

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta strojní



Obor: Automatizované systémy řízení ve strojírenství

3902T021

Zaměření: Automatizace inženýrských prací

**IDENTIFIKACE VÍCEROZMĚRNÝCH SOUSTAV
(MIMO SYSTEMS IDENTIFICATION)**

Jan Vydra

Vedoucí diplomové práce: Prof. Ing. Miroslav Olehla, CSc.

Rozsah práce

Počet stran:

Počet příloh:

15.3.2008



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Jméno a příjmení: Jan VYDRA

Studijní program: M2301 Strojní inženýrství

Obor: 3902T021 Automatizované systémy řízení ve strojírenství

Zaměření: Automatizace inženýrských prací

Ve smyslu zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách se Vám určuje diplomová práce na téma:

Identifikace vícerozměrných soustav

Zásady pro vypracování:

(uveďte hlavní cíle diplomové práce doporučené metody pro vypracování)

Seznamte se s metodami identifikace vícerozměrných soustav.

- a) Seznamte se s metodami identifikace vícerozměrných soustav.
- b) Popište matematické modely pro identifikaci vícerozměrných soustav.
- c) Vypracujte program pro výpočet koeficientů zvolených modelů.
- d) Zhodnoťte možnosti identifikace a rozdíl mezi parametrickou a neparametrickou identifikací.

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Strojní fakulta

ANOTACE

Téma diplomové práce: Identifikace vícerozměrných soustav

Obsahem této práce je popis základních metod a modelů pro identifikaci vícerozměrných soustav. Jsou zde popsány metody identifikace přímé, tak i nepřímé. Ukážeme, jak lze získat ze stavového modelu systému jeho vnější model a jak mohou být tyto vztahy přímo odvozeny ze stavového popisu ve tvaru maticových přenosů, či maticových zlomků. Zmíníme i Subspace metody metody pro identifikaci parametrů lineárních stavových modelů z experimentálních dat. V závěru zmíníme známé modely pro rekurzivní identifikační metody, modely typu ARX, ARMAX a OE.

ANNOTATION

Theme of the thesis: Identification of multivariable systems

The content of this work is a description of the basic methods and models to identify the multivariable systems. It describes the direct and indirect identifying methods. Will be demonstrated, how the external model can be obtained from the state model as well as these relationships can be directly derived from the state description in the form of transfer matrix, or matrix fractions. Subspace methods will be mentioned as well. In conclusion, we'll introduce the recursive identification methods ARX, ARMAX and OE..

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Strojní fakulta

Místopřísežné prohlášení

Místopřísežně prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury.

.....
Jan Vydra

V Liberci, dne 1.3.2008

Poděkování

Úvodem mé práce bych rád poděkoval prof. Ing. Miroslavu Olehlovi, který mi pomohl s výběrem téma a přispěl mnoha radami. Dále patří můj dík rodičům, bez jejichž podpory a trpělivosti bych si nemohl představit ani dokončení této práce, ani předcházející studium.

Obsah:

Seznam použitých symbolů	7
1 Úvod	8
1.1 Signály	10
1.2 Systémy	10
1.3 Identifikace	12
1.4 Metody identifikace	12
1.5 Systémy s více vstupy a více výstupy	13
2 Stavová analýza řídicích systémů	14
2.1 Systém a jeho popis ve stavovém prostoru	14
2.2 Diskrétní systémy	18
2.3 Převod stavových rovnic na přenosovou matici	18
2.4 Řešení stavových rovnic	23
2.4.1 Řešení autonomních systémů	23
2.4.2 Řešení neautonomních systémů	25
2.5 Linearizace stavových rovnic	27
2.6 Příklad stavové analýzy systému v prostředí Matlab	28
3 Přímá a nepřímá identifikace vícerozměrných systémů	31
3.1 Přímá identifikace MIMO systémů	31
3.1.1 Součinná metoda	32
3.1.2 Rozdílová metoda	32
3.2 Nepřímá identifikace MIMO systémů	33
3.3 Vlastní čísla	34
3.4 Modální matice	38
4 Vnější popis systému s více vstupy a více výstupy	39
4.1 Popis systému přenosovou maticí	39
4.2 Singulární systém	42
4.3 Popis systému v polynomiálních maticových zlomcích	43
4.4 Polynomiální matice a jejich základní vlastnosti	44
4.5 Polynomiální maticové zlomky	45
5 Subspace metody	50
5.1 Obecný princip subspace metod	50
6 Modely pro identifikaci soustav	52
6.1 Diskrétní identifikace pomocí modelu ARX	52
6.1.1 Metoda nejmenších čtverců	54
6.1.2 ARX model s více vstupy a více výstupy	55
6.1.3 Průběžná identifikace ARX modelu	57
6.2 Diskrétní identifikace pomocí modelu ARMAX	59
6.2.1 ARMAX model s více vstupy a více výstupy	60
6.3 Output error model	60
6.4 Box-Jenkins model	60
7 Závěr	
Příloha 1	61

Seznam použitých zkratk a symbolů

a_i	koeficient levé strany diferenciální rovnice, koeficienty charakteristického polynomu
A	matice systému
b	koeficient pravé strany diferenciální rovnice, polynomu v čitateli přenosu
b	vektor vstupů
B	matice řízení
C	výstupní matice
d	vektor poruchy
D	matice převodu
e	chyba
$g(t)$	váhová funkce
$G(s)$	přenos (L-přenos)
$G(z)$	diskrétní přenos
$g(t)$	impulsní funkce
$h(t)$	přechodová funkce
I	jednotková matice
J	označení kritéria
N	počet souborů měření
s	komplexní proměnná v Laplaceově transformaci
S	plocha, průtočný průřez
t	čas
T	doba realizace náhodného procesu, časová konstanta
$u(t)$	vstupní vektor
$U(s)$	Laplaceův obraz vstupního vektoru
$x(t)$	stavový vektor
$y(t)$	výstupní vektor
$Y(s)$	Laplaceův obraz výstupního vektoru
$\Phi(s)$	Matice přechodových funkcí

1 Úvod

Identifikace soustav se zabývá zjišťováním vlastností těchto soustav. Výsledkem identifikace bývají statické a dynamické charakteristiky soustav, matematický nebo logický popis chování soustav za daných podmínek. Na základě výsledků identifikace je možno stanovit fyzikální nebo matematický model soustav a celých technologických zařízení a řešit potřebné problémy mimo vlastní zařízení. Výhodou je pak možnost vyzkoušet všechny varianty procesu bez nákladného a riskantního experimentování na konkrétním zařízení a vybrat z hlediska technického a ekonomického nejvýhodnější variantu řešení nebo optimálního řízení. Určení chování systému na základě výpočtu a konstrukčních dat nebývá pro účely optimalizace dostatečně přesné, a proto je nutné zjistit vlastnosti soustavy přesněji identifikací.

Identifikace má obsahovou příbuznost se simulací. Při simulaci často vycházíme z formálního systému, získaného analýzou. S tímto systémem potom experimentujeme, abychom prozkoumali jeho vlastnosti za různých podmínek okolí. Naproti tomu při identifikaci řešíme úlohu definovat systém, tzn. vytvořit model.

K problému lze přistupovat dvěma způsoby:

- analyticky, fyzikálně-matematickou analýzou objektu,
- experimentálně, na základě experimentálně získaných údajů z procesu.

Při analytickém řešení reálných procesů vycházíme pro sestavení jejich matematického popisu ze známých fyzikálních a chemických zákonů. Pro složité objekty je však použití této metody obtížné a vhodnější je určení modelu experimentálně. Při použití experimentální identifikace narážíme často na problémy jejichž překonání vyžaduje zavedení řady předpokladů. Tyto předpoklady řešení lze zavést jen na základě znalostí o zkoumání procesu – tzn. apriorních znalostí, získaných analýzou zkoumaného procesu.

K základním metodickým problémům identifikace patří klasifikace objektů z hlediska identifikace a klasifikace identifikačních metod z hlediska jejich aplikovatelnosti za daných podmínek, volba a vytvoření identifikačních metod, a plánování experimentu, tj.

- volba a generování testovacích signálů
- určení intervalu vzorkování a kvantování signálů
- volba optimálního počtu testovacích vzorků
- vymezení platnosti modelu

V této práci se budeme věnovat experimentální identifikaci. Tento způsob předpokládá provozní měření vstupů a výstupů objektu. Získaných měření pak využíváme k určení matematického modelu, tj. pro způsob matematického vyjádření závislosti vstupního a výstupního signálu. Tuto závislost lze pak vyjádřit například ve tvaru impulsní nebo přechodové charakteristiky, diferenční rovnice, diferenciální rovnice nebo přenosu.

Experimentální metody dělíme do dvou skupin:

- deterministické,
- statistické

Deterministické metody zanedbávají vliv poruchových signálů. K výpočtu např. impulsní charakteristiky či diferenční rovnice se využívá jen toliká údajů o vstupu a výstupu, kolik je hledaných parametrů.

Jestliže lze chování systému úplně popsat jako množinu usprádaných dvojic příčin a následků tzn. jestliže určité příčině odpovídá vždy stejný následek, považujeme takový systém za deterministický. U deterministického systému je příčina podmínkou nutnou i postačující k určení následku. Příkladem je první Newtonův zákon, kdy jestliže působí síla (příčina), pohyb hmotného bodu se zrychluje (následek), a naopak jestliže se pohyb hmotného bodu zrychluje, musí na něj působit nějaká síla.

Statistické umožňují kvalitativní zhodnocení chyb podle statistických hledisek. Při statistickém přístupu chápeme parametry například přenosu nebo souřadnice například impulsní charakteristiky, jako neznámé konstanty a úkolem je nalézt jejich odhady. V případě, že se projevuje vliv náhodných veličin, provádí se identifikace buď off-line (dávkově), nebo on-line (průběžně). V prvním případě jsou v průběhu identifikačního experimentu data nejdříve zaznamenána a uchována na vhodném nosiči. Následně jsou vyhodnocena a poté jsou stanoveny parametry modelu. Při on-line identifikaci můžeme získat parametry modelu bezprostředně po měření, v reálném čase..

1.1 Signály

Důležitou součástí identifikace je volba a generování vhodných testovacích signálu. Tyto signály mohou být deterministické, stochastické nebo tzv. pseudonáhodné. Deterministické signály lze analyticky popsat a patří mezi ně skoková změna, rampový signál, impuls, obdélníkový harmonický signál atd.

Stochastické signály jsou charakteristické tím, že jsou analyticky nepopsatelné. Každá taková realizace je náhodná a neopakovatelná. Klasickým představitelem tohoto druhu signálu je bílý šum. Pseudonáhodné signály lze popsat jako náhodné signály, jejichž vlastnosti mohou být za daných podmínek stejné jako u stochastických signálu, ale jsou získané deterministickým způsobem a jsou tedy opakovatelné.

1.2 Systémy

Systém je fyzikální soustava, na níž sledujeme soubor veličin (např. teplota, poloha, rychlost, koncentrace, atd.) Bez ohledu na rozdílnou fyzikální povahu reálných systémů je možné analyzovat a matematicky s nimi pracovat jednotným způsobem. U systémů se definují tři skupiny veličin:

- sledované veličiny = výstupní veličiny (označené y)
- působící veličiny = vstupní (řídící) veličiny (označené u)
- vnitřní veličiny, které nemusí být měřitelné, ale jejich hodnoty jednoznačně odpovídají stavu systému = stavové veličiny (označené x)

Stav dynamického systému se může měnit v čase, i když hodnoty vstupů zůstávají konstantní.

Podle povahy veličin je možné rozlišit druhy systémů:

- Spojité, tj. se spojitým časem
- Diskrétní, kde hodnoty veličin nejsou číselné, ale jedná se obecně o symboly. Pokud je rovněž čas diskrétní (posloupnost kroků), potom se označují jako logické systémy.

U systémů se dle interakce s okolím rozlišují tři skupiny veličin:

- *Výstupní (sledované) veličiny* (často označení y) - veličiny, které způsobují změny veličin zahrnutých do okolí systému

- *Vstupní (řídící) veličiny* (často označení **u**) - veličiny, které závisí pouze na okolí systému a způsobují změny hodnot jeho ostatních veličin
- *Vnitřní veličiny* - nemusí být přímo měřitelné, ale jsou ovlivňovány vstupem a mají vliv na výstup
- *Stavové veličiny* (označení většinou **x**) - vnitřní nebo výstupní veličiny, jejichž hodnoty jednoznačně odpovídají stavu systému (viz dále)

Podle zdroje náhodných veličin, na deterministické a stochastické.

