

TECHNICKÁ UNIVERZITA LIBEREC

FAKULTA STROJNÍ

OBOR 23-17-08
Konstrukce strojů a zařízení

zaměření
Tepelná technika

Katedra energetických zařízení

**Numerická simulace důsledků konstrukčních změn
v mezní vrstvě při obtékání válce laminárním proudem
tekutiny**

Diplomová práce

Jan Nový

Liberec 1997

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta strojní

Katedra : energetických zařízení

Školní rok : 1996/97

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

pro J a n N O V Ý

obor 13-17-8 Konstrukce strojů a zařízení
zaměření: Tepelná technika

Vedoucí katedry Vám ve smyslu zákona č. 172/1990 Sb. o vysokých školách určuje tuto diplomovou práci :

Název tématu : Numerická simulace důsledků konstrukčních změn v mezní vrstvě při obtékání válce laminárním proudem tekutiny

Zásady pro vypracování :

1. Rešeršní studie rychlostních a event. teplotních polí při kolmém obtékání válce, krize odporu.
2. Určení hydraulických ztrát-odporového činitele jako funkce Reynoldsova kritéria (Re 1 až 50)
3. Numerická simulace vlivu stěny na obtékání nekonečného kruhového válce, vývoj úplavů, rozložení tlakového a rychlostního pole, stagnační tlaky.
4. Studie souhlasu numerické simulace s experimentálně stanovenými daty.
5. Návrh doporučení pro pokračování výzkumu v oblasti stěnových smykových oblastí

KEZ/TT

48 A.

1/25/98 S

Rozsah grafických prací : grafické průběhy tlakových a rychlostních polí
(do 50 listů)
Rozsah průvodní zprávy : cca 50 stran

Seznam odborné literatury :

1. Minkowycz, W.J., Sparow, E.M. : Numerical Heat Transfer, Viley-Inter.Publ., New York 1988
2. Churchill, S.W. : Viscous Flows, Boston 1988
3. Spalding, D.B. : Heat exchanger theory, fluid mechanics and heat transfer. Hemisphere Publi. Corp. 1983.
4. Žukauskas, A. : Heat transfer from Tubes in Crossflow. In. Advances in HEAT TRANSFER vol.8. 1972.
5. Schlichting, H. : Boundary Layer Theory. McGraw-Hill, New York 1960
6. Firemní listy Algor-Fluid Flow, Pittsburgh 1992.

Vedoucí diplomové práce : Doc. Ing. Jiří Unger, CSc.

Konzultant : Ing. Jiří Hulička

Zadání diplomové práce : 3. 3. 1997

Termín odevzdání diplomové práce : 31. 12. 1997



Prof. Ing. J. Kratochvíl, CSc.
Vedoucí katedry

Doc. Ing. Ludvík Prášil, CSc.
Děkan

Prohlášení:

Souhlasím, aby moje diplomová práce byla podle směrnice, uveřejněné v pokynech a informacích VŠST 1/1975, zapůjčena nebo odprodána za využití jejího obsahu.

Souhlasím, aby po pěti letech byla diplomová práce vrácena na níže uvedenou adresu, nebo v případě nedoručitelnosti skartována.

..... Jan Nový

podpis

Jméno a příjmení:

Jan Nový

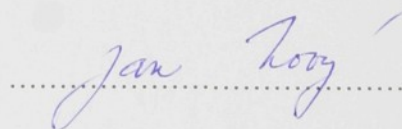
Adresa trvalého bydliště:

Alšova 238/111
418 01 Bílina

Místopřísežné prohlášení:

Místopřísežně prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury.

V Liberci, dne 26.5.1997

A handwritten signature in blue ink, reading "Jan Nový", written over a horizontal dotted line.

Jan Nový

Poděkování

Touto cestou bych chtěl poděkovat Doc. Ing. Jiřímu Ungrovi za cenné připomínky, náměty a rady k obsahové stránce mé diplomové práce. Dále děkuji Ing. Jiřímu Huličkovi za rady poskytnuté při numerické simulaci v programu *Algor*.

ANOTACE

Obsahem diplomové práce je porovnání výsledků numerické simulace laminárního obtékání válce ve volném proudu s literaturou a zhodnocení možností použitého simulačního programu *Algor 94*. Dále práce obsahuje vyhodnocení výsledků numerické simulace obtékání válce v blízkosti stěny. Popisuje vliv mezní vrstvy na této stěně na pole veličin kolem obtékaného válce a vliv úplavu za válcem na tloušťku mezní vrstvy.

Obsah

Seznam použitých symbolů.....	str.2
1. Úvod.....	str.4
2. Mezní vrstvy.....	str.6
2.1. Laminární obtékání válce.....	str.6
2.1.1. Ideální proudění.....	str.7
2.1.2. Plíživé proudění.....	str.8
2.1.3. Mírně setrvačný proud.....	str.8
2.1.4. Numerické řešení.....	str.9
2.1.4.1. Tlak.....	str.10
2.1.4.2. Celkový součinitel odporu.....	str.10
2.1.4.3. Tlakový součinitel odporu a odpor tření.....	str.11
2.2. Mezní vrstva na rovinné stěně.....	str.11
2.2.1. Oblast vysokých Reynoldsových čísel.....	str.11
2.2.2. Poměrné velikosti některých veličin v Navier-Stoke- sových rovnicích pro velká Re.....	str.13
2.2.3. Diferenciální rovnice mezní vrstvy.....	str.15
2.2.4. Odhad poměrné tloušťky mezní vrstvy pro proudění podél desky.....	str.16
2.2.5. Povrchové tření způsobené laminární mezní vrstvou.....	str.18
2.2.6. Zpětné proudění v mezní vrstvě jako příčina formování vírů.....	str.20
2.2.7. Druhy tlouštěk mezních vrstev.....	str.20
2.2.7.1. Odtlačovací tloušťka mezní vrstvy.....	str.20
2.2.7.2. Hybnostní tloušťka mezní vrstvy.....	str.21
2.2.7.3. Energetické tloušťky mezní vrstvy.....	str.22
3. Numerická simulace.....	str.24
3.1. Metoda konečných prvků.....	str.24
3.2. Algor.....	str.25
4. Výsledky numerické simulace.....	str.27
4.1. Numerická simulace obtékání válce v programu <i>Algor</i>	str.27
4.1.1. <i>Superdraw</i> -vytvořené modely.....	str.27
4.1.2. <i>Decoder</i> -zadané podmínky.....	str.27
4.1.3. <i>Superview</i> -výsledky simulace.....	str.28
4.2. Numerická simulace obtékání válce s vlivem na mezní vrstvu na stěně.....	str.34
4.2.1. <i>Vytvořené modely</i>	str.34

4.2.2. Zadané podmínky v Decoderu.....	str.35
4.2.3. Vliv náběžné délky a vzdálenosti osy válce od stěny na tlak v bodě náběhu.....	str.36
4.2.4. Vliv mezní vrstvy.....	str.43
4.3. Vliv hustoty sítě na přesnost výsledků.....	str.44
5. Závěr.....	str.46
Literatura.....	str.48
Příloha	

Seznam použitých symbolů:

p (Pa).....	tlak
ρ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$).....	hustota
ν ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$).....	kinematická viskozita
μ (Pa.s).....	dynamická viskozita
t (s).....	čas
Re (-).....	Reynoldsovo číslo
d (m).....	průměr válce
a (m).....	poloměr válce
r (m).....	radiální vzdálenost od středu válce
x (m).....	souřadnice
y (m).....	souřadnice
u_∞ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).....	rychlost neporušeného proudu při obtékání válce
$\vec{v}$ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).....	vektor rychlosti
v ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).....	y-ová složka vektoru rychlosti při obtékání desky
u ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).....	x-ová složka vektoru rychlosti při obtékání desky
u^l ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).....	rychlost rovnoběžná se stěnou ve vzdálenosti rovné tloušťce mezní vrstvy
ψ	Lagrangova proudová funkce
θ (rad).....	úhel odtržení proudu měřen ze zadní části válce
n (m).....	souřadnice ve směru normály k obtékanému povrchu
l (m).....	délka desky
b (m).....	šířka desky
S (m^2).....	plocha desky
c_t (-).....	celkový součinitel odporu
c_p (-).....	tlakový součinitel
c_f (-).....	třecí součinitel
F_t (N).....	třecí síla
D_f (N).....	třecí síla podél desky
χ (-).....	adiabatický exponent

S^l (-)	číselná konstanta
C (-)	číselná konstanta
A_p (m ²)	kruhový průřez válce
τ (Pa)	smykové napětí
δ (m)	tloušťka mezní vrstvy
δ_1 (m)	odtláčovací tloušťka mezní vrstvy
δ_2 (m)	hybnostní tloušťka mezní vrstvy
δ_3 (m)	energetická tloušťka mezní vrstvy vztažená na kinetickou energii
δ_4 (m)	energetická tloušťka mezní vrstvy vztažená na stagnační entalpii
δ_5 (m)	energetická tloušťka mezní vrstvy vztažená na entalpii
c_y (m.s ⁻¹)	rozložená rychlost podél normály ke stěně
η (-)	bezrozměrná tloušťka mezní vrstvy
i (Jkg ⁻¹)	entalpie
i_w (Jkg ⁻¹)	entalpie na stěně
i_s (Jkg ⁻¹)	stagnační entalpie

1. Úvod

Válec je jeden z velice rozšířených základních tvarů jak v přírodě (kmeny stromů, stonky rostlin,...), v běžném životě (např. tužky, láhve, sklenice,...), tak i v technické praxi je celá řada nenahraditelných předmětů, součástí a součástek, které mají tvar válce a jsou zastoupeny snad ve všech průmyslových oborech.

Proto i v mechanice tekutin obtékání válce (např. obtékání drátků měřících sond, trubek ve výměnících a pod.) patří k často sledovaným a popisovaným jevům. V minulosti se tímto problémem zabývala celá řada autorů. Srovnání těchto výsledků provedl např. Churchills (CHURCHILLS.W.: Viscous Flows), když porovnal výsledky numerických metod od Takami a Kellera, Niewstadta a Kellera, Collinse a Dennise, Dennise a Changa, Thoma, Suckera, Kawagutiho a Jaina, Hamielece a Raala, Sona a Apelta, Hanrattyho, Krala, Thoma a Szewczyka a výsledky experimentálních metod od Tanedy, Homanna, Groveho, Shaira a Petersena, Dimopoulose. Předmětem porovnání byly závislosti tlaků na válci, délek úplavů, úhlů odtržení, rychlostí na povrchu válce a odporů na Reynoldsově čísle.

Cílem této diplomové práce bude v první řadě numericky nasimulovat laminární obtékání válce a porovnat výsledky se závěry výše uvedených autorů. Na základě tohoto porovnání zhodnotit možnosti použité verze numerického simulačního programu *Algor 94*. Druhým okruhem této práce je úvodní studie vlivu turbulizátorů na mezní vrstvu. Vzhledem k dostupné výpočetní technice (počítač *PENTIUM-S CPU* s taktovací frekvencí 66 MHz, 500 MB HD, 16 MB operační paměť) a z toho vyplývající neschopnosti numerické simulace složitějších modelů (např. vyšší hodnoty Re , přechodové a turbulentní mezní vrstvy na stěně, nehladké tvary turbulizátorů a pod.) se bude jednat o válec obtékáný proudem s nízkou hodnotou Re ($Re=10$). Na základě poznatků Prandtla (TIETJENS, O.G.: Applied and Aeromechanics, Philadelphia 1951) a Žukauskase (ŽUKAUSKAS, A.: Heat transfer from tubes in Crossflow. In. Advances in Heat Transfer vol.8.)

o mezních vrstvách a poznatků známých z problematiky obtékání válce bude sledováno jejich vzájemné ovlivňování. Tedy vliv mezní vrstvy na stagnační tlaky v bodě náběhu válce (odpory válce), na rychlost obtékajícího proudu a z toho vyplývající možný přestup tepla a naopak vliv vzdálenosti válce od zdroje proudu a od stěny na tloušťku mezní vrstvy. Výsledkem této studie pak bude stanovení závislosti maximálních tlaků v bodě náběhu na vzdálenosti osy válce od stěny a závislost této vzdálenosti od stěny na náběžné délce. V druhé řadě to pak bude určení minimální vzdálenosti osy válce od stěny v závislosti na vzdálenosti od zdroje proudu (náběžné délce) pro obtékání válce již neovlivňovaného mezní vrstvou.

2. MEZNÍ VRSTVY

2.1. Laminární obtékání válce

Obtékání válce zahrnuje mnoho režimů. Proto není možný všeobecný popis. Odvozování a interpretace řešení se provádí pro individuální režimy.

Pro velmi nízká Reynoldsova čísla jsou setrvačné síly malé, ale nejsou zanedbatelné vůči silám třecím. Jak je vidět na obr.1 v příloze.

Pro $Re > 6$ se proud v zadní části válce odtrhává od povrchu a vytváří se cirkulující proud (příloha-obr.2,3).

Se vzrůstajícím Re se tento bod odtržení postupně posouvá vpřed. Pro $Re \approx 1,2 \cdot 10^4$ dosáhne tento bod maximálního postupu ($88\pi/180$ rad, měreno od bodu náběhu) a zůstává stálý až do $Re \approx 1,2 \cdot 10^5$. Přesný bod odtržení závisí na druhotných vlivech, jako jsou např. povrchové nerovnosti, délka válce, turbulence proudu a podobně. Sucker a Brauer pro tento bod odtržení odvodili následující vztah:

$$\theta = \left(\frac{\ln\{Re\} - 1,83}{3 \cdot 10^{-4}} \right)^{0,456} \quad (2.1.)$$

Až do $Re \approx 44$ se proud skládá ze dvou symetrických a stacionárních vírů. Od $Re \approx 44$ se víry tvoří střídavě a periodicky. Pro $Re > 60$ až do $Re < 150$ se jedná o tzv. Karmánovy víry. Pro nízká Re v tomto rozmezí si víry udržují stejnou velikost a vzdálenost. Pak se tato velikost a vzdálenost mezi nimi začne zvětšovat.

V turbulentním proudění do $Re \approx 3 \cdot 10^5$ jsou víry tvořeny s konstantní (Strouhalovskou) frekvencí (viz. příloha-graf 1). Pro dále rostoucí Re jsou víry nahrazeny turbulentním směřováním (úplavem).

