TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

JAROSLAV PERNÝ

KAPITOLY

Z ELEMENTÁRNÍ ARITMETIKY

Liberec 2015

Recenzovala: doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.

ISBN 978-80-7494-207-5

OBSAH

PŘEDMLUVA

Tento učební text je určen studentům učitelství 1. stupně základní školy, především formy kombinované, případně distanční. Mohl by být jejich pomocníkem při studiu druhé části vysokoškolského kurzu předmětu Elementární aritmetika a navazuje na učební text Elementární aritmetika I. Jde o druhé upravené vydání.

Text vznikl proto, že v současné době je pro tento předmět obtížně dostupná literatura. Obdobná publikace *Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ* autorů J. Drábek, K. Križalkovič, J. Liška, V. Viktora vyšla již v roce 1985 a byla odrazovým můstkem pro předkládaný text. Část textu vychází z publikace *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ (1989)* autorů J. Divíšek a kol. Některé části učiva aritmetiky najdete v publikacích M. Bělíka *Přirozená čísla jako čísla kardinální a ordinální (1998), Peanova aritmetika přirozeného čísla (1998), Poziční číselné soustavy (1999), Celá a racionální čísla (2000).*

V současné době je učivo aritmetiky nedílnou částí výuky matematiky již od 1. ročníku základní školy a hraje významnou úlohu při seznamování s okolním světem, při jeho kvantitativním chápání a rozvíjení poznávacích schopností žáků. Těžištěm práce je objasnění základních číselných struktur a vztahů mezi nimi. Matematické pojmy, jsou pro svou abstraktnost mladším žákům obtížně pochopitelné. Proto by měl být učitel 1. stupně na výuku aritmetiky dobře odborně a metodicky připraven. Je nutné, aby se uměl správně vyjadřovat, aby si bezpečně osvojil základní pojmy a vztahy mezi nimi a především, aby svým kladným přístupem žáky motivoval a vytvářel v nich pozitivní vztah k aritmetice a algebře.

V předkládaném učebním textu je v hrubých rysech zachováno řazení témat a pojmů podle průběhu druhé části kurzu Elementární aritmetiky, přičemž se využívá předchozích aritmetických znalostí studentů. Pojmy jsou zaváděny pomocí definic, které jsou doplněny ilustrativními příklady. Jsou popsány vztahy mezi pojmy a jejich základní vlastnosti, některé z nich jsou dokazovány, jiné se jen osvětlují. Využívá se množinového a logicko-matematického jazyka.

V textu jsou zařazeny řešené i neřešené příklady, na konci každé kapitoly jsou úlohy k procvičení, některé jsou citovány z výše zmíněných publikací. Výsledky těchto úloh jsou v posledním článku.

Přeji hodně úspěchů ve studiu a rád přijmu všechny připomínky směřující ke zlepšení tohoto učebního textu.

Autor

PS: Autor by se chtěl tímto omluvit, že některé obrázky nejsou v důsledku počítačového zpracování zcela korektní.

Použité symboly

Pojem	***symbol***
základní množina	Z
prázdná množina	{ }, $\emptyset$
prvek *x* náleží (nenáleží) množině M	$x\in$ M, ($x\notin$M)
množina A je (je vlastní,není) podmnožinou množiny B	A$\subset$ B, (A$\subseteq$ B, A$\not\subset$ B)
množiny A, B jsou různé (si rovny)	A $\neq$ B, (A = B)
množina R je reprezentována prvkem *a*	R $\ni$ *a*
logická spojka konjunkce (a zároveň)	$\wedge$
logická spojka disjunkce (nebo)	$\vee$
logická spojka implikace (jestliže…, pak…)	$\Rightarrow$
logická spojka ekvivalence (právě když)	$\Leftrightarrow$
kvantifikátor obecný (pro všechny, každý)	$\forall$
kvantifikátor existenční (existuje)	$\exists$
doplněk množiny A	A′
sjednocení množin A, B	A $\cup$ B
průnik množin A, B	A $\cap$ B
množiny A, B jsou (nejsou) disjunktní	A $\cap$ B = { },($\neq$ { })
množiny A, B jsou ekvivalentní (podobné)	A~B, (A$\approx$B)
potenční systém množiny M	$\mathcal{M}$
kardinální číslo množiny A	card A, |A|
kardinální číslo nekonečné množiny	$\aleph$
potenční systém dobře uspořádané množiny M	$\mathcal{S}$
ordinální číslo dobře uspořádané množiny [A]	ord [A], ||A||
ordinální číslo nekonečné množiny	Ω
následovník (předchůdce) prvku *x*	*x′, (′x)*
úsek Peanovy množiny příslušný prvku *a*	U(a)
prvek *a* předchází prvek *b* (v uspořádání)	$a \prec b$
kartézský součin množin A, B	A $\times$ B
uspořádaná dvojice čísel *a, b* náleží relaci R	[a,b]$\in$R
čísla přirozená, celá, racionální, reálná, komplexní	N, Z, Q, R, C
absolutní hodnota čísla A	|A|
zobrazení inverzní k zobrazení Z	Z^{-1}
skládání zobrazení Z_1 a Z_2	$Z_1 \circ Z_2$
shodnost (podobnost) útvarů U_1 , U_2	$U_1 \cong U_2$, ($U_1 \sim U_2$)
číslo *a* dělí číslo *b*	$a \mid b$
číslo *a* je menší než číslo *b* (menší nebo rovno)	$a < b$, $(a \leq b)$
zápis přirozeného čísla v soustavě o základu *z*	$(4367)_z$, 4367_z

Pozn.: Pozor, v příkladech může být pro odlišení použita symbolika kurzivou!

7. PŘIROZENÁ ČÍSLA

7.1 Kardinální čísla

Několik poznámek k pojmu množiny:

Def: Množiny **A** a **B jsou ekvivalentní** (značíme A~B), právě když existuje alespoň jedno prosté zobrazení množiny **A** na množinu **B**.

Def: Množina **B je nekonečná**, právě když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny **B**, která je s množinou **B** ekvivalentní.

Def: Množina **A je konečná**, právě když žádná vlastní podmnožina množiny **A** není ekvivalentní s množinou **A**.

Př.1: Určete, které množiny jsou konečné a které nekonečné.

A=*{1,2,3,4},* B=*{a,b,c,d},* C=*{Δ,□,○},* N *je množina všech přirozených čísel,* S *je množina všech sudých čísel.*

Množiny A, B, C jsou konečné, množiny N, S jsou nekonečné. Množina N je ekvivalentní s vlastní podmnožinou S.

Důsledky: *Množina, která je ekvivalentní s konečnou množinou je konečná.*
Každá podmnožina konečné množiny je konečná množina.
Sjednocení dvou konečných množin je konečná množina.
Kartézský součin dvou konečných množin je konečná množina.

Následující partie patří do Teorie množin, konkrétně do poměrně náročné tématiky Kardinální aritmetika. Vzhledem k tomu, že nám jde o to pouze přiblížit studentům učitelství 1. stupně základní školy různé přístupy při zavádění přirozených čísel, které se ale u dětí mladšího školního věku vyskytují, dojde v dalších článcích z důvodu snazšího pochopení studentů někde k určitému zjednodušení na úkor správnosti, za což se odborným čtenářům omlouvám.

7.1.1 Zavedení kardinálních čísel

Mějme systém množin $\mathcal{M}$ (= potenční systém množiny M), pak existuje prosté zobrazení množiny na množinu, které je reflexivní, symetrické a tranzitivní, tedy je ekvivalencí na systému množin $\mathcal{M}$, která určuje rozklad množiny M na třídy po dvou disjunktních ekvivalentních množin.

Př.2: Množina M=*{a,b,c}*.
Její potenční systém $\mathcal{M}$ ***=*** *{ { },{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c} }.*

Def: Třída, do které patří množina **A** z neprázdného systému množin $\mathcal{M}$ a všechny množiny s množinou **A** ekvivalentní se nazývá **kardinální číslo množiny A** (mohutnost množiny A). Značíme **card A** nebo |**A**|.

$$\text{card } A=\{X \in \mathcal{M} : X \sim A\}= |A|$$

Pozn: Dvě množiny jsou ekvivalentní právě když mají stejné kardinální číslo.

$$\textit{card } A=\textit{card } B \iff A \sim B$$

Pozn: Množinu A a kteroukoliv množinu X, která je s ní ekvivalentní nazveme reprezentantem třídy card A.

Def: Kardinální čísla konečných množin nazveme **přirozenými čísly**.

Def: Je-li card A $\neq$ card B a množina A je ekvivalentní s vlastní podmnožinou B* množiny B, pak je card A < card B (kardinální číslo množiny A je menší než kardinální číslo množiny B).

Př.3: Porovnejte kardinální čísla množin

A=*{1,2,3,4},* B=*{a,b,c,d},* C=*{Δ,□,○},* N *je množina všech přirozených čísel,* S *je množina všech sudých čísel.*

$$\text{card } C<\text{card } A=\text{card } B<\text{card } N=\text{card } S$$

7.1.2 Operace s kardinálními čísly

V případě kardinálních operací se zajímáme o mohutnost výsledné množiny, proto dostáváme ze dvou kardinálních čísel opět kardinální číslo. Pro konečné množiny odpovídají kardinální součet a součin běžně používaným operacím součtu a součinu, což je potřeby studentů učitelství 1. stupně postačující. Je-li v operaci aspoň jedna množina nekonečná, je to jiné.

Def: ***Sčítání kardinálních čísel*** *(u konečných a nekonečných množin se liší)*

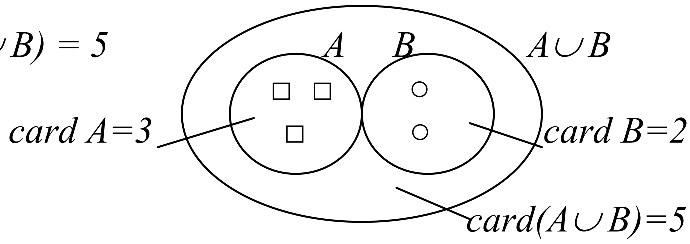
Jestliže pro množiny A, B z $\mathcal{M}$ platí $A \cap B = \{\ \}$, pak card A+card B= =card($A \cup B$). Card($A \cup B$) nazveme součtem, card A, card B jsou sčítanci.

Př.4: Pro konečné množiny platí zjednodušeně $3 + 2 =$

Nechť *A={□,□,□}, B={○,○}. Card A = 3, card B = 3, A∩B={ },*

pak

card A+ card B = card (A ∪ B) = 5



Přesněji $3 + 2 = \quad (\{0\}\text{x}3) \cup (\{1\}\text{x}2) = (\{0\}\text{x}\{0,1,2\}) \cup (\{1\}\text{x}\{0,1\}) =$
$= \{[0,0],[0,1],[0,2]\} \cup \{[1,0],[1,1]\} = \{[0,0],[0,1],[0,2],[1,0],[1,1]\} \quad = 5$

Platí: Algebraická struktura ({card X: X∊$\mathcal{M}$}; „+“) je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem (monoid).

Důk: Operace „+“ je v množině {card X: X∊$\mathcal{M}$} neomezeně definovaná (úplná).
Operace „+“ je asociativní, protože pro každé množiny A, B, C platí $(A \cup B) \cup C \sim A \cup (B \cup C)$.
Operace „+“ je komutativní, protože pro každé množiny A, B platí $(A \cup B) \sim (B \cup A)$.
Neutrálním prvkem množiny {card X: X∊$\mathcal{M}$} vzhledem k operaci „+“ je kardinální číslo prázdné množiny.

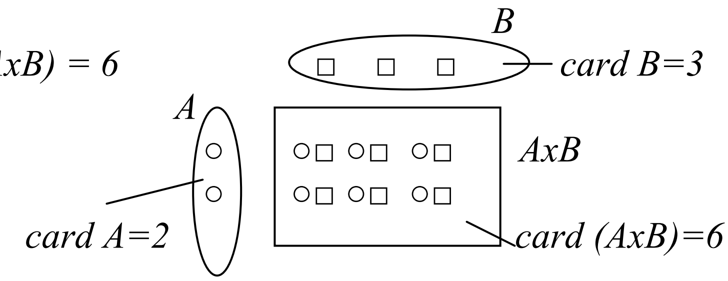
Def: ***Násobení kardinálních čísel*** *(u konečných a nekonečných množin se liší)*

Pro množiny A, B z $\mathcal{M}$ platí card A · card B=card (AxB). Card (AxB) nazveme součinem, card A, card B jsou činitelé.

Př.5: Pro konečné množiny platí zjednodušeně $2 \cdot 3 =$

Nechť A={○,○}, B={□,□,□}. *Card A = 2, card B = 3.* Pak

card A · card B = card (AxB) = 6



Přesněji 3 · 2 =   {0,1}x{0,1,2}={[0,0],[0,1],[0,2],[1,0],[1,1],[1,2]}   =6

Platí: Algebraická struktura ({card X: X$\in \mathcal{M}$}; „·“) je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem (monoid).

Důk: Operace „·“ je v množině {card X: X$\in \mathcal{M}$} neomezeně definovaná (úplná).
Operace „·“ je asociativní, protože pro každé množiny A, B, C platí
(A x B) x C ~ A x (B x C).
Operace „·“ je komutativní, protože pro každé množiny A, B platí
(A x B) ~ (B x A).
Neutrálním prvkem množiny {card X: X$\in \mathcal{M}$} vzhledem k operaci „·“ je kardinální číslo každé jednoprvkové množiny ze systému $\mathcal{M}$.

Platí: Algebraická struktura ({card X: X $\in \mathcal{M}$}; „+“, „·“) je komutativní polookruh s nulovým a jednotkovým prvkem.

Důk: Operace násobení je distributivní k operaci sčítání.

Protože pro každé množiny A, B, C platí (A∪B) x C ~ (AxC)∪(BxC) , pak card ((A∪B) x C) = card ((AxC)∪(BxC)). Pokud A∩B={ }, pak

card ((A∪B) x C) = card (A∪B) · card C = (card A+ card B) · card C =
= (card A · card C)+(card B · card C), a také

card ((AxC)∪(BxC)) = card (AxC) + card (BxC) =
= (card A · card C)+(card B · card C).

Proto pro každá kard.čísla card A, card B, card C platí
(card A+card B) · card C = (card A · card C)+(card B · card C).

7.2 Ordinální čísla

Několik poznámek k pojmu dobře uspořádané množiny:

Def: Množina M, ve které je definována relace lineárního uspořádání R, se nazývá **lineárně uspořádaná množina** a značí se (M,R)

Def: Lineárně uspořádaná množina (M,R) se nazývá **dobře uspořádaná**, právě když každá jej neprázdná podmnožina má první prvek.

Def: Množiny **A** a **B jsou podobné** (značíme **A≈B**), právě když existuje aspoň jedno prosté zobrazení množiny **A** na množinu **B**, které zachovává dobré uspořádání.

Následující partie patří do Teorie množin, konkrétně do poměrně náročné tématiky Ordinální aritmetika. Vzhledem k tomu, že nám jde o to pouze přiblížit studentům učitelství 1. stupně základní školy různé přístupy při zavádění přirozených čísel, které se ale u dětí mladšího školního věku vyskytují, dojde v dalších článcích z důvodu snazšího pochopení studentů někde k určitému zjednodušení na úkor správnosti, za což se odborným čtenářům omlouvám.

7.2.1 Zavedení ordinálních čísel

Mějme systém dobře uspořádaných množin ***S*** (=potenční systém dobře uspořádané množiny M), pak existuje podobné zobrazení množiny na množinu, které je reflexivní, symetrické a tranzitivní, tedy je ekvivalencí na systému ***S***. Tato ekvivalence určuje rozklad množiny (M,R) na třídy neprázdných a po dvou disjunktních podobných dobře uspořádaných množin.

Def: Třída, do které patří dobře uspořádaná množina [**A**]=(A,R) z neprázdného systému ***S*** dobře uspořádaných množin a všechny dobře uspořádané množiny, které jsou s dobře uspořádanou množinou [**A]** podobné, se nazývá **ordinální číslo množiny** [**A**]. Značíme **ord [A]** nebo ||**A**||.

$$\text{ord } [A]=\{\, [X]\in \mathbf{S} \;:\; [X] \approx [A]\}= \|A\|$$

Pozn: Dvě dobře uspořádané množiny jsou podobné právě když mají stejné ordinální číslo.

$$\mathit{ord}\ A=\mathit{ord}\ B \Leftrightarrow [A] \approx [B]$$

Pozn: Množinu [A] a kteroukoliv množinu [X], která je s ní podobná nazveme reprezentantem třídy ord [A].

Def: Ordinální čísla dobře uspořádaných konečných množin nazveme **přirozenými čísly**.

Pozn: Jsou dány dobře uspořádané množiny $[N]=(N,R_1)=\{1,2,3,4,5,.....\}$ a $[N^*]=(N,R_2)=\{2,3,4,5,.....,1\}$. Pak ord $[N] \neq$ ord $[N^*]$.
Ale card N = card N*.

Def: Je-li ord A $\neq$ ord B a dobře uspořádaná množina $[A]=(A,R_1)$ je podobná s některým úsekem dobře uspořádané množiny $[B]=(B,R_2)$, pak je ord [A] < ord [B] (ordinální číslo množiny [A] je menší než ordinální číslo množiny [B]).

[***Pozn:*** *Úsek dobře uspořádané množiny $[A]=(A,R_1)$ určený prvkem $n \in A$ je dobře uspořádaná množina $[A_n]=(A,R_2)$, kde $A_n=\{x \in A: x\ R_1\ n\} \wedge R_2 \subset R_1 \wedge$ (pro všechna $x,y \in [A_n]$):$(x\ R_1\ y \Rightarrow x\ R_2\ y)$*]

Př.6: Porovnejte ordinální čísla dobře uspořádaných množin

$[N_1]=(N_1,R_1)=\{1\}$, $[N_2]=(N_2,R_1)=\{1,2\}$, $[N_3]=(N_3,R_1)=\{1,2,3\}$,

$[N]=(N,R_1)=\{1,2,3,4,5,.....\}$, $[N^*_1]=(N^*_1,R_1)=\{2\}$,

$[N^*_2]=(N^*_2,R_1)=\{2,3,4,5,.....\}$, $[N^*]=(N^*,R_2)=\{2,3,4,5,.....,1\}$.

ord $[N_1]$=ord $[N^*_1]$< ord $[N_2]$< ord $[N_3]$< ord $[N]$=ord $[N^*_2]$< ord $[N^*]$

7.2.2 Operace s ordinálními čísly

V případě ordinálních operací se zajímáme o typ dobrého uspořádaní výsledné množiny, ze dvou ordinálních čísel dostáváme opět ordinální číslo. Pro konečné množiny odpovídají i ordinální součet a součin běžně používaným operacím součtu a součinu, v případě aspoň jedné množiny nekonečné, je to jiné i oproti kardinálním operacím. Ukázka některých odlišností je zmíněna v Př.8 a Př.10.

Def: ***Sčítání ordinálních čísel*** *(u konečných a nekonečných množin se liší)*

Jestliže pro dobře uspořádané množiny $[A]=(A,R_1)$, $[B]=(B,R_2)$ platí $A \cap B=\{\ \}$, pak je-li $[S]=(A \cup B,R_S)$, kde pro R_S platí a) je-li $x \in A$ a $y \in B$, pak je xR_Sy, b) je-li xR_1y, pak xR_Sy, c) je-li xR_2y, pak xR_Sy. Potom ord [A]+ord [B]=ord [S]. Ord [S] nazveme součtem, ord [A], ord [B] jsou sčítanci.

Př.7: Pro konečné množiny platí zjednodušeně $3 + 2 =$

$[A]=(A,R_1)=\{a,b,c\}$, $[B]=(B,R_2)=\{1,2\}$. Potom $ord[A] + ord[B]= ord[S]$,
kde $[S] =(A\cup B,R_3)=\{a,b,c,1,2\}$ $= 5$

Přesněji $3 + 2 = (\{0\}x3)\cup(\{1\}x2)= (\{0\}x\{0,1,2\})\cup(\{1\}x\{0,1\})=$
$=\{[0,0],[0,1],[0,2]\}\cup\{[1,0],[1,1]\}=\{[0,0],[0,1],[0,2],[1,0],[1,1]\} \quad =5$

Př.8: V případě nekonečných množin

$[N_1]=(N_1,R_1)=\{1\}$, $[N]=(N,R_3)=\{1,2,3,4,5,....\}$,
$[N^*_2]=(N^*_2,R_2)=\{2,3,4,5,....\}$, $[N^*]=(N^*,R_4)=\{2,3,4,5,...,1\}$.

$ord[N_1]=(N_1,R_1)+ord[N^*_2]=(N^*_2,R_2)=ord[N]=(N_1\cup N_2,R_3)=(N,R_3)$ *a*

$ord[N^*_2]=(N^*_2,R_2)+ord[N_1]=(N_1,R_1)=ord[N^*]=(N_2\cup N_1,R_4)=(N^*,R_4)$.

$Ord[N] \neq ord[N^*]$… sčítání ordinálních čísel není obecně komutativní.

Def: ***Násobení ordinálních čísel*** *(u konečných a nekonečných množin se liší)*

Pro dobře uspořádané množiny $[A]=(A,R_1)$, $[B]=(B,R_2)$ pak, je-li $[K]=(AxB,R_K)$, kde dobré uspořádání R_K je dáno $[a,b]R_K[a',b']$, právě když $bR_2b' \vee (b=b' \wedge aR_1a')$. Potom $ord\,[A] \cdot ord\,[B]= ord\,[K]$. $Ord\,[K]$ nazveme součinem, $ord\,[A]$, $ord\,[B]$ jsou činitelé.

Př.9: Pro konečné množiny platí zjednodušeně $3 \cdot 2 =$
$[A]=(A,R_1)=\{a,b,c\}$, $[B]=(B,R_2)=\{1,2\}$. Potom $ord[A] \cdot ord[B]=ord[K]$,
kde $[K] =(AxB,R_K)=\{[a,1],[b,1],[c,1],[a,2],[b,2],[c,2]\}$ $=6$

Přesněji $3 \cdot 2 = \{0,1\}x\{0,1,2\}=\{[0,0],[0,1],[0,2],[1,0],[1,1],[1,2]\}$ $=6$

Př.10a: V případě nekonečných množin $2 \,.\, \omega_0$:

: $\omega_0 \; x\; 2 =\{0,1,2,...\}x\{0,1\}=\{[0,0],[0,1],[1,0],[1,1],[2,0],[2,1]...\}= \omega_0$

Př.10b: Ale $\omega_0 \,.\, 2$:

: $2 \; x\; \omega_0=\{0,1\}x\{0,1,2,..\}=\{[0,0],[0,1],[0,2],...[1,0],[1,1],[1,2]...\}=\omega_0+ \omega_0$

Takže $2 \,.\, \omega_0 < \omega_0 \,.\, 2$

7.3 Peanova množina

Následující partie patří do Teorie množin, konkrétně do poměrně náročné tématiky Peanova aritmetika. Vzhledem k tomu, že nám jde o to pouze přiblížit studentům učitelství 1. stupně základní školy různé přístupy při zavádění přirozených čísel, které se ale u dětí mladšího školního věku vyskytují, dojde v dalších článcích z důvodu snazšího pochopení studentů někde k určitému zjednodušení na úkor správnosti, za což se odborným čtenářům omlouvám.

