Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

Katedra: matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: 2. stupeň

Kombinace: matematika–anglický jazyk

EGYPTSKÉ ZLOMKY
EGYPTIAN FRACTIONS

Diplomová práce: 07-FP-KMD-004

Autor:

Šimon CHLÁDEK

Adresa:

Proletářská 147

46312, Liberec 23

Podpis:

Vedoucí práce: RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.

Počet

stran	slov	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
67	9 205	13	3	27	0

V Liberci dne: 1. 5. 2007

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

V Liberci dne: 3. 1. 2007 Šimon Chládek

Poděkování:

Rád bych poděkoval vedoucí práce RNDr. Daniele Bittnerové, CSc. za rady a připomínky, které pomohly k dokončení této práce. Děkuji všem, kteří mě při psaní této práce podporovali a bez nichž bych svoji práci nedokončil.

EGYPTSKÉ ZLOMKY

Šimon CHLÁDEK **DP–2007** **Vedoucí DP:** RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.

Resumé

Diplomová práce se zabývá metodami rozkladů na egyptské zlomky. V první části práce je stručně popsán úsek historické egyptské matematiky. Další část práce obsahuje tabulku rozkladů a úvahu, jak mohli Egypťané tuto tabulku sestavit. V poslední části práce jsou popsány dnešní metody rozkladů na egyptské zlomky, které jsou stručně porovnány. Na závěr je uvedeno i několik způsobů, jak využít egyptské zlomky při vyučování.

Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit befasst sich mit den Methoden des Zerfalls an ägyptische Bruchzahlen. In den ersten Teil der Arbeit wird kurz die Etappe der historische ägyptische Mathematik beschrieben. Der nächste Teil der Arbeit enthält die Zerfalltabelle und eine Betrachtung über die Zusammensetzung dieser Tabelle von den Ägyptern. In den letzten Teil der Arbeit sind gegenwärtige Methoden des Zerfalls an ägyptische Bruchzahlen beschrieben, die kurz vergleicht werden. Abschließend werden einige Methoden genannt, wie man ägyptische Bruchzahlen während des Unterrichts nutzen kann.

Summary

The thesis deals with methods of decompositions to Egyptian Fractions. In the first section a part of Egyptian Historical mathematics is described. The next section contains the table of decompositions and speculations on how could the Egyptians construct this table. In the last section of the thesis todays methods of decompositions to Egyptian Fractions are described and are also briefly compared. The closing part contains some ideas on how to use Egyptian Fractions in the class.

1. Úvod

Dochované prameny ze starého Egypta mohou hodně vypovědět o starých Egypťanech samých. Jistě vypovídají i o jejich matematických znalostech. Rhindův papyrus, nejstarší matematický dokument, říká, že užívali například stejnou číselnou soustavu. Jeden významný rozdíl tu ovšem je, a to rozdíl ve vnímání a užívání zlomků.

Egypťané uměli zaznamenávat čísla až do jednoho milionu, ovšem jejich metoda zápisu zlomků byla velmi limitovaná. Pro zápis zlomku $\frac{1}{5}$ použili Egypťané symbol pro číslo 5 a nad něj připsali další symbol pro zlomek. Obecně psali takto všechny zlomky s jedničkou v čitateli. Staří Egypťané ale neznali jiný způsob, jak zapsat zlomky, než tento, s výjimkou speciálních případů, jako například $\frac{2}{3}$. Tímto nechceme říci, že např. číslo $\frac{5}{6}$ v Egyptě neexistovalo. Egypťané jednoduše $\frac{5}{6}$ neuměli zapsat jako jeden symbol. Místo toho psali $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Díky tomu se dnes součtu kmenných zlomků (tj. zlomků s jedničkou v čitateli) říká *egyptské zlomky*. Dnes studium vlastností egyptských zlomků spadá do teorie čísel a stále poskytuje množství podnětných a nevyřešených otázek.

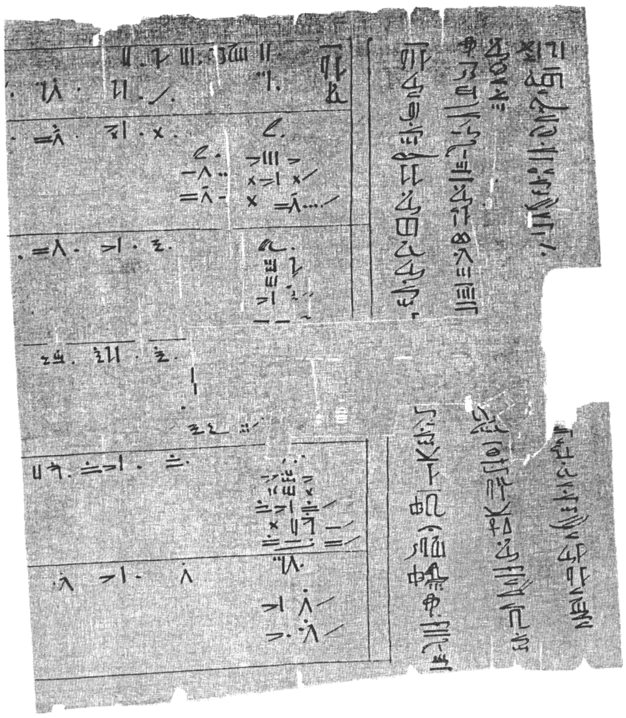
Tato práce podává stručný přehled matematických dovedností a znalostí starých Egypťanů, dále se zabývá vznikem a užitím tabulky rozkladů $\frac{2}{n}$ z Rhindova papyru a následnou problematikou egyptských zlomků. Na závěr se nalézá několik algoritmů pro rozklad racionálního čísla na egyptské zlomky, jejich stručné porovnání a návrh, jak využít egyptské zlomky ve výuce.

2. Prameny

Uvedeme přehled nejdůležitějších matematických textů. V úvahu budou brány pouze texty, které jsou starší než matematika antická. Existence samotných matematických textů nasvědčuje tomu, že již v době 12. dynastie (asi 1994 – 1797 př. Kr.) byla ve starém Egyptě matematika konstituována jako samostatná disciplína.

2.1 Rhindův papyrus

Též nazývaný jako *Ahmosův* nebo *Londýnský papyrus*. Byl nalezen spolu s dalšími texty v egyptských Thébách v polovině 19. století. Roku 1858 ho koupil v Luxoru právník a egyptolog Alexander Henry Hind, skotský znalec starožitností. Dnes je papyrus uložen v britském muzeu v Londýně. Tento papyrus byl při výrobě slepen ze čtrnácti listů. Rhindův papyrus opsal v 33. roce vlády krále Apopiho (kolem roku 1560 př. Kr.) písař Ahmose z materiálu pocházejícího z doby vlády Amenemheta III. (asi 1853 – 1809 př. Kr.). Jde o sbírku 87 úloh (budeme se na ně odvolávat jako na **R1 – R87**) s návody a řešeními, navíc obsahuje tak zvanou tabulku $2/n$; je to nejrozsáhlejší a nejvýznamnější matematický text ze starého Egypta.



Obr. 2

2.2 Moskevský papyrus

Též *Goleniščevův papyrus*. Tento papyrus získal roku 1893 egyptolog V. S. Goleniščev a věnoval ho Puškinově muzeu krásných umění v Moskvě. Text je opisem staršího textu z XII. dynastie, opsán byl patrně v době XIII. dynastie (asi 1797 – 1634 př. Kr.). Papyrus byl slepen z jedenácti listů a obsahuje 25 příkladů (budeme je označovat **M1 – M25**). Příklady nejsou tematicky uspořádány; šlo snad o jakousi učební pomůcku či test znalostí. Je to druhý nejvýznamnější matematický text pocházející ze starověkého Egypta.

Obr. 2

2.3 Káhúnské papyry

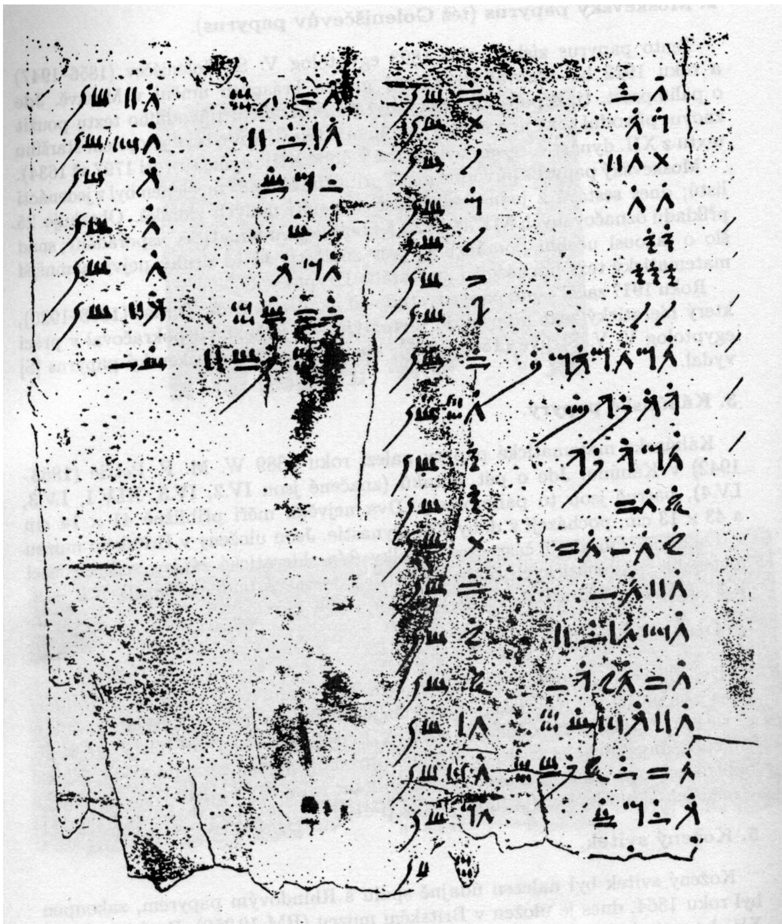
Káhúnské matematické papyry nalezl roku 1889 W. M. F. Petrie v Káhúnu. Jde o pět zlomků, dva největší pocházejí z doby XII. dynastie, obsahují část tzv. tabulky *2/n*, hieratické zápisy velkých čísel a několik matematických úloh (**K1 – K6**).

2.4 Dřevěné tabulky

Dvě dřevěné tabulky pokryté štukem byly nalezeny patrně v Achmímu, dnes jsou uloženy v Káhirském egyptologickém muzeu. Pocházejí z doby XII. dynastie a obsahují nějaké seznamy osob, jakýsi dopis a výpočty dílů objemové jednotky *hekat* (měřice); výsledky jsou uvedeny v menších jednotkách.

2.5 Kožený svitek

Kožený svitek byl nalezen údajně spolu s Hindovým papyrem, dnes je uložen v Britském muzeu. Pochází z doby XV. dynastie (asi 1634 – 1526 př. Kr.) Obsahuje tabulku 26 součtů kmenných zlomků ve čtyřech sloupcích. Je značně poškozen.



Obr. 3

2.6 Berlínský papyrus

Berlínský papyrus byl nalezen patrně v Thébách zhruba současně s Rhindovým papyrem. Dnes je uložen v Berlínském muzeu. Pochází nejspíše z doby XII. dynastie. Skládá se ze dvou větších kusů a několika zlomků. Obsahuje řešené úlohy (**B1 – B4**), patrně jde o část jakési sbírky příkladů.