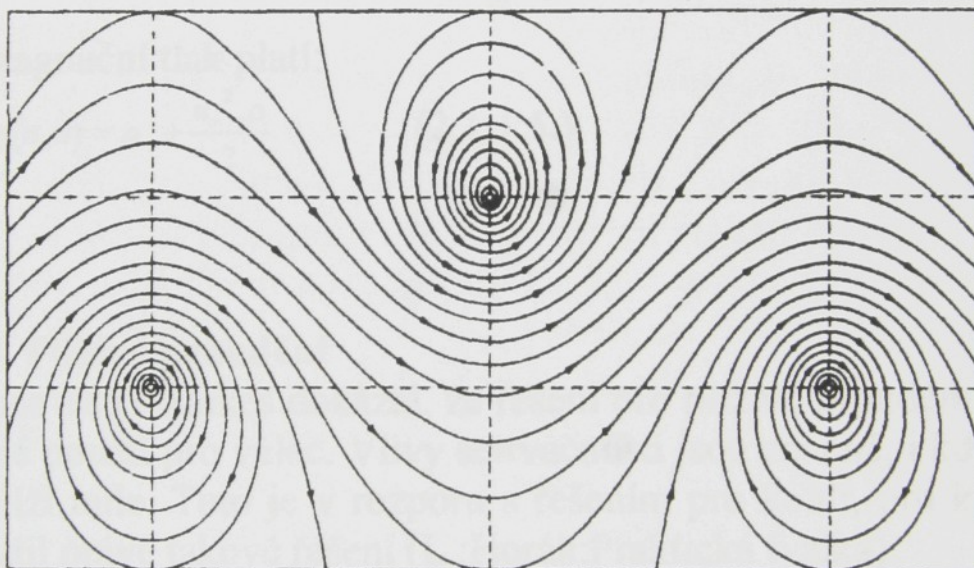
Je-li Re okolo $1,2 \cdot 10^5$, tak se bod separace (odtržení) laminární mezní vrstvy začne vracet zpět. Pro $Re \approx 3 \cdot 10^5$ dosahuje $110\pi/180$ rad (měreno od bodu náběhu). Tato odtržená vrstva se za bodem separace stává turbulentní a je opět připojena k povrchu jako

turbulentní mezní vrstva., která se odtrhává pro úhel $140\pi/180$ rad. Tato změna je doprovázena rychlým přírůstkem frekvence vírů. Pro $Re \approx 2 \cdot 10^6$ se frekvence odtrhávání vírů zmenšuje a stává se nepravidelnou.

2.1.1. Ideální proudění

Řešení ideálního proudění kolem válce neposkytuje přímé informace o povrchovém tření. Nicméně poskytuje asymptotický výraz pro rozdělení tlaku na přední části válce a přibližný odhad vnějšího rychlostního pole pro řešení mezní vrstvy.

Obr.2.1.1. Proudnice v Kármánových vírech za válcem



Řešení pro Lagrangeovu proudovou funkci tohoto proudu má tvar:

$$\psi = -u_{\infty} \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \cdot \sin \theta \quad (2.1.1.1.)$$

u_{∞} ... rychlost neporušeného proudu [m/s]

r ...radiální vzdálenost od středu válce [m]

a ...poloměr válce [m]

θ ...úhel měřený okolo válce ze zadní části [rad]

Pro složky rychlosti platí:

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\delta \psi}{\delta \theta} = u_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta \quad (2.1.1.2.)$$

$$u_\theta = \frac{\delta \psi}{\delta r} = -u_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta$$

Na povrchu ($r=a$), $u_r(\Theta, a)=0$

$$u_\theta = -2u_\infty \sin \theta \quad (2.1.1.3.)$$

$$u_r = 0$$

Rozdělení tlaku podél povrchu je:

$$p(\theta, a) = p(\pi, a) - 2u_\infty^2 \rho \sin^2 \theta \quad (2.1.1.4.)$$

Pro stagnační tlak platí:

$$p_s = p(\pi, a) = p_\infty + \frac{u_\infty^2 \cdot \rho}{2} \quad (2.1.1.5.)$$

2.1.2. Plíživé proudění

V roce 1851 Stokes dokázal, že řešení pro plíživé proudění není možné použít pro válec. Vlivy setrvačnosti jsou značné, i když se Re blíží nule. Toto je v rozporu s řešením pro kouli, pro kterou odvodil právě takové řešení (L.:Horák:Praktická fyzika).

2.1.3. Mírně setrvačný proud

Lamb použil lineární aproximaci pro setrvačné členy a dosáhl první stavové podmínky pro mírně setrvačný proud. Z tohoto vztahu vyplynulo, že $c_f=c_p=c_l/2$ a že celkový součinitel odporu je:

$$c_t = \frac{4\pi}{S^l Re} \quad (2.1.3.1.)$$

kde:

$$S^l \cong 2,0022 - \ln Re \cong \ln \left\{ \frac{7,4055}{Re} \right\} \quad (2.1.3.2.)$$

Pro součinitel odporu jako funkce povrchu plochy platí:

$$c_t = \frac{F_t}{A_p \rho \cdot u_\infty^2} = \frac{4F_t}{\pi \cdot d^2 \rho \cdot u_\infty^2} \quad (2.1.3.3.)$$

Tomotika a Aoi odvodili pro c_t vztah:

$$c_t = \frac{4\pi}{Re \cdot S^I} \left[1 - \left(S^I - \frac{1}{2} + \frac{5}{16S^I} \right) \frac{Re^2}{32} + \dots \right] \quad (2.1.3.4.)$$

2.1.4. Numerické řešení

První úspěšné numerické řešení pro proudění kolem válce bylo od Thoma v roce 1928 pro $Re=10$ a 20 . S vývojem výpočetní techniky bylo dosaženo spolehlivých řešení až do $Re=44$. Méně jisté výsledky byly získány dokonce až pro $Re=3 \cdot 10^5$.

Výsledky pro $Re \leq 40$ byly počítány pro modely v ustáleném stavu, protože jak je známé, tvorba vírů začíná pro $Re \approx 40$.

Některé výpočty ustálených stavů byly do hodnoty $Re=500$. V každém případě vypočtené rychlostní pole, rozdělení tlaku a povrchové tření na začátku úplavu se očekává jako nezávislé na dalším vývoji tohoto úplavu.

Vypočtené hodnoty c_f , c_p , c_t pro $Re=40$ s použitím různých numerických metod jsou v následující tabulce:

Tab.2.1.4.

Rok		$c(f)$	$c(p)$	$c(t)$	θ
1953	Kawaguti	0,283	0,526	0,809	52,5
1961	Apelt	0,284	0,464	0,748	50
1966	Kawaguti a Jain	0,264	0,501	0,765	53,7
1969	Jain a Rao	0,269	0,526	0,795	54,2
1969	Son a Hanratty	0,257	0,498	0,755	
1969	Takami a Keller			0,768	
1970	Dennis a Chang	0,262	0,499	0,761	53,8
1973	Nieuwstadt a Keller			0,775	
1975	Sucker a Brauer	0,278	0,538	0,817	51,9

Hodnoty Θ_S (bod separace mezní vrstvy od povrchu válce) jsou v této tabulce také zahrnuty. Všechny tyto hodnoty se téměř shodují, ale které jsou nejvíce přesné není jisté, protože neexistuje absolutní měřítko, podle kterého by se daly porovnat.

2.1.4.1. Tlak

Naměření hodnoty tlaku na bodu náběhu jsou v mimořádné shodě s rovnicí:

$$\frac{2(p_\pi - p_\infty)}{\rho \cdot u_\infty^2} = 1 + \frac{8}{Re} \quad (2.1.4.1.1.)$$

Nicméně vypočtené hodnoty pro nízká Re jsou nižší než předpoklad odpovídající rovnicím 2.1.4.1.1 a

$$\frac{2(p_\pi - p_\infty)}{\rho \cdot u_\infty^2} = 1 + \frac{8}{Re + 0,646\sqrt{Re}} \quad (2.1.4.1.2.)$$

Porovnání experimentálních a vypočtených hodnot pro $Re=5 \cdot 10^4$ provedl Achenbach a dosáhl potvrzení rovnice pro ideální proudění:

$$p\{\theta, a\} - p_\infty = \frac{u_\infty^2 \cdot \rho}{2} (1 - 4 \sin^2 \{\theta\}) \quad (2.1.4.1.3.)$$

2.1.4.2. Celkový součinitel odporu

Nejpřesnější hodnoty c_t pro malá Re dosáhl Tritton. Pro $Re \rightarrow 0$ se jako nejlepší zdá být Kaplunova rovnice a zdá se být uspokojivá až do $Re < 1$. Numerická řešení pro $3 < Re < 100$ od Dennise a Changa, Takami a Kellera, Alpelta, Kawagutiho, Thoma se také poměrně dobře shodují (L.: CHURCHILLS.W.: Viscous Flows, Boston 1988).

Pro $Re > 100$ se jako nejlepší řešení jeví měření od Wieselbergera.

Sucker a Brauer pro hodnoty $10^{-4} < Re < 2 \cdot 10^5$ odvodili následující empirickou rovnici:

$$c_t = 0,59 + \frac{3,4}{Re^{0,89}} + \frac{0,98}{Re^{0,5}} - \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot Re}{1 + 3,64 \cdot 10^{-7} \cdot Re^2} \quad (2.1.4.2.)$$

2.1.4.3. Tlakový součinitel odporu a odpor tření

Chování součinitele odporu je lepší posuzovat odděleně pro povrchové tření a pro tlak. U těchto součinitelů se do $Re < 1$ vyskytuje rovnost. Tyto hodnoty jsou také reprezentovány empirickou křivkou, ale na rozdíl od hodnot c_t mají hodnoty c_f , c_p větší rozptyl. Nasimulované hodnoty pro $Re > 40$ se zdají být celkově nízké. Předpokládá se, že to vzniklo zanedbáním vírů.

Rovnice 2.1.3.1. a 2.1.3.4. jsou uspokojivé pro $Re \leq 0,5$. Pro teorii tenké mezní vrstvy dává správnou funkční závislost c_f na Re rovnice:

$$c_f \sqrt{Re} = \int_0^{1,8984} \left(\frac{\tau}{\rho \cdot u_\infty^2} \right) \sqrt{Re} \cdot \sin \left\{ \frac{x}{a} \right\} d \left(\frac{x}{a} \right) = 2,9921 \quad (2.1.4.3.)$$

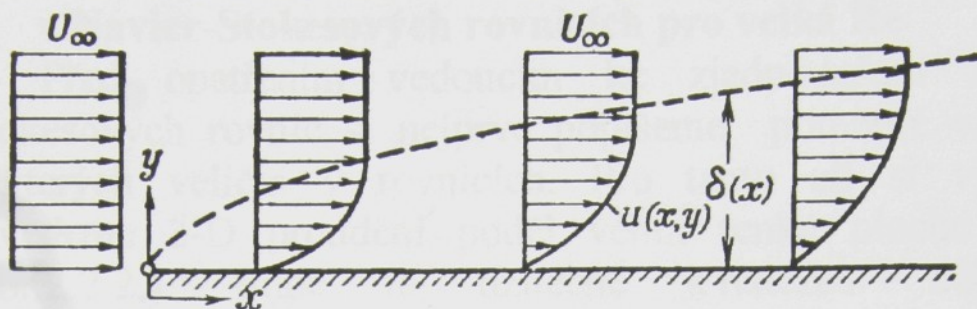
2.2. Mezní vrstva na rovinné stěně

2.2.1. Oblast vysokých Reynoldsových čísel

Úvaha o současném vlivu sil třecích a sil viskózních je možná jen pro velmi viskózní tekutiny nebo pro velmi malá Reynoldsova čísla. V těchto případech jsou zrychlující členy proudění důležité jen pro velmi velké vzdálenosti od těles. Avšak v těsné blízkosti těles je proud určen skoro v celém rozsahu účinkem viskozity.

Pro velká Reynoldsova čísla je situace zcela odlišná. Setrvačné síly zde mají mnohem větší vliv než síly viskózní, přinejmenším v dostatečné vzdálenosti od stěn nebo dalších překážek, tj. s výjimkou vrstev proudu blízko překážek. Kdybychom však úplně zanedbali tyto viskózní síly v diferenciálních rovnicích, obdrželi bychom chybné výsledky.

Obr. 2.2.1. Schéma mezní vrstvy na ploché desce



Důležité zlepšení v přístupu k pohybu proudu pro velká Re vytvořil Prandtl. Jeho metoda bude nyní popsána.

Zkušenost ukázala, že pohyb proudu s malou viskozitou (voda, vzduch) podél těles má rychlosti stejně velké jako proud v nekonečnu téměř v celé oblasti s výjimkou tenké vrstvy na povrchu těles. V případě aerodynamických tvarů byly tyto experimentálně zjištěné rychlosti téměř shodné s rychlostmi vypočtenými na základě teorie o potencionálním proudění.

Pole proudu pak můžeme rozdělit na dvě oblasti:

1. Okolí povrchu pevných těles, kde je velmi tenká vrstva s velkým rychlostním gradientem $\frac{\partial u}{\partial y}$ tak, že i pro malé hodnoty

rychlosti u nabývá tečné napětí (povrchové tření) $\tau = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$ nezanedbatelných hodnot.

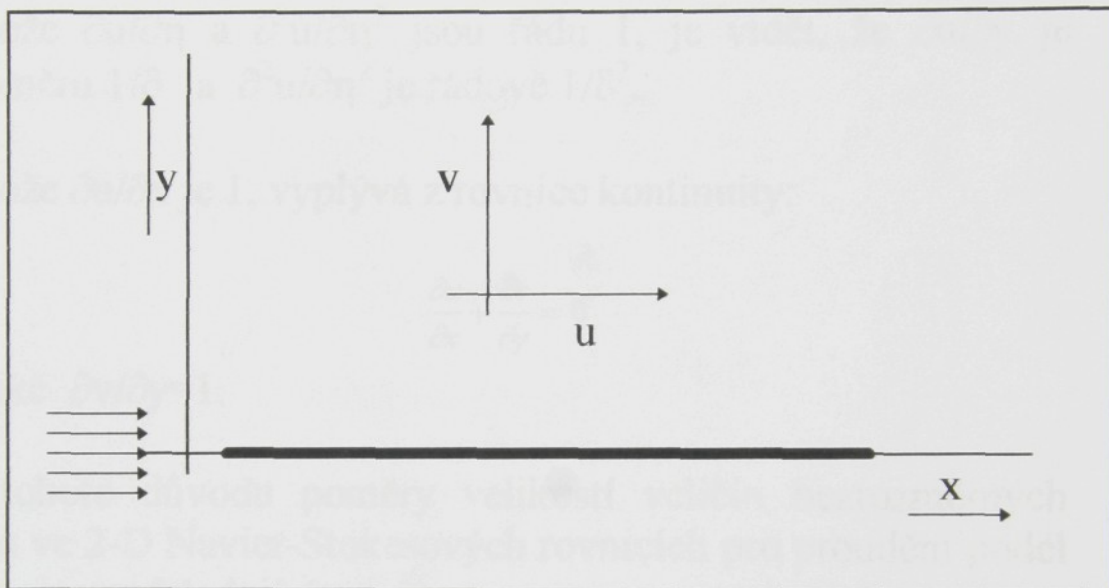
2. Oblast vně mezní vrstvy, kde již rychlostní gradient není tak velký a vliv viskozity může být zanedbán. Zde je obraz proudu stanoven účinkem tlaku, tzn. že se jedná o potencionální proudění.