7.3.1 Zavedení Peanovy množiny

Def: Peanova množina

Množina **P** se nazývá Peanova, má-li tyto vlatnosti (splňuje-li axiomy):

1) Ke každému prvku x ϵ **P** existuje právě jeden prvek x´ϵ **P**, který se nazývá **následovník** prvku x.
2) Množina **P** obsahuje prvek **e**, který není následovníkem žádného prvku množiny **P.**
3) Každé dva různé prvky množiny **P** mají různé následovníky
4) ***(Princip matematické indukce)*** Jestliže pro nějakou množinu M platí
    a) obsahuje prvek **e**,
    b) obsahuje-li prvek xϵ**P**, plyne, že obsahuje i následovníka x´ϵ**P**,

   pak také platí, že množina M obsahuje všechny prvky množiny **P**.

Pozn: Vlastnost 1) zaručuje zobrazení, vlastnost 3) že je prosté.

Def: Prvek yϵM, pro který platí y´= x, se nazývá předchůdce prvku xϵM, píšeme y=´x.

Platí: Prvek e je jediný, který není následovníkem.
Každý prvek x≠e má právě jednoho předchůdce.
Každý prvek x je různý od svého následovníka.
Peanova množina je nekonečná množina.

Def: Úsek Peanovy množiny příslušný k prvku a je množina **U**(a) ⊂ **P**, pro kterou platí:

1) a ∉ **U**(a);
2) Existuje-li prvek ´a, pak platí ´a ϵ **U**(a);
3) Je-li x ϵ **U**(a), pak je ´x ϵ **U**(a).

Př.11: Určete:

a) U(e) = , U(e´) = , U(e´)´= , atd.

U(e) = { }, U(e´) ={e}, U(e´)´={e,e´},

b) Jaké prvky obsahuje úsek U(a) ?

U(a) obsahuje např. prvky ´a, ´(´a), ´(´(´a)), atd.

c) Je-li $a \in U(b)$, co platí pro U(a), U(b) ?

pak je $U(a) \subset U(b)$.

Def: Binární relace „<“ $=\{[a,b] \in \mathbf{P}^2 : a \in U(b)\}$ se nazývá **přirozené uspořádání** Peanovy množiny; je-li a < b říkáme, že prvek a **je menší než** prvek b.

Def: Množina je **konečná**, je-li ekvivalentní s některým úsekem Peanovy množiny.

Def: Prvky Peanovy množiny (jejich úseků) odpovídají přirozeným číslům.

7.3.2 Operace v Peanově množině

Def: ***Sčítání v Peanově množině***

V Peanově množině platí pro libovolné prvky x, y pro operaci sčítání axiomy:

5) $x + e = x$
6) $x + y' = (x + y)'$

Př.12: *4+2 = 4+1´= (4+1)´=(4+0´)´=((4+0)´)´=((4)´)´= 5´ = 6*
ax1 ax6 ax1 ax6 ax5 ax1 ax1

Def: ***Násobení v Peanově množině***

V Peanově množině platí pro libovolné prvky x, y pro operaci násobení axiomy:

7) $x \cdot e = x$
8) $x \cdot y' = (x \cdot y) + x$

Př.13: *4 . 2 = 4 . 1´= 4 . 1 +4 = (4 . 0´)+4 = (4 . 0 + 4)+4 = (0+4) + 4 = 8*
ax1 ax8 ax1 ax8 ax7 ax sčítání

Pozn: *Těmito axiomy sestrojená množina přirozených čísel začíná nulou. Nemá-li začínat nulou, je třeba axiomy upravit.*

7.4 Zavedení polokruhu přirozených čísel

Přirozená čísla jsou jedny ze základních matematických pojmů. Jsou to umělé, ideální objekty vniklé abstrakcí z vlastností konkrétních konečných množin popisujících počty předmětů a z vlastností seřazování prvků těchto množin do řady. Tak vznikla ve vědomí lidí představa přirozených čísel:

1,2,3,4,5,6,7,..… případně 0,1,2,3,4,5,6,…..

(v odborné matematice bez čísla 0, ve školské matematice s číslem 0)

Existuje několik způsobů zavádění přirozených čísel, např. axiomaticky, kardinálně, ordinálně, pomocí Peanovy množiny.

7.4.1 Přirozená čísla jako čísla kardinální

Def: Kardinální čísla konečných množin nazveme přirozenými čísly.

Označme si množinu kardinálních čísel konečných množin $\mathbf{P_K}$.

Platí: 1) Součet kardinálních čísel dvou konečných množin je kardinální číslo konečné množiny.

2) Součin kardinálních čísel dvou konečných množin je kardinální číslo konečné množiny.

Sčítání a násobení kardinálních čísel v množině $\mathbf{P_K}$ jsou algebraické operace, které jsou úplné, asociativní, komutativní, násobení je distributivní ke sčítání, mají nulový prvek kardinální číslo prázdné množiny a jednotkový kardinální číslo jednoprvkové množiny. Pak algebraická struktura ($\mathbf{P_K}$; +, ·) je komutativní polokruh.

Přirozená čísla jsou zaváděná kardinálně i na 1. stupni základní školy. Modelem je např. známé počitadlo.

7.4.2 Přirozená čísla jako čísla ordinální

Def: Ordinální čísla dobře uspořádaných konečných množin nazveme přirozenými čísly.

Označme si množinu ordinálních čísel dobře uspořádaných konečných množin $\mathbf{P_\omega}$.

Platí: 1) Součet ordinálních čísel dvou dobře uspořádaných konečných množin je ordinální číslo dobře uspořádané konečné množiny.
2) Součin ordinálních čísel dvou dobře uspořádaných konečných množin je ordinální číslo dobře uspořádané konečné množiny.

Sčítání a násobení ordinálních čísel v množině $\mathbf{P}_\omega$ jsou algebraické operace, které jsou úplné, asociativní, komutativní, násobení je distributivní ke sčítání, mají nulový prvek ordinální číslo prázdné množiny a jednotkový prvek ordinální číslo jednoprvkové množiny. Pak algebraická struktura ($\mathbf{P}_\omega$; $\oplus_\omega$, $\otimes_\omega$) je komutativní polokruh.

Přirozená čísla jsou zaváděná ordinálně i na 1. stupni základní školy. Modelem je např. známé počitadlo, kdy musí být ale uvedeno uspořádání (kulička vlevo je před kuličkou vpravo, kulička nad je před kuličkou pod).

7.4.3 Přirozená čísla jako prvky Peanovy množiny

Def: Prvky Peanovy množiny (jejich úseků) odpovídají přirozeným číslům.

Označme si Peanovu množinu **P**.

Platí: 1) Součet prvků Peanovy množiny dle definice v článku 7.3.2.
2) Součin prvků Peanovy množiny dle definice v článku 7.3.2.

Sčítání a násobení prvků v Peanově množině **P** jsou algebraické operace, které jsou úplné, asociativní, komutativní, násobení je distributivní ke sčítání, mají nulový prvek *e* a jednotkový prvek *e´*. Pak algebraická struktura ($\mathbf{P}$; $+_\mathbf{P}$, $\cdot_\mathbf{P}$) je komutativní polokruh.

Přirozená čísla nejsou Peanovsky zaváděná na 1. stupni základní školy, i když je určitá souvislost, zejména jazyková s číselnou přirozeně uspořádanou řadou.

7.4.4 Polookruh všech přirozených čísel

Máme polookruhy přirozených čísel s operací sčítání a násobení a s nulovým a jednotkovým prvkem zavedené

kardinálně ($\mathbf{P}_\mathbf{K}$; +, $\cdot$), ordinálně ($\mathbf{P}_\omega$; $\oplus_\omega$, $\otimes_\omega$), Peanovsky ($\mathbf{P}$; $+_\mathbf{P}$, $\cdot_\mathbf{P}$).

Platí: Polookruhy $\mathbf{P_K}$, $\mathbf{P_\omega}$ a $\mathbf{P}$ jsou navzájem izomorfní.

Algebraické struktury $(\mathbf{P_K}; <, +, \cdot)$, $(\mathbf{P_\omega}; <, \oplus_\omega, \otimes_\omega)$, $(\mathbf{P}; <, +_\mathbf{P}, \cdot_\mathbf{P})$ jsou rovněž navzájem izomorfní.

Není třeba tedy příliš rozlišovat přirozená čísla zavedená různým způsobem.

Množinu všech přirozených čísel budeme značit písmenem **N**, v ní definováno přirozené uspořádání (<) a dvě operace sčítání (+) a násobení (·). Tedy polookruh $(\mathbf{N}; +, \cdot)$, či algebraická struktura $(\mathbf{N}; <, +, \cdot)$.

7.4.5 Další vlastnosti přirozených čísel

Na základní škole, zejména na 1. stupni, se žáci učí i operace odčítání a dělení. Tyto operace jsou většinou zavedeny v přirozených číslech jako inverzní operace ke sčítání, resp. k násobení.

Def: **Rozdílem přirozených čísel** ***a, b*** je takové přirozené číslo x (pokud existuje), pro které platí $a = b + x$, číslo x pak zapisujeme $x = a - b$. Operaci, která přirozeným číslům ***a, b*** přiřazuje jejich rozdíl, nazýváme **odčítání přirozených čísel**.

Pozn: Je zřejmé, že operace odčítání není v přirozených číslech úplná.

5 – 7 není přirozené číslo

Def: **Podílem přirozených čísel** ***a, b, b≠0*** je takové číslo x (pokud existuje), pro které platí $a = b \cdot x$; číslo x pak zapisujeme $x = a : b$. Operaci, která přirozeným číslům ***a, b, b≠0*** přiřazuje jejich podíl, nazýváme **dělení přirozených čísel**.

Pozn: Je zřejmé, že operace dělení není v přirozených číslech úplná.

5 : 7 není přirozené číslo

Pozn: Na ZŠ se u přirozených čísel používá i tzv. **dělení se zbytkem**. Dvojici čísel ***a, b, b≠0*** je přiřazen neúplný podíl n a zbytek $z < b$ tak, že platí $a = b \cdot n + z$. Tato školská operace není matematickou operací.

21 : 5 = 4 (zb.1)   protože   21 = 5 · 4 + 1

Pro přirozená čísla platí:

$a + 0 = 0 + a = a$ $\qquad$ $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

Je-li $a + c = b + c$, pak $a = b$ *(tzv. krácení sčítání)*

Je-li $a \cdot c = b \cdot c \wedge c \neq 0$, pak $a = b$ *(tzv. krácení násobení)*

Je-li $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, pak $a \cdot b \neq 0$

Pro každá dvě přirozená čísla a, b platí, že $a > b$ právě když existuje přirozené číslo $x \neq 0$ takové, že $a = b + x$.

Pro každá tři přirozená čísla a, b, c platí:

a) Je-li $a < b$, pak $a + c < b + c$

b) Je-li $a < b \wedge c \neq 0$, pak $a \cdot c < b \cdot c$

7.4.6 Poznámky k budování pojmu přirozené číslo

Podobně jako v historii matematiky by měli žáci při seznamování se s matematickými poznatky projít obdobným, i když velice zkráceným a cíleným, vývojem, kterému se říká historická paralela.

Tzn. např. při seznamování se s novým číselným oborem, by měla být na začátku motivace, proč tento číselný obor, pak numerace tohoto oboru, pak početní operace v tomto oboru, jejich vlastnosti a zákonitosti, přičemž ve škole jde spíše o postupné „rozšiřování předchozího“ číselného oboru, který je „podmnožinou“ nového oboru a operace v předchozím platí i v novém a pochopení podstaty nového oboru. Později se postupně provádí matematická konstrukce daného číselného oboru s příslušnými definicemi a větami.

Pro přirozená čísla:

Motivace: určit počet objektů v daném souboru (počet prvků množiny)

Numerace: např.:
- číst a psát číslice;
- číst a zapisovat čísla v desítkové soustavě;
- chápat čísla jako kvantifikátory pro
  - stanovení počtu prvků množiny;
  - vytvoření množiny daného počtu prvků;
- porovnávat čísla a uspořádat je přirozeně;
- zaokrouhlovat čísla;
- chápat podstatu číselné soustavy.

Operace (etapy):
- vysvětlení podstaty operace vhodnou manipulací s objekty;
- nácvik pamětného počítání a osvojování spojů (z činností);
- písemné provádění výpočtů a vytvoření algoritmu.

Sčítání:
- manipulací *(kardinálně, sjednocení disjunktních množin);*
- nula jako neutrální prvek;
- komutativnost – manipulativní činností;
- asociativnost – při sčítání s přechodem desítky;
- rozdílnost pamětného a písemného sčítání;
- písemného sčítání – algoritmus.

Odčítání: – manipulací, jako inverzní operace ke sčítání – obdobně *(lze vyjít ze sjednocení disjunktních množin).*

Násobení: – manipulací *(opakované sčítání stejných čísel);*
nebo *(kardinálně, kartézský součin množin);*
– jednička jako neutrální prvek;
– pamětné násobení – důležitost násobilky;
– využití distributivnosti (roznásobení);
– písemné násobení – algoritmus.

Dělení: – manipulací, jako inverzní operace k násobení – obdobně *(lze vyjít z kartézského součinu množin).*
– dělení – na stejné části *(30 bonbónů 5 dětem, po jednom);*
– po částech *(30 bonbónů, 6 každému dítěti);*
– pamětné dělení, z násobilky *(na Slovensku „dělilka");*
– písemné dělení – algoritmus: tzv. „dlouhé" ;
tzv. „krátké".

7.5 Úlohy k procvičení

1. Dokažte, že a) průnik dvou konečných množin je konečná množina.
b) je-li sjednocení množin A, B konečná množina, jsou i množiny A, B konečné.

2. Dokažte, že rovnost přirozených čísel je relace ekvivalence.

3. V množině M $=\{x \in N,\ x \leq 20\}$ je definována relace R tak, že $[x,y] \in$ R, právě když x a y dávají při dělení čtyřmi stejný zbytek. Je tato relace R na množině M ekvivalence? Pokud ano, určete třídy rozkladu této relace R.

4. Ukažte jak určíme součet kardinálních čísel množin $A=\{a,b,c,d\}$ a $B=\{x,y,z\}$. Znázorněte.

5. Ukažte jak určíme součin kardinálních čísel množin $A=\{a,b,c,d\}$ a $B=\{x,y,z\}$. Znázorněte.

6. Dokažte, že pro každou množinu A z $\mathcal{M}$ platí cardA . card { } = card { } .

7. Vypočtěte ord [A] + ord [B], je-li [A] $=\{a,b,c,d\}$, [B] $=\{1,2,3\}$.

8. Vypočtěte ord [A] · ord [B], je-li [A] $=\{a,b,c,d\}$, [B] $=\{1,2,3\}$.

9. Je sčítání ordinálních čísel konečných množin komutativní?
ord [A] + ord [B] = ord [B] + ord [A] ?

10. Dokažte, že ze dvou různých úseků Peanovy množiny je vždy jeden úsekem druhého.

11. Jaký vztah platí pro U(a), U(b), jestliže $b'='a$?

12. Jaký vztah platí pro prvky Peanovy množiny a, b, c, jestliže $c \notin U(a)$ a $c \in U(b)$?

13. Jaký vztah platí pro úseky Peanovy množiny $U(a), U(b), U(c)$, jestliže $c \notin U(a)$ a $c \in U(b)$?

14. Pomocí axiomů Peanovy množiny pro sčítání vypočtete: $5 + 3 =$

15. Pomocí axiomů Peanovy množiny pro násobení vypočtete: $5 \cdot 3 =$

16. Jestliže pro přirozená čísla a, b, c platí $a < b$ a $c < d$, pak platí $a+c < b+d$. Dokažte.

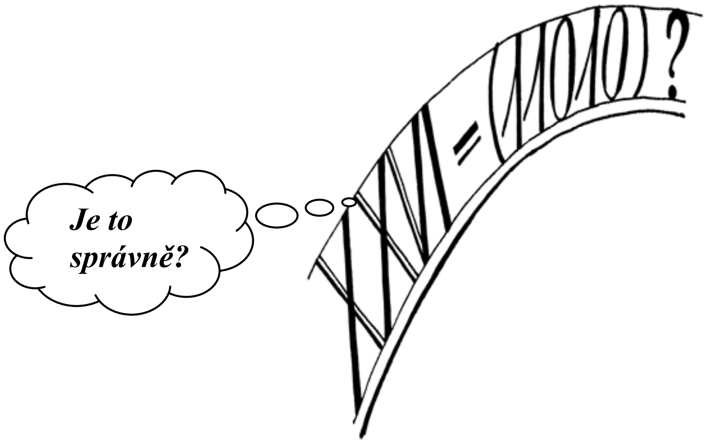
17. Jestliže pro přirozená čísla a, b, c platí $a+c \geq b+c$, pak platí $a \geq b$. Dokažte.

18. Jestliže pro přirozená čísla m, n platí $m \cdot n = 1$, pak $m=1 \wedge n=1$. Dokažte.

19. Jestliže pro přirozená čísla $a, b, c \neq 0$ platí $ac \geq bc$, pak platí $a \geq b$. Dokažte.

20. Jsou-li a, b, c nenulová přirozená čísla a existují-li podíly $c:a$, $c:b$ pak, je-li $a < b$, je $c:a > c:b$. Dokažte.

8. ČÍSELNÉ SOUSTAVY



8.1 Historické poznámky

Lidstvo používalo v historii pro zápis čísel různé znaky a různé způsoby.

Např.:

	1	5	10	50	100	500	1000
Egyptské	|		∩				
Řecké	|	T_I	Δ	T△	H	T_H	X
Římské	|	V	X	L	C	D	M
Mayské	·	–	=				
Sumerské	Y		‹				

Používáme tzv. arabské číslice, které vznikly z číslic indických.

Používané číselné soustavy je možno rozdělit na:

a) nepoziční – aditivně seskupené skupiny znaků pro čísla:

např.: Egypt - zápis ∩∩∩ |||∩ znamená číslo 43

b) poziční – umístění znaku pro číslo má svůj význam:

např.: Sumer *(do 59 desítková, pak šedesátková soustava)*

- zápis ‹ Y Y znamená číslo 12 *(1x10+2x1)*

‹ Y Y znamená číslo 602 *(10x60+2x1)*

Y ‹ Y znamená číslo 7201 *(1x3600+10x60+1x1)*

c) kombinované – zčásti aditivně, zčásti dle umístění:

např.: Řím zápis XIIII znamená číslo 14,

ale i zápis XIV znamená číslo 14.

SAN**C**TO
THO**M**AE
AQI**VI**NAT**I**
DO**C**TORI

Užití římských čísel na některých soklech soch uvádějí rok vytvoření *(MDCCVII = 1707)*

8.2 Vyjádření přirozeného čísla v číselné soustavě

V dalším půjde vždy o poziční číselné soustavy.

8.2.1 Z-adická číselná soustava

Platí: Každé přirozené číslo *a,* pro které platí $z^n \leq a < z^{n+1}$, lze vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$a = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0 ,$$

kde $a_{0,\ldots} a_{n-1} < z$, $0 < a_n < z$, $z > 1$.

Def: Jestliže pro přirozená čísla $a, z, a_0, a_{1\ldots} a_{n-1}, a_n$, platí $z > 1$, $0 \leq a_i < z$, pro $i = 0,1,2,\ldots n-1,n$, $a_n > 0$ a

$$a = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0 z^0 ,$$

pak říkáme, že jsme přirozené číslo *a* vyjádřili **v číselné soustavě o základu *z*** (v z-adické číselné soustavě).

Zkráceně píšeme $a = (a_n a_{n-1\ldots} a_1 a_0)_z$. Číslo z nazýváme **základ číselné soustavy**, koeficienty $a_0, a_{1\ldots} a_{n-1}, a_n$ se nazývají **číslice** (cifry). Číslo *a* je (n+1)-ciferné. Exponenty $^n, ^{n-1}, \ldots, ^2, ^1, ^0$ jsou **řády** číselné soustavy, číslice z^i se nazývá jednotka řádu i, číslice a_i je *i*-tého řádu.

8.2.2 Desítková číselná soustava

Def: Je-li $z = 10$, pak zkráceně píšeme $a = a_n a_{n-1\ldots} a_1 a_0$ a říkáme, že číslo *a* je zapsáno v desítkové (dekadické) číselné soustavě.

Př.1: $32145 = 3 . 10^4 + 2 . 10^3 + 1. 10^2 + 4 . 10^1 + 5 . 10^0$
$32145 = 3 . 10000 + 2 .1000 + 1 . 100 + 4 . 10 + 5 . 1$

8.2.3 Jiné číselné soustavy

Z jiných číselných soustav se používají hlavně ty, které souvisí s výpočetní technikou. Jedná se hlavně o soustavu dvojkovou, osmičkovou, šestnáctkovou, ap. Seznámení s nimi napomáhá lépe pochopit soustavu desítkovou.

Def: Je-li $z = 2$, pak zkráceně píšeme $a = (a_n a_{n-1\ldots} a_1 a_0)_2$ a říkáme, že číslo a je zapsáno ve dvojkové (dyadické) číselné soustavě.

Pozn: Dvojková číselná soustava obsahuje pouze číslice 0 a 1.

Př.2: $(110101)_2 = 1 \,.\, 2^5 + 1 \,.\, 2^4 + 0 \,.\, 2^3 + 1.\, 2^2 + 0 \,.\, 2^1 + 1 \,.\, 2^0$
$= 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = (53)_{10}$

Def: Je-li $z = 16$, pak zkráceně píšeme $a = (a_n a_{n-1\ldots} a_1 a_0)_{16}$ a říkáme, že číslo a je zapsáno v šestnáctkové číselné soustavě.

Pozn: Šestnáctková číselná soustava musí doplnit číslice *0, 1, ..., 9* o další znaky, používají se *A, B, C, D, E, F*.

Př.3: $(12AF)_{16} = 1 \,.\, 16^3 + 2 \,.\, 16^2 + 10 \,.\, 16^1 + 15 \,.\, 16^0$
$= 4096 + 256 + 160 + 15 = (4527)_{10}$

Pro srovnání:

z =

10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000
8	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17	20
16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10

Pozn: Zápisy v jiných číselných soustavách čteme jinak než v desítkové.