O matematických znalostech starých Egypťanů svědčí i texty, které nejsou přímo matematické. Příkladem jsou čtyři svitky z doby Senusreta I. (asi 1971 – 1926, XII. dynastie), na kterých jsou zachyceny praktické ukázky aplikace matematiky (konstrukce lodí, obchod, apod.). Dále třeba papyrus označovaný jako *Anastasi I.* Jde o dopis úředníka Horiho písaři Amenemopovi, kterému Hori zadává tři úkoly. Další svědectví o matematických znalostech starých Egypťanů podávají mnohé projevy egyptské civilizace. Jsou to např. stavby kanálů, přehrad, vodních nádrží, projektování pyramid, chrámů a dalších staveb, rozpisy prací a přísun materiálu, výběr daní a účtování faraónových chrámových statků. Podle historických zpráv se pravidelně v celém státě již od prvních dynastií sčítali lidé, pozemky, dobytek i zlato.

3. Staroegyptská matematika

V této kapitole se stručně zmíníme o matematických dovednostech starých Egypťanů. Budeme se věnovat staroegyptským znalostem *aritmetiky* (mimo zlomků, jimž bude věnována samostatná kapitola), znalostem *posloupností*, *algebry*, *geometrie* teoreticky i v praxi, *času*, *číselné mystice* a *ostatním úlohám* spojeným s každodenním životem ve starověkém Egyptě.

3.1. Aritmetika

3.1.1. Číselná soustava starých Egypťanů

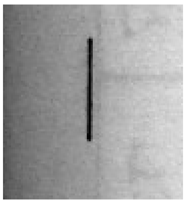
Se znaky představujícími přirozená čísla se ve starém Egyptě setkáváme již v Archaické době (asi 3150 – 2930 př. Kr.). Již ve Staré říši byla běžně zaznamenávána poměrně velká čísla. Uvedeme dva příklady.

Král Chasechem (II. dynastie) zanechal zprávu o potlačení velkého povstání v Dolním Egyptě, při němž prý bylo zabito 48 205 vzbouřenců a zajato 120 000 tisíc obyvatel.

Na reliéfech v Sahureově zádušním chrámu (V. dynastie) je zobrazen Sahure ve vítězných bitvách. Na jednom je výčet válečné kořisti získané v Lybii, a to 123 440 kusů dobytka, 223 400 oslů, 232 413 kusů lovné zvěře, 243 688 ovcí, celkem 822 941 kusů.

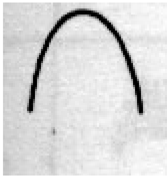
Staří Egypťané užívali desítkové číselné soustavy, přičemž existovaly zvláštní číselné znaky počínaje jedničkou včetně pro mocniny 10 do 10^6. Byly to tyto znaky:

1 … obraz měřicí hole



Obr. 4

10 … hieroglyf znamenající kraví pouta

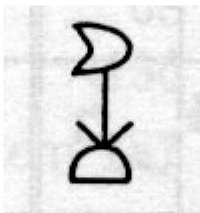


Obr. 5

100 … měřický provazec užívaný k měření polí a dělící se na 100 loktů

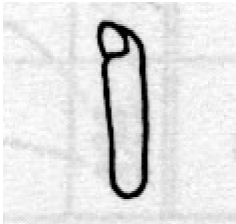
Obr. 6

1000 … květ lotosu



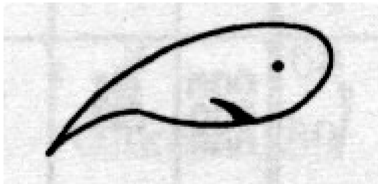
Obr. 7

10 000 … ukazovák



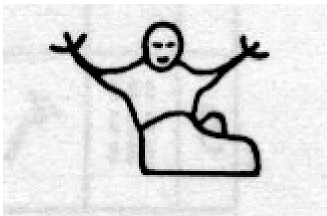
Obr. 8

100 000 … pulec



Obr. 9

1 000 000 … bůh Hh, jeden z osmi prabohů, který nesl oblohu pod zemí



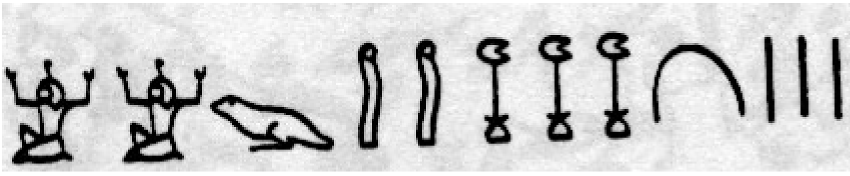
Obr. 10

Některé prameny uvádějí i samostatný symbol pro 10 000 000, a to podle různých odhadů jako slunce, obzor nebo prsten.

Přirozená čísla byla zaznamenávána prostým nahromaděním potřebných znaků. Např. čísla 2 465 a 2 126 013 by byla zapsána takto:

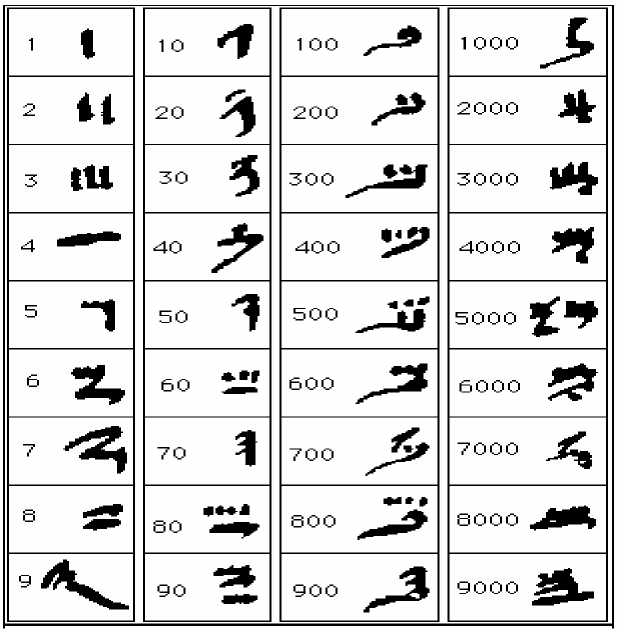
Obr. 11

a



Obr. 12

V dalším rozvoji egyptské kultury se hieroglyfické písmo – které vznikalo ve starší době z obrázků – měnilo na hieratické (rychlopisnými zkratkami hieroglyfů) a pak na démotické (abecední). Obdobně se měnily i symboly číslovek. Pro ukázku předkládáme pár číslovek v hieratické podobě.



Obr. 13

3.1.2. Sčítání a odčítání

Sčítání dvou nebo více přirozených čísel zapsaných v desítkové soustavě nedělalo problémy. Postačovalo jen „shrnout“ znaky obou čísel dohromady a případně deset jednotek daného řádu nahradit jednou jednotkou řádu vyššího. Při odčítání se postupovalo obdobně, někdy bylo třeba nahradit jednotku vyššího řádu deseti jednotkami řádu nižšího. Odčítalo se vždy menší číslo od většího. Sčítání či odčítání se naznačovaly hieroglyfy, které původně označovaly „chůzi“ jedním nebo druhým směrem.

3.1.3. Násobení a dělení

Při násobení se podle některých pramenů Egypťané opírali o tradici, kdy jejich předkové ještě užívali dvojkové soustavy, podle jiných je jejich metoda postavena na dobrém pochopení přímé úměrnosti. Egypťané každopádně převáděli násobení na zdvojnásobování a sčítání, přičemž si sestavili tabulku. Uveďme si příklad: $15 \cdot 13$

/1	15
2	30
/4	60
/8	120
Dohromady	195

Každý následující řádek této tabulky byl dvojnásobkem předcházejícího (sečtením čísel samých se sebou). Poslední číslo v levém sloupci nesmělo převyšovat násobitel (13). Pak vyhledávali v levém sloupci čísla, jejichž součet byl 13, a označili je šikmou čarou. Přitom postupovali od posledního čísla nahoru. Při násobení větším číslem Egypťané kromě zdvojnásobování používali rovněž zdesateronásobení, někdy využili i pětinásobku. Záleželo pravděpodobně na obratnosti písaře.

Podle stejného vzorce se rovněž dělilo. Tedy zdvojnásobovalo se tak dlouho, dokud označená čísla v pravém sloupci nedala požadovaný součet. Např. v příkladu **R69** je zachyceno dělení čísla 1 120 číslem 80.

1	80
/10	800
2	160
/ 4	320
Dohromady	1 120

Tedy číslo 1 120 je součtem desetinásobku a čtyřnásobku čísla 80, proto z uvedeného schématu dostáváme výsledek: 1 120:80 = 14.

Se zápisem dělení přirozených čísel, které je „beze zbytku“, se setkáváme v egyptských textech zřídka, často je však zachyceno dělení se zbytkem, dělení smíšenými čísly, součty zlomků apod. Násobení i dělení je založeno na stejném principu. Je vidět, že násobení a dělení jsou inverzní operace. Komutativnost násobení není při tomto početním algoritmu zjevná.

3.1.4. Zlomky a smíšená čísla

O tomto tématu bude pojednáno dále a podrobněji v samostatné kapitole.

3.1.5. Jednotky

Původní egyptskou délkovou mírou byl tzv. *krátký loket*, který měřil asi 45 cm; měl 6 dlaní o 4 prstech, tj. celkem 24 prstů. Později byla k tomuto lokti přidána tzv. „královská“ dlaň, a tak vznikl *královský loket*, *mehnisut* nebo jen *meh*. Královský loket byl určen pro měření související se stanovováním naturálních dávek panovníkovi a v královských loktech byly vyměřovány nejrůznější stavby. Například při stavbách pyramid byla většinou délka základní hrany násobkem deseti královských loktů. V Egyptě byla jako jednotka délky používána i míra *chet*, která měla sto loktů.

Základní plošnou mírou byla jednotka *secat-johet* (krátce *secat*), která byla rovna 10 000 čtverečních královských loktů. Jednotka *secat-johet* se skládala ze sta jednotek *meh-ta* (tzv. *loket země*).

Základem dutých měr byla jednotka *hekat* (někdy do češtiny překládána jako *měřice*), která měla asi 4,8 litru. Jednotka *hekat* se rovněž dělila na 10 *hinů* a jeden *hin* na 32 *ro*. Užívána byla i jednotka *char* (někdy překládána jako *pytel*), která obsahovala 20 jednotek *hekat*.

Hodnota zboží byla udávána vahou stříbra. Jednotka se nazývala jeden *šena*, který měl asi 91 gramů a dělil se na 12 *kit*.

3.2. Posloupnosti

3.2.1. Aritmetická posloupnost

V Rhindově papyru jsou dvě úlohy, v nichž se pracuje s aritmetickou posloupností o pěti, resp. o deseti členech, v Káhúnských zlomcích lze nalézt aritmetickou posloupnost o deseti členech.

