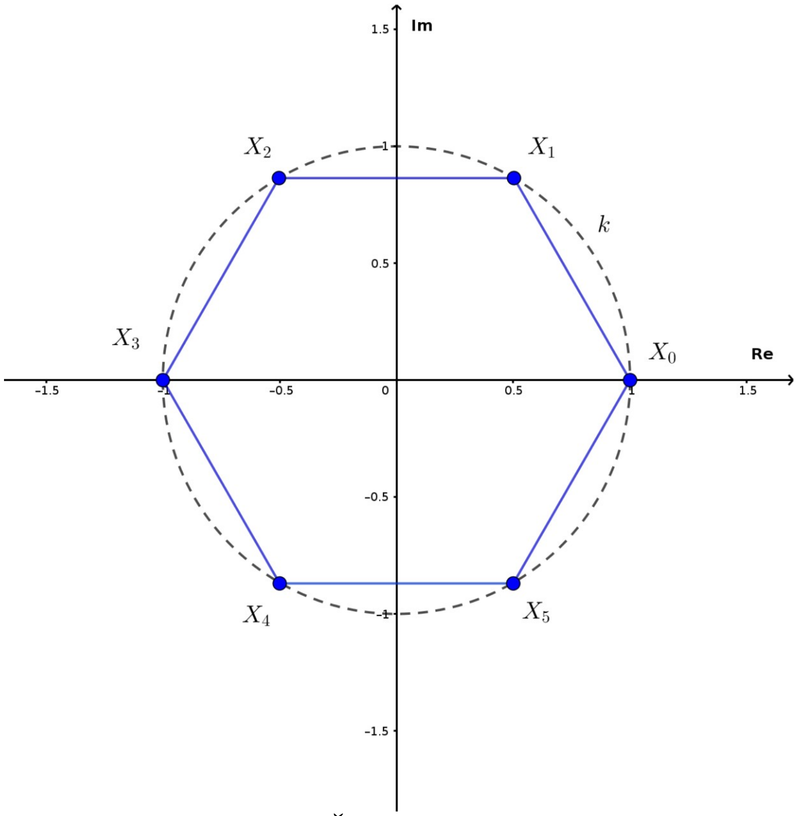
$$k = 2 : x_2 = \left(\cos 120° + i\sin 120°\right) = -1 + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 3 : x_3 = \left(\cos 180° + i\sin 180°\right) = -1,$$

$$k = 4 : x_4 = \left(\cos 240° + i\sin 240°\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 5 : x_5 = \left(\cos 300° + i\sin 300°\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Připomeňme si, že obrazy kořenů binomické rovnice tvoří vrcholy pravidelného n–úhelníku, který je vepsán do kružnice se středem v počátku a poloměrem $r = \sqrt[n]{-c}$. Tedy v tomto případě se bude jednat o kružnici $k(O, r = 1)$ viz obrázek 27, na kterou naneseme nalezené kořeny binomické rovnice jakožto obrazy komplexních čísel, které tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníku.



Obrázek 27: Binomická rovnice_Šestiúhelník

7.4. Shrnutí

Seznámili jsme se s binomickou rovnicí.

Klíčové pojmy kapitoly

Binomická rovnice:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right), k \in \mathbb{Z}.$$

7.5. Další zdroje

PETÁKOVÁ, J. *Matematika příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám.* Praha: Prometheus, 2013, s. 140.

7.6. Cvičení

Řešení → *7. 6*

1. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{C}$. Výsledek zapište v algebraickém i goniometrickém tvaru. Kořeny znázorněte v Gaussově rovině.

a) $x^3 + 27 = 0$

b) $x^3 - 27 = 0$

c) $x^4 - 16 = 0$

2. Řešte rovnice $x^4 - \sqrt{8} + i\sqrt{8} = 0$, kde $x \in \mathbb{C}$.Výsledek zapište v goniometrickém tvaru. Kořeny znázorněte v Gaussově rovině.

7.7. Kontrolní otázky

Správně odpovědi viz Klíčové pojmy kapitoly

1) *Jak vypadá binomická rovnice?*

Zápisky:

8 Využití komplexních čísel

8.1. Cíl

Cíle kapitoly:

- Seznámení s využitím komplexních čísel.

8.2. Studijní čas

Tato kapitola je velmi náročná po obsahové stránce. Jedná se o nadstavbu učiva na střední škole. Pro prostudování této kapitoly a splnění cvičení bude zapotřebí minimálně 3 – 4 hodiny. U této kapitoly je vhodné dávat si přestávky. Pro pochopení je také nezbytné procvičit si více příkladů.

8.3. Průvodce studiem

Tato kapitola bude jakousi nadstavbou nad středoškolskou látkou. Seznámíme se s využitím komplexních čísel, jak napříč různé obory a odvětví, tak ale také využití z hlediska geometrického. Naučíme s využitím komplexních čísel zobrazovat geometrické útvary.

Když jste se v minulosti učili o jiných číselných oborech, pravděpodobně vám bylo jasné, k čemu vám znalost těchto oborů bude. Už v předškolním věku jsme se seznámili, ačkoliv nevědomě, s přirozenými čísly, které jsme vyjadřovali prsty na rukou. Následně jsme na základní škole zjistili, že někdy potřebujeme i záporná čísla na vypočítání množství, které nám chybí. Brzo jsme zjistili, že ani celá čísla nebudou stačit. Potřebujeme někdy vyjádřit skutečnost, že jsme se s někým rozdělili o polovinu. Ještě na základní škole dojdeme k tomu, že ani racionální čísla nejsou dostačující. A tak, když začneme počítat obvod a obsah kruhu, se setkáváme s čísly reálnými. Umět vypočítat obvod či obsah bazénu, je pro nás užitečné. K čemu nám ale jsou komplexní čísla?

Komplexní čísla jsou velice důležitá. Díky znalosti komplexních čísel můžeme každý den používat elektrickou energii, bez které si již dnes neumíme představit život. Například takové napětí a impedance ve střídavých obvodech jsou velice důležité komplexní veličiny, bez kterých nejde efektivně se střídavými obvody pracovat. Ne každý z nás ale bude pracovat s elektrickým obvodem.

Využití komplexních čísel

Znalost komplexních čísel pro vás bude také potřebná, pokud se rozhodnete, že se stanete programátory. Komplexní čísla mají totiž také jednu důležitou geometrickou vlastnost. Vezměme si Gaussovu rovinu a nějaký bod v této rovině. Vynásobíme-li toto číslo kladným reálným číslem, budeme měnit jeho vzdálenost od počátku souřadnic. Pokud ho vynásobíme záporným číslem, obraz komplexního čísla bude souměrný podle středu soustavy souřadnic. Co se stane, pokud ho vynásobíme komplexních číslem? To již víme z násobení dvou komplexních čísel. Otočí se kolem středu o nějaký úhel, jehož velikost závisí na tom, jakým číslem násobíme. Samozřejmě pokud máme několik málo bodů, po ruce kružítko, potom nějakou rotaci zvládneme v celku jednoduše sami. Co ale ve chvíli, kdy chceme po grafickým editoru, aby pootočil celý obrázek? Je nutné, aby počítač přepočítal nové souřadnice pro každý bod daného obrázku a právě vynásobením komplexním číslem je ta nejjednodušší a nejpřirozenější varianta, jak to udělat. Pomocí komplexních čísel je možné také popsat rotaci v prostoru. Tedy každá 3D hra využívá násobení komplexních čísel, neboť každé ohlédnutí postavy za záda, je ve skutečnosti dané násobení.

Je nespočetná řada využití komplexních čísel. Využívají ji lidé, kteří navrhují reproduktory a zvuková zařízení. Lidé, kteří sestrojují solární panely. Fyzici, architekti a inženýři, … Pravdou však zůstává, že ne všichni, kteří se komplexní čísla na střední škole učí, je budou ještě někdy znovu muset umět používat. Nicméně je dobré mít o nich představu vzhledem k jejich velice širokému zastoupení v technických oborech.

8.4. Geometrické využití komplexních čísel

Jak již bylo řečeno, tato část je již určitou nadstavbou učiva na střední škole. Přesto když si projdete tuto podkapitolu se vzorovým příkladem, zjistíte, že s něčím podobným jste se již setkal v analytické geometrii. Rozdíl bude v tom, že nyní pracujeme s Gaussovou rovinou.

Lehce se tedy podíváme na zmiňované využití komplexních čísel v geometrii. Konkrétně se společně podíváme na lineární funkci komplexní proměnné (Definice 18. Lineární funkce komplexní proměnné) a podobná zobrazení (Tabulka 3. Podobná zobrazení).

Definice 18. Lineární funkce komplexní proměnné

Nechť $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$. Funkci f definovanou na $\mathbb{S}$ předpisem

$$f(z) = az + b, \text{ kde } z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R} \text{ a } x, y \neq \infty\,,$$

nazýváme lineární funkcí komplexní proměnné. Přičemž $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \infty$.

Nyní společně budeme tuto lineární funkci zkoumat. Podíváme se, jaké případy nastanou, když za a, b dosadíme pevné hodnoty. Zajímat nás bude to, kam lineární funkce body, na kterou funkci pustíme, „přenese“. Také nás ale budou zajímat body, které budou zůstávat na svém místě, tj. body, které jsou invariantní.

Podívejme se tedy na následující tabulku Tabulka 3. Podobná zobrazení, ve které jsou vypsány všechny možnosti.

Tabulka 3. Podobná zobrazení

<table>
<tr><th colspan="2">Hodnoty proměnných a, b</th><th>Podobné zobrazení</th><th>Popis tohoto zobrazení</th></tr>
<tr><td colspan="2">$a = 1, b = 0$</td><td>IDENTITA</td><td>Toto zobrazení má nekonečně mnoho invariantních bodů. Všechny body se totiž zobrazí samy na sebe.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a = 1, b \neq 0$</td><td>POSUNUTÍ</td><td>Zobrazení nemá žádný invariantní bod. Všechny body se posunou ve směru posunutí.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$a \neq 1$</td><td>$|a| = 1, arg(a) \neq 0$</td><td>OTOČENÍ</td><td>Zobrazení má právě jeden invariantní bod, kolem kterého se ostatní body otáčí o úhel $\varphi = arg(a)$.</td></tr>
<tr><td>$\varphi = arg(a) = 0$</td><td>STEJNOLEHLOST</td><td>Zobrazení má právě jeden invariantní bod, který je současně středem stejnolehlosti s koeficientem a.</td></tr>
<tr><td>$|a| \neq 1, arg(a) \neq 0$</td><td>OBECNÝ PŘÍPAD</td><td>Zobrazení je složené z otočení o úhel $\varphi = arg(a)$ a stejnolehlosti s koeficientem $|a|$.</td></tr>
</table>

Připomenutí:

K tomu, abychom zvládli ověřit výpočtem, čemu je roven argument $\varphi = arg(a)$, budeme potřebovat si zopakovat Kosinovu větu a výpočet vzdálenosti bodů. Připomeňme si tedy následující dvě věty: Věta 6.: Kosinova věta a Věta 7.: Vzdálenost bodů.

Věta 6.: Kosinova věta

Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délku a, b, c a jehož vnitřní úhel proti straně BC má velikost α, platí $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos$.

Věta 7.: Vzdálenost bodů

Vzdálenost $|AB|$ dvou bodů $A = [a_1 + a_2], B = [b_1, b_2]$ v rovině je dána vztahem $|AB| = \sqrt{(b_1 + a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Společně si projdeme vzorové příklady.

Vzorový příklad:

Určete typ podobného zobrazení, které zobrazí bod $Z_1 = 5 + 2i$ na bod $W_1 = -1$ a bod $Z_2 = 3 + 6i$ na $W_2 = -3 + 4i$. Následně graficky svůj výsledek ověřte viz obrázek 28.

Napíšeme si, jak se zobrazí konkrétní body pomocí lineární funkce, kterou jsme definovali výše (Definice 18. Lineární funkce komplexní proměnné). Tedy:

$$W_1 = aZ_1 + b,$$

$$W_2 = aZ_2 + b.$$

Do této soustavy nyní dosadíme body a vyřešíme ji klasicky, jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$-1 = a \cdot (5 + 2i) + b,$$

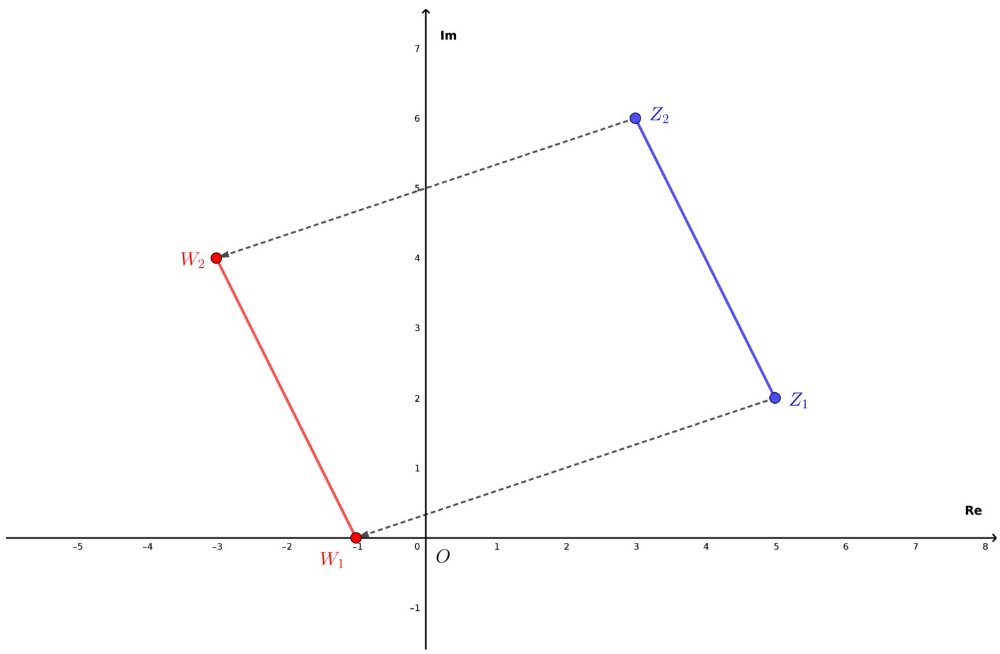
$$-3 + 4i = a \cdot (3 + 6i) + b,$$

Nyní obě rovnice odečteme a porovnáme reálnou a imaginární část.

$$-1 + 3 - 4i = 5a + 2ia - 3a - 6ia,$$

$$a = 1,\ b = -6 - 2i.$$

Podíváme-li se do tabulky (Tabulka 3. Podobná zobrazení), tak vidíme, že $a = 1, b \neq 0$. Jedná se tedy o posunutí. Pokud výsledek porovnáme s grafickým znázorněním Obrázek 28: Posunutí, zjistíme, že se opravdu jedná o posunutí.