Zápis *4326* čteme *čtyři tisíce tři sta dvacet šest.*

Zápis $(4326)_8$ čteme *čtyři, tři, dva, šest v soustavě o základu osm.*

Porovnávání čísel v jiných číselných soustavách

– platí obdobná pravidla jako pro desítkovou soustavu.

Platí: Jsou-li dvě čísla zapsaná ve stejné *z*-adické soustavě, pak

1) To číslo, v jehož zápisu je víc číslic, **je větší**.
2) Mají-li zápisy obou čísel stejný počet číslic, pak to číslo, v jehož zápisu je číslice nejvyššího řádu větší, **je větší**.

3) Mají-li zápisy obou čísel stejný počet číslic a všechny číslice vyššího než i-tého řádu jsou stejné, pak to číslo v jehož zápisu je číslice i-tého řádu větší, **je větší**.

Př.4: 1) $(43126)_8 > (4326)_8$

2) $(74326)_8 > (54326)_8$

3) $(43726)_8 > (43526)_8$

8.3 Převádění zápisu přirozeného čísla mezi soustavami

8.3.1 Ze *z*-adické číselné soustavy do desítkové

Budeme vycházet z definice zápisu přirozeného čísla v soustavě o základu *z*.

Př.5: $(110101)_2 = 1 \,.\, 2^5 + 1 \,.\, 2^4 + 0 \,.\, 2^3 + 1 .\, 2^2 + 0 \,.\, 2^1 + 1 \,.\, 2^0$

$= 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = (53)_{10}$

Př.6: $(23401)_6 = 2 \,.\, 6^4 + 3 \,.\, 6^3 + 4 .\, 6^2 + 0 \,.\, 6^1 + 1 \,.\, 6^0$

$= 2592 + 648 + 144 + 0 + 1 = (3385)_{10}$

8.3.2 Z desítkové číselné soustavy do *z*-adické

A) Seskupováním – po ***z*** prvcích

Př.7a: $(22)_{10} = (\quad\quad)_2$ // // // // // // // // // // //

$(\quad 0)_2$ *- seskupuji po 2, 0 neseskupená zbývá*

$(\quad 10)_2$ *- seskupuji seskupení po 2, 1 neseskupené zbývá*

$(\quad 110)_2$ *- seskupuji seskupení po 2, 1 neseskupené zbývá*

$(\; 0110)_2$ *- seskupuji seskupení po 2, 0 neseskupené zbývá*

$= (10110)_2$ *- zůstává 1 seskupení po 2*

Př.7b: $(27)_{10} = (\quad)_4$ //// //// //// //// //// //// ///

$(\quad 3)_4$ *- seskupuji po 4, 3 neseskupené zbývají*

$(\; 23)_4$ *- seskupuji seskupení po 4, 2 neseskupené zbývají*

$= (123)_4$ *- zůstává 1 seskupení po 4*

B) Mocninou řadou z – $z^0, z^1, z^2, z^3, z^4, \ldots$

***Př.8a:**(22)$_{10}$ = (   )$_2$ mocninná řada 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, …*

$(1 \quad)_2$ - do 22 se vejde nejvýše 16, tj. 2^4, (číslo 5-ti ciferné)
$(10 \quad)_2$ - zbývá 6, do ní se 8, tj. 2^3 nevejde, 0
$(101 \quad)_2$ - zbývá 6, do ní se vejde 4, tj. 2^2,
$(1011 \quad)_2$ - zbývá 2, do ní se vejde 2, tj. 2^1,
$= (10110)_2$ - zbývá 0, do ní se 1, tj. 2^0 nevejde, 0

***Př.8b:** $(27)_{10} = (\quad)_4$ mocninná řada 4: 1, 4, 16, 64, 256, …*

$(1 \quad)_4$ - do 27 se vejde nejvýše 16, tj. 4^2, (číslo 3 ciferné)
$(12 \quad)_4$ - zbývá 11, do ní se 4, tj. 4^1 vejde 2x
$= (123)_4$ - zbývají 3, do nich se 1, tj. 4^0 vejde 3x

C) Algoritmem – *„dělením" číslem z*

***Př.9a:**(22)$_{10}$ = (   )$_2$*

	<u>22 : 2</u>		
$(\quad 0)_2$	11 zb.0 ↑	(11:2)	
$(\quad 10)_2$	5 zb.1	(5:2)	
$(\quad 110)_2$	2 zb.1	(2:2)	
$(\ 0110)_2$	1 zb.0	(1:2)	
$= (10110)_2$	0 zb.1		*výsledek čteme zdola nahoru*

***Př.9b:** $(27)_{10} = (\quad)_4$*

	<u>27 : 4</u>	
$(\quad 3)_4$	6 zb.3 ↑	(6:4)
$(\ 23)_4$	1 zb.2	(1:4)
$= (123)_4$	0 zb.1	

8.3.3 Ze z_1-adické číselné soustavy do z_2-adické

A) Přímo – např. z dvojkové do čtyřkové či osmičkové

***Př.10a:** $(101001)_2 = (\quad)_4$ odzadu po 2číslí $(10/10/01)_2 = (221)_4$*
2 2 1

***Př.10b:** $(101001)_2 = (\quad)_8$ odzadu po 3číslí $(101/001)_2 = (51)_8$*
5 1

B) Převodem přes desítkovou soustavu

Př.11: $(321)_5 = (\quad)_3$

$$(321)_5 = 3\ .\ 5^2 + 2\ .\ 5^1 + 1\ .\ 5^0$$
$$= 75 + 10 + 1 = (86)_{10}$$

$$(321)_5 = (10012)_3$$

86 : 3	
28	*zb.2*
9	*zb.1*
3	*zb.0*
1	*zb.0*
0	*zb.1*

8.4 Početní operace v číselných soustavách

8.4.1 V desítkové číselné soustavě

Stručné vysvětlení algoritmů početních operací s přirozenými čísly v desítkové soustavě pomocí ilustrativních příkladů.

Sčítání:

$$738 + 526 = (7.10^2 + 3.10^1 + 8.10^0\ ) + (5.10^2 + 2.10^1 + 6.10^0) =$$
$$= (7+5).10^2 + (3+2).10^1 + (8+6)\ .10^0 =$$
$$= 12.10^2 + 5.10^1 + 14.10^0 =$$
$$= (10+2).10^2 + 5.10^1 + (10+4).10^0 =$$
$$= 1.10^3 + 2.10^2 + (5+1).10^1 + 4.10^0 =$$
$$= 1.10^3 + 2.10^2 + 6.10^1 + 4.10^0) = 1264$$

Tedy:
$$\begin{array}{r} 738 \\ +\underline{526} \\ 1264 \end{array}$$

Odčítání:

$$738 - 546 = (7.10^2 + 3.10^1 + 8.10^0\ ) - (5.10^2 + 4.10^1 + 6.10^0) =$$
$$= (7-5).10^2 + \underline{(3-4)}.10^1 + (8-6)\ .10^0 = \qquad /(3-4)\ ?$$
$$= (\underline{6}-5).10^2 + (\underline{10+3}-4).10^1 + (8-6).10^0 =$$
$$= 1.10^2 + 9.10^1 + 2.10^0 = 192$$

Tedy:
$$\begin{array}{r} 738 \\ \underline{-\,546} \\ 192 \end{array}$$

Pozor: Měli bychom počítat 6–5, ale v algoritmu počítáme 6 a kolik je 7!

Násobení:

$$546 \cdot 23 = (5.10^2 + 4.10^1 + 6.10^0) \cdot (2.10^1 + 3.10^0) =$$
$$= (5.10^2+4.10^1+6.10^0)\cdot 2.10^1+(5.10^2+4.10^1+6.10^0)\cdot 3.10^0 =$$
$$= 5.2.10^3 + (4.2+5.3).10^2+ (6.2+4.3).10^1) + 6.3.10^0 =$$
$$= 10.10^3 + 23.10^2 + 24.10^1 + 18.10^0 =$$
$$= (10+0).10^3 +(20+3).10^2 +(20+4).10^1 +(10+8).10^0 =$$
$$= 1.10^4 +(0+2).10^3 +(3+2).10^2 +(4+1).10^1 +8.10^0 =$$
$$= 1.10^4 +2.10^3 +5.10^2 +5.10^1 +8.10^0 = 12558$$

Tedy:

$$\begin{array}{rl} 546 & \\ \underline{\cdot\ 23} & \\ 1638 & \\ \underline{1092\ \ } & (.10) \\ 12558 & \end{array}$$

Dělení:

(Mnohem obtížnější algoritmus než předešlé, hledat co největší násobek dělitele menší než dělenec.)

$4033 : 7 =$

$4033 = 7 . (???)$

$4033 = 7 . (5.10^2 + \quad)$ *tj. 3500, zbývá 533*
$\quad = 7 . (5.10^2 + 7.10^1 +)$ *tj. 3500+490=3990, zbývá 43*
$\quad = 7 . (5.10^2 + 7.10^1 + 6.10^0)$ *tj. 3500+490+42=4032, zbývá 1*

$4033 : 7 = 576$ *(zb.1)*

Tedy:

$$\begin{array}{l} 4033 : 7 = 576 \\ \underline{-\ 35} \\ \quad 53 \\ \underline{-\ 49} \\ \quad 43 \\ \underline{-\ 42} \\ \quad\ 1 \end{array}$$

Zkráceně:

$$\begin{array}{l} 4033 : 7 = 576 \\ \quad 53 \\ \quad\ 43 \\ \quad\ \ 1 \end{array}$$

8.4.2 V jiných číselných soustavách

Především **ve dvojkové soustavě**, opět pomocí ilustrativních příkladů.

Tabulky pro sčítání a násobení:

+	0	1		·	0	1
0	0	1		**0**	0	0
1	1	10		**1**	0	1

Sčítání:

$$\begin{array}{r} 11110 \\ +\ \ 1101 \\ \hline 101011 \end{array}$$

Odčítání:

$$\begin{array}{r} 101110 \\ -\ \ 1011 \\ \hline 10011 \end{array}$$

Násobení:

$$\begin{array}{r} 10111 \\ \cdot\ \ 101 \\ \hline 10111 \\ 10111 \\ \hline 1110011 \end{array}$$

Dělení:

$$\begin{array}{l} 100111 : 11 = 1101 \\ \underline{-\ 11} \\ 11 \\ \underline{-\ 11} \\ 01 \\ \underline{-\ 00} \\ 11 \\ \underline{-\ 11} \\ 0 \end{array}$$

V jiných soustavách:

Sčítání:

$$\begin{array}{r} 1320_4 \\ +\ \ 231_4 \\ \hline 2211_4 \end{array}$$

Odčítání:

$$\begin{array}{r} 1320_4 \\ -\ \ 231_4 \\ \hline 1023_4 \end{array}$$

Násobení:

$$\begin{array}{r} 1320_4 \\ \cdot\ \ 23_4 \\ \hline 11220 \\ 3300 \\ \hline 110220_4 \end{array}$$

Dělení:

$$\begin{array}{l} 1320_4 : 23_4 = 22_4 \\ \underline{-\ 112} \\ 200 \\ \underline{-\ 112} \\ 22_4 \ \text{zb.} \end{array}$$

Pozn: *Lze také využít tzv. „minikalkulátoru“.*

Sčítání:

1320_4	•	•••	••	
$+231_4$		••	•••	•
sjednocení	•	•••••	•••••	•
směna	•	○•	○•	•
2211_4	••	••	•	•

Kalkuly příslušných řádů se sjednotí a pak se smění příslušný počet kalkulů za kalkul vyššího řádu.

Odčítání:

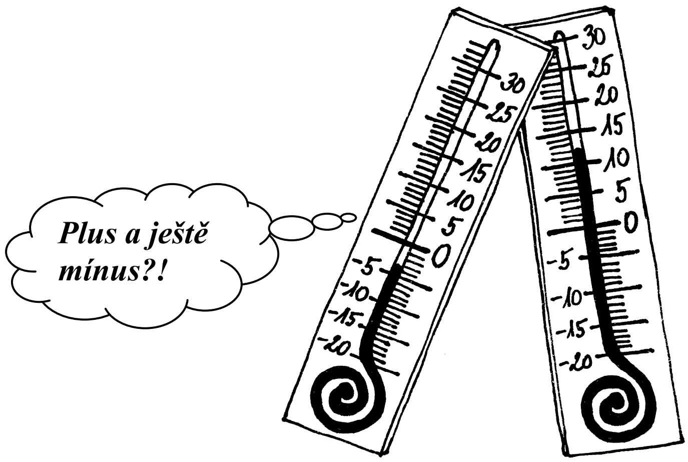
1320_4	•	•••	••	
směna	•	••	○○○○•	○○○○
-231_4		••	•••	•
1023_4	•		••	•••

Není-li dostatek kalkulů příslušného řádu pro odečtení, smění se nejdříve kalkul vyššího řádu za příslušný počet kalkulů a pak se odečtou.

8.5 Úlohy k procvičení

1. Jak jsou zapsána v číselné soustavě o základu z čísla: $z, z^2, z^2+1, (z+1)^2$?
2. Uspořádejte čísla podle velikosti: 1342_5 , 10014_5 , 1312_5 , 4433_5 .
3. Dvojciferné číslo má součet cifer 7. Zaměníme-li číslice, je nové číslo o 27 větší než původní číslo. Určete obě čísla.
4. Pro jaké z platí: a) $123_z + 132_z = 321_z$, b) $243_z + 413_z = 1100_z$?
5. Číslo 43 zapište a) ve dvojkové soustavě, b) v trojkové soustavě.
6. V desítkové soustavě zapište čísla: a) 111011_2 , *b)* 4321_5 .
7. Číslo 111011_2 zapište v soustavě o základu a) 4 , b) 5 .
8. Určete součet a rozdíl čísel 111011_2 a 11101_2 .
9. Určete součin a podíl čísel 111011_2 a 101_2 .
10. Určete součet a podíl čísel 1243_5 a 33_5 .

9. CELÁ ČÍSLA



9.1 Úvodní poznámky

Pro celá čísla:

Potřeba: historicky: potřeba vyjádřit při obchodování dluh.

matematicky: v oboru přirozených čísel není operace odčítání úplná.

Motivace: pro žáky např. :

Teplota +3° C v noci poklesla o 5° C. Jaká teplota byla?(-2° C).

Mám 3 zlatky a kupuji zboží za 5 zlatek. Mám tedy dluh 2 zlatky (-2).

Zavedení na ZŠ: Rozšíření přirozených čísel o nulu a čísla k nim opačná, tj. záporná.

Numerace: např.:
- číst a psát číslice;
- číst a zapisovat čísla v desítkové soustavě;
- chápat čísla jako kvantifikátory pro
  - stanovení počtu prvků množiny;
  - vytvoření množiny daného počtu prvků;
- porovnávat čísla a uspořádat je přirozeně;
- využívat číselnou osu (svislou, vodorovnou);
- zaokrouhlovat čísla;
- chápat podstatu číselného oboru.

Operace (etapy):
- vysvětlení podstaty operace vhodnou manipulací s objekty;
- nácvik pamětného počítání a osvojování spojů (z činností);
- rozdílnosti oproti přirozeným číslům;
- ověření platnosti vlastností pro početní operace;
- písemné provádění výpočtů a vytvoření algoritmu.

9.2 Myšlenka konstrukce oboru celých čísel

Def: Na kartézském součinu NxN definujeme relaci **~** předpisem

$[a,b] \sim [c,d] \Leftrightarrow a + d = b + c$

Platí: Takto definovaná relace ~ je reflexivní, symetrická a tranzitivní, tedy je to relace ekvivalence.

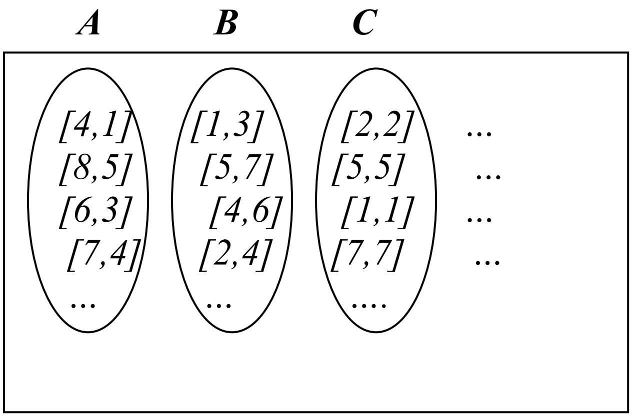
Př.1: Tranzitivnost:

Předpokládejme, že $[a,b]\sim[c,d] \wedge [c,d]\sim[e,f]$*, máme dokázat, že* $[a,b]\sim[e,f]$.
Z předpokladu a definice vyplývá, že

$a+d=b+c$

$\wedge$ $c+f=d+e$, *sečtením rovnic získáme* $a+d+c+f=b+c+d+e$,
z toho odečtením c+d od obou rovnic získáme $a+f= b+e$,
což je dle definice $[a,b]\sim[e,f]$.

Relace ~ jako ekvivalence vytvoří na kartézském součinu rozklad na třídy (viz ukázka).



Ve třídě typu ***A*** zvolme uspořádanou dvojici *[4,1]* jako reprezentanta této třídy. Reprezentanty této třídy mohou být i další uspořádané dvojice a je pro ně charakteristické, že první složka dvojice je o tři větší než druhá složka. Celou třídu ***A*** nazveme celé číslo +**3.**

Ve třídě typu ***B*** zvolme uspořádanou dvojici *[1,3]* jako reprezentanta této třídy. Reprezentanty této třídy mohou být i další uspořádané dvojice a je pro ně charakteristické, že první složka dvojice je o dvě menší než druhá složka. Celou třídu ***B*** nazveme celé číslo –**2.**

Ve třídě typu ***C*** zvolme uspořádanou dvojici *[2,2]* jako reprezentanta této třídy. Reprezentanty této třídy mohou být i další uspořádané dvojice a je pro ně charakteristické, že první složka dvojice se neliší od druhé složky. Celou třídu ***C*** nazveme celé číslo **0.**

Chápeme tedy každou třídu tohoto rozkladu jako celé číslo vyjádřené rozdílem přirozených čísel $a - b$, kde uspořádaná dvojice [a,b] tuto třídu reprezentuje.

Def: Množinou celých čísel **Z** budeme rozumět množinu tříd rozkladu vytvořeného relací ~ definovanou na kartézském součinu NxN.

Pozn: Celé číslo je množina uspořádaných dvojic přirozených čísel [a,b], kde první a druhá složka mají stejný rozdíl.

9.3 Uspořádání celých čísel

9.3.1 Kladná a záporná celá čísla

Def: Celé číslo A, [a,b]є A, nazveme **kladným celým číslem** právě když je $a>b$.
Celé číslo A, [a,b]є A, nazveme **záporným celým číslem** právě když je $a<b$.

Platí: Relace R definovaná na množině celých čísel **Z** předpisem
[A,B]є R<=>A–B є $\mathcal{Z}^{+}$, je relací ostrého lineárního uspořádání.

Platí: a) Každé kladné celé číslo je větší než každé záporné celé číslo.
b) Každé kladné celé číslo je větší než nulové celé číslo.
c) Nulové celé číslo je větší než každé záporné celé číslo.
d) Ze dvou kladných celých čísel je větší to, které má větší absolutní hodnotu.
e) Ze dvou záporných celých čísel je větší to, které má menší absolutní hodnotu.

9.3.2 Absolutní hodnota celého čísla

Pomáhá mimo jiné při uspořádání celých čísel.

Def: Absolutní hodnotu |A| celého čísla A definujeme:
a) je-li A ≥ 0, pak |A| = A ,
b) je-li A < 0, pak |A| = –A .

Vlastnosti absolutní hodnoty celých čísel:

Platí: 1) $|A| = |-A|$
2) $A \le |A|$
3) $|A|^2 = A^2$
4) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
5) $|A+B| \le |A|+|B|$

Př.2: Např. vlastnost 5) dokážeme sporem:

Předpokládejme, že $|A+B| > |A|+|B|$ a $A \neq 0 \wedge B \neq 0$,

pak $|A+B|^2 > (|A|+|B|)^2$

dle vlastnosti 3) $(A+B)^2 > (|A|+|B|)^2$

pak $A^2+2 \cdot A \cdot B+B^2 > |A|^2+2 \cdot |A| \cdot |B|+|B|^2$

dle 3) $A^2+2 \cdot A \cdot B+B^2 > A^2+2 \cdot |A| \cdot |B|+B^2$

z toho $2 \cdot A \cdot B > 2 \cdot |A| \cdot |B|$

a $A \cdot B > |A| \cdot |B|$

dle vlastnosti 4) $A \cdot B > |A \cdot B|$ a to je spor s vlastností 2).

9.3.3 Izomorfismus struktur přirozených a celých čísel

I když se na základní škole zavádí celá čísla rozšířením přirozených čísel o nulu a čísla opačná a chápeme kladná celá čísla jako čísla přirozená, matematicky tomu tak není.

Každý reprezentant kladného celého čísla A se dá zapsat jako $[a+1,1]$.

Je-li zobrazení $\varphi : \mathcal{Z}^+ \rightarrow \mathbf{N}$, takové, že $\varphi(A) = a$, pak φ je prosté zobrazení $\mathcal{Z}^+$ na **N** a platí $\varphi(A+B)= a+b = \varphi(A)+ \varphi(B)$ a $\varphi(A \cdot B)= a \cdot b = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$.

Platí: Algebraické struktury $(\mathcal{Z}^+, +, \cdot)$ a $(\mathbf{N}, +, \cdot)$ jsou izomorfní.

9.4 Početní operace s celými čísly

9.4.1 Sčítání celých čísel

Def: Nechť jsou dána celá čísla A, B, reprezentovaná uspořádanými dvojicemi $[a,b]$ a $[c,d]$.

Součtem A+B rozumíme celé číslo reprezentované dvojicí $[a+c,b+d]$.

Stručně: $[a,b] \in A$ a $[c,d] \in B$, pak $[a+c,b+d] \in A+B$.

Sčítání celých čísel lze vizualizovat pomocí dvoubarevných kalkulů, kde první složka je bílý kalkul (dává) a druhá složka je černý kalkul (dluží).