Obecně můžeme formulovat závislost tloušťky mezní vrstvy na rychlosti tak, že vrstva, ve které je rychlost nulová díky účinku viskozity, je pro malé viskozity tenká nebo více obecně můžeme říci, že je tím tenčí, čím je větší Re . Vzhledem k této okolnosti je pro tenkou vrstvu a její přibližná řešení možné použít zjednodušených Navier-Stoksových rovnic pro tenkou mezní vrstvu. Toto zjednodušení je v dobré shodě s experimentálními výsledky pro tenkou mezní vrstvu.

2.2.2. Poměrné velikosti některých veličin

v Navier-Stokesových rovnicích pro velká Re

Před opatřením vedoucím ke zjednodušení Navier-Stokesových rovnic si nejprve popíšeme poměrné velikosti některých veličin v rovnicích. Pro tento cíl si výhodně zavedeme 2-D proudění podél velmi tenké ploché desky (obr.2.2.2.). Bude to užitečné k nalezení některých bezrozměrných proměnných.



Obr. 2.2.2. Proud podél ploché hladké desky

Kinematická viskozita je nahrazena reciprokou hodnotou Re:

$$\nu / (\vec{V} \cdot l) = 1/\text{Re}$$

X-ová složka vektoru rychlosti u je známá z proudu vně mezní vrstvy a je řádově rovna 1 ($u=1$).

Z předpokladu, že tloušťka mezní vrstvy δ je malá vzhledem k řádu 1, odvodíme:

$$u = \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial y} dy \approx 1$$

kde gradient rychlosti kolmý k desce $\partial u / \partial y$ je v poměru $1/\delta$. Toto také můžeme vyjádřit proměnnou $\eta = y / \delta$, kde η je stejného řádu jako x .

Potom:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Protože $\partial u / \partial \eta$ a $\partial^2 u / \partial \eta^2$ jsou řádu 1, je vidět, že $\partial u / \partial y$ je v poměru $1/\delta$ a $\partial^2 u / \partial \eta^2$ je řádově $1/\delta^2$.

Protože $\partial u / \partial x$ je 1, vyplývá z rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

že také $\partial v / \partial y = 1$.

Z tohoto důvodu poměry velikostí veličin bezrozměrných členů ve 2-D Navier-Stokesových rovnicích pro proudění podél desky jsou následující:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad 2.2.2.1.a$$

$$1 \quad 1.1 \quad \delta^I.1/\delta^I \quad 1 \quad 1/(\delta^I)^2$$

a

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad 2.2.2.1.b$$

$$\delta^I \quad 1. \delta^I \delta^I.1 \quad \delta^I \quad 1/\delta^I$$

V těchto rovnicích je δ^I bezrozměrná tloušťka mezní vrstvy, tj. tloušťka mezní vrstvy δ vztažená na charakteristickou délku desky l :

$$\delta^I = \delta / l$$

Na pravé straně rovnice 2.2.2.1.a je $\partial^2 u / \partial x^2$ vůči $\partial^2 u / \partial y^2$ zanedbatelné, proto může být v rovnici vynecháno. V rovnici

2.2.2.1.b zase $\partial^2 v / \partial x^2$ může být zanedbáno vzhledem k velikosti $\partial^2 v / \partial y^2$.

Uvnitř mezní vrstvy je účinek třecích sil ve stejném řádu jako jsou síly setrvačné. Setrvačný efekt je dán v rovnici 2.2.2.1.a členy na levé straně a je řádově roven 1. Z toho vyplývá, že člen $1/R$ na pravé straně rovnice je řádově roven $1/(\delta^1)^2$.

2.2.3. Diferenciální rovnice mezní vrstvy

Vně mezní vrstvy je tlak p pouze funkcí x a závislý na y a protože $\partial^2 u / \partial x^2$ je vzhledem k $\partial^2 u / \partial y^2$ zanedbatelné, má Navier-Stokesova rovnice pro mezní vrstvu tvar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad 2.2.3.$$

Mimo to má rovnice kontinuity tvar:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Zavedeme-li proudovou funkci ψ :

$$u = \partial \psi / \partial y \quad \text{a} \quad v = -\partial \psi / \partial x$$

pak obdržíme z rovnice 2.2.3. tvar:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad 2.2.3.a$$

Tato diferenciální rovnice mezní vrstvy odvozená pro proudění podél rovných stěn může být také použita pro proudění podél zakřivených tvarů. Nicméně tvar rovnice je pak poněkud složitější (HIEMENZ, K., The Boundery Layer of a Straight Circular Cylinder in a Homogeneous Fluid (German), Dissertation, Göttingen, 1911).

Okrajové podmínky pro rovnici 2.2.3.a) jsou následující:

1. $y=0 \quad \psi=0, \quad \partial\psi/\partial y=0$

2. $u= u^l, \quad v$ zanedbáváme

kde u^l je rychlost rovnoběžná se stěnou ve vzdálenosti rovné tloušťce mezní vrstvy.

Např., jestliže rozdělení tlaku podél mezní vrstvy tělesa bude stanoveno experimentálně, rychlost u^l může být spočítána z Bernoulliho rovnice:

$$\frac{u^{l^2}}{2} = -k_{ons} \cdot \frac{P}{\rho}$$

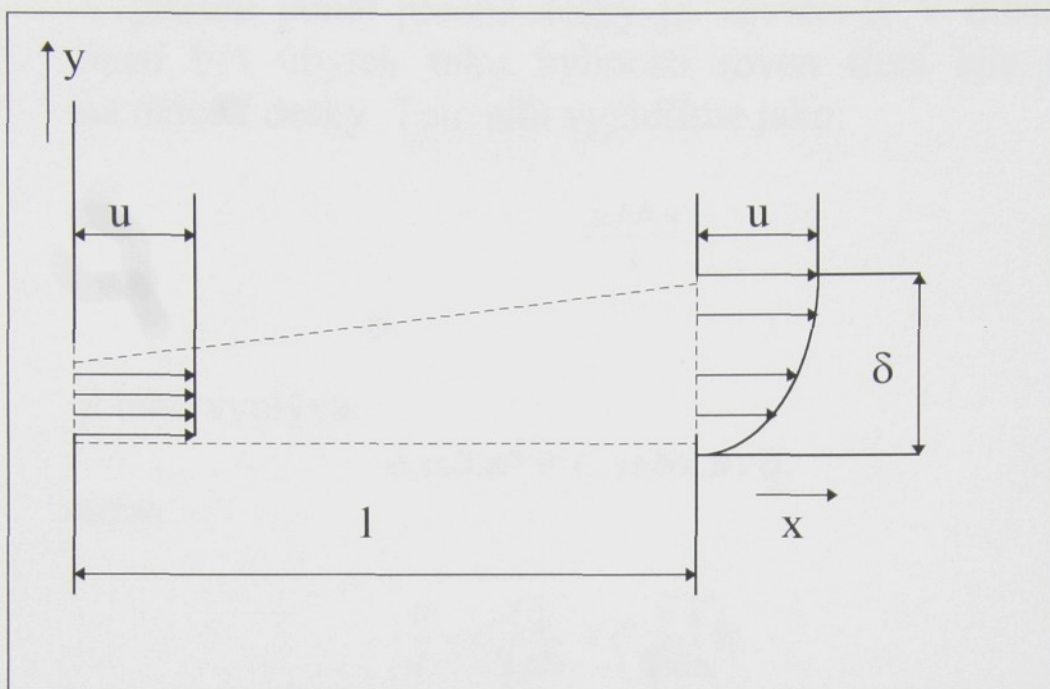
Z tohoto důvodu celkový proud tekutiny s malou viskozitou podél pevného tělesa je rozložen na proudění ve velmi tenké vrstvě, kde má vnitřní tření definovaný vliv a na vnější proud, kde viskozita nemá prakticky žádný efekt.

Tlak uvnitř mezní vrstvy je určen proudem vně mezní vrstvy. Tyto skutečnosti jsou pravdivé pouze pro případ mezní vrstvy, která je dostatečně tenká pro zavedení zjednodušení, která však nejsou vždy možná.

2.2.4. Odhad poměrné tloušťky mezní vrstvy pro proudění podél ploché desky

Odhad poměrné velikosti tloušťky mezní vrstvy může také být nalezen pro plochou desku z hybnostní analýzy.

Čárkovaná čára na obr. 2.2.4. je hranice oblasti, pro kterou budeme aplikovat hybnostní analýzu. Tato oblast je tvořena délkou l začínající na čele desky, kolmicemi v bodech $x=0$ a $x=l$ a nakonec proudnicí, která v bodě $x=l$ má vzdálenost od desky rovnou δ .



Obr. 2.2.4. Aplikace hybnostní věty pro nalezení poměru kinetické energie tloušťky mezní vrstvy

Základní popis hybnostní věty je, že proud kinetické energie přes hranice oblasti je roven součtu tlakového integrálu a třecí síly podél délky l desky. Předpokládá se, že přes horní hranici oblasti nic neproteče. Pak množství kinetické energie vstupující a vystupující z oblasti je konstantní. Množství tekutiny proteklé za jednu sekundu je přibližně rovno:

$$\delta/2 \cdot b \cdot u$$

kde b je šířka desky. Toto množství vstupující na levém okraji rychlostí u tuto svou rychlost během proudění ztrácí v důsledku poklesu kinetické energie. Velikost této ztráty není známa, protože k výpočtu musíme znát rozložení rychlosti v bodě $x=l$, tzn., že musíme znát tloušťku mezní vrstvy, což je vlastně cíl našeho výpočtu. Změnu toku hybnosti můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$\rho \cdot \delta \cdot b \cdot u^2$$

V proudu podél ploché desky je $dp/dx=0$. V důsledku toho musí být úbytek toku hybnosti roven třecí síle účinkující na délce l desky. Tuto sílu vyjádříme jako:

$$\frac{\mu.l.b.u}{\delta}$$

Z toho vyplývá:

$$\delta.\rho.b.u^2 = C.\mu.b.l.u / \delta$$

nebo

$$\frac{\delta}{l} = C \sqrt{\frac{\mu}{\rho l u}} = C \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_l}}$$

kde C je číselná konstanta, která z této hybnostní věty nemůže být nalezena.

Vyjádření zde odvozené rovnice pro plochou desku je také platné pro zakřivené mezní vrstvy v ustáleném proudění. Pro TCI proudění začínající v klidu je pro okamžik rozběhu platné:

$$\delta = \sqrt{\gamma \cdot t}$$

Číselnou konstantu C pro ustálený stav spočítal z exaktního řešení Blasius. Z definice tloušťky mezní vrstvy vzal průnik mezi tečnou na počátku a asymptotou a dostal hodnotu $C=3,4$.

Takže tloušťka mezní vrstvy podél ploché desky má tvar:

$$\delta = 3,4 \cdot \sqrt{\frac{x \cdot \gamma}{u}} = 3,4 \cdot \frac{x}{\sqrt{\text{Re}}} \quad 2.2.4.$$

2.2.5. Povrchové tření způsobené laminární mezní vrstvou

Integrováním diferenciálních rovnic pro mezní vrstvu Blasius našel pro smykové napětí $\tau_0 = \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0$ vyjádření:

$$\tau_0 = 0,332 \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \rho \cdot u^3}{x}} \quad 2.2.5.1.$$

Třecí síla podél jedné strany ploché desky mající délku l a šířku b je pak:

$$D_f = b \cdot \int_0^l \tau \cdot dx = 0,332 \cdot b \cdot \sqrt{\mu \cdot \rho \cdot u^3} \cdot l \cdot \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0,664 \cdot b \cdot \sqrt{\mu \rho \cdot u^3} \cdot l \quad 2.2.5.2.$$

Nebo je možné pomocí součinitele tření c_f dostat toto vyjádření:

$$D_f = c_f \cdot S \cdot u^2 / 2 \cdot \rho \quad 2.2.5.3.$$

kde $S = b \cdot l =$ povrch desky

Pak vztah pro třecí sílu napíšem ve tvaru:

$$D_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} \cdot S \cdot \frac{\rho \cdot u^2}{2}$$

z toho

$$c_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re}}$$

Tento odvozený tvar pro c_f velmi dobře souhlasí s experimentálními hodnotami získanými pro hladký povrch.

Na základě pravděpodobného předpokladu rozdělení rychlostí v mezní vrstvě Kármán odvodil přibližný postup pro výpočet tloušťky δ jako funkce x a času t pro tělesa libovolného tvaru pomocí momentové věty (VON KÁRMÁN, TH., On Laminar and Turbulent Friction (German)). Postup je ale platný pouze pro velmi tenké mezní vrstvy. Nahrazením hodnoty δ , je možné vypočítat součinitel odporu pro libovolné tvary. V této analýze se předpokládá, že tlak podél okraje těles, je znám. Výpočty jsou prováděny pro předpokládané rozložení tlaku platné pro potencionální proud nebo z hodnot tlaku nalezených experimentálně. Tento druhý postup je v lepší shodě s vypočítanými fakty, jak uvedl Hiemenz (HIEMENZ, K., The Boundary Layer of a Straight Circular Cylinder in a

Homogeneous Fluid (German), Dissertation, Göttingen, 1911). Metoda od Kármána byla vzata z numerických výsledků pro několik příkladů od Pohlhausena (POHLHAUSEN, K., Approximate Integrations of the Differential Equation of the Laminar Boundary Layer) a dosáhlo se velmi dobré shody s vypočtenými hodnotami od Blasiusa. Toto byl výrazný krok k výsledkům, které jsou nalezeny mnohem jednoduššími matematickými metodami než jsou exaktní řešení od Blasiusa, která vyžadovala množství komplikovaných přístupů.