Obrázek 28: Posunutí

Z obrázku 28 je patrné, že se opravdu jedná o posunutí s vektorem posunutí $\overrightarrow{Z_1W_1}$. Jak vidíme, některá podobná zobrazení se dají lehce zjistit již ze samotné konstrukce. U některých se vyplatí, řešit je početně.

Vzorový příklad:

Určete typ podobného zobrazení, které zobrazí bod $Z_1 = 0$ na bod $W_1 = 0$ a bod $Z_2 = 1$ na $W_2 = i$. Následně graficky svůj výsledek ověřte viz obrázek 29.

Napíšeme si, jak se zobrazí konkrétní body pomocí lineární funkce, kterou jsme definovali výše (Definice 18. Lineární funkce komplexní proměnné). Tedy:

$$W_1 = aZ_1 + b,$$

$$W_2 = aZ_2 + b.$$

Do této soustavy nyní dosadíme body a vyřešíme ji klasicky, jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$0 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0$$

$$i = a \cdot 1 + b \Rightarrow a = i$$

Nyní vypočítejme koeficient podobného zobrazení:

$$|a| = \sqrt{1} = 1.$$

Dále potřebujeme argument. Ten vypočítáme pomocí vzdálenosti bodů a Kosinově věty. Nejdříve se tedy podívejme na vzdálenost jednotlivých bodů zobrazení:

$$|W_1W_2| = \sqrt{(0-0)^2 + (0-1)^2} = 1,$$

$$|Z_1Z_2| = 1,$$

$$|Z_1W_1| = 0,$$

$$|Z_2W_2| = \sqrt{2},$$

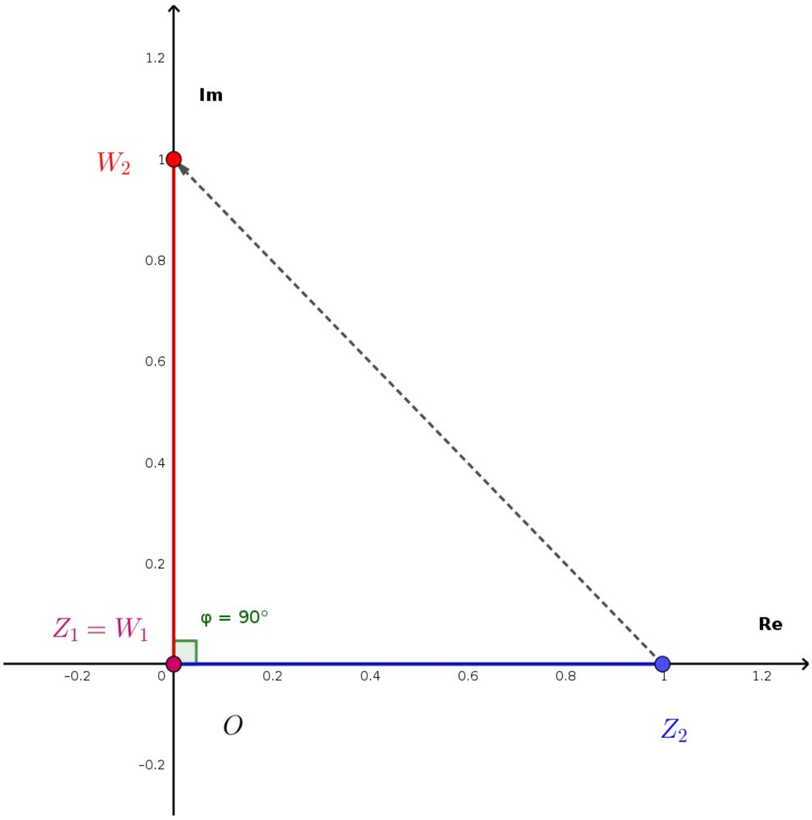
Ze vzdálenosti bodů je zřejmé, že bod Z_1 a bod W_1 splývají. Díky tomu nám body $Z_1(W_1), Z_2$ a W_2 tvoří trojúhelník, v kterém stačí vypočítat úhel $\varphi = |\measuredangle Z_2Z_1W_2|$.

$$c = |Z_2W_2| = \sqrt{2}, a = |Z_1Z_2| = 1, b = |W_1W_2| = 1.$$

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1^2 + 1^2 - \sqrt{2}^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 0$$

$$\varphi = 90°.$$

Podíváme-li se do tabulky (Tabulka 3. Podobná zobrazení), zjistíme, že se jedná o otočení, neboť podobné zobrazení splňuje podmínky: $|a| = 1, arg(a) \neq 0$. Opět z grafického znázornění viz obrázek 29 vidíme, že se opravdu jedná o otočení.



Obrázek 29: Otočení

Vzorový příklad:

Určete typ podobného zobrazení, které zobrazí bod $Z_1 = 1$ na bod $W_1 = 3$ a bod $Z_2 = i$ na $W_2 = 3i$. Následně graficky svůj výsledek ověřte viz obrázek 30.

Napíšeme si, jak se zobrazí konkrétní body pomocí lineární funkce, kterou jsme definovali výše (Definice 18. Lineární funkce komplexní proměnné). Tedy:

$$W_1 = aZ_1 + b,$$

$$W_2 = aZ_2 + b.$$

Do této soustavy nyní dosadíme body a vyřešíme ji klasicky, jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$3 = a \cdot 1 + b \Rightarrow b = 3 - a$$
$$3i = a \cdot i + b \Rightarrow 3i = ai + 3 - a$$
$$3(i-1) = a(i-1)$$
$$a = 3$$
$$b = 0$$

Stejně jako u předchozího vzorového příkladu řešíme vzdálenost bodů.

$$|W_1W_2| = 3\sqrt{2},$$
$$|Z_1Z_2| = \sqrt{2},$$
$$|Z_1W_1| = 2,$$
$$|Z_2W_2| = 2.$$

Vidíme, že žádné dva body nesplývají. Vezmeme si tedy počátek soustavy souřadnic $O = [0, 0]$ a vytvoříme si dva trojúhelníky $\triangle W_1OW_2$ a $\triangle Z_1OZ_2$. Spočítáme si vzdálenosti bodů v těchto trojúhelnících a následně úhly $\alpha = Z_1OZ_2$ a úhel $\beta = W_1OW_2$.

$$|OZ_1| = 1,$$
$$|OZ_2| = 1,$$
$$|Z_1Z_2| = \sqrt{2}$$
$$\alpha = 90°.$$

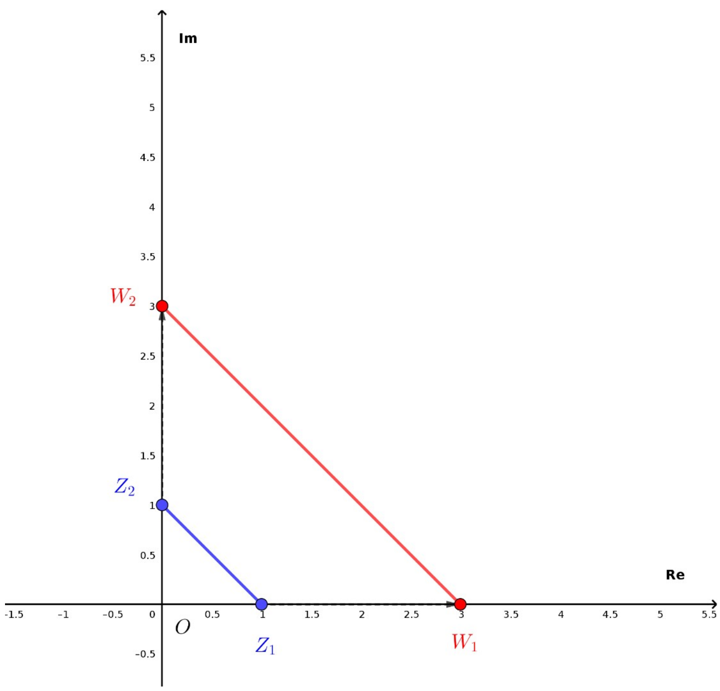
$$|OW_1| = 3,$$
$$|OW_2| = 3,$$
$$|W_1W_2| = 3\sqrt{2},$$

$$\beta = 90°.$$

Vidíme, že $\alpha = \beta$. Z toho plyne, že argument $\varphi = arg(a) = 0°$.

$$\varphi = \alpha - \beta = 90° - 90° = 0°$$

Z tabulky (Tabulka 3. Podobná zobrazení) je patrné, že se jedná o stejnolehlost, neboť $a = 3 \neq 0$ a $\varphi = 0$. Pokud si podobné zobrazení graficky znázorníme viz obrázek 30, vyjde nám opravdu stejnolehlost.



Obrázek 30: Stejnolehlost

Vzorový příklad:

Určete typ podobného zobrazení, které zobrazí bod $Z_1 = 1$ na bod $W_1 = 1$ a bod $Z_2 = i$ na $W_2 = i$. Následně graficky svůj výsledek ověřte viz obrázek 31.

Napíšeme si, jak se zobrazí konkrétní body pomocí lineární funkce, kterou jsme definovali výše (Definice 18. Lineární funkce komplexní proměnné). Tedy:

$$W_1 = aZ_1 + b,$$

$$W_2 = aZ_2 + b.$$

Do této soustavy nyní dosadíme body a vyřešíme ji stejně, jako předchozí úlohy.

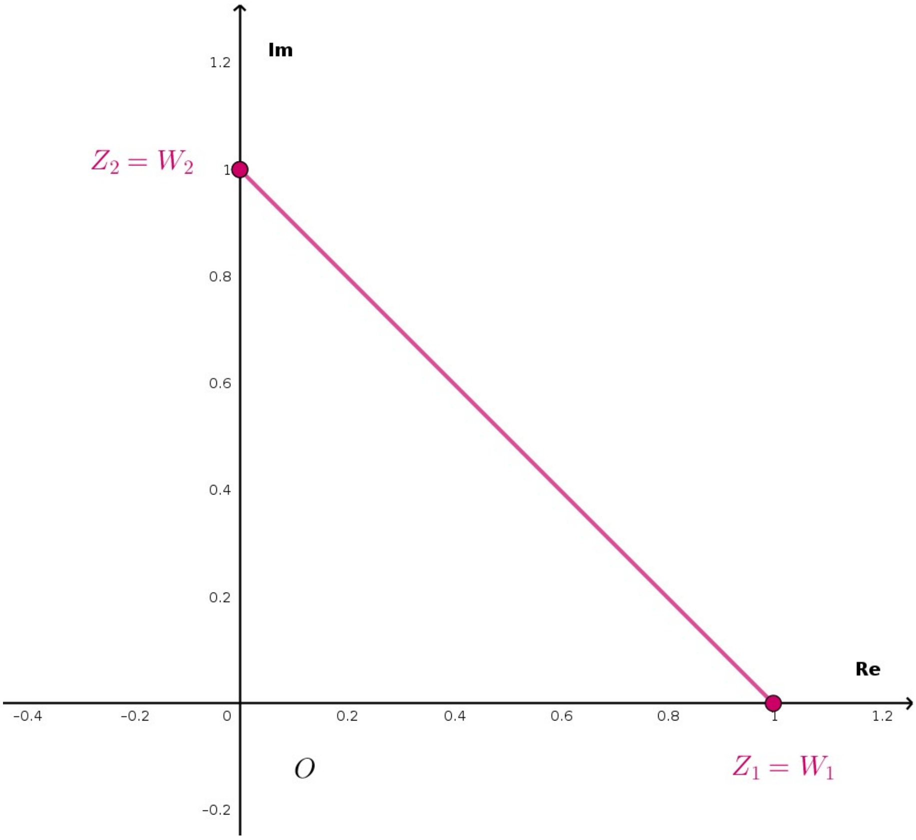
$$1 = a + b \Longrightarrow b = 1 - a,$$

$$i = ai + b,$$

$$i = ai + 1 - a,$$

$$a = 1, b = 0.$$

Z tabulky (Tabulka 3. Podobná zobrazení) je již zřejmé, o jaký typ podobného zobrazení se jedná. Stejně tak z grafického znázornění viz obrázek 31. Podobné zobrazení je tedy identita.



Obrázek 31: Identita

Vzorový příklad:

Určete typ podobného zobrazení, které zobrazí bod $Z_1 = 0$ na bod $W_1 = 0$ a bod $Z_2 = 1$ na $W_2 = 3i$. Následně graficky svůj výsledek ověřte viz obrázek 32.

