

EINFLUSS EINES MAGNETISCHEN FELDES AUF EIN SCHWINGENDES PIEZOELEKTRIKUM

F. BENEŠ, F. SOŠKA

*Department of Physics, Technical University, Liberec**

The influence of a magnetic field on a vibrating piezoelectric medium is studied. It is found that the magnetic induction weakly influences the vibrations of this medium.

1. EINFÜHRUNG

Den Gedanken, die Frequenz eines piezoelektrischen Kristalls durch ein stationäres elektrisches Feld zum Zweck der Nacheichung zu beeinflussen, hat zum erstenmal Vilbig [1] ausgesprochen. Wie aus den Arbeiten [2], [3], [4] folgt, trifft es tatsächlich zu, daß man die Frequenz piezoelektrischer Kristalle durch ein stationäres elektrisches Feld beeinflussen kann.

Versucht man bei einer qualitativen Beschreibung dieses Effektes (und nur in erster Näherung) ein schwingendes Piezoelektrikum als ein System von Dipolen – harmonischen Oszillatoren – zu betrachten, stellt man fest, daß ein elektrisches Feld dieses System zwar polarisiert und die Trajektorie des Oszillators von der ursprünglichen Richtung etwas abneigt, sie aber weder krümmt, noch die Direktionskraft des Oszillators ändert. Da sich jedoch die Resonanzfrequenz des Oszillators trotzdem ändert (und zwar offensichtlich durch den Einfluß der Wechselwirkung zwischen den Dipolen des Systems), ändert sich notwendigerweise auch die Direktionskraft k und mit ihr die Frequenz ω_0 nach der Formel

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Der Einfluß eines magnetischen Feldes auf ein System harmonischer Oszillatoren macht sich auf eine andere Weise bemerkbar. Durch seinen Einfluß tritt nicht nur eine andere Art von Wechselwirkung zwischen den Oszillatoren (und damit vielleicht auch eine Änderung der Materialkonstanten) auf, sondern auch eine Änderung der Frequenz eines Oszillators, die durch die Krümmung seiner Trajektorie verursacht worden ist. Der Einfluß eines magnetischen Feldes auf die Frequenz von Piezokristallen in diesem Sinne zu studieren, ist Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

Soweit uns festzustellen gelungen ist, ist die Vermutung, ein magnetisches Feld könnte die Frequenz eines Piezokristalls möglicherweise beeinflussen, auch in der Arbeit [5] ausgesprochen worden.

2. EINFLUSS EINES STATIONÄREN MAGNETISCHEN FELDES AUF DIE BEWEGUNG EINES HARMONISCHEN OSZILLATORS UND EINES DIPOLS

Durch Lösung der dynamischen Aufgabe über den Einfluß eines stationären magnetischen Feldes auf die Schwingungen eines harmonischen Oszillators mit der La-

*) Liberec, Hálkova 6.

derung q kann festgestellt werden, dass dieses Feld mit der Induktion B die ursprüngliche Frequenz ω_0 (d. h. seine Frequenz ohne die Wirkung eines magnetischen Feldes) auf den Wert

$$\Omega_B = \sqrt{(\omega_0^2 + \omega_B^2)}; \quad \omega_B = \frac{qB}{m},$$

erhöht, die ursprünglich gerade Trajektorie des Oszillators in die Form einer Ellipse krümmt und die ursprüngliche Amplitude des Oszillators im Verhältnis ω_0/Ω_B verkleinert (Fig. 1a).

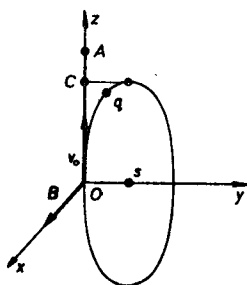


Fig. 1a. Die Trajektorie der Ladung q eines harmonischen Oszillators im magnetischen Feld. OA ist die ursprüngliche — OC die durch den Einfluß des magnetischen Feldes verkürzte Amplitude.

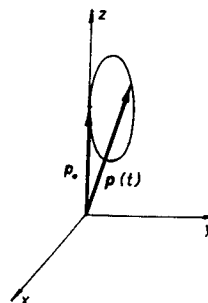


Fig. 1b. Der Einfluß des magnetischen Feldes auf die Schwingung der einen Ladung eines Dipols im mit der zweiten Ladung fest verbundenen Koordinatensystem.