2.2.6. Zpětné proudění v mezní vrstvě jako příčina formování vírů

Nejdůležitější charakteristika mezní vrstvy je, že za jistých okolností se v ní objeví zpětný proud, který vede k tvorbě vírů a k úplné výměně v systému proudění.

Experiment ve 2-D proudění divergentním kanálem ukázal, že v prvním okamžiku po začátku proudění se rychlost tohoto potencionálního proudu snižuje v důsledku zvětšování příčného průřezu. Tento pokles rychlosti je doprovázen růstem tlaku, jak je patrné z Bernoulliho rovnice, která vyjadřuje, že se kinetická energie přeměňuje na energii tlakovou. Ve velmi krátkém čase po začátku proudění ztrácí částice proudu v mezní vrstvě všechnu svou kinetickou energii, protože zpomalují nejen vlivem gradientu tlaku, ale také v důsledku vlivu třecích sil. Částice se tak zpomalují až do klidu a pak se začnou pohybovat zpět. Vzniká zpětné proudění v mezní vrstvě, které vede k formování vírů.

2.2.7. Druhy tloušťek mezních vrstev

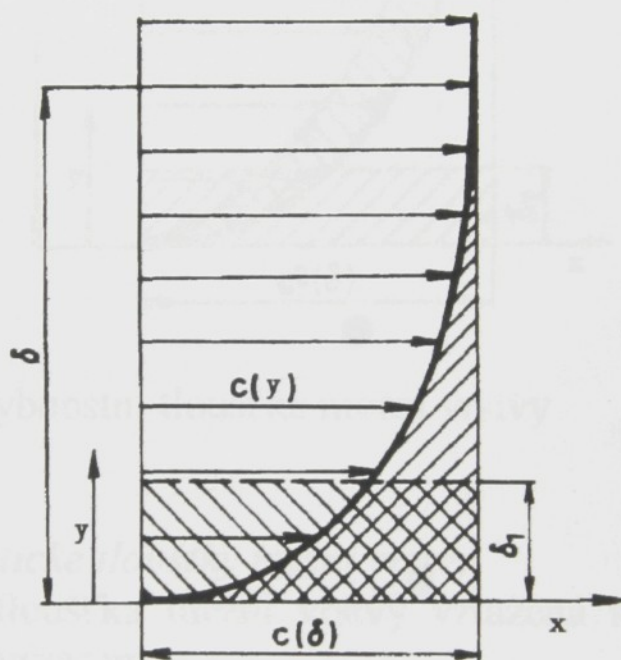
Pro praktická proudění rozeznáváme tyto tloušťky mezních vrstev: odtlačovací, hybnostní a energetické.

2.2.7.1. Odtlačovací tloušťka mezní vrstvy

Odtlačovací tloušťka mezní vrstvy je dána výrazem:

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{c_y}{c_\delta}\right) dy \quad 2.2.7.1.$$

Kde c_y je rozložení rychlostí podél normály ke stěně (rychlostní profil mezní vrstvy). Součinem $\rho \cdot \delta_l \cdot c_\delta$ můžeme vyjádřit hmotnostní průtok, který v důsledku brzdění v mezní vrstvě chybí. S ohledem na rovnici kontinuity musí proto protékat větší množství tekutiny ve vnější oblasti proudu. Můžeme tedy účinek mezní vrstvy na proudění bez tření nahradit tím, že ke kontuře stěny přičteme δ_l a dostaneme tak novou (myšlenou) konturu stěny, která je oproti původní posunutá, takže zmenší průtočný průřez kanálu nebo zvětší tloušťku obtékaného profilu.



Obr. 2.2.7.1. Odtlačovací tloušťka mezní vrstvy

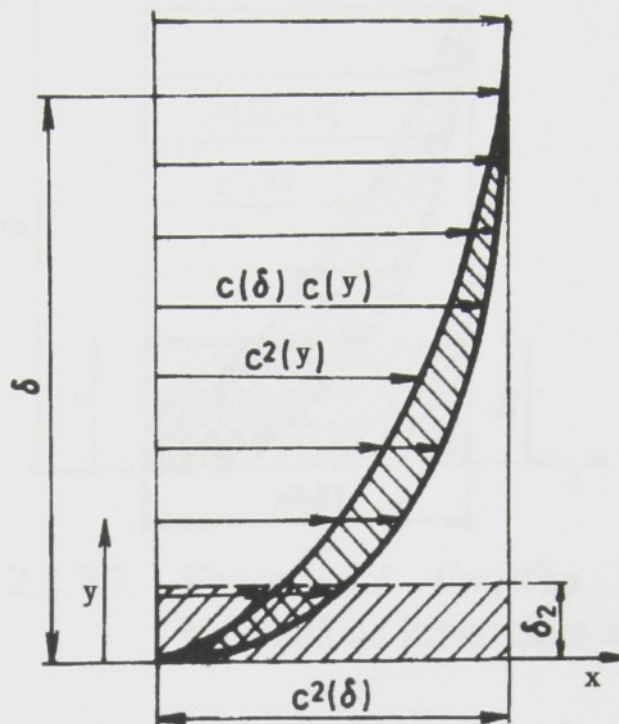
2.2.7.2. Hybnostní tloušťka mezní vrstvy

Hybnostní tloušťka mezní vrstvy je definována integrálem:

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{c_y}{c_\delta} \cdot \left(1 - \frac{c_y}{c_\delta}\right) dy \quad 2.2.7.2.$$

Velikost součinu $\rho \cdot \delta_2 \cdot c_\delta^2$ představuje ztrátu impulzu, která vznikla v důsledku brzdění v mezní vrstvě vzhledem

k proudění bez mezní vrstvy. Je tedy mírou třecího odporu, který vzniká na kontuře stěny ve směru proudu.



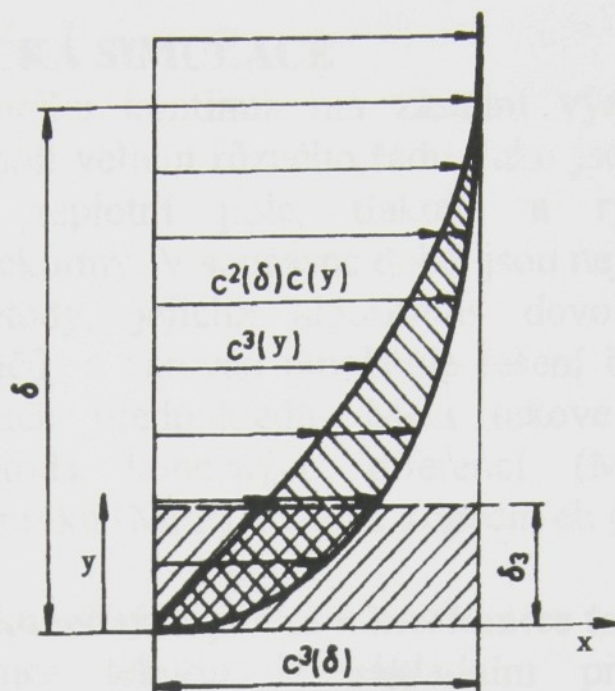
Obr. 2.2.7.2. Hybnostní tloušťka mezní vrstvy

2.2.7.3. Energetické tloušťky mezní vrstvy

- Energetická tloušťka mezní vrstvy vztažená na kinetickou energii je dána výrazem:

$$\delta_3 = \int_0^\delta \frac{c_y}{c_\delta} \left(1 - \frac{c_y^2}{c_\delta^2} \right) dy \quad 2.2.7.3.1.$$

Součin $\rho \cdot \delta_3 \cdot c_\delta^3$ představuje energetickou ztrátu, která vznikla v důsledku brzdění v mezní vrstvě oproti proudění bez mezní vrstvy. Představuje ztrátu kinetické energie v důsledku tření na kontuře stěny směrem po proudu.



Obr. 2.2.7.3. Energetická tloušťka mezní vrstvy vztažená na kinetickou energii

- Energetická tloušťka mezní vrstvy vztažená na stagnační entalpii :

$$\delta_4 = \int_0^{\delta} \frac{c_y}{c_{\delta}} \left(\frac{i_s}{i_{\delta}} - 1 \right) dy \quad 2.2.7.3.2.$$

kde stagnační entalpie i_s je: $i_s = i_y + c_y^2/2$

- Energetická tloušťka mezní vrstvy vztažená na entalpii:

$$\delta_5 = \int_0^{\delta} \frac{c_y}{c_{\delta}} \left(\frac{i_y - i_{\delta}}{i_w - i_{\delta}} \right) dy \quad 2.2.7.3.3.$$

kde i_w značí hodnotu na stěně.

Tloušťky δ_4 , δ_5 hrají roli při zkoumání transportu tepla, tedy roli srovnatelnou jako hraje δ_2 při zkoumání stěnových třecích jevů.

3. NUMERICKÁ SIMULACE

Pro mechaniku kontinua má zásadní význam výpočet tenzorových polí veličin různého řádu, jako jsou stacionární a nestacionární teplotní pole, tlaková a rychlostní pole při proudění tekutiny. V současné době jsou nejvíce používány přibližné metody, jejichž algoritmus dovoluje racionální využití počítačů a zároveň umožňuje řešení bez násilných a zjednodušujících předpokladů. Mezi takové metody patří zejména metoda konečných diferencí (MKD), metoda povrchových prvků (MPP), metoda konečných prvků (MKP).

3.1. Metoda konečných prvků v mechanice tekutin

V mechanice tekutin je základním problémem vliv prostorovosti a vazkosti, matematicky popsany Navier-Stokesovou rovnicí. Numerické řešení Navier-Stokesových rovnic je i při současném stavu výpočetní techniky možné jen ve vyjimečně jednoduchých případech a jsou nutná jistá zjednodušení. Často přijímáme předpoklad dvourozměrnosti, který je náhradou prostorového osově symetrického proudění, tedy řešení v rovinách určených vhodně volenými řezy. Pro rovinná proudění mají pak Navier-Stokesovy rovnice tvar:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) &= v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial t}\end{aligned}$$

K těmto rovnicím ještě přistupuje rovnice kontinuity:

$$\operatorname{div}(\rho \cdot v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

V případech, kdy je třeba uvažovat stlačitelnost, je hustota další neznámá.

Závislost tlaku na hustotě pro izoentropické proudění můžeme vyjádřit jako:

$$p = K \cdot \rho^\chi$$

Zjednodušení N-S rovnic tj. redukce diferenciálních rovnic a odpovídajících okrajových podmínek nebude popisováno, protože to není předmětem této diplomové práce. Naopak velice důležitou záležitostí, která souvisí s metodou konečných prvků a bude popisována později, je rozdělení oblasti řešení myšlenými body, čarami nebo plochami na jistý počet konečných prvků tzv. generace sítě (viz. kap.4.3.).

3.2. ALGOR

Algor je komplexní program na řešení úloh MKP. Má modulové uspořádání, přičemž jednotlivé moduly umožňují řešit problémy z oblasti pružnosti a pevnosti, termokinetiky, proudění vazkého prostředí.

Obsahuje tři základní části:

1. *PREPROCESSING*

2. *PROCESSING*

3. *POSTPROCESSING*

Preprocessing slouží k tvorbě síťového modelu doplněného o počáteční podmínky. To se děje v *SUPERDRAW* (zjednodušený CAD systém doplněný o příkazy umožňující stavbu sítě). Dále se zde ve *FLUID FLOW DECODERU* zadávají vlastnosti proudící tekutiny, počet iteračních kroků, přesnost výpočtů, zda je úloha dvou nebo třírozměrná.

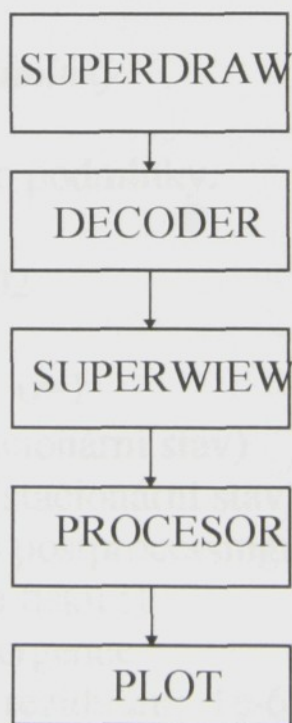
Processing je vlastní výpočet zadané úlohy počítačem. Skládá z *TWO-DIMENSIONAL STEADY-STATE FLUID FLOW ANALYSIS* a *THREE-DIMENSIONAL STEADY-STATE FLUID FLOW ANALYSIS* pro výpočet stacionárních proudění ve 2D a 3D.

Postprocessing obsahuje *SUPERVIEW* umožňující kontrolu modelu před výpočtem a zobrazení vypočteného modelu.

K tomu, abychom mohli program *Algor* používat, musíme mít k dispozici minimálně PC 386 s matematickým procesorem, 2 MB RAM a 100 MB HD. Toto je ovšem konfigurace použitelná k menším úlohám. Pro větší úlohu jakou je např dále popsaná numerická simulace, je nutné mít k dispozici alespoň 4 MB RAM a 160 HD.

Obecný postup řešení je na obrázku 3.2. zobrazující vytvoření modelu v *Superdraw*, přípravu dat pro procesor v *Decoderu*, kontrolu modelu v *Superview*, případnou opravu v *Superdraw*, opět kontrola modelu, výpočet, zobrazení vypočtených polí v *Superview* a následné vytištění.

obr. 3.2. Obecný postup modelování v programu Algor



S podrobným popisem programu *ALGOR* a jednotlivých příkazů je možno se seznámit v literatuře (Firemní listy, Algor-Fluid Flow, Pittsburg 1990).

4. VÝSLEDKY NUMERICKÉ SIMULACE

4.1. Numerická simulace obtékání válce v programu *ALGOR*

4.1.1. *Superdraw-vytvořené modely*

V této části bylo vytvořeno 9 modelů pro $Re=1, 2, 4, 6, 7, 10, 15, 20, 40, 50$.

Příloha obr. č.	1,4	5	6	7	8	2,9	10	11	3,12	14
Re	1	2	4	6	7	10	15	20	40	50

Vyšších hodnot Re ve verzi *Algor 94* nebylo dosaženo. Reynoldsovo číslo bylo měněno rychlostí na vstupu do modelu. Dynamická viskozita, hustota, průměr válce zůstávaly konstantní.

4.1.2. *Decoder-zadané podmínky*

V decodéru byly zadány tyto podmínky.