Uveďme si jeden příklad. V úloze **R64** je třeba rozdělit 10 měřic ječmene mezi 10 mužů tak, aby získaná množství tvořila aritmetickou posloupnost s diferencí $\frac{1}{8}$. Tato úloha je nadepsána *Metoda počítání s rozdílem peru* a samotném textu je uvedeno, že *rozdíl peru každého muže vůči druhovi je* $\frac{1}{8}$ *meřice.*

3.2.2. Geometrická posloupnost

Úloha **R79** je ukázkou úloh, ve kterých nacházíme pětičlenou geometrickou posloupnost a její součet. Je klasickou úlohou rekreační matematiky. Její zadání zní: *Je sedm domů a v každém domě je sedm koček, každá kočka chytne sedm myší, každá myš sežere sedm klasů pšenice, každý klas pšenice je rozdělen do sedmi měřic. Kolik je všeho dohromady?* Poznamenejme že podobné úlohy nacházíme i dále v historii. Např. u Leoparda Pisánského (Fibonacci) najdeme formulaci: *Sedm stařen míří do Říma, každá má sedm mulů, na každém je sedm pytlů, v každém pytli sedm chlebů, u každého chleba sedm nožů a každý nůž je v sedmi pochvách. Kolik je všeho dohromady?*

3.3. Algebra

V egyptských matematických textech nalézáme úlohy, jenž je možno řešit lineárními rovnicemi. Jsou to příklady na vypočtení neznámého množství, které je zadáno nějakou podmínkou. Úlohy tohoto typu jsou většinou formulovány abstraktně, tj. postrádají jakýkoliv praktický kontext.

3.3.1. Úlohy vedoucí na lineární rovnice

Úlohy, které vedou na lineární rovnice, nalézáme zejména v Rhindově a Moskevském papyru. Uveďme si jeden z příkladů (**R30**): *Když ti písař řekne, výsledek 10 je* $\frac{2}{3}+\frac{1}{10}$, *z čeho, ať slyší, počítej s* $\frac{2}{3}+\frac{1}{10}$, *až najdeš 10.*

Tento příklad lze v naší symbolice zapsat následující rovnicí:

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{10}\right)\cdot x = 10$$

$$x = 13\frac{1}{23}$$

3.3.2. Úlohy vedoucí na jednoduché kvadratické rovnice

Na Berlínském papyru je úloha, která obsahuje neznámou ve druhé mocnině. Na Káhúnském zlomku se zachovala nepříliš srozumitelná úloha **K5**, ve které se neznámá rovněž objevuje ve druhé mocnině.

K5: (v naší symbolice)

$$10x\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot x = 120$$

Oba příklady, v nichž se odmocňuje, vedou na kvadratické rovnice, jež neobsahují lineární člen. V dochovaných egyptských matematických textech se nesetkáváme s žádnou úlohou, vedoucí na úplnou kvadratickou rovnici.

3.4. Geometrie

V dochovaných egyptských matematických textech nacházíme úlohy následujících typů:

- úlohy na výpočet obsahu obdélníka, trojúhelníka, lichoběžníka a kruhu
- úlohy, ve kterých jsou z daného obsahu trojúhelníka, resp. obdélníka, a z daného poměru jejich rozměrů tyto rozměry vypočteny
- úlohy na výpočet objemů kvádru, válce a komolého jehlanu
- úlohy, ve kterých je z daného objemu a známé podstavy kvádru počítána jeho výška
- úlohy na výpočet velikosti úhlu, který svírá základna a stěna jehlanu

- úlohy, ve kterých je ze znalosti tohoto úhlu a velikosti základny počítána výška jehlanu
- úloha, ve které je patrně počítán povrch poloviny pláště válce

V dalším textu budou stručně popsána jednotlivá geometrická témata, jež se v egyptských matematických textech vyskytují.

3.4.1. Obdélník, čtyřúhelník

Obsah obdélníka počítali Egypťané jako součin délek jeho stran. Je pravděpodobné, že obdobným způsobem počítali i obsah obecného čtyřúhelníka, který se od obdélníka „příliš nelišil".

Počítali tak, že vynásobili aritmetické průměry protilehlých stran.

Tzn.

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

Na stěnách Horova chrámu v Edfu z 2. stol. př. Kr. jsou takto počítány obsahy většího počtu čtyřúhelníků.

3.4.2. Trojúhelník

Výpočty obsahu trojúhelníka, se kterými se setkáváme v egyptských textech, odpovídají našemu vzorci, podle něhož je polovina základny trojúhelníka násobena jeho výškou. Nemůžeme si však být zcela jisti, zda údaj, který v egyptských textech chápeme jako výšku, není ve skutečnosti délkou jedné ze stran trojúhelníka. K dispozici je velmi málo příkladů.

Pro ilustraci uveďme jeden příklad z Rhindova papyru **R51**, nadepsaný jako *Metoda výpočtu trojúhelníkové plochy*. Je zadán trojúhelník, jehož základna má délku 400 a výška 1000 loktů a slovní popis řešení:

Vypočti $\frac{1}{2}$ *ze 4, je to 2, pro udání jeho obdélníka. Počítej s 10 dvakrát a to je obsah jeho plochy* (rozměry trojúhelníka jsou zadány v jednotkách chet).

Dále jsou to příklady **M4** a **M17.**

3.4.3. Lichoběžník

Obsah lichoběžníka počítali Egypťané podobným způsobem jako obsah trojúhelníka.

3.4.4. Kruh

Egyptský výpočet obsahu S kruhu o průměru d odpovídá v naší symbolice vzorci:

$$S = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2$$

Srovnáme-li současný vzorec pro výpočet obsahu kruhu o průměru d se vzorcem odpovídajícím egyptskému výpočtu, dojdeme k rovnosti

$$\frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{64}{81}d^2$$

a získáme tak „egyptskou hodnotu“ čísla π

$$\frac{256}{81} = 3{,}1605\,.$$

Egypťané tedy úspěšně nahradili obsah kruhu obsahem čtverce; jeho stranu nebylo těžké získat, stačilo odebrat od průměru kruhu jeho devítinu.

3.4.5. Krychle a kvádr

V několika příkladech, které v dochovaných egyptských textech nacházíme, je počítán objem čtverhranných obilnic tvaru krychle. Lze však předpokládat, že podle těchto příkladů byl egyptský počtář schopen spočítat objem kvádru. Objem kvádru je např. počítán v příkladu **R44** nadepsaném *Metoda výpočtu čtverhranné obilnice*.

3.4.6. Válec

Objem válce je počítán standardním způsobem, obsah základny (kruh) je vynásoben výškou. Objem válce je počítán v příkladu **R41**, který se jmenuje *Metoda výpočtu kruhové obilnice.*

3.4.7. Jehlan

V několika příkladech Rhindova papyru se pracuje se sklonem rovin. Buď je třeba vypočítat sklon stěny pyramidy, nebo je třeba naopak ze zadaného sklonu a velikosti základny pyramidy vypočítat její výšku. Poznamenejme, že se tyto příklady týkají nikoliv abstraktních jehlanů, ale vždy přímo pyramid, jak je zřejmé z připojených obrázků. Podstavnou hranu pyramidy nazývali Egypťané *wecha-cebet* a výšku *per-em-wes*; hledaný sklon byl označován jako *seked*. Jako příklad může sloužit problém z Rhindova papyru **R56** nadepsaný *Metoda počítání pyramidy*. Je zde úkolem vypočítat sklon stěny pyramidy, která má čtvercovou základnu o straně 360 a výšku 250 loktů. Bylo by také jistě zajímavé vědět, jak Egypťané pyramidy projektovali.

3.4.8. Komolý jehlan

V egyptských textech se nezachoval žádný příklad na výpočet objemu jehlanu (pyramidy), v Moskevském papyru je ale zajímavý příklad na výpočet objemu komolého jehlanu. Je to příklad **M14** pojmenovaný *Metoda výpočtu komolé pyramidy*.

3.4.9. Povrch válce nebo koule

Velmi zajímavou úlohou je příklad **M10**, ale jeho interpretace je velmi obtížná. Zdá se jisté, že jde o výpočet obsahu nějaké plochy, není však jisté, o jaký objekt se jedná. Útvar počítaný je označen jako *koš* nebo *košík*. Jeví se ale málo pravděpodobné, že by Egypťané počítali povrch koule či kupolovitého útvaru. Praktické využití těchto výpočtů je problematické a teoretické odvození přesného návodu pro výpočet povrchu koule a povrchu kupole se dá těžko předpokládat.

3.5. Geometrie v praxi

3.5.1 Zeměměřictví, vytyčování staveb

Každoroční záplavy vedly k výrazným změnám v poměrně velkém pruhu zemědělské půdy kolem Nilu; pozemky proto bylo nutno na tomto území vždy znovu vyměřit. Další rozsáhlá území se Egypťané naučili zavlažovat a zúrodňovat, proto projektovali zavlažovací kanály, zjišťovali výšku terénu apod. Vyměřování zemědělských pozemků a počítání jejich výměr bylo nutné i z dalších důvodů. Výše pozemkových daní totiž závisela na velikosti polí, daň byla odváděna v naturáliích. Rovněž bylo třeba vypočítat množství zrna potřebné k osetí pole známé výměry. Egypťané se proto museli dobře naučit počítat výměry ploch, vyměřovat, měřit objemy většího i menšího množství zrna, převádět měrné jednotky atd.

Základními pomůckami byly měřický prut, měřický provazec a hůlka, kterou zeměměřiči kreslili přímo do písku. Měřické provazy byly pomocí uzlů rozděleny na stejné úseky. Při stavbách bylo zapotřebí vytyčovat vodorovné roviny, konstruovat pravé úhly, stanovit svislice, načrtnout půdorysy staveb ve skutečných rozměrech atd. Vynikající schopnosti egyptských zeměměřičů se projevily při stavbách pyramid a chrámů. Přesnost orientace je fascinující a odchylky jsou většinou nepatrné.

3.5.2. Zobrazování

Kromě půdorysů rýsovali staří Egypťané v řadě situací i nárysy a bokorysy.

Např. v Edfu se dochoval nákres řezu římsy pylonu. Pro rozkreslování rysů, zvětšování a zmenšování v daném měřítku byla v Egyptě užívána čtvercová síť. Půdorysy, nárysy a bokorysy byly často ve čtvercových sítích rozpracovávány.

3.6. Ostatní úlohy

V této části se budeme zabývat příklady, které řeší praktické problémy a nespadají přímo do aritmetiky, algebry či geometrie, i když poznatky z těchto disciplín využívají. Spadají sem zejména úlohy o *chlebu a pivu* a několik dalších úloh.

3.6.1. Úlohy o chlebu a pivu

Poměrně zajímavým souborem egyptských početních problémů jsou úlohy, které se zabývají různými přepočty chlebů a piva. Pivo bylo v Egyptě důležitým artiklem, chlebem a pivem byli placeni úředníci i vojáci, plné a zapečetěné pivní džbánky se mohly směňovat za jiné výrobky. Pivo bylo vyváženo, bylo součástí obětních darů, využívalo se v lékařství atd. V příkladech o chlebu a pivu se objevuje výraz *pesu*, který vyjadřuje kvalitu chleba, resp. piva. Numericky je hodnota *pesu* dána jako počet bochníků chleba, resp. džbánů piva, které je možno vyrobit z jedné měřice zrna. Čím větší tedy *pesu*, tím méně kvalitní je bochník chleba a tím slabší je pivo.

Na ukázku uveďme dva příklady, a to **M5** a **M8**, v nichž je třeba vypočítat počet džbánů piva o *pesu* 4, které odpovídají 100 chlebům o *pesu* 20. Dodatečným údajem je zde „$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ *sladu pro datle*". Řešení: Z jedné měřice obilí se podle zadání upeče dvacet chlebů; sto chlebů se tedy upeče ze z pěti měřic.