Podle linearity pak na

- Lineární
- Nelineární

Podle vývoje času

- *Spojité*, kde všechny veličiny systému jsou spojité. Spojitými (analogovými) systémy budeme označovat systémy, jejichž všechny signály jsou spojité v čase.
- *Diskrétní* – hodnoty veličin nejsou spojité, ale celočíselné.

Podle proměnnosti parametrů systému v čase

- *Stacionární (t-invariantní)* - parametry a tedy chování stacionárních systémů jsou v čase neměnné
- *Nestacionární (t-variantní)* - u nestacionárních systémů mají proměnlivý charakter

Podle chování systému

- *Statické (kombinační, bez paměti)* - pro chování statických systémů je jednoznačně určující kombinace aktuálních vstupních hodnot.
- *Dynamické (sekvenční, s pamětí)* - Charakteristickou vlastností dynamického systému je, že neurčitost ve znalosti výstupu při známém vstupu můžeme zmenšit, vezmeme-li v úvahu minulé hodnoty vstupu a výstupu. U dynamického systému závisí okamžitá hodnota výstupu nejen na okamžité hodnotě vstupu, ale také na minulé historii systému.

1.3 Identifikace

Identifikace znamená stanovení modelu na základě vztahů mezi vstupy a výstupy, tak, aby model odpovídal skutečnosti. Proces, kterým získáváme matematický model řízeného objektu ve formě soustavy diferenciálních nebo diferenčních, popř. jiných rovnic. Používané metody můžeme rozdělit do dvou skupin:

- Deterministické metody
- Statistické metody

Základní kroky identifikace:

- test nebo experiment
- výběr řádu modelu a jeho struktury
- odhad parametrů
- validace modelu

Volba identifikační metody

- volba testovacího signálu
- zvolení identifikovaného modelu
- stanovení postupu vyhodnocení naměřených dat
- způsob verifikace
- pokud je porucha malá, lze identifikovat měřením odezev na deterministické testovací signály
- pokud porucha výraznější, tak je vhodné použít stochastické metody identifikace

1.4 Metody identifikace

Rozlišujeme dvě základní metody identifikace soustav

- Parametrické mezi ně patří metody odhadu parametrů ARX, ARMAX, Box-Jenkins, OE. Výsledkem parametrických metod identifikace jsou parametry aproximačního diskrétního modelu regulované soustavy nebo modelu vývoje náhodného procesu, tj. parametry diferenční rovnice.
- Neparametrické – Pod neparametrickými metodami identifikace modelů se rozumí postup, kdy je z náhodných průběhů vstupních a výstupních veličin soustavy získána přechodová nebo impulsní charakteristika a nebo frekvenční přenos.

1.5 Systémy s více vstupy a více výstupy

V technické praxi se běžně setkáváme s technologickými zařízeními, které mají více vstupních a výstupních veličin. Každá ze vstupních veličin může ovlivňovat současně více výstupních veličin. Vzájemnými interakcemi mezi vstupními a výstupními veličinami vznikají složité dynamické souvislosti a vazby. Tyto systémy se označují jako vícerozměrné systémy (Multivariable Systems), nebo jako systémy s více vstupy a výstupy (Multi-input multi output systems, zkratka MIMO systémy). Zpětnovazební vícerozměrový regulační obvod obsahuje zpravidla více regulátorů, které mohou být ve vzájemné interakci.

2 Stavová analýza řídicích systémů

Klasické metody identifikace jsou převážně využívány pro SISO soustavy, které jsou v časové oblasti popsány diferenciálními rovnicemi, nebo přechodovou charakteristikou ve frekvenční oblasti. Moderní metody většinou odkazují na MIMO systémy, které jsou popsány stavovými rovnicemi, nebo přenosem ve frekvenční oblasti. Důležité jsou stavové proměnné. Stavové proměnné nám dávají informace o vnitřní struktuře systému.

2.1 Systém a jeho popis ve stavovém prostoru

Metody matematického popisu dynamických systémů (spojitých i diskrétních) většinou vycházejí ze závislosti mezi výstupem a vstupem systému – je to vnější popis systému. U těchto metod se nebere v úvahu stav systému (zejména počáteční) a jeho vnitřní uspořádání. Tento způsob popisu systému možná vyhovuje pro jednoduché systémy s jedním vstupem a výstupem, ale nehodí se pro složitější systémy s více vstupy a výstupy a pro systémy s nenulovými počátečními podmínkami a pro další složitější systémy. Proto byl v době ne příliš minulé (1960) vypracován matematický aparát, založený na pojmu vnitřního stavu a vnitřního popisu systému. Nazývá se také stavová teorie systému. Stavová teorie systémů nebo též metoda stavového prostoru je moderní metodou teorie automatického řízení a je výhodná zejména při řešení vícerozměrných systémů a v optimálním řízení. Umožňuje řešit i systémy s časově proměnnými parametry, systémy nelineární i diskrétní.

Vychází z toho, že průběh procesu v dynamickém systému je závislý nejen na vstupním působení, ale i na předcházejícím vývoji procesu, který se odráží v okamžitém vnitřním stavu systému. Tedy že výstup systému je závislý nejen na jeho vstupu, ale i na jeho stavu, zejména počátečním. Stav systému vyjadřujeme pomocí veličin, které nazýváme stavovými veličinami.

Jejich soubor tvoří sloupcový vektor x .

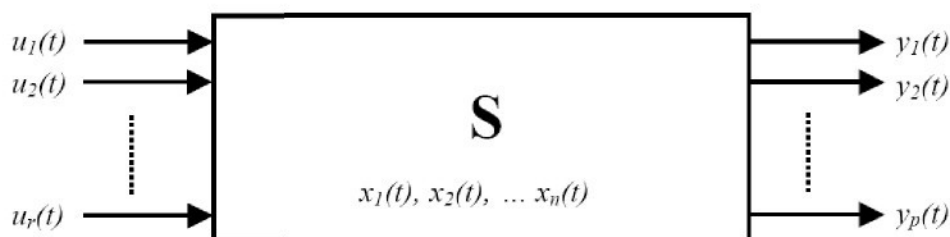
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Stavové veličiny mají poskytovat minimální informaci o vnitřním stavu systému, která je potřebná, aby pomocí ní bylo možné při známém časovém průběhu vstupních veličin a známých dynamických vlastnostech systému jednoznačně určit průběhy výstupních veličin. Dalším požadavkem, který klademe na stavové veličiny je, aby znalost hodnot stavových veličin v určitém okamžiku plus znalost následujících průběhů vstupních veličin a dynamických vlastností systémů byla postačující pro jednoznačné určení následujících stavů systému (následujících průběhů stavových veličin, jak se objeví ve stavových rovnicích).

Stavové veličiny dynamického systému jsou časové funkce, které určují jak vnitřní stav systému, tak jeho výstupní veličiny. Jednotlivé stavové proměnné nemusí být na skutečném systému měřitelné, dokonce ani nemusí v systému fyzicky existovat. Mohou to tedy být jak výstup-ní veličiny, tak také jejich derivace či dokonce jejich lineární kombinace apod. Z praktického hlediska je ovšem vhodnější, když aspoň některé stavové veličiny odpovídají skutečným veličinám systému.

Podle obr. 2.1 je vstupní, výstupní i stavový vektor sloupcový vektor (matice o 1 sloupci), jehož jednotlivé složky tvoří jednotlivé vstupní, výstupní a stavové veličiny. Vztahy mezi těmito veličinami můžeme vyjádřit soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu a systémem algebraických rovnic

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_r(t) \end{bmatrix} & x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} & y(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_p(t) \end{bmatrix} & (2.2) \\ \text{vstupní vektor} & & \text{stavový vektor} & & \text{výstupní vektor} \end{aligned}$$



obr 2.1

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= f_1[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)] \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} x'_n(t) &= f_n[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)] \\ y_1(t) &= g_1[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)] \\ &\dots \\ y_p(t) &= g_p[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

anebo také stručněji v maticovém tvaru

$$x'(t) = f[x(t), u(t)] \quad (2.5)$$

$$y(t) = g[x(t), u(t)] \quad (2.6)$$

My se spíše zaměříme na lineární systémy. U lineárního systému můžeme složkové rovnice (2.3), (2.4) psát ve tvaru

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \dots + b_{1r}u_r(t) \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} x'_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \dots + b_{nr}u_r(t) \\ y_1(t) &= c_{11}x_1(t) + \dots + c_{1n}x_n(t) + d_{11}u_1(t) + \dots + d_{1r}u_r(t) \\ &\dots \\ y_p(t) &= c_{p1}x_1(t) + \dots + c_{pn}x_n(t) + d_{p1}u_1(t) + \dots + d_{pr}u_r(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

anebo použít maticový tvar, který odpovídá rovnicím (2.5), (2.6) u nelineárního systému

Stavové rovnice spojitého lineárního systému

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.9)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.10)$$

kde

(2.9) je rovnice dynamiky

(2.10) je rovnice výstupu

A je matice systému ($n \times n$)

B je matice vstupu (*buzení*) ($n \times m$)

C je matice výstupu ($p \times n$)

D je matice přímé vazby výstupu na vstup ($p \times m$)

Pro případ, kdy uvažujeme i vstup poruch, platí

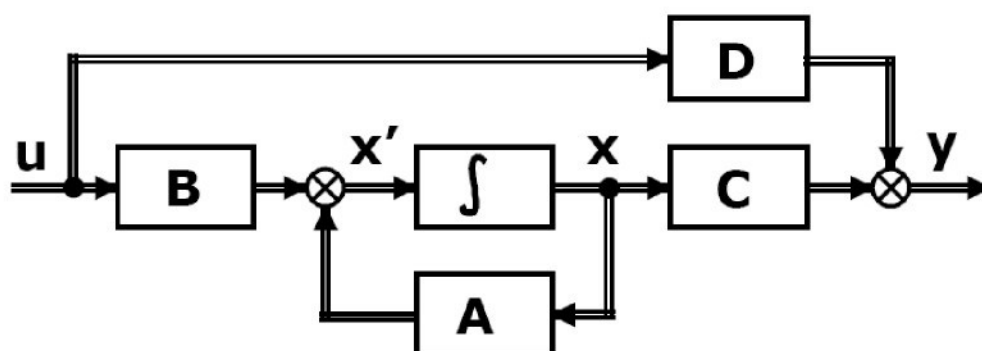
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_d d(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_d d(t)$$

kde d je q -rozměrný vektor poruchy

Rovnice dynamiky (2.9) a rovnice výstupu (2.10) jsou stavové rovnice spojitého lineárního systému a to systému stacionárního, jehož prvky nemění s časem své parametry (prvky matic A, B, C, D jsou konstantní). Příslušnými maticemi A, B, C, D je plně určen vnitřní popis lineárního systému.

Podle stavových rovnic můžeme nakreslit blokové schéma spojitého lineárního dynamického systému podle obr. 2.2.



obr 2.2

Velmi často je matice přímé vazby vstupu na výstup $D = 0$. Volba stavových veličin není pro daný systém jednoznačná. Tuto volbu můžeme provést několika způsoby a proto není ani jednoznačný tvar matic A , B , C , D . Můžeme říci, že volba stavových veličin je dána právě metodou převodu diferenciálních rovnic na stavové rovnice (metoda přímého programování, paralelního programování a sériového programování).

2.2 Diskrétní systémy

Všechny základní pojmy zavedené v předcházející kapitole pro spojité systémy zůstávají v platnosti i pro systémy diskrétní. Ve stavových rovnicích se ovšem vyskytuje diskrétní čas místo spojitého a místo derivací figurují difference (předpokládáme vzorkovací periodu $T = 1$ s)

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.3 Převod stavových rovnic na přenosovou matici

Vztah mezi vektorem obrazů výstupu a vstupu určuje přenosová matice $G(s)$. Přenosová matice $G(s)$ je zobecněním přenosu na lineární systém s několika vstupními a několika výstupními veličinami. Je definována vztahem

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (2.12)$$

kde

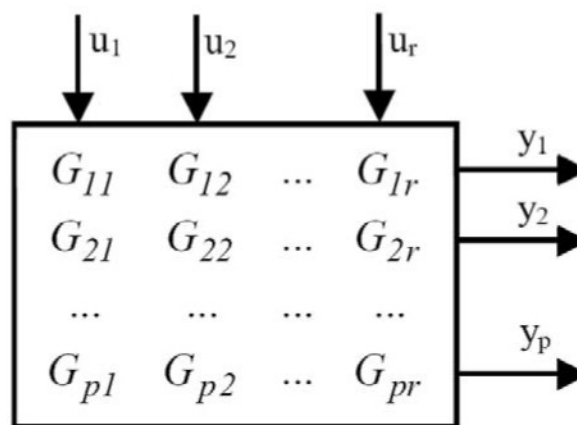
$Y(s)$ je Laplaceův obraz výstupního vektoru $y(t)$ (neboli vektor Laplaceových obrazů) rozměru p ;

$U(s)$ je Laplaceův obraz vstupního vektoru $u(t)$ o rozměru r ;

$G(s)$ je přenosová matice systému o rozměru $(p \times r)$, jejíž prvky jsou přenosy mezi jednotlivými vstupy a výstupy.

