Technická univerzita v Liberci
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

RNDr. Petr Salač, CSc.

# Optimální návrh chlazení razníku při lisování skleněných výrobků na karuselovém lisu

## Optimal design of plunger cooling during the pressing of glass products to the carousel press

Habilitační práce
Obor: Aplikované vědy v inženýrství

Liberec 2020

Předložená habilitační práce shrnuje výsledky vzniklé v letech 2005 – 2015 dosažené v rámci mé účasti na řešení výzkumného záměru Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky č. MSM 4674788501 z něhož byly kryty i náklady spojené s patentováním výsledku a s realizací experimentů a projektu Technologické agentury České republiky TA03010852.

Na tomto místě chci poděkovat Ing. Michalu Starému, Ph.D. za precizní přípravu a provedení navržených experimentů.

Rovněž chci poděkovat Fakultě přírodovědně-humanitní a pedagogické Technické univerzity v Liberci za poskytnutí studijního volna v rámci rozvojového projektu MŠMT „Podpora habilitačního řízení a řízení ke jmenování profesorem“, jež umožnilo dokončení habilitační práce.

Liberec, červen 2020

# Obsah

# Úvod

Předložená práce navazuje na autorovy předchozí publikace 1995 [7], 2002 [8] a 2002 [9]. V článku [7] byla prezentována úloha optimálního návrhu kruhové rotačně symetricky zatížené desky konstantního objemu, prostě podepřená podél obvodu, uložená na pružném *oboustranném* podkladě Winklerova typu. Návrhovou proměnnou je tloušťka desky za podmínky omezenosti zdola kladnou konstantou, omezenosti shora a omezenosti jejích prvních derivací. Na desku působí vlastní tíha, osamělá síla ve středu desky, břemena působící na kružnicích se středem ve středu desky a tzv. rotačně symetrické zatížení. Vzhledem osové symetrii úlohy byla provedena transformace do polárních souřadnic a následná dimenzionální redukce úhlové souřadnice. Vznikla tak jednorozměrná okrajová úloha pro průhybovou funkci jedné proměnné ve váhovém Sobolevově prostoru. Účelový funkcionál je zde uvažován ve tvaru druhé mocniny normy průhybové funkce v příslušném váhovém Sobolevově prostoru. Je zde dokázána existence a jednoznačnost řešení stavové úlohy, existence řešení úlohy optimálního návrhu, zavedena aproximovaná úloha a dokázána konvergence řešení aproximované úlohy k řešení původní spojité úlohy.
V článku [8] byla uvažována pružná, prostě podepřená rotačně symetrická deska, uložená na *jednostranném* pružném podkladě. Návrhovou proměnnou je zde tloušťka desky a tuhost jednostranného podkladu. Tloušťka desky, tuhost podkladu a jejich parciální derivace prvního řádu jsou omezeny. Uvažuje se, podobně jako v předchozím článku, zatížení složené z osamělé síly působící ve středu desky, břemena působícího na kružnicích se středem ve středu desky, rotačně symetrického zatížení a vlastní váhy desky. Účelový funkcionál je zde integrál z intenzity napětí ve smyku v extremálních vláknech desky a druhá mocnina normy z průhybové funkce poloměru v uvažovaném váhovém Sobolevově prostoru. Je dokázána existence a jednoznačnost řešení stavové úlohy a existence řešení úlohy optimálního návrhu. Článek [9] je druhou částí předchozí publikace. Je zde formulována aproximovaná stavová úloha a aproximovaná úloha optimálního návrhu. Je dokázána existence podposloupnosti řešení aproximovaných úloh optimálního návrhu konvergující k řešení spojité úlohy optimálního návrhu a konvergence odpovídajících řešení aproximovaných stavových úloh k odpovídajícímu řešení spojité stavové úlohy.

Předložená habilitační práce se zabývá tvarovou optimalizací oblasti složené ze čtyř různých podoblastí, na nichž je stavová úloha reprezentující vedení tepla popsána odlišným způsobem. Teplo je šířeno jednak kondukcí v pevných částech systému a jednak kombinací kondukce a konvekce v dutině razníku, kde probíhá chlazení proudící vodou. Teplotní pole na jednotlivých podoblastech jsou svázána dvěma odlišnými typy přechodových podmínek.
Při řešení úlohy bylo rovněž využito rotační symetrie a úloha byla transformována do válcových souřadnic s následným provedením dimenzionální redukce. Vznikla tím dvou-

rozměrná úloha pro funkci teploty ve váhovém Sobolevově prostoru.

V první kapitole je představen proces lisování skleněné produkce na karuselovém lisu. Jsou popsány technologické problémy lepení skloviny při příliš vysoké teplotě lisovacího nástroje, resp. problém vzniku povrchových trhlinek při příliš nízké teplotě razníku. Je vytýčen cíl optimalizace, který řeší oba jmenované technologické problémy. Dále je prezentováno několik konstrukčních úprav v oblasti dutiny razníku, jež vedou v důsledku chlazení proudící vodou k optimalizaci rozložení teploty na vnějším povrchu razníku. Je možné měnit tvar vnitřní chladicí dutiny, lokální rychlost proudící vody aplikací regulačního proudového tělesa, tepelnou vodivost ve stěně razníku užitím izolační bariéry nebo vlastnosti chladicí tekutiny. Dále jsou prezentovány výsledky předchozích měření prováděných v roce 1999 ing. I. Matouškem a ing. J. Cibulkou, CSc. (viz [5]), jejichž parametry byly užity v numerických simulacích.

Druhá kapitola je věnována odvození stavové rovnice na základě energetické bilance jednoho lisovacího cyklu. Stavová rovnice systému forma, skleněný výlisek, razník a dutina razníku vychází ze slabé formulace rovnice energie ve třech dimenzích.

První část druhé kapitoly je věnována modelu rychlostního pole proudící vody v dutině razníku. Je užit nejjednodušší model potenciálního rotačně symetrického proudění. Potenciál rychlostního pole chladicí vody nalezneme jako slabé řešení Neumannovy úlohy pro Laplaceovu rovnici za předpokladu známé rychlosti na vstupu a výstupu z dutiny razníku. Je dokázána existence a jednoznačnost rychlostního pole ve tvaru gradientu potenciálu rychlosti ve třech dimenzích a následně provedena transformace do válcových souřadnic. Na základě předpokladu o rotační symetrii je provedena dimenzionální redukce do proměnných $x, r$.

Druhá část druhé kapitoly je věnována vedení tepla v celém systému popsanému rovnicí energie, do níž je v podoblasti reprezentující dutinu razníku formálně dosazeno rychlostní pole chladicí vody získané jako gradient řešení Neumannovy úlohy pro potenciál proudění. V podoblastech reprezentujících formu, skleněný výlisek a razník je do rovnice energie dosazeno nulové rychlostní pole, čímž je tato rovnice redukována na rovnici stacionárního vedení tepla. V podoblasti reprezentující skleněný výlisek uvažujeme tepelný zdroj, který svým tepelným výkonem odpovídá množství tepla odvedenému v průběhu jednoho lisovacího cyklu.
Na přestupových plochách mezi sklovinou a sklářskou formou a mezi sklovinou a razníkem je uvažována přechodová podmínka dotyku dvou těles, při němž dochází u jednoho z nich k přeměně jeho skupenství vlivem tuhnutí. Na hranici mezi razníkem a proudící vodou je uvažována přechodová podmínka pro kontakt dvou těles (viz [43]).
Okrajové podmínky Dirichletova typu jsou uvažovány na vstupu a výstupu z chladicí dutiny razníku a na hranici systému s lisem. Na hranici tvořené trubicí přivádějící chladicí vodu do systému uvažujeme Neumannovu okrajovou podmínku a na vnější hranici sklářské formy okrajovou podmínku třetího druhu pro kontakt tělesa s prostředím (viz [43]).
Dále je zde odvozena slabá formulace příslušné úlohy pro vedení tepla na každé z podoblastí samostatně a následně jsou jednotlivé slabé formulace pospojovány do jedné variační formulace rovnice energie na celém systému. Následně je variační formulace rovnice energie transformována do válcových souřadnic a na základě předpokladu rotační symetrie úlohy je provedena dimenzionální redukce do složek $x$, $r$. Nakonec je dokázána existence a jednoznačnost slabého řešení úlohy o vedení tepla v redukovaném dvoudimenzionálním

modelu.

V první části třetí kapitoly je formulována úloha optimálního návrhu tvaru chladicí dutiny razníku ve dvou dimenzích. Za stavovou úlohu je zde vzata variační formulace rovnice energie a účelový funkcionál je volen ve tvaru druhé mocniny $L^2_r$ normy na vnější hranici razníku z rozdílu stopy řešení stavové úlohy na razníku a předem zvolené konstanty reprezentující optimální teplotu na povrchu razníku. Je zde dokázána existence řešení této úlohy optimalizace (viz též [20], [27]).

V druhé části třetí kapitoly je formulována úloha optimalizace vnějšího tvaru regulačního proudového tělesa, jež je umístěno do osy systému a svým vnějším tvarem mění lokálně rychlost chladicí vody a tím i lokální intenzitu chlazení v jednotlivých částech dutiny razníku. Stavová úloha a účelový funkcionál jsou zde voleny shodně s předchozí částí. Je zde také dokázána existence řešení této úlohy optimalizace (viz též [18]).

Ve třetí části třetí kapitoly je formulována úloha optimalizace izolační bariéry ve tvaru kroužku proměnlivé tloušťky s výrazně menším koeficientem teplotní vodivosti než má razník, jež je umístěn v dutině razníku u jejího povrchu (mezi chladicí vodou a razníkem). Izolační bariéra tvoří překážku při přestupu tepla, čímž ovlivňuje lokální intenzitu chlazení vnějšího povrchu razníku. Stavová úloha a účelový funkcionál jsou zde opět voleny shodně s předchozími částmi. Je opět možné dokázat existenci řešení této úlohy optimalizace (viz též [36]).

Ve čtvrté části třetí kapitoly je formulována úloha identifikace koeficientů přestupu na hranicích mezi sklářskou formou a sklovinou, razníkem a sklovinou a sklářskou formou a vnějším prostředím. Za stavovou úlohu je opět zvolena variační formulace rovnice energie a účelový funkcionál je zde druhá mocnina $H^1_r$ normy na celé oblasti z rozdílu řešení stavové úlohy a funkce reprezentující naměřené hodnoty teplot v pevně daných bodech uvnitř razníku a sklářské formy, jež byly získány jako střední hodnoty teplot naměřených v těchto bodech (viz [5]). Je zde rovněž dokázána existence řešení této úlohy identifikace (viz též [28]).

V páté části třetí kapitoly je formulována úloha identifikace tepelného zdroje, která je řešena srovnáním řešení nestacionární smíšené úlohy A pro vedení tepla bez vnitřních zdrojů na podoblasti reprezentující skleněný výlisek, jež vede k požadovanému dochlazení povrchu skleněného výlisku v daném čase s řešením stacionární úlohy B s hledaným tepelným zdrojem. Výsledkem je funkční předpis pro tepelný zdroj z úlohy B ve tvaru lineární funkce řešení smíšené úlohy A (viz též [33]).

V šesté části třetí kapitoly je představena citlivostní analýza pro úlohu optimálního návrhu s izolační bariérou založená na homeomorfismu přenosu tepla z oblasti reprezentující skleněný výlisek do oblasti dutiny razníku (viz též [34]).

Ve čtvrté kapitole je prezentován numerický experiment pro optimalizaci vnitřního tvaru izolační bariéry na cílovou teplotu vnějšího povrchu razníku $800^o$C. Byly užity parametry vázy z olovnatého křišťálu převzaté z měření prováděných v roce 1999 (viz [5]). K numerickému výpočtu byl užit software FreeFem++, Version 3.19. Nejprve byl nalezen stacionární zdroj tepla v oblasti reprezentující sklovinu, jež byl použit ve všech iteracích úlohy optimalizace. V každé iteraci bylo nejprve nalezeno rychlostní pole chladicí vody pro daný tvar dutiny, následně zjištěno rozložení teploty v celém systému a stanoveny polohy nových řídících bodů hranice dutiny pro další iteraci. Bylo provedeno 99 iterací optimalizační úlohy. Hodnota účelového funkcionálu klesla z $\mathcal{J}^B_0 = 168\,334,33$ v počáteční

iteraci na $\mathcal{J}_{99}^{B} = 1,122$ v poslední iteraci.
Jsou prezentovány rozložení teplot v 10-té a 99-té iteraci včetně průběhu teploty podél vnějšího povrchu razníku v počáteční, 10-té, 20-té, 60-té a 99-té iteraci (viz též [34]).

V páté kapitole jsou shrnuty výsledky reálného experimentu, jenž byl proveden ve spolupráci s ing. M. Starým, Ph.D. a prezentován v [17], [19], [29] a [42]. Zde se statisticky prokázalo snížení střední hodnoty hodnot aproximací účelového funkcionálu dokonce na hladině významnosti $\alpha = 0,005$.

V závěru jsou uvedeny: číslo zápisu uděleného užitného vzoru a číslo uděleného patentu na „Razník pro tvarování skla lisováním“.

V dodatku je odvozena transformace variační formulace úloh do válcových souřadnic a použité existenční výsledky autorů Haslinger, J., Neittaanmäki, P. [2] a Hlaváček, I. [3].

V minulých letech byly postupné mezivýsledky v počátečním často syrovém tvaru prezentovány na řadě domácích a mezinárodních konferencí 2006 [10] a [11], 2007 [12] a [13], 2008 [14], 2009 [15], [16] a [17], 2010 [18], [19] a [42], 2011 [21], [22], [23] a [24], 2012 [25], [26] a [27], 2013 [28], [20], [29] a [30], 2014 [31], [32] a [33], 2015 [35] a [36], 2016 [37], 2017 [38], 2018 [39], 2019 [41].

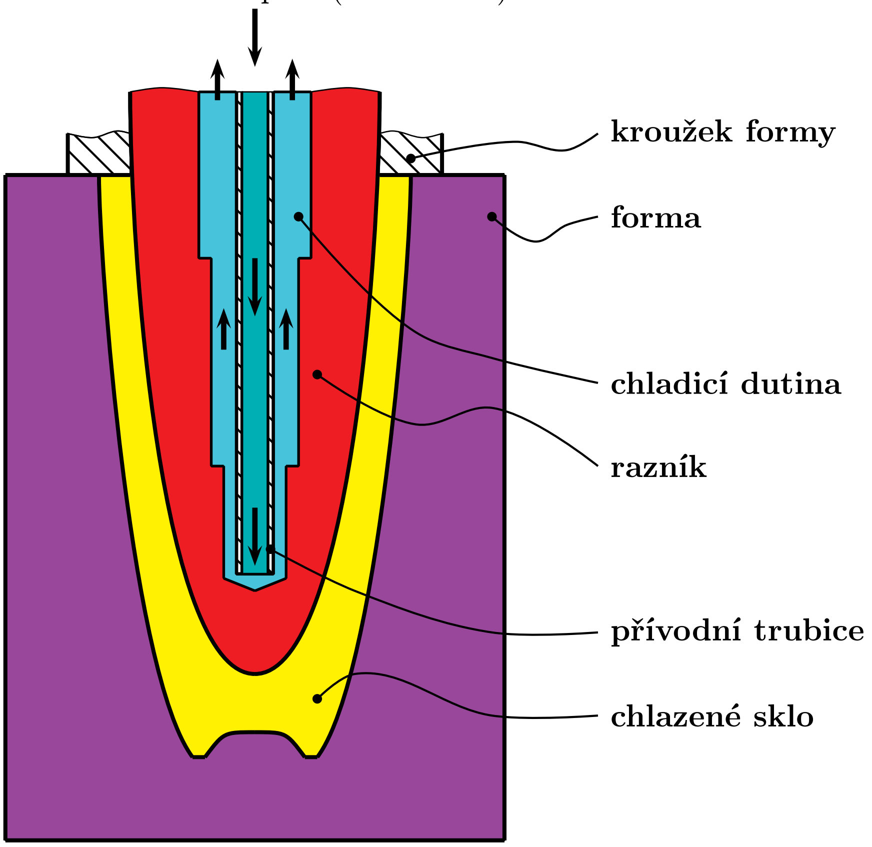
V době, kdy došlo k rozhodnutí tyto výsledky patentovat, bylo detailní publikování pozastaveno, neboť by mohlo ohrozit patentování výsledku, pokud by byl před podáním na Úřad průmyslového vlastnictví zveřejněn. V současné době je patent ve vlastnictví Technické univerzity v Liberci a je připraven ke komerčnímu využití.

V návaznosti na stacionární úlohu formulovanou pro střední hodnoty teplot v průběhu lisovacího cyklu byla společně s Mgr. J. Stebelem, Ph.D. rozpracována časově závislá úloha, ve které je užit model proudění chladící vody řízený Navier-Stokesovými rovnicemi (viz [40]). V práci byla dokázána existence řešení Navier-Stokesových rovnic omezených na množině přípustných oblastí. Pro danou přípustnou oblast a rychlostní pole byla dokázána existence a jednoznačnost slabého řešení úlohy pro vedení tepla užitím časové diskretizace a Banachovy věty o pevném bodě. Dále byla dokázána existence řešení úlohy optimálního návrhu. V budoucnu je plánováno zpracování numerické aproximace úlohy optimálního návrhu a provedení numerických simulací na testovací úloze pro vázu s parametry užitými v kapitole 4 (viz též [34]).

# Kapitola 1

# Technická motivace

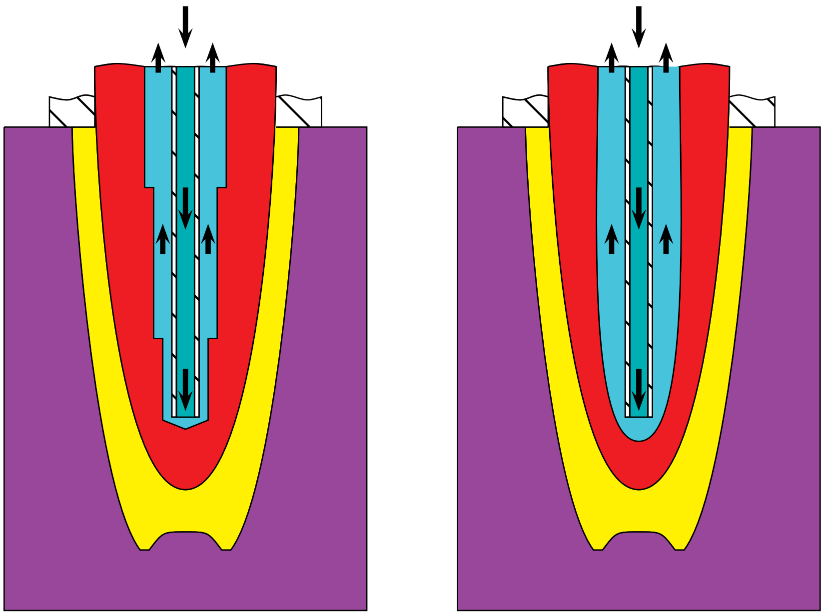
Lisování skleněné produkce se provádí na sklářských lisech do sklářských forem. Na počátku procesu je do sklářské formy dávkovačem vržena kapka tekuté skloviny o teplotě cca 1150°C. Následně shora sjede razník a tekutá sklovina vyplní celý prostor mezi formou a razníkem až po volně uložený kroužek formy, kterým je eliminováno kolísání objemu jednotlivých dávek. Razník setrvá v této poloze do doby, než sklovina ztuhne a potom vyjede zpět do horní polohy. Potom je zpravidla tří-segmentová forma rozevřena, výlisek odejmut a přemístěn do chladicí pece (viz obr. 1.1).




Obrázek 1.1: *Schéma systému forma, výlisek a razník s klasickou vrtanou odstupňovanou vnitřní dutinou.*

Cílem práce je optimalizovat tu část procesu chlazení, ve které je razník ve spodní poloze a probíhá chlazení výlisku nucenou kondukcí. Rozložení teplot na jeho povrchu v okamžiku vysunutí totiž zásadním způsobem ovlivňuje kvalitu vnitřního povrchu výlisku a tento povrch již nelze následně upravovat. Z hlediska kvality vnitřního povrchu výlisku je nutné zabezpečit, aby v okamžiku vyjmutí razníku z výlisku byla na jeho povrchu přibližně konstantní teplota optimální hodnoty. Je-li povrch razníku příliš teplý, dochází k lepení skloviny a při vysunutí razníku hrozí zničení výlisku a následné komplikace při jeho odejmutí z formy (často je nutné lisování přerušit). Je-li naopak povrch razníku příliš studený, vznikají na vnitřním povrchu výlisku trhlinky, které jsou považovány za výrobní vadu a nelze je již následně odstranit.
Teplota razníku se řídí pomocí chlazení proudící vodou vháněnou do dutiny razníku trubicí umístěnou v jeho ose. Voda se vrací zpět nahoru dutinou razníku a tím provádí jeho chlazení zevnitř.
Cílem práce je optimalizovat proces chlazení konstrukčními zásahy v oblasti dutiny razníku, jež by vedly v důsledku chlazení proudící vodou, k optimálnímu, předem zvolenému rozložení teploty na vnějším povrchu razníku.

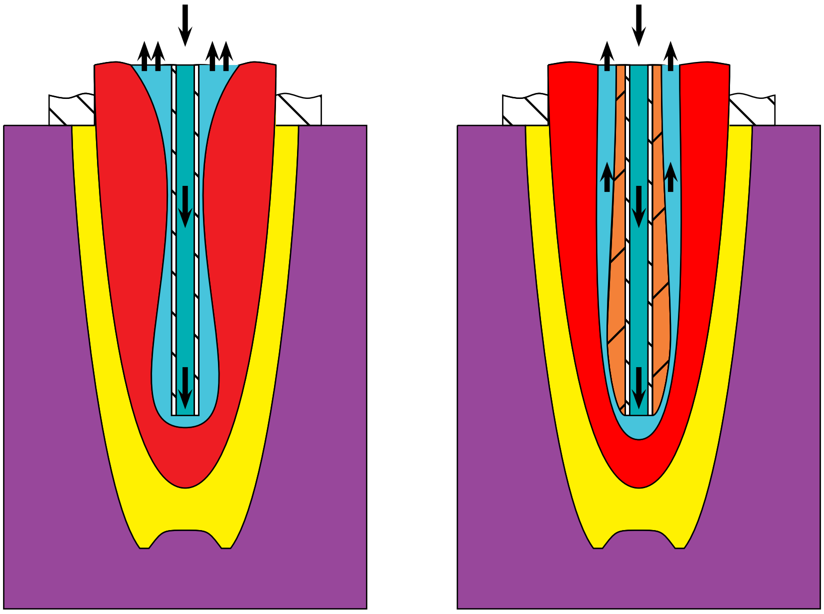
Existuje několik možností jak zvýšit kvalitu povrchu skleněné produkce a navíc zkrátit dobu potřebnou k vylisování jednoho kusu. Rozložení teploty v razníku můžeme řídit změnou tvaru chladicí dutiny, lokální změnou rychlosti chladicí látky, změnou tepelné vodivosti ve stěně razníku a změnou vlastností chladicí tekutiny.