Např.: 5 + (–3) =

reprezentantem celého čísla 5 je např. [6,1]
což znázorníme na kalkulu ○○○○○○ ●

reprezentantem celého čísla –3 je např. [2,5]
což znázorníme na kalkulu ○○ ●●●●●

součet 5 + (–3) pak můžeme na kalkulu znázornit
to je [8,6], což je reprezentant celého čísla +2

○○○○○○ ●
○○ ●●●●●

Nebo: 3 + (–5) =

reprezentantem celého čísla 3 je např. [5,2]
což znázorníme na kalkulu ○○○○○ ●●

reprezentantem celého čísla –5 je např. [1,6]
což znázorníme na kalkulu ○ ●●●●●●

součet 3 + (–5) pak můžeme na kalkulu znázornit
to je [6,8], což je reprezentant celého čísla –2

○○○○○ ●●
○ ●●●●●●

Vlastnosti součtu:

Platí: Sčítání celých čísel je **komutativní.**

Př.3: *Nechť [a,b] є A* a *[c,d] є B.*
Pak A+B je reprezentováno [a+c,b+d]
a B+A je reprezentováno [c+a,d+b].
Jde o součty přirozených čísel, proto platí [a+c,b+d]= [c+a,d+b]
a tedy i A+B=B+A .

Platí: Sčítání celých čísel je **asociativní.**

Platí: Existuje **neutrální prvek** v operaci sčítání celých čísel.
Označme ho O a nazveme nulové celé číslo. Musí platit A+O=A.

Př.4: *Nechť [a,b] є A* a *[x,y] є O.*
Pak A+O je reprezentováno [a+x,b+y]
a musí platit [a+x,b+y] ~ [a,b]
dle definice a+x+b = b+y+a
z toho x = y

*Existuje-li nulové celé číslo O, pak O=**{**[1,1],[2,2],[3,3],… [n,n]**}** .*
Obecně: *[a,a] є O.*

Platí: Ke každému celému číslu A existuje **inverzní prvek** v operaci sčítání celých čísel.
Označme ho (–A) a nazveme opačným celým číslem k číslu A.
Musí platit A+(–A) = O.

Obecně: *[b,a]є(–A) je opačným číslem k číslu A, [a,b]є A.*

Platí: Algebraická struktura **(Z, +)** je **Abelova grupa**.

9.4.2 Odčítání celých čísel

Def: **Rozdílem A – B** dvou celých čísel A, B rozumíme takové celé číslo **X**, pro které platí **A = B + X**.

Stručně: $A - B = X <=> A = B + X$

$$X = A + (-B)$$

$$\text{Tedy } A - B = A + (-B)$$

Platí: Odečíst celé číslo B od celého čísla A je totéž jako k číslu A přičíst číslo opačné k B.

Operace odčítání je v celých číslech úplná.

9.4.3 Násobení celých čísel

Def: Nechť jsou dána celá čísla A, B, reprezentovaná uspořádanými dvojicemi *[a,b]* a *[c,d]*. **Součinem A·B** rozumíme celé číslo reprezentované dvojicí *[ac+bd,ad+bc]*.

Stručně: *[a,b] є A* a *[c,d] є B* , pak *[ac+bd,ad+bc]є A·B.*

Obdobně násobení celých čísel lze vizualizovat pomocí dvoubarevných kalkulů, kde první složka je bílý kalkul (dává) a druhá složka je černý kalkul (dluží).

Např.: -2 . (-3) =

reprezentantem celého čísla -2 je např. [1,3]
což znázorníme na kalkulu ○ ●●●

reprezentantem celého čísla -3 je např. [1,4]
což znázorníme na kalkulu ○ ●●●●

součin -2 . (-3) pak můžeme na kalkulu znázornit ○ ○○○○○○○○○○○○
to je [13,7], což je reprezentant celého čísla +6 ●●●● ●●●

Vlastnosti součinu:

Platí: Násobení celých čísel je **komutativní.**

Platí: Násobení celých čísel je **asociativní.**

Platí: Existuje **neutrální prvek** v operaci násobení celých čísel.
Označme ho J a nazveme jednotkové celé číslo. Musí platit A · J=A.

Př.5: *Nechť [a,b] є A* a *[x,y] є J.*
Pak A · J je reprezentováno [ax+by,ay+bx]
a musí platit $[ax+by,ay+bx] \sim [a,b]$
dle definice $(ax+by)+b = (ay+bx)+a$
vytkneme $x\cdot(a-b)+b\cdot(y+1)= a\cdot(y+1)$
a $x\cdot(a-b) = (y+1)\cdot(a-b)$
z toho $x = y+1$

Existuje-li jednotkové celé číslo J, pak J={[2,1],[3,2],[4,3],... [n+1,n]} .
Obecně: *[a+1,a] є J.*

Platí: Algebraická struktura **(Z, ·)** je **komutativní pologrupa** s neutrálním prvkem.

Platí: V celých číslech je operace **násobení distributivní** k operaci **sčítání**.

Platí: Algebraická struktura **(Z, +, ·)** je **komutativní okruh.**

Platí: V celých číslech neexistují netriviální (vlastní) dělitelé nuly.

Př.6: Tzn. Jestliže A . B = O ^ A ≠ O, pak B = O.
Nechť [a,b] є A (a>b), [n,n] є O a [x,y] є B
Je-li reprezentantem A.B dvojice [ax+by,ay+bx]
Pak $[ax+by,ay+bx] \sim [n,n]$
dle definice $(ax+by)+n = (ay+bx)+n$
pak $ax+by = ay+bx$
vytkneme $x.(a-b) = y.(a-b)$
z toho $x = y \Rightarrow B=O$

Platí: Algebraická struktura **(Z, +, ·)** je **oborem integrity s neutrálním prvkem.**

9.4.4 Dělení celých čísel

Dělení celých čísel není operace úplná (neomezeně proveditelná).
Používá se ale tzv. **dělení se zbytkem**.

Platí: Ke každým dvěma celým číslům A, B (B≠O), existuje právě jedna dvojice celých čísel N, Z tak, že platí

$$A = B \cdot N + Z \quad \text{, kde } \quad O \leq Z < |B| \,.$$

A dělenec, B dělitel, N neúplný podíl, Z zbytek

Této operaci se říká **dělení se zbytkem**. (Není to matematická operace.)

9.5 Dělitelnost celých (přirozených) čísel

Pozn: Dělení je operace, dělitelnost je relace.

Def: Celé (přirozené) číslo a **je dělitelné** celým (přirozeným) číslem b právě když existuje celé (přirozené) číslo $\boldsymbol{x}$ takové, že platí $\boldsymbol{a = b \cdot x}$.

Zapisujeme : $b \mid a$, čteme: číslo ***b*** **dělí** číslo ***a***
nebo číslo ***b*** **je dělitel** čísla ***a***
nebo číslo ***a*** **je násobek** čísla ***b*** .

Pozn: Celá čísla **1, (–1),** ***a, (–a)*** jsou **samozřejmými děliteli** celého čísla ***a***, ostatní celá čísla (pokud existují) jsou **nesamozřejmými děliteli**.

Pozn: Přirozená čísla **1,** ***a*** jsou **samozřejmými děliteli** přirozeného čísla ***a***, ostatní přirozená čísla (pokud existují) jsou **nesamozřejmými děliteli**.

Pozn: Dělitelnost celých čísel je do určité míry obdobná dělitelnosti přirozených čísel. Dále se budeme zabývat **pouze dělitelností přirozených čísel**.

9.5.1 Znaky dělitelnosti

Platí 1: Je-li přirozené číslo c součtem dvou přirozených čísel, z nichž jedno je násobkem přirozeného čísla b, pak druhé číslo dává při dělení číslem b týž zbytek jako číslo c.

Pozn: Jak bylo zmíněno v čl. 8.2, lze přirozené číslo a zapsat v desítkové soustavě

$$a = c_0 + c_1\, 10^1 + c_2\, 10^2 + \ldots. + c_{n-1}\, 10^{n-1} + c_n\ 10^n \,,$$

kde c_0 je cifra nultého řádu (počet jednotek), c_1 je cifra prvního řádu (počet desítek), c_2 cifra druhého řádu (počet stovek), …

Dělitelnost 2, 5, 10

Nechť $a = c_0 + c_1 10^1 + c_2 10^2 + ... + c_{n-1} 10^{n-1} + c_n\ 10^n$,
pak $a = c_0 + 10\cdot(c_1 + c_2 10^1 + ... + c_{n-2} 10^{n-2} + c_{n-1}\ 10^{n-1})$,
a $a = c_0 + \underline{2}\cdot\underline{5}\cdot\underline{(c_1 + c_2 10^1 + ... + c_{n-2} 10^{n-2} + c_{n-1}\ 10^{n-1})}$,
toto číslo je dělitelné 2 i 5 i 10

Přirozené číslo **je dělitelné 2, 5, 10** právě když je těmito čísly dělitelná jeho **cifra nultého řádu**.

Dělitelnost 4, (25)

Nechť $a = c_0 + c_1 10^1 + c_2 10^2 + ... + c_{n-1} 10^{n-1} + c_n\ 10^n$,
pak $a = c_0 + c_1 10^1 + 10^2\cdot(c_2 + ... + c_{n-3} 10^{n-3} + c_{n-2}\ 10^{n-2})$,
a $a = (c_0 + c_1 10^1) + \underline{4}\cdot\underline{25}\cdot\underline{(c_2 + ... + c_{n-3} 10^{n-3} + c_{n-2}\ 10^{n-2})}$,
toto číslo je dělitelné 4 i 25

Přirozené číslo **je dělitelné 4, (25)** právě když je těmito čísly dělitelné jeho **poslední dvojčíslí**. $(c_0 + c_1 10^1)$

Dělitelnost 8, (125)

Nechť $a = c_0 + c_1 10^1 + c_2 10^2 + ... + c_{n-1} 10^{n-1} + c_n\ 10^n$,
pak $a = c_0 + c_1 10^1 + c_2 10^2 + 10^3\cdot(c_3 + ... + c_{n-3} 10^{n-3})$,
a $a = (c_0 + c_1 10^1 + c_2 10^2) + \underline{8}\cdot\underline{125}\cdot\underline{(c_3 + ... + c_{n-3} 10^{n-3})}$,
toto číslo je dělitelné 8 i 125

Přirozené číslo **je dělitelné 8, (125)** právě když je těmito čísly dělitelné jeho **poslední trojčíslí**. $(c_0 + c_1 10^1 + c_2 10^2)$

Dělitelnost 3, 9

Nechť $a = c_0 + c_1 10^1 + c_2 10^2 + ... + c_{n-1} 10^{n-1} + c_n\ 10^n$,
pak $a = c_0 + c_1\cdot(9\cdot x_1 + 1) + c_2\cdot(9\cdot x_2 + 1) + ... + c_n\cdot(9\cdot x_n + 1)$,
a $a = (c_0 + c_1 + c_2 + ... + c_n) + \underline{9}\cdot\underline{(c_1\cdot x_1 + c_2\cdot x_2 + ... + c_n\cdot x_n)}$,
toto číslo je dělitelné 3 i 9

Přirozené číslo **je dělitelné 3, 9** právě když je těmito čísly dělitelný jeho **ciferný součet**.

Dělitelnost 11

Přirozené číslo **je dělitelné 11** právě když je dělitelný 11 **rozdíl součtu cifer sudého řádu a součtu cifer lichého řádu.**

Dělitelnost 7

Přirozené číslo **je dělitelné 7** právě když je dělitelný 7 **rozdíl součtu lichých a sudých trojic cifer.**

9.5.2 Největší společný dělitel čísel

Označme $\mathcal{D}(a)$ množinu dělitelů přirozeného čísla a.
Např. $\mathcal{D}(12)=\{1,2,3,4,6,12\}$, $\mathcal{D}(8)=\{1,2,4,8\}$.

Def: **Společným dělitelem** přirozených čísel a, b je průnik dělitelů těchto čísel.

$sp\,\mathcal{D}(12,8)=\mathcal{D}(12)\cap\mathcal{D}(8)=\{1,2,4\}$.

Def: **Největším společným dělitelem** přirozených čísel a,b je číslo $Max\ sp\,\mathcal{D}(a,b)$, označujeme $\mathbf{D}(a,b)$.

$\mathbf{D}(12,8)=4$

Určování největšího společného dělitele:

a) Vypsáním dělitelů

Př.7a: $\mathbf{D}(36,24)=12$ $\qquad$ $\mathcal{D}(36)=\{1,2,3,4,6,9,\underline{12},18,36\}$
$\mathcal{D}(24)=\{1,2,3,4,6,8,\underline{12},24\}$

b) Rozkladem na prvočinitele

Př.7b: $\mathbf{D}(36,24)=2^2\cdot 3=12$ $\qquad$ $36=2^2\cdot 3^2$
$24=2^3\cdot 3$

$\mathbf{D}$=součin společných prvočinitelů v nejvyšší společné mocnině.

c) Euklidovým algoritmem

Platí: Jestliže přirozené číslo a dává při dělení číslem b $(b\neq 0)$ zbytek z $(z\neq 0)$, pak $\mathbf{D}(a,b)=\mathbf{D}(b,z)$.

Př.7c: $\mathbf{D}(36,24)=12$ $\qquad$ $36:24=1\ \ zb.12$
$24:\underline{12}=2\ \ zb.0$

Def: Přirozená čísla a, b nazveme **nesoudělná**, právě když $\mathbf{D}(a,b)=1$.

9.5.3 Nejmenší společný násobek čísel

Označme $\mathcal{N}(a)$ množinu násobků přirozeného čísla a.
Např. $\mathcal{N}(12)=\{12,24,36,48,60,\ldots\}$, $\mathcal{N}(8)=\{8,16,24,32,40,48,\ldots\}$.

Def: **Společným násobkem** přirozených čísel *a, b* je průnik násobků těchto čísel.

sp $\mathcal{N}(12,8) = \mathcal{N}(12) \cap \mathcal{N}(8) = \{24, 48, 72, \ldots\}$.

Def: **Nejmenším společným násobkem** přirozených čísel *a,b* je číslo *Min sp* $\mathcal{N}(a,b)$, označujeme $\mathbf{n}(a,b)$.

$\mathbf{n}(12,8) = 24$

Určování nejmenšího společného násobku:

a) Vypsáním násobků

Př.8a: $\mathbf{n}(36,24) = 72$

$\mathcal{N}(36) = \{36, \underline{72}, 108, 144, \ldots\}$

$\mathcal{N}(24) = \{24, 48, \underline{72}, 96, 120, 144, \ldots\}$

b) Rozkladem na prvočinitele

Př.8b: $\mathbf{n}(36,24) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

$24 = 2^3 \cdot 3$

n*=součin všech prvočinitelů v rozkladu, každý nejvyšší mocnině.*

c) Pomocí největšího společného dělitele

Platí: Pro každá dvě přirozená čísla *a, b* platí: $\mathbf{n}(a,b) = (a \cdot b) : \mathbf{D}(a,b)$.

Př.8c: $\mathbf{n}(36,24) = (36 \cdot 24) : \mathbf{D}(36,24) = 864 : 12 = 72$

9.5.4 Prvočísla a čísla složená

Def: Přirozené číslo nazýváme **prvočíslem**, má-li právě dva dělitele (pouze samozřejmé dělitele).

Def: Přirozené číslo nazýváme **číslem složeným**, má-li více než dva dělitele (ještě jiného než samozřejmé dělitele).

Pozn: Číslo 1 není prvočíslo ani číslo složené.

Platí: Je-li přirozené číslo *b* složené, pak jeho nejmenší nesamozřejmý dělitel je prvočíslo *p*, pro které platí : $p^2 \leq b$.

Platí: Jestliže přirozené číslo *b* není dělitelné prvočíslem *p*, pro které platí: $p^2 \leq b$, pak je přirozené číslo *b* prvočíslo.

Platí: Každé složené přirozené číslo *a* můžeme vyjádřit jako součin konečného počtu prvočísel.

Platí: Každé složené přirozené číslo *a* můžeme vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru $a = p_1^{n1} \cdot p_2^{n2} \cdot \ldots \cdot p_k^{nk}$,
kde $p_1, p_2, \ldots p_k$ jsou prvočísla a $n_1, n_2, \ldots n_k$ jsou nenulová přirozená čísla.

Vztah $a = p_1^{n1} \cdot p_2^{n2} \cdot \ldots \cdot p_k^{nk}$ nazýváme **prvočíselným rozkladem přirozeného čísla *a* na součin prvočinitelů.**

Platí: Jestliže prvočíslo *p* dělí součin $a \cdot b$ přirozených čísel *a, b*, pak *p* dělí aspoň jedno z čísel *a, b*.

9.6 Úlohy k procvičení

1. Dokažte, že relace ~ definovaná na kartézském součinu NxN je symetrická.

2. Dokažte, že |A| = |–A|

3. Dokažte, že sčítání celých čísel je asociativní.

4. Dokažte, že ke každému celému číslu A existuje inverzní prvek v operaci sčítání (–A) a určete jeho obecný tvar.

5. Dokažte, že součet 2 kladných čísel je číslo kladné.

6. Dokažte, že násobení celých čísel je komutativní.

7. Dokažte, že součin 2 kladných čísel je číslo kladné.

8. Dokažte, že relace dělitelnost v množině celých čísel je reflexivní, není symetrická, je tranzitivní. Určete typ této relace.

9. Určete zbytek, který vznikne při dělení čísla 3456 číslem a) 2, b) 3, c) 4, d) 5, e) 6, f) 8, g) 9.

10. O pěticiferném čísle 448xx, jehož poslední dvě cifry neznáme, víme, že je dělitelné 3 a 4. Doplňte chybějící cifry.

11. V čísle 45x6 doplňte za x cifru tak, aby vzniklé číslo bylo dělitelné 4, 8 i 9.

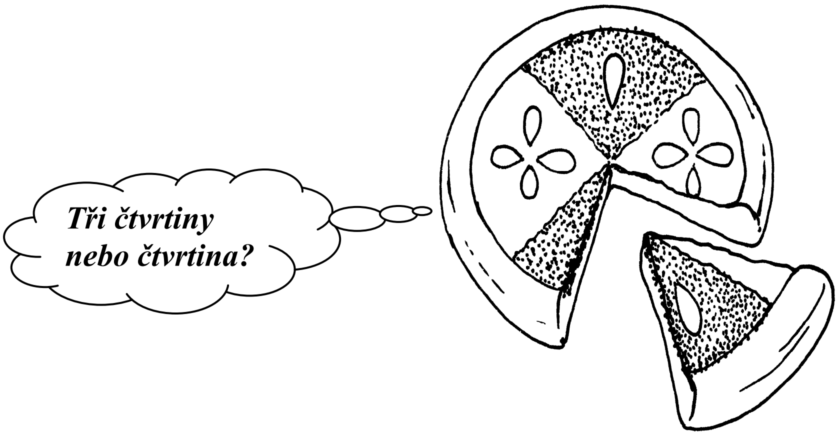
12. Určete **D** a **n** čísel 108 a 360.

13. Určete **D** a **n** čísel 84, 90 a 72 .

14. Určete **D** čísel 945 a 729 (pomocí Euklidova algoritmu)

15. Zjistěte, která z čísel 273, 301, 331, 648 jsou prvočísla a která jsou složená. Složená rozložte na prvočinitele.

10. RACIONÁLNÍ ČÍSLA



10.1 Úvodní poznámky

Pro racionální čísla:

Potřeba: historicky: potřeba vyjádřit část celku.

matematicky: v oboru celých čísel není operace dělení úplná.

Pozn.1: *Historicky vznikla kladná racionální čísla dříve než čísla celá.*

Pozn.2: *Speciální součástí čísel racionálních jsou* ***desetinná čísla****. Jsou to třídy navzájem ekvivalentních desetinných zlomků, tj. zlomků ve tvaru* $1/10^n$.

Motivace: pro žáky např. :

Rozdělte koláč mezi čtyři sourozence. Kolik dostane každý?

Zavedení na ZŠ: Rozšíření celých čísel o zlomky jako části celku. Vyjádření stejného množství pomocí různých zlomků.
1/2=2/4=3/6=4/8=5/10=...

Numerace: např.:
- číst a psát čísla (zlomky);
- chápat čísla jako kvantifikátory pro
  - stanovení počtu prvků množiny;
  - vytvoření množiny daného počtu prvků;
- porovnávat čísla a uspořádat je přirozeně;
- využívat číselnou osu (svislou, vodorovnou);
- zaokrouhlovat čísla;
- chápat podstatu číselného oboru.

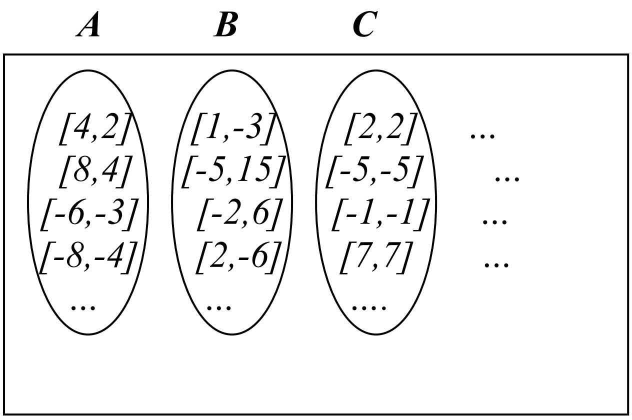
Operace (etapy):
- vysvětlení podstaty operace vhodnou manipulací s objekty;
- nácvik pamětného počítání a osvojování spojů (z činností);
- rozdílnosti oproti celým číslům;
- ověření platnosti vlastností pro početní operace;
- písemné provádění výpočtů a vytvoření algoritmu.

10.2 Myšlenka konstrukce oboru racionálních čísel

Def: Na kartézském součinu ZxZ definujeme relaci ≈ předpisem
[a,b] ≈ [c,d] <=> $a \cdot d = b \cdot c$, kde b, d≠0

Platí: Takto definovaná relace ≈ je reflexivní, symetrická a tranzitivní, tedy je to relace ekvivalence.

Relace ≈ jako ekvivalence vytvoří na kartézském součinu rozklad na třídy (viz ukázka).



Ve třídě typu ***A*** zvolme uspořádanou dvojici *[4,2]* jako reprezentanta této třídy. Reprezentanty této třídy mohou být i další uspořádané dvojice a je pro ně charakteristické, že první a druhá složka dvojice je v poměru 2:1. Celou třídu ***A*** nazveme racionální číslo +**2**.

Ve třídě typu ***B*** zvolme uspořádanou dvojici *[1,-3]* jako reprezentanta této třídy. Reprezentanty této třídy mohou být i další uspořádané dvojice a je pro ně charakteristické, že první a druhá složka dvojice je v poměru -1:3. Celou třídu ***B*** nazveme racionální číslo –⅓.

Ve třídě typu ***C*** zvolme uspořádanou dvojici *[2,2]* jako reprezentanta této třídy. Reprezentanty této třídy mohou být i další uspořádané dvojice a je pro ně charakteristické, že první a druhá složka dvojice je v poměru 1:1. Celou třídu ***C*** nazveme racionální číslo **1**.

Chápeme tedy každou třídu tohoto rozkladu jako racionální číslo vyjádřené podílem (poměrem) celých čísel a : b, b≠0, kde uspořádaná dvojice *[a,b]* tuto třídu reprezentuje.