Z postupu řešení se dá zjistit, že uvedený údaj „$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ sladu pro datle" odpovídá koeficientu $\frac{1}{2}$, který je třeba použít. Vypočtených pět měřic se tedy vynásobí jednou polovinou a čtyřmi; vychází 10 džbánů piva.

3.6.2 Úlohy praktické

Dále se zmíníme o několika dalších zajímavých úlohách. Příklad **M21**, pojmenován *Metoda výpočtu míšení chleba*, patří k problematice směšovacího počtu. Příklad **M23**, jenž je jednoduchou slovní úlohou, je nadepsán *Metoda počítání prací výrobce sandálů: … když řeže, je to 10 za den; když dokončuje, je to 5 za den. Když řeže i dokončuje, kolik udělá za den? Sečti dobu těch 10 s těmi 5, vyjde celkem 3. Počítej s tím, až najdeš 10, vyjde* $3\frac{1}{3}$ *-krát.*

Hle, $3\frac{1}{3}$ *je to pro jeden den. Nalezl jsi správně* $3\frac{1}{3}$. V příkladech **R54** a **R55** je třeba oddělit obsah 7 *secat* z 10 polí, resp. 3 *secat* z 5 polí. V příkladu **R63** je třeba 700 chlebů rozdělit čtyřem mužům v poměru $\frac{2}{3}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$. V příkladu **R66** je třeba vypočítat denní příděl z 10 měřic tuku určených pro celý rok. Příklad **R67** se týká sčítání dobytka. V příkladu **R68** se dělí 100 měřic obilí mezi čtyři mužstva o 12, 8, 6, a 4 osobách. Příklady **R82** až **R84** jsou věnovány výpočtům množství krmiva pro domácí zvířata.

3.7. Čas

Matematické a astronomické znalosti prvních civilizací byly využívány v *chronologii*, nauce o měření času. Nejprve byla budována na poznatcích získaných sledováním pohybů nebeských těles na obloze, později byl její teoretický základ postaven na znalostech skutečných pohybů Země a Měsíce.

Hlavním úkolem chronologie bylo propojit délky dne, měsíce a roku v jeden jednotný a jednoduše konstruovaný celek, kterému se říká kalendář. Dalšími úkoly chronologie bylo rozpracování různých metod měření času, zavádění jednotek pro měření apod.

3.7.1 Kalendář

Nejvýraznější časovou jednotkou byl odpradávna den. V pásu ekliptiky vymezili Egypťané 36 souhvězdí, tzv. dekanů. Tato souhvězdí, jak se ráno před východem slunce objevovala nad obzorem, vymezovala rok. Každých 10 dnů bylo ve znamení nějaké hvězdy nebo souhvězdí. Každý dekanus kulminoval 10 dnů. Větší počty dnů se stávaly základem delších, různými způsoby vytvářených časových odobí.

Střídání fází Měsíce, které je rovněž výrazným a velmi snadno pozorovatelným jevem, se stalo základem nejstarších kalendářů, tzv. *měsíčních* nebo *lunárních*. Protože se fáze měsíce opakují přibližně v intervalu 29,5 dne, byla v nejstarších kalendářích délka měsíce střídavě 29 a 30 dnů.

Periodicita přírodních dějů je způsobena oběžným pohybem Země okolo Slunce. Během jednoho oběhu se na Zemi vystřídají čtyři roční období a proběhne celý cyklus přírodních dějů. Tato doba se nazývá rok. Přibližná délka roku je 365,25 dne.

Staří Egypťané užívali nejprve *lunární* kalendář. Později jako první národ vůbec zavedli *solární* kalendář, ve kterém měl rok 365 dnů. Skládal se z 12 měsíců po 30 dnech a dodatečných 5 svátečních dnů. Každý měsíc měl 3 velké týdny po 10 dnech. Vytvořený kalendář dával rytmus hospodářskému životu, zemědělským pracím, náboženským slavnostem, svátkům atd. Náboženská funkce kalendáře vedla k tomu, že se jím zabývali převážně kněží.

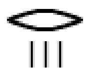
Podle některých historiků byla délka egyptského roku stanovena podle poměrně pravidelně se opakujících záplav; jejich příchod, následné rozvodnění Nilu, jeho pozdější návrat do koryta, setba, doba vegetace a sklizeň, to vše tvořilo dlouhý přirozený cyklus, kterému bylo nutno se přizpůsobit a který bylo dobré znát. Dlouhodobé zaznamenávání intervalů mezi počátky záplav mohlo vést ke stanovení délky roku na 365 dnů, odchylka od skutečné délky roku nebyla po řadu let pozorována, neboť záplavy nepřicházely zcela pravidelně.

Poznamenejme ještě, že Egypťané nečíslovali roky tak jako my. Důležité události byly označovány rokem, měsícem a dnem vlády jednotlivých panovníků. V době Staré říše byly vztahovány ke sčítání dobytka, které bylo prováděno každým druhým rokem. Proto je obtížné události v Egyptě přesně datovat.

3.8. Číselná mystika

Ve starém Egyptě se postupně rozvinula číselná mystika, patrně byla ovlivněna sledováním pohybů nebeských těles a měřením času.

4. Egyptské zlomky (Kmenné zlomky)

Není známo, jak přesně vznikaly zlomky, neboť stejně jako o vzniku přirozených čísel nemáme ani o vzniku zlomků žádné přímé svědectví. Předpokládá se, že tvoření pojmu zlomků bylo podmíněno rostoucími hospodářskými potřebami. Například v Egyptě to bylo nejspíše kvůli měření a dělení plochy pole na části. Zlomek se proto vyjadřoval jako část jednotky. Nejstaršími zlomky, které se v Egyptě objevily, byly patrně jedna polovina a jedna čtvrtina. Jejich vznik byl zřejmě, jak již bylo uvedeno, inspirován procesem půlení. Potřeby kalendářních výpočtů si vynutily další rozvoj počítání se zlomky. Data dnů v měsíci se odměřovala částmi (zlomky délky) celého měsíce a tento působ se pak přenesl na jiné případy. První den měsíce byla $\frac{1}{30}$ měsíce, třetí $\frac{1}{10}$ a dvacátý $\frac{2}{3}$. V době Staré říše byly užívány i jiné zlomky, pro které existovaly zvláštní symboly. V době Střední říše začaly být v Egyptě užívány pouze *kmenné zlomky*, tj. zlomky ve tvaru $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, ke nimž se ještě přidával zlomek $\frac{2}{3}$. (Dnes vyjádření zlomku $\frac{x}{y}$ pomocí součtu různých kmenných zlomků nazýváme vyjádřením pomocí *egyptských zlomků*.) Toto též velmi zjednodušilo symboliku, a to jak v hieroglyfickém, tak i v hieratickém zápisu. Zlomek o čitateli jedna se psal v hieroglyfickém písmu tak, že se nad symbol vyjadřující jmenovatel napsal hieroglyfický znak *ra*:  To znamená, že $\frac{1}{3}$ vypadala takto:  V hieratickém písmu se nadepisovala čárka nebo tečka.

Speciální symboly byly používány pro $\frac{1}{2}$  a pro $\frac{2}{3}$ . Pokud byl jmenovatel velmi dlouhý, symbol *ra* se psal jen nad jeho část

 $= \frac{1}{331}$

4.1. Rhindův papyrus a egyptské zlomky

Kladná racionální čísla vyjadřovali Egypťané pouze jako součet přirozeného čísla, navzájem různých kmenných zlomků a případně zlomku dvě třetiny. Pro tento způsob bylo však nutno vyjádřit zlomky $\frac{2}{n}$ jako součet kmenných zlomků.

Bylo-li n sudé, zlomek se jednoduše zkrátil. Pro lichá n byly zhotoveny zvláštní tabulky. Jedna je zaznamenána na Káhúnském papyru. Zde jsou v deseti řádcích uvedena čísla týkající se zlomků $\frac{2}{n}$ pro lichá $n = 3, ..., 21$.

V Rhindově papyru je rozkladu zlomků $\frac{2}{n}$ na kmenné zlomky věnována ještě větší pozornost. Nalezneme lze rozklad pro lichá $n = 3, ..., 101$. Rozklady jsou seřazeny do tabulky a na papyru je popsán i její vznik. Tabulka vypadá takto:

5	3 15	**39**	26 78	**73**	60 219 292 365
7	4 28	**41**	24 246 328	**75**	50 150
9	6 18	**43**	42 86 129 301	**77**	44 308
11	6 66	**45**	30 60	**79**	60 237 316 790
13	8 52 104	**47**	30 141 470	**81**	54 162
15	10 30	**49**	28 196	**83**	60 332 415 498
17	12 51 68	**51**	34 102	**85**	51 255
19	12 76 114	**53**	30 318 795	**87**	58 174
21	14 42	**55**	30 330	**89**	60 356 534 890
23	12 276	**57**	38 114	**91**	70 130
25	15 75	**59**	36 236 531	**93**	62 186
27	18 54	**61**	40 244 488 610	**95**	60 380 570
29	24 58 174 232	**63**	42 126	**97**	56 679 776
31	20 124 155	**65**	39 195	**99**	66 198
33	22 66	**67**	40 355 536	**101**	101 202 303 606
35	30 42	**69**	46 138		
37	24 111 296	**71**	40 568 710		

Tab. 1

Tučnými čísly jsou zde vyznačeny jmenovatele u zlomku $\frac{2}{n}$ a ve vedlejší buňce tabulky jsou vypsány jmenovatelé sčítaných zlomků, které mají v čitateli jedničku. První záznam tabulky lze tedy přepsat do tvaru: $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$.

Záměrně není uveden rozklad zlomku $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$, který, jak již bylo zmíněno, Egypťané užívali a měli pro něj i samostatný symbol, neboť by se nehodil do námi formulovaného zápisu tabulky rozkladů.

4.1.1 Použití tabulky rozkladů

Zde si ukážeme, jak je možné pomocí tabulky rozkladů rozložit zlomek $\frac{x}{y}$, jehož čitatel je větší než 2 a jehož jmenovatele lze nalézt v tabulce rozkladů, na součet kmenných zlomků.

Vezměme si zlomek $\frac{5}{21}$.

Postup:

1) $\frac{5}{21} = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{2}{21}$

2) $\frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{2}{21} = \frac{1}{21} + \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{42}\right) + \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{42}\right)$

3) $\frac{1}{21} + \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{42}\right) + \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{42}\right) = \frac{1}{21} + \frac{2}{14} + \frac{2}{42}$

4) $\frac{1}{21} + \frac{2}{14} + \frac{2}{42} = \frac{1}{21} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21}$

5) $\frac{1}{21} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7} + \frac{2}{21}$

6) $\frac{1}{7} + \frac{2}{21} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$

Tedy $\frac{5}{21} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$.

Tento rozklad, jak je vidět, je celkem pracný a zdlouhavý, ale nakonec vede ke kýženému cíli. Je nutno poznamenat, že ve všech dochovaných tabulkách nebo jejich zlomcích jsou stejné rozklady. Dá se z toho usoudit, že se pravděpodobně používalo pouze těchto rozkladů, které byly přijaty jako určitá rozumná a všeobecně uznávaná konvence. Je to určitě i z důvodu, že pokud by jednotliví písaři požívali různé rozklady, bylo by obtížné výsledky porovnávat.

Jak bylo řečeno výše, zlomek $\frac{5}{21}$ se dá rozložit i jinak, než $\frac{5}{21}=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$.