Diese Erwägungen, die für einen harmonischen Oszillator gültig sind, lassen sich auch auf einen Dipol übertragen, dessen einen Pol man festhält und den anderen wie einen harmonischen Oszillator schwingen läßt (Fig. 1b). Für den Einfluß eines magnetischen Feldes auf die Schwingungen eines Dipols gelten dann die gleichen Resultate wie für den Einfluß eines magnetischen Feldes auf die Schwingungen eines harmonischen Oszillators.

Treten bei Wechselwirkung zwischen den Dipolen des Systems zu den ursprünglichen Bindungen weitere Bindungen (durch 1, 2, 3, ... bezeichnete) hinzu, so erhöht sich die ursprüngliche Frequenz ω_0 auf den Wert

$$\Omega_{B,1,2,\dots} = \sqrt{(\omega_0^2 + \omega_B^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots)}.$$

Wie aus dieser Formel ersichtlich ist, verringert sich bei wachsender Anzahl von Bindungen der relative Anteil des Einflusses des magnetischen Feldes (d. h. der Anteil des Gliedes ω_B) an der ursprünglichen Frequenz ω_0 . Es läßt sich mit Rücksicht darauf erwarten, daß der Einfluß des magnetischen Feldes auf ein Dipolsystem klein ist.

3. DER EINFLUSS EINES MAGNETISCHEN FELDES AUF EIN SCHWINGENDES PIEZOELEKTRIKUM

Bei Schwingungen wird der Zustand eines Piezoelektrikums durch die piezoelektrischen Zustandsgleichungen [6] und die Bewegungsgleichungen bestimmt. Eine

der Möglichkeiten, den Einfluß eines stationären magnetischen Feldes auf ein schwingendes Piezoelektrikum auszudrücken, ist die Einführung des Einflusses eines magnetischen Feldes als eine Volumkraft, sofern eine solche Kraft überhaupt existiert. Nun soll gezeigt werden, daß sie wirklich existiert und welche Form sie hat.

Auf einen freien schwingenden Dipol (Fig. 2) wirkt ein magnetisches Feld der Induktion \mathbf{B} mit einer resultierenden Kraft

$$(1) \quad \mathbf{F} = q[(\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{l}}) \times \mathbf{B}_+ - \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_-]$$

ein. Verkürzt sich der Vektor \mathbf{l} unbegrenzt und vergrößert sich gleichzeitig die Ladung q so, daß der Vektor

$$\mathbf{p} = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty}} (q\mathbf{l})$$

endlich bleibt, so folgt aus (1) für die Resultante $\mathbf{F}^{(d)}$, die auf den Dipol im magnetischen Felde wirkt, der Ausdruck

$$(2) \quad \mathbf{F}^{(d)} = \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{B}.$$

Für kleine Verschiebungen u_j kann man für die i -Komponente dieser Kraft den Ausdruck

$$(3) \quad F_i^{(d)} = \varepsilon_{ijk} \left(\frac{du_j}{dt} \frac{\partial B_k}{\partial x_l} p_l + \frac{\partial p_j}{\partial t} B_k \right),$$

in dem ε_{ijk} den Levi-Civita Pseudotensor bedeutet, herleiten. Wird in diesen Ausdruck die elektrische Polarisation als räumliche Dipoldichte eingeführt,

$$(4) \quad \mathbf{P} = \frac{\Sigma \mathbf{p}}{V},$$

so kann die i -Komponente der Kraftdichte $\mathbf{f}^{(d)}$, die auf ein Piezoelektrikum im magnetischen Feld wirkt, durch die Formel

$$(5) \quad f_i^{(d)} = \varepsilon_{ijk} \left(\frac{du_j}{dt} \frac{\partial B_k}{\partial x_l} P_l + \frac{dP_j}{dt} B_k \right)$$

ausgedrückt werden.