Obrázek 1.2: *a) Původní konstrukce.* *b) Razník s optimalizovanou dutinou.*

Prvním způsobem jak řídit rozložení teploty podél vnějšího povrchu razníku je změna tvaru vnitřní chladicí dutiny umístěné v ose razníku. Razník je chlazen ustáleným proudem vody, která je přiváděna do nejhlubší části dutiny plnicí trubicí umístěnou v ose razníku. Voda na své cestě zpět chladí razník zevnitř. Původní konstrukce dutiny byla tvořena několika vrtanými dírami v ose razníku o různých průměrech a různých hloubkách (viz obr. 1.2a). Tato konstrukce způsobuje víry v proudící tekutině, což má negativní vliv na chlazení. Nová konstrukce (viz obr. 1.2b) má hladký povrch vnitřní dutiny a tím tvorbu těchto vírů značně eliminuje.

Je-li v některé části vnější povrch razníku příliš teplý, pak zde lokálně ztenčíme stěnu razníku, což povede k lokálnímu zvýšení intenzity chlazení. Naopak, je-li v nějakém místě vnější povrch razníku příliš studený, snížíme intenzitu chlazení rozšířením stěny razníku. Tato strategie má svá omezení a může vést k obtížně vyrobitelnému tvaru vnitřní dutiny znázorněné např. na obrázku 1.3a. V praxi je dutina zhotovována vyjiskřením, což znamená, že může zůstávat stejně široká nebo se rozšiřovat ve směru nahoru. Podrobná formulace úlohy, důkazy existence a jednoznačnosti řešení stavové úlohy a existence řešení úlohy optimálního návrhu jsou popsány v kapitole 3.1 viz též [20], [27]. Numerické výsledky jsou uvedeny v kapitole 4.1 viz též [34].



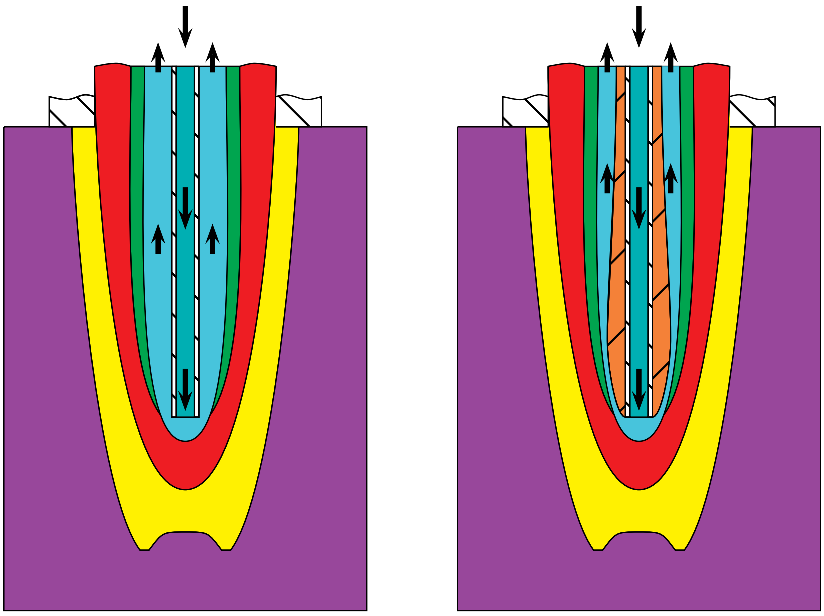
Obrázek 1.3: *a) Razník s nevyhovující dutinou.* *b) Razník s regulačním proudovým tělesem.*

Druhou možností jak řídit lokální intenzitu chlazení je změna rychlosti chladicí kapaliny, kterou docílíme změnou šířky mezery mezi vnitřní stěnou dutiny razníku a vnějším povrchem tzv. regulačního proudového tělesa (viz obr. 1.3b). Tento přístup dovoluje doplnit předešlou strategii řízení rozložení teploty podél vnějšího povrchu razníku a zvýšit její efektivitu.

Z tohoto důvodu nahradíme přívodní trubici, která je umístěna v ose dutiny, tzv. regulačním proudovým tělesem (je patentováno), jehož vnitřním kanálem přivádíme chladicí vodu do dutiny. Proměnlivá velikost mezery mezi jeho vnějším povrchem a vnitřní stěnou dutiny razníku řídí rychlost proudící chladicí vody. Jestliže potřebujeme v nějaké části vnějšího povrchu razníku zvýšit intenzitu chlazení, rozšíříme zde regulační proudové těleso, což vede k zmenšení mezery mezi jeho vnějším povrchem a vnitřním povrchem dutiny razníku. Důsledkem je lokální zvýšení rychlosti chladicí vody, což způsobí lokální zvýšení intenzity chlazení. Naopak nižší intenzitu chlazení dostaneme lokálním zmenšením

průměru regulačního proudového tělesa, což způsobí snížení rychlosti chladicí tekutiny v rozšířené mezeře.
Tento způsob řízení intenzity chlazení může částečně eliminovat případy, kdy je výsledkem úlohy optimalizace tvaru dutiny nevyrobitelný tvar. Detailněji je formulace, existence a jednoznačnost řešení stavové úlohy a existence řešení optimalizační úlohy pro tvar regulačního proudového tělesa popsána v kapitole 3.2.

Další možností řízení lokální intenzity chlazení je změna koeficientu tepelné vodivosti ve stěně razníku. Do dutiny razníku můžeme vložit tzv. izolační bariéru ve tvaru kroužku proměnlivé tloušťky s výrazně menším koeficientem vodivosti než má materiál razníku (viz obr. 1.4a). V místech, kde potřebujeme dosáhnout nižší intenzity chlazení, bude izolační bariéra tlustší a naopak tam, kde potřebujeme intenzivnější chlazení, bude tenčí nebo bude úplně chybět. Podrobná formulace úlohy je v kapitole 3.3 viz též [36].
Regulační proudové těleso a izolační bariéra mohou být použity v tvarově optimalizované dutině současně (viz obr. 1.4b).

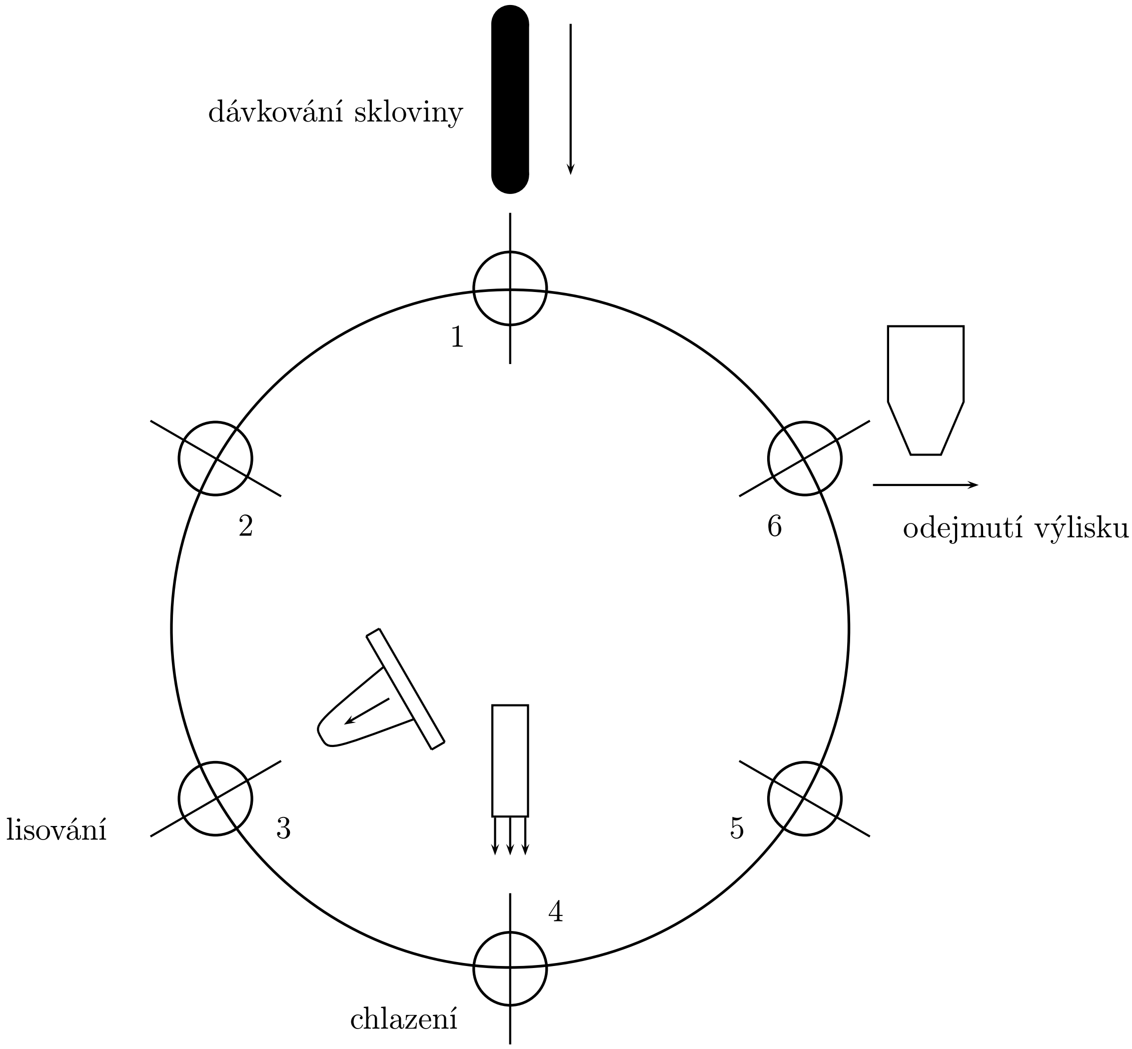


Obrázek 1.4: *a) Razník s izolační bariérou.* *b) Současné užití izolační bariéry a regulačního proudového tělesa.*

Dále může být použito chladicí médium s jinou tepelnou kapacitou, jiným koeficientem tepelné vodivosti, vyšším bodem varu, jinou viskozitou, atd. Další možností je měnit objem, respektive teplotu vstřikovaného chladicího média v průběhu lisovacího cyklu, což vede na časově závislé periodické úlohy optimalizace.

Numerické výpočty byly motivovány sérií měření, které provedli v průběhu roku 1999 pracovníci Katedry sklářských a keramických strojů, Fakulty strojní, Technické univerzity v Liberci, ing. Ivo Matoušek a ing. Jan Cibulka, CSc., a následně je publikovali ve výzkumné zprávě [5]. Ve studii jsou vyhodnocena měření teploty v předem zvolených místech razníku a formy v průběhu tvarovacího cyklu na karuselovém lisu. K měření byly užity jednak dotykové termočlánky a teploměry a jednak bezdrátově připojené radiační pyrometry.

Hlavní pozornost byla věnována vyhodnocení výsledků získaných z měření termočlánky u konkrétního výrobku, kde bylo prováděno lisování razníkem s válcovou (vrtanou) chladicí dutinou, jejíž průměr a hloubka byly stanoveny na základě empirických zkušeností.

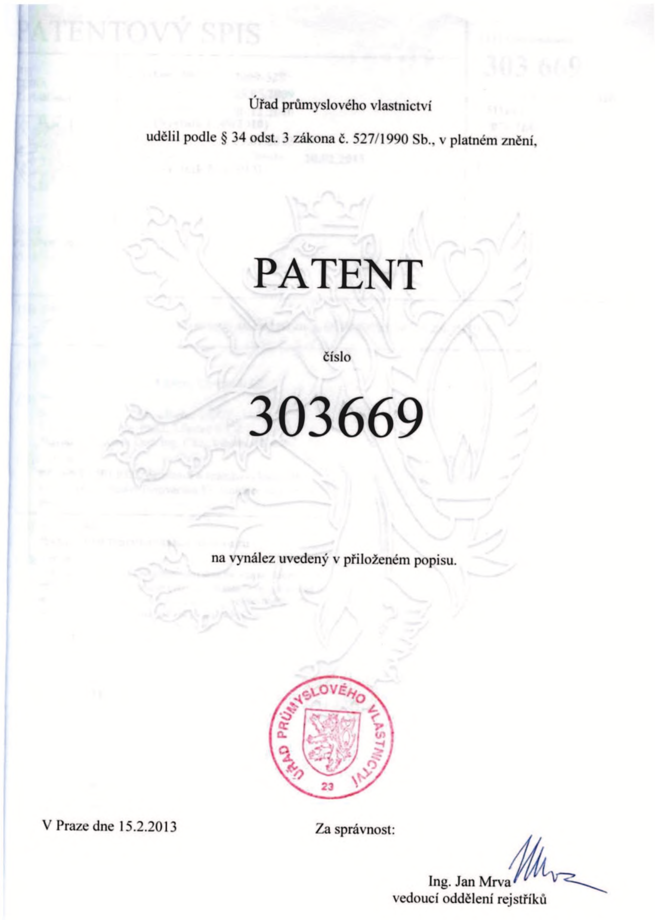



Obrázek 1.5: *Schéma karuselového lisu.*

Lisování skleněné vázy o výšce 267 mm a hmotnosti 1,55 kg z olovnatého křišťálu bylo prováděno v tří-segmentové formě, vyrobené z austenitické chromniklové oceli ČSN 17 255, kroužek, razník, dýnko a koš sklářské formy byly z feritické šedé litiny. Celková délka pracovního cyklu lisu byla 162 sekund, přičemž pracovní cyklus razníku trval 27 sekund. V pozici 1. docházelo k dávkování skloviny v průběhu první sekundy, následovalo pootočení do pozice 3. a v čase od 3,5 do 4,5 probíhalo lisování. V době od 4,5 do 13,5 probíhalo chlazení vázy nucenou kondukcí s razníkem v dolní poloze, v čase 13,5 následovalo zvednutí razníku a chladnutí vázy ve formě volnou konvekcí na vnitřní straně a nucenou kondukcí na vnější straně vázy (tj. směrem do formy) do času 88, kdy nastalo vyjmutí vázy z formy a příprava formy na lisování dalšího kusu až do času 162.
Technické parametry této konkrétní vázy včetně dob chlazení v jednotlivých časových

úsecích výrobního cyklu byly užity pro stanovení tepelných toků při numerické realizaci stavové úlohy.

Matematický model je silnou idealizací nestacionární periodické úlohy pro vedení tepla. Vzhledem k poměrně malému kolísání teploty v bodech měření uvažujeme úlohu ustáleného vedení tepla pro střední hodnoty teplot tohoto periodického děje.
V rámci výzkumného záměru č. MSM 4674788501 bylo na Katedře Sklářských strojů a robotiky, Fakulty strojní ve spolupráci s ing. Michalem Starým, Ph.D. realizováno laboratorní ověření účinnosti užití proudového regulačního tělesa v cínové lázni. Výsledky experimentu jsou shrnuty v kapitole 5 viz též [17], [19], [29] a [42].


Úřad průmyslového vlastnictví

udělil podle § 34 odst. 3 zákona č. 527/1990 Sb., v platném znění,

PATENT

číslo

303669

na vynález uvedený v přiloženém popisu.

ÚŘAD PRŮMYSLOVÉHO VLASTNICTVÍ 23

V Praze dne 15.2.2013

Za správnost:

Ing. Jan Mrva
vedoucí oddělení rejstříků

Obrázek 1.6: *Patent s názvem Razník pro tvarování skla lisováním.*

# Kapitola 2

# Formulace stavové úlohy

## 2.1 Popis proudění vody v dutině razníku

Pro zjednodušení popisu systému forma, skleněný výlisek, razník a dutina razníku zavedeme přirozený předpoklad rotační symetrie, neboť se jedná o lisování skleněné vázy. Abychom mohli požít popis systému pomocí rotačních těles ohraničených plochami vzniklými rotací funkcí jedné reálné proměnné, bude vhodnější úlohy uvažovat „na ležato“, tj. razník popíšeme následujícím způsobem.

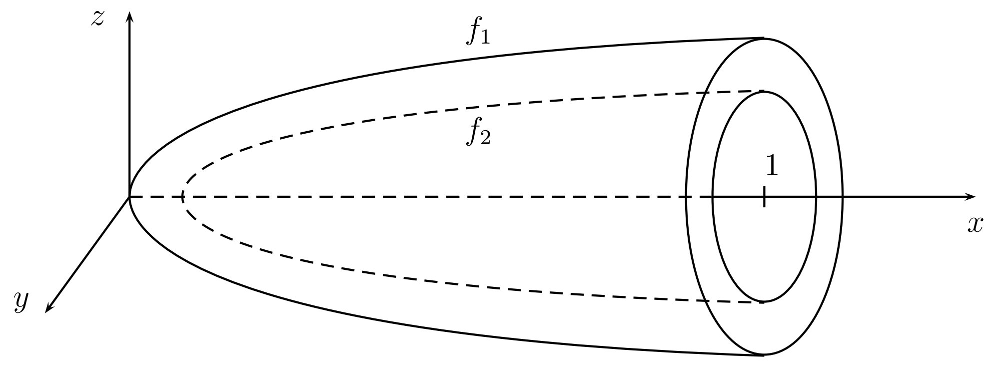
Nejprve označme

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in [0,\, x_2[ \\ f_2(x) & \text{pro} \quad x \in [x_2,\, 1] \end{cases} \quad ,$$

kde $x_2 \in [s_{\min},\, 1]$, ($s_{\min} > 0$ je pevná konstanta daná minimální přípustnou tloušťkou stěny razníku), $f_2 \in C^{(0),1}([x_2,\, 1])$ (lipschitzovská funkce), $f_2(x_2) = 0$ a $0 \le f_2(x) \le f_1(x) - s_{\min}$, $|f_2'(x)| < C_D$ pro $x \in ]x_2, 1]$.
Mějme dánu homogenní isotropní rotačně symetrickou oblast, jež reprezentuje razník

$$G_{Pl} = \{(x,\, y,\, z\,) \in R^3\,; F_2(x) < \sqrt{y^2 + z^2} < f_1(x),\, 0 \le F_2(x) < f_1(x) \ \ \text{pro} \ \ x \in [0,\, 1]\} \ ,$$

kde $f_1$, $F_2$ je dvojice pevně daných funkcí, přičemž $f_1$ je navíc rostoucí.




Obrázek 2.1: *Schéma razníku „na ležato“ pro zjednodušení matematického popisu.*

Dále označíme

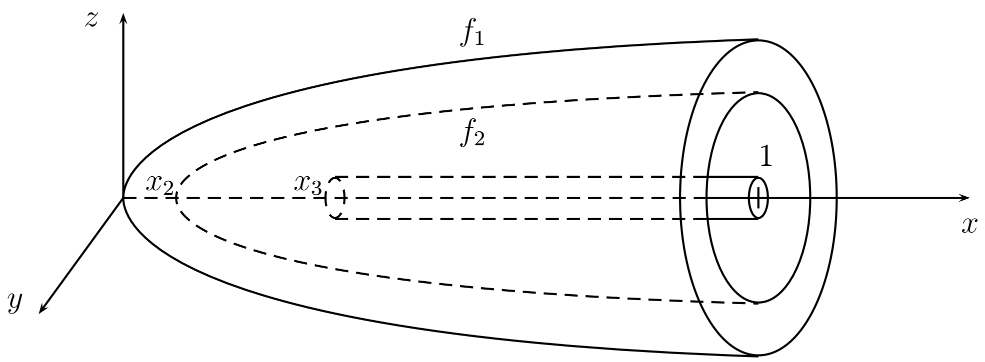
$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in [x_2, x_3[ \\ a & \text{pro} \quad x \in [x_3, 1] \end{cases} ,$$

kde $x_3 \in ]x_2, 1]$, $a > 0$ konstanta reprezentující poloměr chladicí trubice, $a \leq f_2(x) - s_2$ pro $x \in [x_3, 1]$ a $s_2 > 0$ značí minimální přípustnou šířku mezery mezi stěnou dutiny razníku a přívodní trubicí.