Hustota: $\rho=1$

Dynamická viskozita: $\mu=0,02$

Počet iteračních kroků: 15

Integrátor: zpětná diference: $\nu=1$

Eulerův parametr: $\alpha=1$ (stacionární stav)

Acceleration multiplier: 0 (stacionární stav)

Počet kroků mezi-výstupem postprocessingu: 1
-výstupem tisku : 1

Automatická kontrola konvergence

Konvergenční kritéria - pro reziduum: $1e-6$

- pro přesun : $1e-6$

-reziduální norma

4.1.3.Superview- výsledky simulace

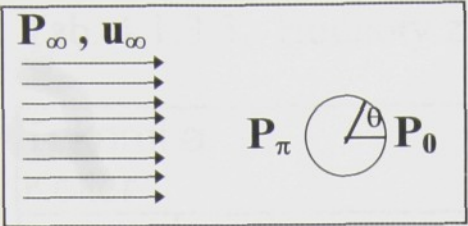


Schéma modelu:

urychlost

ptlak

θúhel odtržení proudu

Odečtené a vypočtené hodnoty jsou v následující tabulce:

Tab. 4.1.3.1.

Re	$2 \cdot (p_\infty - p_0) / (\rho \cdot u_\infty^2)$	$2 \cdot (p_\pi - p_\infty) / (\rho \cdot u_\infty^2)$
1	2,965	4,035
2	1,753	2,712
4	1,251	1,894
6	0,938	1,684
7	0,873	1,593
10	0,736	1,426
20	0,597	1,190
40	0,442	1,120
50	0,422	1,103

Hodnoty získané dalšími autory:

Tab. 4.1.3.2.: Hodnoty získané Nieuwstadtem a Kellerem

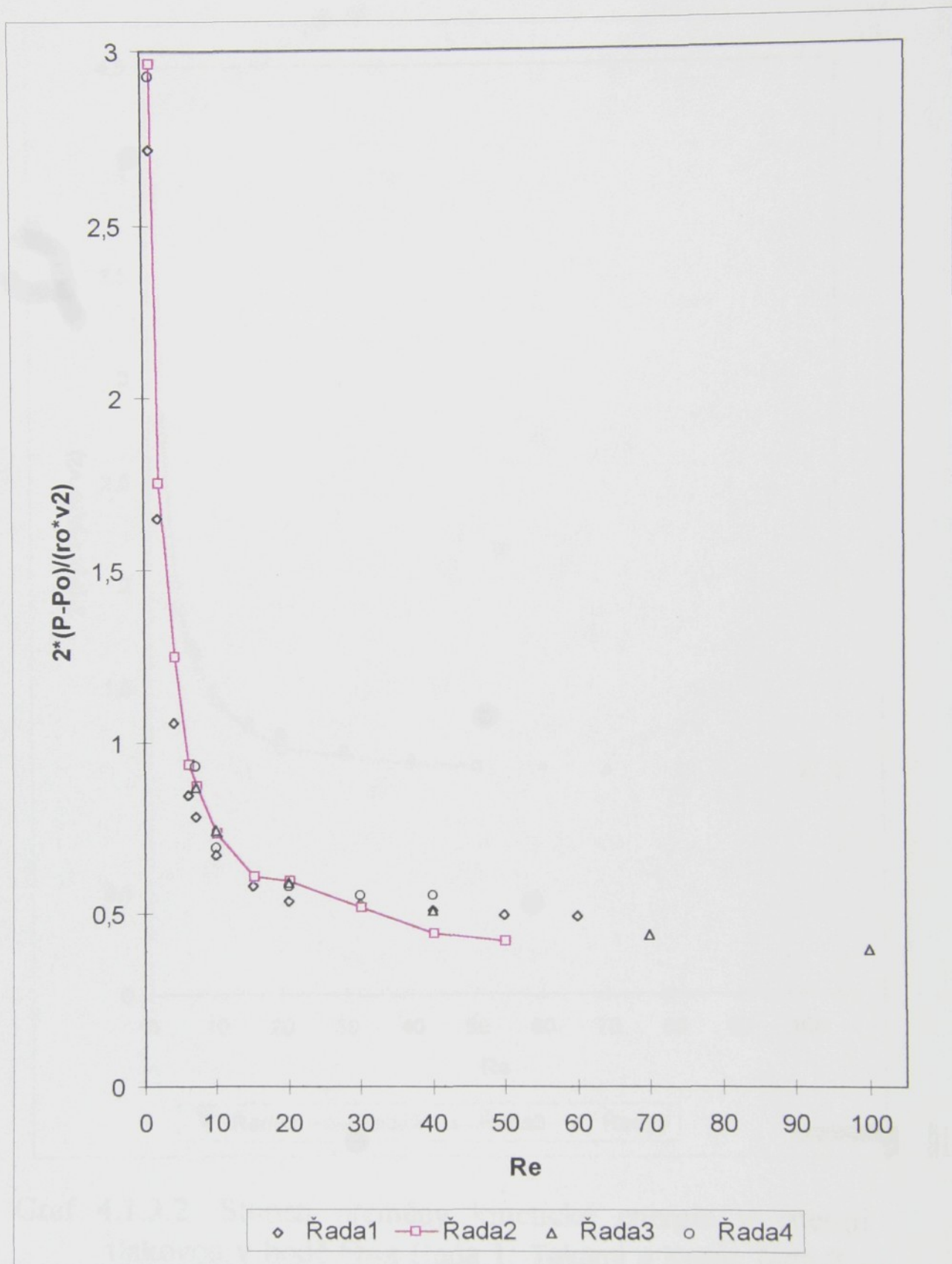
Nieuwstadt a Keller		
Re	$2 \cdot (p_\infty - p_0) / (\rho \cdot u_\infty^2)$	$2 \cdot (p_\pi - p_\infty) / (\rho \cdot u_\infty^2)$
1	2,9280	3,730
7	0,9316	1,595
10	0,6921	1,501
20	0,5817	1,274
30	0,5556	1,176
40	0,5535	1,117

Tab. 4.1.3.3.: Hodnoty získané Takami a Kellerem

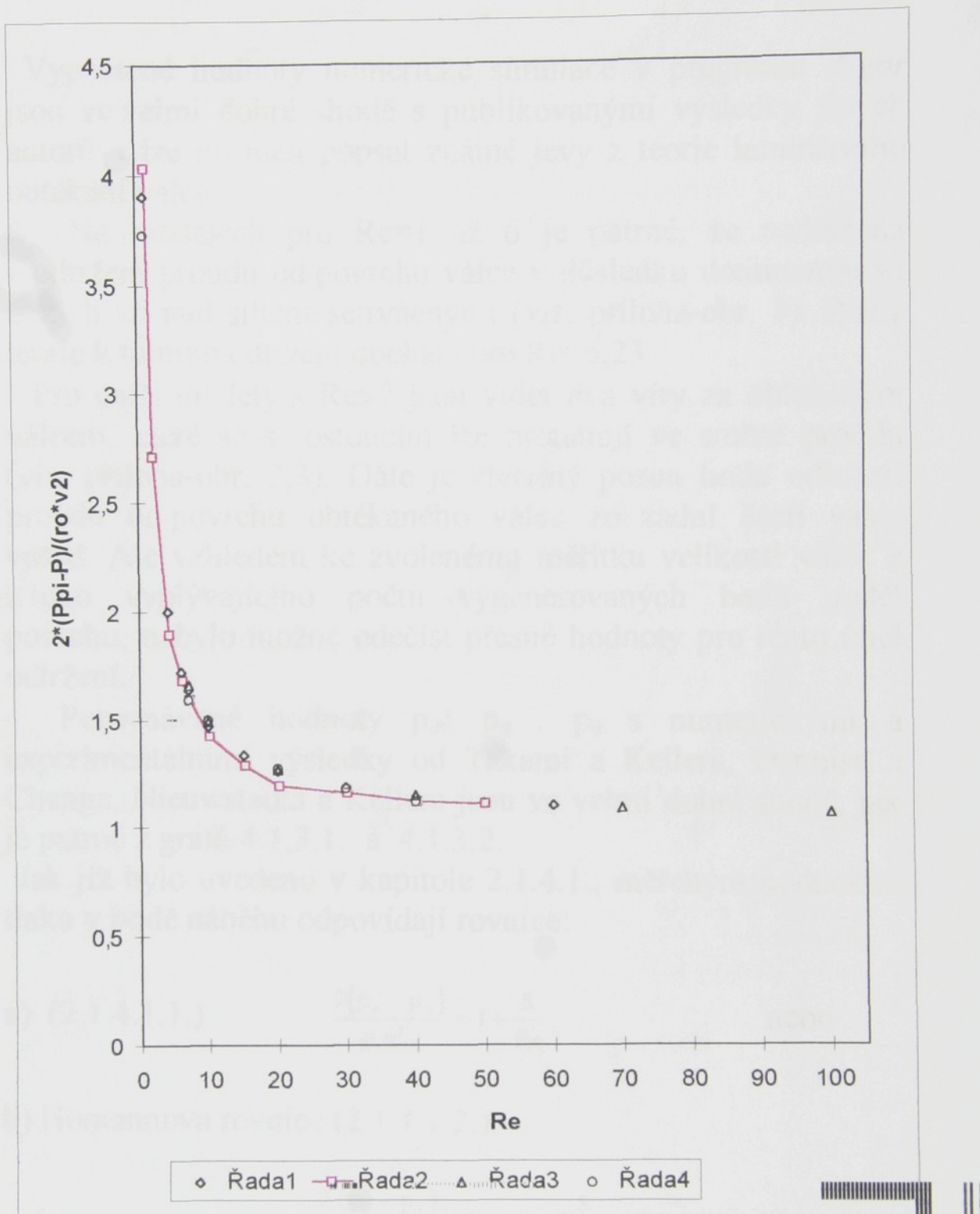
Takami a Keller		
Re	$2^*(p_{\infty}-p_0)/(\rho \cdot u_{\infty}^2)$	$2 \cdot (p_{\pi}-p_{\infty})/(\rho \cdot u_{\infty}^2)$
1	2,719	3,905
2	1,652	2,715
4	1,057	2,003
6	0,848	1,723
7	0,783	1,637
10	0,670	1,474
15	0,582	1,336
20	0,537	1,261
30	0,53	1,184
40	0,512	1,141
50	0,499	1,114
60	0,491	1,096

Tab. 4.1.3.4.: Hodnoty získané Dennisem a Changem

Dennis a Chang		
Re	$2^*(p_{\infty}-p_0)/(\rho \cdot u_{\infty}^2)$	$2 \cdot (p_{\pi}-p_{\infty})/(\rho \cdot u_{\infty}^2)$
5	1,044	1,872
7	0,870	1,660
10	0,742	1,489
20	0,589	1,269
40	0,509	1,144
70	0,439	1,085
100	0,393	1,060



Graf 4.1.3.1. Stupeň přeměny kinetické energie v energii tlakovou v bodě $\Theta=0$ (řada 1: Takami a Keller, řada 2: Nový, řada 3: Dennis a Chang, řada 4: Nieuwstadt a Keller)



Graf 4.1.3.2. Stupeň přeměny kinetické energie v energii tlakovou v bodě $\Theta = \pi$ (řada 1: Takami a Keller, řada 2: Nový, řada 3: Dennis a Chang, řada 4: Nieuwstadt a Keller)

Vypočtené hodnoty numerické simulace v programu *Algor* jsou ve velmi dobré shodě s publikovanými výsledky jiných autorů a lze na nich popsat známé jevy z teorie laminárního obtékání válce.

Na modelech pro $Re=1$ až 6 je patrné, že nedochází k odtržení proudu od povrchu válce v důsledku dominantnosti třecích sil nad silami setrvačnými (viz. příloha-obr. 1). Podle teorie k tomuto odtržení dochází pro $Re=6,23$.

Pro další modely s $Re>7$ jsou vidět dva víry za obtékaným válcem, které se s rostoucím Re protahují ve směru proudu (viz. příloha-obr. 2,3). Dále je zřetelný posun bodu odtržení proudu od povrchu obtékaného válce ze zadní části válce vpřed. Ale vzhledem ke zvolenému měřítku velikosti válce a z toho vyplývajícího počtu vygenerovaných bodů podél povrchu, nebylo možné odečíst přesné hodnoty pro tento úhel odtržení.

Porovnáváné hodnoty p_∞ , p_π , p_0 s numerickými a experimentálními výsledky od Takami a Kellera, Dennise a Changa, Nieuwstadta a Kellera jsou ve velmi dobré shodě, jak je patrné z grafů 4.1.3.1. a 4.1.3.2.

Jak již bylo uvedeno v kapitole 2.1.4.1., měřeným hodnotám tlaku v bodě náběhu odpovídají rovnice:

$$a) (2.1.4.1.1.) \quad \frac{2(p_\pi - p_\infty)}{\rho \cdot u_\infty^2} = 1 + \frac{8}{Re} \quad \text{nebo}$$

b) Homannova rovnice (2.1.4.1.2.):

$$\frac{2 \cdot (p_\pi - p_\infty)}{\rho \cdot u_\infty^2} = 1 + \frac{8}{Re + 0,646\sqrt{Re}}$$

Tyto rovnice však neplatí pro nízká Re ($Re < 60$), kde se dosahuje nižších hodnot (viz. tabulka 4.3.1.).