Im Ausdruck für die Polarisation P_j ist der Beitrag des elektrischen Feldes der Feldstärke E_j im Gliede $\varepsilon_0 \kappa_{ij} E_j$ und der Beitrag der Deformation u_{jk} im Gliede $e_{ijk} u_{jk}$ enthalten, so daß

$$(6) \quad P_j = e_{jki} u_{ki} + \varepsilon_0 \kappa_{jm} E_m$$

gilt. Im allgemeinen sind der Verzerrungstensor u_{kl} , der Verschiebungsvektor u_k und

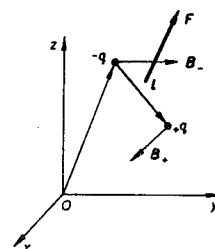


Fig. 2. Zur Herleitung der Kraft, mit der ein magnetisches Feld auf einen schwingenden Dipol einwirkt.

die elektrische Feldstärke E_m Funktionen der Zeit- und Ortsvariablen, so daß

$$(7) \quad \frac{du_{kl}}{dt} = \frac{\partial u_{kl}}{\partial t} + \frac{\partial u_{kl}}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial t},$$

$$(8) \quad \frac{dE_m}{dt} = \frac{\partial E_m}{\partial t} + \frac{\partial E_m}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial t}$$

ist. Ausserdem ist

$$(9) \quad \frac{du_k}{dt} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial t} \doteq \frac{\partial u_k}{\partial t}.$$

Wendet man die piezoelektrische Zustandsgleichung [6] an,

$$(10) \quad \tau_{ij} = c_{ijkl} u_{kl} - e_{ijk} E_k,$$

so kann man nach Einsetzen von (7) und (8) in die Gleichung (5) mit Rücksicht auf (6) die Differentialgleichung für die Bewegung des Piezoelektrikums in der Form

$$(11) \quad c_{ijkl} \frac{\partial u_{kl}}{\partial x_j} - e_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} + \\ + \varepsilon_{ijk} \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial t} \frac{\partial B_k}{\partial x_i} (e_{lmn} u_{mn} + \varepsilon_0 \kappa_{lm} E_m) + \left[e_{jrs} \left(\frac{\partial u_{rs}}{\partial t} + \frac{\partial u_{rs}}{\partial x_m} \frac{\partial u_m}{\partial t} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon_0 \kappa_{jm} \left(\frac{\partial E_m}{\partial t} + \frac{\partial E_m}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \right] B_k \right\} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \\ 2u_{kl} = \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}$$

aufschreiben.

Es ist bemerkenswert, daß in den Gleichungen, die bestrebt sind, den Einfluß eines elektrischen und magnetischen Feldes auf den Bewegungszustand eines Piezoelektrikums auszudrücken, die Größen $\partial E_m / \partial x_n$ und $\partial B_k / \partial x_i$, die die Unhomogenität dieser Felder charakterisieren, auftreten. Ist das elektrische Feld homogen (auf den Kristall wirkt aus den Randunhomogenitäten der elektrischen Feldstärke keine Volumkraft ein), so folgt aus (8) $dE_m / dt = \partial E_m / \partial t$.

Es läßt sich erwarten, daß der Einfluß des magnetischen Feldes auf die Schwingungen der Piezoelektrika sehr klein ist und nur an der Änderung der die Schwingungen beschreibenden Größe (z. B. der Frequenz, der Phasenverschiebung oder der Amplitude) bemerkbar sein wird, die mit größter Genauigkeit gemessen werden kann. Eine solche Größe ist gewiß die Frequenz. Deshalb leiten wir aus der Gleichung (11) eine Gleichung für irgendeine einfache Schwingung her, um aus ihrer Lösung eine Formel für diese Frequenz abzuleiten, gegebenenfalls um aus der Form der Differentialgleichung auf den Einfluß eines magnetischen Feldes auf weitere Größen dieser Art, welche Schwingungen beschreiben, zu schließen.

Nimmt man einfachheitshalber an, daß das schwingende Piezoelektrikum in einem homogenen elektrischen Feld der Feldstärke $\mathbf{E}(E, 0, 0)$ und in einem homogenen magnetischen Feld der Induktion $\mathbf{B}(0, 0, B)$ liegt, so vereinfachen sich die Gleichungen (11) und nehmen die Form

$$c_{ijkl} \frac{\partial u_{kl}}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} \left[e_{jrs} \left(\frac{\partial u_{rs}}{\partial t} + \frac{\partial u_{rs}}{\partial x_m} \frac{\partial u_m}{\partial t} \right) + \varepsilon_0 \kappa_{jm} \frac{\partial E_m}{\partial t} \right] B_k = \varrho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

$$(12) \quad 2u_{kl} = \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}$$

an.