**Poznámka.**
*Podmínka $|f_2'(x)| < C_D$, která způsobuje „špičku" v nejnižším bodě dutiny razníku, může být vynechána a nahrazena malým pootočením systému v negativním smyslu v důkazu existence řešení úlohy optimálního návrhu.*

Dutinu razníku označíme jako rotačně symetrickou oblast

$$G_{Ca} = \{(x,\, y,\, z\,) \in R^3\,; F_3(x) < \sqrt{y^2+z^2} < f_2(x), \quad \text{pro} \;\; x \in [x_2,\, 1]\} \;,$$




Obrázek 2.2: *Schéma razníku s trubicí pro přivádění chladicí vody.*

s hranicí $\partial G_{Ca}$ tvořenou sjednocením čtyř částí $\partial G_{Ca} = \Gamma_2^{3D} \cup \Gamma_5^{3D} \cup \Gamma_{in}^{3D} \cup \Gamma_{out}^{3D}$, kde

$$\begin{aligned}
\Gamma_2^{3D} &= \{(x,y,z) \in R^3; x_2 \leq x \leq 1 \;\wedge\; f_2^2(x) = y^2+z^2\} \;, \\
\Gamma_5^{3D} &= \{(x,y,z) \in R^3; x_3 \leq x \leq 1 \;\wedge\; y^2+z^2 = a^2\} \;, \\
\Gamma_{in}^{3D} &= \{(x,y,z) \in R^3; x = x_3 \;\wedge\; y^2+z^2 \leq a^2\} \;, \\
\Gamma_{out}^{3D} &= \{(x,y,z) \in R^3; x = 1 \;\wedge\; a^2 \leq y^2+z^2 \leq f_2^2(1)\} \;.
\end{aligned}$$

V oblasti $G_{Ca}$ proudí chladicí voda, která tam vstupuje hranicí $\Gamma_{in}^{3D}$ a odtéká hranicí $\Gamma_{out}^{3D}$. Předpokládáme, že je její pohyb popsán potenciálním prouděním nestlačitelné Newtonovské tekutiny. Potenciál tohoto proudění $\Phi$ je dán jako řešení Neumannovy úlohy

$$\Delta\Phi = 0 \qquad \text{v} \;\; G_{Ca} \;, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = g^{3D} \qquad \text{na} \;\; \partial G_{Ca} \;, \tag{2.2}$$

kde $g^{3D} \in L^2(\partial G_{Ca})$ reprezentující normálovou složku rychlosti na hranici dutiny razníku je ve tvaru

$$g^{3D} = \begin{cases} 0 & \text{na} \quad \Gamma_2^{3D} \cup \Gamma_5^{3D} \ , \\ h_{velo}^{in} & \text{na} \quad \Gamma_{in}^{3D} \ , \\ h_{velo}^{out} & \text{na} \quad \Gamma_{out}^{3D} \ , \end{cases} \tag{2.3}$$

$h_{velo}^{in}$ je normálová rychlost na vstupu $\Gamma_{in}^{3D}$, ($h_{velo}^{in} < 0$) a $h_{velo}^{out}$ normálová rychlost na výstupu $\Gamma_{out}^{3D}$.
Dále předpokládáme

$$\int_{\Gamma_{in}^{3D} \cup \Gamma_{out}^{3D}} g^{3D} \, dS = 0 \ . \tag{2.4}$$

Variační formulaci úlohy pro nalezení potenciálu rychlosti dostaneme ve tvaru

$$\int_{G_{Ca}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dV = \int_{\Gamma_{in}^{3D} \cup \Gamma_{out}^{3D}} g^{3D} \varphi \, dS \qquad \forall \varphi \in H^1(G_{Ca}) \ . \tag{2.5}$$

Rychlostní pole proudící vody $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ v dutině razníku $G_{Ca}$ dostaneme ve tvaru

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{grad} \Phi \ . \tag{2.6}$$

**Věta 2.1.1.** *(existence a jednoznačnost rychlostního pole)*
*Za předpokladu (2.4) existuje jediné rychlostní pole ve tvaru (2.6). Navíc platí následující odhad euklidovské normy*

$$\| |\boldsymbol{u}| \|_{L^2(G_{Ca})} \le c \left( \| h_{velo}^{in} \|_{L^2(\Gamma_{in}^{3D})} + \| h_{velo}^{out} \|_{L^2(\Gamma_{out}^{3D})} \right) \ . \tag{2.7}$$

*Důkaz.* (viz též [20]) Dle Věty 35.1 (viz [6] strana 423) existuje jediné slabé řešení $\Phi \in H^1(G_{Ca})$ Neumannovy úlohy (2.5), které splňuje podmínku

$$\int_{G_{Ca}} \Phi \, dV = 0 \tag{2.8}$$

a platí pro něj odhad

$$\| \Phi \|_{H^1(G_{Ca})} \le c \| g^{3D} \|_{L^2(\partial G_{Ca})} \ . \tag{2.9}$$

Dále ze vztahu (2.6) dostaneme

$$\| \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \|_{L^2(G_{Ca})} \le \| \Phi \|_{H^1(G_{Ca})} \ , \tag{2.10}$$

což společně s

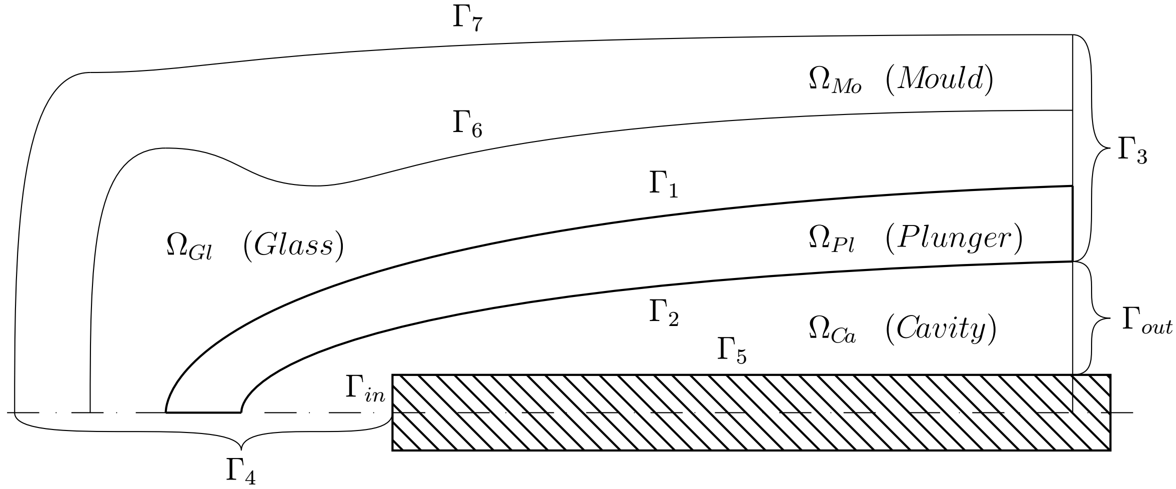
$$\| g^{3D} \|_{L^2(\partial G_{Ca})} = \| h_{velo}^{in} \|_{L^2(\Gamma_{in}^{3D})} + \| h_{velo}^{out} \|_{L^2(\Gamma_{out}^{3D})} \tag{2.11}$$

dává (2.7). □

Vzhledem k předpokládané rotační symetrii celého systému přijmeme předpoklad o rotační symetrii i pro rychlostní pole proudící chladicí tekutiny.
Úlohu tedy transformujeme do válcových souřadnic

$$\begin{aligned} x &= x\,, \\ y &= r\cos\varphi\,, \\ z &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

a následně provedeme dimenzionální redukci do souřadnic $x$, $r$. Úlohu chlazení proudící vodou zasadíme do širšího kontextu popisujícího chlazení razníku při lisování skla.




Obrázek 2.3: *Schematické znázornění systému forma, výlisek, razník, dutina razníku a trubice pro přivádění chladicí vody.*

Uvažujme rovinnou oblast $\Omega = \mathrm{Int}\,\overline{\Omega_{Pl} \cup \Omega_{Gl} \cup \Omega_{Ca} \cup \Omega_{Mo}}$, jež reprezentuje rovinný řez systémem forma, výlisek, razník a chladicí dutina razníku (viz obr. 2.3). Oblast $\Omega_{Pl}$ reprezentuje razník (rovinný řez oblastí $G_{Pl}$), oblast $\Omega_{Gl}$ chlazený skleněný výlisek, oblast $\Omega_{Ca}$ chladicí dutinu uvnitř razníku, ve které proudí chladicí voda (rovinný řez oblastí $G_{Ca}$), a $\Omega_{Mo}$ reprezentuje sklářskou formu. Dále označíme $\Gamma_1$ hranici mezi razníkem $\Omega_{Pl}$ a skleněným výliskem $\Omega_{Gl}$ a $\Gamma_2$ hranici mezi razníkem $\Omega_{Pl}$ a dutinou razníku $\Omega_{Ca}$ (rovinný řez hranicí $\Gamma_2^{3D}$). Dále označíme $\Gamma_3$ část hranice spojující systém forma, výlisek a razník s lisem a $\Gamma_4$ označíme část osy symetrie vyznačené na obr. 2.3. Dále označíme $\Gamma_5$ část hranice tvořené trubicí přivádějící chladicí médium do dutiny razníku (dříve hranice $\Gamma_5^{3D}$), $\Gamma_6$ část hranice mezi výliskem $\Omega_{Gl}$ a sklářskou formou $\Omega_{Mo}$ a $\Gamma_7$ vnější hranici sklářské formy, jež je obklopena vnějším prostředím. $\Gamma_{in}$ označuje část hranice, kterou je chladicí kapalina přiváděna do dutiny razníku (dříve hranice $\Gamma_{in}^{3D}$) a $\Gamma_{out}$ část hranice, kterou kapalina odtéká (v původním modelu $\Gamma_{out}^{3D}$).
Po transformaci do válcových souřadnic dostaneme operátory:

$$A_{\Omega_{Ca}}(\Phi,\, \varphi) = \int_{\Omega_{Ca}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) r\, \mathrm{d}\Omega\,, \tag{2.12}$$

$$G_\Gamma(\varphi) = \int_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} g\varphi r\, \mathrm{d}\Gamma\,, \tag{2.13}$$

kde $g \in L^2_r(\partial\Omega_{Ca})$ reprezentující normálovou složku rychlosti na hranici dutiny razníku je ve tvaru

$$g = \begin{cases} 0 & \text{na} \quad \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \ , \\ h^{in}_{velo} & \text{na} \quad \Gamma_{in} \ , \\ h^{out}_{velo} & \text{na} \quad \Gamma_{out} \ , \end{cases} \tag{2.14}$$

$h^{in}_{velo}$ je normálová rychlost na vstupu $\Gamma_{in}$, ($h^{in}_{velo} < 0$) a $h^{out}_{velo}$ normálová rychlost na výstupu $\Gamma_{out}$.
Předpoklad (2.4) se transformuje do tvaru

$$\int_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} g\, r\, d\Gamma = 0 \ . \tag{2.15}$$

Označme $H^1_r(\Omega_{Ca})$ (viz [4]) váhový Sobolevův prostor s normou

$$\|v\|_{1,r,\Omega_{Ca}} = \left( \int_{\Omega_{Ca}} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + v^2 \right] r \, \mathrm{d}\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \ . \tag{2.16}$$

Variační formulaci Neumannovy úlohy pro nalezení potenciálu rychlosti proudící vody dostaneme ve tvaru

$$A_{\Omega_{Ca}}(\Phi, \varphi) = G_\Gamma(\varphi) \qquad \forall \varphi \in H^1_r(\Omega_{Ca}) \ . \tag{2.17}$$

Rychlostní pole proudící vody $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$ v dutině razníku $\Omega_{Ca}$ dostaneme ve tvaru

$$\boldsymbol{w} = \mathrm{grad}\Phi \ . \tag{2.18}$$

**Věta 2.1.2.** *(existence a jednoznačnost rychlostního pole ve 2D)*
*Za předpokladu (2.15) existuje jediné rychlostní pole ve tvaru (2.18). Navíc platí následující odhad euklidovské normy*

$$\| |\boldsymbol{w}| \|_{L^2_r(\Omega_{Ca})} \le c \left( \|h^{in}_{velo}\|_{L^2_r(\Gamma_{in})} + \|h^{out}_{velo}\|_{L^2_r(\Gamma_{out})} \right) \ . \tag{2.19}$$

*Důkaz.* Větu 2.1.1 transformujeme do válcových souřadnic a následně provedeme dimenzionální redukci. □

## 2.2 Vedení tepla v systému

Vedení tepla v tekutině proudící rychlostí $\boldsymbol{u}$ je popsáno (viz [1] str. 26) rovnicí energie pro Newtonovskou tekutinu ve tvaru

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{div}(E\boldsymbol{u}) = \varrho \boldsymbol{f}\boldsymbol{u} - \mathrm{div}(p\boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\lambda \boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(2\mu D(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}) + \varrho q - \mathrm{div}\boldsymbol{q} \quad , \tag{2.20}$$

kde

$$E = \varrho\left(e + \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2}\right) \tag{2.21}$$

značí hustotu celkové energie, $\varrho$ hustotu proudící tekutiny,

$$e = c_v \vartheta \tag{2.22}$$

specifickou vnitřní energii, $c_v$ specifické teplo při konstantním objemu, $\vartheta$ absolutní teplotu, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ vektor rychlosti proudící tekutiny, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ hustotu objemových sil, $p$ tlak proudící tekutiny, $\lambda$ druhý koeficient vazkosti, $\mu$ dynamickou viskozitu,

$$D(\boldsymbol{u}) = (d_{ij})_{i,j=1}^3, \qquad d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.23}$$

tenzor rychlosti deformace,

$$\boldsymbol{q} = -k\,\mathrm{grad}\vartheta \tag{2.24}$$

tepelný tok, $k$ koeficient teplotní vodivosti tekutiny a $q$ objemovou hustotu tepelných zdrojů.
Dosazením (2.21), (2.22) a (2.24) do rovnice energie (2.20) dostaneme

$$\varrho\left[c_v\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2}\right) + c_v \mathrm{grad}\vartheta.\boldsymbol{u} + c_v\vartheta \mathrm{div}\boldsymbol{u} + \mathrm{grad}\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2}.\boldsymbol{u} + \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2}\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right] =$$

$$= \varrho\boldsymbol{f}\boldsymbol{u} - \mathrm{grad}p.\boldsymbol{u} - p.\mathrm{div}\boldsymbol{u} + \mathrm{div}(\lambda\boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(2\mu D(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}) + \varrho q + k\Delta\vartheta \quad , \tag{2.25}$$

neboť pro součin funkce $g$ a vektorové funkce $\boldsymbol{v}$ platí

$$\mathrm{div}(g\boldsymbol{v}) = \mathrm{grad}g.\boldsymbol{v} + g.\mathrm{div}\boldsymbol{v}\,.$$

V dutině razníku uvažujeme zjednodušený model pro potenciální proudění, tj. stacionární, nevazké, nestlačitelné a nevířivé proudění Newtonovské tekutiny, tedy

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0\,, \tag{2.26}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{u} = 0\,, \tag{2.27}$$

$$p = \varrho\left(\mathrm{const} - \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + U\right)\,, \tag{2.28}$$

$$\mu = 0\,, \tag{2.29}$$

kde $U$ značí potenciál objemových sil a tedy

$$\boldsymbol{f} = \mathrm{grad}U\,. \tag{2.30}$$

Dle (2.26) je tedy čtvrtý, šestý, devátý a desátý člen v (2.25) roven nule a rovnice energie přejde do tvaru

$$\varrho \left[ c_v \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} \right) + c_v \mathrm{grad} \vartheta . \boldsymbol{u} + \mathrm{grad} \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} . \boldsymbol{u} \right] =$$

$$= \varrho \boldsymbol{f} \boldsymbol{u} - \mathrm{grad} p . \boldsymbol{u} + \mathrm{div}(2\mu D(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}) + \varrho q + k \Delta \vartheta \quad . \tag{2.31}$$

Tlak je určen Bernoulliho rovnicí (2.28), kde $U$ je potenciál objemových sil, tedy

$$\mathrm{grad} p = -\varrho \, \mathrm{grad} \left( \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} \right) + \varrho \boldsymbol{f} \ .$$

Rovnice energie přejde tedy do tvaru

$$\varrho \left[ c_v \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} \right) + c_v \mathrm{grad} \vartheta . \boldsymbol{u} \right] = \mathrm{div}(2\mu D(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}) + \varrho q + k \Delta \vartheta \quad . \tag{2.32}$$

V úloze předpokládáme v oblasti $G_{Ca}$ stacionární proudění pro nevazkou tekutinu s ustálenou teplotou, tedy budeme předpokládat $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} \right) = 0$, $\mu = 0$ a $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$. Rovnice (2.32) přejde do tvaru

$$c_v \varrho \, \mathrm{grad} \vartheta . \boldsymbol{u} - k \Delta \vartheta = \varrho q \quad . \tag{2.33}$$

V dutině razníku reprezentované oblastí $G_{Ca}$ uvažujeme nulovou hustotu tepelných zdrojů, tedy $q = 0$. Rovnice (2.33) přejde tady do tvaru

$$c_v \varrho \, \mathrm{grad} \vartheta . \boldsymbol{u} - k \Delta \vartheta = 0 \quad . \tag{2.34}$$

Razník, jenž je reprezentován rotační oblastí $G_{Pl}$, vede teplo podle rovnice vedení tepla bez vnitřních zdrojů, tj.

$$-k_0 \Delta \vartheta = 0 \quad , \tag{2.35}$$

kde $k_0$ je koeficient teplotní vodivosti materiálu razníku.
Razník je z vnější strany obklopen skleněným výliskem, který popíšeme jako oblast $G_{Gl}$ vzniklou rotací oblasti $\Omega_{Gl}$ (viz obr. 2.3) kolem osy $x$. Do této oblasti je v pravidelných intervalech dodáváno teplo v podobě kapek žhavé skloviny. Proto zde budeme uvažovat ustálené vedení tepla s tepelným zdrojem daným funkcí $q_1 > 0$, tj. šíření tepla popíšeme rovnicí

$$-k_1 \Delta \vartheta = \varrho_1 q_1 \quad , \tag{2.36}$$

kde $k_1$ značí koeficient teplotní vodivosti skloviny a $q_1 > 0$, $q_1 \in C(G_{Gl})$ již zmíněný tepelný zdroj.
Skleněný výlisek je ve sklářské formě, kterou popíšeme jako oblast $G_{Mo}$ vzniklou rotací oblasti $\Omega_{Mo}$ (viz obr. 2.3) kolem osy $x$. Zde dochází k vedení tepla bez vnitřních zdrojů, tj. pro popis užijeme rovnici

$$-k_3 \Delta \vartheta = 0 \quad , \tag{2.37}$$

kde $k_3$ je koeficient teplotní vodivosti materiálu formy. Odtud je teplo odváděno konvekcí do okolního prostředí.

Symbolem $G = \mathrm{Int}\,\overline{G_{Pl} \cup G_{Gl} \cup G_{Ca} \cup G_{Mo}}$ označme sjednocení jednotlivých částí systému razník, výlisek, dutina razníku a forma. Pro lepší orientaci formálně rozdělíme označení pro hledanou funkci $\vartheta$ reprezentující rozložení teploty v systému na součet čtyř funkcí

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \ ,$$

kde

$$\vartheta_i = \begin{cases} \vartheta|_{G_i} & \text{v} \quad G_i \\ 0 & \text{v} \quad G \setminus G_i \end{cases} \qquad \text{pro} \quad i = 0,\, 1,\, 2,\, 3 \ , \tag{2.38}$$

($G_0 \equiv G_{Pl}$, $G_1 \equiv G_{Gl}$, $G_2 \equiv G_{Ca}$, $G_3 \equiv G_{Mo}$).
Dále symbolem $\vartheta_i|_{\Gamma_j^{3D}}$ označíme stopu řešení $\vartheta_i$ na hranici $\Gamma_j^{3D}$, je-li $\Gamma_j^{3D}$ část hranice $G_i$ pro $i = 0, 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ($\Gamma_8^{3D} = \Gamma_{in}^{3D},\ \Gamma_9^{3D} = \Gamma_{out}^{3D}$).

**Uvažujeme následující přechodové podmínky:**

Přestup tepla hranicí $\Gamma_2^{3D}$, tj. mezi razníkem a chladicí vodou, modelujeme pomocí hraniční podmínky pro dotyk dvou těles (viz [43] str. 128) tedy

$$-k_0 \left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial n} \right)^- = k_2 \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} \right)^- \qquad \text{na} \quad \Gamma_2^{3D} \ , \tag{2.39}$$

kde $\frac{\partial}{\partial n}$ značí derivaci podle vnější normály vzhledem k oblasti $G_{Pl}$.

Pro popis přestupu tepla hranicí mezi výliskem a razníkem užijeme hraniční podmínku dotyku dvou těles, při němž dochází u jednoho z nich k přeměně jeho skupenství vlivem tuhnutí (viz [43] str. 128). Tedy

$$k_1 \left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} \right)^+ - k_0 \left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial n} \right)^- = \beta_1 \qquad \text{na} \quad \Gamma_1^{3D} \ , \tag{2.40}$$

kde $\beta_1$ představuje měrný tok přeměňované hmotnosti tělesa, $\frac{\partial}{\partial n}$ značí derivaci podle vnější normály vzhledem k oblasti $G_{Pl}$, "+" limitu ve směru normály k hranici z vnější a "-" z vnitřní strany $G_{Pl}$.
Aplikujeme-li podmínku (2.40) pro oblast $G_{Pl}$ (razník), dostaneme

$$\left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial n} \right)^- = \frac{k_1}{k_0} \left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} \right)^+ - \frac{\beta_1}{k_0} \qquad \text{na} \quad \Gamma_1^{3D} \ , \tag{2.41}$$

kde $\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial n}\right)^+$ je limita ve směru normály z vnitřku $G_{Gl}$.
Analogicky pro oblast $G_{Gl}$ (skleněný výlisek) z (2.40) dostaneme

$$\left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} \right)^+ = \frac{k_0}{k_1} \left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial n} \right)^- + \frac{\beta_1}{k_1} \qquad \text{na} \quad \Gamma_1^{3D} \ , \tag{2.42}$$

kde $\left(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial n}\right)^-$ značí limitu ve směru normály z vnitřku $G_{Pl}$.

Stejným způsobem pro popis přestupu tepla hranicí mezi sklovinou a formou užijeme hraniční podmínku dotyku dvou těles, při němž dochází u jednoho z nich k přeměně jeho skupenství vlivem tuhnutí. Tedy

$$k_1 \left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} \right)^+ - k_3 \left( \frac{\partial \vartheta_3}{\partial n} \right)^- \;=\; \beta_6 \qquad \text{na} \quad \Gamma_6^{3D} \;, \tag{2.43}$$

kde $\beta_6$ představuje měrný tok přeměňované hmotnosti tělesa, $\frac{\partial}{\partial n}$ značí derivaci podle vnější normály vzhledem k oblasti $G_{Mo}$, "+" limitu ve směru normály k hranici z vnější a "-" z vnitřní strany $G_{Mo}$.
Podmínku pro oblast $G_{Gl}$ (skleněný výlisek) dostaneme z (2.43) ve tvaru

$$\left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} \right)^+ = \frac{k_3}{k_1} \left( \frac{\partial \vartheta_3}{\partial n} \right)^- + \frac{\beta_6}{k_1} \qquad \text{na} \quad \Gamma_6^{3D} \;, \tag{2.44}$$

kde $\left(\frac{\partial \vartheta_3}{\partial n}\right)^-$ značí limitu ve směru normály z vnitřku $G_{Mo}$.
Analogicky z druhé strany pro oblast $G_{Mo}$ (sklářskou formu) dostaneme z (2.43) okrajovou podmínku

$$\left( \frac{\partial \vartheta_3}{\partial n} \right)^- = \frac{k_1}{k_3} \left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} \right)^+ - \frac{\beta_6}{k_3} \qquad \text{na} \quad \Gamma_6^{3D} \;, \tag{2.45}$$

kde $\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial n}\right)^+$ značí limitu ve směru normály z vnitřku $G_{Gl}$.
Měrný tok přeměňované hmotnosti tělesa $\beta_1$, resp. $\beta_6$ z podmínek (2.40), resp. (2.43) reprezentuje energii potřebnou k tuhnutí skloviny. Dle [43] str. 128 je ho možné vyjádřit ve tvaru

$$\beta = w_s \varrho_1 E_s \;,$$

kde $w_s$ představuje tzv. rychlost přemísťování čela přeměny, $\varrho_1$ měrnou hmotnost tuhnoucí hmoty tělesa a $E_s$ energii potřebnou k přeměně jednotkové hmotnosti tělesa.

**Uvažujeme následující okrajové podmínky:**
Chladicí trubici uvažujeme jako izolant, tedy

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} = 0 \qquad \text{na} \quad \Gamma_5^{3D} \;. \tag{2.46}$$

Přestup tepla hranicí $\Gamma_7^{3D}$ mezi sklářskou formou a okolním prostředím, modelujeme pomocí hraniční podmínky třetího druhu pro kontakt tělesa s prostředím, tedy

$$-k_3 \left( \frac{\partial \vartheta_3}{\partial n} \right)^- = \alpha(\vartheta_3|_{\Gamma_7^{3D}} - \vartheta_{ext}) \qquad \text{na} \quad \Gamma_7^{3D} \;, \tag{2.47}$$

kde $\frac{\partial}{\partial n}$ značí derivaci podle vnější normály vzhledem k oblasti $G_{Mo}$, "-" limitu ve směru normály k hranici z vnitřní strany $G_{Mo}$, $\alpha$ značí součinitel přestupu tepla mezi formou a okolním prostředím, $\vartheta_3|_{\Gamma_7^{3D}}$ teplotu povrchu sklářské formy (stopu teploty $\vartheta_3$ jakožto řešení na oblasti $G_{Mo}$) a $\vartheta_{ext}$ teplotu vnějším prostředí (teplota vzduchu v daném bodě).