Podle schématu na obr. 2.4 je prvek $G_{ij}(s)$ přenosové matice $G(s)$ přenos mezi i -tou výstupní veličinou a j -tou vstupní veličinou

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, r \end{matrix} \quad (2.13)$$



obr 2.4

Protože přenosová matice systému určuje vztah mezi vektory obrazů výstupu a vstupu, nemůžeme ji vyjádřit jako podíl obrazů výstupu a vstupu $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$, neboť dělení vektorů a matic není definováno. Pouze při jediné vstupní a výstupní veličině se z přenosové matice $G(s)$ stane přenos

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.14)$$

Zde je nutné připomenout, že přenos anebo obecně přenosová matice je vyjádřením vnějšího popisu systému (vnější popis je vztah mezi vstupem a výstupem). Naopak stavové rovnice jsou vyjádřením vnitřního popisu systému (vnitřní popis je vztah mezi vstupem, stavem a výstupem). Chceme-li vyjádřit přenos nebo přenosovou matici systému ze stavových rovnic, musíme z nich vyliminovat vektor stavových veličin $x(t)$. Tím se dostaneme od vnitřního popisu k vnějšímu popisu, neboli od stavových rovnic k přenosové matici (přenosu).

Mějme dány stavové rovnice systému (2.9), (2.10)

$$\begin{aligned}x'(t) &= Ax(t) + u(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Proveďme Laplaceovu transformaci těchto rovnic

$$\begin{aligned}sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}\tag{2.15}$$

Za předpokladu nulových počátečních podmínek $x(0)=0$ (nulové počáteční podmínky jsou obsaženy v definici přenosu a tím i přenosové funkce) můžeme rovnici dynamiky upravit na tvar

$$(sI - A)X(s) = BU(s)\tag{2.16}$$

kde I je jednotková matice a odtud můžeme určit obraz stavu

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)\tag{2.17}$$

Dosadíme-li tento výraz do obrazu rovnice výstupu, tj. do druhé z rovnic (2.15) dostaneme

$$Y(s) = [C(sI-A)^{-1}B+D]U(s) \quad (2.18)$$

Srovnáme-li tento vztah s definicí přenosové matice $G(s)$ (2.12) vidíme, že výraz v hranaté závorce je právě přenosová matice systému

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B+D \quad (2.19)$$

Vztah pro přenosovou matici $G(s)$ (2.19) říká, že z vnitřního popisu systému, který je charakterizován stavovými rovnicemi s maticemi A , B , C , D je možno získat přenosovou matici $G(s)$ (tedy vnější popis). Vztah (2.12) je vztah pro převod stavových rovnic na přenosovou matici a v případě systému s jedním vstupem a výstupem na přenos.

Matice, jejíž Laplaceův obraz je

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (2.20)$$

a která tedy v originále je

$$\varphi(t) = L\{(sI - A)^{-1}\} \quad (2.21)$$

se nazývá matice přechodových funkcí neboli matice přechodu.

Při výpočtu obrazu matice přechodových funkcí $\Phi(s)$ podle (2.20) provádíme inverzi matice a to podle vztahu známého vztahu:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

dostaneme

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A) \quad (2.23)$$

kde $\text{adj}(sI - A)$ je adjungovaná matice, sestavená z algebraických doplňků příslušné transponované matice a $\det(sI - A)$ je determinant matice $sI - A$.

Z maticového počtu je známo, že kořeny rovnice

$$\det(sI - A) = 0 \quad (2.24)$$

jsou vlastní čísla matice A . Současně ale výraz $\det(sI - A)$ je podle rovnice (2.19) a (2.23) ve jmenovateli přenosové matice $G(s)$ a protože póly systému jsou kořeny jmenovatele přenosové funkce, jsou kořeny rovnice (2.24) póly systému. Jsou tedy póly systému rovny vlastním číslům matice A . Toto tvrzení nám v budoucnu pomůže při určování stability ze stavových rovnic. Rovnice (2.24) je charakteristickou rovnicí systému a z hlediska stability musí její kořeny a to jsou vlastní čísla matice A ležet v levé komplexní polorovině.

Podle vztahu (2.19) je možno převádět stavové rovnice na přenosovou matici.

2.4 Řešení stavových rovnic

Stavové rovnice lineárního časově invariantního systému mají tvar

$$\begin{aligned}x'(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

2.4.1 Řešení autonomních systémů

Jedná-li se o autonomní systém, je vektor budících, čili vstupních funkcí $u=0$ a rovnice přejdou na tvar

$$\begin{aligned}x'(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.25}$$

Řešení této soustavy znamená v podstatě řešení prvé z obou rovnic, tedy rovnice dynamiky, ne-bot' budeme-li znát x , lehce určíme z druhé rovnice – rovnice výstupu y a to tak, že vynásobíme x maticí C .

Kdybychom měli skalární rovnici

$$x' = Ax\tag{2.26}$$

neboli

$$x' - Ax = 0$$

pak ji řešíme tak, že spočítáme kořen charakteristické rovnice $s - A = 0$, který je $s = A$ a řešení píšeme ve tvaru

$$x = Ce^{At}$$

Integrační konstanta se určí z počáteční podmínky : pro $t = 0$ je $x = x(0)$ a tedy $C = x(0)$. Řešení (2.26) je tedy

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad (2.27)$$

kde e^{At} můžeme určit rozvinutím v nekonečnou řadu

$$e^{At} = 1 + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}t^i \quad (2.28)$$

Nebo rovnici ji můžeme řešit Laplaceovou transformací

$$sX(s) - x(0) = AX(s) \quad \rightarrow \quad X(s) = \frac{x(0)}{s - A}$$

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Řešení maticové rovnice dynamiky (2.25)

$$X'(t) - Ax(t) = 0$$

je pak analogicky

$$X(t) = e^{At}X(0) \quad (2.29)$$

kde matice e^{At} je

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}t^i \quad (2.30)$$

Řešíme-li tuto maticovou rovnici Laplaceovou transformací, dostáváme

$$sX(s) - x(0) = AX(s)$$

$$sX(s) - AX(s) = x(0)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) \quad \left| (sI - A)^{-1} \right.$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0)$$

Znovu zdůrazněme, že v maticovém počtu není zaveden úkon dělení a proto jsme museli celou rovnici násobit inverzní maticí k matici $sI-A$. Řešení maticové rovnice dynamiky tedy je

$$x(t) = L^{-1} \left\{ (sI-A)^{-1} x(0) \right\} = L^{-1} \left\{ (sI-A)^{-1} \right\} \cdot x(0) \quad (2.31)$$

Podle (2.21) je matice přechodových funkcí

$$\varphi(t) = L^{-1} \left\{ (sI-A)^{-1} \right\}$$

a řešení (2.31) maticové rovnice můžeme psát ve tvaru

$$x(t) = \varphi(t) x(0) \quad (2.32)$$

Z porovnání obou řešení (2.29) a (2.32) stejné rovnice nám plyne, že

$$\varphi(t) = L^{-1} \left\{ (sI-A)^{-1} \right\} = e^{At} \quad (2.33)$$

a že řešení maticové rovnice dynamiky můžeme určit dvojím způsobem : buď zpětnou transformací inverzní matice anebo jako výraz , který se dá rozvinout v řadu podle vztahu (2.30).

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} \cdot x(0) = \left[I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots \right] \cdot x(0) \\ &= \varphi(t) \cdot x(0) = L^{-1} \left\{ (sI-A)^{-1} \right\} \cdot x(0) \end{aligned} \quad (2.34)$$

2.4.2 Řešení neautonomních systémů

Jedná-li se o neautonomní systém, je vektor budících čili vstupních funkcí $u \neq 0$ a stavové rovnice mají opět úplný tvar . V podstatě je problém řešení opět v rovnici dynamiky. Vyjdeme-li z tvaru

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t) \quad (2.35)$$

řešíme nejdříve homogenní rovnici

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = 0 \quad (2.36)$$

Toto řešení je řešením autonomního systému a je dáno vztahem (2.34)

$$\begin{aligned} x_{\text{hom}}(t) &= e^{At} \cdot x(0) = \left[I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots \right] \cdot x(0) \\ &= \varphi(t) \cdot x(0) = L^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\} \cdot x(0) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Řešení nehomogenní rovnice (2.35) pak je dáno součtem řešení homogenní rovnice a partikulárního integrálu. Partikulární integrál můžeme vyjádřit buďto z rozvoje e^{At} anebo z matice přechodových funkcí $\varphi(t)$.

$$x_{\text{part}}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \int_0^t \varphi(t-\tau) Bu(\tau) d\tau \quad (2.38)$$

Tento výraz je konvoluce a proměnná τ je konvolutorní proměnná a ve výsledku se neobjeví, protože se podle ní integruje a za ni se dosadí integrační meze.

Řešení stavové rovnice výstupu pak je snadné, jedná se o násobení matic.

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.39)$$

Řešení stavových rovnic neautonomního systému:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.5 Linearizace stavových rovnic

O linearitě či nelinearitě systému rozhoduje jen charakter vektorových funkcí f a g . Pokud je alespoň jedna z těchto funkcí nelineární, jedná se o nelineární systém.

Jde-li o nelineární systém a chceme-li použít lineární teorii, aproximujeme nelineární funkci funkcí lineární. Linearizaci (aproximaci) provádíme vždy v pracovním bodě, pro který platí, že všechny derivace vnitřních stavů jsou rovny nule. Pracovní bod charakterizují vektory x_0 a u_0 , jenž lze zapsat jako

$$u_0 = [u_{10} \quad u_{20} \quad \cdots \quad u_{r0}]^T \quad (2.41)$$

$$u_0 = [u_{10} \quad u_{20} \quad \cdots \quad u_{r0}]^T \quad (2.42)$$

Výstupní vektor y_0 ,

$$y_0 = [y_{10} \quad y_{20} \quad \cdots \quad y_{m0}]^T \quad (2.43)$$

je určen vektory x_0 a u_0 , viz rovnice (4.1).

Lineární funkci lze získat pomocí Taylorova rozvoje prvního řádu. Z definice výše vyplývá, že se v podstatě jedná o tečnu nelineární funkce v daném pracovním bodě. Vektorové funkce f a g můžeme rozepsat podle následujícího schématu

$$f_i(x(t), u(t)) \approx f_i(x_0, u_0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \Big|_{x_0, u_0} (x_k - x_{k0}) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \Big|_{x_0, u_0} (u_k - u_{k0}) \quad (2.44)$$

$$g_j(x(t), u(t)) \approx g_j(x_0, u_0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_k} \Big|_{x_0, u_0} (x_k - x_{k0}) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial g_j}{\partial u_k} \Big|_{x_0, u_0} (u_k - u_{k0}) \quad (2.45)$$

kde $i = 1, 2, \dots, m$.

Linearizovaný model je modelem odchylkovým, vztaženým vždy k pracovnímu bodu, pro který byl odvozen. Odchylkový model linearizovaného nelineárního systému můžeme zapsat podobně jako stavový model lineárního systému ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\Delta x(t) + B\Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C\Delta x(t) + D\Delta u(t)\end{aligned}\quad (2.46)$$

kde vektory odchylek jsou

$$\begin{aligned}\Delta u(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) - u_{10} & u_2(t) - u_{20} & \cdots & u_r(t) - u_{r0} \end{bmatrix}^T, \\ \Delta x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) - x_{10} & x_2(t) - x_{20} & \cdots & x_n(t) - x_{n0} \end{bmatrix}^T, \\ \Delta y(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) - y_{10} & y_2(t) - y_{20} & \cdots & y_m(t) - y_{m0} \end{bmatrix}^T.\end{aligned}\quad (2.47)$$

Matice v rovnicích (4.4) představují

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix}\quad (2.48)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial u_r} \end{bmatrix}\quad (2.49)$$

kde A je matice systému rozměru (n x n), B je matice řízení rozměru (n x r), C a D jsou výstupní matice rozměru (m x n) a (m x r).