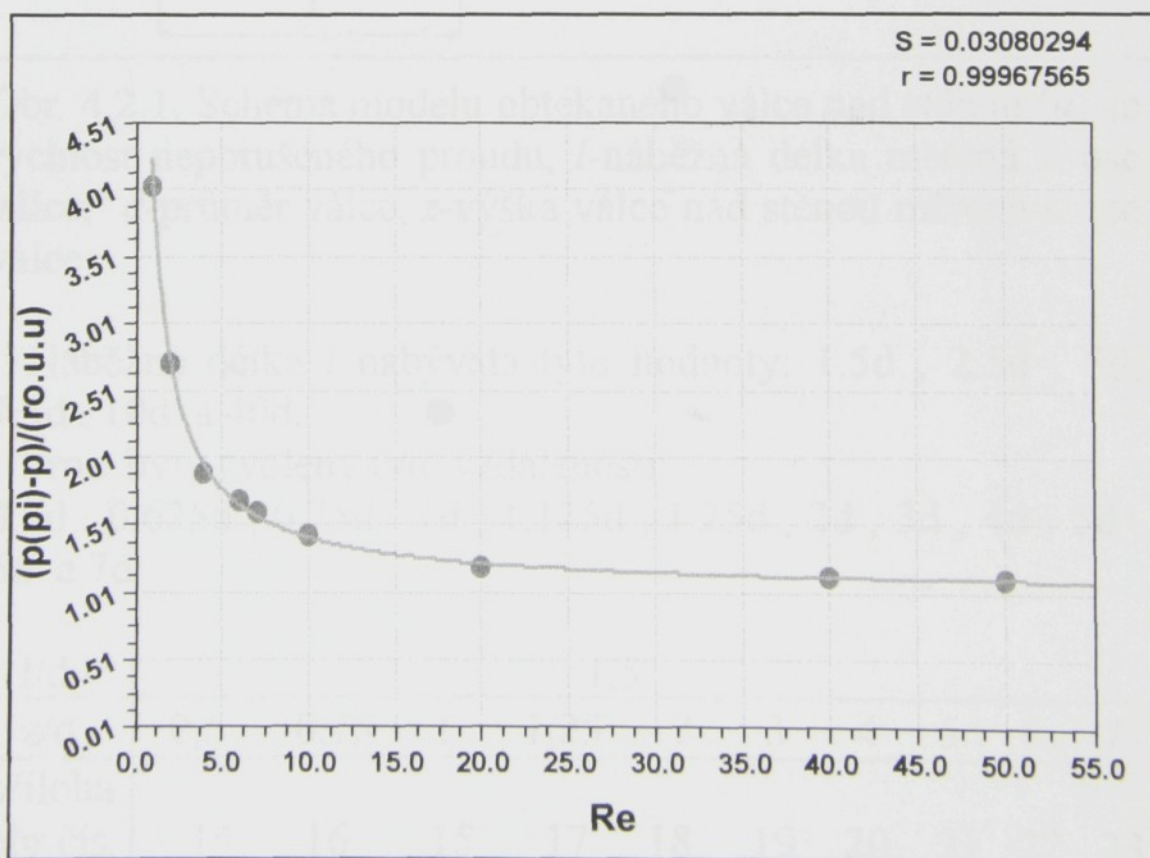
Z výsledků numerické simulace užitím programu *Algor* byl autorem odvozen tento následující tvar rovnice pro tlak v bodě náběhu ($Re=1$ až 50):

$$\frac{2(p_{\pi} - p_{\infty})}{\rho \cdot u^2} = 10,936 - 9,924 \exp(-0,363 \cdot Re^{-0,945}) \quad (4.1.3.)$$

Tab. 4.1.3.: Hodnoty $2.(p_0 - p_{\infty})/(\rho.u^2)$ v závislosti na Re pro rovnici 2.4.1.1., odvozenou rovnici 4.1.3. a hodnoty získané numerickou simulací v *Algoru*.

Re	$2.(p_{\pi} - p_{\infty})/(\rho.u^2)$		
	rovnice odpovídající $Re > 100$	rovnice odvozená	numericky simulované hodnoty
1	9,0	4,033	4,035
2	5,0	2,717	2,711
4	3,0	1,938	1,894
6	2,33	1,653	1,684
7	2,14	1,569	1,593
10	1,80	1,413	1,427
20	1,40	1,222	1,190
40	1,20	1,121	1,120
60	1,16	1,101	1,103

Graf 4.1.3.3.: Stupeň přeměny kinetické energie na energii tlakovou

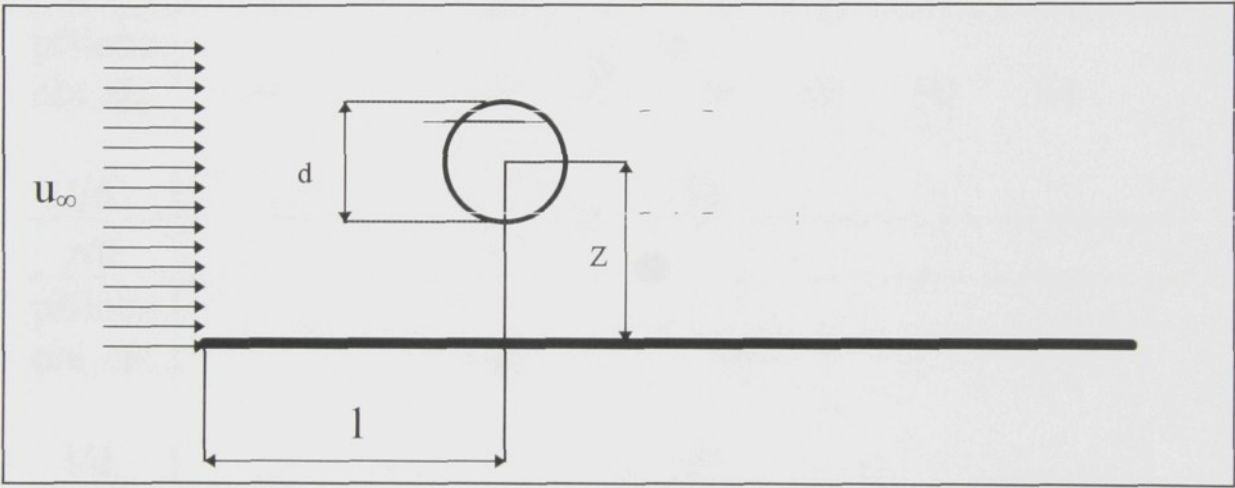


4.2. Numerická simulace obtékání válce s vlivem na mezní vrstvu na stěně

Na 72 vytvořených modelech v programu *Algor* byl pozorován vliv mezní vrstvy na rozložení rychlostí v proudovém poli a na povrchu obtékaného válce a na velikosti tlaku v bodě náběhu na válci.

4.2.1. Vytvořené modely

V *Superdraw* bylo vytvořeno 72 variant proudění podél válce nad stěnou. Šesti různým délkám náběhu l přísluší 12 modelů s proměnnou vzdáleností osy válce z nad stěnou.



Obr. 4.2.1. Schéma modelu obtékaného válce nad stěnou (u_∞ je rychlost neporušeného proudu, l -náběžná délka měřená k ose válce, d -průměr válce, z -výška válce nad stěnou měřená k ose válce).

Náběžná délka l nabývala tyto hodnoty: $1.5d$, $2.5d$, $5d$, $7.5d$, $10d$ a $40d$.

Pro z byly zvoleny tyto vzdálenosti:
 $0.5d$, $0.625d$, $0.75d$, $1d$, $1.125d$, $1.25d$, $2d$, $3d$, $4d$, $5d$, $6d$ a $7d$

l/d	1,5									
z/d	0,5	0,75	1	1,25	2	3	4	5	6	7
příloha										
obr. čís.	14	16	15	17	18	19	20	21	22	23

l/d	2,5									
z/d	0,5	0,75	1	1,25	2	3	4	5	6	7
příloha obr.čís.	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

l/d	5									
z/d	0,5	0,75	1	1,25	2	3	4	5	6	7
příloha obr.čís.	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43

l/d	7,5									
z/d	0,5	1	2	3	4	5	6	7		
příloha obr.čís.	44	45	46	47	48	49	50	51		

l/d	10									
z/d			4		5					
příloha obr.čís.			52		53					

l/d	40									
z/d	0,5	1	2	3	4	5	6	7		
příloha obr.čís.	54	55	56	57	58	59	60	61		

4.2.2. Zadané podmínky v Decoderu

V decodéru byly zadány tyto podmínky:

Hustota: $\rho=1$

Dynamická viskozita: $\mu=0,02$

Počet iteračních kroků: 15

Integrátor: zpětná difference: $\nu=1$

Eulerův parametr: $\alpha=1$ (stacionární stav)

Acceleration multiplier: 0 (stacionární stav)

Počet kroků mezi-výstupem postprocessingu: 1

-výstupem tisku : 1

Automatická kontrola konvergence

Konvergenční kritéria - pro reziduum: $1e-6$
 - pro přesun : $1e-6$
 -reziduální norma

Dynamická viskozita $\mu=0,02$ a hustota $\rho=1$ napovídají tomu, že se nejedná o skutečnou tekutinu. Pro výpočet proudění je však rozhodující hodnota Re . Pro kontrolu bylo numericky nasimulováno několik modelů pro $Re = 10$ s proměnnými hodnotami μ , ρ , u_∞ , které se lišily pouze v řádu (viz. obr. 4.2.2.1. str.37, obr. 4.2.2.2. str.38. a příloha obr.23). Výsledky byly porovnány a potvrdily výše uvedený předpoklad. Charakter proudění byl ve všech modelech shodný. Rozdíl byl pouze ve velikosti rychlosti na vstupu a z toho vyplývající řádová odlišnost velikosti rychlostí v proudovém poli. Pro řádově nižší hodnoty μ a ρ však musela být zvýšena zadávaná přesnost výpočtu (konvergenční kritérium) z 10^{-10} na 10^{-20} , jinak bylo dosaženo reálného, avšak fyzikálně nesmyslného výsledku.(viz. obr. 4.2.2.3. str.39) Tím se několikanásobně prodloužila doba výpočtu.. Z tohoto důvodu byly vybrány optimální hodnoty μ , ρ , u_∞ , s kterými byly modely počítány.

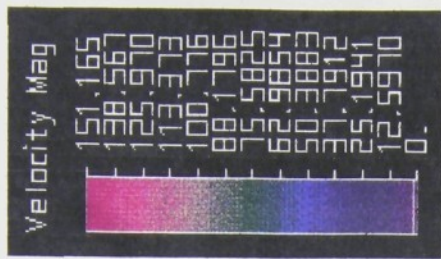
4.2.3. Vliv náběžné délky a vzdálenosti osy válce od stěny na tlak v bodě náběhu

Hodnoty získané num. simulací jsou v následující tabulce:

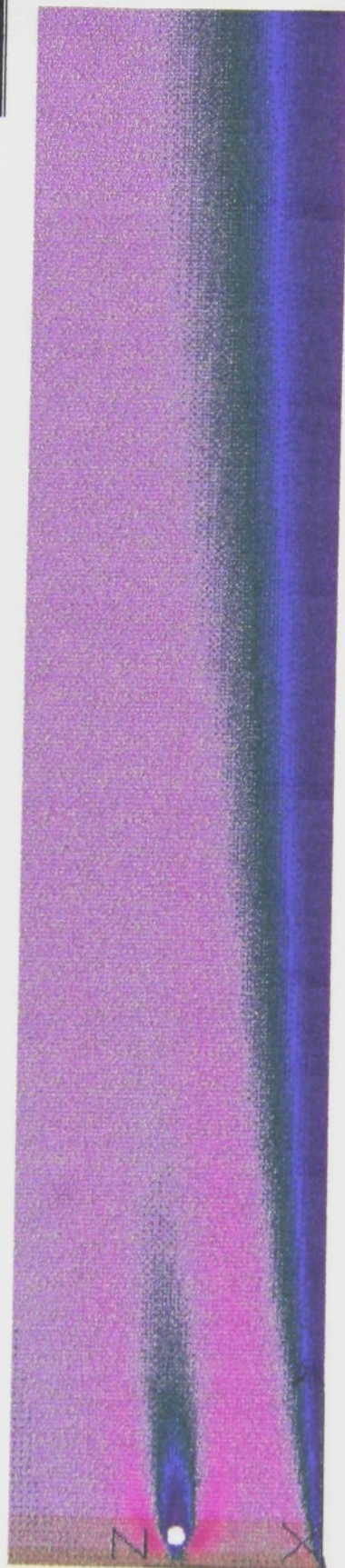
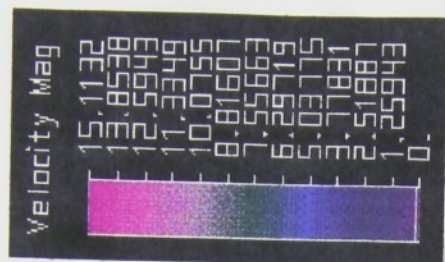
z / d	p / p_∞					
	$l=1,5d$	$l=2,5d$	$l=5d$	$l=7,5d$	$l=10d$	$l=40d$
0,5	1,0343	1,0148	1,00502	1,00315	1,00215	1,000513
0,625	1,0443	1,0162	1,00572	1,00351	1,00221	1,000547
0,75	1,0510	1,0176	1,00642	1,00396	1,00238	1,000607
1	1,0484	1,0229	1,00832	1,00582	1,00335	1,00071
1,125	1,0437	1,0244	1,00919	1,0065	1,00363	1,00098
1,25	1,0393	1,0246	1,00993	1,00731	1,00415	1,00115
2	1,0244	1,0191	1,01390	1,00971	1,00731	1,00148
3	1,0209	1,0155	1,01230	1,01148	1,01057	1,00243
4	1,0199	1,0138	1,01154	1,01107	1,0105	1,00363
5	1,0196	1,0137	1,01070	1,01037	1,00936	1,00540
6	1,0192	1,0133	1,01020	1,00973	1,00898	1,00667
7	1,0190	1,0126	1,00978	1,00894	1,0079	1,00764

Tab. 4.2.3.: Závislost tlaku v bodě náběhu na náběžné délce a vzdálenosti osy válce od stěny

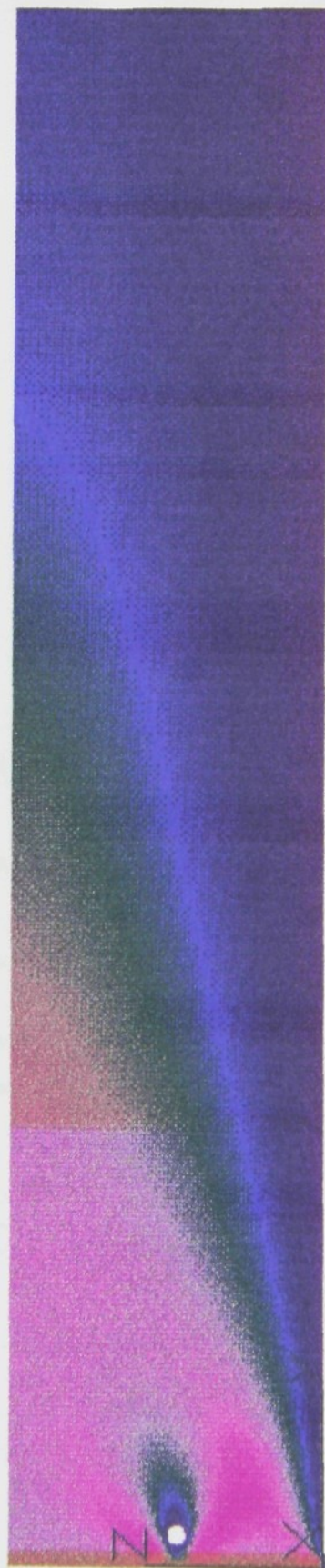
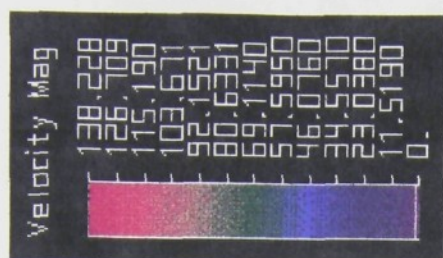
Obr. 4.2.2.1. Obtékání válce- $Re=10$, $u_\infty=100$, $\rho=0,0001$, $\mu=0,002$
konvergenční kritérium pro reziduum : 10^{-20}