Na ústí chladicí trubice do dutiny razníku $\Gamma_{in}^{3D}$ předpokládáme konstantní teplotu 15°C, tj. 288 K, tedy

$$\vartheta_2|_{\Gamma_{in}^{3D}} = 288 \qquad \text{na} \quad \Gamma_{in}^{3D} \;. \tag{2.48}$$

Na výstupu z dutiny razníku $\Gamma^{3D}_{out}$ předpokládáme, že je rozložení teploty dáno funkcí $h_{out} \in C(\Gamma^{3D}_{out})$, tedy

$$\vartheta_2|_{\Gamma^{3D}_{out}} = h_{out} \qquad \text{na } \Gamma^{3D}_{out} \,. \tag{2.49}$$

Hraniční podmínka na hranici s lisem je dána jako

$$\vartheta_i|_{\Gamma^{3D}_3} = h_3 \qquad \text{na } \Gamma^{3D}_3 \;\; i = 0,\, 1,\, 3 \,, \tag{2.50}$$

kde $h_3 \in C(\Gamma^{3D}_3)$ je ustálená teplota v místě spoje s lisem.

V oblasti $G_{Pl}$ (razníku) je vedení tepla popsáno okrajovou úlohou pro Laplaceovu rovnici (2.35) s okrajovou podmínkou Dirichletova typu na $\Gamma^{3D}_3$ ve tvaru

$$\vartheta_0|_{\Gamma^{3D}_3} = h_3 \,,$$

Neumannova typu na $\Gamma^{3D}_2$

$$-k_0 \left(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial n}\right)^- = k_2 \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial n}\right)^- \tag{2.51}$$

a na $\Gamma^{3D}_1$

$$\left(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial n}\right)^- = \frac{k_1}{k_0} \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial n}\right)^+ - \frac{\beta_1}{k_0} \,, \tag{2.52}$$

kde $\vartheta_2$ je řešení z oblasti $G_{Ca}$ a $\vartheta_1$ řešení z oblasti $G_{Gl}$.
Slabou formulaci úlohy dostaneme ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{k_0}{\varrho_0} \int_{G_{Pl}} \left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \mathrm{d}V \; - \; \frac{k_0}{\varrho_0} \int_{\Gamma^{3D}_2} \left(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial n}\right)^- \psi \, \mathrm{d}S \, - \\ - \; \frac{k_0}{\varrho_0} \int_{\Gamma^{3D}_1} \left(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial n}\right)^- \psi \, \mathrm{d}S = 0 \,. \end{aligned}$$

Dosazením z podmínek (2.51) a (2.52) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{k_0}{\varrho_0} \int_{G_{Pl}} \left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \mathrm{d}V + \frac{k_2}{\varrho_0} \int_{\Gamma^{3D}_2} \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial n}\right)^- \psi \, \mathrm{d}S \, - \\ - \; \frac{1}{\varrho_0} \int_{\Gamma^{3D}_1} \left( \beta_1 - k_1 \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial n}\right)^+ \right) \psi \, \mathrm{d}S = 0 \,. \end{aligned} \tag{2.53}$$

V oblasti $G_{Gl}$ (výlisek) je vedení tepla popsáno okrajovou úlohou pro Poissonovu rovnici (2.36) s okrajovou podmínkou Dirichletova typu na $\Gamma^{3D}_3$ ve tvaru

$$\vartheta_1|_{\Gamma^{3D}_3} = h_3 \,,$$

Neumannova typu na $\Gamma^{3D}_1$ ve tvaru

$$\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial n}\right)^+ = \frac{k_0}{k_1} \left(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial n}\right)^- + \frac{\beta_1}{k_1} \tag{2.54}$$

a na $\Gamma_6^{3D}$

$$\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial n}\right)^+ = \frac{k_3}{k_1}\left(\frac{\partial \vartheta_3}{\partial n}\right)^- + \frac{\beta_6}{k_1}\ , \tag{2.55}$$

kde $\vartheta_0$ značí řešení z oblasti $G_{Pl}$ a $\vartheta_3$ řešení z oblasti $G_{Mo}$.
Slabou formulaci úlohy dostaneme ve tvaru

$$\frac{k_1}{\varrho_1}\int_{G_{Gl}}\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\mathrm{d}V - \frac{k_1}{\varrho_1}\int_{\Gamma_1^{3D}}\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial n}\right)^-\psi\,\mathrm{d}S -$$
$$- \frac{k_1}{\varrho_1}\int_{\Gamma_6^{3D}}\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial n}\right)^-\psi\,\mathrm{d}S = \int_{G_{Gl}} q_1\psi\,\mathrm{d}V\ . \tag{2.56}$$

V oblasti $G_{Mo}$ (forma) je vedení tepla popsáno okrajovou úlohou pro Laplaceovu rovnici (2.37) s okrajovou podmínkou Dirichletova typu na $\Gamma_3^{3D}$ ve tvaru

$$\vartheta_3|_{\Gamma_3^{3D}} = h_3\ ,$$

Neumannova typu na $\Gamma_6^{3D}$ ve tvaru

$$\left(\frac{\partial \vartheta_3}{\partial n}\right)^- = \frac{k_1}{k_3}\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial n}\right)^+ - \frac{\beta_6}{k_3} \tag{2.57}$$

a Newtonova typu na $\Gamma_7^{3D}$ ve tvaru

$$\left(-k_3\frac{\partial \vartheta_3}{\partial n}\right)^- = \alpha(\vartheta_3|_{\Gamma_7^{3D}} - \vartheta_{ext})\ , \tag{2.58}$$

kde $\vartheta_{ext}$ je teplota vnějšího okolí.

Slabou formulaci úlohy dostaneme ve tvaru

$$\frac{k_3}{\varrho_3}\int_{G_{Mo}}\left(\frac{\partial \vartheta_3}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\mathrm{d}V - \frac{k_3}{\varrho_3}\int_{\Gamma_6^{3D}}\left(\frac{\partial \vartheta_3}{\partial n}\right)^-\psi\,\mathrm{d}S -$$
$$- \frac{k_3}{\varrho_3}\int_{\Gamma_7^{3D}}\left(\frac{\partial \vartheta_3}{\partial n}\right)^-\psi\,\mathrm{d}S = 0\ .$$

Dosazením z podmínek (2.57) a (2.58) dostaneme

$$\frac{k_3}{\varrho_3}\int_{G_{Mo}}\left(\frac{\partial \vartheta_3}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\mathrm{d}V + \frac{1}{\varrho_3}\int_{\Gamma_7^{3D}}\alpha(\vartheta_3|_{\Gamma_7^{3D}} - \vartheta_{ext})\psi\,\mathrm{d}S -$$
$$- \frac{1}{\varrho_3}\int_{\Gamma_6^{3D}}\left(\beta_6 - k_1\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial n}\right)^+\right)\psi\,\mathrm{d}S = 0\ . \tag{2.59}$$

V oblasti $G_{Ca}$ (dutina razníku) je vedení tepla popsáno rovnicí energie (2.34), kde $\boldsymbol{u}$ je ve tvaru (2.6) a $\Phi$ je řešení úlohy (2.5). Toto řešení dosadíme do rovnice energie (2.34).

Okrajové podmínky Dirichletova typu jsou ve tvaru

$$\vartheta_2|_{\Gamma^{3D}_{in}} = 288 \qquad \text{na } \Gamma^{3D}_{in}\,, \tag{2.60}$$

$$\vartheta_2|_{\Gamma^{3D}_{out}} = h_{out} \qquad \text{na } \Gamma^{3D}_{out}\,, \tag{2.61}$$

$$\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial n}\right)^- = -\frac{k_0}{k_2}\left(\frac{\partial\vartheta_0}{\partial n}\right)^- \qquad \text{na } \Gamma^{3D}_{2}\,, \tag{2.62}$$

$$\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial n}\right)^- = 0 \qquad \text{na } \Gamma^{3D}_{5}\,, \tag{2.63}$$

kde $\vartheta_0$ je řešení úlohy ustáleného vedení tepla na $G_{Pl}$.

Analogicky slabou formulaci úlohy pro vedení tepla na oblasti $G_{Ca}$ (proudící voda) dostaneme ve tvaru

$$c_v\int_{G_{Ca}}\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}u_1+\frac{\partial\vartheta_2}{\partial y}u_2+\frac{\partial\vartheta_2}{\partial z}u_3\right)\psi\,\mathrm{d}V+\frac{k_2}{\varrho_2}\int_{G_{Ca}}\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\vartheta_2}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\vartheta_2}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\mathrm{d}V-$$
$$-\frac{k_2}{\varrho_2}\int_{\Gamma^{3D}_2}\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial n}\right)^-\psi\,\mathrm{d}S=0\,, \tag{2.64}$$

kde $\boldsymbol{u}$ je ve tvaru (2.6) a $\Phi$ je řešení úlohy (2.5).
Rovnici (2.53) vynásobíme zlomkem $\frac{\varrho_0}{\varrho_1}$, rovnici (2.59) zlomkem $\frac{\varrho_3}{\varrho_1}$ a rovnici (2.64) zlomkem $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$. Následně sečteme všechny rovnice (2.53), (2.56), (2.59) a (2.64). Při sečtení se vzájemně vyruší druhý člen v třetím integrálu z rovnice (2.53) a druhý integrál v (2.56). Analogicky se odečtou třetí integrál v (2.56) a druhý člen v třetím integrálu z rovnice (2.59). Dále se odečtou druhý integrál v (2.53) a třetí integrál v (2.64).
Výslednou rovnost po vynásobení $\varrho_1$ dostaneme ve tvaru

$$k_0\int_{G_{Pl}}\left(\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\vartheta_0}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\vartheta_0}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\mathrm{d}V+k_1\int_{G_{Gl}}\left(\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\vartheta_1}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\vartheta_1}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\mathrm{d}V+$$
$$+k_3\int_{G_{Mo}}\left(\frac{\partial\vartheta_3}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\vartheta_3}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\vartheta_3}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\mathrm{d}V+k_2\int_{G_{Ca}}\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\vartheta_2}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\vartheta_2}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\mathrm{d}V+$$
$$+c_v\varrho_2\int_{G_{Ca}}\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}u_1+\frac{\partial\vartheta_2}{\partial y}u_2+\frac{\partial\vartheta_2}{\partial z}u_3\right)\psi\mathrm{d}V+\int_{\Gamma^{3D}_7}\alpha(\vartheta_3|_{\Gamma^{3D}_7}-\vartheta_{ext})\psi\,\mathrm{d}S=$$
$$=\int_{\Gamma^{3D}_1}\beta_1\psi\,\mathrm{d}S+\int_{\Gamma^{3D}_6}\beta_6\psi\,\mathrm{d}S+\varrho_1\int_{G_{Gl}}q_1\psi\,\mathrm{d}V\,. \tag{2.65}$$

V oblasti $G$ zavedeme pro lepší orientaci následující operátory:

$$\mathrm{Energy}^{velo}_G(\vartheta,\,\boldsymbol{u},\,\psi)=c_v\varrho_2\int_{G_{Ca}}\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}u_1+\frac{\partial\vartheta_2}{\partial y}u_2+\frac{\partial\vartheta_2}{\partial z}u_3\right)\psi\,\mathrm{d}V\,, \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Energy}_G^{cond}(\vartheta,\,\psi) = \;& k_0 \int_{G_{Pl}} \left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \mathrm{d}V \, + \\
+ \;& k_1 \int_{G_{Gl}} \left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \mathrm{d}V \, + \\
+ \;& k_2 \int_{G_{Ca}} \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \mathrm{d}V \, + \\
+ \;& k_3 \int_{G_{Mo}} \left( \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \mathrm{d}V \,, \qquad (2.67)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Environment}_G(\vartheta,\,\psi) = \int_{\Gamma_7^{3D}} \alpha \vartheta_3|_{\Gamma_7^{3D}} \psi \, \mathrm{d}S \,, \qquad (2.68)$$

$$\mathrm{Source}_G(\psi) = \varrho_1 \int_{G_{Gl}} q_1 \psi \, \mathrm{d}V \;, \qquad (2.69)$$

$$\mathrm{Coeff}_G(\psi) = \int_{\Gamma_1^{3D}} \beta_1 \psi \, \mathrm{d}S + \int_{\Gamma_6^{3D}} \beta_6 \psi \, \mathrm{d}S + \int_{\Gamma_7^{3D}} \alpha \vartheta_{ext} \psi \, \mathrm{d}S \,. \qquad (2.70)$$

Označme

$$G_H = G \cup \Gamma_{in}^{3D} \cup \Gamma_{out}^{3D} \cup \Gamma_3^{3D}$$

a množinu

$$\mathcal{H}^{3D} = \{ v \in C^\infty(G_H);\, v|_{\Gamma_{in}^{3D} \cup \Gamma_{out}^{3D} \cup \Gamma_3^{3D}} = 0 \} \,.$$

Nechť $V_0^{3D}(G)$ je uzávěr množiny $\mathcal{H}^{3D}$ v prostoru $H^1(G)$.

Předpokládejme existenci funkce $\vartheta_\Gamma \in H^1(G)$, která ve smyslu stop splňuje podmínky:

$$\vartheta_\Gamma|_{\Gamma_{in}^{3D}} = 288 \qquad \text{na } \Gamma_{in}^{3D} \,, \qquad (2.71)$$

$$\vartheta_\Gamma|_{\Gamma_{out}^{3D}} = h_{out} \qquad \text{na } \Gamma_{out}^{3D} \,, \qquad (2.72)$$

$$\vartheta_\Gamma|_{\Gamma_3^{3D}} = h_3 \qquad \text{na } \Gamma_3^{3D} \,, \qquad (2.73)$$

kde $h_{out}$ je daná funkce reprezentující rozložení teploty na výstupu dutiny razníku, kterou značíme $\Gamma_{out}^{3D}$ a $h_3$ je daná funkce reprezentující ustálenou teplotu na hranici s lisem, kterou značíme $\Gamma_3^{3D}$.

**Variační formulace rovnice energie potom má tvar:**
Hledáme funkci $\vartheta \in H^1(G)$ takovou, že

$$\begin{aligned}
\mathrm{Energy}_G^{velo}(\vartheta,\, \boldsymbol{u},\, \psi) + \mathrm{Energy}_G^{cond}(\vartheta,\, \psi) + \mathrm{Environment}_G(\vartheta,\, \psi) = \\
= \mathrm{Source}_G(\psi) + \mathrm{Coeff}_G(\psi) \quad \forall \psi \in V_0^{3D}(G) \;, \qquad (2.74)
\end{aligned}$$

$$\vartheta - \vartheta_\Gamma \in V_0^{3D}(G) \;. \qquad (2.75)$$

Vzhledem k předpokládané rotační symetrii celého systému přijmeme i předpoklad o rotační symetrii rozložení teploty v systému. Variační formulaci rovnice energie transformujeme do válcových souřadnic

$$\begin{aligned}
x &= x \;, \\
y &= r \cos \varphi \;, \\
z &= r \sin \varphi
\end{aligned}$$

a následně provedeme dimenzionální redukci do souřadnic $x$, $r$.
V souladu se značením ze třech dimenzí budeme na oblasti $\Omega = \mathrm{Int}\,\overline{\Omega_{Pl} \cup \Omega_{Gl} \cup \Omega_{Ca} \cup \Omega_{Mo}}$ hledanou funkci $\vartheta(x, r)$ formálně dělit na součet čtyř funkcí

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \ ,$$

kde

$$\vartheta_i = \begin{cases} \vartheta|_{\Omega_i} & \text{v} \quad \Omega_i \\ 0 & \text{v} \quad \Omega \setminus \Omega_i \end{cases} \qquad \text{pro} \quad i = 0,\, 1,\, 2,\, 3 \ , \tag{2.76}$$

$(\Omega_0 \equiv \Omega_{Pl},\ \Omega_1 \equiv \Omega_{Gl},\ \Omega_2 \equiv \Omega_{Ca},\ \Omega_3 \equiv \Omega_{Mo})$.
Dále symbolem $\vartheta_i|_{\Gamma_j}$ označíme stopu řešení $\vartheta_i$ na hranici $\Gamma_j$ pro $i$, $j$ pro něž $\Gamma_j$ tvoří hranici $\Omega_i$ pro $i = 0, 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ $(\Gamma_8 = \Gamma_{in},\ \Gamma_9 = \Gamma_{out})$.

**Okrajové a přechodové podmínky** přejdou do tvaru:
Na ústí chladicí trubice vstupuje voda o předpokládané konstantní teplotě 15°C, tj. 288 K, tedy

$$\vartheta_2|_{\Gamma_{in}} = 288 \qquad \text{na} \ \ \Gamma_{in} \ .$$

Rovněž předpokládáme známé rozložení teploty na hranici $\Gamma_{out}$ (tvoří výstup z chladicího kanálku), které modelujeme jako

$$\vartheta_2|_{\Gamma_{out}} = h_{out}(x, r) \qquad \text{na} \ \ \Gamma_{out} \ ,$$

kde $h_{out} \in C(\Gamma_{out})$.
Chladicí trubici považujeme za izolant, tedy

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} \ = \ 0 \qquad \text{na} \quad \Gamma_5 \ .$$

Na části hranice $\Gamma_4$, která je tvořena osou soustavy forma, výlisek a razník, nedochází k žádným tepelným tokům, tedy uvažujeme hraniční podmínku

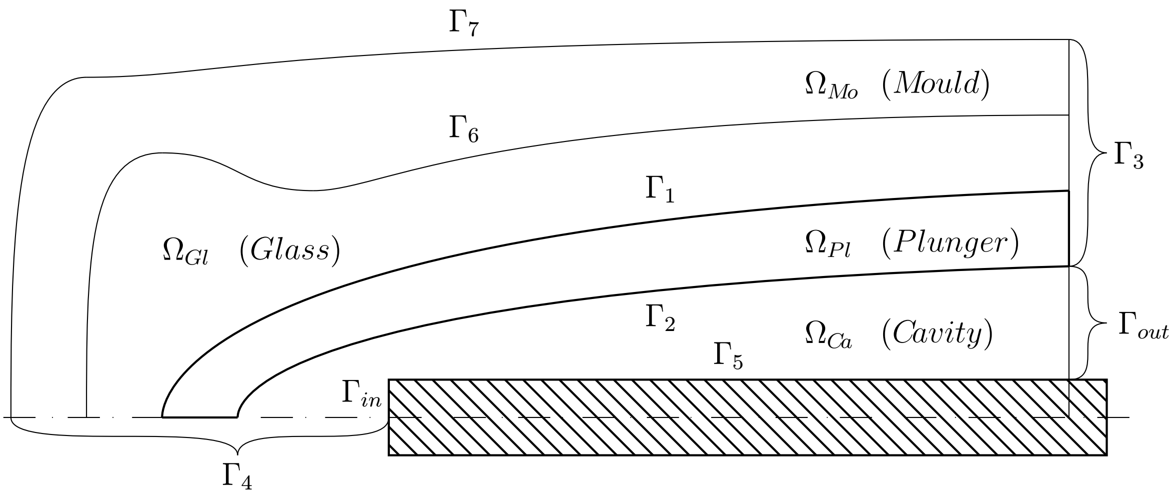
$$\frac{\partial \vartheta_i}{\partial n} \ = \ 0 \qquad \text{na} \quad \Gamma_4 \quad i = 0,\, 1,\, 2,\, 3 \ .$$

Přestup tepla hranicí $\Gamma_2$, tj. mezi razníkem a chladicí vodou, modelujeme (viz [43]) pomocí hraniční podmínky pro kontakt dvou těles, tedy

$$-k_0 \left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial n} \right)^- = k_2 \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} \right)^- \qquad \text{na} \quad \Gamma_2 \ , \tag{2.77}$$

kde $\frac{\partial}{\partial n}$ značí derivaci podle vnější normály vzhledem k oblasti $\Omega_{Pl}$, "-" limitu ve směru normály k hranici z vnitřní strany $\Omega_{Pl}$, $\vartheta_0|_{\Gamma_2}$ teplotu razníku na povrchu (stopu $\vartheta_0$ na hranici oblasti $\Omega_{Pl}$) a $\vartheta_2|_{\Gamma_2}$ teplotu prostředí (stopu teploty proudící vody $\vartheta_2$ jakožto řešení v oblasti $\Omega_{Ca}$).
Přestup tepla hranicí $\Gamma_7$, tj. mezi sklářskou formou a okolním prostředím, modelujeme (viz [43]) pomocí hraniční podmínky třetího druhu pro kontakt tělesa s prostředím, tedy

$$-k_3 \left( \frac{\partial \vartheta_3}{\partial n} \right)^- = \alpha(\vartheta_3|_{\Gamma_7} - \vartheta_{ext}) \qquad \text{na} \quad \Gamma_7 \ , \tag{2.78}$$




Obrázek 2.4: *Schematické znázornění systému forma, výlisek, razník, dutina razníku a trubice pro přivádění chladicí vody.*

kde $\frac{\partial}{\partial n}$ značí derivaci podle vnější normály vzhledem k oblasti $\Omega_{Mo}$, "-" limitu ve směru normály k hranici z vnitřní strany $\Omega_{Mo}$, $\alpha$ značí součinitel přestupu tepla mezi formou a okolním prostředím, $\vartheta_3|_{\Gamma_7}$ teplotu povrchu sklářské formy (stopu $\vartheta_3$ na hranici oblasti $\Omega_{Mo}$) a $\vartheta_{ext}$ teplotu prostředí (teplota vzduchu v daném bodě).
Pro popis přestupu tepla hranicí $\Gamma_1$ mezi výliskem a razníkem užijeme hraniční podmínku dotyku dvou těles, při němž dochází u jednoho z nich k přeměně jeho skupenství vlivem tuhnutí (viz [43]). Tedy

$$k_1 \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial n}\right)^+ - k_0 \left(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial n}\right)^- \quad = \quad \beta_1 \qquad \text{na} \quad \Gamma_1 \ , \tag{2.79}$$

kde $\beta_1 > 0$, $\beta_1 \in C^{(0),1}(\Gamma_1)$ představuje měrný tok přeměňované hmotnosti tělesa, $\frac{\partial}{\partial n}$ značí derivaci podle vnější normály vzhledem k oblasti $\Omega_{Pl}$, "+" limitu ve směru normály k hranici z vnější a "-" z vnitřní strany $\Omega_{Pl}$.
Analogicky pro popis přestupu tepla hranicí $\Gamma_6$ mezi sklovinou a formou užijeme hraniční podmínku dotyku dvou těles, při němž dochází u jednoho z nich k přeměně jeho skupenství vlivem tuhnutí. Tedy

$$k_1 \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial n}\right)^+ - k_3 \left(\frac{\partial \vartheta_3}{\partial n}\right)^- \quad = \quad \beta_6 \qquad \text{na} \quad \Gamma_6 \ , \tag{2.80}$$

kde $\beta_6 > 0$, $\beta_6 \in C^{(0),1}(\Gamma_6)$ představuje měrný tok přeměňované hmotnosti tělesa, $\frac{\partial}{\partial n}$ značí derivaci podle vnější normály vzhledem k oblasti $\Omega_{Mo}$, "+" limitu ve směru normály k hranici z vnější a "-" z vnitřní strany $\Omega_{Mo}$.
Hraniční podmínka na hranici s lisem je dána jako

$$\vartheta_i|_{\Gamma_3} \quad = \quad h_3(x, r) \qquad \text{na} \quad \Gamma_3 \quad i = 0, 1, 3 \ ,$$

kde $h_3 \in C(\Gamma_3)$ je ustálená teplota v místě spoje s lisem.