4. LÄNGSSCHWINGUNGEN EINES PIEZOELEKTRISCHEN STÄBCHENS IM MAGNETISCHEN FELD

Zum Zweck der Verifizierung des Einflusses eines magnetischen Feldes auf ein schwingendes Piezoelektrikum leiten wir aus den Gleichungen (12) eine Differentialgleichung für die einfachste Art von Schwingungen, die Längsschwingungen, ab. Die Differentialgleichung von Längsschwingungen piezoelektrischer Stäbchen ohne Rücksicht auf die Wirkung eines magnetischen Feldes ist einfach und ihre Lösung ist bekannt.

Wir nehmen deshalb an, daß das Stäbchen in freien Längsschwingungen in Richtung der y -Achse eines mit ihm verbundenen Koordinatensystem $Oxyz$ schwingt (Fig. 3). Mit Rücksicht darauf, daß der Verrückungstensor nur von der Koordinate y und der Zeit t abhängt, $\mathbf{u}(0, v, 0) = \mathbf{u}(y, t)$, ist die einzige von Null verschiedene Komponente des Verzerrungstensors u_{ik} die Komponente $u_{22} = \partial v / \partial y$.

Bezeichnet man $c_{2222} = c_{22}$, $e_{122} = e_{1,2}$, so folgt aus der Gleichung (12) unter der Voraussetzung, daß $E = 0$ ist, die Gleichung für ein frei schwingendes Stäbchen

$$(13) \quad c_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - e_{1,2} B \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} - e_{1,2} B \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial t} = \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Man kann erwarten, daß der Einfluß des magnetischen Feldes bei kleinen Werten der magnetischen Induktion auch klein sein wird, so daß sich die Lösung der Gleichung (13) von der harmonischen

$$(14) \quad v(y, t) = v_0 e^{j(\omega t - ky)}$$

nicht allzusehr unterscheiden wird. Außerdem geht die Gleichung (13) für den Fall $B = 0$ in die Gleichung

$$(15) \quad c_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

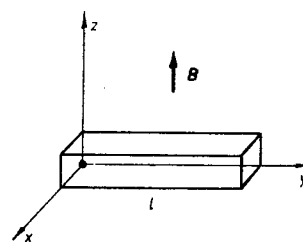


Fig. 3. Orientierung eines Quarzstäbchens im magnetischen Feld.

über, und deshalb muß auch die Lösung der Gleichung (13) bei $B = 0$ mit der Lösung (14) der Gleichung (15) zusammenfallen. Durch Abschätzen kann man feststellen, daß das dritte Glied der linken Seite der Gleichung (13) wenigstens um vier Größenordnungen kleiner als das zweite Glied ist. Dadurch vereinfacht sich die Gleichung (13) auf die Form

$$(16) \quad c_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - e_{1,2} B \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Versucht man sie mit der Funktion (14), in der $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz der Schwingungen und $k = 2\pi/\lambda$ der Betrag des Wellenvektors ist, als Ansatz zu lösen, so findet man, daß die Größen ω und k der Gleichung

$$(17) \quad c_{22}k^2 + e_{1,2}Bk\omega = \rho\omega^2$$

genügen müssen. Daraus folgt für die Phasengeschwindigkeit $c = \omega/k$, mit der sich die Verschiebung ausbreitet, der Wert

$$(18) \quad c = \sqrt{\left[\frac{c_{22}}{\rho} \left(1 + \frac{e_{1,2}^2 B^2}{4c_{22}\rho} \right) \right]} + \frac{e_{1,2}B}{2\rho}.$$

Offensichtlich ist für den Fall $B = 0$ die Geschwindigkeit c_0 der Ausbreitung einer elastischen Verschiebung – wie erwartet – $c_0 = \sqrt{c_{22}/\rho}$. Es zeigt sich ferner, daß das Glied $(e_{1,2}^2 B^2)/(4c_{22}\rho)$ gegenüber der Eins einen Wert der Größenordnung 10^{-16} , d. h. einen vernachlässigbar kleinen Wert hat. Für die Frequenz $f_1 = c/\lambda = c/2l$ der ersten harmonischen Schwingung bekommt man den Ausdruck

$$(19) \quad f_1 = \frac{1}{2l} \left[\sqrt{\left(\frac{c_{22}}{\rho} \right)} + \frac{e_{1,2}B}{2\rho} \right].$$