Napíšeme si, jak se zobrazí konkrétní body pomocí lineární funkce, kterou jsme definovali výše (Definice 18. Lineární funkce komplexní proměnné). Tedy:

$$W_1 = aZ_1 + b,$$

$$W_2 = aZ_2 + b.$$

Do této soustavy nyní dosadíme body a vyřešíme ji stejně, jako předchozí úlohy.

$$0 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0$$
$$3i = a + b$$
$$3i = a + 0$$
$$a = 3i$$
$$b = 0$$

Nyní vypočítejme koeficient podobného zobrazení:

$$|a| = \sqrt{9} = 3.$$

Stejně jako u předchozích vzorových příkladů řešíme vzdálenost bodů.

$$|W_1W_2| = 3,$$
$$|Z_1Z_2| = 1,$$
$$|Z_1W_1| = 0,$$
$$|Z_2W_2| = \sqrt{10}.$$

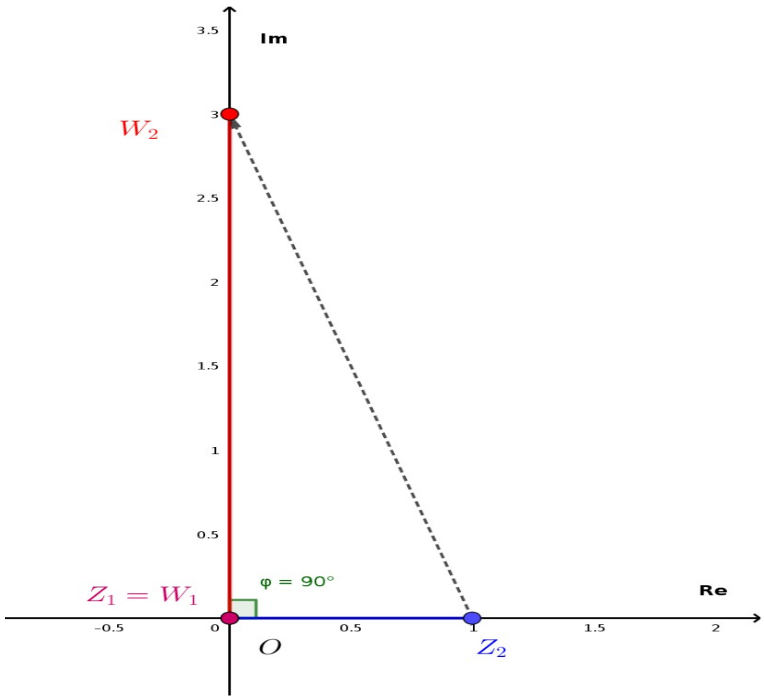
Ze vzdálenosti bodů je zřejmé, že bod Z_1 a bod W_1 splývají. Díky tomu nám body $Z_1(W_1)$, Z_2 a W_2 tvoří trojúhelník, v kterém stačí vypočítat úhel $\varphi = |\measuredangle Z_2Z_1W_2|$.

$$c = |Z_2W_2| = \sqrt{10}, a = |Z_1Z_2| = 1, b = |W_1W_2| = 3.$$

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1^2 + 3^2 - \sqrt{10}^2}{2 \cdot 1 \cdot 3} = 0,$$

$$\varphi = 90^\circ.$$

Podíváme-li se do tabulky (Tabulka 3. Podobná zobrazení), zjistíme, že se jedná o obecný případ, neboť podobné zobrazení splňuje podmínky: $|a| \neq 1, arg(a) \neq 0$. Konkrétně se jedná o podobné zobrazení složené z otočení o úhel $\varphi = 90^\circ$ a stejnolehlosti s koeficientem $|a| = 3$. Podíváme-li se na obrázek 32 můžeme vidět, pokud bychom otočili úsečku Z_1Z_2 o úhel a poté zvětšili úsečku 3x, dostaneme úsečku W_1W_2.



Obrázek 32: Obecný případ

8.5. Shrnutí

Seznámili jsme se s využitím komplexních čísel.

Klíčové pojmy kapitoly:

Lineární funkce komplexní proměnné: nechť $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Funkci f definovanou na $\mathbb{S}$ předpisem

$$f(z) = az + b, \text{ kde } z = x + iy, x, y \in \mathbb{R} \text{ a } x, y \neq \infty\,,$$

nazýváme lineární funkcí komplexní proměnné. Přičemž $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \infty$.

8.6. Cvičení

Řešení →*8. 6*

1. Určete typ podobného zobrazení, které zobrazí bod $Z_1 = 2$ na bod $W_1 = 2$ a bod $Z_2 = 3$ na $W_2 = 3i$. Následně graficky svůj výsledek ověřte.

2. Určete typ podobného zobrazení, které zobrazí bod $Z_1 = 0$ na bod $W_1 = 0$ a bod $Z_2 = 4$ na $W_2 = 4i$. Následně graficky svůj výsledek ověřte.

3. Určete typ podobného zobrazení, které zobrazí bod $Z_1 = 1$ na bod $W_1 = 1 + 4i$ a bod $Z_2 = 4$ na $W_2 = 4 + 4i$. Následně graficky svůj výsledek ověřte.

4. Určete typ podobného zobrazení, které zobrazí bod $Z_1 = 2$ na bod $W_1 = 4$ a bod $Z_2 = 2i$ na $W_2 = 4i$. Následně graficky svůj výsledek ověřte.

5. Určete typ podobného zobrazení, které zobrazí bod $Z_1 = 1 + i$ na bod $W_1 = 1 + i$, bod $Z_2 = 4$ na $W_2 = 4$ a bod $Z_3 = 4i$ na $W_3 = 4i$. Následně graficky svůj výsledek ověřte.

8.7. Kontrolní otázky

Správně odpovědi viz Klíčové pojmy kapitoly: a Tabulka 3. Podobná zobrazení.

1) *Co je to funkce lineární proměnné?*

2) *Jaká rozlišujeme podobná zobrazení podle hodnot proměnných a, b?*

Zápisky:

9 Závěr

Závěrem tohoto distančního textu můžeme říct, že komplexní čísla mají široké využití v technických oborech. Ne všichni budou znalost komplexních čísel dále využívat, ale dozajista všichni budou každodenně využívat toho, že komplexní čísla byla objevena, aniž by si to vůbec uvědomovali. Komplexní čísla lidem zpříjemňují život. Je to bezesporu pro dnešní civilizaci důležitý číselný obor.

I když nebudou komplexní čísla potřebné ve vaší budoucí profesi, jsou nanejvýš zajímavé a do jisté míry otevírají nové možnosti přemýšlení. Již se s nimi setkáváme na základní škole.

Ať už to bude obor čísel, kterým se budete zabývat hlouběji nebo se s ním pouze krátce setkáte na střední škole, budete vědět, že ani reálná čísla dnešní civilizaci nestačí. Ve světě technologií, elektřiny jsou reálná čísla nedostatečná. Mají v sobě „mezery“, které komplexní čísla zaplňují. Když se řekne slovo „imaginární“ budete vědět, že to vždy nemusí znamenat „neexistující, smyšlené“, ale že například spojení imaginární čísla můžou popisovat skutečné děje. V neposlední řadě díky této znalosti můžete odkrýt alespoň malinkou část tajemství, jak fungují počítačové hry, jak se pohybují postavy, za které hrajete. A to je v celku zajímavé.

Klíč k řešení

1. 6 Zavedení komplexních čísel. *Zpět k zadání* → *Cvičení*

1. a) $a = 2, b = 1$. b) $a = 0, b = 4$. c) $a = \sqrt{10}, b = 1$. d) $a = 0, b = 0$. e) $a = 0, b = 0$. f) $a = \frac{4}{3}, b = \frac{-2}{3}$. g) $a = 0, b = 1$.

2. a) Obecně komplexní. b) Ryze imaginární. c) Obecně komplexní. d) Reálné. e) Reálné. f) Obecně komplexní. g) Ryze imaginární.

3. a) $z_1 = z_3$. b) $z_2 = z_5$. c) Stejné jako a). d) $z_4 = z_6$. e) Stejné jako b). f) Stejné jako d). g) Není žádnému rovno. h) Není žádnému rovno.

2. 6 Základní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru. *Zpět k zadání* → *Cvičení*

1. a) $1 + i$. b) $2i$. c) $-3i$.d) $2i$.e) $2i - 2$.f) -4. g) $-0,25$. h) $-\frac{1}{4(i+1)}$. i) $5i$. j) $3 + i$. k) $i\sqrt{3}$.

2. a) $11i - 28$. b) $18 + 16i$. c) $2i - \frac{7}{2}$. d) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + i\sqrt{6}$. e) $\frac{3 - 11i}{13}$. f) $-\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$. g) $5 - i$. h) 0. i) 2.

3. a) $-(1 + i)$. b) $3i - 9$. c) $-\sqrt{10} - i\sqrt{2}$. d) $-6i$. e) $\frac{-i - 6}{2}$.

4. a) $1 - i$. b) $9 + 3i$. c) $\sqrt{10} - i\sqrt{2}$. d) $-6i$. e) $3 - \frac{i}{2}$.

5. a) $\frac{1 - i}{2}$. b) $\frac{3 + i}{30}$. c) $\frac{\sqrt{10} - i\sqrt{2}}{12}$. d) $-\frac{i}{6}$. e) $\frac{12 - 2i}{37}$.

6. a) $4 - 2i$. b) $\frac{3}{5} - i$. c) $1 + i$.

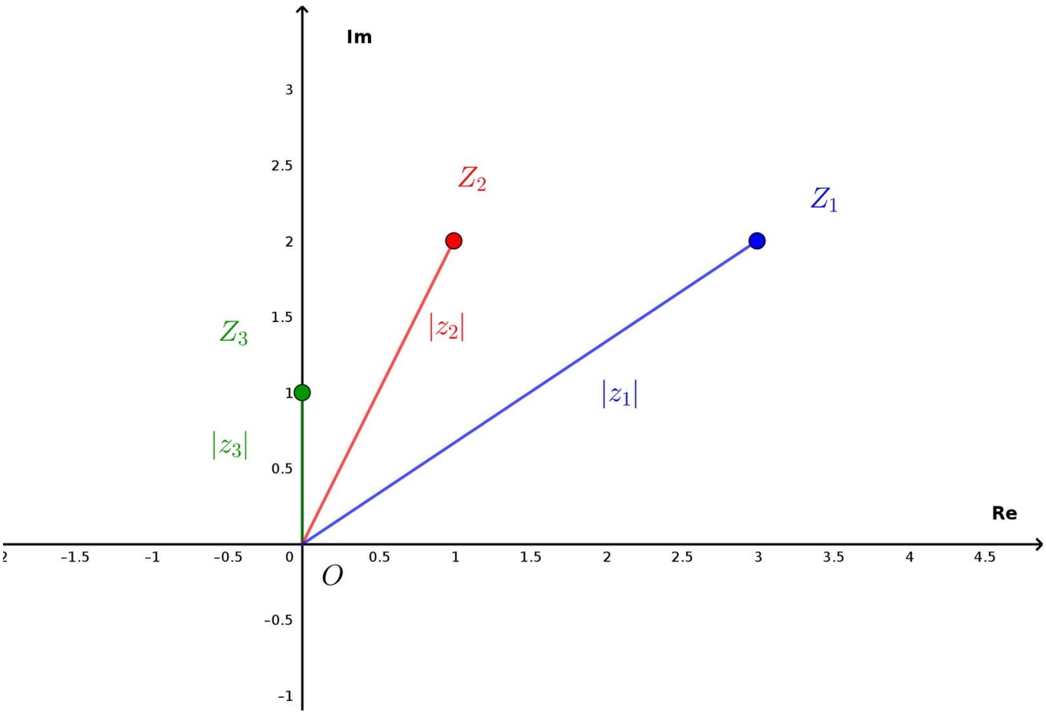
7. a) $1 - i$. b) $\frac{1 - 3i}{5}$. c) $\frac{-1 + 2i}{5}$.

8. a) $2i$. b) $2+i, -2-i$. c) $\sqrt{2}2(1+i), -\sqrt{2}2(1+i)$.

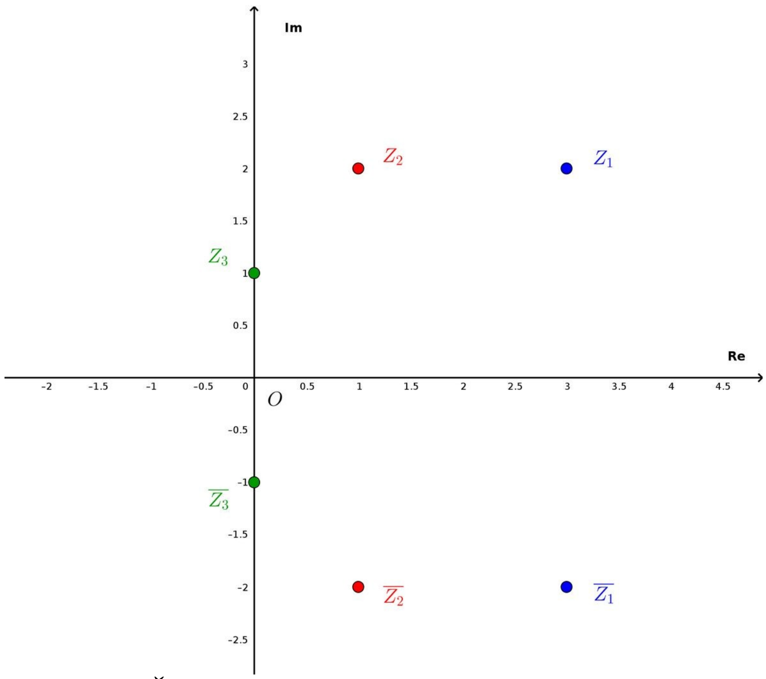
9. a) $2\sqrt{5}$. b) $\sqrt{38}$. c) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$. d) $13\sqrt{10}$. e) $\sqrt{11}$ f) $\dfrac{2\sqrt{33}}{11}$. g) $\dfrac{i+\sqrt{2}}{3}$.

3. 6 Geometrické vyjádření komplexních čísel. *Zpět k zadání* → *Cvičení*

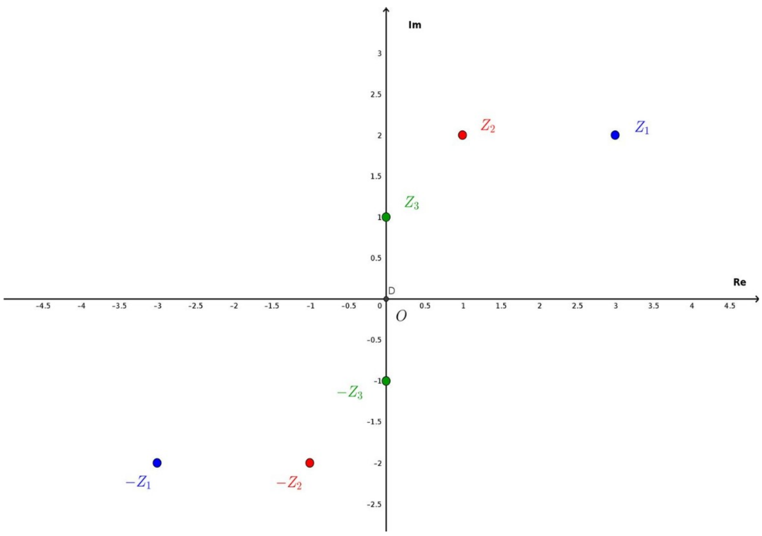
1.