Def: Množinou racionálních čísel Q budeme rozumět množinu tříd rozkladu vytvořeného relací ≈ definované na kartézském součinu ZxZ–{0}.

Pozn: Racionální číslo je množina uspořádaných dvojic celých čísel $[a,b], b \neq 0$, kde první a druhá složka jsou ve stejném poměru.

Pozn: Uspořádané dvojice $[a,b]$ zapisujeme také jako zlomky a/b; tyto jsou reprezentanty racionálního čísla.

V ZŠ: 1/2=2/4=3/6=4/8=....
Jsou to různé zlomky vyjadřující jedno racionální číslo (stejné množství).

10.3 Uspořádání racionálních čísel

10.3.1 Kladná a záporná racionální čísla

Def: Racionální číslo A, $[a,b] \in$ A, nazveme **kladným racionálním číslem** právě když je $a>0 \wedge b>0$ nebo je $a<0 \wedge b<0$.
Racionální číslo A, $[a,b] \in$ A, nazveme **záporným racionálním číslem** právě když je $a>0 \wedge b<0$ nebo je $a<0 \wedge b>0$.

Racionální číslo A, $[a,b] \in$ A**,** nazveme **záporným racionálním číslem** právě když je (–A) kladným racionálním číslem.

Def: Nechť **A, B** jsou racionální čísla, pak **A<B** <=> **B–A** je kladné racionální číslo.

Platí: Relace **R** definovaná na množině racionálních čísel Q předpisem $[\mathbf{A},\mathbf{B}] \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \mathbf{B}-\mathbf{A} \in Q^+$, je relací ostrého lineárního uspořádání.

Nechť **A, B, C** jsou racionální čísla,
pak
a) neplatí **A<A** *(antireflexivní)*
b) je-li **A<B**, pak není **B<A** *(antisymetrická)*
c) je-li **A<B** a **B<C,** pak **A<C** *(transitivnost)*
d) je-li **A≠B**, pak **A<B** nebo **B<A** *(souvislost)*

Def: Říkáme, že lineárně uspořádaná množina $(\mathcal{M}, R)$ je **hustě uspořádaná relací R** právě když pro každé $a, b \in \mathcal{M}$, kde $a \prec b$ existuje $c \in \mathcal{M}$ takové, že $a \prec c \prec b$. *($\prec$... předchází)*

Platí: Množina racionálních čísel je relací lineárního uspořádání < **hustě uspořádaná .**

10.3.2 Absolutní hodnota racionálního čísla

Pomáhá mimo jiné při uspořádání racionálních čísel.

Def: Absolutní hodnotu $|A|$ racionálního čísla A definujeme (jako u čís.celých):
a) je-li $A \geq 0$, pak $|A| = A$,
b) je-li $A < 0$, pak $|A| = -A$.

Vlastnosti absolutní hodnoty racionálních čísel:

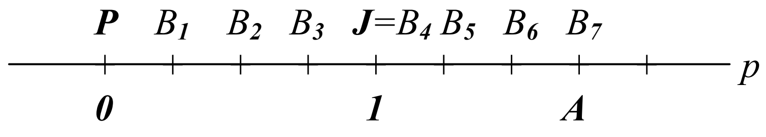
Platí:
1) $|A| = |-A|$
2) $A \leq |A|$
3) $|A|^2 = A^2$
4) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
5) $|A+B| \leq |A|+|B|$
6) $|A:B| = |A|:|B|$, kde $B \neq 0$

Znázornění čísel na číselné ose:

Na číselné ose p body P (=racionální číslo 0) a J (racionální číslo 1), pak každému racionálnímu číslu přiřadíme právě jeden bod přímky p. Jde o prosté zobrazení :

a) racionálnímu číslu 0 přiřadíme bod P
b) kladným racionálním číslům body polopřímky →PJ tak, že obraz čísla A, [a,b]є A, a>0, b>0, dělí úsečku PJ na b stejných dílů (PB_1), a-tý díl je obrazem A

Př.1: Zobrazte na ose racionální číslo A, [7,4] є A



c) zápornému racionálnímu číslu R přiřadíme bod na polopřímce opačné k →PJ tak, že je středově souměrný podle bodu P s bodem na polopřímce →PJ, který je obrazem kladného racionálního čísla (–R).

přímka p… číselná osa, →PJ ... její kladná část, ←PJ… záporná část

10.4 Početní operace s racionálními čísly

10.4.1 Sčítání racionálních čísel

Def: Nechť jsou dána racionální čísla A, B, reprezentovaná uspořádanými dvojicemi [*a,b*] a [*c,d*]. **Součtem A+B** rozumíme racionální číslo reprezentované dvojicí [*ad*+*bc,bd*].

Stručně: *[a,b] ϵ A* a *[c,d] ϵ B* , pak *[ad+bc,bd]ϵ A+B.*

Vlastnosti součtu:

Platí: Sčítání racionálních čísel je **komutativní.**

Platí: Sčítání racionálních čísel je **asociativní.**

Platí: Existuje **neutrální prvek** v operaci sčítání racionálních čísel.
Označme ho O a nazveme nulové racionální číslo.

Existuje-li nulové racionální číslo O, pak O={[0,1],[0,2],[0,3],… [0,n]} .
Obecně: *[0,a] ϵ O, kde a≠0.*

Platí: Ke každému racionálnímu číslu A existuje **inverzní prvek** v operaci sčítání racionálních čísel.
Označme ho (–A) a nazveme opačným racionálním číslem k číslu A.

Obecně: *[–a,b]ϵ(–A) i [a,–b]ϵ(–A) je opačným číslem k číslu A, [a,b]ϵA.*

Platí: Algebraická struktura **(Q, +)** je **Abelova grupa**.

10.4.2 Odčítání racionálních čísel

Def: Nechť jsou dána racionální čísla A, B, reprezentovaná uspořádanými dvojicemi [*a,b*] a [*c,d*]. **Rozdílem A–B** rozumíme racionální číslo reprezentované dvojicí [*ad*–*bc,bd*].

Stručně: *[a,b] ϵ A* a *[c,d] ϵ B* , pak *[ad–bc,bd]ϵ A–B.*

Def: **Rozdílem A – B** dvou racionálních čísel **A, B** rozumíme takové racionální číslo **X**, pro které platí **A = B + X**.

Stručně: $A - B = X \Longleftrightarrow A = B + X$

$$X = A + (-B)$$

$$\text{Tedy } A - B = A + (-B)$$

Platí: Odečíst racionální číslo B od racionálního čísla A je totéž jako k číslu A přičíst číslo opačné k B.

Operace odčítání je v racionálních číslech úplná.

10.4.3 Násobení racionálních čísel

Def: Nechť jsou dána racionální čísla A, B, reprezentovaná uspořádanými dvojicemi $[a,b]$ a $[c,d]$.
Součinem A·B rozumíme racionální číslo reprezentované dvojicí $[ac,bd]$.

Stručně: $[a,b] \in A$ a $[c,d] \in B$, pak $[ac,bd] \in A \cdot B$.

Vlastnosti součinu:

Platí: Násobení racionálních čísel je **komutativní.**

Platí: Násobení racionálních čísel je **asociativní.**

Platí: Existuje **neutrální prvek** v operaci násobení racionálních čísel. Označme ho J a nazveme jednotkové racionální číslo.

Existuje-li jednotkové racionální číslo J, pak $J=\{[1,1],[2,2],\ldots [n,n]\}$.
Obecně: $[a,a] \in J$, *kde* $a\neq 0$..

Platí: Ke každému racionálnímu číslu A existuje **inverzní prvek** v operaci násobení racionálních čísel.
Označme ho (1/A) a nazveme převráceným racionálním číslem k číslu A.

Obecně: $[b,a]\in(1/A)$ *je převráceným číslem k číslu A,* $[a,b]\in A$.

Platí: Algebraická struktura **(Q–{0}, ·)** je **Abelova grupa**.

Platí: V racionálních číslech je operace **násobení distributivní k** operaci **sčítání**.

Platí: Algebraická struktura **(Q, +, ·)** je **komutativní těleso.**

Platí: V racionálních číslech neexistují netriviální vlastní dělitelé nuly.

Platí: Algebraická struktura **(Q, +, ·)** je **oborem integrity.**

10.4.4 Dělení racionálních čísel

Def: Nechť jsou dána racionální čísla A, B, reprezentovaná uspořádanými dvojicemi [*a,b*] a [*c,d*]. **Podílem A:B** rozumíme racionální číslo reprezentované dvojicí [*ad,bc*].

Stručně: *[a,b] ϵ A* a *[c,d] ϵ B* , pak *[ad,bc]ϵ A:B*.

Def: **Podílem A : B** dvou racionálních čísel A, B rozumíme takové racionální číslo **Y**, pro které platí **A = B · Y**.

Stručně: $A : B = Y \Leftrightarrow A = B \cdot Y$

$$Y = A \cdot (1/B)$$

$$\text{Tedy } A : B = A \cdot (1/B)$$

Platí: Dělit racionální číslo A racionálním číslem B, B≠0 je totéž jako číslo A násobit číslem převráceným k B.

Operace dělení je v racionálních číslech úplná.

10.4.5 Izomorfismus struktur celých a racionálních čísel

I když se na základní škole zavádí racionální čísla rozšířením celých čísel o kladné a záporné zlomky a chápeme některá racionální čísla jako čísla celá, matematicky tomu tak není.

Existuje podobor integrity (*Z**, +, **·**) komutativního tělesa **(Q, +, ·)**, který je izomorfní s (*Z*, +, **·**) a uvedená čísla z něho mají tvar *[n·a,a]*, kde *n, a* celá čísla, *a≠0* .

Platí: Algebraické struktury (*Z **, +, **·**) a (*Z* , +, **·**) jsou izomorfní.

10.5 K rozšíření racionálních čísel na reálná a reálných čísel na komplexní

10.5.1 Poznámka k číslům reálným

V racionálních číslech – jsou 4 početní operace úplné.
– je číselná osa racionálními čísly „vyplněná“?
– stačí racionální čísla na měření délek úseček?

Potřeba: historicky: potřeba změřit úhlopříčku čtverce o straně jedna.
matematicky: v racionálních číslech není operace odmocnění úplná.

Zavedení na ZŠ: Rozšíření racionálních čísel o čísla iracionální, např. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, e, π, … , na **čísla reálná**.

Numerace: např.:
– číst a psát čísla;
– porovnávat čísla a uspořádat je přirozeně;
– využívat číselnou osu (svislou, vodorovnou);
– zaokrouhlovat čísla;
– chápat podstatu číselného oboru.

Operace (etapy): – s čísly reálnými se počítá většinou jako s čísly racionálními s příslušným zaokrouhlením.

Konstrukce komutativního tělesa reálných čísel (R, +, ·) je obtížná, není to možné způsoby jako u čísel celých a racionálních.

Def: Algebraickou strukturu (R, +, ·) nazveme **tělesem reálných čísel** právě když má tyto vlastnosti:
1) (R, +, ·) je komutativní těleso.
2) (R, +, ·) obsahuje podtěleso (Q*, +, ·) izomorfní s tělesem racionálních čísel (Q, +, ·).
3) R je hustě upořádaná množina.
4) R je spojitě uspořádaná množina.

10.5.2 Poznámka k číslům komplexním

Potřeba: matematicky – v reálných číslech nelze řešit kvadratické rovnice se záporným diskriminantem.

Zavedení na SŠ: Rozšíření reálných čísel o čísla imaginární, např. i ($i^2 = -1$), resp. -i, …, na **čísla komplexní**.

Numerace: např.: – číst a psát čísla v algebraickém *(z=3+2i)* i geometrickém tvaru $(z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi))$;
– využívat zobrazení v kartézském souřadném systému;
– čísla komplexně sdružená;
– chápat podstatu číselného oboru.

Operace (etapy): – s komplexními čísly se počítá podle speciálních pravidel.

Konstrukce komutativního tělesa komplexních čísel (C, +, ·) je obtížná, není to možné způsoby jako u čísel celých a racionálních.

Def: Algebraickou strukturu (C, +, ·) nazveme **tělesem komplexních čísel** právě když má tyto vlastnosti:
1) (C, +, ·) je komutativní těleso.
2) (C, +, ·) obsahuje podtěleso (R*, +, ·) izomorfní s tělesem reálných čísel (R, +, ·).
3) C je hustě upořádaná množina.
4) C je spojitě uspořádaná množina.

10.6 Úlohy k procvičení

1. Dokažte, že relace ≈ definovaná na kartézském součinu ZxZ je symetrická.

2. Zjistěte, kolik tříd reprezentují následující racionální čísla? *[-3,8], [3,-5], [-4,2], [6,-16], [-9,15], [-9,24], [8,-4].* Vypište třídy.

3. Dokažte, že existuje racionální nulové číslo v operaci sčítání a určete jeho obecný tvar.

4. Dokažte, že ke každému racionálnímu číslu A existuje inverzní prvek v operaci násobení (1/A) a určete jeho obecný tvar.

5. Dokažte, že sčítání a násobení racionálních čísel je komutativní.

6. Najděte součet a součin racionálních čísel A∋*[-3k,5k]* a B∋*[4k,9k], k≠0.*

7. Jaké musí být celé číslo x, aby pro racionální číslo B reprezentované *[-3,x]*, platilo *[k,3k]+B= [-5k,12k], k≠0 ?*

8. Vypočtěte součet, rozdíl, součin, podíl čísel: 9/4 a 7/6 .

9. Vyjádřete $A+B$, pokud a) je $A \in Q^+$ a $B \in Q^+$ b) je $A \in Q^+$ a $B \in Q^-$.

10. Vyjádřete $A \,.\, B$, pokud a) je $A \in Q^+$ a $B \in Q^+$. b) je $A \in Q^+$ a $B \in Q^-$.

11. Dokažte, že součet 2 kladných racionálních čísel je kladné racionální číslo.

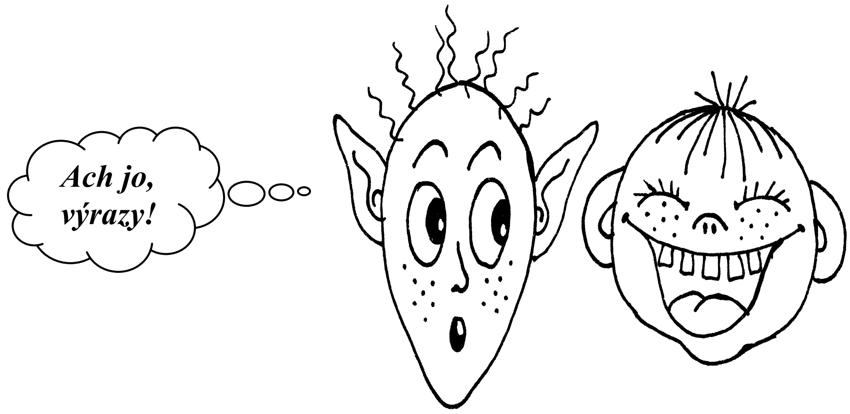
12. Dokažte, že součin kladného a záporného racionálního čísla je záporné racionální číslo.

13. Dokažte, že Q je relací $<$ hustě uspořádaná.

14. Na číselné ose znázorněte čísla $3;\ -\sqrt{2};\ 1{,}5;\ 0;\ \pi;\ -2$ a uspořádejte je.

15. Proveďte uspořádání čísel v relaci přirozeného uspořádání $<$.
$3;\ -1;\ 0;\ \pi-3;\ -1{,}5;\ 3-\pi;\ \sqrt{2};\ 2;\ -2{,}25$.

11. VÝRAZY, ROVNICE, NEROVNICE



11.1 Výrazy

Výrazy slouží k vyjadřování v matematice.

Některé druhy vyjádření matematického jazyka

Konstanta $\xleftarrow{\textit{dosazením}}$ **Proměnná + obor proměnné P**

(slovo, symbol pro určitý objekt)

2; -3,25; π; ...

(neoznačuje určitý objekt, ale více objektů, z předem dané množiny)

x, y, a, b , , ...

Označení (=term) $\xleftarrow{\textit{dosazením}}$ **Označovací forma**

= početní (**aritmetický) výraz**

(vyjádření z konstant, operačních znamének a závorek)

$2+3$; $3^2-(2\cdot 4)+\sqrt{5}$

= **algebraický výraz** + obor definiční D

(vyjádření z konstant, proměnných, operačních znamének a závorek)

$x+3$; $3^2-(2\cdot y)+\sqrt{5}$

Rovnost či nerovnost $\xleftarrow{\textit{dosazením}}$ **Rovnice či nerovnice** + obor kořenů K

(= výrok)

(vyjádření z konstant, operačních a relačních znamének a závorek)

$4+(2\cdot 3)=10$; $3^2-(2\cdot 4)+\sqrt{4}>1$

(= výroková forma)

(vyjádření z konstant, proměnných, operačních relačních znamének a závorek)

$4+(2\cdot x)=10$; $3^2-(2\cdot x)+\sqrt{4}>1$

Platí: $K \subset D \subset P$

Pozn.1: Početní a algebraické výrazy se nazývají podle poslední operace.
Z toho důvodu musí být stanoveno pořadí operací a přednosti: nejdříve

a) závorky
b) umocňování s odmocňováním před násobením s dělením a před sčítáním s odčítáním
c) při stejné „úrovni“, např. sčítání a odčítání – zleva doprava

Např.: $[(4-2)\cdot 3]^2$ *... mocnina,* $4-2\cdot 3^2$ *... rozdíl,*

Pozn.2: Při zkoušce rovnice (resp. ověření nerovnice) zjišťujeme, zda dosazením hodnoty z oboru kořenů získáme pravdivý výrok (rovnost, resp. nerovnost).

Pozn.3: Jedno matematické vyjádření může mít více významů:

$3x - 2y + 1 = 0$ ... *rovnice přímky v rovině*
... *lineární rovnice s 2 neznámými*
... *lineární funkce*

11.2 Rovnost a rovnice

11.2.1 Rovnost

Dva početní výrazy, mezi kterými je znak rovnosti.
(má strukturu výroku s relací rovnost)

$2 \cdot 3 + 4 = 22 : 2 - 1$

11.2.2 Rovnice

Dva výrazy, z nichž aspoň jeden je algebraický, mezi kterými je znak rovnosti.
(má strukturu výrokové formy s relací rovnost)

$2 \cdot x + 4 = 22 : 2 - 1$

Řešení rovnic = úloha nalézt příslušný **obor pravdivosti** výrokové formy, tj. určit množinu všech čísel z oboru proměnné, která po číselném dosazení do rovnice z ní vytvoří pravdivou rovnost.

Řešením nazýváme proces i výsledek.
Rovnice již od nejnižších tříd $\boxed{} + 3 = 5$

Užití rovnic při řešení slovních úloh, matematizace reálných situací.

Metody řešení rovnic:

a) intuitivní – dosazováním pokus a omyl

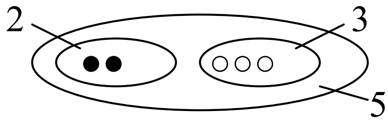
b) inverzní operací - $x + 3 = 5$

$x = 5 - 3$

$x \xrightarrow{+3} 5$, $x \xleftarrow{-3} 5$

c) řízeným pokusem – systematické zkoušení čísel až k výsledku

d) znázorněním – počitadlem ●●○○○ množinově



e) kombinace metod $3 . x + 2 = 23$

$$x \xrightarrow{\cdot 3} 3x \xrightarrow{+2} 23$$
$$7 \xleftarrow{:3} 21 \xleftarrow{-2} 23$$

f) algebraicky (ne na 1.st.) – ekvivalentními úpravami se nemění obor pravdivosti rovnice

I. k oběma stranám rovnice přičteme týž výraz

II. obě strany rovnice násobíme týmž nenulovým číslem

$$3 \cdot x + 2 = 23$$
(I.) $$3 \cdot x + 2 + (-2) = 23 + (-2)$$
$$3 \cdot x = 21$$
(II.) $$3 \cdot x : 3 = 21 : 3$$
$$x = 7$$

g) algebraicky (ne na 1.st.) – neekvivalentními (důsledkovými) úpravami se mění obor pravdivosti rovnice

např. odmocňování apod.

$$x^2 - 1 = x + 1$$
$$(x + 1)\cdot(x - 1) = x + 1 \quad /:(x+1)$$
$$x - 1 = 1$$
$$x = 2 \qquad K \neq \{2\}, \quad \text{ale } K = \{2; -1\}$$

Řešení rovnice vždy ověřit zkouškou!

$$\sqrt{x^2 + 3} = x - 1$$
$$x^2 + 3 = x^2 - 2x + 1$$
$$3 = -2x + 1$$
$$x = -1$$

$$Zk: \ L(-1) = \sqrt{(-1)^{}+3} = \sqrt{4} = 2$$
$$P(-1) = -1 - 1 = -2$$
$$L \neq P$$

takže $K \neq \{-1\}$, *ale* $K = \{\ \}$

11.2.3 Diofantské (neurčité) rovnice

Př.1: Částka 19 Kč byla zaplacena 2 Kč a 5 Kč mincemi. Kolik bylo kterých?

Řešení:

a) řízeným pokusem

počet 2 Kč	*1*	*1*	*2*	***2***	*3*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
počet 5 Kč	*1*	*2*	*1*	***3***	*1*	*3*	*1*	*1*	*1*	***1***
Celkem	*7*	*11*	*9*	***19***	*11*	*21*	*13*	*15*	*17*	***19***
vyhovuje	*ne*	*ne*	*ne*	***ano***	*ne*	*ne*	*ne*	*ne*	*ne*	***ano***

b) soustavou rovnic

počet 2 Kč mincí .... x (ks) $2x + 5y = 19$

počet 5 Kč mincí .... y (ks) $y = (19 - 2x) : 5$

hodnota 2 Kč mincí ... 2x (Kč) *x volíme, y vypočteme*

hodnota 5 Kč mincí ... 5y (Kč)

Def: **Lineární neurčitou rovnicí** o dvou neznámých x, y rozumíme rovnici $ax + by = c$, kde a, b, c přirozené a a, b celé.

Platí: Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby neurčitá rovnice $ax+by=c$ měla aspoň **jednu dvojici řešení** x_0, y_0 je, aby D(a,b) dělil c.