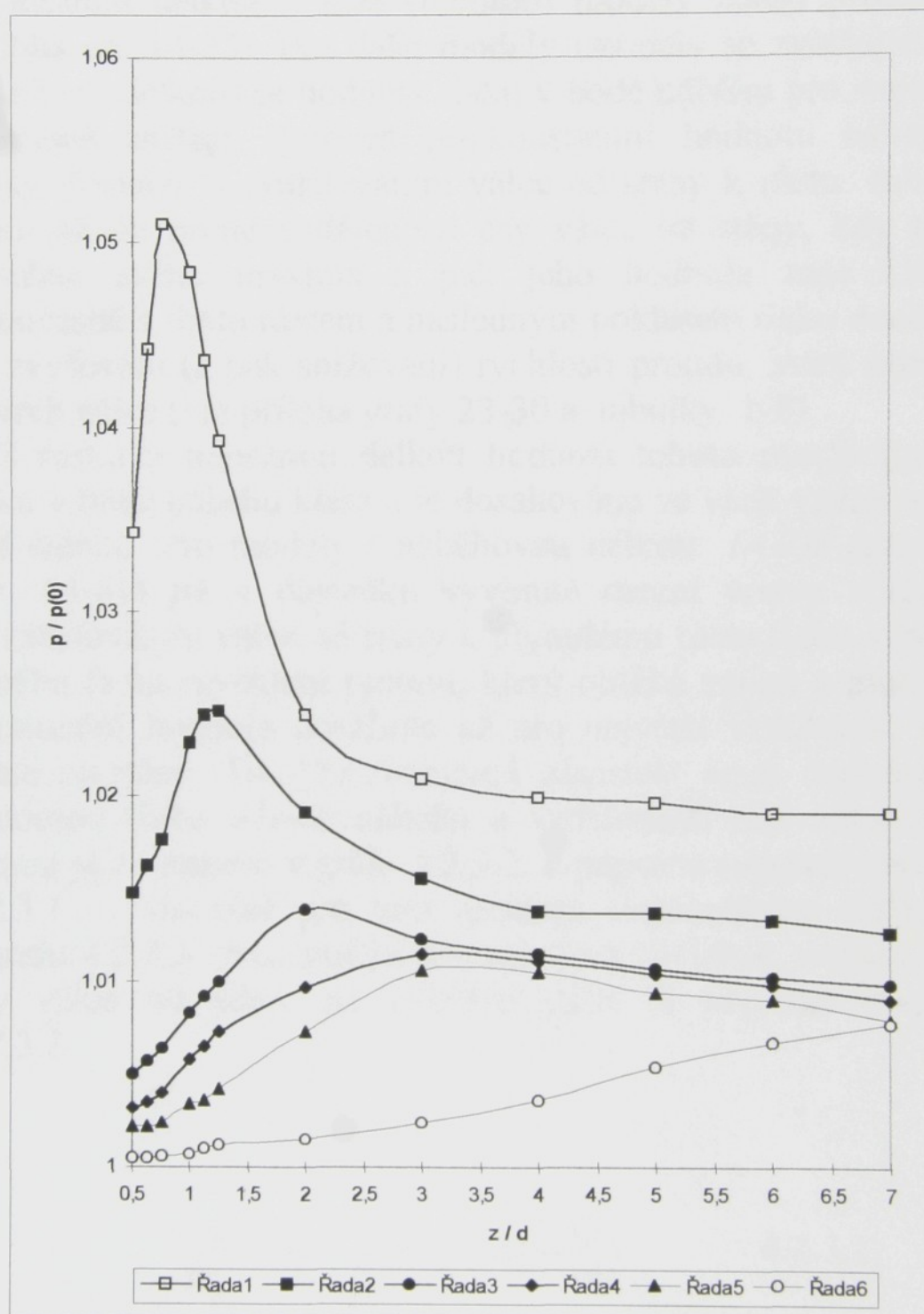
Obr. 4.2.2.2. Obtékání válce- $Re=10$, $u_\infty=10$, $\rho=0,001$, $\mu=0,002$
konvergenční kritérium pro reziduum : 10^{-20}



Obr. 4.2.2.3. Obtékání válce- $Re=10^3$, $u_\infty=10$, $\rho=0,0001$, $\mu=0,002$
konvergenční kritérium pro reziduum : 10^{-10}



Tyto hodnoty byly zakresleny do grafu 4.2.3.1. Každé náběžné délce l odpovídá jedna křivka s nezávisle proměnou z/d a závisle proměnou p/p_∞ . ($p_\infty \equiv p(0)$)



Graf 4.2.3.1.: Závislost tlaku v bodě náběhu na náběžné délce l a vzdálenosti osy válce z od stěny (řada 1: $l=1,5d$, řada 2: $l=2,5d$, řada 3: $l=5d$, řada 4: $l=7,5d$, řada 5: $l=10d$, řada 6: $l=40d$).

Největší hodnoty tlaku v bodě náběhu jsou pro modely s náběžnou délkou $l=1.5d$ (nejbližší modely zdroji proudu - příloha obr.14-23). Pro další modely (modely se zvětšující se náběžnou délkou) se hodnoty tlaku v bodě náběhu pro stejná z postupně snižují. Zároveň pro konstantní hodnotu náběžné délky dochází s oddalováním válce od stěny k růstu tohoto tlaku až do určité vzdálenosti osy válce od stěny, kdy tlak dosáhne svého maxima a pak jeho hodnota zase klesá.

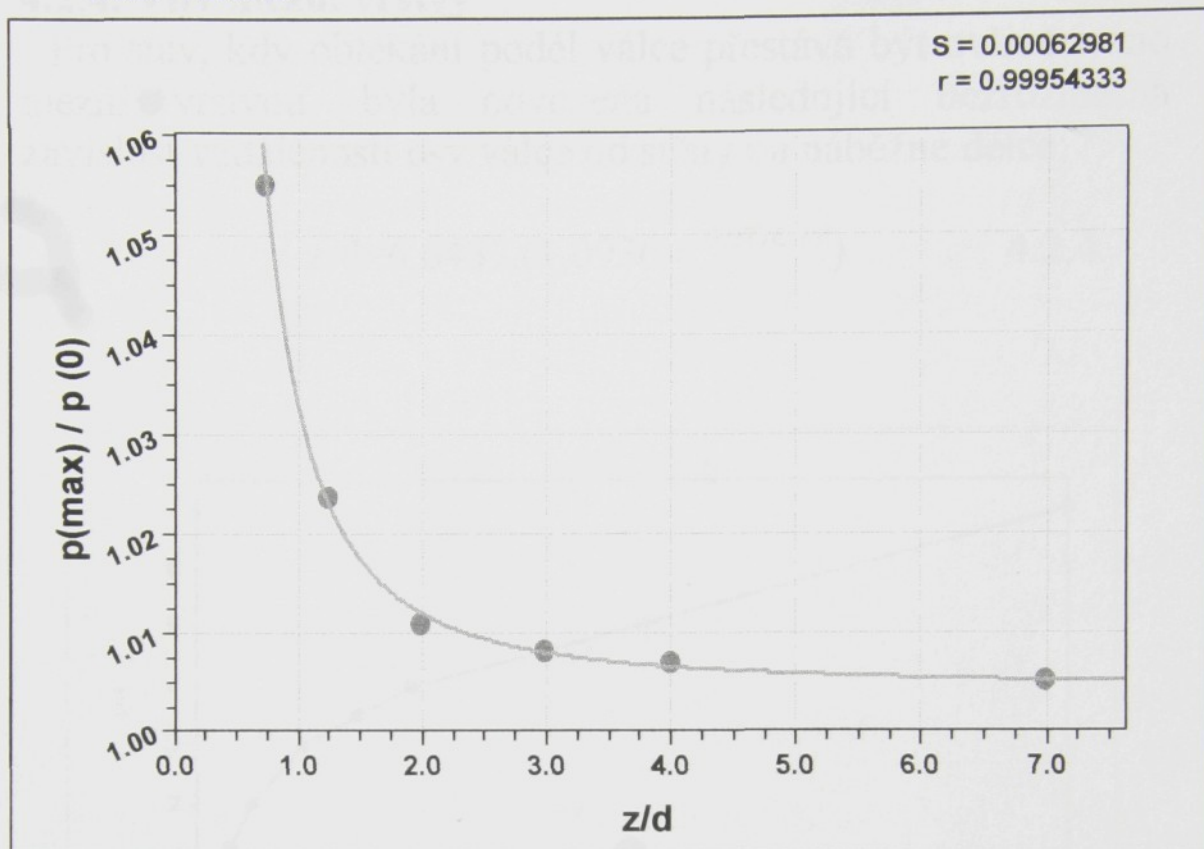
Současně s tímto růstem a následným poklesem tlaku dochází ke zvyšování (a pak snižování) rychlosti proudu, který obtéká povrch válce (viz příloha grafy 23-30 a tabulky 1-8).

S rostoucí náběžnou délkou hodnota tohoto maximálního tlaku v bodě náběhu klesá a je dosahována ve větší vzdálenosti nad stěnou. Pro modely s náběhovou délkou $l=40d$ (příloha obr. 54-61) již v důsledku vyvinuté mezní vrstvy dochází se vzdalováním válce od stěny k plynulému růstu tlaku v bodě náběhu (a ke zrychlení proudu, který obtéká válec) a proto je maximální hodnota dosažena až pro největší vzdálenost osy válce od stěny. Tato bezrozměrná závislost mezi maximální hodnotou tlaku v bodě náběhu a vzdáleností osy válce nad stěnou je zobrazena v grafu 4.2.3.2. a popsána regresní rovnicí 4.2.3.1. . Současně pro tuto hodnotu maximálního tlaku je v grafu 4.2.3.3. znázorněna bezrozměrná závislost vzdálenosti osy válce od stěny na náběžné délce a popsána rovnicí 4.2.3.2.:

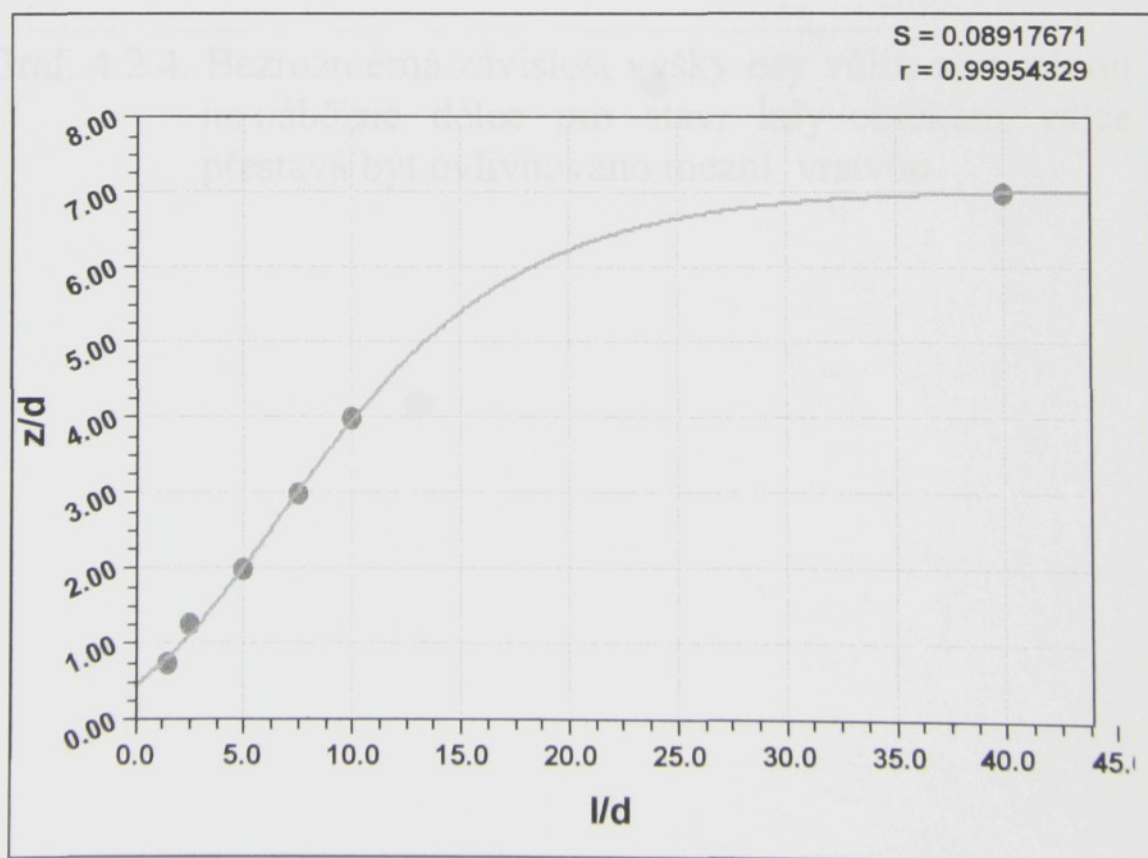
$$\frac{p_{MAX}}{p_{\infty}} = 1,009 - 4,293 \cdot \frac{z}{d} + 0,0234 \cdot \left(\frac{z}{d}\right)^{-2} \quad 4.2.3.1.$$

$$\frac{z}{d} = 7,04 \cdot \exp\left(-e^{-0,991 - 0,155 \cdot \frac{1}{d}}\right) \quad 4.2.3.2.$$

Graf 4.2.3.2



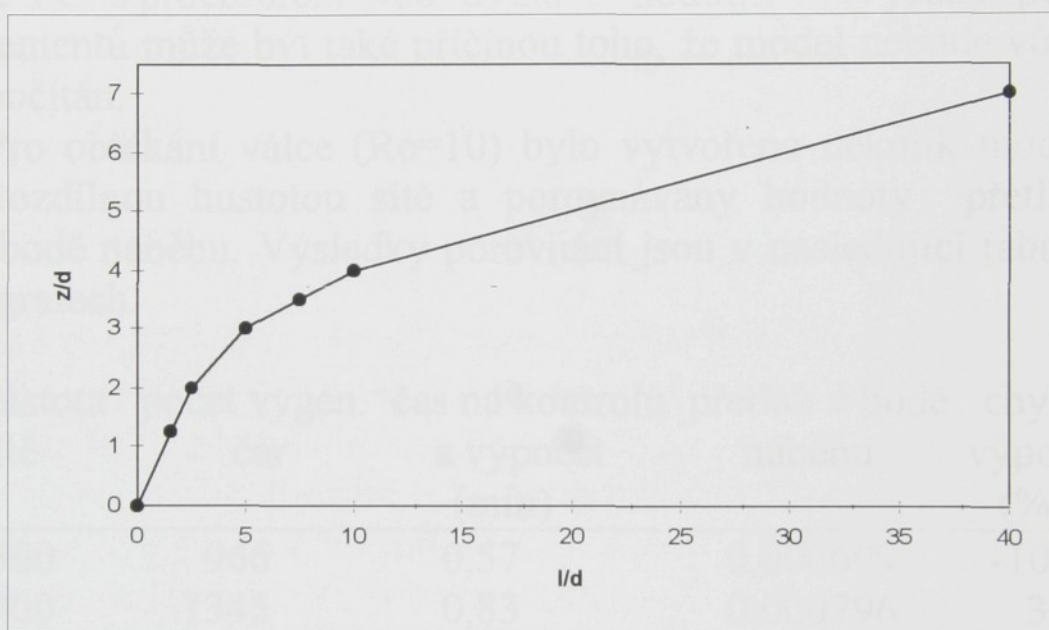
Graf 4.2.3.3. Bezrozměrná závislost vzdálenosti osy válce od stěny na náběžné délce při dosažení p_{MAX} .