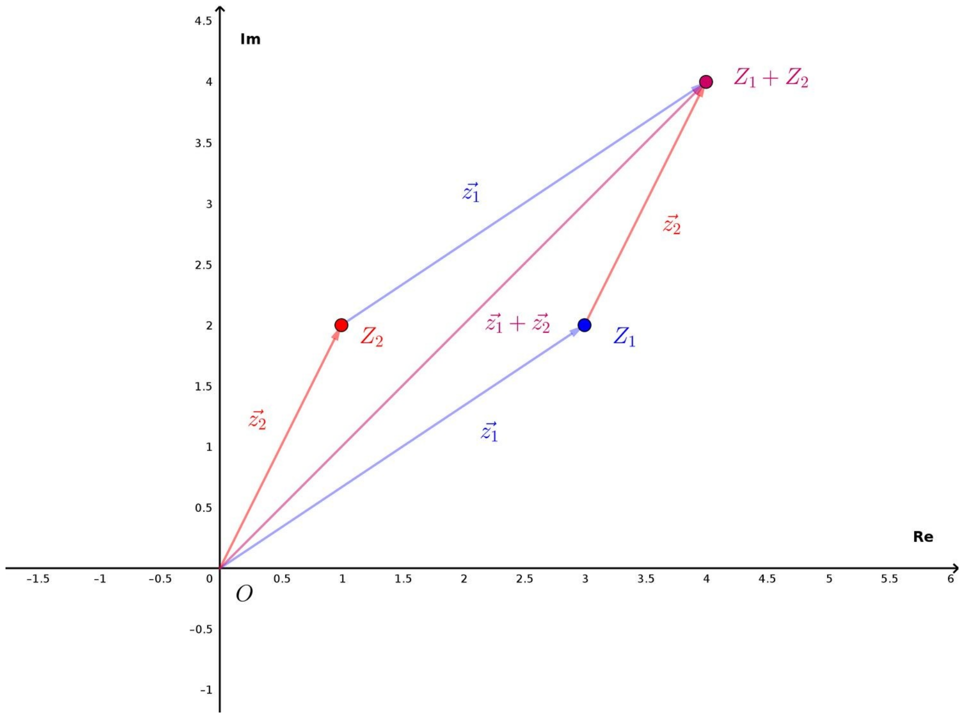
Obrázek 33: a) Absolutní hodnota komplexního čísla



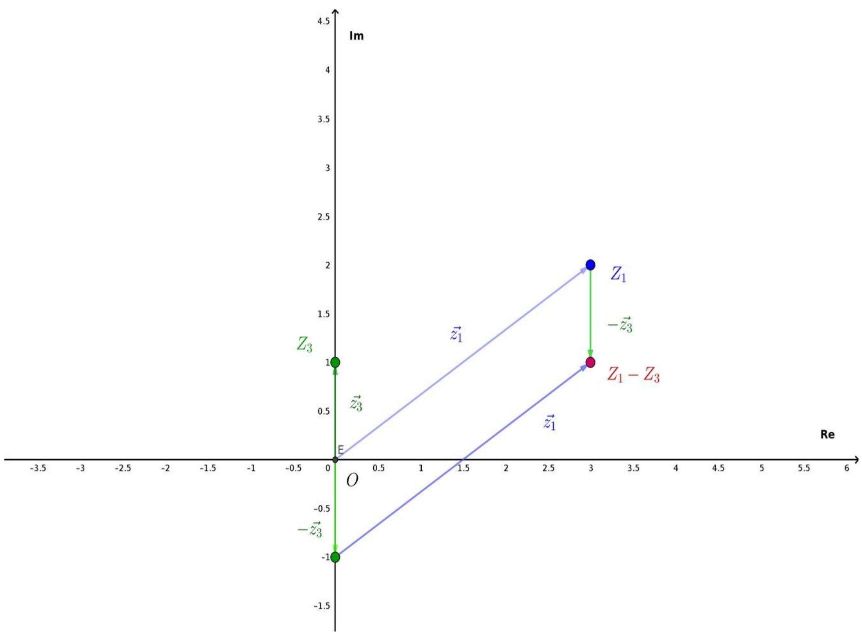
Obrázek 34: b) Čísla komplexně sdružená



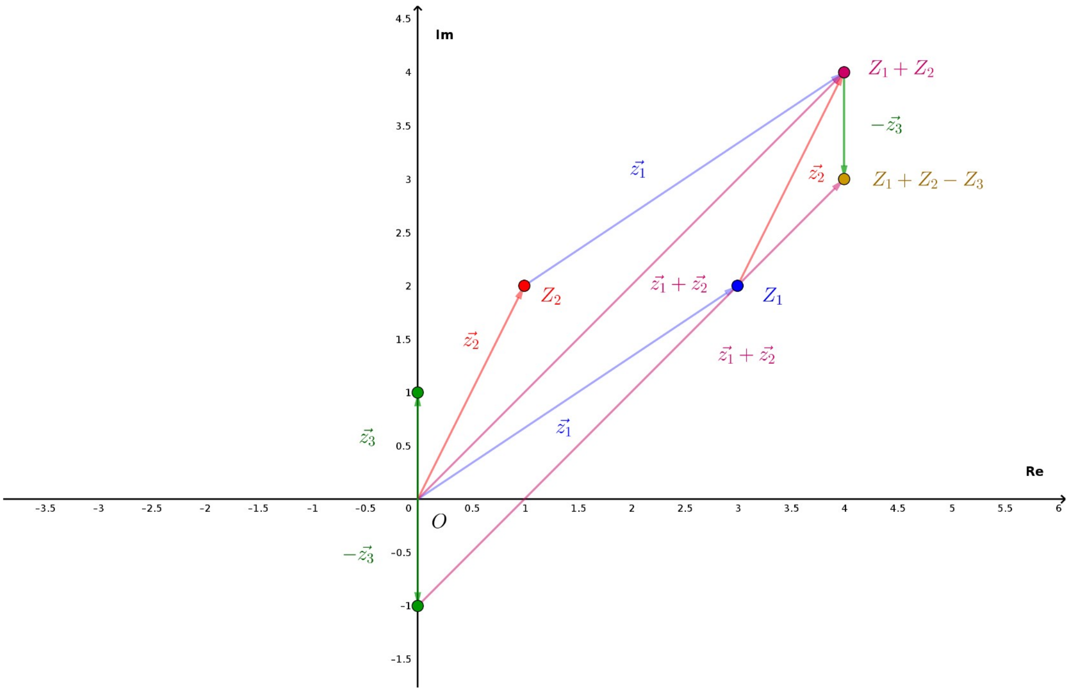
Obrázek 35: c) Komplexní čísla opačná



Obrázek 36: d) Součet komplexních čísel



Obrázek 37: e) Rozdíl komplexních čísel



Obrázek 38: f) Součet a rozdíl komplexních čísel

4. 6 Goniometrický tvar komplexních čísel. *Zpět k zadání* → *Cvičení*

1.

a) $|z| = 6, \varphi = 60^\circ, z_1 = 6(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 3 + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $|z| = 1, \varphi = 90^\circ, z_2 = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ = i$

c) $|z| = 16, \varphi = 0^\circ, z_3 = 16(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 16$

2.

a) $z_1 = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$,

b) $z_2 = \sqrt{34}(\cos 30^\circ 57' + i \sin 30^\circ 57'$,

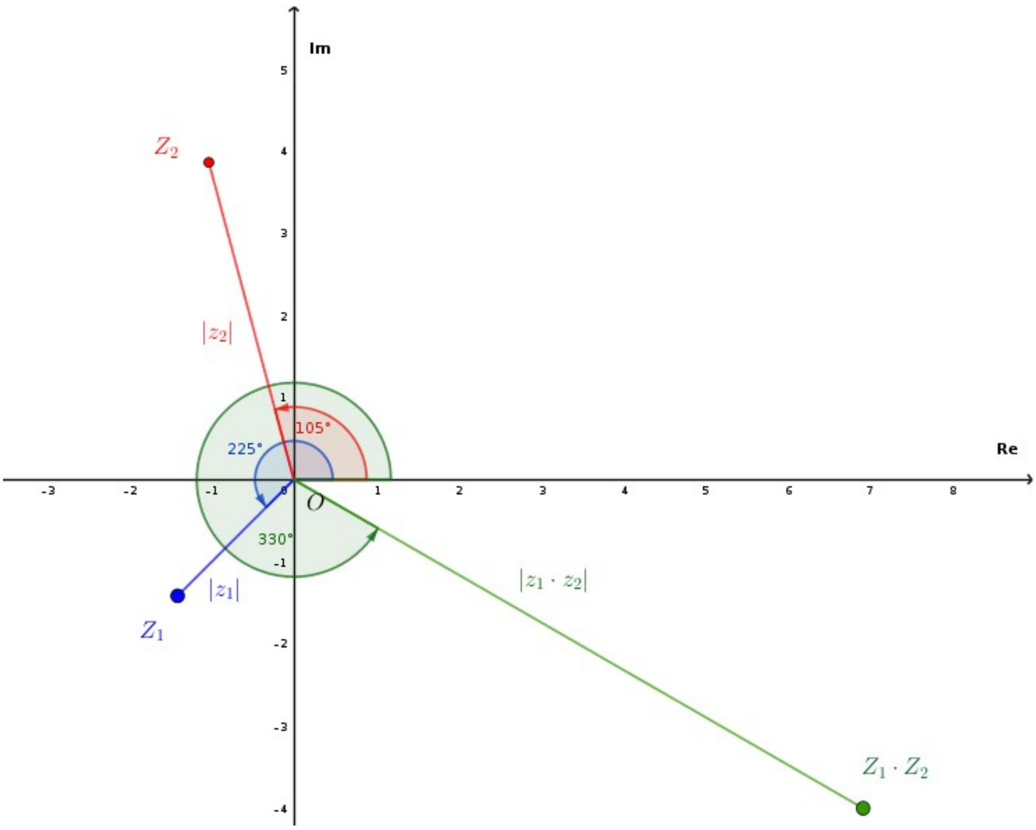
c) $z_3 = \sqrt{68}(\cos 14^\circ 2' + i \sin 14^\circ 2')$.

5. 6 Součin a podíl komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění.

Zpět k zadání → *Cvičení*

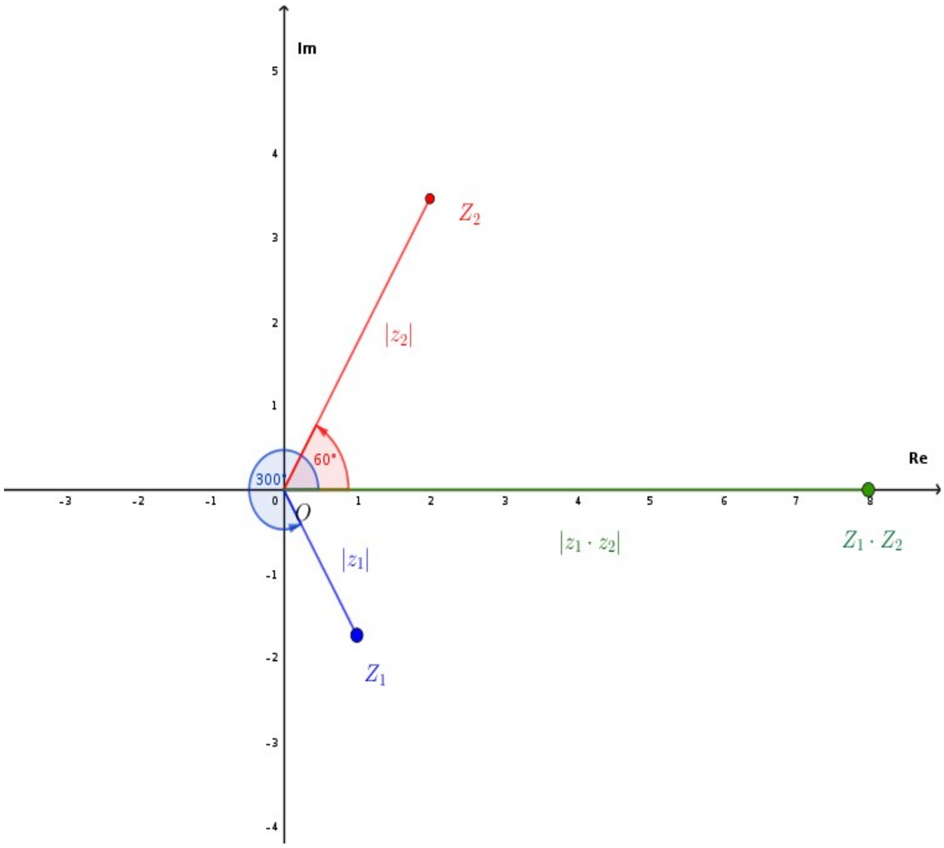
1.