2.6 Příklad stavové analýzy systému v prostředí Matlab

Specifikace stavového modelu, zavedení koeficientů:

- A2 = [0.54 -0.11; -0.026 0.63];
- B2 = [-0.0085 0.00044; -0.00025 0.00028];
- C2 = [1 0; 0 1];
- D2 = [0 0; 0 0];
- model = ss(A2, B2, C2, D2, -1);
- % Získání informací o systému

- `[A, B, C, D, ts] = ssdata(model)`
- `% Vlastnosti systému`
- `get(model, 'a')`
- `a = get(model, 'a')`
- `% Nastavení vlastností systému`
- `set(model, 'InputName', {'KeepAlive', 'MaxClients'},
'OutputName', {'CPU', 'MEM'});`
- `% Nové hodnoty`
- `get(model, 'InputName')`
- `get(model, 'OutputName')`

Převod ze stavového modelu

- `% convert the state space model`
- `% to other models`
- `% transfer function model`
- `% MIMO System`
- `% Transfer functions for the first input`
- `[num1, den1] = ss2tf(A2, B2, C2, D2, 1)`
- `% Transfer functions for the second input`
- `[num2, den2] = ss2tf(A2, B2, C2, D2, 2)`
- `% directly applying tf(sys)`
- `% returns a transfer function object`
- `% MIMO System`
- `H = tf(model)`
- `% Zero-pole-gain model`
- `% Zero, Pole, Gain for the first input`
- `[Z1, P1, K1] = ss2zp(A2, B2, C2, D2, 1)`
- `% Zero, Pole, Gain for the second input`
- `[Z2, P2, K2] = ss2zp(A2, B2, C2, D2, 2)`
- `% directly applying zpk(sys)`
- `% returns a ZPK object`
- `H = zpk(tandem)`

- $H = \text{zpk}(\text{model})$
- % Stavový model
- % equivalency property
- % enter vector T as parameter
- % in the equation $w(k) = Tx(k)$
- % Suppose $T = [2 \ 1; 3 \ 2]$
- $[A, B, C, D] = \text{ss2ss}(A1, B1, C1, 0, [2 \ 1; 3 \ 2])$

3 Přímá a nepřímá identifikace vícerozměrných systémů

Tato kapitola je věnována metodám identifikace lineárních diskretních dynamických soustav. Uvádí jak metody přímé identifikace, které hledají koeficienty diferenciálních rovnic, tak i nepřímé určené k získávání spektrálně-modálních charakteristik.

3.1 Přímá identifikace MIMO systémů

Chování lineárního diskretního dynamického systému s mnoha vstupy a mnoha výstupy v čase lze popsat soustavou obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. Tak např. diferenciální rovnice

$$M\ddot{q}(t) + B\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t) \quad (3.1)$$

s maticí hmot M , maticí koeficientů útlumu B , maticí tuhosti K , vektorem buzení f a vektorem odezev q popisuje pohyb lineární diskretní mechanické soustavy. Po Fourierově transformaci této rovnice s nulovými počátečními podmínkami dostaneme pro $p = i2\pi f$ rovnici

$$\left[p^2 M + pB + K \right] q(p) = f(p) \quad (3.2)$$

$$\left[p^2 M + pB + K \right] = Z(p) \quad (3.3)$$

v níž $f(p)$ je vektor Fourierových obrazů budících sil, $q(p)$ vektor obrazů buzení a $Z(p)$ maticí dynamických tuhostí. Matice k ní inverzní,

$$G(p) = Z^{-1}(p) \quad (3.4)$$

kterou lze relativně snadno měřit, se nazývá maticí frekvenčních přenosů nebo frekvenčních odezev, anebo i maticí dynamických poddajností. Rovnost ze vztahu (3.4) lze využít k odvození dvou přímých metod.

3.1.1 Součinnová metoda

Tato metoda je založena na vzájemné inverznosti matic dynamických poddajností a tuhostí. Z této podmínky pro měřené $G(p)$ a hledané $Z(p)$ plyne

$$G(p)Z(p) = I + R(p), \quad (3.5)$$

kde $R(p)$ je matice reziduí. Rozepíšeme-li poslední rovnici pro k -tou budící frekvenci f_k , dostaneme

$$[p_k^2 G(p_k), p_k G(p_k), G(p_k)] \begin{bmatrix} M \\ B \\ K \end{bmatrix} \doteq I \quad (3.6)$$

kterou pro všechny měřené frekvence f_k , $k=1, \dots, K$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1^2 G(p_1) & p_1 G(p_1) & G(p_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_K^2 G(p_K) & p_K G(p_K) & G(p_K) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} M \\ B \\ K \end{bmatrix}}_C \doteq \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}}_Y \quad (3.7)$$

Matice A soustavy je obvykle obdélníková, a proto přibližné řešení ve smyslu metody nejmenších čtverců má tvar:

$$C = A^+ Y \quad (3.8)$$

3.1.2 Rozdílová metoda

Tato rovněž přímá metoda je založena na faktu, že

$$Z(p) - G^{-1}(p) = R(p) \quad (3.9)$$

Podobným postupem jako u součinnové metody dostaneme maticovou rovnici pro k -tou frekvenci

$$[p_k^2 I, p_k I, I] \begin{bmatrix} M \\ B \\ K \end{bmatrix} \doteq G^{-1}(p_k) \quad (3.10)$$

Pro všechny měřené frekvence dostane rovnice nový tvar

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1^2 I & p_1 I & \cdots & I \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_k^2 I & p_k I & \cdots & I \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} M \\ B \\ K \end{bmatrix}}_C = \underbrace{\begin{bmatrix} G^{-1}(p_1) \\ \vdots \\ G^{-1}(p_k) \end{bmatrix}}_Y \quad (3.11)$$

se stejným řešením $C=A^+Y$ jako v případě součinnové metody.

3.2 Nepřímá identifikace MIMO systémů

Identifikace systémů s mnoha vstupy a mnoha výstupy je mnohem složitější problém než u systémů s jedním vstupem a jedním výstupem. Budí se i měří ve více místech a to buď současně nebo i v etapách po sobě. Zpracováním experimentálních dat se má získat jedna spektrální matice a dvě matice modální V a W . Existuje řada metod, které lze najít v literatuře (Daněk O – Identifikační metody v dynamice strojů. Strojnický časopis, 48, 1997, č.5, 297-314). Uvedme zde jednu relativně novou metodu, která na rozdíl od metod pracujících ve frekvenční oblasti je založena na analýze matice impulsních odezev, tedy na informaci z časové oblasti. Matice impulsních odezev $G(t)$ je originálem k matici frekvenčních přenosů $G(p)$.

Obvyklým výstupem z dynamických experimentů bývá série matic frekvenčních přenosů (dynamických poddajností) $G(p) \in C^{m,n}$. Ty lze získat nejrůznějšími technikami měření odezev objektu v m místech na libovolné buzení působící na objekt v n bodech. Není rozhodující, zda bylo harmonické, impulsní, přechodové nebo

náhodné, anebo zda bylo aplikováno postupně v jednotlivých bodech konstrukce, anebo současně v případě náhodného buzení.

Matice frekvenčních přenosů lze vyjádřit dvěma způsoby:

$$G(p) = [p^2 M + pB + K]^{-1} = V [pI - S]^{-1} W^H \quad (3.12)$$

kde modální matice V a $W \in C^{m^*, n^*}$ obsahují vlastní vektory výchylek a spektrální matice $S \in C^{2m^*, 2m^*}$ vlastní čísla na diagonále. Z matice $G(p)$ lze zpětnou Fourierovou transformací získat matici impulsních odezev

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(p) e^{+pt} df = V \exp(St) W^H \quad (3.13)$$

Protože výsledkem experimentu nejsou spojité, ale časové, příp. frekvenční řady závislé na vzorkovací periodě T , nahrazuje se obyčejná Fourierova transformace její diskrétní konečnou verzí (DFT, IDFT). Ať výsledkem experimentu je časová řada matic impulsních odezev odebraných s pevnou periodou vzorkování T o tvaru

$$G(kT) = V \exp(kST) W^H, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (3.14)$$

kde N je celkový počet submatic, tedy i vzorků v každém prvku této maticové časové řady.

3.3 Vlastní čísla

Odezva $q(t)$ na libovolné buzení $f(t)$ je konvolucí impulsní odezvy $G(t)$ s $f(t)$, tedy

$$q(t) = G(t) \cdot f(t) = \int_0^t G(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_0^t G(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (3.15)$$

V diskrétní verzi lze odezvu soustavy vyjádřit s využitím tohoto vztahu jako

$$q(kT) = T \sum_{\kappa=0}^k G((k-\kappa)T) f(\kappa T) = TV \sum_{\kappa=0}^k \exp((k-\kappa)ST) W^H f(\kappa T) \quad (3.16)$$

Pokud bychom použili postupně n libovolných nezávislých buzení v n vybraných bodech objektu, dostali bychom maticovou časovou řadu buzení $F(\kappa T) \in R^{n,n}$ a jí odpovídající časovou řadu odezev $Q(\kappa T) \in R^{m,n}$:

$$Q(kT) = T \sum_{\kappa=0}^k ((k-\kappa)T) F(\kappa T) = TV \sum_{\kappa=0}^k \exp((k-\kappa)ST) W^H F(\kappa T) \quad (3.17)$$

Předpokládejme nyní, že za buzení byly užity Diracovy impulzy. V diskrétním modelu to znamená, že $F(0)=I_n$ a $F(\kappa T)=0_n$ pro $\kappa>0$.

Hledejme nyní taková buzení $F(\kappa T)$, všechna řádu n , která budou schopna systém vybuzený v čase $t=0$ serií impulzů $F(0)=I_n$ uvést do klidu v následujících p vzorkovacích periodách, tedy způsobit, že odezva na počáteční impulzy $F(0)$ bude po následujícím fiktivním buzení $F(\kappa T)$, $\kappa=1, \dots, p$, již nulová, t.j. že $Q(\kappa T)=O_{m,n}$ pro $k=p, p+1, \dots$. Teoreticky by pak pro mechanickou soustavu popsanou rovnicí (3.1) mohlo být $p=2$, pokud by se buzení aplikovalo ve všech stupních volnosti a systém byl říditelný. Protože každému stupni volnosti patří jedna vlastní frekvence a té pak dvě vlastní čísla, lze minimální počet period pro zastavení rozkmitaného systému stanovit jako

$$p \geq \frac{2n_f}{n} = \frac{n_e}{n} \quad (3.18)$$

kde n_f je počet vlastních frekvencí v pozorovaném frekvenčním pásmu a n_e jim odpovídající počet vlastních čísel. Rozepíšeme-li podmínku pro $Q(kT)=O_{m,n}$ pro $k=p, p+1, \dots$, dostaneme systém rovnic, v němž $G_k=G(kT)$

$$\begin{bmatrix} G_{p+1} & G_p & \cdots & G_1 \\ G_{p+2} & G_{p+1} & \cdots & G_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{N-1} & G_{N-2} & \cdots & G_{N-p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ F_1 \\ \vdots \\ F_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{m,n} \\ O_{m,n} \\ \vdots \\ O_{m,n} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

ze kterého lze již snadno vypočítat matice zatím neznámého fiktivního buzení

$F_k = F(\kappa T)$, $\kappa = 1, \dots, p$ jako

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_p & G_{p-1} & \cdots & G_1 \\ G_{p+1} & G_p & \cdots & G_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{N-2} & G_{N-3} & \cdots & G_{N-p-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{p+1} \\ G_{p+2} \\ \vdots \\ G_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

kde symbol „+“ u obdélníkové matice vyznačuje pseudoinverzi.

Z druhé části transponované rovnice (3.17) vyplývá, že pro vynulované odezvy od periody $p+1$ lze s využitím diagonální matice S také psát

$$\begin{bmatrix} I_n, F_1^T, F_2^T, \dots, F_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \exp((p+1)ST) \\ W \exp(pST) \\ \vdots \\ W \exp(ST) \end{bmatrix} = O_n \quad (3.21)$$

Při tom jsme vynásobili celou rovnici zleva regulární maticí V^+/T . Zavedeme-li pro submatice neznámých symboly:

$$E_k = W \exp(kST), \quad (3.22)$$

Můžeme rovnici (3.21) přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} -F_1^T & , & -F_2^T & , & \cdots & , & -F_{p-1}^T & , & -F_p^T \\ I_n & , & O_n & , & & & & & \\ O_n & , & I_n & , & \ddots & , & & & \\ \vdots & , & & , & \ddots & , & \ddots & , & \\ O_n & , & O_n & , & & , & I_n & , & O_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_p \\ E_{p-1} \\ \vdots \\ E_2 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{p+1} \\ E_p \\ \vdots \\ E_3 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Protože ze všech submatic E_k na pravé straně lze vytknout $\exp(ST)$ a tedy psát

$$E_{k+1} = E_k \exp(ST) \quad (3.24)$$

lze i systém rovnic (3.23) zapsat zkráceně jako problém vlastních hodnot Z a jím odpovídajících vlastních vektorů E :

$$AE = EZ \quad (3.25)$$

Matice vlastních čísel $Z = \exp(ST)$ nemusí být stejného řádu jako S , ale bude při vyšším p , než je nezbytně nutné, obsahovat ještě doplňková vlastní čísla nesouvisející s identifikovaným systémem. Stejně platí o matici vlastních vektorů. Po jeho vyřešení určíme z prvních $n_e = 2n_f$ uspořádaných vlastních hodnot z matice Z spektrální matici S původní úlohy identifikovaného systému s využitím rovnice (3) jako

$$S = f_s \ln Z \quad (3.26)$$

Přesnost odhadu spektrální matice S je u přesných dat tím větší, čím větší je hodnota parametru p , ovšem za cenu paměťových nároků rostoucích s p kvadraticky a výpočetního času narůstajícího s p kubicky. Pro data zatížená chybami je však účelné udržovat p co nejnižší, aby se snížilo nebezpečí nalezení nepravých vlastních frekvencí.