Další možné rozklady jsou např. $\frac{5}{21}=\frac{1}{5}+\frac{1}{27}+\frac{1}{945}$ anebo $\frac{5}{21}=\frac{1}{6}+\frac{1}{14}$.

Stejně tak se dají ale zlomky tvaru $\frac{2}{n}$ rozložit různými způsoby. Uvažujme opět rozklad $\frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$.

Tento zlomek lze ještě rozložit následujícím způsobem:

$$\frac{2}{21}=\frac{1}{11}+\frac{1}{231},$$

$$\frac{2}{21}=\frac{1}{12}+\frac{1}{84},$$

$$\frac{2}{21}=\frac{1}{15}+\frac{1}{35}$$

Proč Egypťané požívali jeden způsob rozkladu a jak sestavovali tabulky není stále s konečnou platností rozřešeno a jsou o tom různé dohady. V další části kapitoly porovnáme různé náhledy, jak byla tabulka $\frac{2}{n}$ sestavena a jaké zákonitosti lze v tabulce nalézt.

4.1.2 Vytvoření tabulky rozkladů

Můžeme si položit otázku, jak asi tabulka vznikla. Dá se usuzovat, že tabulka nevznikla naráz, ale postupně se přicházelo na jednotlivé rozklady. V dnešní době stále není jasné, zda Egypťané používali na rozklad jeden určitý postup, či zda měli různé postupy pro různá čísla. Uvažujme čísla dělitelná třemi, pěti, sedmi, jedenácti atd. Lze říci, že většina způsobů rozkladu ukazuje na jedno určité místo v papyru, a to na příklad **R61**.

Tento příklad zní: *Řekne-li se ti, co jsou* $\frac{2}{3}$ *z* $\frac{1}{5}$*, počítej s tím 2-krát a 6-krát, toto jsou* $\frac{2}{3}$ *z toho. Hle, ať se počítá podobně pro každý lichý zlomek, který se vyskytne.* Pokud tento zobecněný návod zapíšeme v současné symbolice, bude vypadat takto: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{k}=\frac{2}{3k}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{6k}$

Když se podíváme dále do tabulky, vidíme, že Egypťané rozkládali všechny zlomky, jejichž jmenovatel byl dělitelný třemi, tímto způsobem a zacházeli s nimi jako s jedním druhem. Rozklad zlomků s jmenovatelem dělitelným třemi je tedy možné provést také podle vzorce

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{2\cdot\frac{n}{3}}+\frac{1}{2n}.$$

Dalším rozkládaným zlomkem v tabulce jsou $\frac{2}{5}$. Tento zlomek je rozložen na $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$. Všechny zlomky se jmenovatelem, jenž je dělitelný 5, jsou rozkládány pomocí jednoduchého násobku tohoto výrazu, a to $\frac{2}{5k}=\frac{1}{3k}+\frac{1}{15k}$. Neboli jsou rozloženy podle vzorce

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{3\cdot\frac{n}{5}}+\frac{1}{3n}.$$

Podobně přiřadili k tabulkové hodnotě $\frac{2}{7}$ rozklad $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$. Poté vyhledali v tabulce všechny zlomky jejichž, jmenovatel je dělitelný sedmi. Ty poté rozkládali podle výrazu $\frac{2}{7k}=\frac{1}{4k}+\frac{1}{28k}$, ten lze upravit na vzorec

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{4\cdot\frac{n}{7}}+\frac{1}{4n}.$$

Nakonec přiřadili $\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$ ke zlomku $\frac{2}{11}$. Všechny další zlomky, jejichž jmenovatel je násobkem jedenácti, rozkládali do tvaru $\frac{2}{11k}=\frac{1}{6k}+\frac{1}{66k}$. Lze jej zapsat

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{6\cdot\frac{n}{11}}+\frac{1}{6n}.$$

Tento vztah platí pro $k=5$, pro násobky 3 a 7 již byly použity předchozí rozklady.

S touto procedurou skončili u prvočísla jedenáct, což odpovídá tomu, že v tabulce se vyskytují pouze jmenovatelé do čísla 101. Je obdivuhodné, že Egypťané již v roce 1850 př. Kr. měli jakousi představu o vztahu mezi prvočísly a čísly z nich složených. Domníváme se, že Egypťané vědomě třídili násobky malých prvočísel až do čísla 11 do skupin a ostatním prvočíslům poté přiřazovali unikátní rozklady.

Jak již bylo řečeno, rozklad zlomku $\frac{2}{n}$, kde je n jedno z prvočísel 3, 5, 7, 11 nebo jejich násobky, prováděli Egypťané podle pravidel, která se dají shrnout do jednoho jednoduchého vzorce:

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{(n+1)}{2}}+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} \qquad (1)$$

(Stejný vzorec je použit i pro zlomek $\frac{2}{23}$, ale toto může být náhoda.)

Poté, co Egypťané „vyřešili“ tato malá prvočísla (3, 5, 7, 11) a jejich násobky, záznamy v tabulce ukazují, že Egypťané pro rozklad zbylých jmenovatelů používali identitu

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{a}+\frac{2a-n}{an}. \qquad (2)$$

Zde je a voleno tak, aby splňovalo podmínku $a>\frac{n}{2}$ a zároveň bylo a „pěkné kulaté číslo“.

Abychom našli zbývající členy rozkladu, rozdělíme hodnotu $2a-n$ na jednu, dvě nebo tři rozdílné celočíselné části, a to tak, že každá část je dělitelem a. (Proto je dobré volit a jako „pěkné kulaté číslo“, aby mělo hodně dělitelů.)

Ukažme si to na příkladu. Vezměme zlomek $\frac{2}{89}$.

Zvolíme $a=60$ $\left(60>\frac{89}{2}\right)$; poté nám rozdíl $2a-n$ dává hodnotu 31. Nyní potřebujeme vyjádřit číslo 31 jako součet tří nebo méně rozdílných celých čísel, z nichž každé bude dělitelem 60. Jedno z možných rozdělení je $31=15+10+6$. Po dosazení do vzorce (2) dostáváme:

$$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{31}{5340}$$

Toto lze zapsat jako:

$$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{15}{5340}+\frac{10}{5340}+\frac{6}{5340}$$

Po zkrácení dostáváme rozklad, jenž lze nalézt v tabulce:

$$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}$$

Lze tedy shrnout tabulku rozkladů zlomků $\frac{2}{n}$ také tak, že vyjádříme pro každé prvočíslo n čísla $a,b,\left(c\left(\mathrm{a}\, d\right)\right)$, když $\frac{2}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\left(\frac{1}{c}+\left(\frac{1}{d}\right)\right)$.

Celkem dostaneme:

n	*2a - n*	*a*	*B*	*c*	*D*	**zahrnuje**
3	1	2	6			násobky 3
5	1	3	15			25, 65, 85
7	1	4	28			49, 77
11	1	6	66			55
23	1	12	276			
13	3	8	52	104		
17	7	12	51	68		
19	5	12	76	114		
31	9	20	124	155		
37	11	24	111	296		
41	7	24	246	328		
47	13	30	141	470		
53	7	30	318	795		
59	13	36	236	531		
67	13	40	335	536		
71	9	40	568	710		
97	15	56	679	776		
29	19	24	58	174	232	
43	41	42	86	129	301	
61	19	40	244	488	610	
73	47	60	219	292	365	
79	41	60	237	316	790	
83	37	60	332	415	498	

89	31	60	356	534	890
Výjimky					
35	25	30	42		
91	49	70	130		
95	25	60	380	570	
101	1111	101	202	303	606

Tab. 2

Tato tabulka (Tab. 2) navozuje dvě otázky. Za prvé, pokud budeme přepokládat, že Egypťané používali vzorec (2), aby určili rozklady zlomků $\frac{2}{n}$, kde n je „velké“ prvočíslo, jak volili hodnotu a a způsob rozdělení hodnoty $2a-n$ ze všech různých možností? Toto bylo zkoumáno a pomocí počítače se přišlo na určité zajímavé zákonitosti. Omezíme se na rozklady zlomků, při nichž vycházejí tři nebo čtyři členy. Dále budeme uvažovat určité číslo x. Číslo x je nejmenší číslo, které dostaneme, když rozdělíme hodnotu $2a-n$ na součet dělitelů a. Omezme se na případy, kdy je $x>1$. Pokud splníme předchozí podmínky, zjistíme, že rozklad, jenž se vyskytuje v Rhindově papyru je rozklad pro který $\frac{a}{x}$ vychází jako nejmenší. Jako příklad si vezměme $n=43$.

Uveďme možná řešení:

			rozdělení	***2a - n***		
n	***a***	***2a-n***	***x***	***y***	***z***	***a/x***
43	24	5	2	3		12
43	28	13	2	4	7	14
43	30	17	2	15		15
43	30	17	2	5	10	15
43	36	29	2	9	18	18
43	42	41	6	14	21	7

Tab. 3

Rozklad, jenž se objevuje v tabulce rozkladů (Tabulka 1), je roven $\frac{a}{x} = 7$. Egypťané užívali rozklady s nejmenším $\frac{a}{x}$ pro „velká“ prvočísla 13, 17, 19, 29, 31, 37, 41, 43, 59, 67, 73, 79, 83, 97. Opominuli prvočísla 47, 53, 61, 71 a 89. V těchto „opominutých“ případech se ovšem nejmenší hodnoty $\frac{a}{x}$ lišily o 2, 6, 1, 3 a 1.

4.1.3 Výjimky

Druhou otázkou již si můžeme položit, je, jak vysvětlíme výjimky uvedené v tabulce rozkladů. První tři výjimečné zlomky jsou zlomky se jmenovateli 35, 91 a 95. Ty z nějakého důvodu nebyly rozloženy jako ostatní čísla, i přes to, že nejsou prvočísly. Z našeho pohledu např. zlomek $\frac{2}{95} = \frac{2}{(5 \cdot 19)}$, by měl být rozložen podle formule $\frac{2}{5k} = \frac{1}{3k} + \frac{1}{15k}$, kde $k = 19$.

V tabulce je ovšem rozložen podle výrazu $\frac{1}{12k} + \frac{1}{76k} + \frac{1}{114k}$, kde $k = 5$.

Zlomky $\frac{2}{35}$ a $\frac{2}{91}$ jsou ještě „zvláštnější“. Jsou to v podstatě nejzajímavější rozklady v celé tabulce. Jsou to jediné zlomky, jejichž jmenovatele jsou čísla „složená“ (tzn. $35 = 5 \cdot 7$ a $91 = 7 \cdot 13$). Jejich rozklady v tabulce nejsou pouhými násobky jednoho z prvočísel. Dá se říct, že pro tato dvě čísla se Egypťané uchýlili od jejich tradičního rozkladu pomocí násobení, k rozkladu takzvaně „*harmonicko-aritmetickému*“.

Je známo, že staří Řekové znali definice různých typů průměrů.