a) $z_1 \cdot z_2 = 8(\cos 330° + i \sin 330°), z_1 \cdot z_2 = 4\sqrt{3} - 4i.$



Obrázek 39: a) Součin komplexních čísel

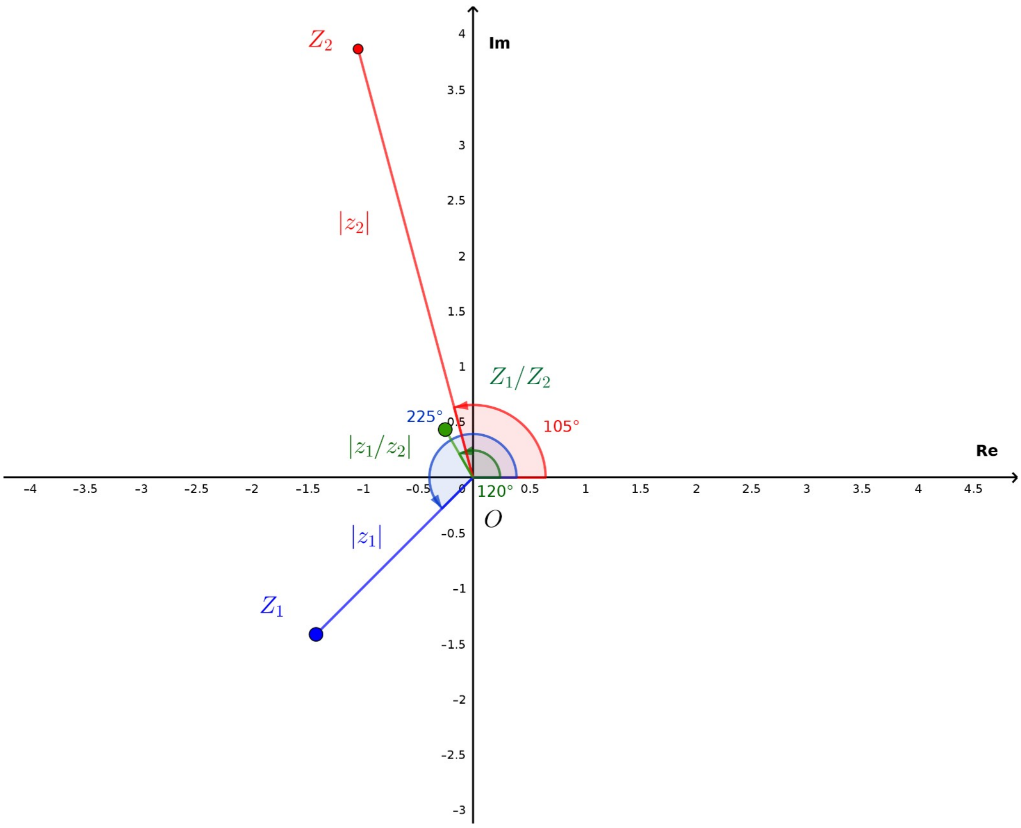
b) $z_1 \cdot z_2 = 8(\cos 360° + i \sin 360°), z_1 \cdot z_2 = 8.$



Obrázek 40: b) Součin komplexních čísel

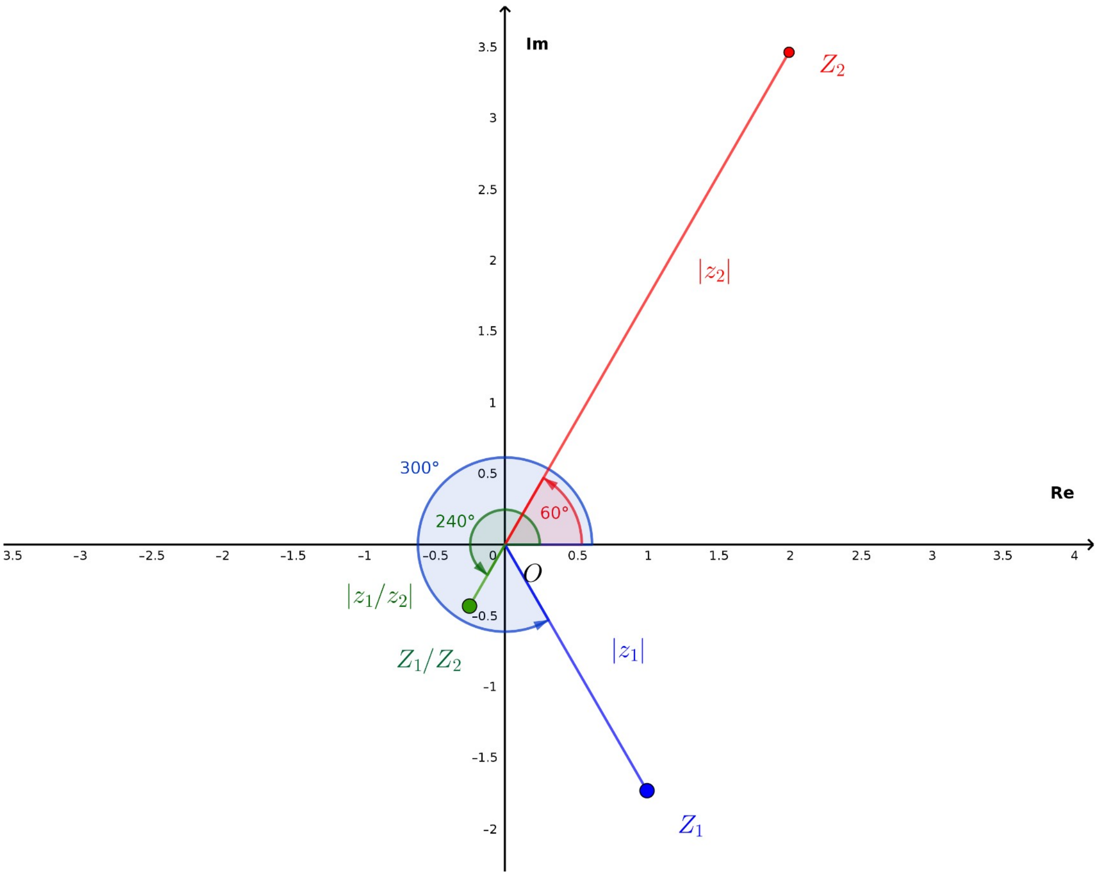
2.

a) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{2}(\cos 120° + i \sin 120°), \dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}.$



Obrázek 41: Podíl komplexních čísel

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{2}(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$, $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

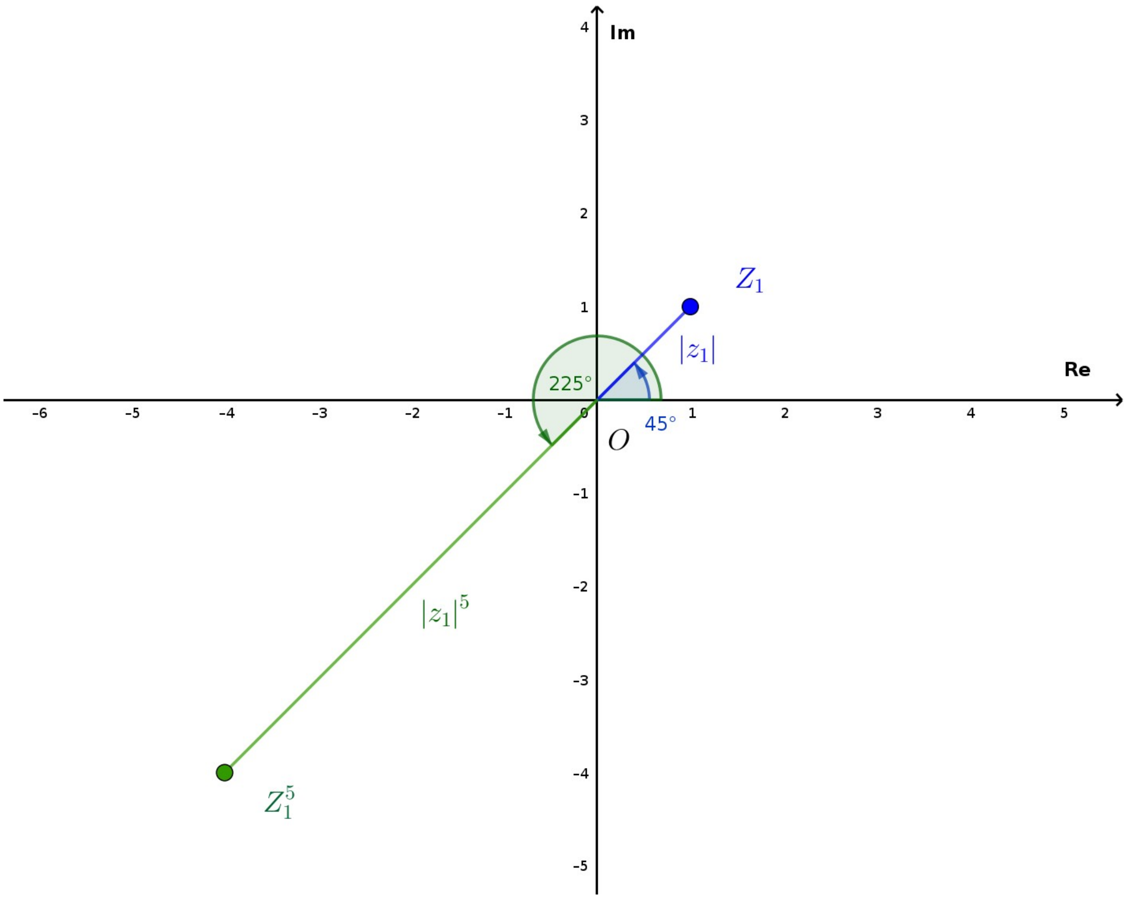


Obrázek 42: Podíl komplexních čísel

6. 6 Odmocňování a umocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru a jejich grafické znázornění. *Zpět k zadání → Cvičení*

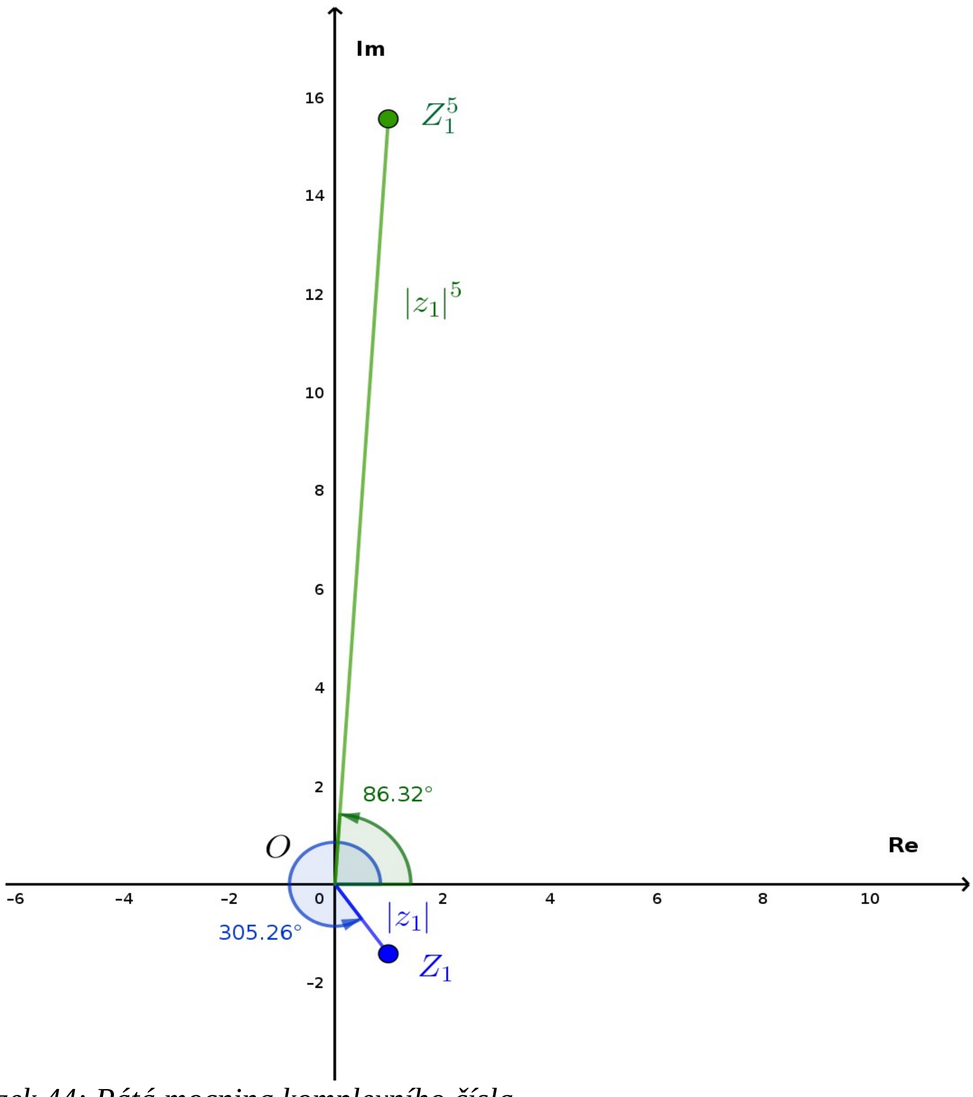
1.