3.4 Modální matice

Nejsnáze se vypočte levostranná modální matice W , která se v hermitovskuy transponované formě někdy říká matice participačních faktorů L . Název vystihuje její účinek na příspěvek určitých souřadnic vektoru $f(t)$ k jednotlivým tvarům kmitu.

Modální matici W vypočteme z rovnice (3.22) jako

$$W = E_p [\exp(pST)]^+ \quad (3.27)$$

Výpočet pravostranné modální matice V lze pak realizovat různými způsoby.

4 Vnější popis systému s více vstupy a více výstupy

Vzhledem k tomu, že moderní řídicí metody jsou založeny na vnějším (též stupně-výstupním, externím) popisu řízeného objektu, ukážeme, jak lze získat ze stavového modelu systému jeho vnější model. Tento model neobsahuje stavové veličiny, ale popisuje pouze vztahy mezi vstupními a výstupními veličinami systému. U vícerozměrných systémů mohou být tyto vztahy přímo odvozeny ze stavového popisu ve tvaru maticových přenosů nebo mohou být použity tzv. polynomiální matice a přenosy pak následně vyjádřeny ve tvaru maticových zlomků.

4.1 Popis systému přenosovou maticí

Uvažujeme stavový model lineárního vícerozměrného t -invariantního systému popsaného stavovou a výstupní rovnicí

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4.2)$$

s počáteční podmínkou $x(0) = x^s$, A , B , C , D jsou matice konstant s rozměry uvedenými v předcházející části.

Použijeme-li Laplaceovu transformaci (obrazy jednotlivých vektorů jsou vždy označeny příslušnými velkými písmeny), dostaneme

$$(sI_n - A)X(s) = BU(s) + x^s \quad (4.3)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (4.4)$$

kde I_n je jednotková matice s rozměrem n . Po dosazení z rovnice (4.3) do (4.4) dostaneme pro vektor obrazů výstupu

$$Y(s) = (C(sI_n - A)^{-1}B + D)U(s) + C(sI_n - A)^{-1}x^s \quad (4.5)$$

Aplikací známého vztahu pro výpočet inverzní matice dostaneme

$$Y(s) = \left(\frac{1}{a(s)} \text{Cadj}(sI_n - A) B + D \right) U(s) + \frac{1}{a(s)} \text{Cadj}(sI_n - A) x^s \quad (4.6)$$

kde

$$a(s) = \det(sI_n - A) \quad (4.7)$$

je tzv. charakteristický polynom systému a jeho stupeň $\deg a(s) = n$ udává řád systému (řád systému je dán i dimenzí matice A resp. rozměrem vektoru stavu x). Kořeny polynomu $a(s)$ jsou potom póly systému.

Nyní je zřejmé, že výraz

$$G(s) = \frac{1}{a(s)} \text{Cadj}(sI_n - A) B + D \quad (4.8)$$

je přenosová matice (matice dílčích přenosů) mezi jednotlivými vstupními a výstupními veličinami ($\dim G(s) = r \times m$) a druhá část výrazu na pravé straně rovnice (4.6) je vektor

$$o(s) = \frac{1}{a(s)} \text{Cadj}(sI_n - A) x^s \quad (4.9)$$

který zohledňuje vliv počátečních podmínek na výstup ($\dim o(s) = r \times 1$).

Pro úplnost dodejme, že v přenosové matici (4.8) mohou v některých případech existovat společné faktory polynomů matice $\text{Cadj}(sI_n - A) B$ a polynomu $a(s)$ (existují polynomy stupně vyššího než nula jako společné dělitele polynomů v uvedené matici a polynomu $a(s)$). V tomto případě dojde k vykrácení těchto společných faktorů, tzn. pólů příslušným k těmto faktorům. Řád přenosové matice $G(s)$ je dán počtem jejích pólů. Jestliže jej označíme jako n_G , můžeme vztah mezi řádem přenosové matice a řádem systému vyjádřit jako

$$n_G \leq n \quad (4.10)$$

Vidíme, že jak všechny dílčí přenosy tak i přenosy počátečních podmínek mají ve jmenovateli stejný polynom $a(s)$. I když jsme mohli podmínku *stability systému* definovat již pro stavový model, je asi názornější ji uvést na tomto místě vyhledem k polynomu (4.7), tedy:

Systém popsaný rovnicemi (4.1), (4.2) je interně i externě stabilní tehdy, jestliže kořeny polynomu $a(s) = \det(sI_n - A)$ (póly systému) leží v levé části komplexní roviny.

Poznámka: Při zkoumání stability systému popsaného rovnicí (4.6) je skutečně nutné vycházet z pólů systému a ne pouze z pólů přenosové matice $G(s)$. Jestliže totiž došlo v rovnici (4.8) k už zmíněnému vykrácení pólů a některé z těchto pólů byly nestabilní, je důsledkem vnitřní nestabilita systému, i když se systém jeví navenek jako stabilní.

Po dosazení výrazů (4.8) a (4.9) do rovnice (4.6) je vektor obrazů výstupu ve tvaru

$$Y(s) = G(s)U(s) + o(s) \quad (4.11)$$

kde matici přenosů můžeme napsat jako

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{r1}(s) & G_{r2}(s) & \dots & G_{rm}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{g_{11}(s)}{a(s)} & \frac{g_{12}(s)}{a(s)} & \dots & \frac{g_{1m}(s)}{a(s)} \\ \frac{g_{21}(s)}{a(s)} & \frac{g_{22}(s)}{a(s)} & \dots & \frac{g_{2m}(s)}{a(s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{g_{r1}(s)}{a(s)} & \frac{g_{r2}(s)}{a(s)} & \dots & \frac{g_{rm}(s)}{a(s)} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Nyní ukážeme souvislost mezi existencí matice D ve výstupní rovnici (4.6) a ryzostí dílčích přenosů ve (4.12).

Polynom v $\text{adj}(sI_n - A)$ v pozici i, j označíme jako $\bar{a}_{ij}(s)$. Matice

$(sI_n - A)$ obsahuje prvky obsahující s pouze na diagonále a proto musí pro každé $i, j =$

$1, \dots, n$ platit $\deg \bar{a}_{ij} < \deg a$. Označme dále $\bar{g}_{kp}(s)$, $1 \leq k \leq r$, $1 \leq p \leq m$ polynom, který

je prvkem matice $C \operatorname{adj}(sI_n - A)B$. Protože matice C, B jsou číselné matice, je tento prvek lineární kombinací polynomů $\bar{a}_{ij}(s)$ a tudíž i pro jeho stupeň platí $\deg \bar{g}_{kp} < \deg a$. Označme dále d_{kp} číselný prvek matice D ve stejné pozici.

Pak platí: Jestliže $D = 0$, je $d_{kp} = 0$ pro každé k, p a polynomy v čitatelích dílčích přenosů () jsou $g_{kp}(s) = \bar{g}_{kp}(s)$ a tedy $\deg g_{kp} < \deg a$ pro všechna k, p . To znamená, že pro $D = 0$ jsou všechny dílčí přenosy v matici $G(s)$ striktně ryzí. Jestliže $D \neq 0$, existuje alespoň jeden nenulový prvek $d_{kp} \neq 0$ pro některou pozici k, p . Pak pro polynom čitatele dílčího přenosu v této pozici a jeho stupeň platí $g_{kp}(s) = \bar{g}_{kp}(s) + d_{kp}a(s)$, $\deg g_{kp} = \deg a$ a dílčí přenos $G_{kp}(s)$ je nestriktně ryzí. Ostatní dílčí přenosy ovšem mohou být striktně ryzí.

Podmínky fyzikální realizovatelnosti nyní můžeme formulovat následovně: Jestliže přenosová matice vícerozměrného lineárního systému obsahuje pouze striktně ryzí dílčí přenosy, systém splňuje silnou podmínku fyzikální realizovatelnosti. Jestliže byt' jediný z dílčích přenosů je nestriktně ryzí, splňuje systém slabou podmínku fyzikální realizovatelnosti.

V části věnované linearizaci nelineárního stavového modelu jsme ukázali, že původní nelineární model lze (s určitou přesností) nahradit modelem lineárním s měnícími se prvky matic A, B resp. i C, D . Protože prvky těchto matic vstupují do parametrů lineárního externího modelu (koeficientů v polynomech dílčích přenosů), znamená to, že i ve vstupně-výstupní oblasti můžeme nelineární vlastnosti řízeného objektu vystihnout tak, že zvolíme lineární model s parametry, které se budou v průběhu dynamiky systému měnit. Právě na této myšlence jsou založeny metody adaptivního řízení.

4.2 Singulární systém

Pro úplnost se stručně zmíníme i o existenci této třídy systémů. Uvažujeme lineární t -invariantní vícerozměrný systém popsáný stavovou a výstupní rovnicí

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.13)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4.14)$$

kde E je čtvercová matice, $\dim E = n \times n$. Jestliže je tato matice jednotková, $E = I_n$, je stavová

rovnice (4.13) totožná s rovnicí (4.1), na které jsme založili úvahy v předcházejících odstavcích. Existují však systémy, u kterých nejsou vztahy mezi veličinami popsány jen diferenciálními rovnicemi, ale vyskytují se i rovnice algebraické, které popisují statické vazby mezi veličinami systému. V tomto případě se v soustavě rovnic, které získáme rozpisem rovnice (4.13), objeví na levých stranách nuly místo derivací některých stavových veličin (minimálně jedné). Je jasné, že matice E bude v tomto případě mít na diagonále v příslušných řádcích místo jednotek nuly a bude maticí singulární. Systémy popsané stavovou rovnicí (4.13) se singulární maticí E pak nazýváme singulární systémy. Řád singulárního systému q se singulární maticí E je potom dán jako

$$q = \text{rank} E < n \quad (4.15)$$

Přenosovou maticí systému popsaného rovnicemi (4.13), (4.14) můžeme získat ve tvaru

$$G(s) = C(sE - A)^{-1} B + D \quad (4.16)$$

Stejně jako u systému lineárního se může singulární matice E , která násobí vektor derivací stavových veličin, objevit i ve stavové rovnici systému nelineárního. K tomu opět dojde tehdy, jestliže se v soustavě rovnic objeví nelineární (ne diferenciální) rovnice, popisující statické vazby mezi veličinami systému.

4.3 Popis systému v polynomiálních maticových zlomcích

V předcházející části jsme ukázali, že vztah mezi vektorovým vstupem a výstupem lineárního t -invariantního vícerozměrného systému může být popsán přenosovou maticí (4.12). Jestliže budeme uvažovat ve stavové rovnici (4.1) nulové počáteční podmínky, získáme vektor obrazů výstupu jako

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{G'(s)}{a(s)}U(s) \quad (4.17)$$

Algebraická teorie řízení ukázala, že popis systému pomocí přenosové matice nemusí být nejvýhodnější z hlediska odvození zákonů řízení vícerozměrných systémů a vhodnějším se jeví vnější popis systému pomocí tzv. polynomiálních matic. Tento popis je vhodnější i z hlediska identifikace těchto systémů, jak bude ukázáno v dalších kapitolách. Než přejdeme k vlastnímu popisu systému, uvedeme alespoň nejzákladnější pojmy z oblasti teorie polynomiálních matic a některé jejich vlastnosti.

4.4 Polynomiální matice a jejich základní vlastnosti

Jestliže označíme $\mathcal{R}[s]$ okruh polynomů, pak matice $P(s)$ rozměru $r \times m$, jejíž prvky jsou polynomy z okruhu $\mathcal{R}[s]$ je polynomiální matice. Množinu všech polynomiálních matic rozměru $r \times m$ označíme jako $\mathcal{R}^{rm}[s]$.