1) Aritmetický průměr: $A(p,q) = \frac{p+q}{2}$

2) Geometrický průměr: $G(p,q) = \sqrt{p \cdot q}$

3) Harmonický průměr: $H(p,q) = \frac{2}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$

Historici se domnívají, že Řekové zdědili tyto vědomosti po Babyloňanech, ale je jistě možné, že byly známy i starým Egypťanům. Konkrétně, podíváme-li se na harmonický průměr, rozhodně alespoň „vypadá“ egyptsky. Povšimněme si, že $G(p,q)$ není geometrickým průměrem pouze *p* a *q*, ale i geometrickým průměrem $A(p,q)$ a $H(p,q)$. Jinými slovy, pro jakékoliv *p* a *q* platí: $G(p,q) = \sqrt{pq} = \sqrt{A(p,q)H(p,q)}$. Toto je vidět jednoduše, neboť $pq = AH$. Tedy AH, udává jiný způsob rozdělení čísla, jenž vzniklo jako $p \cdot q$. Dostáváme se k výrazu:

$$\frac{2}{pq} = \frac{2}{A(p,q) \cdot H(p,q)} = \frac{2}{p+q}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$$

$$\frac{2}{p+q}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \tag{3}$$

Je zřejmé, že zlomek $\dfrac{2}{p+q}$ bude kmenným zlomkem, neboť $p+q$ je vždy sudé číslo.

Výraz (3) nám poté skýtá rozklady

$$\frac{2}{5\cdot 7}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$$

a

$$\frac{2}{7\cdot 13}=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{13}\right)=\frac{1}{70}+\frac{1}{130},$$

které můžeme najít v Rhindově papyru.

Nyní nám zbývá prozkoumat poslední rozklad který, je $\dfrac{2}{101}=\dfrac{1}{101}+\dfrac{1}{202}+\dfrac{1}{303}+\dfrac{1}{606}$. Tento rozklad může být proveden pomocí výrazu (2), pokud zvolíme $a=606$ a rozdělení $1111=202+303+606$. Ovšem rozklad je zvláštní tím, že jeho členy jsou pouze násobky $\dfrac{1}{n}$. Zápis v tabulce možná může být pouhou formalitou, jež nám naznačuje, že pro každé n neobsažené v tabulce (tedy větší než 100) můžeme použit čtyřčlenný rozklad

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n},$$

který nám tímto uzavírá celou tabulku.

4.2. Shrnutí

Tabulka rozkladů, která pochází z doby asi 1850 let př. Kr., vypovídá, že Egypťané nejspíše měli povědomí o prvočíslech a číslech z nich složených, dále také také mohli znát aritmetický, harmonický a geometrický průměr. Toto vše naznačuje celkem vysokou sofistikovanost v teorii čísel, než bývá Egypťanům běžně přisuzována. Ovšem je otázka, zda si Egypťané zmíněné znalosti „nevypůjčili" od někoho jiného, např. od Babyloňanů. Neměli bychom ovšem přehlédnout možnost, že by to mohlo být i naopak.

5. Současné metody vyjádření racionálního čísla pomocí Egyptských zlomků

Egypťané vyjadřovali racionální čísla jako součet převrácených hodnot různých celých čísel. To jsme již uvedli v předcházejících kapitolách. Problémem, jak vyjádřit racionální číslo pomocí egyptských zlomků, se však zabývají matematici dodneška. V současnosti tento problém spadá do oblasti teorie čísel a je při jeho řešení hojně využívána výpočetní technika. V této kapitole popíšeme několik „moderních“ metod, jak je možné rozklad na egyptské zlomky provést. Některé metody provedeme do hloubky, jiné pouze popíšeme, protože jejich dokazování je nad možnosti této práce (ať už délkou, nebo obtížností).

Problémem tedy je, jak vyjádřit dané racionální číslo $\frac{p}{q}$ pomocí součtu převrácených hodnot různých celých čísel. To znamená $\frac{p}{q}=\frac{1}{n_1}+\cdots+\frac{1}{n_k}$; $0<n_1<n_2<\ldots<n_k$, $n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{Z}$. Omezme se ještě tím, že $\frac{p}{q}<1$.

5.1 Algoritmy

5.1.1 Štěpící algoritmus

Toto je pravděpodobně „nejhorší“ metoda pro rozklad na egyptské zlomky. Je založena na opakovaném použití výrazu $\frac{1}{q}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q(q+1)}$.

Algoritmus:

1) Uvažujme racionální číslo $\frac{p}{q}$.

2) Rozepíšeme $\frac{p}{q}$ jako součet p zlomků ve tvaru $\frac{1}{q}$.

3) Pokud dostaneme totožné zlomky $\frac{1}{q}$, jeden z nich zachováme a zbylé rozepíšeme podle výrazu $\frac{1}{q}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q(q+1)}$.

4) Opakujeme krok 3, dokud nedostaneme rozklad bez totožných kmenných zlomků.

Příklad 1.

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$$

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{56}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{56}\right)$$

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}+\frac{1}{56}$$

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{72}\right)+\frac{1}{56}+\left(\frac{1}{57}+\frac{1}{3192}\right)$$

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{56}+\frac{1}{57}+\frac{1}{72}+\frac{1}{3192}$$

Důkaz tohoto algoritmu existuje (viz. [Cam]). Je ovšem obtížné dokázat, zda někdy skončí. Důkaz je ovšem nad náš rámec možností. Algoritmus ovšem většinou dává výsledky s největším počtem zlomků a s velkými čísly ve jmenovatelích.

5.1.2 Fibonacci / Sylvesterův algoritmus

Mnohem intuitivnější a „použitelnější“ je *Fibonacci/Sylvesterův algoritmus*. Ten byl poprvé objeven Leopardem Pisánským (Fibonacci), který ho také hojně užíval, neboť upřednostňoval práci s kmennými zlomky. Později se jím zabýval i J. J. Silvestr, jenž dokázal pravdivost algoritmu v roce 1880. Algoritmus je občas také nazýván *chamtivý (Greedy)* algoritmus, protože jednoduše bere největší kmenný zlomek z rozkládaného zlomku nebo jeho zbytku. Hledáme co nejlepší aproximaci zlomku $\frac{p}{q}$ kmenným zlomkem menším než $\frac{p}{q}$ a stejný postup poté aplikujeme na jeho zbytek.

Algoritmus:

1) Uvažujme racionální číslo $\frac{p}{q}$. Označme $p = p'$ a $q = q'$.

2) Pokud $p' = 1$, potom je zlomek kmenný a nerozkládáme. Jinak rozepíšeme číslo q ve zbytkovém tvaru a dostáváme $q' = sp' + r$, $r < p'$.

3) Uvědomme si, že $\frac{p'}{q'} = \frac{1}{s+1} + \frac{p'-r}{q'(s+1)}$. Poté tedy vyjde první zlomek z rozkladu: $\frac{1}{s+1}$.

4) Zbude další zlomek $\frac{p'}{q'}$, kde $p' = p' - r$ a $q' = q'(s+1)$.

5) Zlomek $\frac{p'}{q'}$ se poté zkrátí na základní tvar a pokračuje se krokem 2).

Příklad 2.

Zlomek $\frac{3}{7}$

1) $p \neq 1$, a proto píšeme $7 = 2 \cdot 3 + 1$, tedy $r = 1$ a $s = 2$

2) dostáváme tvar $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{2}{21}$

3) dále počítáme se zlomkem $\frac{2}{21}$, protože $\frac{1}{3}$ již je kmenný zlomek

4) číslo 21 rozepíšeme $21 = 10 \cdot 2 + 1$, $r = 1$ a $s = 10$

5) dostáváme $\frac{2}{21} = \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$

6) vznikl nám tedy rozklad $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$

Otázkou je zda Fibonacci / Sylvesterův algoritmus vždy skončí. Algoritmus nám říká, že $\frac{p'}{q'} = \frac{1}{s+1} + \frac{p'-r}{q'(s+1)}$. Intuitivně lze říci, že algoritmus vyprodukuje nejvíce *p* členů rozkladu, neboť čitatelé se nám stále zmenšují.

Obecně:

Protože $\frac{p'}{q'}$ je v základním tvaru, víme, že $r > 0$.

V kroku 4) máme $p' = p' - r$, takže nové p' je menší nebo rovno předchozímu $p' - 1$.

V kroku 2) již nepokračujeme, pokud $p' = 1$, tudíž můžeme mít nejvíce *p* členů rozkladu.

Nejvíce členů tedy dostáváme, když *r* se vždy rovná jedné a výsledný zlomek je v základním tvaru. Poté má rozklad přesně *p* členů. Toto se ovšem stává málokdy.

Jiný problém u Fibonacci/Sylvesterova algoritmu jsou hodnoty jmenovatelů, jež v rozkladu vycházejí. Ty mohou být značně velké. Například rozklad zlomku $\frac{5}{121}$ pomocí Fibonacci/Sylvesterova algoritmu vychází:

$$\frac{5}{121}=\frac{1}{25}+\frac{1}{757}+\frac{1}{763309}+\frac{1}{873960180912}+\frac{1}{1527612795642063418846225}$$

Srovnejme to s optimálním výsledkem $\frac{5}{121}=\frac{1}{33}+\frac{1}{121}+\frac{1}{363}$. Fibonacci o tomto problému věděl, neboť sám uvádí $\frac{4}{49}=\frac{1}{13}+\frac{1}{319}+\frac{1}{319(637)}$, ale $\frac{4}{49}=\frac{1}{14}+\frac{1}{98}$. Navrhuje proto, pokud nevyjde napoprvé „elegantní" řešení, že bychom měli vyzkoušet menší první zlomek v rozkladu. Neříká ovšem, co považuje za elegantní řešení, a proto se poté z algoritmu stává spíše metoda řešení pokus-omyl.

5.1.3 Golombův algoritmus

S. W. Golomb popsal jednoduchý algoritmus, který může být použit pro rozložení racionálního čísla $\frac{p}{q}$ na sumu p nebo méně kmenných zlomků.

Algoritmus:

1) Uvažujme racionální číslo $\frac{p}{q}$. Označme $p = p'$a $q = q'$.

2) Pokud $p' = 1$, potom je zlomek kmenný a nerozkládáme.

3) Zvolme p''tak, že $p'p'' = q'r + 1$, $0 < p'' < q'$, $r \in \mathbb{Z}$.

4) Dostáváme rozklad $\frac{p'}{q'} = \frac{1}{p''q'} + \frac{r}{p''}$. Zlomek $\frac{1}{p''q'}$ je první zlomek rozkladu.

5) Označíme $q' = p''$ a $p' = r$ a pokračujeme krokem 2).

Příklad 3.

Rozložme $\frac{3}{7}$ podle Golombova algoritmu.

1) $p' = 3$, $q' = 7$, $p' \neq 1$

2) máme najít p'' a r tak, aby $3p'' = 7r + 1$ a zároveň $0 < p'' < q'$, $r \in \mathbb{Z}$, zcela evidentně jsou to čísla $p'' = 5$ a $r = 2$

3) dostáváme rozklad $\frac{3}{7} = \frac{1}{35} + \frac{2}{5}$

4) rozkládáme $\frac{2}{5}$, $r = 1$ a $p'' = 3$

5) rozklad tedy pokračuje $\frac{2}{5} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3}$

6) výsledný rozklad tedy je $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35}$

Golombův algoritmus je lepší než Fibonacci/Sylvesterův algoritmus, pokud budeme porovnávat jmenovatele, jež v rozkladech vycházejí. Jak jsme viděli, u Fibonacci/Sylvesterova algoritmu vycházejí jmenovatelé u některých čísel velmi velcí a není žádné omezení jejich velikosti. U Golombova algoritmu jedno omezení velikosti jmenovatelů existuje. Jmenovatelé budou vycházet nejvýše v hodnotě $q(q-1)$. Toto se dá dokázat, podíváme-li se zpět na algoritmus.