Nach Einsetzen der Werte $c_{22} = 86,74 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}$, $\rho = 2,65 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $e_{1,2} = -e_{1,1} = -1,17 \cdot 10^{-1} \text{ NV}^{-1}\text{m}^{-1}$, $B = 1 \text{ Vsm}^{-2}$ für ein Quarzstäbchen der Länge $l = 20 \text{ mm}$ ist die relative Frequenzänderung

$$(20) \quad \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_1 - f_0}{f_0} = \frac{e_{1,2}B}{2\sqrt{c_{22}\rho}}$$

von der Größenordnung 10^{-8} .

5. ZUSAMMENFASSUNG

Um ein annähernd richtiges Bild über den Einfluß eines stationären magnetischen Feldes auf einen schwingenden Dipol zu erhalten, haben wir uns im Teil 2 mit dem Einfluß dieses Feldes auf die Schwingung einer freien, an eine Gerade gebundenen Ladung beschäftigt. Es hat sich gezeigt, daß sich die Frequenz eines solchen Oszillators erhöht. Schwingungen eines Dipols, dessen eine Ladung festgehalten und die andere an zwei zueinander senkrechte Geraden gebunden ist, sind unharmonisch.

Einfluß eines magnetischen Feldes...

Der Anteil des Einflusses eines magnetischen Feldes auf die Frequenz sinkt bei diesen beiden Bindungen, und zwar um so mehr, je größer die Anzahl der Bindungen ist. Im Teil 3 haben wir angenommen, daß das Piezoelektrikum sich aus Dipolen zusammensetzt, und haben die resultierende Kraft berechnet, durch die ein stationäres magnetisches Feld auf eine Volumeinheit des Piezoelektrikums einwirkt. Mit Hilfe der Formel für diese Kraft und der piezoelektrischen Zustandsgleichung wurde die Bewegungsgleichung (11) für Schwingungen von Piezoelektrika abgeleitet. Aus ihnen folgt für den besonderen Fall von Längsschwingungen piezoelektrischer Quarzstäbchen eine relative Frequenzänderung von der Größenordnung 10^{-8} .

Falls die angeführten Voraussetzungen vom Mechanismus, mittels dessen die Schwingungen durch ein magnetisches Feld beeinflußt werden, wirklich nur zu unbedeutenden Frequenzänderungen (vorerst nur für Längsschwingungen von Quarzstäbchen) führen, kann man größere Unterschiede zwischen den Werten, soweit sie beobachtet wurden, nicht auf den Einfluß der Lorentzkraft von der Form (5) zurückführen. Abschließend fügen wir noch hinzu, daß sich im Sinne dieser Ausführungen der Einfluß eines magnetischen Feldes auch dadurch bemerkbar machen kann, daß er Parasitätsschwingungen, sofern sie vor Einschaltung des magnetischen Feldes noch nicht bestanden haben, hervorrufen kann, oder sie wenigstens beeinflußt, sofern sie bereits vorhanden waren. Da jedoch reine Schwingungen in der Regel von Parasitätsschwingungen begleitet werden, könnte der Einfluß des magnetischen Feldes auf Schwingungen irrtümlicherweise auch einer Änderung der Kopplungsfaktoren zugeschrieben werden.

Eingegangen am 10. 6. 1963.

Literaturverzeichnis

- [1] Vilbig F.: Lehrbuch der Hochfrequenztechnik II, Leipzig (1958), 109.
- [2] Hruška K.: Czech. J. Phys. *B 11* (1961), 150.
- [3] Hruška K.: Čs. čas. fys. *A 12* (1962), 35.
- [4] Hruška K.: Czech. J. Phys. *B 12* (1962), 338.
- [5] Hruška K.: Diplomarbeit, Mathematisch-Physikalische Fakultät der Karlsuniversität, Praha.
- [6] Cady W.: Piezoelectricity. An Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals (Übersetzung aus dem Russischen), Moskva (1949), 177.