Polynomiální matice má tvar

$$P(s) = \begin{bmatrix} p_{11}(s) & p_{12}(s) & \dots & p_{1m}(s) \\ p_{21}(s) & p_{22}(s) & \dots & p_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{r1}(s) & p_{r2}(s) & \dots & p_{rm}(s) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Polynom v pozici i, j má tvar

$$p_{ij}(s) = p_{ij0} + p_{ij1}s + \dots + p_{ijn_{ij}}s^{n_{ij}} \quad (4.19)$$

Jestliže koeficienty p_{ijk} , $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots, n_{ij}$ jsou reálné, jedná se o reálnou polynomiální matici.

Pro polynomiální matice uvedeme některé definice a pravidla.

- Matice $P(s) \in \mathfrak{R}^{rr}[s]$ je *nesingulární*, jestliže $\det P(s) \neq 0$. Jestliže $\det P(s) = 0$, je matice $P(s)$ *singulární*.
- Stupeň i -tého řádku r_i matice $P(s) \in \mathfrak{R}^{rm}[s]$ je maximálním ze stupňů polynomů v i -tém řádku, tedy $r_i = \max_j n_{ij}$
- Stupeň j -tého sloupce c_j matice $P(s) \in \mathfrak{R}^{rm}[s]$ je maximálním ze stupňů polynomů v j -tém sloupci, tedy $c_j = \max_i n_{ij}$
- Stupeň polynomiální matice $P(s) \in \mathfrak{R}^{rm}[s]$, $\deg P(s) = n$, je maximální ze stupňů všech polynomů v matici, tedy $n = \max_{i,j} n_{ij}$.
- Polynomiální matici $P(s) \in \mathfrak{R}^{rm}[s]$ můžeme vyjádřit jako rozvoj

$$P(s) = P_n s^n + P_{n-1} s^{n-1} + \dots + P_1 s + P_0 \quad (4.20)$$

kde

$$P_k = \begin{bmatrix} p_{11k} & p_{12k} & \dots & p_{1mk} \\ p_{21k} & p_{22k} & \dots & p_{2mk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{r1k} & p_{r2k} & \dots & p_{rmk} \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (4.21)$$

4.5 Polynomiální maticové zlomky

Mějme přenosovou matici systému, odpovídající rovnici (4.17)

$$G(s) = \frac{G'(s)}{a(s)} \quad (4.22)$$

Položme nyní $B_L(s) = G'(s)$, $A_L(s) = a(s)I$, a vidíme, že přenosovou matici (4.22) můžeme napsat ve tvaru

$$G(s) = A_L^{-1}(s)B_L(s) \quad (4.23)$$

kde $A_L(s) \in \mathfrak{R}^n[s]$, $B_L(s) \in \mathfrak{R}^m[s]$ jsou polynomiální matice.

Jestliže položíme $B_R(s) = G'(s)$, $A_R(s) = a(s)I_m$ můžeme přenosovou matici (4.22) přepsat do tvaru

$$G(s) = B_R(s)A_R^{-1}(s) \quad (4.24)$$

kde $A_R(s) \in \mathfrak{R}^{mm}[s]$, $B_R(s) \in \mathfrak{R}^m[s]$ jsou opět polynomiální matice.

Reprezentaci přenosové matice ve tvaru (4.23) nazýváme levý polynomiální maticový zlomek (LPMFD – left polynomial matrix fraction description). Reprezentaci (4.24) nazýváme pravý polynomiální maticový zlomek (RPMFD - right polynomial matrix fraction description).

Stupně determinantů takto konstruovaných maticových zlomků pak jsou

$$\deg \det A_L(s) = r \deg a(s) \quad (4.25)$$

$$\deg \det A_R(s) = m \deg a(s) \quad (4.26)$$

Jestliže při popisu systému použijeme levý maticový zlomek, můžeme vztah mezi vstupem a výstupem napsat ve tvaru

$$A_L(s)Y(s) = B_L(s)U(s) \quad (4.27)$$

Použijeme-li pravý maticový zlomek, je tento vztah

$$Y(s) = B_R(s) A_R^{-1}(s) U(s) \quad (4.28)$$

Poznámka. Jestliže je daný přenos systému v levém maticovém zlomku, můžeme ihned získat popis systému v časové oblasti (ve tvaru diferenciálních rovnic) zpětnou transformací rovnice (4.27)

Naopak, máme-li systém popsán diferenciálními rovnicemi, jejich transformací získáme matice přenosu v levém maticovém zlomku. Z tohoto hlediska se zdá být reprezentace přenosu v levém maticovém zlomku přirozenější. Přesto, jak uvidíme později, je reprezentace v pravém maticovém zlomku žádoucí při syntéze řízení nebo dokonce nutná, např. při odvození kvadratických řízení.

Předpokládejme nyní, že máme zadánu přenosovou funkci systému ve tvaru LPMFD

$$G(s) = A_{L1}^{-1}(s) B_{L1}(s) \quad (4.29)$$

Jestliže pak existuje polynomiální matice $L_1(s)$ taková, že platí $A_{L1}(s) = L_1(s) A_L(s)$, $B_{L1}(s) = L_1(s) B_L(s)$, je tato matice společným levým dělitelem matic $A_L(s)$ a $B_L(s)$. Po vydělení společným levým dělitelem pak můžeme přenosovou matici napsat ve tvaru (4.23). Mezi všemi společnými levými děliteli existuje matice $L(s)$, kterou nazýváme největší společný levý dělitel (GLCD – greatest left common divisor) matic $A_L(s)$ a $B_L(s)$. Jestliže matice $A_L(s)$ a $B_L(s)$ mají společné levé dělitele pouze unimodulární matice, jsou zleva nesoudělné.

Levý polynomiální maticový zlomek

$$G(s) = A_L^{-1}(s) B_L(s) \quad (4.30)$$

kde matice $A_L(s)$, $B_L(s)$ jsou zleva nesoudělné, nazýváme zleva nereducovatelný.

Je zadána přenosová funkce systému ve tvaru RPMFD

$$G(s) = B_{R1}(s) A_{R1}^{-1}(s) \quad (4.31)$$

Jestliže pak existuje polynomiální matice $R_1(s)$ taková, že platí $B_{R1}(s) = B_R(s) R_1(s)$, $A_{R1}(s) = A_R(s) R_1(s)$, je tato matice společným pravým dělitelem matic $B_R(s)$ a $A_R(s)$. Po vydělení společným levým dělitelem pak můžeme přenosovou matici napsat ve tvaru (4.24). Mezi všemi společnými pravými děliteli existuje matice $R(s)$, kterou nazýváme největší společný pravý dělitel (GRCD – greatest right common divisor) matic $B_R(s)$ a $A_R(s)$. Jestliže matice $B_R(s)$ a $A_R(s)$ mají společné pravé dělitele pouze unimodulární matice, jsou zprava nesoudělné.

Pravý polynomiální maticový zlomek

$$G(s) = B_R(s) A_R^{-1}(s) \quad (4.32)$$

kde matice $B_R(s)$, $A_R(s)$ jsou zprava nesoudělné, nazýváme zprava neredukovatelný.

V souvislosti s pojmy neredukovatelnosti uvedeme dvě důležitá pravidla:

- Jestliže přenosová matice (4.23) v LPMFD i (4.24) v RPMFD jsou zleva resp. zprava neredukovatelné, pak mezi determinanty jejich maticových jmenovatelů platí vztah

$$\det A_L(s) = k \det A_R(s) \quad (4.33)$$

kde k je nenulová konstanta.

- Řád realizace PMFD je rovný stupni determinantu maticového jmenovatele. Tento řád je minimální, jestliže PMFD je neredukovatelný.

Z uvedeného je jasné, že pokud chceme získat zleva nebo zprava neredukovatelné PMFD, musíme nejprve určit největšího společného levého resp.

pravého společného dělitele. Existují samozřejmě způsoby, jak určit největší společné dělitele. Jde většinou o poměrně komplikované postupy založené na operacích s unimodulárními maticemi.

Ve většině případů máme přenosovou funkci nejprve vyjádřenu v LPMFD. Jestliže ji potřebujeme z nějakého důvodu získat ve tvaru RPMFD, vyjdeme ze vztahu

$$A_L^{-1}(s)B_L(s) = B_R(s)A_R^{-1}(s) \quad (4.34)$$

a po úpravě

$$A_L(s)B_R(s) = B_L(s)A_R(s) \quad (4.35)$$

Rovnice (4.35) je maticová rovnice, ve které jsou neznámými matice $B_R(s)$, $A_R(s)$ resp. jejich polynomy. Stupně polynomů volíme tak, aby si po vynásobení odpovídaly stupně polynomů na levé a pravé straně rovnice. Protože se jedná o rovnici typu $AX - BY = 0$ (kde X , Y jsou neznámé matice) s větším počtem neznámých koeficientů než je počet rovnic, ze kterých tyto koeficienty počítáme, musíme některé koeficienty volit a rovnice (4.35) má pak nekonečný počet řešení. U systémů s nesterým počtem vstupů a výstupů pak můžeme získat i matice s různými stupni polynomů v jednotlivých pozicích.

5 Subspace metody

Subspace metody jsou metody pro identifikaci parametrů lineárních stavových modelů z experimentálních vstupně/výstupních dat.

- založeny na geometrických operacích (projekce, průniky) a numerické lineární algebře
- alternativa k rozšířeným prediction error metodám PEM (např. ML identifikace ARX modelů pomocí nejmenších čtverců)

Vlastnosti subspace metod:

- stejná složitost identifikace pro systémy s jedním vstupem a výstupem (SISO) a pro systémy s více vstupy a výstupy (MIMO)
- malý počet uživatelem nastavovaných parametrů (prakticky pouze řád systému, jehož odhad dokonce i samy poskytují)
- numericky robustní implementace pomocí SVD a QR faktorizací
- implicitní redukce řádu modelu
- nevhodné pro malé soubory dat

Tyto metody jdou v literatuře označované jako 4SID metody (Subspace State-Space System Identification). Název "subspace" vyjadřuje skutečnost, že parametry stavového modelu mohou být získány z řádkových a sloupcových prostorů určitých matic vytvořených ze vstupně/výstupních dat.

5.1 Obecný princip subspace metod

Podstatou subspace metod založených na geometrických vlastnostech prostorů generovaných signály vstupů, výstupů a šumů je ortogonalita mezi nezávislými signály.

Máme-li dva nezávislé skalární signály $u(t)$ a $e(t)$

$$\left(\varepsilon \{ e(t) \} \right) = 0 \quad (4.36)$$

například diskrétní signály

$$u(t) = 10 + 10 \sin(t/2) + v(t) \quad (4.37)$$

$$e(t) = w(t) \quad (4.38)$$

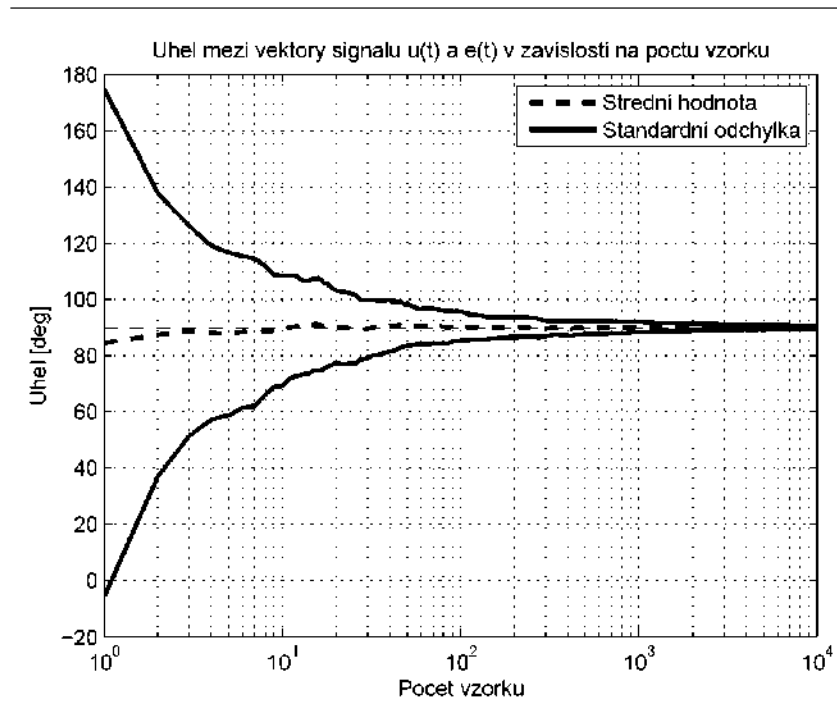
$$\begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \sim N(0, I) \quad (4.39)$$

a poskládáme-li N vzorků z těchto signálů do vektorů u a v , potom úhel α mezi těmito vektory

$$\cos(\alpha) = \frac{u^T v}{\|u\| \|v\|} \quad (4.40)$$

se bude blížit $\pi/2$.