Jestliže přirozená čísla x_0, y_0 jsou řešením rovnice $ax+by=c$, pak **všechna řešení** jsou dána parametrickými rovnicemi $x = x_0 + b/D \cdot t$

$y = y_0 - a/D \cdot t$, *kde t celé*

Př.2: $3x + 6y = 20$ *D(a,b)= D(3,6)= 3 nedělí 20, rovnice nemá řešení*

Př.3: $4x + 8y = 20$ *D(a,b)= D(4,8)=4 dělí 20, rovnice má řešení,* $x_0=3, y_0=1$

11.3 Nerovnost a nerovnice

11.3.1 Nerovnost

Dva početní výrazy, mezi kterými je znak nerovnosti.
(má strukturu výroku s relací nerovnost >, <)

$2 \cdot 3 + 4 > 20 : 2 - 1$

11.3.2 Nerovnice

Dva výrazy, z nichž aspoň jeden je algebraický, mezi kterými je znak nerovnosti (má strukturu výrokové formy s relací nerovnost >, <)

$2 \cdot x + 4 > 20 : 2 - 1$

Řešení nerovnic = úloha nalézt příslušný **obor pravdivosti** výrokové formy, tj. určit množinu všech čísle z oboru proměnné, která po dosazení do nerovnice z ní vytvoří pravdivou nerovnost.

Řešením nazýváme proces i výsledek.
Nerovnice již od nejnižších tříd $\square + 3 < 5$

Užití nerovnic při řešení slovních úloh, matematizace reálných situací.

Metody řešení nerovnic:

a) **intuitivní** – dosazováním pokus a omyl

b) **inverzní operací** - $x + 3 < 5$
$x < 5 - 3$

c) **řízeným pokusem** – systematické zkoušení čísel až k výsledku

d) **znázorněním** – počitadlem
●●○○○

e) **algebraicky** (ne na 1.st.) – ekvivalentními úpravami se nemění obor pravdivosti nerovnice

I. k oběma stranám nerovnice přičteme týž výraz
II. obě strany nerovnice násobíme týmž nenulovým kladným číslem, při násobení obou stran nerovnice se mění znak nerovnosti!

$$-3 \cdot x + 2 > 23$$
(I.) $$-3 \cdot x + 2 + (-2) > 23 + (-2)$$
$$-3 \cdot x > 21$$
(II.) $$-3 \cdot x : 3 > 21 : 3$$
$$x < -7$$

f) **algebraicky** (ne na 1.st.) – neekvivalentními (důsledkovými) úpravami se mění obor pravdivosti nerovnice
např. odmocňování apod.

Řešení nerovnice vždy ověřit ověřením! Zkouška někdy nelze, je nekonečně řešení. Větší počet řešení nerovnice bývá problémem pro žáky!

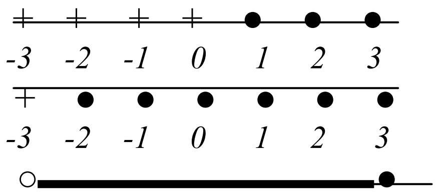
Zápis řešení nerovnic, grafická vyjádření řešení nerovnic:

Př.4: *Soustava nerovnic* $-3 < x \leq 3$ *má řešení:*

v N: *K= {1, 2, 3}*

v Z: *K= {-2, -1, 0, 1, 2, 3}*

v Q: *K= (-3;3>*

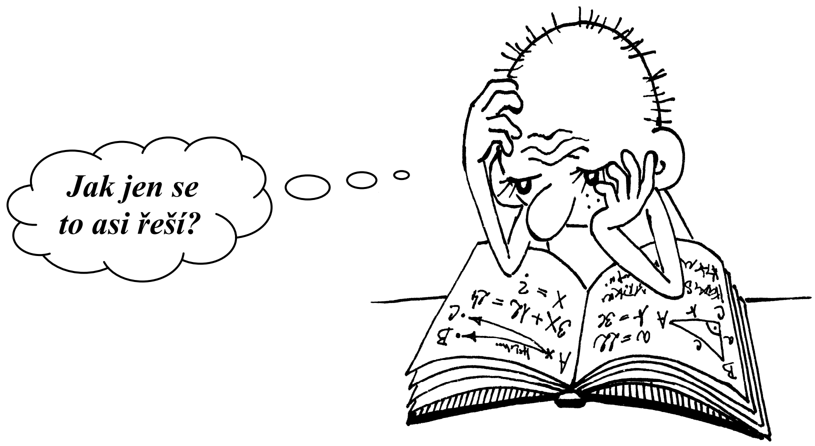


11.4 Úlohy k procvičení

1. Zapište výraz: a) Trojnásobek součtu čísel x a 5.
   b) Součet trojnásobku čísla x a 5.
2. Zapište jako výraz, urči jeho název a hodnotu pro x=4: Vezmi x, přičti 3, násob to 4, od toho odečti x, vše děl 8, umocni na druhou a odečti 5.
3. Lze pomocí 4 čtyřek, operačních znamének a závorek zapsat čísla od 1 do 10?
4. Řešte rovnici a proveďte diskuzi: a) $2 \cdot (x-3) = 3 \cdot (x-1)$
   b) $2 \cdot (x-3) = 3 \cdot (x-1) - (x+3)$
   c) $2 \cdot (x-3) = 3 \cdot (x-1) - x$
5. Řešte rovnici a proveďte zkoušku: $\dfrac{3}{x-2} = \dfrac{12}{(x+2).(x-2)}$
6. Na dvoře jsou slepice a králíci a mají 20 nohou. Kolik je slepic a kolik králíků?
7. Řešte soustavu rovnic (různými metodami): $$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ \underline{x - y} &\underline{= 1} \end{aligned}$$
8. Kde je chyba? $$\begin{aligned} a &= a && /\,^2 \\ a^2 &= a^2 && / - a \\ a^2 - a^2 &= a^2 - a^2 && \\ a \cdot (a - a) &= (a + a) \cdot (a - a) && / : (a - a) \\ a &= a + a && \\ a &= 2 \cdot a && / : a \\ 1 &\neq 2 \ ??? && \end{aligned}$$
9. Řešte nerovnici: $\dfrac{x}{x-1} < 1$

10. Řešte soustavu nerovnic a řešení znázorněte graficky: $-3x+10 \geq 4 > 1-x$
a) v N, b) v Z, c) v Q.

12. SLOVNÍ ÚLOHY



12.1 Úvodní poznámky

Slovní úloha – úloha z praxe, popisující reálnou situaci, která ústí v problém, který je obtížné řešit v realitě, ale je možno ho řešit matematicky.

Hlavní cíl učiva o slovních úlohách není ve výsledcích a správných odpovědích, ale ve schopnosti daný problém matematizovat.

Matematizace reálné situace – její přeformulování do matematiky

Schematicky:

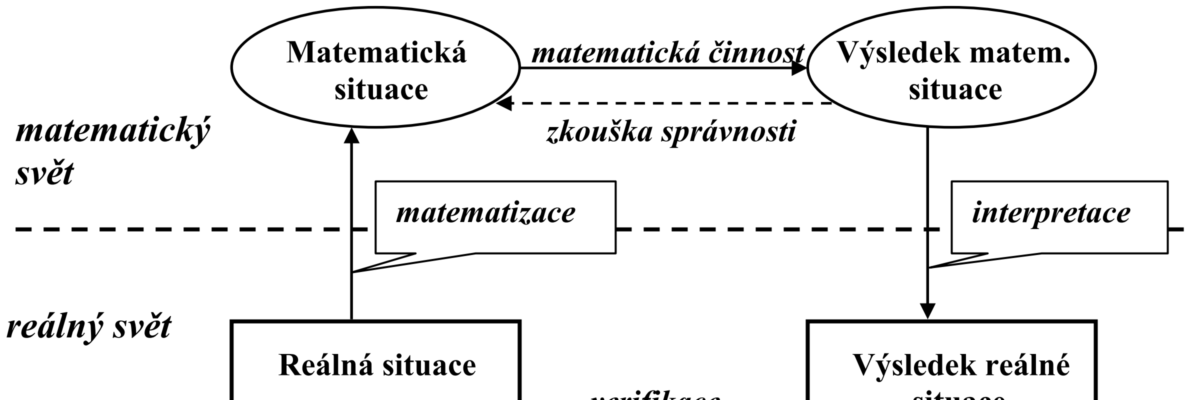


Schéma naznačuje myšlenkový postup při řešení náročnějších slovních úloh. Při řešení může ve fázi matematická činnost docházet k několikanásobnému přechodu mezi matematickým a reálným světem a zpět (k získání potřebných dat). Při řešení slovních úloh jsou významné dvě zkoušky, správnosti (matematická) a důležitější, reálnosti (na text slovní úlohy).

Slovní úlohy – rozvíjejí **matematické schopnosti** a úroveň **logického myšlení;**
– mají **vzdělávací funkci –** rozšiřují **znalosti;**
– mají **výchovnou funkci –** ovlivňují **morální a volní vlastnosti.**

12.2 Fáze řešení slovní úlohy

1) **Rozbor úlohy –** pochopení textu, jeho zápis;
2) **Matematizace úlohy** – přeformulování podmínek a vztahů do matematiky;
3) **Řešení úlohy** – matematická činnost;
4) **Zkouška** – ověření matematické správnosti;
   – verifikace reálnosti výsledku;
5) **Slovní odpověď** – interpretace matematického výsledku do reálné situace.

1) **Rozbor úlohy –** uchopení/pochopení textu, několikeré přečtení, porozumění pojmům a údajům, evidence podmínek, ujasnění si vztahů, vypsání hodnot, vlastní formulace otázky (v podstatě již začíná i matematizace);

2) **Matematizace –** vychází z rozboru, vytřídění nepodstatných a nadbytečných údajů, vybrání vhodných a podstatných údajů, vyjádření podmínek a vztahů matematicky podle zvoleného matematického modelu (model: příklad, rovnice, grafický, množinový, jiný);

3) **Řešení úlohy** – matematická činnost v příslušném matematickém modelu (aritmetickém, algebraickém, geometrickém, množinovém, jiném);
   Strategie řešení – pokus a omyl,
   – manipulace s daty (náhodná, logická, dle pravidel),
   – analogicky dle známých schémat,
   – matematickými postupy,
   – intuitivně.

4) **Zkouška** – ověření matematické správnosti pomocí početních operací, zkoušky slovní úlohy, atd. (může vyjít při nesprávném řešení),
   – verifikace reálnosti výsledku, jeho věcné správnosti, ověření splnění podmínek v zadání slovní úlohy,

5) **Slovní odpověď** – interpretace matematického výsledku do reálné situace podle otázky v zadání slovní úlohy, zpětná vazba, využití odhadu.

12.3 Klasifikace slovních úloh

Podle různých hledisek:

- jednoduché, složené;
- nedourčené (neúplné), přeurčené;
- určovací, existenční, důkazové;
- motivační, výkladové, opakovací, prověřovací, …;
- aritmetické, algebraické, geometrické, statistické,…

12.3.1 Jednoduché slovní úlohy

– k řešení stačí použít jedna početní operace.

Pozn.: Zkreslený pohled, že stačí žáky naučit volit tu jednu operaci,
např.: *přinesl, dal… sčítání,* *odnesl, snědl… odčítání*

Nestačí! Existují tzv. antisignály,
např.: *Vašek snědl 3 jahody, Pavel 2 jahody. Kolik snědli oba?... sčítání*

Typy jednoduchých slovních úloh

A1) Aditivní úlohy 1. typu

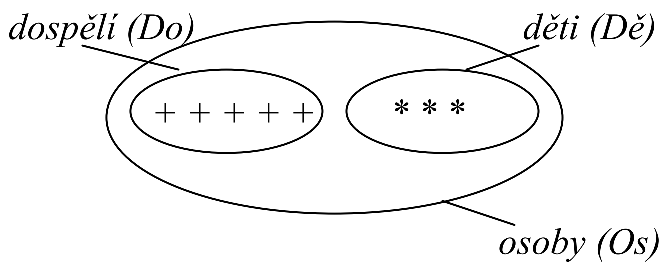
– úlohy řešené operací sčítání nebo odčítání, kde matematizace se opírá o **sjednocení dvou disjunktních množin**.

Př.1: Na nástupišti čekalo 8 osob, z toho bylo 5 dospělých. Kolik bylo dětí?

Řešení: *osoby ... 8*
dospělí ... 5
dětí ... x

$x = 8 - 5$

$x = 3$



Byly tam 3 děti.

Množinově: $Do \cup De = Os$

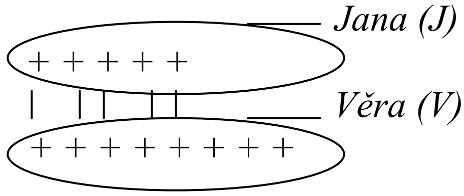
A2) Aditivní úlohy 2. typu

– úlohy řešené operací sčítání nebo odčítání, kde matematizace se opírá o **sjednocení a porovnávání kardinálních čísel množin … „ o kolik? “**

Př.2: Jana má 5 korun, Věra má o 3 koruny více. Kolik korun má Věra?

Řešení: *Jana ... 5 Kč*
<u>*Věra ... o 3 Kč více*</u>
$x = 5 + 3$
$x = 8$

Věra měla 8 korun.



Množinově: $J \subset V$

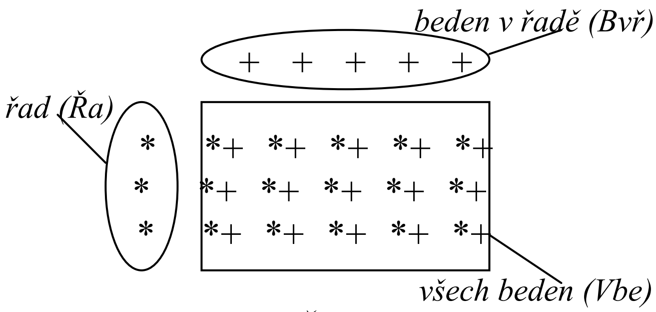
M1) Multiplikativní úlohy 1. typu

– úlohy řešené operací násobení nebo dělení, kde matematizace se opírá o **kartézský součin dvou množin.**

Př.3: Na auto do každé ze 3 řad dali 5 beden. Kolik bylo všech beden?

Řešení: *1 řada ... 5 beden*
<u>*3 řady ... x beden*</u>
$x = 5 . 3$
$x = 15$

Všech beden bylo 15.



Množinově: *Řa x Bvř = Vbe*

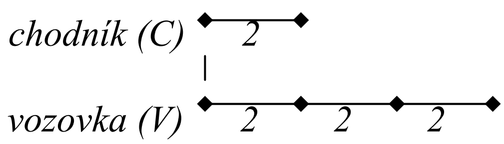
M2) Multiplikativní úlohy 2. typu

– úlohy řešené operací násobení nebo dělení, kde matematizace se opírá o **porovnávání kardinálních čísel množin … „ kolikrát? “**

Př.4: Chodník je široký 2 m, vozovka je třikrát širší. Jak je široká vozovka?

Řešení: *chodník ... 2 m*
<u>*vozovka ... 3krát více*</u>
$x = 2 . 3$
$x = 6$

Vozovka je široká 6 m.



Množinově: $C \subset V$

Pozn.: Pozor na nepřesné lidové chápání termínu „jednou tolik“.

Pozn.: Důležitá je obměna jednoduchých slovních úloh. Většina z nich je typu *ze dvou údajů určit údaj třetí* , z toho analogicky další typy úloh.

Př.5: *Na nádraží přivezli vagóny, některé jsou vyložené, některé ještě nejsou.*

a) *Přivezli celkem 14 vagónů, vyložili jich 6. Kolik jich mají ještě vykládat?*

b) *Přivezli celkem 14 vagónů, mají jich vykládat ještě 8. Kolik již vyložili?*

c) *Vyložili 6 vagónů a mají ještě vykládat 8. Kolik vagónů celkem přivezli?*

12.3.2 Složené slovní úlohy

– k řešení je třeba použít aspoň dvě početní operace (i stejné), buď na sebe navazují nebo jsou navzájem propojeny.

Složená slovní úloha – zahrnuje **hlavní problém**, na jehož řešení nejsou dány všechny údaje.
– je nutno najít a formulovat **dílčí úlohy**, pomocí kterých se tyto potřebné údaje získají.

Potřeba **plánu řešení** (třeba jen myšlenkového):

1. **fáze (analytická)** – shromáždění důležitých podmínek, vztahů a údajů,
– nalezení plánu řešení.
    a) uvědomění si, jakým způsobem (matematickým modelem) je nutno řešit hlavní problém úlohy a jaké k tomu je třeba údaje;
    b) zformulování dílčích úloh, kterými se určí údaje potřebné pro řešení hlavního problému.

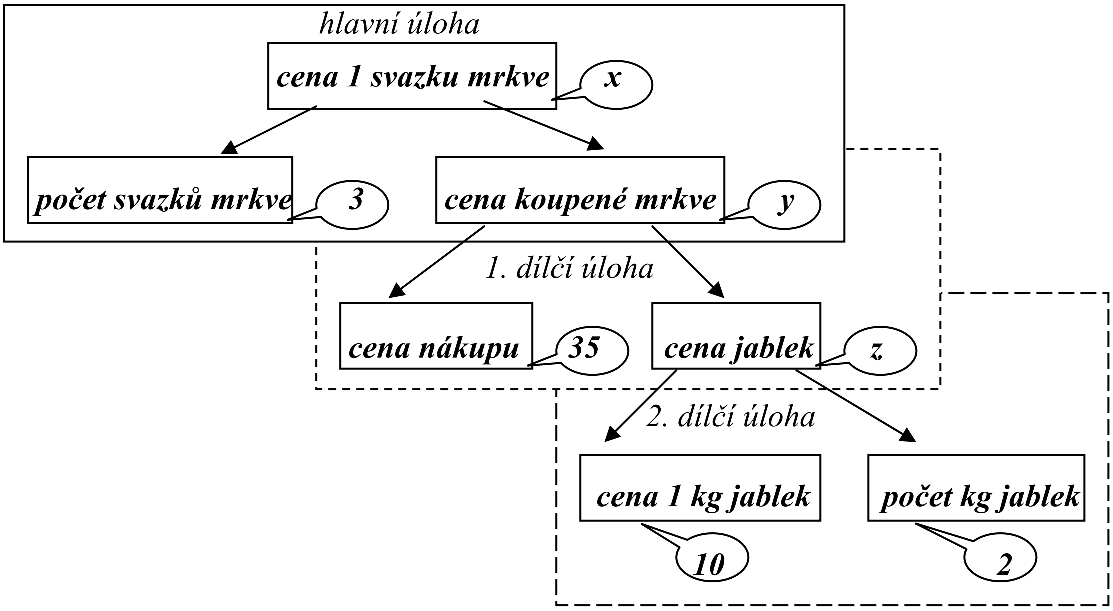
2. **fáze (syntetická)** – postupná realizace plánu řešení.
    a) vyřešení potřebných dílčích úloh;
    b) vyřešení hlavní úlohy;
    c) provedení kontroly, zkoušek a vyslovení odpovědi.

Metodický návod: Učitel: *„Co potřebujeme znát, abychom úlohu vyřešili?“*
Aby se žáci naučili plán řešení sestavovat. Někteří žáci sami „nedohlédnou“ k údajům a nesestaví plán řešení.
Chybou je, když učitel žákům přímo rozloží úlohu na dílčí úlohy.
1. fáze řešení je vždy náročnější než 2. fáze.

Metodické problémy: 1) nelze dát obecný návod;
2) jsou omezené možnosti znázornění.

Př.6: Jana šla nakupovat. Koupila 2 kg jablek po 10 Kč a 3 svazky mrkve. Nákup stál 35 Kč. Kolik stál jeden svazek mrkve?

Struktura úlohy:



Řešení úlohy:

A) soustavou rovnic:

$3 \cdot x = y$ *(HÚ)*
$y + z = 35$ *(1.DÚ)* *analytický postup*
$z = 2 \cdot 10$ *(2.DÚ)*

$z = 20$
$y = 35 - 20 = 15$ *syntetický postup*
$x = 15 : 3 = 5$

Zk: 3 svazky mrkve… 3·5= 15 Kč
2 kg jablek…… 2·10= 20 Kč Dohromady…15+20=35 Kč

Odpověď: *Jeden svazek mrkve stál 5 Kč.*

B) systémem závorek:

$$x = [35 - (2 \cdot 10)] : 3$$

1.DÚ 2.DÚ HÚ

C) synteticky (často, analýza jen v mysli):

$2 \cdot 10 = 20$ *(2.DÚ)*
$35 - 20 = 15$ *(1.DÚ)* *syntetický postup*
$15 : 3 = 5$ *(HÚ)*

Analytický postup – vyjde z otázky úlohy a sestaví JSÚ, která na otázku odpovídá, avšak jeden údaj neznáme,
pro jeho určení sestaví JSÚ, kde opět 1. údaj neznáme,
pro jeho určení sestaví JSÚ, kde 1. údaj neznáme, atd.

Syntetický postup – vyjde z daných údajů, ze kterých určí potřebný údaj, z něho a z textu další úloha, ze které určíme potřebný údaj, atd.

Pozn.: Pro učitele jsou tyto žákovské slovní úlohy snadné, analyzuje jen v mysli a často prezentuje žákům jen na syntetický postup.

Analytický postup – cílevědomý, správnost potvrzena dalším krokem.

Syntetický postup – spekulativní, nezaručuje přiblížení k odpovědi.

Správný postup je **analyticko-syntetický**.

12.3.3 Slovní úlohy nedourčené (neúplné) a přeurčené

a) Slovní úlohy nedourčené

– některé údaje k řešení chybí, je třeba je zjistit (umožňuje to větší zapojení žáků do reálné praxe).

Př.7a: Maminka koupila 4 kg meruněk a ty dala do 6 zavařovacích sklenic. Kolik gramů cukru na zavaření potřebuje?

(Žák musí zjistit kolik gramů cukru je třeba na 1 zavařovací sklenici, nebo na 1 kg meruněk.)

b) Slovní úlohy přeurčené

– v úloze jsou nadbytečné údaje, k řešení je třeba tyto údaje vyloučit.

Př.7b: Maminka koupila 4 kg meruněk a ty dala do 6 zavařovacích sklenic. Každou sklenici zalila 200 gramy vody a 15 gramy cukru. Kolik gramů cukru na zavaření potřebuje?

(Žák musí zjistit, které údaje jsou pro řešení úlohy nepotřebné.)

12.3.4 Slovní úlohy určovací, existenční, důkazové

a) Slovní úlohy určovací

– jde o úlohy, které požadují určení, nalezení, vypočtení, zjištění všech matematických objektů, které mají požadované vlastnosti.

Př.8: Jirka měl zaplatit 19 Kč pomocí 2 Kč a 5 Kč mincí. Kolik kterých mincí potřeboval?