Po transformaci do válcových souřadnic a dimenzionální redukci do souřadnic $x$, $r$ dostaneme operátory (2.66) až (2.70) (viz dodatek) ve tvaru:

$$\mathrm{Energy}_{\Omega}^{velo}(\vartheta,\, \boldsymbol{w},\, \psi) = c_v \varrho_2 \int_{\Omega_{Ca}} \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} w_1 + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r} w_2 \right) \psi r \, d\Omega \ , \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Energy}_{\Omega}^{cond}(\vartheta,\, \psi) = {} & k_0 \int_{\Omega_{Pl}} \left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega + \\ & + \ k_1 \int_{\Omega_{Gl}} \left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega + \\ & + \ k_2 \int_{\Omega_{Ca}} \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega + \\ & + \ k_3 \int_{\Omega_{Mo}} \left( \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega \ , \end{aligned} \tag{2.82}$$

$$\mathrm{Environment}_{\Omega}(\vartheta,\, \psi) = \int_{\Gamma_7} \alpha \vartheta_3|_{\Gamma_7} \psi r \, d\Gamma \ , \tag{2.83}$$

$$\mathrm{Source}_{\Omega}(\psi) = \varrho_1 \int_{\Omega_{Gl}} q \psi r \, d\Omega \ , \tag{2.84}$$

$$\mathrm{Coeff}_{\Omega}(\psi) = \int_{\Gamma_1} \beta_1 \psi r \, d\Gamma + \int_{\Gamma_6} \beta_6 \psi r \, d\Gamma + \int_{\Gamma_7} \alpha \vartheta_{ext} \psi r \, d\Gamma \ . \tag{2.85}$$

Dále označme

$$\begin{aligned} A_{\Omega}(\vartheta,\, \boldsymbol{w},\, \psi) \ = \ & \mathrm{Energy}_{\Omega}^{velo}(\vartheta,\, \boldsymbol{w},\, \psi) + \mathrm{Energy}_{\Omega}^{cond}(\vartheta,\, \psi) + \\ + \ & \mathrm{Environment}_{\Omega}(\vartheta,\, \psi) \end{aligned} \tag{2.86}$$

a

$$F_{\Omega}(\psi) = \mathrm{Source}_{\Omega}(\psi) + \mathrm{Coeff}_{\Omega}(\psi) \ . \tag{2.87}$$

Zavedeme váhový Sobolevův prostor $H_r^1(\Omega_i)$ (viz [4]) s normou

$$\|v\|_{1,r,\Omega_i} = \left( \int_{\Omega_i} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + v^2 \right] r \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad i = 0, 1, 2, 3 \ , \tag{2.88}$$

($\Omega_0 \equiv \Omega_{Pl}$, $\Omega_1 \equiv \Omega_{Gl}$, $\Omega_2 \equiv \Omega_{Ca}$, $\Omega_3 \equiv \Omega_{Mo}$).

Dále označíme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}(\Omega) = \{ \ & \vartheta;\ \vartheta \text{ definované v (2.76)},\ \vartheta_i \in H_r^1(\Omega_i) \text{ pro } i = 0, 1, 2, 3, \\ & \vartheta_3|_{\Gamma_6} = \vartheta_1|_{\Gamma_6},\ \vartheta_1|_{\Gamma_1} = \vartheta_0|_{\Gamma_1},\ \vartheta_0|_{\Gamma_2} = \vartheta_2|_{\Gamma_2} \} \ . \end{aligned}$$

Definujeme normu na $\boldsymbol{H}(\Omega)$ jako

$$\|\vartheta\|_{\boldsymbol{H}} = \left( \|\vartheta_0\|_{1,r,\Omega_0}^2 + \|\vartheta_1\|_{1,r,\Omega_1}^2 + \|\vartheta_2\|_{1,r,\Omega_2}^2 + \|\vartheta_3\|_{1,r,\Omega_3}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ . \tag{2.89}$$

**Věta 2.2.1.** *Prostor $\boldsymbol{H}(\Omega)$ s normou (2.89) je Hilbertův.*

Označíme $\boldsymbol{H}^*(\Omega)$ duální prostor k prostoru $\boldsymbol{H}(\Omega)$ s normou

$$\|F_\Omega\|_{\boldsymbol{H}^*} = \sup_{\psi \neq 0} \frac{F_\Omega(\psi)}{\|\psi\|_{\boldsymbol{H}}} \,.$$

Dále označíme množinu

$$\Omega_H = \Omega \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}$$

a

$$\mathcal{H}^{2D} = \{ v \in C^\infty(\Omega_H);\ v|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} = 0 \} \,.$$

Nechť $\boldsymbol{H}_0(\Omega)$ je uzávěr množiny $\mathcal{H}^{2D}$ vzhledem k normě $\boldsymbol{H}(\Omega)$.

Okrajové podmínky pro teplotu splníme zavedením následující funkce.
Předpokládáme existenci funkce $\vartheta_\Gamma \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ takové, že

$$\vartheta_\Gamma|_{\Gamma_{in}} = 288 \quad \text{na} \ \ \Gamma_{in}, \tag{2.90}$$

$$\vartheta_\Gamma|_{\Gamma_{out}} = h_{out} \quad \text{na} \ \ \Gamma_{out}, \tag{2.91}$$

$$\vartheta_\Gamma|_{\Gamma_3} = h_3 \quad \text{na} \ \ \Gamma_3, \tag{2.92}$$

kde $h_3 \in C(\Gamma_3)$ je daná funkce reprezentující ustálenou teplotu na hranici $\Gamma_3$ s lisem a $h_{out} \in C(\Gamma_{out})$ je daná funkce reprezentující rozložení teploty na výstupu z dutiny razníku $\Gamma_{out}$.

**Variační formulace rovnice energie** potom má tvar:
Hledáme funkci $\vartheta \equiv \vartheta(F_2) \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ takovou, že

$$A_\Omega(\vartheta, \boldsymbol{w}, \psi) \ = \ F_\Omega(\psi) \quad \forall \psi \in \ \boldsymbol{H}_0(\Omega) \ , \tag{2.93}$$

$$\vartheta - \vartheta_\Gamma \in \ \boldsymbol{H}_0(\Omega) \ , \tag{2.94}$$

kde $\boldsymbol{w}$ je gradient slabého řešení úlohy (2.17).

**Fyzikální předpoklad o chlazení:**

**A1** Průměrná teplota vody na vstupu do dutiny razníku je menší než průměrná teplota na výstupu.

**Věta 2.2.2.** *Bilineární forma (2.81) splňuje následující podmínku*

$$Energy_\Omega^{velo}(\vartheta, \boldsymbol{w}, \vartheta) > 0 \tag{2.95}$$

*pro libovolná $\vartheta$, $\boldsymbol{w}$ splňující fyzikální předpoklad o chlazení* **A1.**

*Důkaz.* (viz též [20]) Množství vody, která vteče do oblasti $G_{Ca}$, resp. vyteče z oblasti $G_{Ca}$, za jednu sekundu je

$$P = -\int_{\Gamma_{in}^{3D}} \boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = -\int_{\Gamma_{in}^{3D}} h_{velo}^{in}\,\mathrm{d}S = \int_{\Gamma_{out}^{3D}} h_{velo}^{out}\,\mathrm{d}S = \int_{\Gamma_{out}^{3D}} \boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S \ ,$$

neboť platí (2.4).
Dále předpokládáme, že voda vtéká do oblasti $G_{Ca}$ přes hranici $\Gamma_{in}^{3D}$, tedy

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n} < 0 \qquad \text{na} \ \ \Gamma_{in}^{3D}$$

a vytéká z oblasti $G_{Ca}$ přes hranici $\Gamma_{out}^{3D}$, tedy

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n} > 0 \qquad \text{na} \ \ \Gamma_{out}^{3D} \ .$$

Potom výraz

$$-\frac{1}{P}\int_{\Gamma_{in}^{3D}} \vartheta_2 \boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = -\frac{1}{P}\int_{\Gamma_{in}^{3D}} 288\, h_{velo}^{in}\,\mathrm{d}S$$

vyjadřuje průměrnou teplotu vody vtékající do $G_{Ca}$ během jedné sekundy (neboť $h_{velo}^{in} < 0$) a

$$\frac{1}{P}\int_{\Gamma_{out}^{3D}} \vartheta_2 \boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{P}\int_{\Gamma_{out}^{3D}} h_{out} h_{velo}^{out}\,\mathrm{d}S$$

vyjadřuje průměrnou teplotu vody vytékající z $G_{Ca}$ během jedné sekundy.
Předpokládáme chlazení, to znamená, že průměrná teplota vstupující vody do dutiny je menší než průměrná teplota vystupující vody (předpoklad **A1**), tedy

$$-\frac{1}{P}\int_{\Gamma_{in}^{3D}} 288\, h_{velo}^{in}\,\mathrm{d}S < \frac{1}{P}\int_{\Gamma_{out}^{3D}} h_{out} h_{velo}^{out}\,\mathrm{d}S \ . \tag{2.96}$$

Nyní dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathrm{Energy}_G^{velo}(\vartheta, \boldsymbol{u}, \vartheta) &= c_v \varrho_2 \int_{G_{Ca}^e} \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \vartheta_2 u_1 + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} \vartheta_2 u_2 + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial z} \vartheta_2 u_3 \right) \mathrm{d}V = \\
&= \frac{1}{2} c_v \varrho_2 \int_{\partial G_{Ca}^e} \left( \vartheta_2^2 u_1 \nu_x + \vartheta_2^2 u_2 \nu_y + \vartheta_2^2 u_3 \nu_z \right) \mathrm{d}S = \\
&= \frac{1}{2} c_v \varrho_2 \int_{\partial G_{Ca}^e} \vartheta_2^2 \boldsymbol{u}.\boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = \\
&= \frac{1}{2} c_v \varrho_2 \left[ \int_{\Gamma_{out}^{3D}} \vartheta_2^2 \boldsymbol{u}.\boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S + \int_{\Gamma_{in}^{3D}} \vartheta_2^2 \boldsymbol{u}.\boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S \right] = \\
&= \frac{1}{2} c_v \varrho_2 \left[ \int_{\Gamma_{out}^{3D}} \vartheta_2^2 h_{velo}^{out} \,\mathrm{d}S + \int_{\Gamma_{in}^{3D}} \vartheta_2^2 \, h_{velo}^{in} \,\mathrm{d}S \right] \geq \\
&\geq \frac{1}{2} c_v \varrho_2 \left[ \min h_{out} \int_{\Gamma_{out}^{3D}} h_{out} h_{velo}^{out} \,\mathrm{d}S + 288 \int_{\Gamma_{in}^{3D}} 288 h_{velo}^{in} \,\mathrm{d}S \right] = \\
&= \frac{1}{2} c_v \varrho_2 \left[ (\min h_{out} - 288) \int_{\Gamma_{out}^{3D}} h_{out} h_{velo}^{out} \,\mathrm{d}S + \right. \\
&\qquad \left. + 288 \left( \int_{\Gamma_{out}^{3D}} h_{out} h_{velo}^{out} \,\mathrm{d}S + \int_{\Gamma_{in}^{3D}} 288 \, h_{velo}^{in} \,\mathrm{d}S \right) \right] > 0 \ ,
\end{aligned}$$

kde jsme užili Greenovu větu, skutečnost, že $\min h_{out} > 288$ a (2.96). Transformací do válcových souřadnic se nerovnost nezmění. $\square$

**Věta 2.2.3.** *(existence a jednoznačnost řešení úlohy o vedení tepla)*
*Problém (2.93), (2.94) má za předpokladu (**A1**) právě jedno řešení pro každé rychlostní pole $\boldsymbol{w}$ získané jako gradient (2.18) jediného řešení úlohy (2.17) na oblasti $\Omega_{Ca}$. Navíc platí*

$$\|\vartheta(F_2)\|_{\boldsymbol{H}} \leq \frac{1}{min(c_0,\, c_1,\, c_2,\, c_3)} \|F_\Omega\|_{\boldsymbol{H}^*} \ . \tag{2.97}$$

*Důkaz.* (viz též [20]) Postačí ověřit předpoklady Lax-Milgramovy věty (viz [2] str. 12).
Označme $V = \boldsymbol{H}(\Omega)$. Podle Věty 2.2.1 je $V$ Hilbertův prostor.
Označíme seminormy prostoru $\boldsymbol{H}(\Omega)$ jako

$$\|u\|_{0,2,r} = \left( \int_\Omega u^2 r \,\mathrm{d}\Omega \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\|u_x\|_{0,2,r} = \left( \int_\Omega \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 r \,\mathrm{d}\Omega \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\|u_r\|_{0,2,r} = \left( \int_\Omega \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 r \,\mathrm{d}\Omega \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Potom

$$\|u\|_{\boldsymbol{H}} = \left(\|u\|^2_{0,2,r} + \|u_x\|^2_{0,2,r} + \|u_r\|^2_{0,2,r}\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Dosadíme vektorovou funkci $\boldsymbol{w}$ do bilineární formy (2.81) a

$$\begin{aligned}|\mathrm{Energy}^{velo}_{\Omega}(\vartheta, \boldsymbol{w}, \psi)| &= c_v \varrho_2 \left| \int_{\Omega_{Ca}} \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} w_1 + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r} w_2 \right) \psi r \, \mathrm{d}\Omega \right| \leq \\ &\leq c_v \varrho_2 \max(|w_1|, |w_2|, 1) \left( \|\vartheta_{2x}\|_{0,2,r} \|\psi\|_{0,2,r} + \|\vartheta_{2r}\|_{0,2,r} \|\psi\|_{0,2,r} \right) \leq \\ &\leq 2 c_v \varrho_2 \max(|w_1|, |w_2|, 1) \|\vartheta\|_{\boldsymbol{H}} \|\psi\|_{\boldsymbol{H}} \ , \end{aligned} \tag{2.98}$$

neboť

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{\boldsymbol{H}} \|v\|^2_{\boldsymbol{H}} &= \left(\|u\|^2_{0,2,r} + \|u_x\|^2_{0,2,r} + \|u_r\|^2_{0,2,r}\right)\left(\|v\|^2_{0,2,r} + \|v_x\|^2_{0,2,r} + \|v_r\|^2_{0,2,r}\right) = \\ &= \|u\|^2_{0,2,r}\|v\|^2_{0,2,r} + \|u\|^2_{0,2,r}\|v_x\|^2_{0,2,r} + \|u\|^2_{0,2,r}\|v_r\|^2_{0,2,r} + \\ &+ \|u_x\|^2_{0,2,r}\|v\|^2_{0,2,r} + \|u_x\|^2_{0,2,r}\|v_x\|^2_{0,2,r} + \|u_x\|^2_{0,2,r}\|v_r\|^2_{0,2,r} + \\ &+ \|u_r\|^2_{0,2,r}\|v\|^2_{0,2,r} + \|u_r\|^2_{0,2,r}\|v_x\|^2_{0,2,r} + \|u_r\|^2_{0,2,r}\|v_r\|^2_{0,2,r} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{Energy}^{cond}_{\Omega}(\vartheta, \psi)| = \ & k_0 \int_{\Omega_{Pl}} \left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, \mathrm{d}\Omega + \\ + \ & k_1 \int_{\Omega_{Gl}} \left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, \mathrm{d}\Omega + \\ + \ & k_2 \int_{\Omega_{Ca}} \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, \mathrm{d}\Omega + \\ + \ & k_3 \int_{\Omega_{Mo}} \left( \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, \mathrm{d}\Omega \ , \leq \\ \leq \ & k_0 \left( \|\vartheta_{0x}\|_{0,2,r}\|\psi_x\|_{0,2,r} + \|\vartheta_{0r}\|_{0,2,r}\|\psi_r\|_{0,2,r} \right) + \\ + & k_1 \left( \|\vartheta_{1x}\|_{0,2,r}\|\psi_x\|_{0,2,r} + \|\vartheta_{1r}\|_{0,2,r}\|\psi_r\|_{0,2,r} \right) + \\ + & k_2 \left( \|\vartheta_{2x}\|_{0,2,r}\|\psi_x\|_{0,2,r} + \|\vartheta_{2r}\|_{0,2,r}\|\psi_r\|_{0,2,r} \right) + \\ + & k_3 \left( \|\vartheta_{3x}\|_{0,2,r}\|\psi_x\|_{0,2,r} + \|\vartheta_{3r}\|_{0,2,r}\|\psi_r\|_{0,2,r} \right) \leq \\ \leq \ & 2 \max(k_0, k_1, k_2, k_3) \|\vartheta\|_{\boldsymbol{H}} \|\psi\|_{\boldsymbol{H}} \ , \end{aligned} \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{Environment}_{\Omega}(\vartheta, \psi)| &= \left| \int_{\Gamma_7} \alpha (\vartheta_3|_{\Gamma_7}) \psi r \, \mathrm{d}\Gamma \right| \leq \int_{\Gamma_7} \alpha |(\vartheta_3|_{\Gamma_7}) \psi r| \, \mathrm{d}\Gamma \leq \\ &\leq \alpha \left( \int_{\Gamma_7} (\vartheta_3|_{\Gamma_7})^2 r \, \mathrm{d}\Gamma \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Gamma_7} \psi^2 r \, \mathrm{d}\Gamma \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \alpha C \|\vartheta_3\|_{\boldsymbol{H}} \|\psi\|_{\boldsymbol{H}} \leq \alpha C_1 \|\vartheta\|_{\boldsymbol{H}} \|\psi\|_{\boldsymbol{H}} \ , \end{aligned}$$

kde jsme užili Hölderovu nerovnost a Větu o stopách [2] str. 9.
Dohromady dostaneme

$$\begin{aligned}|A_{\Omega}(\vartheta, \boldsymbol{w}, \psi)| &\leq \\ &\leq \left[ 2 c_v \varrho_2 \max(|w_1|, |w_2|, 1) + 2 \max(k_0, k_1, k_2, k_3) + \alpha C_1 \right] \|\vartheta\|_{\boldsymbol{H}} \|\psi\|_{\boldsymbol{H}} \ , \end{aligned} \tag{2.100}$$

což dokazuje spojitost levé strany.
Dále

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Energy}_\Omega^{cond}(\vartheta,\vartheta)+\mathrm{Environment}_\Omega(\vartheta,\,\vartheta)= \\
&\quad = k_0\int_{\Omega_{Pl}}\left[\left(\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\vartheta_0}{\partial r}\right)^2\right]r\,\mathrm{d}\Omega+k_1\int_{\Omega_{Gl}}\left[\left(\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\vartheta_1}{\partial r}\right)^2\right]r\,\mathrm{d}\Omega+ \\
&\quad +\ k_2\int_{\Omega_{Ca}}\left[\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial r}\right)^2\right]r\,\mathrm{d}\Omega+k_3\int_{\Omega_{Mo}}\left[\left(\frac{\partial\vartheta_3}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\vartheta_3}{\partial r}\right)^2\right]r\,\mathrm{d}\Omega+ \\
&\quad +\int_{\Gamma_7}\alpha(\vartheta_3|_{\Gamma_7})^2r\,\mathrm{d}\Gamma\geq c_0\|\vartheta_0\|^2_{\boldsymbol{H}}+c_1\|\vartheta_1\|^2_{\boldsymbol{H}}+c_2\|\vartheta_2\|^2_{\boldsymbol{H}}+c_3\|\vartheta_3\|^2_{\boldsymbol{H}}\geq \\
&\quad \geq\min(c_0,c_1,c_2,c_3)\|\vartheta\|^2_{\boldsymbol{H}}\ ,
\end{aligned}\tag{2.101}$$

kde jsme užili Friedrichsovu nerovnost (viz [2] str. 10).
Společně s Větou 2.2.2 dostaneme

$$|A_\Omega(\vartheta,\,\boldsymbol{w},\,\vartheta)|\geq\min(c_0,c_1,c_2,c_3)\|\vartheta\|^2_{\boldsymbol{H}}\ .\tag{2.102}$$

To dokazuje H-elipticitu.
Dále

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Source}_\Omega(\,\psi)|&\leq\varrho_1\int_{\Omega_{Gl}}|q\psi r|\,d\Omega\leq\varrho_1\left(\int_{\Omega_{Gl}}q^2r\,d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega_{Gl}}\psi^2r\,d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}\leq \\
&\leq\varrho_1\|q\|_{L^2_r(\Omega_{Gl})}\|\psi\|_{L^2_r(\Omega_{Gl})}\leq\varrho_1\|q\|_{L^2_r(\Omega_{Gl})}\|\psi\|_{\boldsymbol{H}}
\end{aligned}\tag{2.103}$$

a

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Coeff}_\Omega(\psi)|&\leq\int_{\Gamma_1}\beta_1|\psi r|\,d\Gamma+\int_{\Gamma_6}\beta_6|\psi r|\,d\Gamma+\int_{\Gamma_7}\alpha\vartheta_{ext}|\psi r|\,d\Gamma\leq \\
&\leq\beta_1\|1\|_{L^2_r(\partial\Omega_{Gl})}\|\psi\|_{L^2_r(\partial\Omega_{Gl})}+\beta_6\|1\|_{L^2_r(\partial\Omega_{Gl})}\|\psi\|_{L^2_r(\partial\Omega_{Gl})}+ \\
&\qquad+\alpha\vartheta_{ext}\|1\|_{L^2_r(\partial\Omega_{Gl})}\|\psi\|_{L^2_r(\partial\Omega_{Gl})}\leq \\
&\leq\left(\beta_1+\beta_6+\alpha\vartheta_{ext}\right)\|1\|_{L^2_r(\partial\Omega_{Gl})}\|\psi\|_{\boldsymbol{H}}\ ,
\end{aligned}\tag{2.104}$$

kde jsme užili Hölderovu nerovnost a Větu o stopách (viz [2] str. 9).
Linearita pravé strany (2.93) společně s (2.103) a (2.104) dává její spojitost. Dle Lax-Milgramovy věty existuje jednoznačné řešení úlohy (2.93), (2.94). □

**Poznámka.**
*Úloha v sobě zahrnuje, jak ryze konduktivní vedení tepla v podoblastech $\Omega_{Pl}\cup\Omega_{Gl}\cup\Omega_{Mo}$ (rychlostní složka je tam nulová a tedy první člen vypadne), tak kombinaci konduktivního a konvektivního vedení tepla v podoblasti $\Omega_{Ca}$.*

# Kapitola 3

# Formulace úloh optimálního návrhu

Cílem této části je formulovat úlohu tvarové optimalizace oblasti, kterou reprezentuje razník v soustavě forma, výlisek, razník a chladicí dutina razníku (výsledek byl publikován v článku [20]). Při optimalizaci razníku můžeme měnit pouze hloubku a tvar chladicí dutiny. Vnější tvar razníku je dán designérem a odpovídá tvaru vnitřku skleněného výrobku. Cílem tvarové optimalizace je dosáhnout toho, aby vnější povrch razníku měl v okamžiku vyjímání razníku z výlisku konstantní předem zvolenou teplotu. Tím nebudou na vnitřním povrchu skleněného výlisku vznikat povrchové prasklinky způsobované nízkou teplotou tvarovacího nástroje a nebude také docházet k lepení způsobovanému příliš vysokou teplotou povrchu razníku.
Opět zde přistoupíme k idealizaci nestacionární periodické úlohy pro vedení tepla a budeme uvažovat úlohu ustáleného vedení tepla pro střední hodnoty teplot.