Graf ukazuje střední hodnotu a směrodatnou odchylku úhlu ze 100 realizací pro každou délku N . Demonstruje, že i pro malé délky dat je ve střední hodnotě úhel $\pi/2$, avšak s velkou odchylkou pro jednotlivé realizace. S rostoucím počtem vzorků se odchylka rychle zmenšuje.



6 Modely pro identifikaci soustav

Existuje několik základních rekurzivních identifikačních metod, které slouží k odhadu parametrů modelů ARX, ARMAX a OE. Tyto jsou naloženy na následujících metodách:

Extended Least Square Method (RELS) pro odhad parametrů ARMAX modelu
Prediction Error Method (PEM) pro odhad parametrů ARMAX a OE modelu

Pro zajištění sledování časově proměnlivých parametrů je využito několik známých faktorů zapomínání. Z hlediska parametrizace MIMO modelu je snazší použít stavový model, kde jediným strukturním parametrem je řád systému n .

6.1 Diskrétní identifikace pomocí modelu ARX

ARX (AutoRegresive eXogenous) je autoregresní model s externím vstupem a slouží pro odhadování parametrů modelu ARX nebo AR. AR poukazuje na autoregressive část a X na další vstup $B(z^{-1})u(k)$. Poznámka: ARX není identifikační metoda, ale struktura modelu. Metoda odhadu parametrů pomocí nejmenších čtverců (LS) pak vychází z principu maximální věrohodnosti (ML)

Parametry ARX modelu mají strukturu:

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k) \quad (6.1)$$

kde

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1(z^{-1}) + \dots + a_{n_a}(z^{-1}) \quad (6.2)$$

$$B(z^{-1}) = 1 + b_1(z^{-1}) + \dots + b_{n_b}(z^{-1}) \quad (6.3)$$

$e(k)$ je chyba měření (náhodná veličina s normálním rozložením ve statistickém pojetí).

Rovnici ARX modelu lze přepsat do přehlednějšího tvaru:

$$y = Z\theta + e \quad (6.4)$$

kde y je vektor měření výstupu $[y(1), y(2), \dots, y(k)]^T$

Z je matice dat $[z^T(1), z^T(2), \dots, z^T(k)]^T$

θ je vektor hledaných parametrů $[a_1, a_2, b_1, b_2]^T$

e je vektor chyb měření

Rovnici (6.1) můžeme popsat i takto:

$$\begin{aligned} y(k) + a_1(k-1) + a_2(k-2) + \dots + a_{n_a}y(k-n_a) = \\ = b_1u_1(k-1) + b_2u_2(k-2) + \dots + b_{n_b}u(k-n_b) + e(k) \end{aligned} \quad (6.5)$$

kde

n_a a n_b je počet parametrů použitých pro identifikaci

n_a je bílý šum

Parametry modelu vyjadřujeme:

$$\theta = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n_b}]^T \quad (6.6)$$

Při zadávání do Matlabu použijeme $th = \text{arx}(z, nn)$, kde th (theta) nám vrátí hodnoty odhadu modelu ARX, $z = [y, u]$, kde y je výstupní vektor a u je vstupní vektor, $nn = [na \ nb \ nk]$, kde na je stupeň polynomu A, nb je stupeň polynomu B a nk je pro naše případy vždy rovno jedné.

Zadání se provádí:

$$Z = [Y, U]$$

$$NN = [na, nb, 1]$$

$$TH = ARX(Z, NN)$$

Jestliže vypočteme matici th musíme ji převést na obrazový přenos s určitým vzorkovacím časem. Pro tuto operaci použijeme funkci $th2arx$ (theta to arx).

Zadání se provádí:

$$[A, B] = th2arx(TH)$$

$$SYS = TF(B, A, Ts) \text{ kde } T \text{ je vzorkovací čas}$$

6.1.1 Metoda nejmenších čtverců

Tato metoda je jednou z nejuniverzálnějších a má propracovanou teorii včetně výpočetního algoritmu.

Chceme-li nalézt vektor parametrů θ , můžeme použít metodu nejmenších čtverců, která minimalizuje střední kvadratickou odchylku. Předpokladem je, že chybou je zatížena pouze výstupní veličina y a matice dat Z je jednoznačně známa.

Vycházíme z definice:

$$\min_{\theta \in R^n} \|Z\theta - y\|_2 \quad (6.7)$$

Tuto minimalizaci lze napsat jako

$$\|e\|_2^2 = \|Z\theta - y\|_2^2 = (Z\theta - y)^T (Z\theta - y) = \theta^T Z^T Z\theta - \theta^T Z^T y - y^T Z\theta + y^T y \quad (6.8)$$

Hledáme-li minimum tohoto výrazu, využijeme vztahů pro maticové derovace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(x^T A y) &= A y \\ \frac{\partial}{\partial y}(x^T A y) &= A^T x\end{aligned}\tag{6.9}$$

Pro hledané minimum tedy platí

$$Z^T Z \theta - 2 Z^T y = 0\tag{6.10}$$

Hledané parametry tak získáme ze vztahu:

$$\theta = (Z^T Z)^{-1} Z^T y\tag{6.11}$$

6.1.2 ARX model s více vstupy a více výstupy

Pro ARX model s m vstupy a l výstupy nadále platí rovnice (6.1), avšak

$$A(z)^{-1} = I + \sum_{k=1}^n A_k z^{-k} \text{ a } B(z)^{-1} = I + \sum_{k=1}^n B_k z^{-k} \frac{1}{2}\tag{6.12}$$

jsou polynomiální matice:

$$A(z^{-1}) = \begin{bmatrix} a_{11}(z^{-1}) & \cdots & a_{1m}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1}(q) & \cdots & a_{lm}(z^{-1}) \end{bmatrix}\tag{6.13},$$

$$B(z^{-1}) = \begin{bmatrix} b_{11}(z^{-1}) & \cdots & b_{1m}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1}(q) & \cdots & b_{lm}(z^{-1}) \end{bmatrix}\tag{6.14}$$

Uvažujme, že všechny prvky matic A a B jsou neznámé. Potom můžeme tento model přepsat do tvaru

$$y(t) = \Theta^T \varphi(t) + e(t) \quad (6.15)$$

kde

$$\varphi^T(t) = [y_{t-1}^T \quad \dots \quad -y_{t-n_a}^T \quad u_{t-1}^T \quad \dots \quad u_{t-n_b}^T] \quad (6.16)$$

$$\Theta^T = (A_1 \quad \dots \quad A_{n_a} \quad B_1 \quad \dots \quad B_{n_b}) \quad (6.17)$$

Příklad: systém se třemi vstupy a dvěma výstupy:

$$\begin{aligned} y_1(t) - 1,5y_1(t-1) + 0,4y_2(t-1) + 0,7y_1(t-2) = \\ 0,2u_1(t-4) + 0,3u_1(t-5) + 0,4u_2(t) - 0,1u_2(t-1) + 0,15u_2(t-2) + e_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) - 0,2y_1(t-1) - 0,7y_2(t-2) + 0,01y_1(t-2) = \\ u_1(t) + 2u_2(t-4) + 3u_3(t-1) + 4u_3(t-2) + e_2(t) \end{aligned}$$

Tento systém lze přepsat i maticově:

$$\begin{aligned} y(t) + \begin{bmatrix} 1,5 & 0,4 \\ -0,2 & 0 \end{bmatrix} y(t-1) + \begin{bmatrix} 0,7 & 0 \\ 0,01 & -0,7 \end{bmatrix} y(t-2) = \\ \begin{bmatrix} 0 & 0,4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} u(t-1) + \begin{bmatrix} 0 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} u(t-2) + \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u(t-3) + \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} u(t-4) + \begin{bmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u(t-5) \end{aligned}$$

Odhad modelu lze získat například za použití Matlab Identification Toolboxu a to následujícími sekvencí příkazů:

```
A(:, :, 1) = eye(2);
A(:, :, 2) = [-1.5 0.4; -0.2 0];
A(:, :, 3) = [0.7 0; 0.01 -0.7];
B(:, :, 1) = [0 0.4 0; 1 0 0];
B(:, :, 2) = [0 -0.1 0; 0 0 3];
B(:, :, 3) = [0 0.15 0; 0 0 4];
B(:, :, 4) = [0 0 0; 0 0 0];
B(:, :, 5) = [0.2 0 0; 0 2 0];
B(:, :, 6) = [0.3 0 0; 0 0 0];
m0 = idarx(A,B);
u = iddata([], idinput([200,3]));
e = iddata([], randn(200,2));
y = sim(m0, [u e]);
na = [2 1; 2 2];
nb = [2 3 0; 1 1 2];
nk = [4 0 0; 0 4 1];
me = arx([y u],[na nb nk])
me.a % The estimated A-polynomial
```

Diagonální parametrizace autoregresivní (AR) a moving average (MA) matice nám dovoluje MIMO ARMAX model odhadnout jako sadu MISO modelů. Tohoto faktu využívá program uvedený v příloze 1.

6.1.3 Průběžná identifikace ARX modelu

Metoda průběžné identifikace je založena na principu využití metody nejmenších čtverců. Například systém se dvěma vstupy a dvěma výstupy s polynomy druhého má 16 neznámých parametrů. Ukážeme si příklad.

Diskrétní případ vypadá model takto:

$$y_1(k) = -a_1 y_1(k-1) - a_2 y_1(k-2) - a_3 y_2(k-1) - a_4 y_2(k-2) + b_1 u_1(k-1) + b_2 u_1(k-2) + b_3 u_2(k-1) + b_4 u_2(k-2) \quad (6.18)$$

$$y_2(k) = -a_5 y_1(k-1) - a_6 y_1(k-2) - a_7 y_2(k-1) - a_8 y_2(k-2) + b_5 u_1(k-1) + b_6 u_1(k-2) + b_7 u_2(k-1) + b_8 u_2(k-2) \quad (6.19)$$

Pro spojitý systém nabývá model tvaru:

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 + a_3 y_2' + a_4 y_2 = b_1 u_1' + b_2 u_1 + b_3 u_2' + b_4 u_2 \quad (6.20)$$

$$y_2'' + a_5 y_1' + a_6 y_1 + a_7 y_2' + a_8 y_2 = b_5 u_1' + b_6 u_1 + b_7 u_2' + b_8 u_2 \quad (6.21)$$

Aktualizace vektoru parametrů potom probíhá podle vztahu

$$\Theta_{1,2}^T(k) = \Theta_{1,2}^T(k-1) + \frac{C(k-1)\varphi(k)}{1 + \varphi^T(k)C(k-1)\varphi(k)} (y(k) - \Theta_{1,2}^T(k-1)\varphi^T(k)) \quad (6.22)$$

Plnění vektorů parametrů a vektoru dat pro diskretní model je následující:

$$\Theta_1^T(k) = [a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4] \quad (6.23)$$

$$\Theta_2^T(k) = [a_5, a_6, a_7, a_8, b_5, b_6, b_7, b_8] \quad (6.24)$$

$$\varphi^T(k-1) = [-y_1(k-1), -y_1(k-2), -y_2(k-1), -y_2(k-2), \quad (6.25)$$

$$u_1(k-1), u_1(k-2), u_2(k-2), u_2(k-1), u_2(k-2)] \quad (6.26)$$

Pro spojitý model se do vektoru dat přidá jednička a odhaduje se její koeficient *d*. Tento koeficient vyrovnává rozdíly v počátečních podmínkách filtrovaných a nefiltrovaných veličin. Takže regresní vektor pro uvažovanou dvourozměrovou spojitou soustavu má tvar

$$\varphi^T(t_k) = [-y_{1f}', -y_{1f}, -y_{2f}', -y_{2f}, -u_{1f}', -u_{1f}, -u_{2f}', -u_{2f}, 1] \quad (6.27)$$

a vektory parametrů jsou

$$\Theta_1^T(t_k) = [a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, d_1,] \quad (6.28)$$

$$\Theta_2^T(t_k) = [a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, d_2,] \quad (6.29)$$

6.2 Diskrétní identifikace pomocí modelu ARMAX

ARMAX (AutoRegressive Moving Average eXogenous) - odhaduje parametry modelu ARMAX nebo ARMA. Parametry ARMAX modelu mají strukturu:

$$A(q).y(k) = B(q).u(k) + C(q).e(k) \quad (6.30)$$

Při zadávání do Matlabu použijeme $th = \text{armax}(z, nn)$, kde th (theta) nám vrátí hodnoty odhadu modelu ARMAX, $z = [y, u]$, kde y je výstupní vektor a u je vstupní vektor, $nn = [na \ nb \ nc \ nk]$, kde na je stupeň polynomu A, nb je stupeň polynomu B, nc je stupeň polynomu C a nk je pro naše případy vždy rovno jedné.