4.2.4. Vliv mezní vrstvy

Pro stav, kdy obtékání podél válce přestává být ovlivňováno mezní vrstvou, byla odvozena následující bezrozměrná závislost vzdálenosti osy válce od stěny na náběžné délce:

$$z/d = 6,6437 \cdot (1,0936 \cdot e^{-0,0776 \cdot l/d}) \quad 4.2.4.$$



Graf. 4.2.4. Bezrozměrná závislost výšky osy válce nad stěnou na náběžné délce pro stav, kdy obtékání válce přestává být ovlivňováno mezní vrstvou

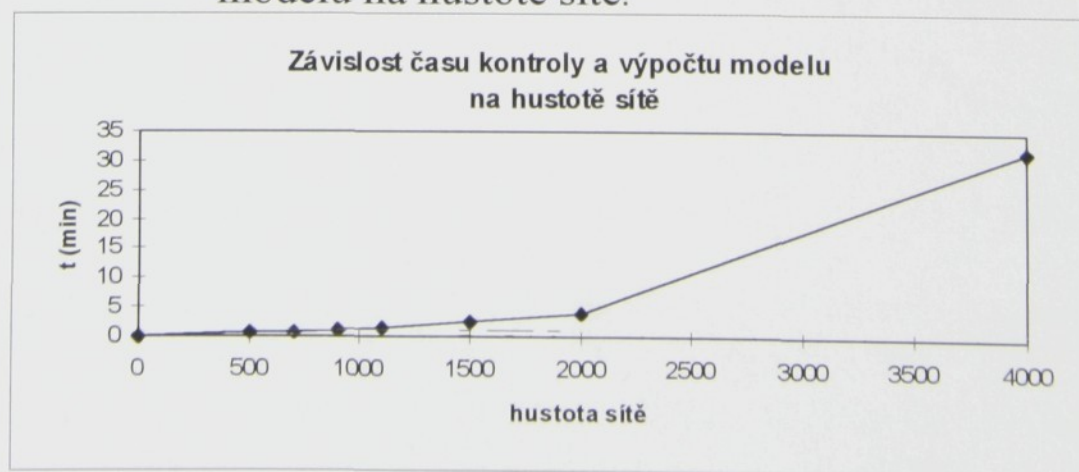
4.3. Vliv hustoty sítě na přesnost výsledků

Při generaci je výhodné vytvořit síť s optimálním počtem elementů, protože nadměrně hustá síť i při použití nejlepší dostupné výpočetní techniky několikanásobně prodlužuje dobu práce decoderu (tzn. kontrolu geometrie) i samotný výpočet. Např. kontrola geometrie dvourozměrného modelu, který měl 2000 čar, na počítači *PENTIUM-S CPU* s taktovací frekvencí 66 MHz, 16MB operační paměť, trvala přibližně minutu. Kontrola 10 000 čar trvala již 25 minut. Kontrola 16 000 čar na PC s procesorem 486 trvala 5 hodin!!! Vysoký počet elementů může být také příčinou toho, že model nebude vůbec spočítán.

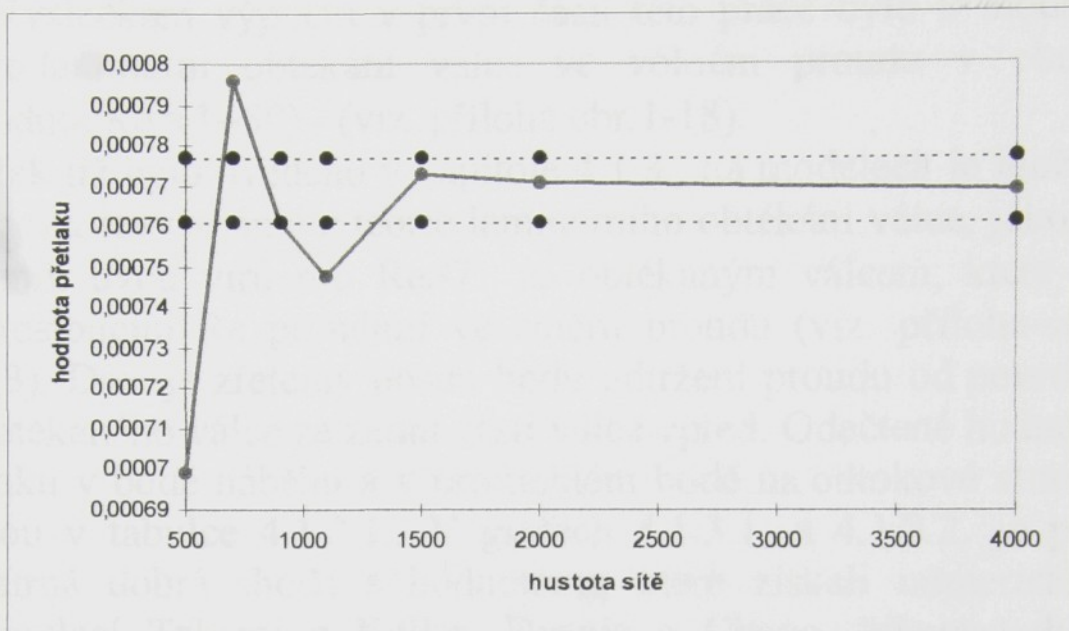
Pro obtékání válce ($Re=10$) bylo vytvořeno několik modelů s rozdílnou hustotou sítě a porovnávány hodnoty přetlaku v bodě náběhu. Výsledky porovnání jsou v následující tabulce a grafech.

hustota sítě	počet vygen. čar	čas na kontrolu a výpočet (min)	přetlak v bodě náběhu	chyba výpočtu (%)
500	966	0,57	0,000699	-10,0
700	1345	0,83	0,000796	3,39
900	1694	1,15	0,000761	-1,05
1100	2095	1,51	0,000748	-2,81
1500	2876	2,46	0,000773	0,51
2000	3774	3,93	0,000771	0,26
4000	7597	31,62	0,000769	0

Graf 4.3.1.: Závislost času potřebného ke kontrole a výpočtu modelu na hustotě sítě.



Graf 4.3.2.: Závislost hodnoty přetlaku na hustotě vygenerované sítě



Jako nejpřesnější byla uvažována hodnota pro největší hustotu sítě (tj. pro 4000). Budeme-li pak tolerovat chybu výsledku $\pm 1\%$, je z předešlého grafu patrné, že spolehlivý výsledek získáme již pro hustotu vygenerované sítě 1500. Tím se nám doba potřebná na kontrolu modelu a jeho výpočet zkrátí z 30-ti minut na necelé tři minuty (tzn. 10x rychlejší kontrola a výpočet modelu).

Z uvedeného příkladu vyplývá, že není nutné zadávat příliš velké hustoty modelu. Bývá postačující, když se síť zjemní tam, kde předpokládáme změnu směru a rychlosti proudu (tj. kolem obtékaných těles, podél dlouhých stěn, v místech náhlého rozšíření či zúžení a podobně). Ale všeobecný návod na to, jak hustou síť vytvořit a kde je nutné síť zjemnit, neexistuje.

5. ZÁVĚR

Výsledkem výpočtů v první části této práce bylo 9 modelů pro laminární obtékání válce ve volném proudu v oboru hodnot $Re=(1\div 50)$ - (viz. příloha obr.1-18).

Jak již bylo uvedeno v kapitole 4.1.3., na modelech je možné popsat jevy známé z teorie laminárního obtékání válce, jako je vznik dvou vírů pro $Re>7$ za obtékaným válcem, které se s rostoucím Re protahují ve směru proudu (viz. příloha-obr. 2,3). Dále je zřetelný posun bodu odtržení proudu od povrchu obtékaného válce ze zadní části válce vpřed. Odečtené hodnoty tlaku v bodě náběhu a v protilehlém bodě na odtokové straně, jsou v tabulce 4.1.3.1.. V grafech 4.1.3.1. a 4.1.3.2. je pak patrná dobrá shoda s hodnotami, které získali numerickou simulací Takami a Keller, Dennis a Chang, Nieuwstadt a Keller. Tím se potvrdila schopnost této verze *Algoru* analyzovat úlohy nestlačitelných tekutin při nízkých vstupních rychlostech s uspokojivou přesností.

Z hodnot získaných numerickou simulací (tlak v bodě náběhu) byla odvozena rovnice 4.1.3. pro stupeň přeměny kinetické energie v tlakovou v oboru platném pro $Re=1$ až 50.

V druhé části práce byly vytvořeny modely obtékaného válce umístěného nad stěnou pro $Re=10$. Byla měněna vzdálenost válce od stěny a jeho vzdálenost od zdroje proudu tzv.náběhová délka (viz. příloha obr. 14-61). Byly sledovány tlaky v bodě náběhu (viz. tabulka 4.2.3. a graf 4.2.3.1.) a hodnoty rychlostí nad povrchem válce (příloha tab.1-8 a grafy 23-30). Pro každou náběžnou délku lze nalézt jednu vzdálenost osy válce od stěny, pro kterou tlak v bodě náběhu dosáhne maximální hodnoty. Pro závislost tohoto tlaku na vzdálenosti osy válce od stěny byla odvozena bezrozměrná rovnice 4.2.3.1. (graf 4.2.3.2.). Dále pak byla popsána bezrozměrná závislost vzdálenosti osy válce od stěny na náběžné délce proudu příslušející právě tomuto maximálnímu tlaku rovnicí 4.2.3.2. (graf 4.2.3.3.).

Pro stav, kdy obtékání válce přestává být ovlivňováno mezní vrstvou, byla odvozena rovnice 4.2.4. (graf 4.2.4.) Z této rovnice vyplývá, že pro efektivní obtékání válce je nutno volit

vzdálenost osy válce od stěny větší než je vypočtená tloušťka mezní vrstvy. Je to způsobeno zvětšením tloušťky mezní vrstvy vlivem úplavu za tímto válcem (příloha obr.15, 16, 17, 27, 37, 38, 46, 58, 59).

Numerická simulace se stává velice rozšířenou metodou k popisu dějů při proudění a s rozvojem výpočetní techniky a programového vybavení bude dostávat stále více prostoru. Oproti analogovým vizualizačním a experimentálním metodám má řadu výhod. Numerická simulace nahrazuje experimenty náročné na techniku i čas. Eliminuje neefektivní experimenty a tím snižuje náklady na výzkum. Dále např. vzhledem k snadné změně okrajových a počátečních podmínek lze pro jeden model lehce a rychle vytvořit velké množství alternativ, je možná separace fyzikálních vlivů, které jsou v praxi neoddělitelné. Další výhodou numerické simulace je, že po proběhnutí jednoho výpočtu je podle možností a schopností simulačního programu k dispozici současně celá řada veličin v každém bodě výpočtového pole. Pro simulační program *Algor* to jsou vektory celkových rychlostí a jejich složky, rychlostní a tlaková pole, víry a přesnost výpočtů. Nevýhodou a velkým nebezpečím při vyhodnocování výsledků je výpočet i špatně zadaného modelu (např. nevhodně zvoleného tvaru generované sítě). Výsledky pak mohou být chybné nejen číselně, ale mohou být i fyzikálně nesmyslné (příloha obr.62 a 63).

Pro další pokračování této studie doporučuji s použitím počítače s 128 MB operační paměti a 2 GB HD numerickou simulaci modelů s vyšší hodnotou Re (vyšší vstupní rychlosti) a modelů s přechodovou a turbulentní mezní vrstvou na stěně. Lepší výpočetní technika také umožní vytvořit větší modely, ve kterých bude možno numericky simulovat obtékání většího počtu válců (svazku trubek), případně iteraci svazku trubek se stěnou.

Sez nam použité literatury:

Firemní listy, Algor-Fluid Flow, Pittsburgh 1992

HULIČKA, J.: Příručka pro uživatele demo i ostré verze programu *Algor*-příklad, Liberec 1993

HULIČKA, J.: Chlazení elektrických strojů točivých-ventilace statorových kanálů asynchronních motorů, Diplomová práce, Liberec 1994

CHURCHILLS, W.: Viscous Flows, Boston 1988

MINKOWYCZ, W.J. a kol.: Handbook of Numerical Heat Transfer, Viley-Inter.Publ., New York 1988

SCHLICHTING, H.: Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, New York 1960

SPALDING, D.B.: Heat exchanger theory, fluid mechanics and heat transfer, Hemisphere Publishing Corp. 1983

ŠMID, V.: Teorie proudových strojů, skripta ČVUT, 1990

TESAŘ, V.: Mezní vrstvy a turbulence, Praha 1991

TIETJENS, O.G.: Applied and Aeromechanics, Philadelphia 1951

ŽUKAUSKAS, A.: Heat transfer from tubes in Crossflow. In. Advances in Heat Transfer vol.8. 1972