## 3.1 Optimalizace tvaru chladicí dutiny razníku

Při formulaci úlohy tvarové optimalizace budeme vycházet z abstraktní formulace uvedené autory Haslinger a Neittaanmäki [2].

Nejprve označme

$$F_2^e(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in [0,\, x_2^e] \\ f_2^e(x) & \text{pro} \quad x \in [x_2^e,\, 1] \end{cases} \quad , \tag{3.1}$$

kde $x_2^e \in [s_{\min}, 1]$, ($s_{\min} > 0$ je pevná konstanta daná minimální přípustnou tloušťkou stěny razníku viz kapitola 2), $f_2^e \in C^{(0),1}([x_2^e, 1])$, $f_2^e(x_2^e) = 0$ a $0 \le f_2^e(x) \le f_1(x) - s_{\min}$, $|f_2^{e\prime}(x)| < C_D$ pro $x \in ]x_2^e, 1]$, kde $f_1$ je pevně daná rostoucí funkce reprezentující vnější tvar razníku. Dále $a \le f_2^e(x) - s_2$ pro $x \in [x_3, 1]$, kde $a > 0$ reprezentuje poloměr přívodní trubice a $s_2 > 0$ minimální přípustnou šířku mezery mezi stěnou dutiny a přívodní trubicí, $x_3 \in ]x_2, 1]$ značí hloubku zasunutí trubice.

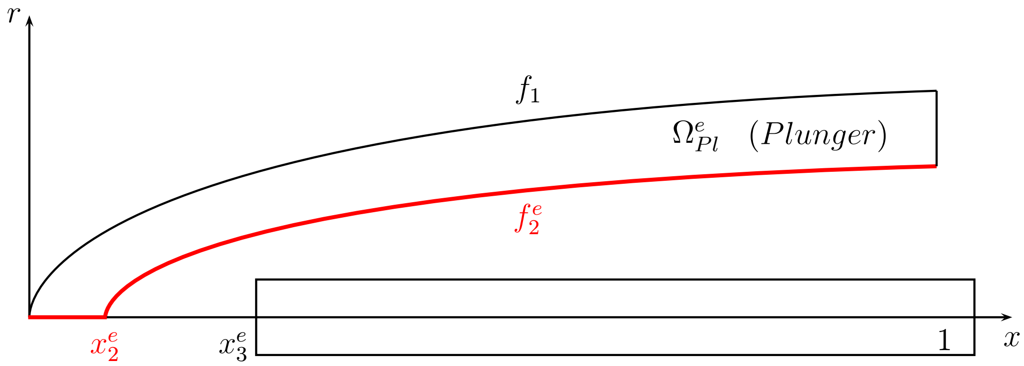
Dále definujeme množinu přípustných návrhových funkcí

$$
\begin{aligned}
U^e_{ad} = \{ \; & F^e_2(x) \in C^{(0),1}([0,1])\,;\; F^e_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in [0,\, x^e_2] \\ f^e_2(x) & \text{pro} \quad x \in [x^e_2,\, 1] \end{cases} , \\
& x^e_2 \in [s_{\min},\, 1],\; s_{\min} > 0,\; f^e_2 \in C^{(0),1}([x^e_2,\, 1]),\; f^e_2(x^e_2) = 0, \\
& 0 \le f^e_2(x) \le f_1(x) - s_{\min},\; |f^{e\prime}_2(x)| < C_D \text{ pro } x \in ]x^e_2, 1], \\
& f_1 \text{ daná},\; a \le f^e_2(x) - s_2 \text{ pro } x \in [x^e_3, 1],\; a > 0,\; s_2 > 0,\; x^e_3 \in ]x_2, 1] \} ,
\end{aligned}
$$

kde funkce $F^e_2$ reprezentuje vnitřní tvar dutiny razníku.

Uvažujme oblast $\Omega^e_{Pl}$ závislou na návrhové funkci $F^e_2(x)$ definovanou vztahem

$$
\Omega^e_{Pl} = \{(x,\, r) \in R^2\,;\; F^e_2(x) < r < f_1(x) \;\; \text{pro} \;\; x \in [0,\, 1]\} \,.
$$



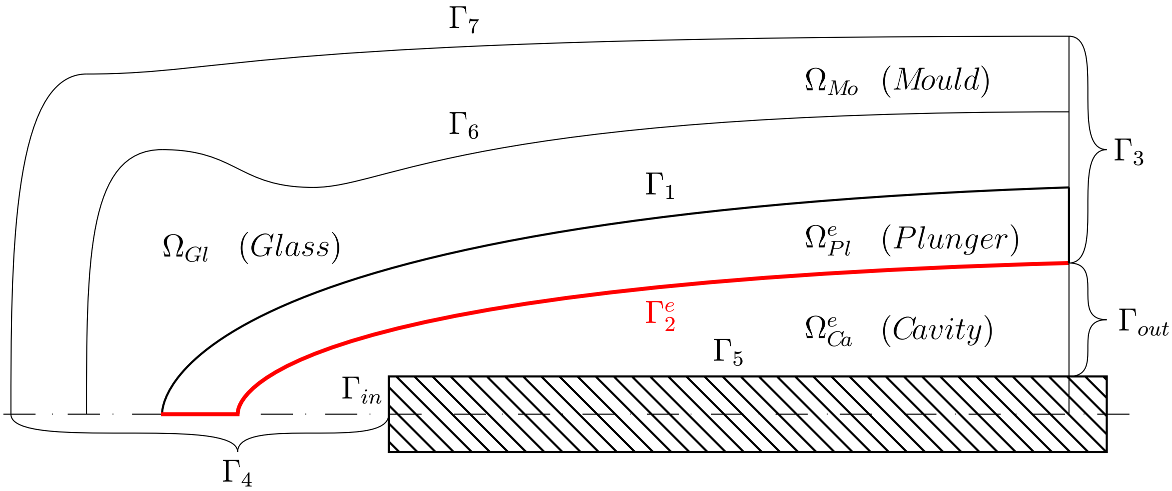

Obrázek 3.1: *Schéma razníku s vyznačenou částí optimalizované hranice.*

Označme symbolem $\Theta$ množinu všech přípustných oblastí $\Omega^e_{Pl} \subset R^2$ s lipschitzovskou hranicí.
Zavedeme konvergenci na množině $\Theta$.
Řekneme, že posloupnost $\Omega^n_e \in \Theta$ konverguje k oblasti $\Omega^e_{Pl} \in \Theta$ právě, když posloupnost funkcí ${}^nF^e_2(x)$ konverguje na [0,1] stejnoměrně k funkci $F^e_2(x)$.

Podobně jako v kapitole 2.2 budeme i nyní řešit problém pro ustálené vedení tepla na soustavě sklářské formy, výlisku, razníku a dutiny razníku.

Uvažujeme rovinnou oblast $\Omega^S = \mathrm{Int}\,\overline{\Omega^e_{Pl} \cup \Omega_{Gl} \cup \Omega^e_{Ca} \cup \Omega_{Mo}}$, kde $\Omega_{Gl}$, $\Omega_{Mo}$ jsou stejné jako v kapitole 2.2 a oblast $\Omega^e_{Ca}$ reprezentuje chladicí dutinu uvnitř modifikovaného razníku, jejíž tvar je dán jako doplněk $\Omega^e_{Pl}$ do oblasti $\mathrm{Int}\,\overline{\Omega_{Pl} \cup \Omega_{Ca}}$ z kapitoly 2.2.

Podobně jako v předchozím označíme $\Gamma_1$ hranici mezi razníkem $\Omega^e_{Pl}$ a skleněným výliskem $\Omega_{Gl}$ a $\Gamma^e_2$ hranici mezi razníkem $\Omega^e_{Pl}$ a dutinou razníku $\Omega^e_{Ca}$. Dále rozšíříme označení $\Gamma_3$ na celou část hranice spojující systém forma, výlisek a razník, s lisem a označení $\Gamma_4$ rozšíříme na celou část osy symetrie vyznačené na obr. 3.2. Dále označíme $\Gamma_5$ část hranice tvořené trubicí přivádějící chladicí médium do dutiny razníku, $\Gamma_6$ část hranice mezi výliskem $\Omega_{Gl}$ a sklářskou formou $\Omega_{Mo}$ a $\Gamma_7$ vnější hranici sklářské formy, jež je obklopena vnějším prostředím. $\Gamma_{in}$ označuje část hranice, kterou je chladicí kapalina přivedena do dutiny razníku a $\Gamma_{out}$ část hranice, kterou kapalina odtéká.




Obrázek 3.2: *Schéma systému forma, výlisek, razník, dutina razníku a trubice pro přivádění chladicí vody s vyznačenou částí optimalizované hranice.*

Postupem analogickým kapitole 2.1 ve válcových souřadnicích zavedeme operátory

$$A_{\Omega^e_{Ca}}(\Phi^e,\, \varphi) = \int_{\Omega^e_{Ca}} \left( \frac{\partial \Phi^e}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^e}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) r \,\mathrm{d}\Omega \,, \tag{3.2}$$

$$G_\Gamma(\varphi) = \int_{\Gamma_{in}\cup\Gamma_{out}} g\varphi r \,\mathrm{d}\Gamma \ , \tag{3.3}$$

kde $g \in L^2_r(\partial\Omega^e_{Ca})$ reprezentující normálovou složku rychlosti na hranici dutiny razníku je ve tvaru

$$g = \begin{cases} 0 & \text{na} \quad \Gamma^e_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \ , \\ h^{in}_{velo} & \text{na} \quad \Gamma_{in} \ , \\ h^{out}_{velo} & \text{na} \quad \Gamma_{out} \ , \end{cases} \tag{3.4}$$

$h^{in}_{velo}$ je normálová rychlost na vstupu $\Gamma_{in}$, ($h^{in}_{velo} < 0$) a $h^{out}_{velo}$ normálová rychlost na výstupu $\Gamma_{out}$.
Předpoklad (2.15) se transformuje do tvaru

$$\int_{\Gamma_{in}\cup\Gamma_{out}} g\, r\, d\Gamma = 0 \ . \tag{3.5}$$

Analogicky zavedeme váhový Sobolevův prostor $H^1_r(\Omega^e_{Ca})$ (viz [4]) s normou

$$\|v\|_{1,r,\Omega^e_{Ca}} = \left( \int_{\Omega^e_{Ca}} \left[ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + v^2 \right] r \,\mathrm{d}\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \ . \tag{3.6}$$

Variační formulaci Neumannovy úlohy pro nalezení potenciálu rychlosti proudící vody dostaneme ve tvaru

$$A_{\Omega^e_{Ca}}(\Phi^e,\, \varphi) = G_\Gamma(\varphi) \qquad \forall \varphi \in H^1_r(\Omega^e_{Ca}) \ . \tag{3.7}$$

Rychlostní pole proudící vody $\boldsymbol{w}^e = (w^e_1, w^e_2)$ v dutině razníku $\Omega^e_{Ca}$ dostaneme ve tvaru

$$\boldsymbol{w}^e = \mathrm{grad}\Phi^e \ . \tag{3.8}$$

Toto řešení $\boldsymbol{w}^e$ dosadíme do variační formulace rovnice energie na $\Omega^S$ a tím dostaneme stavovou úlohu.

Nejprve označíme ve shodě s (2.81) až (2.85) operátory

$$\mathrm{Energy}^{velo}_{\Omega^S}(\vartheta,\, \boldsymbol{w}^e,\, \psi) = c_v \varrho_2 \int_{\Omega^e_{Ca}} \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} w^e_1 + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r} w^e_2 \right) \psi r \, d\Omega \ , \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Energy}^{cond}_{\Omega^S}(\vartheta,\, \psi) = {} & k_0 \int_{\Omega^e_{Pl}} \left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega + \\ & + k_1 \int_{\Omega_{Gl}} \left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega + \\ & + k_2 \int_{\Omega^e_{Ca}} \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega + \\ & + k_3 \int_{\Omega_{Mo}} \left( \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega \ ,\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\mathrm{Environment}_{\Omega^S}(\vartheta,\, \psi) = \int_{\Gamma_7} \alpha \vartheta_3|_{\Gamma_7} \psi r \, d\Gamma \ , \tag{3.11}$$

$$\mathrm{Source}_{\Omega^S}(\psi) = \varrho_1 \int_{\Omega_{Gl}} q \psi r \, d\Omega \ , \tag{3.12}$$

$$\mathrm{Coeff}_{\Omega^S}(\psi) = \int_{\Gamma_1} \beta_1 \psi r \, d\Gamma + \int_{\Gamma_6} \beta_6 \psi r \, d\Gamma + \int_{\Gamma_7} \alpha \vartheta_{ext} \psi r \, d\Gamma \ . \tag{3.13}$$

Dále označme

$$\begin{aligned} A_{\Omega^S}(\vartheta,\, \boldsymbol{w}^e,\, \psi) &= \mathrm{Energy}^{velo}_{\Omega^S}(\vartheta,\, \boldsymbol{w}^e,\, \psi) + \mathrm{Energy}^{cond}_{\Omega^S}(\vartheta,\, \psi) + \\ &+ \mathrm{Environment}_{\Omega^S}(\vartheta,\, \psi) \end{aligned} \tag{3.14}$$

a

$$F_{\Omega^S}(\psi) = \mathrm{Source}_{\Omega^S}(\psi) + \mathrm{Coeff}_{\Omega^S}(\psi) \ . \tag{3.15}$$

Zavedeme váhový Sobolevův prostor $H^1_r(\Omega_i)$ (viz [4]) s normou

$$\|v\|_{1,r,\Omega_i} = \left( \int_{\Omega_i} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + v^2 \right] r \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad i = 0, 1, 2, 3 \ , \tag{3.16}$$

($\Omega_0 \equiv \Omega^e_{Pl}$, $\Omega_1 \equiv \Omega_{Gl}$, $\Omega_2 \equiv \Omega^e_{Ca}$, $\Omega_3 \equiv \Omega_{Mo}$).

Dále označíme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^S(\Omega^S) = \{ \ & \vartheta;\ \vartheta \text{ definované v (2.76)},\ \vartheta_i \in H^1_r(\Omega_i) \text{ pro } i = 0, 1, 2, 3, \\ & \vartheta_3|_{\Gamma_6} = \vartheta_1|_{\Gamma_6},\ \vartheta_1|_{\Gamma_1} = \vartheta_0|_{\Gamma_1},\ \vartheta_0|_{\Gamma^e_2} = \vartheta_2|_{\Gamma^e_2} \} \ . \end{aligned}$$

Definujeme normu na $\boldsymbol{H}^S(\Omega^S)$ jako

$$\|\vartheta\|_{\boldsymbol{H}^S} = \left(\|\vartheta_0\|^2_{1,r,\Omega_0} + \|\vartheta_1\|^2_{1,r,\Omega_1} + \|\vartheta_2\|^2_{1,r,\Omega_2} + \|\vartheta_3\|^2_{1,r,\Omega_3}\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{3.17}$$

Označíme $\boldsymbol{H}^{S*}(\Omega^S)$ duální prostor k prostoru $\boldsymbol{H}^S(\Omega^S)$ s normou

$$\|F_{\Omega^S}\|_{\boldsymbol{H}^{S*}} = \sup_{\psi \neq 0} \frac{F_{\Omega^S}(\psi)}{\|\psi\|_{\boldsymbol{H}^S}} .$$

Dále označíme množinu

$$\Omega^S_H = \Omega^S \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}$$

a

$${}^e\mathcal{H}^{2D} = \{v \in C^\infty(\Omega^S_H);\ v|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}} = 0\} .$$

Nechť $\boldsymbol{H}^S_0(\Omega^S)$ je uzávěr množiny ${}^e\mathcal{H}^{2D}$ vzhledem k normě $\boldsymbol{H}^S(\Omega^S)$.

Okrajové podmínky pro teplotu splníme zavedením následující funkce.
Předpokládáme existenci funkce $\vartheta^e_\Gamma \in \boldsymbol{H}^S(\Omega^S)$ takové, že

$$\vartheta^e_\Gamma|_{\Gamma_{in}} = 288 \quad \text{na} \;\; \Gamma_{in}, \tag{3.18}$$
$$\vartheta^e_\Gamma|_{\Gamma_{out}} = h_{out} \quad \text{na} \;\; \Gamma_{out}, \tag{3.19}$$
$$\vartheta^e_\Gamma|_{\Gamma_3} = h_3 \quad \text{na} \;\; \Gamma_3, \tag{3.20}$$

kde $h_3 \in C(\Gamma_3)$ je daná funkce reprezentující ustálenou teplotu na hranici $\Gamma_3$ s lisem a $h_{out} \in C(\Gamma_{out})$ je daná funkce reprezentující rozložení teploty na výstupu z dutiny razníku $\Gamma_{out}$.

Variační formulace rovnice energie poslouží jako
**Stavová úloha:**
Hledáme funkci $\vartheta \equiv \vartheta(F^e_2) \in \boldsymbol{H}^S(\Omega^S)$ takovou, že

$$A_{\Omega^S}(\vartheta,\, \boldsymbol{w}^e,\, \psi) \;=\; F_{\Omega^S}(\psi) \quad \forall \psi \in \boldsymbol{H}^S_0(\Omega^S) , \tag{3.21}$$
$$\vartheta - \vartheta^e_\Gamma \in \boldsymbol{H}^S_0(\Omega^S) , \tag{3.22}$$

kde $F^e_2 \in U^e_{ad}$ a $\boldsymbol{w}^e$ je gradient slabého řešení úlohy (3.7).

**Věta 3.1.1.** *(existence a jednoznačnost řešení stavové úlohy)*
*Stavová úlohy (3.21), (3.22) má jediné řešení $\vartheta(F^e_2)$ pro každé $F^e_2 \in U^e_{ad}$ a příslušné rychlostní pole chladicí vody $\boldsymbol{w}^e$ získané jako gradient (3.8) jediného řešení úlohy (3.7) na oblasti $\Omega^e_{Ca}$, navíc existuje konstanta $C > 0$ taková, že*

$$\|\vartheta(F^e_2)\|_{\boldsymbol{H}^S} \le C \|F_{\Omega^S}\|_{\boldsymbol{H}^{S*}} . \tag{3.23}$$

*Důkaz.* Probíhá zcela analogicky jako důkaz Věty 2.2.3 pouze s tím rozdílem, že $\Omega_{Pl}$ nahradíme $\Omega^e_{Pl}$ a $\Omega_{Ca}$ oblastí $\Omega^e_{Ca}$. □

Budeme řešit **úlohu optimalizace tvaru chladicí dutiny razníku:**
Definujeme **účelový funkcionál** ve tvaru

$$\mathcal{J}^S(F_2^e) = \|\vartheta(F_2^e)|_{\Gamma_1} - K_{\Gamma_1}\|^2_{0,r,\Gamma_1} \ , \tag{3.24}$$

kde $\vartheta(F_2^e)|_{\Gamma_1}$ je stopa řešení $\vartheta(F_2^e)$ stavové úlohy (3.21), (3.22) na oblasti $\Omega^e_{Pl}$ na hranici $\Gamma_1$, $K_{\Gamma_1}$ předem pevně zvolená konstanta odpovídající optimální teplotě povrch razníku a hledáme **optimální návrh** $F_{Opt} \in U^e_{ad}$ tak, aby

$$\mathcal{J}^S(F_{Opt}) \le \mathcal{J}^S(F_2^e) \qquad \forall\ F_2^e \in U^e_{ad} \ . \tag{3.25}$$

**Věta 3.1.2.** *(existence řešení úlohy optimalizace tvaru chladicí dutiny razníku) Úloha (3.25) má alespoň jedno řešení.*

*Důkaz.* (viz též [20]) K důkazu použijeme Větu A.2.1 převzatou z [2] str. 29 (viz Dodatek). Označíme $\widetilde{U} = C([0,1])$, $U^o = \{f \in \widetilde{U};\, 0 \le f(x) \le f_1(x)\ \forall x \in [0,1]\}$, kde $f_1 \in C([0,1])$ je pevně daná rostoucí funkce. Množina $U^e_{ad}$ je omezená a uzavřená v $C([0,1])$ a navíc se skládá ze stejně stejnoměrně spojitých funkcí. Dle Arzelovy-Ascoliho věty dostaneme kompaktnost $U^e_{ad}$ v $C([0,1])$. Označíme $\Omega^n = \mathrm{Int}\,\overline{\Omega^n_{Pl} \cup \Omega_{Gl} \cup \Omega^n_{Ca} \cup \Omega_{Mo}}$ a $\vartheta^n = \vartheta^n_0 + \vartheta^n_1 + \vartheta^n_2 + \vartheta^n_3$ řešení stavové úlohy (3.21), (3.22) v oblasti $\Omega^n$ (viz též (2.76)). Dále označme $\boldsymbol{w^n} = (w^n_1, w^n_2)$ příslušné rychlostní pole získané z jednoznačného řešení úlohy (3.7) na oblasti $\Omega^n_{Ca}$ (viz též (2.17)). Nechť $F^e_n \in U^e_{ad}$ je posloupnost funkcí, pak existuje vybraná podposloupnost $F^e_{n_k} \to F^e \in U^e_{ad}$ taková, že $F^e_{n_k} \rightrightarrows F^e$ stejnoměrně na $[0,1]$ a tedy $\Omega^{n_k}_{Pl} \to \Omega^e_{Pl}$ a pak $\Omega^{n_k} \to \Omega^S$ na množině $\Theta$.
Variační formulace (3.7) Neumannovy úlohy pro nalezení potenciálu proudící vody v oblasti $\Omega^e_{Ca}$ má tvar

$$\int_{\Omega^e_{Ca}} \left[\frac{\partial \Phi^e}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^e}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right] r\, d\Omega = \int_{\Gamma_{in}\cup\Gamma_{out}} g\varphi r\, d\Gamma \qquad \forall \varphi \in H^1_r(\Omega^e_{Ca} \cup \Omega^e_{Pl}) \tag{3.26}$$

a variační formulace analogické úlohy na oblasti $\Omega^{n_k}_{Ca}$ má tvar

$$\int_{\Omega^{n_k}_{Ca}} \left[\frac{\partial \Phi^{n_k}}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{n_k}}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right] r\, d\Omega = \int_{\Gamma_{in}\cup\Gamma_{out}} g\varphi r\, d\Gamma \qquad \forall \varphi \in H^1_r(\Omega^{n_k}_{Ca} \cup \Omega^{n_k}_{Pl}) \ . \tag{3.27}$$

Odečteme (3.27) od (3.26) a dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e_{Ca}\cap\Omega^{n_k}_{Ca}} \left[\frac{\partial(\Phi^e - \Phi^{n_k})}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi^e - \Phi^{n_k})}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right] r\, d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega^e_{Ca}\setminus\Omega^{n_k}_{Ca}} \left[\frac{\partial \Phi^e}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^e}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right] r\, d\Omega - \int_{\Omega^{n_k}_{Ca}\setminus\Omega^e_{Ca}} \left[\frac{\partial \Phi^{n_k}}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{n_k}}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right] r\, d\Omega = 0 \ .
\end{aligned}$$