Zadání se provádí:

$Z = [Y, U]$

$NN = [na, nb, nc, 1]$

$TH = \text{ARMAX}(Z, NN)$

Jestliže vypočteme matici th musíme ji převést na obrazový přenos s určitým vzorkovacím časem. Pro tuto operaci použijeme funkci $th2arx$ (theta to arx).

Zadání se provádí:

$[A, B, C] = \text{th2arx}(TH)$

$SYS1 = \text{TF}(B, A, Ts)$

de T je vzorkovací čas

$SYS2 = \text{TF}(C, A, Ts)$

6.2.1 ARMAX model s více vstupy a více výstupy

Parametry ARMAX modelu mají strukturu:

$$y(k) = A^{-1}(z^{-1})B(z^{-1})u(t) + A^{-1}(z^{-1})C(z^{-1})e(t) \quad (6.31)$$

nebo

$$A^{-1}(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})e(k) \quad (6.32)$$

kde $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ a $C(z^{-1})$ jsou polynomiální matice

6.3 Output error model

$$y(t) = A^{-1}(z^{-1})B(z^{-1})u(t) + e(t) \quad (6.33)$$

kde $A(z^{-1})$ a $B(z^{-1})$ jsou polynomiální matice

6.4 Box-Jenkins model

$$y(t) = A^{-1}(z^{-1})B(z^{-1})u(t) + D^{-1}(z^{-1})C(z^{-1})e(t) \quad (6.34)$$

kde $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ a $D(z^{-1})$ jsou polynomiální matice

7 Závěr

Tato práce měla za cíl popsat používané metody experimentální identifikace vícerozměrných soustav a metody jejich výpočtu. Existuje řada metod, které lze najít v literatuře a téma je natolik široké, že nebylo možné v rozsahu této diplomové práce všechny popsání metody do detailu, avšak pro základní přehled by tato práce měla postačovat. Popsané metody ARX a ARMAX řadíme mezi metody parametrické identifikace, stejně tak i metody využívající stavový popis. Jejich výhodou je snadná aplikovatelnost na většinu průmyslových procesů. V současné době stále vznikají nové práce zabývající se novými metodami, které souvisejí i s rozvojem výpočetní techniky. Na tuto práci by se dalo navázat simulačními experimenty a bližším představením jednotlivých identifikačních metod.

Příloha 1

```
function th=arx3(y,u)

% th=arx3(y,u) MIMO model vznikly spojenim jednotlivych MISO
%arx modelu mezi vstupy a vystupy. Kazdy sloupec y,(u) obsahuje
%vazby na prislusny vstup.
%

if nargin<2, th=[], disp(' usage: th=arx3(y,u)'); return, end

% initialization
no=size(y,2);
ni=size(u,2);

f=size(y,1);
l=floor(f/2);

% outer cycle (constructs matrices row by row)
A=[],B=[],C=[],D=[],K=[];X0=[];
for i=1:no,

% computes optimal structure
n0=struc(1:3,1:3,0:3);
n0=[n0(:,1) n0(:,2)*ones(1,ni) n0(:,3)*ones(1,ni)];
n1=sls3(arxstruc([y(1:l,i) u(1:l,:)],[y(l+1:f,i) u(l+1:f,:)],n0),'AIC');
vtx=(n1==3);
c=0;

while any(vtx)&(c<9),
n0=struc(n1(1)+vtx(1):n1(1)+vtx(1),n1(2)+vtx(2):n1(2)+vtx(2),n1(2+ni)-
vtx(2+ni):n1(2+ni)+vtx(2+ni));
n0=[n0(:,1) n0(:,2)*ones(1,ni) n0(:,3)*ones(1,ni)];
n2=sls3(arxstruc([y(1:l,i) u(1:l,:)],[y(l+1:f,i) u(l+1:f,:)],n0),'AIC');
vtx=(n2==(n1+1));
n1=n2;c=c+1;
end

th=arx([y(:,i) u],n1);
[a,b,c,d,k,x0]=th2ss(th);

% state space matrices construction
A=[A zeros(size(A,1),size(a,2)); zeros(size(a,1),size(A,2)) a];
B=[B;b];
C=[C zeros(size(C,1),size(c,2)); zeros(size(c,1),size(C,2)) c];
D=[D;d];
K=[K zeros(size(K,1),size(k,2)); zeros(size(k,1),size(K,2)) k];
X0=[X0; x0];
```

```

% outer cycle
end

% final theta format
th=ss3th(A,B,C,D,K,X0);

% subfunctions

function theta=ss3th(a,b,c,d,k,x0,cd,parval,lambda,T)

% THETA = ss3th(A,B,C,D,K,X0,CD,PARVAL,LAMBDA,T)
% Pack standard ss parameterizations into THETA format

if nargin<10, T=[];end
if nargin<9, lambda=[];end
if nargin<8, parval=[];end
if nargin<7, cd=[];end

if isempty(T),T=1;end

if nargin<5,error('All of the matrices A, B, C, D, K, must be specified!'),end
[nx,nd]=size(a);
if nx ~= nd, error('The A-matrix must be square!'),end
if nargin<6, x0=zeros(nx,1);end;if isempty(x0),x0=zeros(nx,1);end
[nd,nu]=size(b);
if nx ~= nd & nu~=0, error('A and B must have the same number of rows!'),
end
[ny,nd]=size(c);
if nx ~= nd, error('A and C must have the same number of columns!'),
end
[nd1,nd2]=size(d);
if nd1 ~= ny & nu~=0, error('D and C must have the same number of rows!'),end
if nd2 ~= nu, error('D and B must have the same number of columns!'),
end
[nd1,nd2]=size(k);
if nd1 ~= nx, error('K and A must have the same number of rows!'),
end
if nd2 ~= ny, error('The number of columns in K must equal the number of columns in C!'),end
[nd1,nd2]=size(x0);
if nd1~=nx, error('X0 and A must have the same number of rows!'),end
if nd2 ~= 1, error('X0 must be a column vector!'),end
ms(1:nx,1:nx)=a;
if nu>0, ms(1:nx,nx+1:nx+nu)=b;end
ms(1:nx,nx+nu+1:nx+nu+ny)=c';
if nu>0, ms(1:ny,nx+nu+ny+1:nx+2*nu+ny)=d;end
nn=nx+2*(nu+ny);
ms(1:nx,nx+2*nu+ny+1:nn)=k;
ms(1:nx,nn+1:nn+1)=x0;

```

```

ms(1,nn+2)=ny;ms(2,nn+2)=nx;

d1=sum(sum(isnan(ms))');

if isempty(parval),parval=zeros(1,d1);end
if isempty(cd), cd='d';end, cd=cd(1);
if cd~='c' & cd~='d',
    error('CD must be one of "c"(ontinuous) or "d"(iscrete)')
end
[nx,nn]=size(ms);nyy=ms(1,nn);
if nyy<0,arx=1;else arx=0;end
d=length(parval);
if d~=d1 & ~arx,
    error('Incorrect number of parameter values have been specified; must be equal to the
number of "NaN"s in the model structure!')
end

if T<0,
    error('The sampling interval T must be a positive number. Use "c" in the second
argument to indicate continuous time model!')
end

[rarg,carg]=size(ms);
if cd=='c',theta(1,2)=-abs(T);else theta(1,2)=abs(T);end
if cd=='d',Tmod=-1;else Tmod=abs(T);end
theta(1,6:7)=[rarg,carg];

[a,b,c,Dd,k,x0]=ssmodx3(parval,Tmod,ms);

if ms(1,carg)>0,
    if max(abs(eig(a-k*c)))>1,disp('WARNING: Predictor unstable!'),end
end
[ny,nx]=size(c);[nx,nu]=size(b);
if isempty(lambda),lambda=eye(ny);end
theta(1,1)=det(lambda);
ti=fix(clock);
ti(1)=ti(1)/100;
theta(1,3:5)=[nu ny d];theta(2,1)=theta(1,1);
theta(2,2:6)=ti(1:5);
theta(2,7)=21;
if cd=='c', theta(2,8)=1;else theta(2,8)=2;end
if d>0,
    theta(3,1:d)=parval;
end
theta(4+d:3+d+rarg,1:carg)=ms;
theta(4+d+rarg:3+ny+d+rarg,1:ny)=lambda;

```

```

function [nn,Vmod]=sls3(V,c)

%
% nn = sls3(V,c) or [nn,Vm] = sls(V,c)
% copy of selstruc.m with graphic mode disabled,
% meant to be used as a subroutine of arx3 and rarx3
%

nn=[];
if nargin<2,c='a',end
if c<0,c='a',end
if c<0,c='a',end
[nl1,nm1]=size(V);
nu=floor((nl1-2)/2);
Nc=V(1,nm1);
if c(1)=='a' | c(1)=='A',alpha=2;end
if c(1)=='m' | c(1)=='M', alpha=log(Nc);end

for kj=1:nm1-1
Vmod(1,kj)=V(1,kj)*(1+(alpha/Nc)*sum(V(2:nu+2,kj)));
end
Vmod(2:nl1,1:nm1-1)=V(2:nl1,1:nm1-1);

Vmod(1,1:nm1-1)=log(Vmod(1,1:nm1-1));
if length(nn)==0,[vm,sel]=min(Vmod(1,1:nm1-1));
nn=V(2:2+2*nu,sel)';end

```

```

function [A,B,C,D,K,X0]=ssmodx3(th,T,mod)

%      [A,B,C,D,K,X0] = ssmodx3(PARVAL,T,MS)
%
% copy of ssmodx9.m with a few changes,
% meant to be used as a subroutine of arx3 and rarx3
%

[dum,nn]=size(mod);nyy=mod(1,nn);nx=mod(2,nn);
ny=abs(nyy);nu=(nn-nx-2*ny-2)/2;
s=1;
if nyy<0,arx=1,else arx=0;end
na=0;
if arx,
as1=mod(1:nx,1:nx);
sumas=sum4vms(as1');
nr=find(sumas==0&~isnan(sumas));
if isempty(nr),na=nx/ny,else na=(nr(1)-1)/ny;end
end
A=mod(1:nx,1:nx);
for kr=1:nx
    for kc=1:nx

```

```

        if isnan(A(kr,kc)), A(kr,kc)=th(s);s=s+1;end
    end
end
B=mod(1:nx,nx+1:nx+nu);
for kr=1:nx
    for kc=1:nu
        if isnan(B(kr,kc)),B(kr,kc)=th(s);s=s+1;end
    end
end
if na==0
    C=mod(1:nx,nx+nu+1:nx+nu+ny)';
    for kr=1:ny
        for kc=1:nx
            if isnan(C(kr,kc)),C(kr,kc)=th(s);s=s+1;end
        end
    end
    if nu==0, D=[];else D=mod(1:ny,nx+nu+ny+1:nx+2*nu+ny);end
    for kr=1:ny
        for kc=1:nu
            if isnan(D(kr,kc)),D(kr,kc)=th(s);s=s+1;end
        end
    end
else
    C=A(1:ny,1:nx);
    if nu>0,D=B(1:ny,:);else D=[];end
end
K=mod(1:nx,nx+2*nu+ny+1:nx+2*nu+2*ny);
for kr=1:nx
    for kc=1:ny
        if isnan(K(kr,kc)),K(kr,kc)=th(s);s=s+1;end
    end
end

X0=mod(1:nx,nx+2*nu+2*ny+1);
for kr=1:nx
    if isnan(X0(kr)),X0(kr)=th(s);s=s+1;end
end
if T>0 % We shall in this case sample the model with sampling interval T
    s = expm([A B K]*T; zeros(nu+ny,nx+nu+ny));
    A = s(1:nx,1:nx);
    B = s(1:nx,nx+1:nx+nu);
    K = s(1:nx,nx+nu+1:nx+nu+ny);
end

```

Seznam použité literatury

- [1] Olehla, M.: Identifikace technologických soustav. Skripta TU Liberec 1997
- [2] Noskievič, P.: Modelování a identifikace systémů. MONTANEX Ostrava 1999
- [3] Balda M.: Identifikace MIMO systémů z impulsních odezev. Sb. konf. ZČU FAV KME „Výpočtová mechanika '99, Nečtiny, 1999, ISBN 80-7072-542-1 s. 19-26
- [4] Olehla, M. – Věchet, V. – Olehla, J.: Řešení úloh matematické statistiky ve FORTRANu. NADAS Praha 1982
- [5] Drábek, O., Macháček, J.: Experimentální identifikace, Skripta VŠCHT Pardubice 1987.
- [6] Kučera, V.: Algebraická teorie diskrétního řízení. Academia Praha 1978
- [7] www.mathworks.com/matlabcentral [online]