V kroku 3) vidíme, že $p'' < q'$, a tedy $p'' \leq q'-1$.

Jmenovatel v kroku 4) je roven $p''q'$, tudíž jmenovatel $\leq (q'-1)q'$.

Povšimněme si, že v kroku 5) je nový jmenovatel $q' = p''$ menší než původní jmenovatel q'. Z toho vidíme, že q' se stále zmenšuje, a proto jmenovatel nemůže být větší než $q(q-1)$.

5.1.4 Binární algoritmus

Uvědomme si, že pokud máme zadáno nějaké číslo $N = 2^n$, lze jakékoliv číslo $m < N$ zapsat jako součet různých dělitelů (*d*) *N*. Jednoduše zapíšeme číslo v binární soustavě. Ve skutečnosti *m* může být zapsáno jako součet *n* nebo méně dělitelů, neboť číslo 2^n má přesně *n* dělitelů ($2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{n-1}$). Například $\frac{5}{16} = \frac{1+4}{16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{4}$.

Algoritmus:

1) Uvažujme racionální číslo $\frac{p}{q} < 1$.

2) Najděme $N_{k-1} < q \leq N_k$.

3) Pokud $q = N_k$, rozepíšeme p jako součet k nebo méně dělitelů N_k:

$p = \sum_{i=1}^{j} d_i$. Dostaneme tedy vyjádření $\frac{p}{q} = \sum_{i=1}^{j} \frac{d_i}{N_k} = \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{\frac{N_k}{d_i}}$. Jinak pokračujme ke kroku 4.

4) Pro některá celá čísla s a r, kde $0 < r < N_k$,

platí: $\frac{p}{q} = \frac{pN_k}{qN_k} = \frac{qs + r}{qN_k} = \frac{s}{N_k} + \frac{r}{qN_k}$

5) Zapíšeme $s = \sum d_i$, kde d_i jsou různí dělitelé N_k. Zapišme $r = \sum d_i^{;}$, kde $d_i^{;}$ jsou různí dělitelé N_k.

6) Dostáváme rozklad $\sum \frac{1}{\left(\frac{N_k}{d_i}\right)} + \sum \frac{1}{\left(\frac{qN_k}{d_i^{;}}\right)}$.

Příklad 4.

Jako příklad si vezměme zlomek $\frac{5}{21}$.

1) $16 < 21 < 32$

2) $\frac{5}{21} = \frac{5(32)}{21(32)}$

3) $\frac{5}{21} = \frac{7(21) + 13}{21(32)}$

4) $\frac{5}{21} = \frac{7}{32} + \frac{13}{21(32)}$

5) $\frac{5}{21}=\frac{1+2+4}{32}+\frac{1+4+8}{21(32)}$

6) $\frac{5}{21}=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{84}+\frac{1}{168}+\frac{1}{672}$

Binární algoritmus dává rozklad, kde je maximální hodnota jmenovatele $D(n)<n^2$. Maximální počet členů rozkladu je $L(n)=O(\log n)$.

Nejdříve si ukažme, že algoritmus opravdu funguje. V kroku 2) vidíme, že $p<q<N_k$, a tedy $pN_k<qN_k$. Dále víme, že $qs+r=pN_k<qN_k$, a tudíž $s<N_k$. Díky tomu můžeme vždy najít vyjádření pro s a r. Výslední jmenovatelé ve vyjádření jsou různí, neboť q dělí druhou skupinu jmenovatelů (odpovídající r). Q nemůže dělit jmenovatele příslušné k s, pokud q není mocnina 2. Ovšem pokud by q bylo mocnina dvou, nedostali bychom se nikdy za krok 2). Tudíž můžeme říci, že algoritmus funguje. V případě, že $q=N_k$, bude mít rozklad zřejmě nejvíce členů. V případě, že $q<N_k$, bude mít rozklad nejvíce $2k$ členů. Protože $k=\log_2 N_k$, dá se říci, že rozklad bude mít nejvíce $2\log q$ členů. Tedy $L(n)=O(\log n)$. V případě $q=N_k$ je největším jmenovatelem právě q. V případě $q<N_k$ může mít největší jmenovatel hodnotu $q\cdot N_k$, to znamená $q(q-1)$. Z toho plyne $D(n)<n^2$. (Gong [12])

5.1.5 Bleicher/Erdösův algoritmus

Čísla ve tvaru 2^n jsou čísla s nejmenším počtem dělitelů. Toto způsobuje, že minimální hranice počtu členů v rozkladu je $\log q$. Je zřejmé, že pokud bychom měli číslo s více děliteli, mohli bychom zapsat čitatel jako součet méně dělitelů, čímž by se zmenšil počet členů v rozkladu. Abychom zvýšili počet dělitelů, můžeme se vyhnout vícenásobným členům v rozkladu, to znamená vyjádřit čitatel jako součet navzájem různých kladných dělitelů čísla $q!$. Bleicher a Erdös používají tento postup ve svém algoritmu z roku 1976, zde si definují číslo $N_k = \prod k$ (součin po sobě jdoucích prvočísel $2, 3, \ldots, k$)

Algoritmus:

1) Uvažujme racionální číslo $\frac{p}{q} < 1$. Najděme číslo k tak, že $\mathrm{N}_{k\text{-}1} < q < N_k$.

2) Pokud $q \mid N_k$, potom $\frac{p}{q} = \frac{b}{N_k}$ a píšeme $b = \sum d_i$, kde všechna $d_i \mid N_k$.

3) Pokud ne, je $\frac{p}{q} = \frac{pN_k}{qN_k} = \frac{(sq + r)}{qN_k} = \frac{s}{N_k} + \frac{r}{qN_k}$,

kde $N_k\left(1 - \frac{1}{k}\right) \le r \le N_k\left(2 - \frac{1}{k}\right)$.

Člen $\frac{s}{N_k}$ jej totožný se členem $\frac{b}{N_k}$.

4) Nalezneme rozklad pro r a vynásobíme jmenovatele q.

Příklad 5.

1) $\frac{5}{121}$ tedy $k = 4$ a $N_k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

2) $\frac{5}{121} = \frac{(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot 5}{(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot 121}$

3) $N_k\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{315}{2} = 157{,}5$

$N_k\left(2 - \frac{1}{k}\right) = \frac{735}{2} = 367{,}5$

4) Uvědomme si, že $\frac{pN_k}{q} = \frac{5\cdot(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7)}{121} \doteq 8{,}7$.

Tedy $s = 7$ a $sq + r = 7\cdot 121 + 203$.

5)
$$\frac{5}{121} = \frac{7}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{203}{(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7)\cdot 121}$$

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{30} + \frac{29}{(2\cdot 3\cdot 5\cdot 7)\cdot 121}$$

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{30} + \frac{3+5+6+15}{(2\cdot 3\cdot 5)\cdot 121}$$

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{30} + \frac{1}{1210} + \frac{1}{726} + \frac{1}{605} + \frac{1}{242}$$

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{30} + \frac{1}{242} + \frac{1}{605} + \frac{1}{726} + \frac{1}{1210}$$

Pro Bleicher/Erdösův algoritmus platí, že maximální hodnota jmenovatele $D(N) = O\left(N(\log N)^3\right)$. (Gong [15])

5.1.6 Tenebaum/Yokotův algoritmus

Tenebaum/Yokotův algoritmus je velmi podobný Bleicher/Erdösovu algoritmu. Stejně definuje N_k a je identický pro část $\frac{s}{N_k}$. Rozklad má tedy stejný počet členů jako u Bleicher/Erdösova algoritmu. Nicméně část algoritmu $\frac{r}{NN_k}$ a to, jak s ní algoritmus nakládá, zajistí rozklad s menšími hodnotami ve jmenovateli. Definujme tedy $N_k = \prod k$.

Algoritmus:

1) Uvažujme racionální číslo $\frac{a}{N} < 1$. Najdeme k takové, že $N_{k-1} \le N < N_k$.

2) Pokud $N \mid N_k$, potom $\frac{a}{N} = \frac{b}{N_k}$ a můžeme napsat $b = \sum d_i$, kde všechna

$d_i \mid N_k$.

3) Jestliže neplatí $N \mid N_k$, potom $\frac{a}{N} = \frac{aN_k}{NN_k} = \frac{(sN + r)}{NN_k} = \frac{s}{N_k} + \frac{r}{NN_k}$,

$N_k \le r < 2N_k$, $0 \le s < N_k$.

Člen $\frac{s}{N_k}$ je totožný se členem $\frac{b}{N_k}$.

4) Rozklad pro člen $\frac{r}{N_k}$ nalezneme jako $\frac{r}{N_k} = \frac{r^*}{\prod_{j=1}^{n} s_j}$, kde $s_n = p_k$. Najdeme

rozklad tohoto zlomku a vynásobíme jmenovatele N.

Příklad 6.

1) $\frac{16}{17}$: $k = 3$ a $N_k = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

2) $\frac{16}{17} = \frac{16(30)}{17(30)}$

3) $\frac{16}{17} = \frac{[26(17) + 38]}{17(30)}$

4) $\frac{16}{17}=\frac{26}{30}+\frac{38}{17(30)}$

5) $\frac{26}{30}=\frac{15+10+1}{30}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}$

6) $s_4=5=p_k$

7) $\frac{38}{30}=\frac{152}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$

8) $\frac{38}{30}=\frac{120+30+2}{120}$

9) $\frac{38}{30}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{60}$

10) $\frac{16}{17}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{17}+\frac{1}{68}+\frac{1}{1020}$

Tento algoritmus zajišťuje, že maximální hodnota jmenovatele bude

$$D(N)\leq 4N(\log N)^2 \log^2 N\,.$$

Maximální počet zlomků v rozkladu bude

$$P(N)\leq \frac{(1+\varepsilon)(\log N)}{(\log^2 N)}\,.$$

Toto bylo dokázáno Yokotou a v této práci důkaz kvůli velké pracnosti obsažen není.

5.1.7 Faktoriálový algoritmus

Popíšeme ještě jeden algoritmus, u nějž se předpokládá zpracování na počítači. Tento algoritmus v rozkladu dává zlomky s velmi malými jmenovateli. Na druhou stranu je algoritmus velmi náročný na výpočetní prostředky, a proto není optimální.

Algoritmus:

1)Je dáno racionální číslo $\frac{p}{q} < 1$ v základním tvaru.

2) Položme $n = 1$.

3) Položme $M = n!$.

4) Vynásobme p a q číslem M.

5) Vypišme všechny dělitele qM .

6) Vypišme všechny soubory různých dělitelů qM , jejichž součet je pM .

7) Pokud nenalezneme žádný takový soubor, zvýšíme n o 1 a vracíme se na krok 3).

8) Mezi těmito soubory vyberme ten, který obsahuje největší společný dělitel.

9) Použijme vybrané dělitele jako čitatele zlomků se jmenovatelem qM .

10) Zkraťme zlomky na základní tvar, abychom dostali rozklad.

11) Pokud $n = q(q-1)$, pokračujme krokem 12), jinak zvýšíme n o 1 a vracíme se na krok 3).

12) Mezi rozklady z kroku 10) vyberme ten s nejmenším jmenovatelem.

Erdös dokázal, že tento algoritmus nám dává rozklad s nejvíce $2n-2$ členy, kde $(n-1)! < b \leq n!$.

5.2 Porovnání algoritmů

Porovnejme algoritmy podle následujících tří kritérií:

1) Počet zlomků v rozkladu (délka rozkladu).