Dosazením $\varphi = \Phi^e - \Phi^{n_k}$ dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e_{Ca}\cap\Omega^{n_k}_{Ca}} \left[\left(\frac{\partial(\Phi^e - \Phi^{n_k})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Phi^e - \Phi^{n_k})}{\partial r}\right)^2\right] r\, d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega^e_{Ca}\setminus\Omega^{n_k}_{Ca}} \left[\frac{\partial \Phi^e}{\partial x}\frac{\partial(\Phi^e - \Phi^{n_k})}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^e}{\partial r}\frac{\partial(\Phi^e - \Phi^{n_k})}{\partial r}\right] r\, d\Omega - \\
&- \int_{\Omega^{n_k}_{Ca}\setminus\Omega^e_{Ca}} \left[\frac{\partial \Phi^{n_k}}{\partial x}\frac{\partial(\Phi^e - \Phi^{n_k})}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{n_k}}{\partial r}\frac{\partial(\Phi^e - \Phi^{n_k})}{\partial r}\right] r\, d\Omega = 0 \ .
\end{aligned}$$

Poslední dva integrály na levé straně mají limitu nula pro $\Omega^{n_k} \to \Omega^S$, protože integrujeme omezené funkce $\Phi^e \in H^1_r(\Omega^e_{Ca})$ a $\Phi^{n_k} \in H^1_r(\Omega^{n_k}_{Ca})$ přes oblasti s $\mathrm{meas}(\Omega^e_{Ca} \setminus \Omega^{n_k}_{Ca}) \to 0$ a $\mathrm{meas}(\Omega^{n_k}_{Ca} \setminus \Omega^e_{Ca}) \to 0$. V prvním integrálu integrujeme nezápornou funkci a tedy

$$\int_{\Omega^e_{Ca}\cap\Omega^{n_k}_{Ca}} \left[\left(\frac{\partial(\Phi^e - \Phi^{n_k})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\Phi^e - \Phi^{n_k})}{\partial r}\right)^2\right] r\, d\Omega = \\ = \int_{\Omega^e_{Ca}\cap\Omega^{n_k}_{Ca}} \left[(w_1 - w_1^{n_k})^2 + (w_2 - w_2^{n_k})^2\right] r\, d\Omega \to 0\ .$$

Z Hölderovy nerovnosti dostaneme

$$\int_{\Omega^e_{Ca}\cap\Omega^{n_k}_{Ca}} (w_i - w_i^{n_k}) r\, d\Omega \le \int_{\Omega^e_{Ca}\cap\Omega^{n_k}_{Ca}} |w_i - w_i^{n_k}| r\, d\Omega \le \\ \le \left(\int_{\Omega^e_{Ca}\cap\Omega^{n_k}_{Ca}} (w_i - w_i^{n_k})^2 r\, d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} meas(\Omega^e_{Ca} \cap \Omega^{n_k}_{Ca}) \to 0\ , \tag{3.28}$$

pro $i = 1, 2$ a tedy $w_i^{n_k} \to w_i$ v $L^2_r(\Omega^e_{Ca} \cap \Omega^{n_k}_{Ca})$.
Variační formulace stavové úlohy na oblasti $\Omega^{n_k}$ má tvar

$$A_{\Omega^{n_k}}(\vartheta^{n_k}, \boldsymbol{w}^{n_k}, \psi) = F_{\Omega^{n_k}}(\psi) \qquad \forall \psi \in \boldsymbol{H}_0(\Omega^{n_k})\ . \tag{3.29}$$

Odečteme (3.29) od (3.21) a dostaneme

$$\begin{aligned}
& c_v \varrho_2 \int_{\Omega^e_{Ca}\cap\Omega^{n_k}_{Ca}} \left[\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} w_1 \psi - \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial x} w_1^{n_k} \psi + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r} w_2 \psi - \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial r} w_2^{n_k} \psi\right] r\, d\Omega + \\
&+ k_0 \int_{\Omega^e_{Pl}\cap\Omega^{n_k}_{Pl}} \left[\frac{\partial(\vartheta_0 - \vartheta_0^{n_k})}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial(\vartheta_0 - \vartheta_0^{n_k})}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right] r\, d\Omega + \\
&+ k_1 \int_{\Omega_{Gl}} \left[\frac{\partial(\vartheta_1 - \vartheta_1^{n_k})}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial(\vartheta_1 - \vartheta_1^{n_k})}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right] r\, d\Omega + \\
&+ k_2 \int_{\Omega^e_{Ca}\cap\Omega^{n_k}_{Ca}} \left[\frac{\partial(\vartheta_2 - \vartheta_2^{n_k})}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial(\vartheta_2 - \vartheta_2^{n_k})}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right] r\, d\Omega + \\
&+ k_3 \int_{\Omega_{Mo}} \left[\frac{\partial(\vartheta_3 - \vartheta_3^{n_k})}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial(\vartheta_3 - \vartheta_3^{n_k})}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right] r\, d\Omega + \\
&+ \alpha \int_{\Gamma_7} (\vartheta_3|_{\Gamma_7} - \vartheta_3^{n_k}|_{\Gamma_7})\, \psi r\, d\Gamma + \\
&+ \int_{\Omega^e_{Ca}\cap\Omega^{n_k}_{Pl}} \left[\left(k_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} - k_0 \frac{\partial \vartheta_0^{n_k}}{\partial x}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(k_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r} - k_0 \frac{\partial \vartheta_0^{n_k}}{\partial r}\right)\frac{\partial \psi}{\partial r} + \right. \\
&\qquad \left. +\ c_v \varrho_2 \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} w_1 + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r} w_2\right)\psi\right] r\, d\Omega\ + \\
&+ \int_{\Omega^e_{Pl}\cap\Omega^{n_k}_{Ca}} \left[\left(k_0 \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} - k_2 \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial x}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(k_0 \frac{\partial \vartheta_0}{\partial r} - k_2 \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial r}\right)\frac{\partial \psi}{\partial r} - \right. \\
&\qquad \left. -\ c_v \varrho_2 \left(\frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial x} w_1^{n_k} + \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial r} w_2^{n_k}\right)\psi\right] r\, d\Omega = 0\ .
\end{aligned}$$

Přičteme a odečteme členy $\frac{\partial\vartheta_2^{n_k}}{\partial x}w_1\psi$ a $\frac{\partial\vartheta_2^{n_k}}{\partial r}w_2\psi$ v prvním integrálu. Potom dosadíme $\psi = \vartheta - \vartheta^{n_k}$ a dostaneme

$$
\begin{aligned}
& c_v\varrho_2\int_{\Omega^e_{Ca}\cap\Omega^{n_k}_{Ca}}\left[\frac{\partial(\vartheta_2-\vartheta_2^{n_k})}{\partial x}w_1(\vartheta_2-\vartheta_2^{n_k})+\frac{\partial(\vartheta_2-\vartheta_2^{n_k})}{\partial r}w_2(\vartheta_2-\vartheta_2^{n_k})\right]r\,d\Omega+\\
&+k_0\int_{\Omega^e_{Pl}\cap\Omega^{n_k}_{Pl}}\left[\left(\frac{\partial(\vartheta_0-\vartheta_0^{n_k})}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(\vartheta_0-\vartheta_0^{n_k})}{\partial r}\right)^2\right]r\,d\Omega+\\
&+k_1\int_{\Omega_{Gl}}\left[\left(\frac{\partial(\vartheta_1-\vartheta_1^{n_k})}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(\vartheta_1-\vartheta_1^{n_k})}{\partial r}\right)^2\right]r\,d\Omega+\\
&+k_2\int_{\Omega^e_{Ca}\cap\Omega^{n_k}_{Ca}}\left[\left(\frac{\partial(\vartheta_2-\vartheta_2^{n_k})}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(\vartheta_2-\vartheta_2^{n_k})}{\partial r}\right)^2\right]r\,d\Omega+\\
&+k_3\int_{\Omega_{Mo}}\left[\left(\frac{\partial(\vartheta_3-\vartheta_3^{n_k})}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(\vartheta_3-\vartheta_3^{n_k})}{\partial r}\right)^2\right]r\,d\Omega+\\
&+\alpha\int_{\Gamma_7}(\vartheta_3|_{\Gamma_7}-\vartheta_3^{n_k}|_{\Gamma_7})^2\,r\,d\Gamma+\\
&+c_v\varrho_2\int_{\Omega^e_{Ca}\cap\Omega^{n_k}_{Ca}}\left[\frac{\partial\vartheta_2^{n_k}}{\partial x}(w_1-w_1^{n_k})(\vartheta_2-\vartheta_2^{n_k})+\frac{\partial\vartheta_2^{n_k}}{\partial r}(w_2-w_2^{n_k})(\vartheta_2-\vartheta_2^{n_k})\right]r\,d\Omega+\\
&+\int_{\Omega^e_{Ca}\cap\Omega^{n_k}_{Pl}}\left[\left(k_2\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}-k_0\frac{\partial\vartheta_0^{n_k}}{\partial x}\right)\frac{\partial(\vartheta_2-\vartheta_0^{n_k})}{\partial x}+\left(k_2\frac{\partial\vartheta_2}{\partial r}-k_0\frac{\partial\vartheta_0^{n_k}}{\partial r}\right)\frac{\partial(\vartheta_2-\vartheta_0^{n_k})}{\partial r}+\right.\\
&\qquad\left.+\,c_v\varrho_2\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}w_1+\frac{\partial\vartheta_2}{\partial r}w_2\right)(\vartheta_2-\vartheta_0^{n_k})\right]r\,d\Omega+\\
&+\int_{\Omega^e_{Pl}\cap\Omega^{n_k}_{Ca}}\left[\left(k_0\frac{\partial\vartheta_0}{\partial x}-k_2\frac{\partial\vartheta_2^{n_k}}{\partial x}\right)\frac{\partial(\vartheta_0-\vartheta_2^{n_k})}{\partial x}+\left(k_0\frac{\partial\vartheta_0}{\partial r}-k_2\frac{\partial\vartheta_2^{n_k}}{\partial r}\right)\frac{\partial(\vartheta_0-\vartheta_2^{n_k})}{\partial r}-\right.\\
&\qquad\left.-\,c_v\varrho_2\left(\frac{\partial\vartheta_2^{n_k}}{\partial x}w_1^{n_k}+\frac{\partial\vartheta_2^{n_k}}{\partial r}w_2^{n_k}\right)(\vartheta_0-\vartheta_2^{n_k})\right]r\,d\Omega=0\ .
\end{aligned}
$$

Poslední dva integrály na levé straně mají limitu nula pro $\Omega^{n_k}\to\Omega^S$, protože integrujeme omezené funkce přes oblasti s $\mathrm{meas}(\Omega^e_{Ca}\cap\Omega^{n_k}_{Pl})\to 0$ a $\mathrm{meas}(\Omega^e_{Pl}\cap\Omega^{n_k}_{Ca})\to 0$. Třetí integrál od konce má limitu nula, neboť $\frac{\partial\vartheta_2^{n_k}}{\partial x}$, $\frac{\partial\vartheta_2^{n_k}}{\partial r}$, $\vartheta_2$, $\vartheta_2^{n_k}$ jsou omezené funkce a $\boldsymbol{w}^{n_k}\to\boldsymbol{w}$ (viz (3.28)). Prvních šest integrálů je nezáporných a konvergují k $A_{\Omega^S}(\vartheta-\vartheta^{n_k},\,\boldsymbol{w},\,\vartheta-\vartheta^{n_k})$. Z H-elipticity bilineární formy $A_{\Omega^S}(\vartheta,\,\boldsymbol{w},\,\psi)$ (viz (2.102)) dostaneme

$$\|\vartheta-\vartheta^{n_k}\|^2_{\boldsymbol{H}^S}\le C A_{\Omega^S}(\vartheta-\vartheta^{n_k},\,\boldsymbol{w},\,\vartheta-\vartheta^{n_k})\to 0 \tag{3.30}$$

a tedy $\vartheta^{n_k}\to\vartheta$ v $\boldsymbol{H}^S(\Omega^S)$.
Zbývá dokázat, že

$$\mathcal{J}^S(F^e)\le \operatorname{liminf}_{n\to\infty}\mathcal{J}^S(F^e_{n_k})\ ,$$

což plyne ze skutečnosti, že čtverec normy $\|w|_{\Gamma_1}\|_{0,r,\Gamma_1}$ je slabě zdola polospojitý funkcionál. □

## 3.2 Optimalizace vnějšího tvaru proudového tělesa

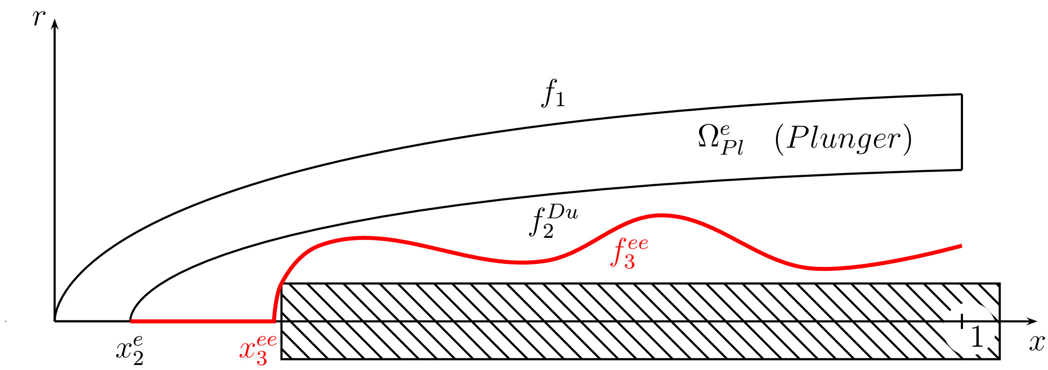
Výsledkem úlohy optimalizace tvaru chladicí dutiny razníku (3.25) je obecná funkce $F_{Opt} \in U^e_{ad}$, která reprezentuje tvar hranice chladicí dutiny $\Gamma^e_2$, a ta nemusí být neklesající. Dutina, která by byla tvořena funkcí, jež by v nějakém intervalu klesala, by byla technologicky velmi obtížně vyrobitelná. Proto $F_{Opt}$ nahradíme neklesající funkcí

$$F_{Du}(x) = \max_{t\in[0,x]} F_{Opt}(t) \qquad \text{pro } x \in [0,\, 1]\ , \tag{3.31}$$

která zaručí technologicky přípustný tvar dutiny. Označíme $f^{Du}_2 = F_{Du}|_{\text{supp}F_{Du}}$ zúžení $F_{Du}$ na svůj nosič. Hranici tvořenou touto funkcí zafixujeme a označíme ji $\Gamma^{Du}_2$.
Další možností jak modifikovat teplotní pole razníku je měnit rychlost chladicí kapaliny v jeho dutině prostřednictvím zužování jejího průřezu. Za tím účelem vložíme do dutiny tzv. regulační proudové těleso.
Nejprve označme

$$F^{ee}_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in [x^e_2,\, x^{ee}_3] \\ f^{ee}_3(x) & \text{pro} \quad x \in ]x^{ee}_3,\, 1] \end{cases} \quad , \tag{3.32}$$

kde $x^{ee}_3 \in ]x^e_2 + s_2,\, 1]$, $x^e_2$ je pevná konstanta reprezentující nejhlubší bod již optimalizované chladicí dutiny ze sekce 3.1, $f^{ee}_3 \in C^{(0),1}([x^{ee}_3,\, 1])$, $f^{ee}_3(x^{ee}_3) = 0$ a $0 \le f^{ee}_3(x) \le f^{Du}_2(x) - s_2$, $|f^{ee\prime}_3(x)| < C_T$ pro $x \in ]x^{ee}_3, 1]$, kde $f^{Du}_2$ značí funkci reprezentující vnitřní upravený tvar optimalizované dutiny razníku a $s_2 > 0$ minimální přípustnou šířku mezery mezi vnitřní stěnou dutiny razníku a regulačním proudovým tělesem.



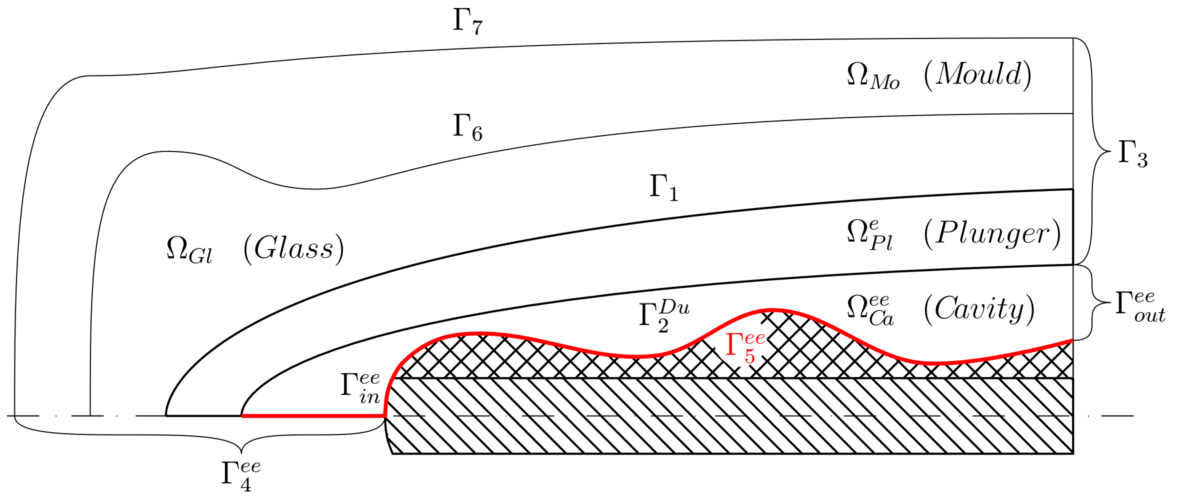

Obrázek 3.3: *Schéma razníku s vyznačenou částí optimalizované hranice regulačního proudového tělesa.*

Dále definujeme množinu přípustných návrhových funkcí

$$\begin{aligned} U^{ee}_{ad} = \{\ & F^{ee}_3(x) \in C^{(0),1}([x_2, 1])\,;\ F^{ee}_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in [x_2,\, x^{ee}_3] \\ f^{ee}_3(x) & \text{pro} \quad x \in [x^{ee}_3,\, 1] \end{cases} \quad , \\ & x^{ee}_3 \in ]x^e_2 + s_2,\, 1],\ x^e_2 \text{ dán},\ f^{ee}_3 \in C^{(0),1}([x^{ee}_3,\, 1]),\ f^{ee}_3(x^{ee}_3) = 0, \\ & 0 \le f^{ee}_3(x) \le f^{Du}_2(x) - s_2,\ |f^{ee\prime}_3(x)| < C_T \text{ pro } x \in ]x^{ee}_3, 1], \\ & f^{Du}_2 \text{ daná},\ s_2 > 0\}\,, \end{aligned}$$

kde funkce $F_3^{ee}$ reprezentuje vnější tvar regulačního proudového tělesa umístěného do osy dutiny razníku.
Uvažujme oblast $\Omega_{Ca}^{ee}$ závislou na návrhové funkci $F_3^{ee}(x)$ definovanou vztahem

$$\Omega_{Ca}^{ee} = \{(x,\, r) \in R^2\, ;\; F_3^{ee}(x) < r < f_2^{Du}(x) \;\; \text{pro} \;\; x \in [x_2^e,\, 1]\; )\}\ . \tag{3.33}$$




Obrázek 3.4: *Schéma systému forma, výlisek, razník, dutina razníku a regulační proudové těleso s vyznačenou částí optimalizované hranice.*

Označme symbolem $\Theta^*$ množinu všech přípustných oblastí $\Omega_{Ca}^{ee} \subset R^2$ s lipschitzovskou hranicí.
Zavedeme konvergenci na množině $\Theta^*$.
Řekneme, že posloupnost ${}^n\Omega_{Ca}^{ee} \in \Theta^*$ konverguje k oblasti $\Omega_{Ca}^{ee} \in \Theta^*$ právě, když posloupnost funkcí ${}^nF_3^{ee}(x)$ konverguje na $[x_2^e,\, 1]$ stejnoměrně k funkci $F_3^{ee}(x)$.

Podobně jako v kapitole 2.2 budeme i nyní řešit problém pro ustálené vedení tepla na soustavě sklářské formy, výlisku, razníku a dutiny razníku.

Uvažujeme rovinnou oblast $\Omega^P = \mathrm{Int}\,\overline{\Omega_{Pl}^e \cup \Omega_{Gl} \cup \Omega_{Ca}^{ee} \cup \Omega_{Mo}}$, kde $\Omega_{Pl}^e,\ \Omega_{Gl},\ \Omega_{Mo}$ jsou stejné jako v kapitole 3.1 a oblast $\Omega_{Ca}^{ee}$ reprezentuje chladicí dutinu uvnitř razníku, jejíž vnitřek je modifikován tvarem regulačního proudového tělesa.

Podobně jako v předchozím označíme $\Gamma_1$ hranici mezi razníkem $\Omega_{Pl}^e$ a skleněným výliskem $\Omega_{Gl}$ a $\Gamma_2^{Du}$ hranici mezi razníkem $\Omega_{Pl}^e$ a dutinou razníku $\Omega_{Ca}^{ee}$. Dále rozšíříme označení $\Gamma_3$ na celou část hranice spojující systém forma, výlisek a razník, s lisem a označení $\Gamma_4^{ee}$ rozšíříme na celou část osy symetrie vyznačené na obr. 3.4. Dále označíme $\Gamma_5^{ee}$ část hranice tvořené vnější stranou regulačního proudového tělesa, $\Gamma_6$ část hranice mezi výliskem $\Omega_{Gl}$ a sklářskou formou $\Omega_{Mo}$ a $\Gamma_7$ vnější hranici sklářské formy, jež je obklopena vnějším prostředím. $\Gamma_{in}^{ee}$ označuje část hranice, kterou je chladicí kapalina přivedena do dutiny razníku a $\Gamma_{out}^{ee}$ část hranice, kterou kapalina odtéká.