a) $s = \sqrt{2}^5(\cos 225° + i \sin 225°)$,



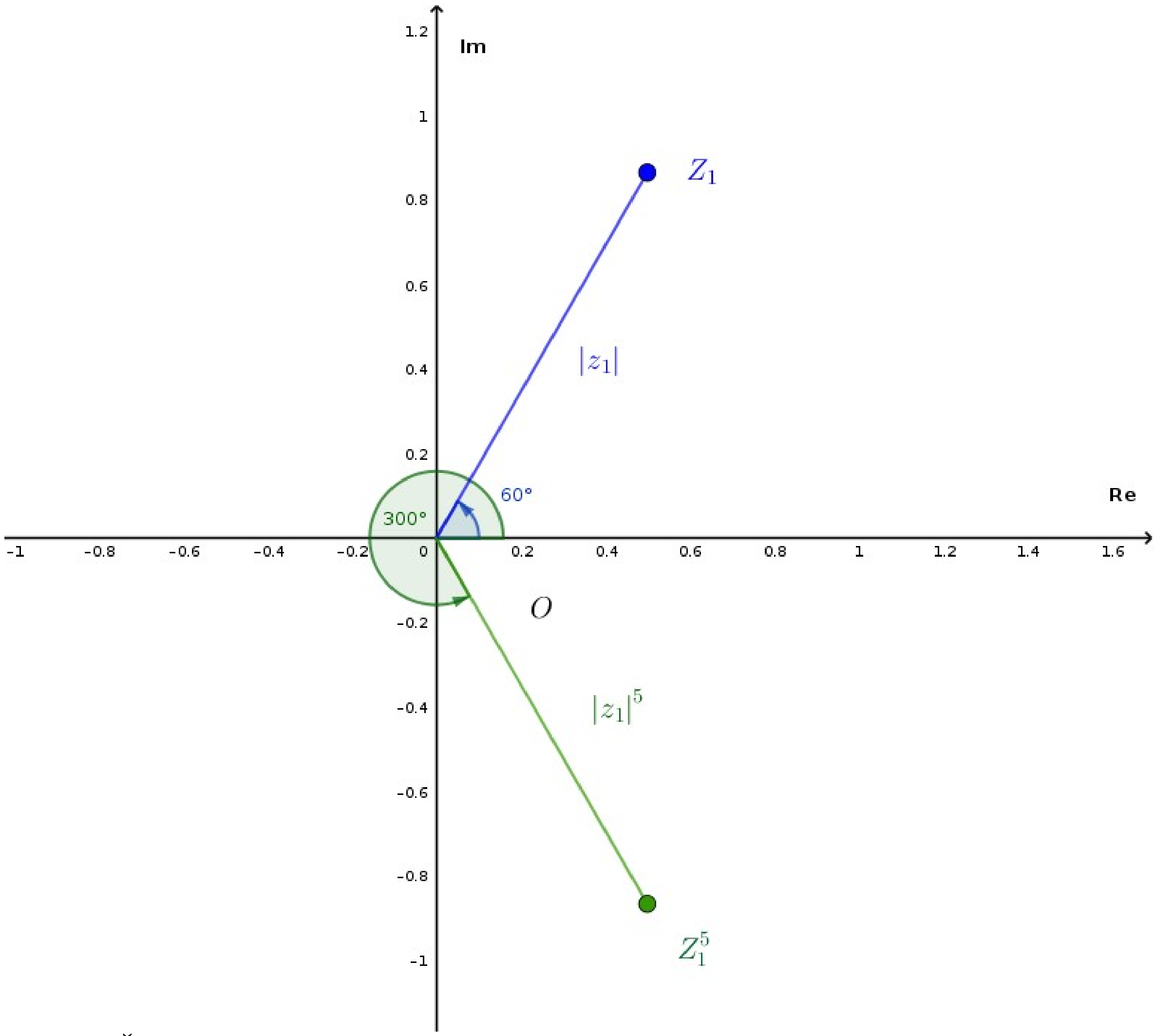
Obrázek 43: Pátá mocnina komplexního čísla

b) $s = \sqrt{3^5}(\cos 86°20' + i \sin 86°20')$



Obrázek 44: Pátá mocnina komplexního čísla

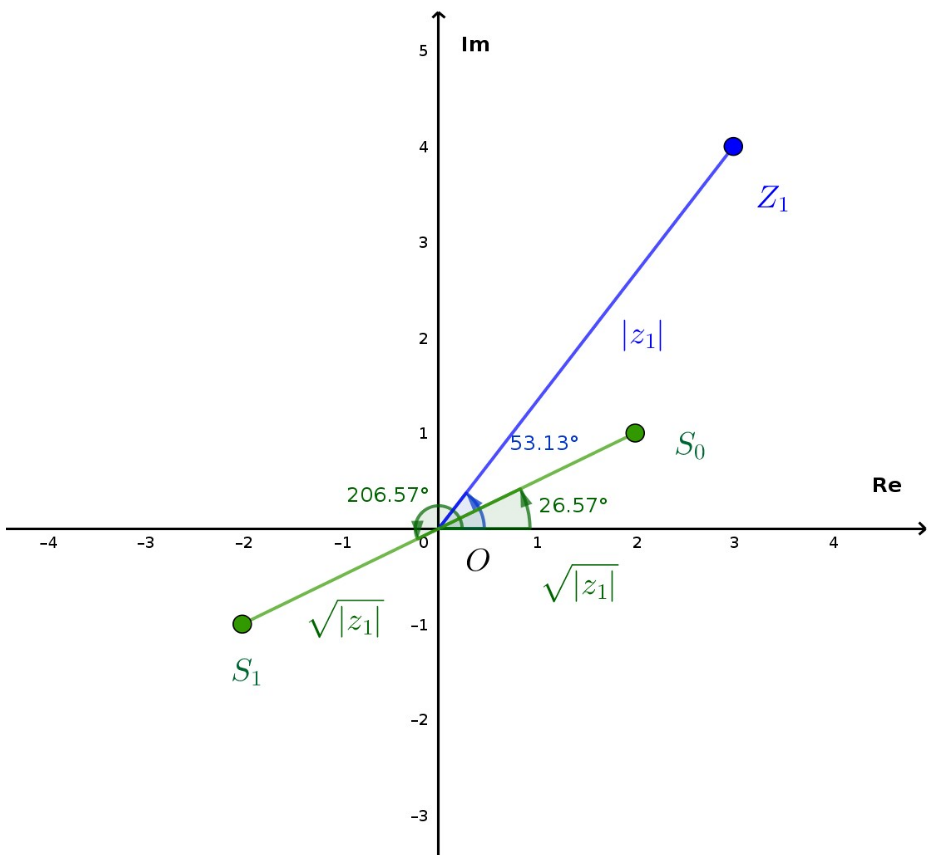
c) $s = \cos 300° + i \sin 300°$



Obrázek 45: Šestá mocnina komplexního čísla

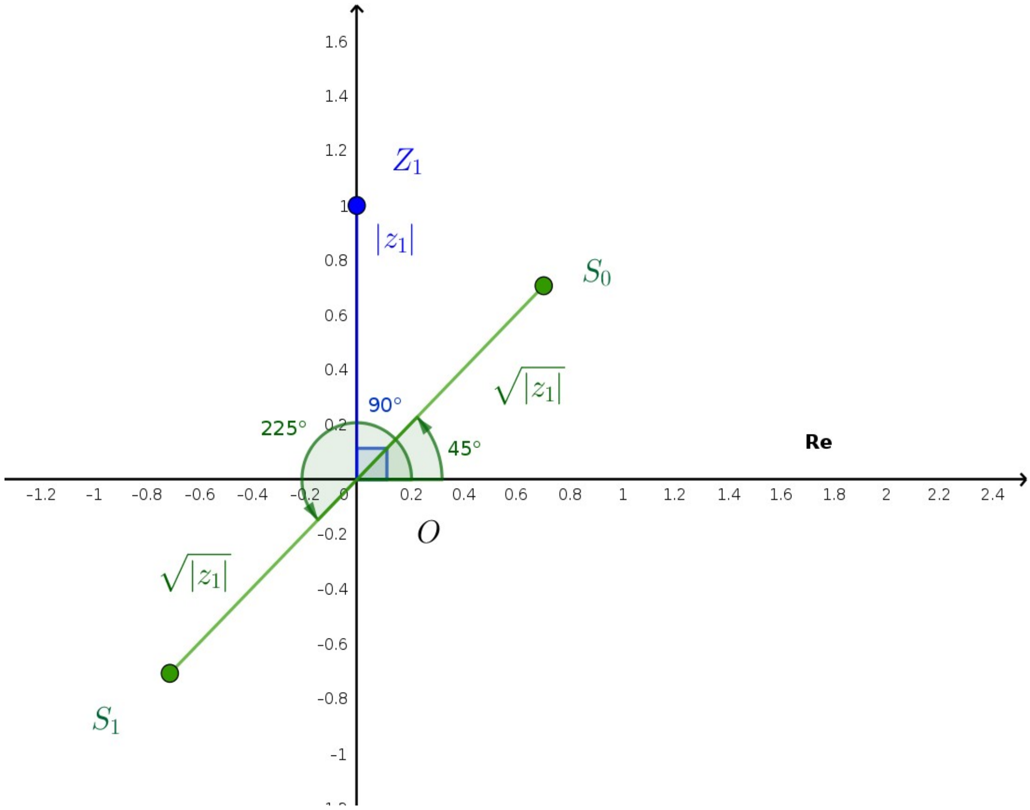
2.

a) $s_0 = \sqrt{5}(cos 26°33' + i \sin 26°33'), s_1 = \sqrt{5}(cos 206°33' + i \sin 206°33'),$



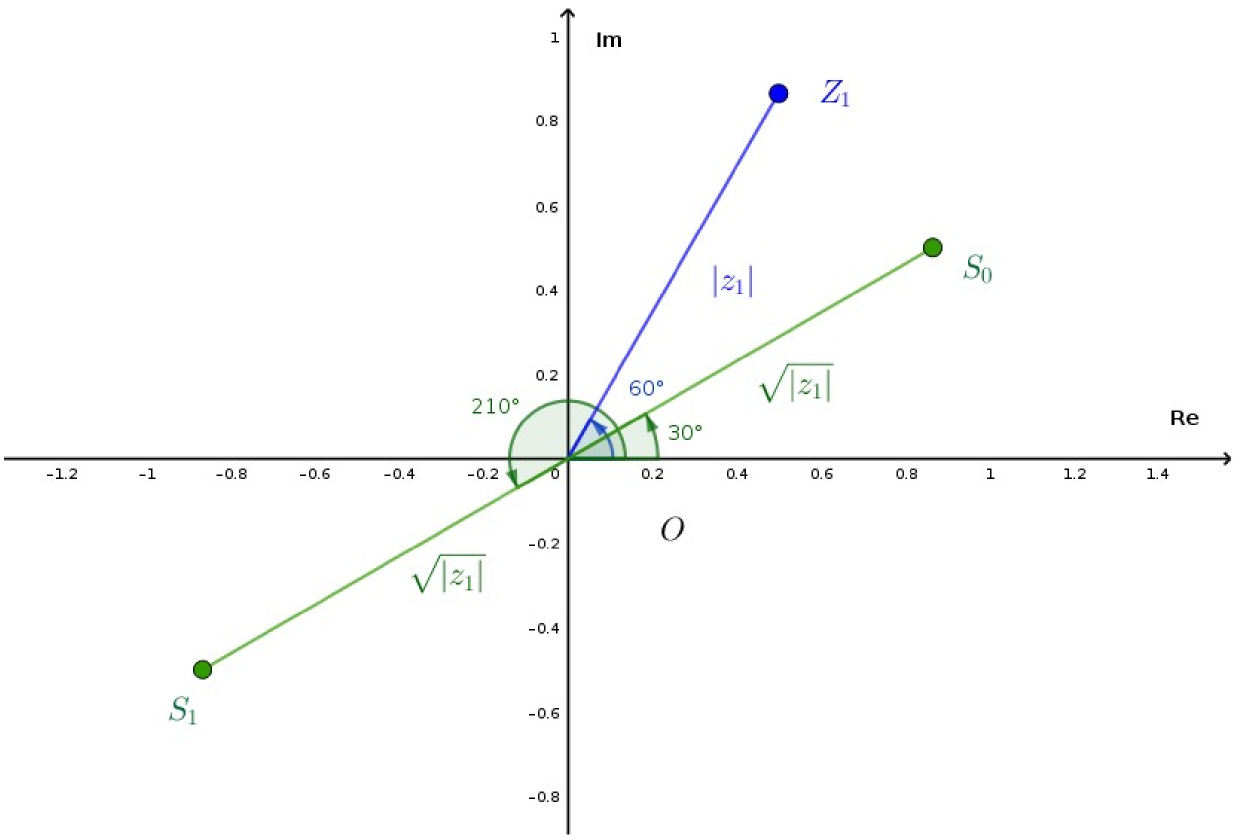
Obrázek 46: Druhé odmocniny komplexního čísla

b) $s_0 = (cos45° + isin45°), s_1 = (cos225° + isin225°),$



Obrázek 47: Druhé odmocniny komplexního čísla

c) $s_0 = (\cos 30° + i \sin 30°), s_1 = (\cos 210° + i \sin 210°)$.



Obrázek 48: Druhé odmocniny komplexních čísel

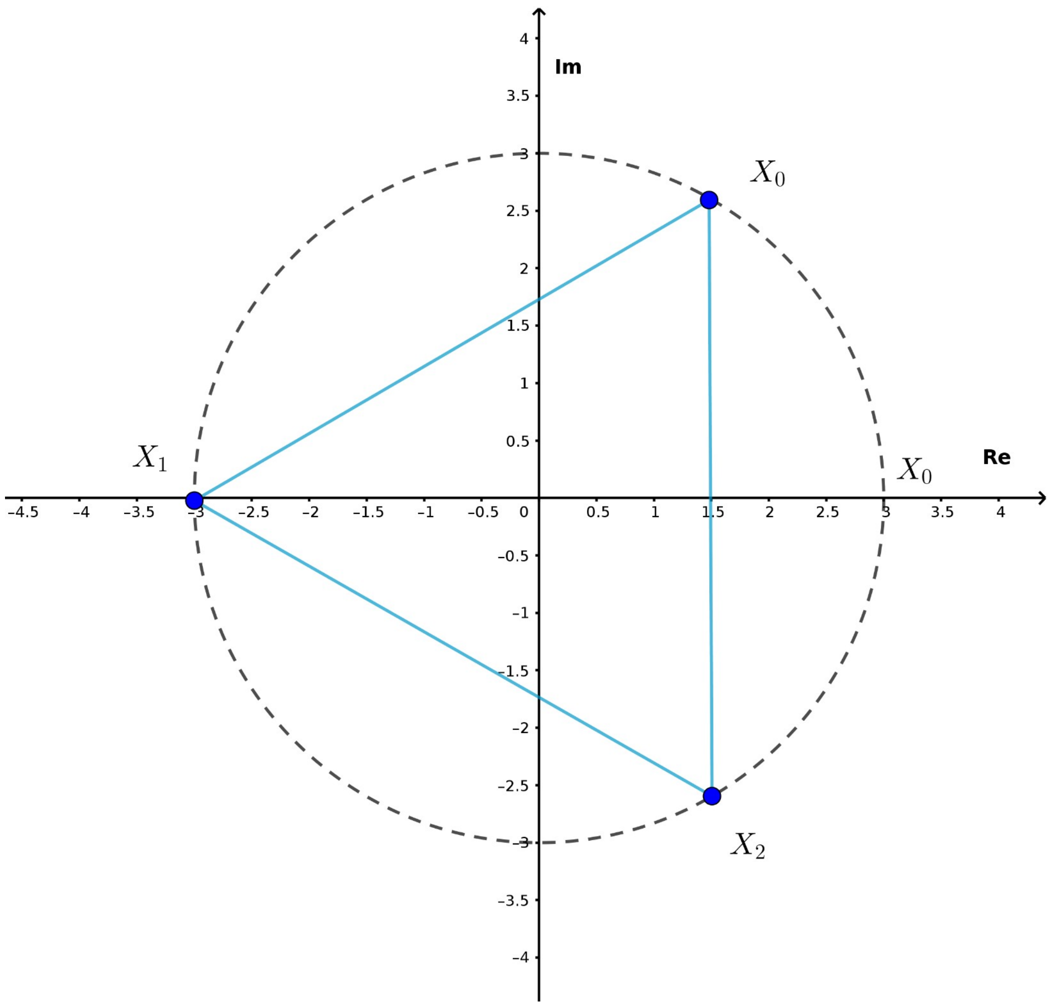
7. 6 Binomická rovnice. *Zpět k zadání → Cvičení*