Řešení:

a) ***matematické*** *(2.st.ZŠ)*

počet 2 Kč … x ks	$x = (19 - 5y) : 2$
počet 5 Kč … y ks	*aby* $x \in N$, *musí* $y \in N$, *liché, menší než 4*
celková cena … $2x+5y = 19$	*je-li* $y=1$, *je* $x=7$, *je-li* $y=3$, *je* $x=2$

Zk: a) $1 \cdot 5 + 7 \cdot 2 = 5+14=19$ *Kč* *b)* $3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 15+4=19$ *Kč*

Odpověď: Jirka mohl zaplatit 1 pětikorunou a 7 dvoukorunami, nebo 3 pětikorunami a 2 dvoukorunami.

b) ***řízeným pokusem*** *(i na 1. stupni ZŠ)*

Řešení: viz čl. 11.2.3, Př.1a)

b) Slovní úlohy existenční (s parametrem)

– jde o úlohy, které obsahují nějakou proměnnou (parametr) a úkolem je zjistit, při jakých hodnotách této proměnné existuje řešení zadané úlohy, případně kolik těchto řešení v závislosti na hodnotě proměnné úloha má.

Př.9: Děti při hledání pokladu zjistili, že pro otevření zámku truhly musí najít kód, kterým je dvojciferné číslo menší než 25, dělitelné současně čtyřmi i šesti. Existuje takové číslo?

Řešení*:* *dvouciferné společné násobky 4 a 6 menší 25 jsou 12, 18, 24*

12 je i násobkem 4, vyhovuje
18 není násobkem 4, nevyhovuje
24 je i násobkem 4, vyhovuje

Zk: Číslo 12 je dělitelné 6 i 4, číslo 24 je rovněž dělitelné 6 i 4.

Odpověď: Existují dvě taková čísla, 12 a 24.

c) Slovní úlohy důkazové

– jde o úlohy, které patří mezi logické úlohy, týkající se logické organizace poznatků či tvrzení v dané matematické disciplině.

Př.10: Dokažte, že součet dvou přirozených lichých čísel je číslo sudé.

Řešení:

a) ***matematické*** *(na 2. st. ZŠ)*

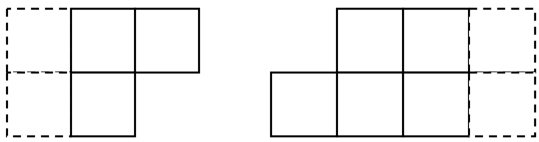
1. liché číslo a $\Rightarrow a=2k+1$ *2. liché číslo b* $\Rightarrow b=2h+1$*, pak*

součet $s=a+b=2k+1+2h+1=2k+2h+2=2\cdot\underbrace{(k+h+2)}_{m}=2\cdot m \Rightarrow$ *sudé číslo*

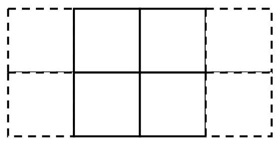
Odpověď: Důkaz byl proveden

b) ***grafické pomocí figurálních čísel*** *(i pro 1. st. ZŠ)*

každé liché číslo lze vyjádřit



sudé číslo lze vyjádřit



součet 2 lichých čísel, znamená složení jejich schémat a to tvoří

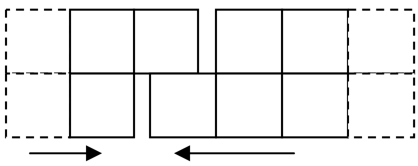


schéma sudého čísla

Odpověď: Důkaz byl proveden "připojením" schémat

12.3.5 Slovní úlohy motivační, výkladové, prověřovací …

– jde o úlohy, které jsou použity v různých fázích vyučovací hodiny a mají dle toho příslušnou didaktickou funkci.

12.3.6 Slovní úlohy aritmetické, algebraické, geometrické, statistické …

– jde o úlohy, které jsou pojmenovány podle toho, ze které matematické discipliny je jejich obsah.

12.4 Metody řešení slovních úloh

Zde se zmíníme o několika metodách řešení slovních úloh, např.:

- **pokus a omyl** – pomocí náhodných manipulací se zadanými daty, ne vždy vede k úspěchu;
- **intuitivně** – pomocí záměrných manipulací s daty podle „vnitřního pocitu“, často vede k úspěchu;
- **řízený pokus** – sestavením údajů do tabulky a postupné systematické hledání správného řešení;
- **znázorněním** – s využitím obrázků a grafů, jako s podporou řešení, ale ne přímo řešení;
- **analogicky** – podle dříve řešené obdobné slovní úlohy, nemusí vést k úspěchu;
- **grafické** – pomocí obrázků a grafů, jako prostředkem k přímému řešení úlohy;
- **množinové** – s využitím množinových operací sjednocení a průniku, většinou formou obrázků (Vennovy diagramy);
- **aritmetické** – pomocí soustavy aritmetických příkladů, které odpovídají vztahům údajů v úloze;
- **algebraické** – pomocí rovnic a nerovnic nebo soustav rovnic a nerovnic, které odpovídají vztahům údajů v úloze;
- **geometrické** – pomocí konstrukcí grafů funkcí, které popisují vztahy údajů v úloze.

12.5 Ukázky řešení slovních úloh

Př.11: Na březích potoka je 24 topolů, na levém o 4 více než na pravém. Kolik topolů je na každém břehu?

Řešení:

a) ***algebraické*** *(na 2.st.ZŠ)*

na levém břehu…… x topolů $\quad x+y = 24$

na pravém břehu… y topolů $\quad \underline{x-y = 4}$

$2x \quad = 28$

$x \quad = 14 \qquad y = 24-14= 10$

Zk: Na obou březích 14+10= 24 topolů
Na levém je více o 14–10= 4 topoly než na pravém břehu.

Odpověď: Na levém břehu je 14 topolů, na pravém 10 topolů.

b) *tzv.**vyrovnáním** (i na 1. stupni)*

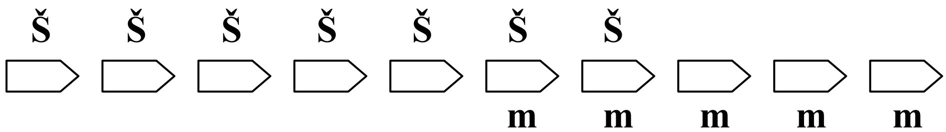
na pravý břeh přidáme 4 topoly, pak je na obou stejně
všech topolů pak je .... 24+4=28
na obou stejně, na levém.... 28:2 = 14
na pravém pak ………………. 14–4 = 10

c) *jiným **vyrovnáním** (i na 1. stupni)*

na levém břehu 4 topoly vykácely, pak je na obou stejně
všech topolů pak je ……….. 24–4= 20
na obou stejně, na pravém… 20:2 = 10
na levém pak ……………… 10+4= 14

Př.12: Na parkovišti stojí 10 aut, 7 škodovek a 5 modrých aut. Je mezi nimi modrá škodovka?

Řešení: ***grafické*** *(i na 1. stupni)*



Zk: Např.: 5 škodovek + 2 modré škodovky + 3 modrá auta = 10 aut
Ale také: 4 škodovky+3 modré škodovky+2 modrá auta+1 jiné=10

Odpověď: Na parkovišti jsou nejméně 2 modré škodovky.

Př.13: Každé ze 30 dětí třídy plave nebo bruslí. Plave 18 dětí, bruslí 20 dětí. Kolik dětí plave i bruslí?

Řešení:

***a) algebraické** (na 2. st. ZŠ)*

plave i bruslí… x žáků $y+20 = 30$ $x+y = 18$
nebruslí …… y žáků $y = 10$ $x+10 = 18$
$x = 8$

Zk: Jen plave 10 žáků+jen bruslí 12 žáků + oboje 8 žáků = 30 žáků

Odpověď: Bruslí i plave 8 žáků.

***b) množinově (kardinální čísla)** (i na 1. stupni) (neprázdný průnik)*

plave… P žáků, všech žáků… V   *Platí:* $P + B = V + O$
bruslí… B žáků, $18 + 20 = 30 + ?$
oboje… O žáků, $? = 8$

Př.14: Jan staví z 50 kostek věže. První ze 2 kostek, druhou ze 2x tolika kostek, třetí ze 3x tolika kostek, atd. a na poslední neměl dost kostek. Kolik měl dát na první věž, aby i poslední byla celá a nic nezbylo.

Řešení:

***a) matematické** (na SŠ) (posloupnosti a řady)*

$x+2x+3x+\ldots+nx = 50$ *100 musí být dělitelné n.(n+1)*
$x \cdot (1+2+3+\ldots+n) = 50$
$x \cdot n \cdot (n+1)/2 = 50$ *při n=1 je x=50*
$x = 100/n \cdot (n+1)$ *při n=4 je x=5*

Odpověď: První věž je z 50ti nebo 5ti kostek.

***b) experimentální (řízený pokus)** (i na 1. stupni)*

Věž	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	*7*	***celkem***	***výsledek***
kostky	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*	*14*	*56*	*6 chybí*
kostky	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*		*63*	*13 chybí*
kostky	*4*	*8*	*12*	*16*	*20*			*60*	*10 chybí*
kostky	***5***	***10***	***15***	***20***				***50***	***správně***

Zk: 1.věž 5 kost.+2.věž 10 kost.+3. věž 15 kost.+4.věž 20 kost.=50 k.

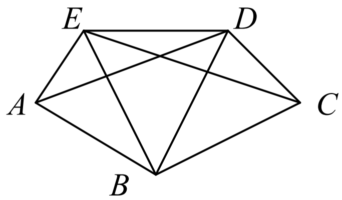
Odpověď: První věž je z 5ti kostek, věže jsou 4.

Př.15: Eva si na narozeniny pozvala 4 kamarádky. Dala jim zákusek a sklenku džusu. Spolu si každá s každou ťukla. Kolik cinknutí zaznělo?

Řešení: ***a) matematické*** *(na SŠ)* *(kombinatorika)*

$$x = \binom{5}{2} = \frac{5.4}{2} = 10$$

b) grafické *(i na 1. stupni)*



Zk: Eva si ťukla se 4 kamarádkami a takto i další, jenže ta ťuknutí jsou vzájemná, takže se jejich počet musí dělit dvěma.

Odpověď: Zaznělo 10 cinknutí.

Spočítají se úsečky…10

12.6 Tvoření slovních úloh

Slovní úlohy je třeba upravovat, aktualizovat, vytvářet.

- **upravit** slovní úlohy z učebnic a sbírek je třeba:
  - **aktualizovat** – stárne text i údaje (např. ceny);
  - **regionalizovat** – upravit podle místní situace (např. z obce, z okolí);
  - **upravit zajímavě** – upravit text na zajímavou a zábavnou formu (např. matematické pohádky a příběhy).
- **při tvorbě** nových slovních úloh je třeba:
  - dbát na **jednoznačnost zadání** textu;
  - dbát na **zkušenosti žáků**, zda porozumí textu;
  - dbát na **aktuálnost** údajů, **regionálnost** a **zajímavost** úloh;
  - dbát na **výchovnost** slovních úloh;
  - dbát na **reálnost** slovní úlohy;
  - dbát na **aplikovatelnost** matematických poznatků;
  - **využít žákovské úlohy,** po úpravě;
  - **respektovat výchovně vzdělávací cíle**, tj.
    - naučit žáky matematicky vyjádřit reálné problémy;
    - motivovat žáky k matematice prokázáním její účelnosti;
    - ukázat aplikabilitu matematického učiva;
    - naučit žáka vyhledávat údaje potřebné k řešení;
    - volit různé způsoby řešení úloh a jejich znázorňovaní;
    - výchovně na žáky působit.

12.7 Úlohy k procvičení

1. Ivan přinesl do sběru 5 kg papíru a Jana přivezla 15 kg papíru.
   a) O kolik kg papíru odevzdala Jana více než Ivan?
   b) Kolikrát více papíru odevzdala Jana více než Ivan?

2. V květinářství mají 34 karafiátů a růží. Růží je o 8 více než karafiátů. Kolik je růží a kolik karafiátů?

3. Láďa má o 10 Kč více než Jirka a ten má o 15 Kč méně korun než Milan. Celkem mají 70 Kč. Kolik korun má každý z nich?

4. Součástka A váží třikrát více než součástka B, součástka B váží dvakrát méně než součástka C. Součástky B a C dohromady váží 30 kg. Je možno všechny tři součástky dát na podstavec, který unese 50 kg?

5. Vašek přišel domů a viděl na talířku jahody. „Musím nechat ostatním“ a snědl z nich čtvrtinu. Pak přišla Jitka a ze stejného důvodu ze zbylých snědla třetinu, maminka pak snědla polovinu jahod a když přišel tatínek, zůstaly na něho 4 jahody. Kdo snědl nejvíc jahod?

6. Děti ušly na výletě 1. den polovinu cesty, 2. den čtvrtinu cesty a 3. den ušly 8 km. Jak dlouhá byla celá cesta?

7. Třída s 20 žáky se má ubytovat v 6 třílůžkových a čtyřlůžkových pokojích. Kolik kterých pokojů potřebuje?

8. Z 10 chlapců ve třídě jich 7 bruslí a 6 lyžuje. Kolik chlapců bruslí i lyžuje?

9. Z 10 dívek 5 nechodí malovat, 1 nechodí na malovat ani zpívat, 2 malují i zpívají. Kolik dívek chodí malovat a kolik chodí zpívat?

10. Na tachometru auta bylo číslo 15951 km, po 2 hodinách tam bylo opět souměrné číslo. Kolik km ujelo auto za jednu hodinu?

11. Strana trojúhelníku ***a*** měří o 5 cm více než strana ***b*** a ta je o 1 cm kratší než strana ***c***. Obvod trojúhelníku měří 15 cm. Jak jsou dlouhé jednotlivé strany?

12. Děti při hledání pokladu našli papírek, kde bylo číslo potřebné pro otevření zámku dveří. Jenže jedna číslice se rozmazala, 4?5 . Jaké číslo otevíralo zámek, víme-li, že je dělitelné devíti?

13. Jaký je nejmenší počet cvičenců na hřišti, jestliže když stojí v trojstupu, ve čtyřstupu, v pětistupu a v šestistupu, tak vždy 1 cvičenec přebývá?

14. Obdélník jehož strany jsou celá čísla má obsah 12 cm^2. Jaký je jeho nejmenší obvod?

15. Větší čtverec má stranu 3x větší než menší čtverec. Kolikrát se plocha malého čtverce vejde do plochy velkého čtverce?

VÝSLEDKY ÚLOH

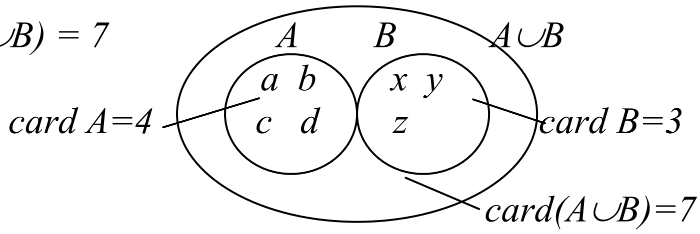
7.5

1. *a)* $A \cap B \subset A \wedge A \cap B \subset B$, *A i B jsou konečné, tedy i průnik* $A \cap B$ *je konečný.*

2. *Přirozené číslo a je rovno samo sobě ... reflexivnost.*
Je-li přirozené číslo a = b, pak je i b = a ... symetričnost.
Je-li přir.číslo a=b a přir.číslo b=c, pak je a=c ... tranzitivnost.

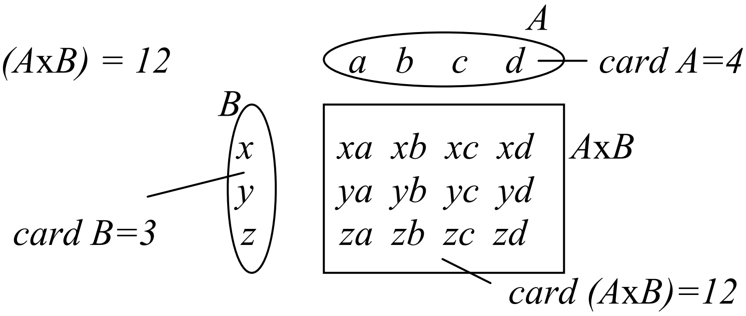
3. *Ano, je to ekvivalence. Třídy rozkladu* $T_0 =\{0,4,8,12,16,20\}$,
$T_1 =\{1,5,9,13,17\}$, $T_2 =\{2,6,10,14,18\}$, $T_3 =\{3,7,11,15,19\}$.

4. $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{x,y,z\}$. *Card* $A = 4$, *card* $B = 3$, $A \cap B=\{\ \}$,
pak
card A+ card B = card $(A \cup B) = 7$



5. $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{x,y,z\}$. *Card* $A = 4$, *card* $B = 3$, *pak*

card A · card B = card (AxB) = 12



6. $A \times \{\ \} = \{\ \}$, *tedy i cardA · card* $\{\ \}$ = *card* $\{\ \}$.

7. *Množina [S] ={a,b,c,d,1,2,3}. Pak ord [A]+ord [B]=ord [S]= 7 .*

8. *Množina [K] ={[a,1],[b,1],[c,1],[d,1],[a,2],[b,2],[c,2],[d,2],[a,3],[b,3],[c,3],[d,3]}. Pak ord [A] · ord [B]=ord [K]=12 .*

9. *ord [A]+ord [B]=ord [S], kde [S]= {a,b,c,d,1,2,3}, ord [S]= 7*
ord [B]+ord [A]=ord [S], kde [S*]= {1,2,3,a,b,c,d}, ord [S*]= 7. Ano, je.*

10. *Označme úseky* $U(a)$, $U(b)$. *Protože* $a \neq b$, *je* $a \prec b$ *nebo* $b \prec a$. *V případě* $a \prec b$ *je* $U(a) \subset U(b)$. *Je-li* $b \prec a$ *je* $U(b) \subset U(a)$.

11. *Je-li* $b' = {}'a$, *pak jsou prvky v pořadí* $b \prec b' = {}'a \prec a$. *Tedy* $U(b) \subset U(a)$.

12. *Jestliže* $c \notin U(a)$, *pak* $a \prec c$. *Je-li* $c \in U(b)$, *pak* $c \prec b$. *Tedy* $a \prec c \prec b$.

13. *Jestliže* $c \notin U(a)$, *pak* $U(a) \subset U(c)$. *Je-li* $c \in U(b)$, *pak* $U(c) \subset U(b)$. *Tedy* $U(a) \subset U(c) \subset U(b)$.

14. $5 + 3 = (5 + 2)' = ((5+1)')' = (((5+0)')')' = ((5')')' = (6')' = 7' = 8$

15. $5 \cdot 3 = 5 \cdot 2' = (5 \cdot 2 + 5) = (5 \cdot 1' + 5) = ((5 \cdot 1 + 5) + 5) = ((5 \cdot 0' + 5) + 5) = (((5 \cdot 0 + 5) + 5) + 5) = (((0 + 5) + 5) + 5) = 15$

16. *Je-li* $a<b \wedge c<d$, pak platí $a+c < b+c \wedge b+c < b+d$. *Z toho* $a+c < b+d$.

17. *Dokážeme nepřímým důkazem. Obměněná věta: Je-li* $a < b$, *pak je* $a+c < b+c$.
Je-li $a < b$, *pak ex.* x *takové, že* $a+x=b$. *Pak* $(a+x)+c=b+c$, *tedy* $a+c < b+c$.

18. $m \geq 1 \wedge n \geq 1$. *Je-li* $m > 1$, *pak* $m \cdot n > n = 1$. *Je-li* $n > 1$, *pak je* $m \cdot n > m \geq 1$. *Tzn., že* $m = n = 1$.

19. *Dokážeme nepřímým důkazem. Obměněná věta: Je-li* $a < b \wedge c \neq 0$, *pak je* $ac < bc$.
Je-li $a < b$, *tedy* $a+x=b$. *Pak* $(a+x) \cdot c = b \cdot c$, *neboli* $ac+xc=bc \wedge xc \neq 0$, *čili* $ac < bc$.

20. *Je-li* $a < b$, *pak ex.* $x \neq 0$ *takové, že* $a+x=b$, *dále existují* y, z, *pro které platí* $c=ay$, $c=bz$. *Tedy* $ay=bz$, *čili* $az+xz=bz$, *čili* $ay=az+xz$. *Z toho* $ay>az$, *a protože* $a \neq 0$, *je tedy* $y > z$, *tj.* $c:a > c:b$.

8.5

1. $z=10$, $z^2 = 100$, $z^2 + 1 = 101$, $(z+1)^2 = 121$ *(pro* $z>2$*).*

2. $10014_5 > 4433_5 > 1342_5 > 1312_5$.

3. *Dvojciferné číslo xy se zapíše 10x+y, nové číslo 10y+x.*

$x+y = 7$

$\underline{10y+x = 10x+y+27}$ *Z toho x=2 a y=5.* *Čísla jsou 25 a 52.*

4. *a)* $z=4$, *b)* $z=6$.

5. *a)* $43 = 101011_2$, *b)* $43 = 1121_3$.

6. *a)* $111011_2 = 59$, *b)* $4321_5 = 586$.

7. *a)* $111011_2 = 323_4$, *b)* $111011_2 = 214_5$.

8. $111011_2 + 11101_2 = 1011000_2$ $111011_2 - 11101_2 = 11110_2$

9. $111011_2 \cdot 101_2 = 100100111_2$ $111011_2 : 101_2 = 1011_2$ zb. 100_2 .

10. $1243_5 + 33_5 = 1331_5$ $1243_5 : 33_5 = 21_5$

9.6

1. *Předpokládejme, že [a,b]~[c,d], máme dokázat, že [c,d]~[a,b],*
Z předpokladu a z definice vyplývá, že $a+d=b+c$,
jde o přirozená čísla, takže i $c+b=d+a$ *což je [c,d]~[a,b].*

2. *Je-li* $A\geq 0$, *pak 1)* $|A| = A$
2) $|-A| = A$, *tedy* $|A| = |-A|$
Je-li $A<0$, *pak 1)* $|A| = -A$
2) $|-A| = -A$, *tedy* $|A| = |-A|$

3. *Nechť [a,b] є A , [c,d] є B a [e,f] є C .*
Pak $(A+B)+C$ *je reprezentováno* $[(a+c)+e,(b+d)+f]$
a $A+(B+C)$ *je reprezentováno* $[a+(c+e),b+(d+f)]$.
Pro součty přirozených čísel platí $[(a+c)+e,(b+d)+f]=[a+(c+e),b+(d+f)]$
a tedy i $(A+B)+C=A+(B+C)$.