2) Maximální hodnoty jmenovatelů.

3) Počet znaků, jimiž lze rozklad zapsat.

($\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ může být zapsáno třemi znaky, protože víme, že čitatelé jsou 1.) Toto je v podstatě kombinací obou předchozích kritérií.

Pomocí počítače byly porovnány algoritmy: Fibonacci/Sylvesterův, Golombův, Bleicher/Erdösův a Tenebaum/Yokotův. Algoritmy byly porovnány pro všechna tři kritéria s prvočíselnými jmenovateli od 2 do 2002 a se všemi odpovídajícími čitateli (aby nezahrnovaly nekonečné periodické desetinné zlomky).

Pro první kritérium měl absolutně nejhorší výsledky Golombův algoritmus. Nejlepším algoritmem byl Fibonacci/Sylvesterův algoritmus, který měl v rozkladu průměrně o 35 % zlomků méně než zbývající dva algoritmy a byl stejně dobrý nebo lepší v 95 % případů. Je tedy možné, že Fibonacci/Sylvesterův algoritmus dává nejlepší rozklady vzhledem k počtu zlomků ve jmenovateli, ale kvůli jeho „nevypočitatelnosti" toho o něm není mnoho dokázáno.

Podle kritéria pro maximální hodnotu ve jmenovateli se nejhůře, jak jsme předpokládali, choval Fibonacci/Sylvesterův algoritmus. Na druhé straně Golombův algoritmus dával o něco lepší rozklady než zbývající dva.

Třetí kritérium porovnávající počet znaků vyznívá nejlépe pro Bleicher/Erdösův a Tenebaum/Yokotův algoritmus. Dokonce podle výsledků se zdá, že Bleicher/Erdösův algoritmus je o něco lepší.

Obecně se ovšem nedá říci, který z algoritmů je nejlepší. Byl by to algoritmus jehož výsledkem by byl co nejkratší rozklad s co nejmenšími jmenovateli. Skutečné výsledky však závisejí na konkrétní volbě čísel.

6. Využití egyptských zlomků ve vyučování

Těžiště vyučování tématu zlomek je u nás v 7. ročníku. Představy se ale bezesporu začínají budovat již dříve – ve škole i mimo školu.

Se slovy (ne se zápisy zlomků) „polovina“, „čtvrtina“ se děti setkávají již v předškolním věku a ve škole se pak v návaznosti na to tato slova vyskytují již od prvního ročníku. Je to zřejmě proto, že se s nimi žáci soustavně setkávají v každodenním životě.

Dělení na části se vyskytuje v praxi každé domácnosti, v řešení problémů každého dětského kolektivu, v libovolné vědecké disciplině, v řešení problémů rodiny, státu, zeměkoule i vesmíru.

Úlohy, se kterými se můžeme často setkat, jsou *„Spravedlivé rozdělování koláčů“* (tři koláče čtyřem dětem, dva koláče třem dětem atd.). Dále lze dělit tabulky čokolády, pizzu, ale i kuličky, popřípadě peníze. Při spravedlivém rozdělování jde o činnost, kdy je třeba výchozí předmět, objekt (celek) rozdělit na *n* stejných částí nebo vyčlenit, oddělit jednu *„n-tinu“* výchozího objektu. Dále lze použít egyptské zlomky při úlohách se změnou ceny, např. *Jdu si koupit boty. Ty, které si chci koupit, prodávají pan Hájek i pan Malý. Mám jít k panu Hájkovi nebo k panu Malému?* (pan Hájek sleva o $\frac{1}{4}$, pan Malý sleva o $\frac{1}{3}$). Zkušenost ukazuje, že po zadání této otázky zpravidla následuje rychlý sled úvah a odpovědí:

„Samozřejmě, že k panu Malému, ten přece zlevnil víc. 4 je víc než 3**.**“

Tato úvaha je velmi častá. Žáci jsou negativně ovlivněni dříve osvojenými poznatky o počítání s přirozenými čísly. Další možností je žákům rozdat čtvercové (kruhové, trojúhelníkové) papíry. Úkolem žáků je papíry dělit (překládat, stříhat) na:

a) *n* (2, 4, 8, ...3, 5, …) stejných částí,

b) na poloviny, čtvrtiny, ..., třetiny, pětiny, ...

Zdůrazňujeme přitom různé možnosti dělení (různé tvary). Nebo žákům rozdáme různě velké čtvercové papíry. Opakujeme dělení. Diskutujeme o velikosti a tvaru „*n-tin*“ (polovin, čtvrtin, ...), které dostali různí žáci. Položíme otázku: Co znamená, že části jsou stejné (obsah, tvar)?

Poslední možností, o níž se zmíníme, jsou zábavné úlohy a úlohy kvízového charakteru, například pracovat s "egyptskými trojúhelníky" nebo s "egyptskými čtverci". Ke stranám trojúhelníku (čtverce) jsou napsány navzájem různé kmenné zlomky. Zlomky napsané u dvou (sousedních) stran sečteme. Výsledek napíšeme k vrcholu, ve kterém se tyto dvě strany protínají. Pokud u všech vrcholů dostaneme kmenné zlomky, budeme mluvit o "egyptském" trojúhelníku (čtverci). Se žáky můžeme řešit například následující úlohy:

Zjistěte, zda je daný trojúhelník (čtverec) "egyptský".

Daný trojúhelník je "egyptský". Doplňte chybějící zlomky.

Pro další nápady na využití egyptských zlomků ve výuce, lze odkázat na práci, kterou publikovala M. Kubínová : *Projekty ve vyučování matematice, cesta k tvořivosti a samostatnosti*.

7. Závěr

Cílem diplomové práce bylo seznámit se s problematikou egyptských zlomků a prostudovat a porovnat některé metody jejich řešení.

Práce předkládá náhled na jednu z možností, jak staří Egypťané sestavili tabulku rozkladů zlomků $\frac{2}{n}$, a jak tedy oni řešili rozkládání racionálních čísel na kmenné zlomky.

Práce se také zmiňuje o pramenech, z kterých čerpáme naše současné znalosti o rozvoji matematiky ve starověkém Egyptě. Dále uvádí přehled části matematických znalostí a dovedností starých Egypťanů.

V neposlední řadě je zařazeno několik moderních algoritmů pro rozklad racionálního čísla $\frac{p}{q} < 1$ na egyptské zlomky. Některé z nich jsou porovnány dle zadaných kritérií.

Na závěr práce je zařazeno pár návrhů na využití egyptských zlomků ve výuce.

Práce ovšem nemůže postihnout všechny otázky, jež může moderní teorie čísel klást v souvislosti s tabulkou rozkladů, která jistě i nadále bude předmětem mnohých výzkumů.

Použitá literatura

[Con1] O'Connor, J. J. – Robertson, E. F.: Egyptian numerals [online] c. 2000, last update December 2000.
<http://wwwhistory.mcs.standrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_numerals.html>
[cit. 2006-08-15]

[Con2] O'Connor, J. J. – Robertson, E. F.: Mathematics in Egyptian Papyri [online] c. 2000, last update December 2000.
<http://wwwgroups.dcs.stand.ac.uk/~history/HistTopics/Egyptian_papyri.html>
[cit. 2006-08-15]

[Ep1] Eppstain, D.: Egyptian Fractions [online]. Last update: 13 Jan 2007.
<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/numth/egypt/.html>
[cit. 2006-08-30]

[Ep2] Eppstain, D.: Algorithms for Egyptian Fractions [online].
Last update: 09 Sep 1996.
<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/numth/egypt/intro.html>
[cit. 2006-08-30]

[Ep3] Eppstain, D.: Reverse Greedy Methods [online].
Last update: 09 Sep 1996.
<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/numth/egypt/greed.html>
[cit. 2006-08-30]

[Mal] Malkevitch, J.: Fractions Plain and Fancy [online].
Last update: 27 Dec 1999.
<http://york.cuny.edu/~malk/tidbits/tidbit-fractions.html>
[cit. 2006-09-05]

[Mat] Matematika starého Egypta [online]. Aktualizováno: 03. srpna 2005.
<http://referaty-seminarky.cz/matematika-stareho-egypta/>
[cit. 2006-05-25]

[Cha] Chavey, D.: What is an Egyptian Fraction? [online].
Last update: 15 Nov 1996.
<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/numth/egypt/why.html>
[cit. 2006-08-29]

[Rhi] The Rhind Papyrus 2/N Table [online].
<http://www.mathpages.com/home/rhind.htm> [cit. 2006-06-19]

[Knott]Knott, R.: An Introduction to Egyptian Mathematics [online].
Last update: 26 Oct 2006.
<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fractions/egyptian.html>
[cit. 2006-06-22]

[Wil] Williams, S. W.: THE RHIND 2/n TABLE [online]. Last update: 25 May2002.
<http://www.math.buffalo.edu/mad/AncientAfrica/mad_ancient_egyptroll2-n.html>
[cit. 2006-06-19]

[Peg] Pegg, E.: Math Games [online]. Last update: 19 Jul 2004.
<http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_07_19_04.html>
[cit. 2006-06-25]

[Pro] Problem 35. More wrong turns... [online].
<http://www.primepuzzles.net/problems/prob_035.htm>
[cit 2006-07-11]

[Yol] Yolkowski, J.: Egyptian Fractions [online]. Last update: 25 Jul 2004.
<http://www.stormloader.com/ajy/egyptfract.html>
[cit. 2006-07-08]

[Gar] Gardner, M.: Rhind Papyrus [online]. Last update: 2 Nov 2004.
<http://mathworld.wolfram.com/RhindPapyrus.html> [cit 2006-08-03]

[Weis] Weisstein, E. W.: Egyptian Mathematical Leather Roll [online].
<http://mathworld.wolfram.com/EgyptianMathematicalLeatherRoll.html>
[cit. 2006-08-04]

Obrázky
<http://www.math.muni.cz/~sisma/olomouc/kolman/>

[Why] Why Unit Fractions? [online].
<http://www.mathpages.com/home/whyunits.htm> [cit. 2006-10-10]

[Egy] Egyptian fraction [online]. Last update: 12 March 2007.
<http://en.wikipedia.org/wiki/Egyptian_fraction> [cit. 2006-10-18]

[Sla] Slavík, M.: Věrtel typografických pravidel a doporučení pro psaní DP. [online]. TUL, Liberec 2001.
<http://www.fp.vslib.cz/fp/text/soucasne/dp/typograf.rtf>
[cit.2007-02-03]

[SlV] Slavík, M. – Vild. J.: Šablona pro psaní DP. [online].
TUL, Liberec 2002-2003.
<http://www.fp.vslib.cz/fp/text/soucasne/dp/vzor.rtf>
[cit. 2007-02-03]

[Bec] Bečvář, J. – Bečvářová, M.: Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie. Prométheus, Praha 2003.

[Kol] Kolman, A.: Dějiny matematiky ve starověku. Academia, Praha 1968.

[Sti] Struik, D. J.: Dějiny matematiky. Orbis, Praha 1963.

[Kre] Krejčová, D.: Kmenové zlomky v egyptské matematice.
[seminární práce] TUL, Liberec 1996, Fakulta pedagogická

[Gong] Gong, K.: Egyptian Fractions. UC Berkley, 1992.

[Cam] Campbell, P.: A ‘Practical’ Approach to Egyptian Fractions.
Journal of Recreational Mathematics 10 (1977-1978) 81-86