1. a)

$$k = 0 : x_0 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 2 : x_2 = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$k = 1 : x_1 = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right)\right) = -3,$$



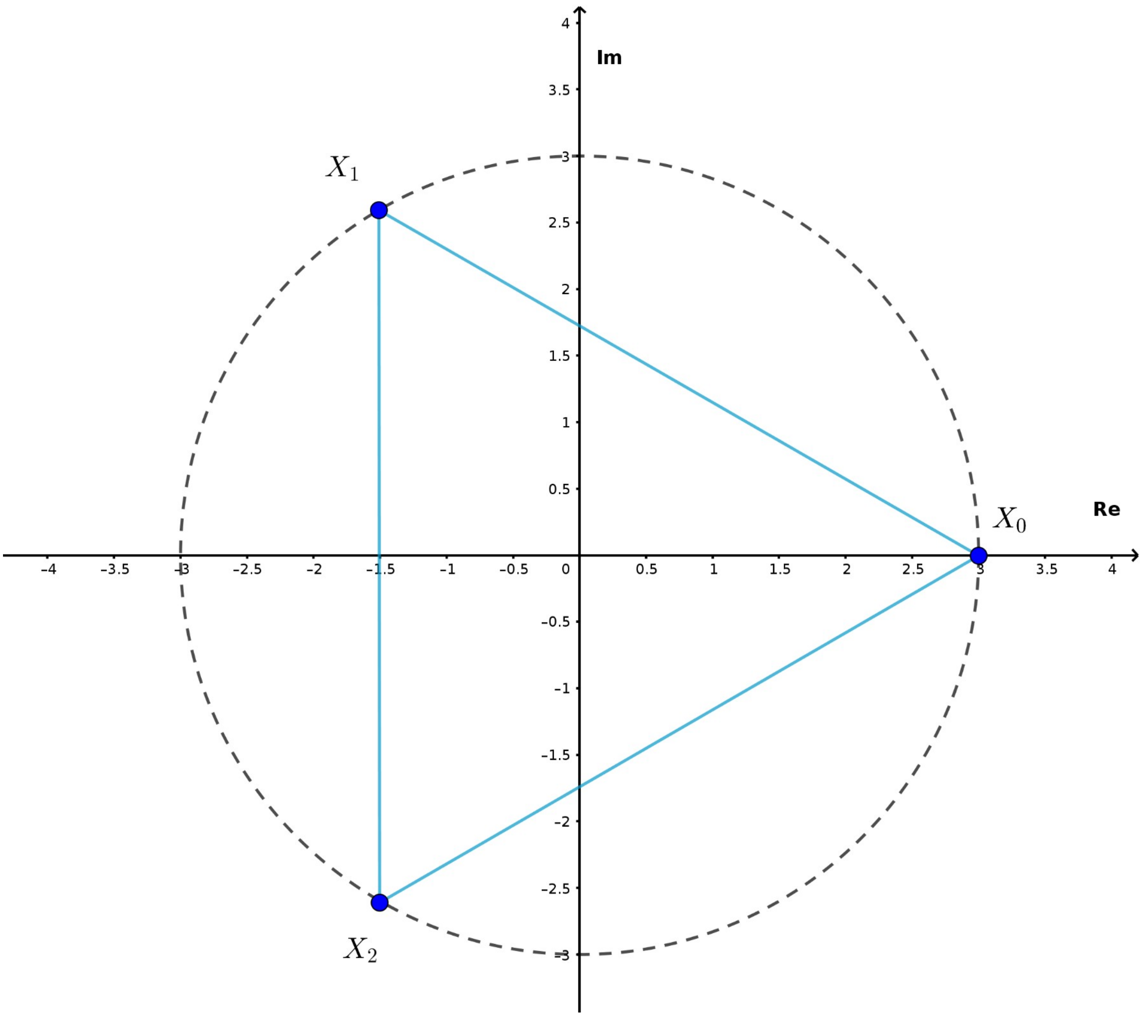
Obrázek 49: Binomická rovnice_Trojúhelník

b)

$$k=0: x_0=\sqrt[3]{27}\,(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 3,$$

$$k=1: x_1=\sqrt[3]{27}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$k=2: x_2=\sqrt[3]{27}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$



Obrázek 50: Binomická rovnice_Trojúhelník

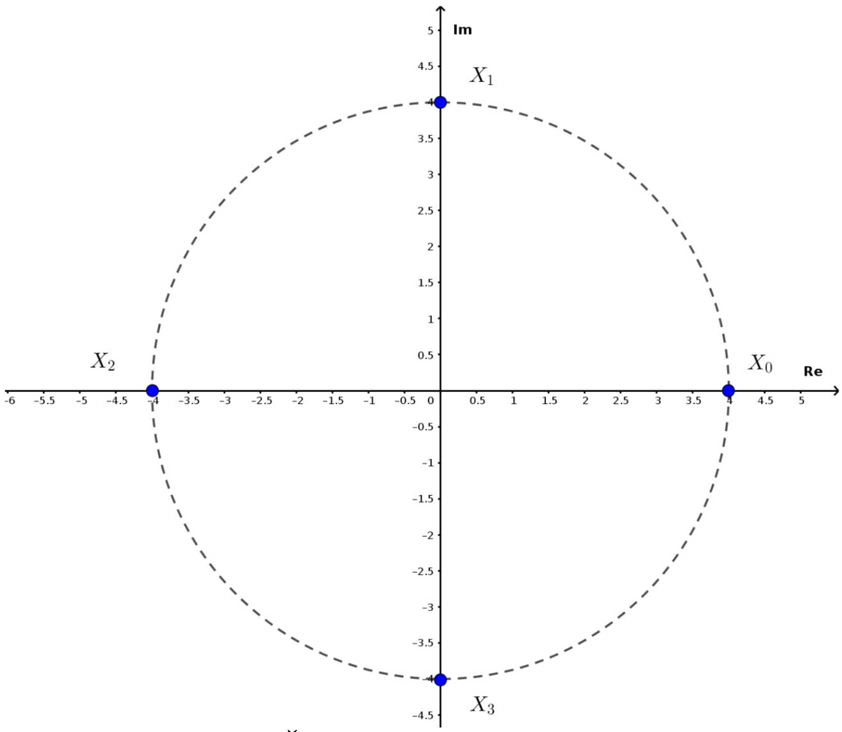
c)

$$k = 0 : x_0 = \sqrt[4]{16}\,(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 4,$$

$$k = 1 : x_1 = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)\right) = 4i,$$

$$k = 2 : x_2 = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{4}\right)\right) = -4,$$

$$k = 3 : x_3 = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{4}\right)\right) = -4i.$$



Obrázek 51: Binomická rovnice_Čtverec

2.

$$k=0: x_0=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{16}\right)\right),$$

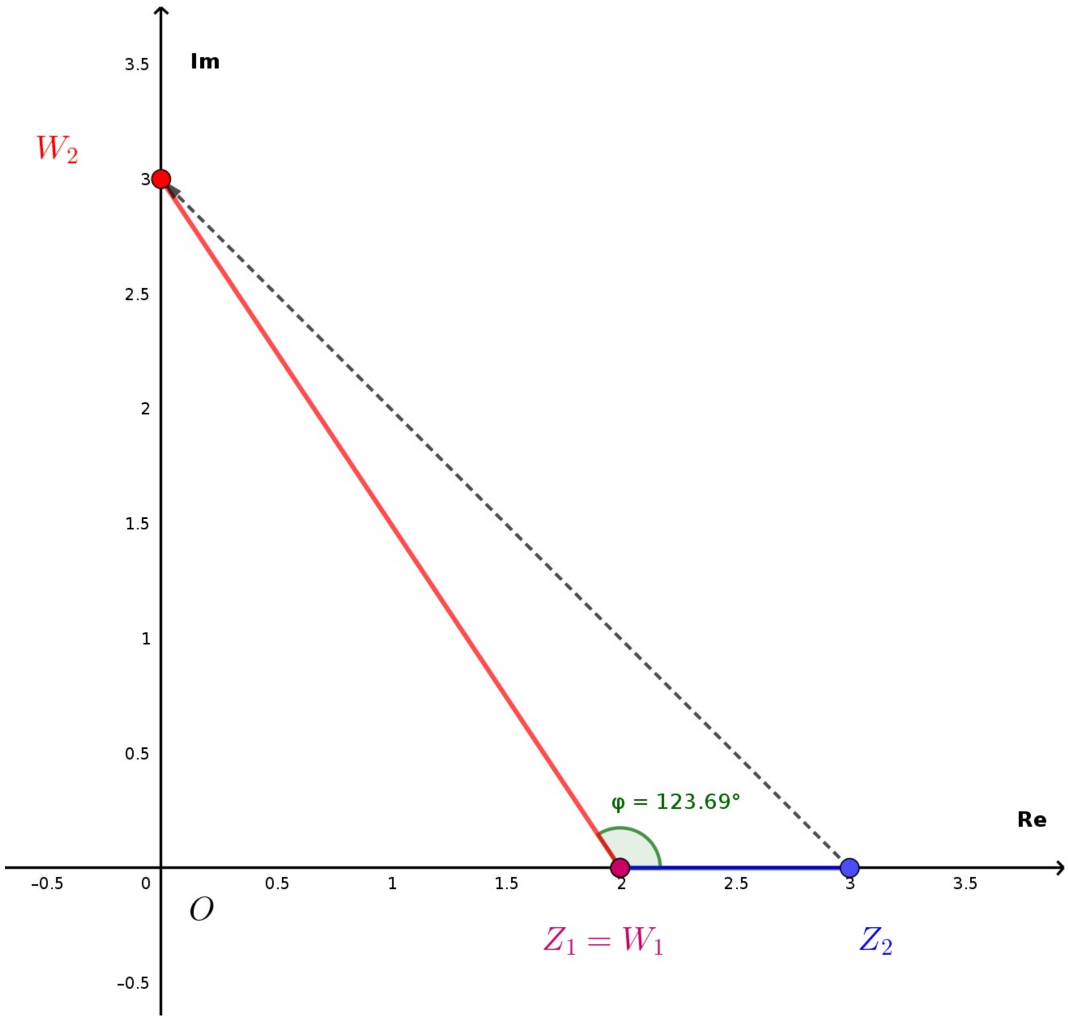
$$k=1: x_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{15\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{15\pi}{16}\right)\right),$$

$$k=2: x_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{23\pi}{16}\right)\right),$$

$$k=3: x_3=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{31\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{31\pi}{16}\right)\right).$$

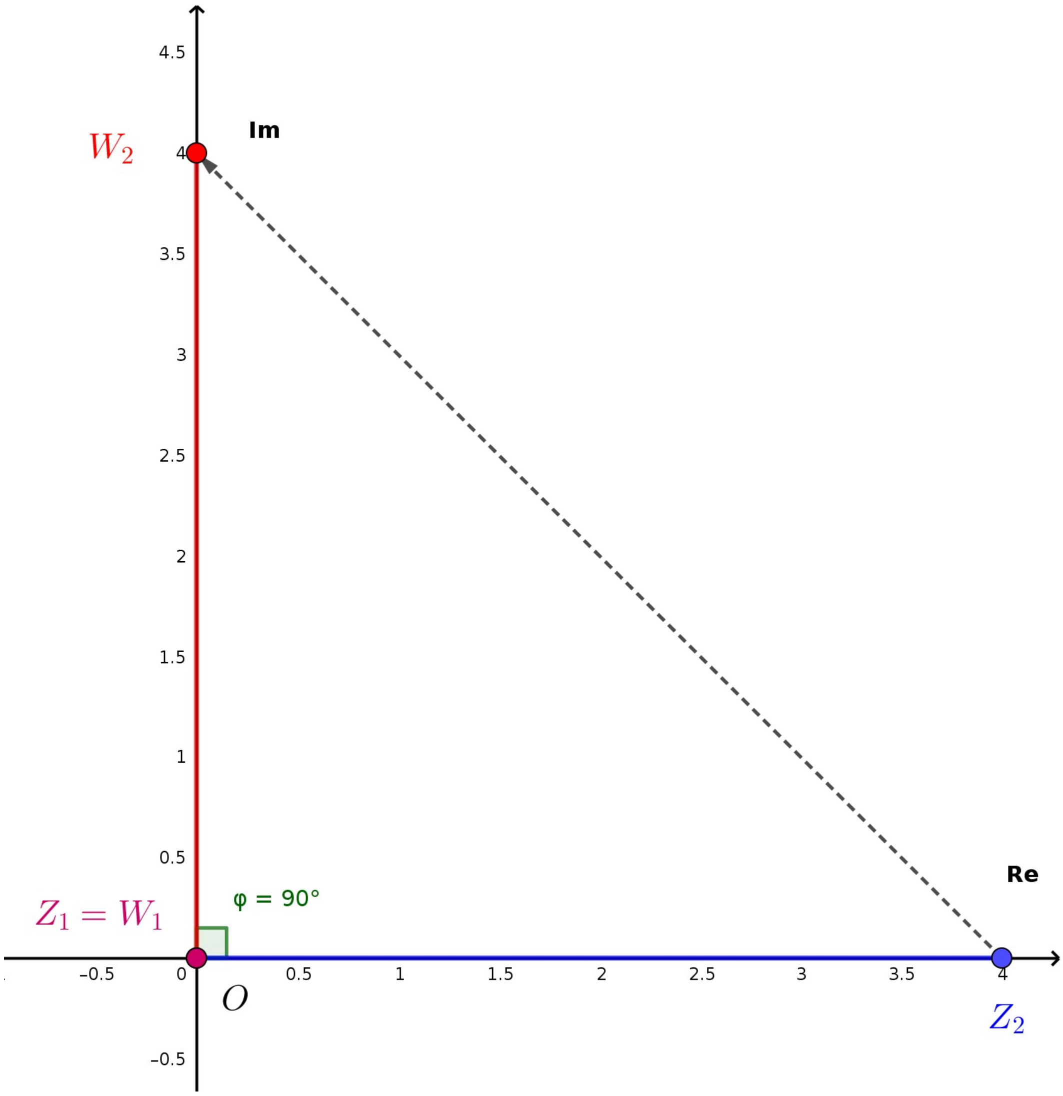
8. 6 Využití komplexních čísel. *Zpět k zadání* → *Cvičení*