4. *Nechť [a,b] є A , [n,n] є O* a *[x,y] є (–A) . Musí platit* $A+(-A)=O$.
Pak $A+(-A)$ *je reprezentováno* $[a+x,b+y]$
a musí platit $[a+x,b+y] \sim [n,n]$
dle definice $a+x+n = b+y+n$
z toho $a+x = b+y$
což platí pouze je-li $x=b \wedge y=a$
Existuje-li k A,[a,b] є A opačné celé číslo (–A), pak má tvar [b,a] є (–A) **.**

5. *Nechť* $[a,b] \in A \in \mathbb{Z}^+$, $[c,d] \in B \in \mathbb{Z}^+$, *pak* $a>b \wedge c>d$,
reprezentantem součtu A+B je dvojice $[a+c,b+d]$
$a>b \Rightarrow a+c>b+c$
$c>d \Rightarrow \quad b+c>b+d$ *z toho* $a+c>b+d \Rightarrow A+B \in \mathbb{Z}^+$

6. *Nechť* $[a,b] \in A$, $[c,d] \in B$,
reprezentantem součinu $A\cdot B$ *je dvojice* $[ac+bd,ad+bc]$
reprezentantem součinu $B\cdot A$ *je dvojice* $[ca+db,da+cb]$
jde o součty přirozených čísel, tedy $[ac+bd,ad+bc]= [ca+db,da+cb]$
a tedy i $A\cdot B= B\cdot A$.

7. *Nechť* $[a,b] \in A \in \mathbb{Z}^+$, $[c,d] \in B \in \mathbb{Z}^+$, *pak* $a>b \wedge c>d$,
reprezentantem součinu $A\cdot B$ *je dvojice* $[ac+bd,ad+bc]$
$a>b \Rightarrow (a-b)>0$
$c>d \Rightarrow \quad (a-b).c>(a-b).d$
$ac-bc >ad-bd$
z toho $\quad ac+bd>ad+bc \quad \Rightarrow A\cdot B \in \mathbb{Z}^+$

8. *Reflexivnost je* *každé* $a|a$
Symetričnost není *např.* $3|6$, *ale neplatí* $6|3$
Tranzitivnost je $a|b \wedge b|c \Rightarrow b=a\cdot x \wedge c=b\cdot y \Rightarrow c=a\cdot x\cdot y \Rightarrow a|c$

9. *a) zb.0, b) zb.0, c) zb.0, d) zb.1, e) zb.0, f) zb.0, g) zb.0*

10. *Možnosti 448**20**, 448**08**, 448**80** , 448**56**, 448**92**, 448**68**,*

11. *4536*

12. $108= 2^2\cdot 3^3$ $\quad$ $\mathbf{D}(108,360)= 2^2\cdot 3^2=36$
$360= 2^3\cdot 3^2\cdot 5$ $\quad$ $\mathbf{n}(108,360) = 2^3\cdot 3^3\cdot 5= 1080$

13. $84 = 2^2\cdot 3\cdot 7$
$90 = 2\cdot 3^2\cdot 5$ $\quad$ $\mathbf{D}(80,90,72)= 2\cdot 3= 6$
$72 =2^3\cdot 3^2$ $\quad$ $\mathbf{n}(80,90,72)= 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=2520$

14. $\mathbf{D}(945,729)=27$
$945 : 729 = 1$ zb.216
$729 : 216 = 3$ zb.81
$216 : 81 = 2$ zb.54
$81 : 54 = 1$ zb.27
$54 : \mathbf{27} = 2$ zb.0

15. *273= 3·7·13(složené), 301(prvočíslo), 331(prvočíslo),* $648=2^3\cdot 3^4$ *(složené)*

10.6

1. *Předpokládejme, že [a,b] ≈[c,d], máme dokázat, že [c,d] ≈[a,b],*
Z předpokladu a z definice vyplývá, že $a \cdot d = b \cdot c$,
jde o celá čísla, takže i $c \cdot b = d \cdot a$ *což je [c,d] ≈[a,b].*

2. $T_1 = \{[-3,8], [6,-16], [-9,24]\}$, $T_2 = \{[3,-5], [-9,15]\}$, $T_3 = \{[-4,2], [8,-4]\}$

3. *Nechť [a,b] є A , [x,y] є O . Musí platit A+O=A .*
Pak A+O je reprezentováno [ay+bx,by]
a musí platit $[ay+bx,by] \approx [a,b]$
dle definice $(ay+bx).b = by.a$
z toho $ayb+bbx = bya$
pak $bbx=0$
z toho $b=0$
Existuje-li nulové racionální číslo O, pak má tvar [0,a] є O, kde a≠0 **.**

4. *Nechť [a,b] є A , [n,n] є J* a *[x,y] є (1/A) . Musí platit A·(1/A)=J .*
Pak A·(1/A) je reprezentováno [ax,by]
a musí platit $[a+x,b+y] \approx [n,n]$
dle definice $axn = byn$
z toho $ax = by$
což platí pouze je-li $x=b \wedge y=a$
Existuje-li k A,[a,b] є A převrácené racionální číslo (1/A), pak má tvar [b,a] є (1/A) **.**

5. *Nechť [a,b] є A , [c,d] є B . Má platit A+B=B+A .*
Pak A+B je reprezentováno [ad+bc,bd],
a B+A je reprezentováno [bc+ad,db].

Nechť [a,b] є A , [c,d] є B . Má platit A·B=B·A .
Pak A·B je reprezentováno [ac,bd],
a B·A je reprezentováno [ca,db], *v obou případech*
jde o celá čísla, kde platí komutativnost sčítání a násobení, takže to platí.

6. *Součet: [-3k,5k] + [4k,9k]= -3/5+4/9 = -27/45+20/45= -7/45=[-7,45]*
Součin: [-3k,5k] · [4k,9k]= -3/5 · 4/9 = -12/45=[-12,45]

7. $[k,3k] + B = [-5k,12k]$
$[k,3k]+[-3,x] = [-5k,12k]$
$1/3 + (-3/x) = -5/12$
$1/3 + 5/12 = 3/x$
$9/12 = 3/x$
$x = 4$

8. $9/4 + 7/6 = 27/12 + 14/12 = 41/12$ $\qquad$ $9/4 \cdot 7/6 = 63/24 = 21/8$

$9/4 - 7/6 = 27/12 - 14/12 = 13/12$ $\qquad$ $9/4 : 7/6 = 9/4 \,.\, 6/7 = 27/14$

9. a) $A \in Q^+ \wedge B \in Q^+ \Rightarrow A+B \in Q^+$

b) $A \in Q^+ \wedge B \in Q^- \Rightarrow$ 1) $A > -B \Rightarrow A+B = A - (-B) \in Q^+$

2) $A = -B \Rightarrow A+B = 0$

3) $A < -B \Rightarrow A+B = -[(-B)-A] \in Q^-$

10. a) $A \in Q^+ \wedge B \in Q^+ \Rightarrow A \cdot B \in Q^+$ $\qquad$ b) $A \in Q^+ \wedge B \in Q^- \Rightarrow A.B = -[A\cdot(-B)] \in Q^-$

11. $A \in Q^+ \wedge B \in Q^+ \Rightarrow A+B \in Q^+$ $\qquad$ *Nechť* $[a,b] \in A$, $[c,d] \in B$.

I. $a>0 \wedge b>0 \wedge c>0 \wedge d>0$

$[ad+bc,bd] \in A+B \in Q^+$

$>0 \;\; >0$

$>0 \;\; >0$

>0

II. $a<0 \wedge b<0 \wedge c<0 \wedge d<0$

$[ad+bc,bd] \in A+B \in Q^+$

$>0 \;\; >0$

$>0 \;\; >0$

>0

III. $a>0 \wedge b>0 \wedge c<0 \wedge d<0$

$[ad+bc,bd] \in A+B \in Q^+$

$<0 \;\; <0$

$<0 \;\; <0$

>0

IV. $a<0 \wedge b<0 \wedge c>0 \wedge d>0$

$[ad+bc,bd] \in A+B \in Q^+$

$<0 \;\; <0$

$<0 \;\; <0$

>0

12. $A \in Q^+ \wedge B \in Q^- \Rightarrow A \,.\, B \in Q^-$ $\qquad$ *Nechť* $[a,b] \in A$, $[c,d] \in B$.

I. $a>0 \wedge b>0 \wedge c>0 \wedge d<0$

$[ac,bd] \in A\cdot B \in Q^-$

$>0 \;\; <0$

<0

II. $a<0 \wedge b<0 \wedge c>0 \wedge d<0$

$[ac,bd] \in A\cdot B \in Q^-$

$<0 \;\; >0$

<0

III. $a>0 \wedge b>0 \wedge c<0 \wedge d>0$

$[ac,bd] \in A\cdot B \in Q^-$

$<0 \;\; >0$

<0

IV. $a<0 \wedge b<0 \wedge c<0 \wedge d>0$

$[ac,bd] \in A\cdot B \in Q^-$

$>0 \;\; <0$

<0

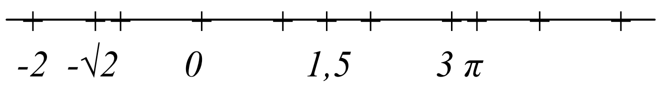
13. *Q je relací < hustě uspořádaná, tzn. pro všechna* $a<b$, $\exists c: a<c<b$.

Nechť $a < b \Rightarrow a+a<a+b \;\wedge\; a+b<b+b$

$2a < a+b \;\wedge\; a+b< 2b$

$a < a+b/2 \;\wedge\; a+b/2< b$, *takže* $c=a+b/2$

14.



15. $-2{,}25<-1{,}5<-1<3-\pi<0<\pi-3<\sqrt{2}<2<3$

11.4

1. a) $3\cdot(x+5)$ b) $3\cdot x+5$

2. $((4\cdot(x+3)-x):8)^2-5$, *je to rozdíl, hodnota je 4*

3. $4:4\cdot4:4=1$ $4:4+4:4=2$ $(4+4+4):4=3$
$(4-4)\cdot4+4=4$ $(4\cdot4+4):4=5$ $(4+4):4+4=6$
$4+4-4:4=7$ $4+4\cdot4:4=8$ $4+4+4:4=9$
$(44-4):4=10$

4. a) $2\cdot(x-3)=3\cdot(x-1)$ Zk: $L=2\cdot(-3-3)=-12$
$2x-6=3x-3$ $P=3\cdot(-3-1)=-12$ $L=P$
$-3=x$ *rovnice má právě jedno řešení* $K=\{-3\}$

b) $2\cdot(x-3)=3\cdot(x-1)-(x+3)$
$2x-6=3x-3-x-3$
$2x-6=2x-6$
$0=0$ *rovnice má nekonečně mnoho řešení* $K=R$

c) $2\cdot(x-3)=3\cdot(x-1)-x$
$2x-6=3x-3-x$
$-6\neq-3$ *rovnice nemá řešení*

5. $\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{12}{(x+2).(x-2)}$ $(x\neq2,\ x\neq-2)$
$3\cdot(x+2)=12$
$3x+6=12$
$x=2$ $K=\{\ \}$

6. *kusy ... slepic x, králíků y*
nohy... 2x + 4y = 20

slepice	1	2	3	8	6	4	2	0
králíci	1	1	1	1	2	3	4	5
celkem noh	6	8	10	20	20	20	20	20
řešení	ne	ne	ne	ano	ano	ano	ano	ne

Úloha má 4 řešení. 8 slepic a 1 králík, nebo 6 slepic a 2 králíci, nebo 4 slepice a 3 králíci nebo 2 slepice a 4 králíci.

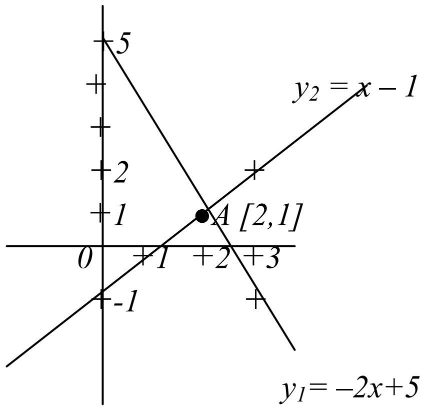
7. $2x + y = 5$ a) *dosazovací:* $2x + y = 5$
$\underline{x - y = 1}$ $\underline{x - y = 1}$ $x = y+1$
$2 \cdot (y+1) + y = 5$ $x = 2$
$3y + 2 = 5$
$y = 1$ $K=\{[2,1]\}$

b) *sčítací:* $2x + y = 5$
$\underline{x - y = 1}$
$3x = 6$
$\underline{x = 2}$ $\underline{y = 1}$

c) *grafická:* $2x + y = 5 \rightarrow y_1 = -2x+5$
$\underline{x - y = 1} \rightarrow y_2 = x - 1$

x	0	3
y_1	5	-1

x	0	3
y_2	-1	2

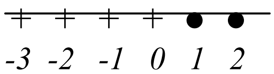


8. *ve 4. řádku dělíme nulou*

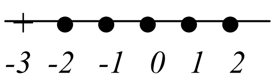
9.
$$\frac{x}{x-1} < 1$$
$$\frac{x - x + 1}{x - 1} < 0$$
$$\frac{1}{x - 1} < 0$$
$$x - 1 < 0$$
$$x < 1 \qquad K = (-\infty;1)$$

10. $-3x+10 \geq 4 > 1-x$
$-3x+10 \geq 4$ $4 > 1-x$
$-3x \geq -6$ $3 > -x$
$x \leq 2$ $-3 < x$

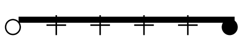
a) *v N:* $K=\{1,2\}$



b) *v Z:* $K =\{-2,-1,0,1,2\}$



c) *v Q:* $K = (-3;2\rangle$



12.7

1. *a)* $15 - 5 = 10$ *kg* *b)* $15 : 5 = 3x$

Odpověď: a) Jana odevzdala o 10 kg více papíru než Ivan.
b) Jana odevzdala 3krát více papíru než Ivan.

2. *Aby bylo obou květin stejně, tak přidám 8 karafiátů, pak bude obou stejně.*

všech $34 + 8 = 42$ *květin* *růží bude* $42 : 2 = 21$
karafiátů bude $21 - 8 = 13$

Zk: růží a karafiátů $21 + 13 = 34$ *květin,*
růží víc než karafiátů o... $21 - 13 = 8$

Odpověď: Růží je 21 a karafiátů 13.

3. *Láďa o 10 Kč více než Jirka ....* $J + 10 = L$ *Dohromady… 70 Kč*
Jirka o 15 Kč méně než Milan…. $J + 15 = M$

Odebereme-li těch $10 + 15 = 25$ *Kč, budou mít všichni stejně jako Jirka*
$70 - 25 = 45$ *Kč*
Jirka…$45:3=15$ *Kč, Láďa…* $15+10=25$ *Kč, Milan…* $15+15=30$ *Kč*

Zk: Láďa 25 Kč, což je o 10 Kč více než Jirka,
Jirka 15Kč, což je o 15 Kč méně než Milan,
dohromady $15+25+30=70$ *Kč*

Odpověď: Jirka má 15 Kč, Láďa má 25 Kč, Milan má 30 Kč.

4. *A 3x více než B …* $3 \cdot B = A$ $B + C = 30$ *kg*
B 2x méně než C… $2 \cdot B = C$ $B + 2 \cdot B = 30$ *kg*
$3 \cdot B = 30$
$A = 3 \cdot B = 30$ *kg* $B = 30:3$
$B = 10$ *kg, pak* $C = 20$ *kg*

$A + B + C = 30+10+20= 60$ *kg* *nosnost podstavce… 50 kg*

Zk: A.. 30 kg je 3x více než B.. 10 kg, B..10 kg je 2x méně než C.. 20 kg

Odpověď: Součástky nelze dát na podstavec.

5. *Tzv."zpětný chod".*

Na tatínka zbyly 4 jahody. Maminka snědla polovinu … tj. 4 jahody.
Když přišla, bylo tam 8 jahod.
Jitka snědla třetinu, dvě třetiny tam zůstaly… tj. 8 jahod. Snědla 4 jahody.
Když přišla, bylo tam 12 jahod.

Vašek snědl čtvrtinu, tři čtvrtiny tam zůstaly…tj. 12 jahod. Snědl 4 jahody. Když přišel, bylo tam 16 jahod.

Zk: Z 16 jahod snědl Vašek čtvrtinu, tj. 4 jahody a zbylo tam 12 jahod,
z 12 jahod snědla Jitka třetinu, tj. 4 jahody a zbylo tam 8 jahod,
z 8 jahod snědla mamka polovinu, tj. 4 jahody a zbyly tam 4 jahody.

Odpověď: Všichni snědli stejně jahod.

6. *1. den polovina cesty,*
2. den čtvrtina cesty, dohromady $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ *, zbývá* $\frac{1}{4}$ *cesty*

Ta $\frac{1}{4}$ *cesty je 8 km, tzn. celá cesta je* $4 \cdot 8 = 32$ *km*

Zk: 1.den…polovina cesty.. 32:2=16 km,
2.den... čtvrtina cesty.. 32:4=8 km,
3.den… 8 km Celkem 16+8+8=32 km

Odpověď: Celá cesta je dlouhá 32 km.

7. *Nejdřív dáme do všech 6 pokojů po 3 žácích, tj. ubytujeme…* $6 \cdot 3 = 18$ *žáků, Zbývají ještě 2 žáci, které musíme přidat do 2 čtyřlůžkových pokojů.*

Zk: 2 čtyřlůžkové… $2 \cdot 4 = 8$ *žáků*
4 trojlůžkové … $4 \cdot 3 = 12$ *žáků Dohromady 8+12= 20 žáků.*

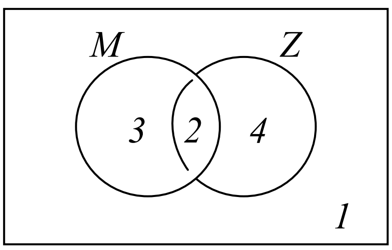
Odpověď: Třída potřebuje 2 čtyřlůžkové a 4 trojlůžkové pokoje.

8. *Počet bruslí… B,* *Platí:* $B + L = V + O$
počet lyžuje… L, $7 + 6 = 10 + O$
počet všech… V, $O = 7 + 6 - 10$
počet oboje…O $O = 3$

Zk: Jen bruslí… 4 + jen lyžuje… 3 + dělá oboje… 3 = 10 chlapců

Odpověď: Tři chlapci bruslí i lyžují.

9.



2 malují i zpívají… 2 do spol.průniku,
1 ani jedno… 1 mimo množiny,
5 nemaluje, z toho 1 mimo… 4 jen zpěv,
všech 10, jen maluje 10-(2+4+1)=3.. do M

Zk: 4+1=5 nemaluje, 1 nic, 2 oboje

Odpověď: Malovat chodí 5 dívek, zpívat 6 dívek.

10. *Číslo 15951 je „souměrné“, čte se z obou stran stejně.*
Další takové „souměrné“ číslo je 16061.
Auto ujelo za 2 h ... 16061-15951=110 km
Za jednu hodinu ... 110:2=55 km

Zk: za 2 h.... 2·55=110 km, 15951+110=16061 km

Odpověď: Za jednu hodinu ujelo auto 55 km.

11. *strana a = b+5 .... strana a = 3+5= 8 cm,*
strana c = b+1 .... strana c = 3+1= 4 cm.

odečteme-li od obvodu 5+1 cm, budou všechny strany stejné se stranou b,
3 stejné strany... 15–(5+1)= 9 cm, 1 strana, tj. b.... 9:3 = 3 cm.

Zk: matematická... 8+3+4= 15 cm
reálnosti...
Aby trojúhelník existoval, musí být součet 2 stran větší než 3. strana.
4+3 = 7 a 7 < 8

Odpověď: Takový trojúhelník neexistuje, neplatí trojúhelníková nerovnost.

12. *Místo rozmazané číslice (?) žáci zkouší dosazovat číslice 0, 1, 2,.....9*
a zjišťovat, která z vytvořených čísel jsou dělitelná 9.
Jinak stačí ověřit kritérium dělitelnosti 9. Rozmazaná číslice je 0 nebo 9.

Zk: Čísla 405 a 495 jsou dělitelná 9, ostatní čísla nejsou 9 dělitelná.

Odpověď: Zámek otvírá číslo 405 a číslo 495.

13. *Stačí zjišťovat 4stupy, 5stupy a 6stupy. Toho 1 zbývajícího se to „netýká“,*
až potom. Hledáme nejmenší násobek šesti, který je dělitelný i 4 a 5.

násobky6	*6*	*12*	*18*	*24*	*30*	*36*	*42*	*48*	*54*	***60***	*66*
dělitelné5	*ne*	*ne*	*ne*	*ne*	*ano*	*ne*	*ne*	*ne*	*ne*	***ano***	*ne*
dělitelné4	*ne*	*ano*	*ne*	*ano*	*ne*	*ano*	*ne*	*ano*	*ne*	***ano***	*ne*

60+1=61 cvičenců

Zk: 61:4=15 a zb.1 61:5=12 a zb.1 61:6=10 a zb.1

Odpověď: Nejmenší počet cvičenců je 61.

14. *Obdélník s obsahem 12 cm^2, může mít strany:*

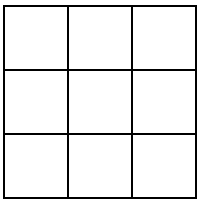
1 cm a 12 cm, ten má obvod $2 \cdot (1+12) = 26$ cm

2 cm a 6 cm, ten má obvod $2 \cdot (2+6) = 16$ cm

3 cm a 4 cm, ten má obvod $2 \cdot (3+4) = 14$ cm

Odpověď: Nejmenší obvod obdélníku je 14 cm, s rozměry 3 cm a 4 cm.

15.



Na jednu stranu velkého čtverce se vejdou 3 malé a to ve 3 řadách, tedy $3 \cdot 3 = 9$ malých čtverců

Odpověď: Plocha malého čtverce se do plochy velkého vejde 9krát.

LITERATURA

[01] BĚLÍK, M.: *Celá a racionální čísla.* Ústí nad Labem, Univerzita J. E. Purkyně 2000.

[02] DIVÍŠEK, J. A KOL.: *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ.* Praha, SPN 1989.

[03] DRÁBEK, J. A KOL.: *Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ.* Praha, SPN 1985.

[04] HEJNÝ, M. A KOL.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava, SPN 1990.

[05] KOPKA, J.: *Kapitoly o přirozených číslech.* Ústí nad Labem, UJEP 2003.

[06] MOLNÁR, J.: *K hodnocení učebnic matematiky primární školy*. In: Cesty (k) poznávání v matematice primární školy. Olomouc, UP 2004.

[07] ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J.: *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia.* Praha, Prometheus 2004.

[08] PERNÝ, J.: *Tvořivostí k rozvoji prostorové představivosti.* Liberec, Technická univerzita v Liberci 2004.

[09] PŘÍHONSKÁ, J.: *Analýza žákovského řešení.* In: Sborník příspěvků mezinárodní konference „Cesty (k) poznávání v matematice primární školy“. UP Olomouc 2004.

[10] PŘÍHONSKÁ, J.: *Morfismy aneb netradiční přístup k úlohám.* In: Sborník z konference s mezinárodní účastí „Od činnosti k poznatku“, Plzeň, Západočeská univerzita 2003.