1. Obecný případ (složení otočení se stejnolehlostí): $a = 3i - 2$, $b = -2 - 6i$, $|a| = 2\sqrt{10}, \varphi = 123°41'$



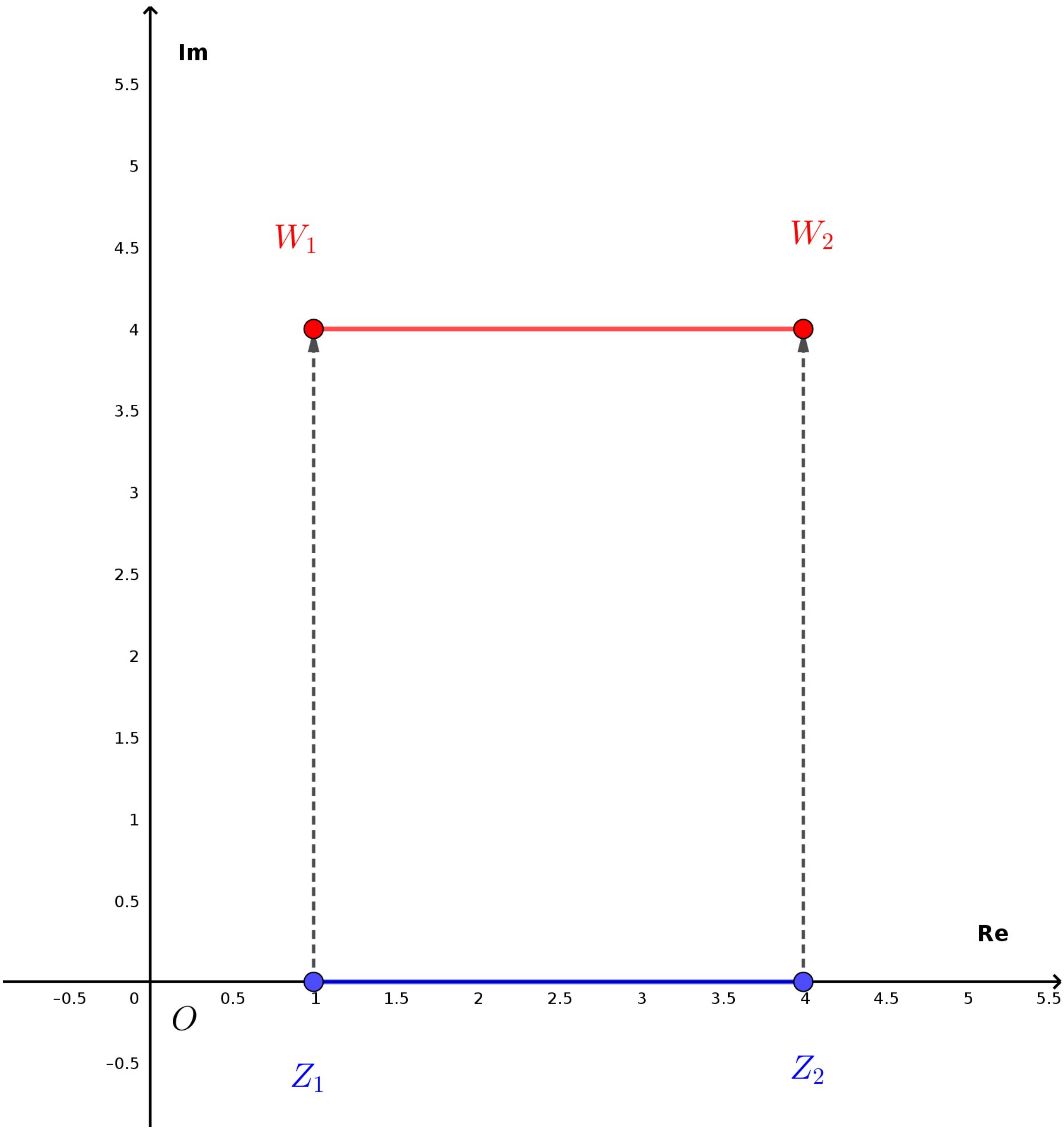
Obrázek 52: Obecný případ

2. Otočení: $a = i, b = 0, |a| = 1, \varphi = 90^\circ$



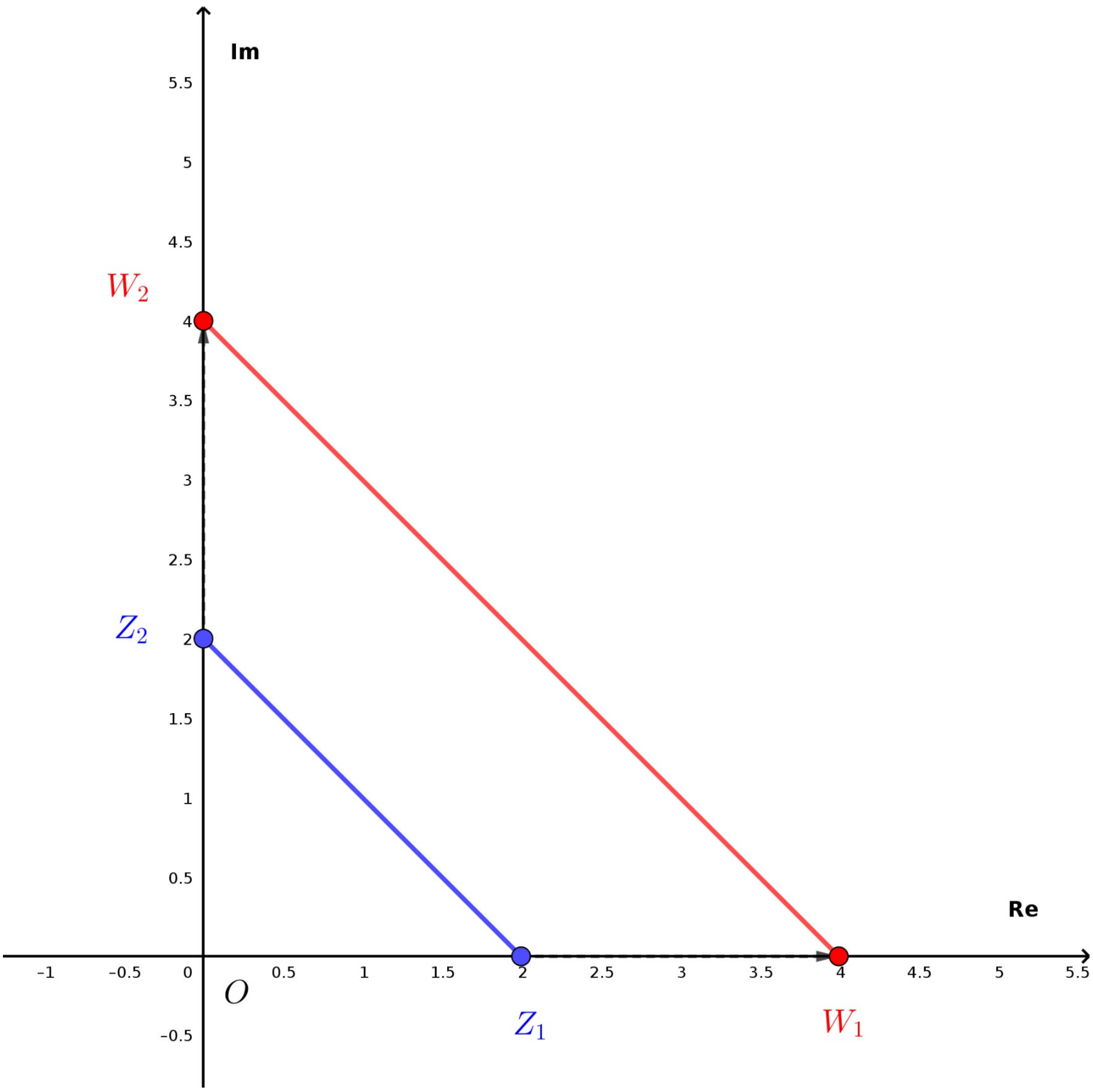
Obrázek 53: Otočení

3. Posunutí: $a = 1, b = 4i, |a| = 1, \varphi = 0°$



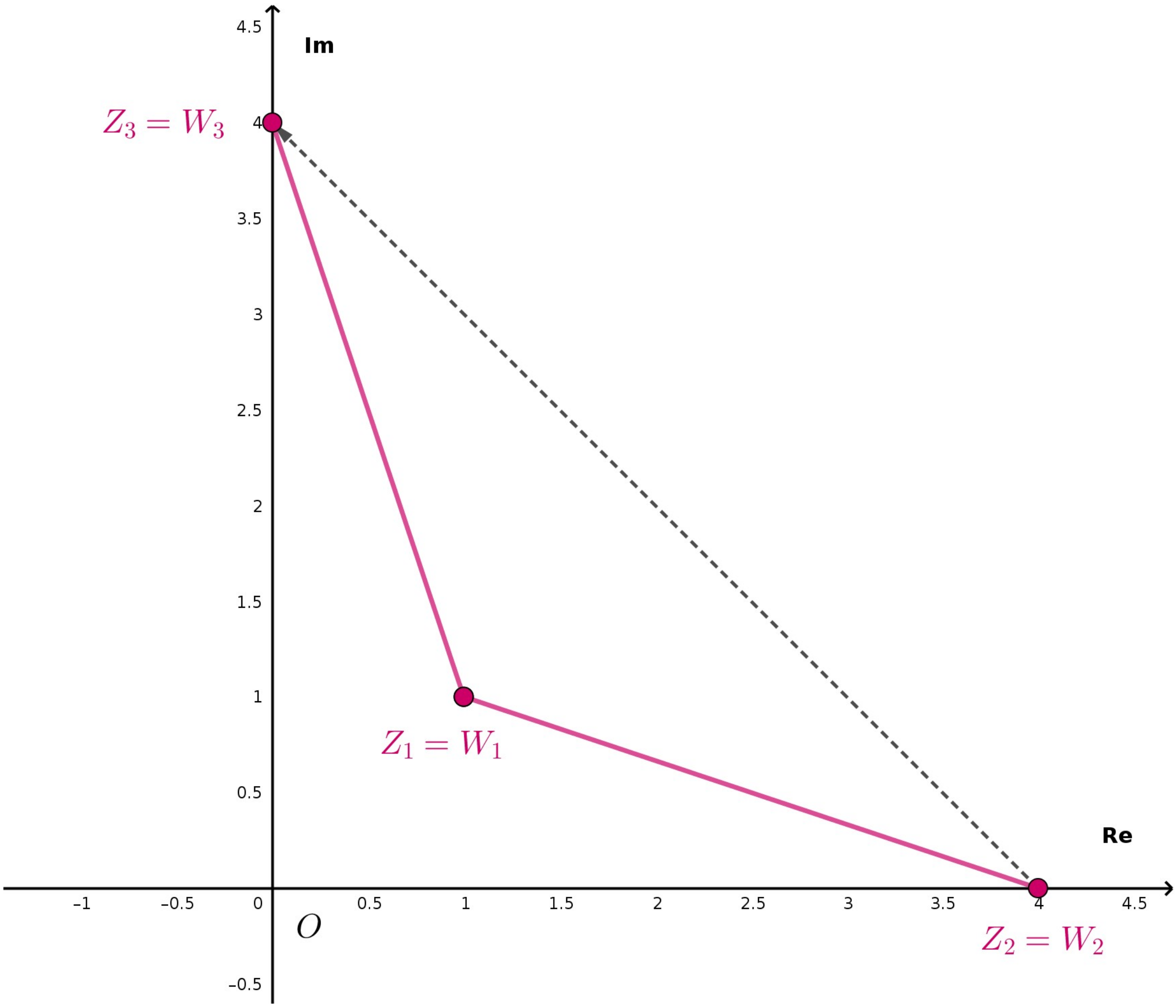
Obrázek 54: Posunutí

4. Stejnolehlost: $a = 2, b = 0, |a| = 2, \varphi = 0°$



Obrázek 55: Stejnolehlost

5. Identita: $a = 1, b = 0, |a| = 1, \varphi = 0°$



Obrázek 56: Identita

LITERATURA

[1] BEČVÁŘ, J. *Lineární algebra*. Praha: MatfyzPress, 2010.

[2] CALDA, E. *Matematika pro gymnázia: Komplexní čísla*. Praha: Prometheus, 1999.

[3] ČERMÁK, P. et al. *Odmaturuj z matematiky 1*. Brno: Didaktis, 2004.

[4] HÁJKOVÁ, V. et al. *Matematika*. Praha: Matfyzpress, 2012.

[5]HAVRLANT, L. *Matematika polopatě* [online]. [vid. 15. 12. 2021]. Dostupné: https://www.matweb.cz/o-webu/.

[6] KOŘÍNEK, V. *Základy algebry*. Praha: Nakladatelství ČSAV, 1956.

[7] PETÁKOVÁ, J. *Matematika příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám.* Praha: Prometheus, 2013.

[8] POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus, 2015.

[9] Ikony pro výuku. *Servisní středisko pro e-learning na MU* [online]. [vid. 21. 11. 2021]. Dostupné: https://is.muni.cz/do/rect/el/ikony/index.html.

[10] *Škola s nadhledem* [online]. [vid. 15. 12. 2021]. Dostupné: https://www.skolasnadhledem.cz/game/266.

[11] ŠILAROVÁ, L. *Komplexní čísla ve výuce matematiky na střední škole s využitím internetu* [online]. [vid. 12. 12. 2021]. Dostupné: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~robova/stranky/silarova/index.html.

.