V dutině $\Omega_{Ca}^{ee}$ vzniklé mezi upravenou hranicí $\Gamma_2^{Du}$ a vnějším povrchem regulačního proudového tělesa $\Gamma_5^{ee}$ uvažujeme opět potenciální proudění chladicí vody. Postupem analogickým kapitole 2.1 definujeme ve válcových souřadnicích operátory

$$A_{\Omega_{Ca}^{ee}}(\Phi^{ee}, \varphi) = \int_{\Omega_{Ca}^{ee}} \left( \frac{\partial \Phi^{ee}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{ee}}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) r \, \mathrm{d}\Omega \,, \tag{3.34}$$

$$G_\Gamma(\varphi) = \int_{\Gamma_{in}^{ee} \cup \Gamma_{out}^{ee}} g \varphi r \, \mathrm{d}\Gamma \ , \tag{3.35}$$

kde $g \in L_r^2(\partial \Omega_{Ca}^{ee})$ reprezentující normálovou složku rychlosti na hranici dutiny razníku je ve tvaru

$$g = \begin{cases} 0 & \text{na} \ \ \Gamma_2^{Du} \cup \Gamma_4^{ee} \cup \Gamma_5^{ee} \ , \\ h_{velo}^{in} & \text{na} \ \ \Gamma_{in}^{ee} \ , \\ h_{velo}^{out} & \text{na} \ \ \Gamma_{out}^{ee} \ , \end{cases} \tag{3.36}$$

$h_{velo}^{in}$ je normálová rychlost na vstupu $\Gamma_{in}^{ee}$, ($h_{velo}^{in} < 0$) a $h_{velo}^{out}$ normálová rychlost na výstupu $\Gamma_{out}^{ee}$.
Předpoklad (2.15) se transformuje do tvaru

$$\int_{\Gamma_{in}^{ee} \cup \Gamma_{out}^{ee}} g \, r \, d\Gamma = 0 \ . \tag{3.37}$$

Analogicky jako v předchozích kapitolách zavedeme váhový Sobolevův prostor $H_r^1(\Omega_{Ca}^{ee})$ (viz [4]) s normou

$$\|v\|_{1,r,\Omega_{Ca}^{ee}} = \left( \int_{\Omega_{Ca}^{ee}} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + v^2 \right] r \, \mathrm{d}\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \ . \tag{3.38}$$

Variační formulaci Neumannovy úlohy pro nalezení potenciálu rychlosti proudící vody dostaneme ve tvaru

$$A_{\Omega_{Ca}^{ee}}(\Phi^{ee}, \varphi) = G_\Gamma(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_r^1(\Omega_{Ca}^{ee}) \ . \tag{3.39}$$

Rychlostní pole proudící vody $\boldsymbol{w}^{ee} = (w_1^{ee}, w_2^{ee})$ v dutině razníku $\Omega_{Ca}^{ee}$ dostaneme z jednoznačného řešení $\Phi^{ee}$ úlohy (3.39) ve tvaru

$$\boldsymbol{w}^{ee} = \mathrm{grad} \Phi^{ee} \ . \tag{3.40}$$

Toto řešení $\boldsymbol{w}^{ee}$ dosadíme do variační formulace rovnice energie na $\Omega^P$ a tím dostaneme stavovou úlohu.

Nejprve označíme ve shodě s (2.81) až (2.85) operátory

$$\text{Energy}^{velo}_{\Omega^P}(\vartheta,\, \boldsymbol{w},\, \psi) = c_v \varrho_2 \int_{\Omega^{ee}_{Ca}} \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} w^{ee}_1 + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r} w^{ee}_2 \right) \psi r \,\mathrm{d}\Omega \;, \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned} \text{Energy}^{cond}_{\Omega^P}(\vartheta,\, \psi) = {} & k_0 \int_{\Omega^e_{Pl}} \left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \,\mathrm{d}\Omega + \\ & + k_1 \int_{\Omega_{Gl}} \left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \,\mathrm{d}\Omega + \\ & + k_2 \int_{\Omega^{ee}_{Ca}} \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \,\mathrm{d}\Omega + \\ & + k_3 \int_{\Omega_{Mo}} \left( \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \,\mathrm{d}\Omega \;, \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\text{Environment}_{\Omega^P}(\vartheta,\, \psi) = \int_{\Gamma_7} \alpha \vartheta_3|_{\Gamma_7} \psi r \,\mathrm{d}\Gamma \;, \tag{3.43}$$

$$\text{Source}_{\Omega^P}(\boldsymbol{w},\, \psi) = \varrho_1 \int_{\Omega_1} q_1 \psi r \,\mathrm{d}\Omega \;, \tag{3.44}$$

$$\text{Coeff}_{\Omega^P}(\psi) = \int_{\Gamma_1} \beta_1 \psi r \,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_6} \beta_6 \psi r \,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_7} \alpha \vartheta_{ext} \psi r \,\mathrm{d}\Gamma \;. \tag{3.45}$$

Dále označme

$$\begin{aligned} A_{\Omega^P}(\vartheta,\, \boldsymbol{w}^{ee},\, \psi) = {} & \text{Energy}^{velo}_{\Omega^P}(\vartheta,\, \boldsymbol{w}^{ee},\, \psi) + \text{Energy}^{cond}_{\Omega^P}(\vartheta,\, \psi) + \\ & + \text{Environment}_{\Omega^P}(\vartheta,\, \psi) \end{aligned} \tag{3.46}$$

a

$$F_{\Omega^P}(\psi) = \text{Source}_{\Omega^P}(\psi) + \text{Coeff}_{\Omega^P}(\psi) \;. \tag{3.47}$$

Zavedeme váhový Sobolevův prostor $H^1_r(\Omega_i)$ (viz [4]) s normou

$$\|v\|_{1,r,\Omega_i} = \left( \int_{\Omega_i} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + v^2 \right] r \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad i = 0, 1, 2, 3 \;, \tag{3.48}$$

($\Omega_0 \equiv \Omega^e_{Pl}$, $\Omega_1 \equiv \Omega_{Gl}$, $\Omega_2 \equiv \Omega^{ee}_{Ca}$, $\Omega_3 \equiv \Omega_{Mo}$).

Dále označíme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^P(\Omega^P) = \{\; & \vartheta;\ \vartheta \text{ definované v (2.76)},\ \vartheta_i \in H^1_r(\Omega_i) \text{ pro } i = 0,1,2,3, \\ & \vartheta_3|_{\Gamma_6} = \vartheta_1|_{\Gamma_6},\ \vartheta_1|_{\Gamma_1} = \vartheta_0|_{\Gamma_1},\ \vartheta_0|_{\Gamma^{Du}_2} = \vartheta_2|_{\Gamma^{Du}_2} \} \;. \end{aligned}$$

Definujeme normu na $\boldsymbol{H}^P(\Omega^P)$ jako

$$\|\vartheta\|_{\boldsymbol{H}^P} = \left( \|\vartheta_0\|^2_{1,r,\Omega_0} + \|\vartheta_1\|^2_{1,r,\Omega_1} + \|\vartheta_2\|^2_{1,r,\Omega_2} + \|\vartheta_3\|^2_{1,r,\Omega_3} \right)^{\frac{1}{2}} \;. \tag{3.49}$$

Označíme $\boldsymbol{H}^{P*}(\Omega^P)$ duální prostor k prostoru $\boldsymbol{H}^P(\Omega^P)$ s normou

$$\|F_{\Omega^P}\|_{\boldsymbol{H}^{P*}} = \sup_{\psi \neq 0} \frac{F_{\Omega^P}(\psi)}{\|\psi\|_{\boldsymbol{H}^P}} \;.$$

Označme množinu

$$\Omega_H^P = \Omega^P \cup \Gamma_{in}^{ee} \cup \Gamma_{out}^{ee} \cup \Gamma_3$$

a

$${}^{ee}\mathcal{H}^{2D} = \{ v \in C^\infty(\Omega_H^P);\ v|_{\Gamma_{in}^{ee} \cup \Gamma_{out}^{ee} \cup \Gamma_3} = 0 \} .$$

Nechť $\boldsymbol{H}_0^P(\Omega^P)$ je uzávěr množiny ${}^{ee}\mathcal{H}^{2D}$ vzhledem k normě $\| \ \|_{\boldsymbol{H}^P}$.

Předpokládáme existenci funkce $\vartheta_\Gamma^{ee} \in \boldsymbol{H}^P(\Omega^P)$ takové, že

$$\vartheta_\Gamma^{ee}|_{\Gamma_{in}^{ee}} = 288 \qquad \text{na } \Gamma_{in}^{ee} , \tag{3.50}$$

$$\vartheta_\Gamma^{ee}|_{\Gamma_{out}^{ee}} = h_{out}^{ee} \qquad \text{na } \Gamma_{out}^{ee} , \tag{3.51}$$

$$\vartheta_\Gamma^{ee}|_{\Gamma_3} = h_3^{ee} \qquad \text{na } \Gamma_3 , \tag{3.52}$$

kde $h_3^{ee} \in C(\Gamma_3)$ je daná funkce reprezentující ustálenou teplotu na hranici $\Gamma_3$ s lisem a $h_{out}^{ee} \in C(\Gamma_{out}^{ee})$ je daná funkce reprezentující rozložení teploty na výstupu z dutiny razníku $\Gamma_{out}^{ee}$.

Variační formulace rovnice energie poslouží jako
**Stavová úloha:**
Hledáme funkci $\vartheta \equiv \vartheta(F_3^{ee}) \in \boldsymbol{H}^P(\Omega^P)$ takovou, že

$$A_{\Omega^P}(\vartheta,\, \boldsymbol{w}^{ee},\, \psi) \ = \ F_{\Omega^P}(\psi) \quad \forall \psi \in \ \boldsymbol{H}_0^P(\Omega^P) , \tag{3.53}$$

$$\vartheta - \vartheta_\Gamma^{ee} \in \ \boldsymbol{H}_0^P(\Omega^P) , \tag{3.54}$$

kde $F_3^{ee} \in U_{ad}^{ee}$ a $\boldsymbol{w}^{ee}$ je gradient (3.40) slabého řešení úlohy (3.39).

**Věta 3.2.1.** *(existence a jednoznačnost řešení stavové úlohy)*
*Stavová úlohy (3.53), (3.54) má jediné řešení $\vartheta(F_3^{ee})$ pro každé $F_3^{ee} \in U_{ad}^{ee}$ a příslušné rychlostní pole chladicí vody $\boldsymbol{w}^{ee}$ získané jako gradient (3.40) jediného řešení úlohy (3.39) na oblasti $\Omega_{Ca}^{ee}$, navíc existuje konstanta $C > 0$ taková, že*

$$\|\vartheta(F_3^{ee})\|_{\boldsymbol{H}^P} \le C \|F_{\Omega^P}\|_{\boldsymbol{H}^{P*}} . \tag{3.55}$$

*Důkaz.* Probíhá zcela analogicky jako důkaz Věty 2.2.3 pouze s tím rozdílem, že $\Omega_{Ca}$, $\Omega_{Pl}$ nahradíme oblastmi $\Omega_{Ca}^{ee}$, $\Omega_{Pl}^e$ a $\Gamma_2$ nahradíme $\Gamma_2^{Du}$. □

Budeme řešit **úlohu optimalizace vnějšího tvaru regulačního proudového tělesa:**
Definujeme **účelový funkcionál** ve tvaru

$$\mathcal{J}^{\mathcal{P}}(F_3^{ee}) = \|\vartheta(F_3^{ee})|_{\Gamma_1} - K_{\Gamma_1}\|_{0,r,\Gamma_1}^2 , \tag{3.56}$$

kde $\vartheta(F_3^{ee})|_{\Gamma_1}$ je stopa řešení $\vartheta(F_3^{ee})$ stavové úlohy (3.53), (3.54) na oblasti $\Omega_{Pl}^e$, $K_{\Gamma_1}$ předem pevně zvolená konstanta odpovídající optimální teplotě povrch razníku a hledáme **optimální návrh** $F_{Opt}^{PT} \in U_{ad}^{ee}$ tak, aby

$$\mathcal{J}^{\mathcal{P}}(F_{Opt}^{PT}) \le \mathcal{J}^{\mathcal{P}}(F_3^{ee}) \qquad \forall\ F_3^{ee} \in U_{ad}^{ee} . \tag{3.57}$$

**Věta 3.2.2.** *(existence řešení úlohy optimalizace vnějšího tvaru regulačního proudového tělesa)*
*Úloha (3.57) má alespoň jedno řešení.*

*Důkaz.* K důkazu použijeme Větu A.2.1 převzatou z [2] str. 29 (viz Dodatek). Označíme $\widetilde{U} = C([x_2^e, 1])$, $U^o = \{f \in \widetilde{U};\, 0 \le f(x) \le f_2^{Du}(x)\ \forall x \in [x_2^e, 1]\}$, kde $f_2^{Du} \in C([x_2^e, 1])$ je pevně daná funkce.
Množina $U_{ad}^{ee}$ je omezená a uzavřená v $C([x_2^e, 1])$ a navíc se skládá ze stejně stejnoměrně spojitých funkcí. Dle Arzelovy-Ascoliho věty dostaneme kompaktnost $U_{ad}^{ee}$ v $C([x_2^e, 1])$.
Označíme $\Omega^n = \mathrm{Int}\, \overline{\Omega_{Pl}^e \cup \Omega_{Gl} \cup \Omega_{Ca}^n \cup \Omega_{Mo}}$ a $\vartheta^n = \vartheta_0^n + \vartheta_1^n + \vartheta_2^n + \vartheta_3^n$ řešení stavové úlohy (3.53), (3.54) v oblasti $\Omega^n$ (viz též (2.76)). Dále označme $\boldsymbol{w^n} = (w_1^n, w_2^n)$ příslušné rychlostní pole získané z jednoznačného řešení úlohy (3.39) na oblasti $\Omega_{Ca}^n$.
Označme $\Omega_{Bo}^e = \{(x,\, r) \in R^2\,;\ 0 < r < f_3^{ee}(x), \ \text{ pro } \ x \in [x_3^{ee},\, 1]\}$ a $\Omega^T = \Omega^P \cup \Omega_{Bo}^e$.
Nechť $F_n^{ee} \in U_{ad}^{ee}$ je posloupnost funkcí, pak existuje vybraná podposloupnost $F_{n_k}^{ee} \to F^{ee} \in U_{ad}^{ee}$ taková, že $F_{n_k}^{ee} \rightrightarrows F^{ee}$ stejnoměrně na $[x_2^e, 1]$ a tedy $\Omega_{Ca}^{n_k} \to \Omega_{Ca}^{ee}$ a pak $\Omega^{n_k} \to \Omega^P$ na množině $\Theta$.
Variační formulace (3.39) Neumannovy úlohy pro nalezení potenciálu proudící vody v oblasti $\Omega_{Ca}^{ee}$ má tvar

$$\int_{\Omega_{Ca}^{ee}} \left[ \frac{\partial \Phi^{ee}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{ee}}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] r\, d\Omega = \int_{\Gamma_{in}^{ee} \cup \Gamma_{out}^{ee}} g \varphi r\, d\Gamma \qquad \forall \varphi \in H_r^1(\Omega_{Ca}^{ee} \cup \Omega_{Bo}^e) \tag{3.58}$$

a variační formulace analogické úlohy na oblasti $\Omega_{Ca}^{n_k}$ má tvar

$$\int_{\Omega_{Ca}^{n_k}} \left[ \frac{\partial \Phi^{n_k}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{n_k}}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] r\, d\Omega = \int_{\Gamma_{in}^{n_k} \cup \Gamma_{out}^{n_k}} g \varphi r\, d\Gamma \qquad \forall \varphi \in H_r^1(\Omega_{Ca}^{ee} \cup \Omega_{Bo}^e)\ . \tag{3.59}$$

Odečteme (3.59) od (3.58) a dostaneme

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{Ca}^{ee} \cap \Omega_{Ca}^{n_k}} \left[ \frac{\partial (\Phi^{ee} - \Phi^{n_k})}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial (\Phi^{ee} - \Phi^{n_k})}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] r\, d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega_{Ca}^{ee} \setminus \Omega_{Ca}^{n_k}} \left[ \frac{\partial \Phi^{ee}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{ee}}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] r\, d\Omega - \int_{\Omega_{Ca}^{n_k} \setminus \Omega_{Ca}^{ee}} \left[ \frac{\partial \Phi^{n_k}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{n_k}}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] r\, d\Omega = 0\ . \end{aligned}$$

Dosazením $\varphi = \Phi^{ee} - \Phi^{n_k}$ dostaneme

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{Ca}^{ee} \cap \Omega_{Ca}^{n_k}} \left[ \left( \frac{\partial (\Phi^{ee} - \Phi^{n_k})}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial (\Phi^{ee} - \Phi^{n_k})}{\partial r} \right)^2 \right] r\, d\Omega + \\ &\quad + \int_{\Omega_{Ca}^{ee} \setminus \Omega_{Ca}^{n_k}} \left[ \frac{\partial \Phi^{ee}}{\partial x} \frac{\partial (\Phi^{ee} - \Phi^{n_k})}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{ee}}{\partial r} \frac{\partial (\Phi^{ee} - \Phi^{n_k})}{\partial r} \right] r\, d\Omega - \\ &\quad - \int_{\Omega_{Ca}^{n_k} \setminus \Omega_{Ca}^{ee}} \left[ \frac{\partial \Phi^{n_k}}{\partial x} \frac{\partial (\Phi^{ee} - \Phi^{n_k})}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{n_k}}{\partial r} \frac{\partial (\Phi^{ee} - \Phi^{n_k})}{\partial r} \right] r\, d\Omega = 0\ . \end{aligned}$$

Poslední dva integrály na levé straně mají limitu nula pro $\Omega^{n_k} \to \Omega^P$, protože integrujeme omezené funkce $\Phi^{ee} \in H_r^1(\Omega_{Ca}^{ee})$ a $\Phi^{n_k} \in H_r^1(\Omega_{Ca}^{n_k})$ přes oblasti s $\mathrm{meas}(\Omega_{Ca}^{ee} \setminus \Omega_{Ca}^{n_k}) \to 0$ a

$\mathrm{meas}(\Omega_{Ca}^{n_k} \setminus \Omega_{Ca}^{ee}) \to 0$. V prvním integrálu integrujeme nezápornou funkci a tedy

$$\int_{\Omega_{Ca}^{ee} \cap \Omega_{Ca}^{n_k}} \left[ \left( \frac{\partial(\Phi^{ee} - \Phi^{n_k})}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial(\Phi^{ee} - \Phi^{n_k})}{\partial r} \right)^2 \right] r \, d\Omega = \\ = \int_{\Omega_{Ca}^{ee} \cap \Omega_{Ca}^{n_k}} \left[ (w_1 - w_1^{n_k})^2 + (w_2 - w_2^{n_k})^2 \right] r \, d\Omega \to 0 \; .$$

Z Hölderovy nerovnosti dostaneme

$$\int_{\Omega_{Ca}^{ee} \cap \Omega_{Ca}^{n_k}} (w_i - w_i^{n_k}) r \, d\Omega \leq \int_{\Omega_{Ca}^{ee} \cap \Omega_{Ca}^{n_k}} |w_i - w_i^{n_k}| r \, d\Omega \leq \\ \leq \left( \int_{\Omega_{Ca}^{ee} \cap \Omega_{Ca}^{n_k}} (w_i - w_i^{n_k})^2 r \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{meas}(\Omega_{Ca}^{ee} \cap \Omega_{Ca}^{n_k}) \to 0 \; . \tag{3.60}$$

pro $i = 1, 2$ a tedy $w_i^{n_k} \to w_i$ v $L_r^2(\Omega_{Ca}^{ee} \cap \Omega_{Ca}^{n_k})$.
Variační formulace stavové úlohy na oblasti $\Omega^{n_k}$ má tvar

$$A_{\Omega^{n_k}}(\vartheta^{n_k}, \boldsymbol{w}^{n_k}, \psi) = F_{\Omega^{n_k}}(\psi) \qquad \forall \psi \in \; \boldsymbol{H}_0^P(\Omega^T) \; . \tag{3.61}$$

Odečteme (3.61) od (3.53) a dostaneme

$$c_v \varrho_2 \int_{\Omega_{Ca}^{ee} \cap \Omega_{Ca}^{n_k}} \left[ \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} w_1 \psi - \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial x} w_1^{n_k} \psi + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r} w_2 \psi - \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial r} w_2^{n_k} \psi \right] r \, d\Omega + \\ + k_0 \int_{\Omega_{Pl}^e} \left[ \frac{\partial(\vartheta_0 - \vartheta_0^{n_k})}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial(\vartheta_0 - \vartheta_0^{n_k})}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] r \, d\Omega + \\ + k_1 \int_{\Omega_{Gl}} \left[ \frac{\partial(\vartheta_1 - \vartheta_1^{n_k})}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial(\vartheta_1 - \vartheta_1^{n_k})}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] r \, d\Omega + \\ + k_2 \int_{\Omega_{Ca}^{ee} \cap \Omega_{Ca}^{n_k}} \left[ \frac{\partial(\vartheta_2 - \vartheta_2^{n_k})}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial(\vartheta_2 - \vartheta_2^{n_k})}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] r \, d\Omega + \\ + k_3 \int_{\Omega_{Mo}} \left[ \frac{\partial(\vartheta_3 - \vartheta_3^{n_k})}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial(\vartheta_3 - \vartheta_3^{n_k})}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] r \, d\Omega + \\ + \alpha \int_{\Gamma_7} (\vartheta_3|_{\Gamma_7} - \vartheta_3^{n_k}|_{\Gamma_7}) \psi r \, d\Gamma + \\ + \int_{\Omega_{Ca}^{ee} \setminus \Omega_{Ca}^{n_k}} \left[ k_2 \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + c_v \varrho_2 \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} w_1 + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r} w_2 \right) \psi \right] r \, d\Omega - \\ - \int_{\Omega_{Ca}^{n_k} \setminus \Omega_{Ca}^{ee}} \left[ k_2 \left( \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + c_v \varrho_2 \left( \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial x} w_1^{n_k} + \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial r} w_2^{n_k} \right) \psi \right] r d\Omega = 0.$$

Přičteme a odečteme členy $\frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial x} w_1 \psi$ a $\frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial r} w_2 \psi$ v prvním integrálu. Potom dosadíme

$\psi = \vartheta - \vartheta^{n_k}$ a dostaneme

$$
\begin{aligned}
c_v \varrho_2 & \int_{\Omega_{Ca}^{ee} \cap \Omega_{Ca}^{n_k}} \left[ \frac{\partial(\vartheta_2 - \vartheta_2^{n_k})}{\partial x} w_1(\vartheta_2 - \vartheta_2^{n_k}) + \frac{\partial(\vartheta_2 - \vartheta_2^{n_k})}{\partial r} w_2(\vartheta_2 - \vartheta_2^{n_k}) \right] r \, d\Omega + \\
& + k_0 \int_{\Omega_{Pl}^{e}} \left[ \left( \frac{\partial(\vartheta_0 - \vartheta_0^{n_k})}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial(\vartheta_0 - \vartheta_0^{n_k})}{\partial r} \right)^2 \right] r \, d\Omega + \\
& + k_1 \int_{\Omega_{Gl}} \left[ \left( \frac{\partial(\vartheta_1 - \vartheta_1^{n_k})}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial(\vartheta_1 - \vartheta_1^{n_k})}{\partial r} \right)^2 \right] r \, d\Omega + \\
& + k_2 \int_{\Omega_{Ca}^{ee} \cap \Omega_{Ca}^{n_k}} \left[ \left( \frac{\partial(\vartheta_2 - \vartheta_2^{n_k})}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial(\vartheta_2 - \vartheta_2^{n_k})}{\partial r} \right)^2 \right] r \, d\Omega + \\
& + k_3 \int_{\Omega_{Mo}} \left[ \left( \frac{\partial(\vartheta_3 - \vartheta_3^{n_k})}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial(\vartheta_3 - \vartheta_3^{n_k})}{\partial r} \right)^2 \right] r \, d\Omega + \\
& + \alpha \int_{\Gamma_7} (\vartheta_3|_{\Gamma_7} - \vartheta_3^{n_k}|_{\Gamma_7})^2 \, r \, d\Gamma + \\
& + c_v \varrho_2 \int_{\Omega_{Ca}^{ee} \cap \Omega_{Ca}^{n_k}} \left[ \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial x} (w_1 - w_1^{n_k})(\vartheta_2 - \vartheta_2^{n_k}) + \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial r} (w_2 - w_2^{n_k})(\vartheta_2 - \vartheta_2^{n_k}) \right] r \, d\Omega + \\
& + \int_{\Omega_{Ca}^{ee} \setminus \Omega_{Ca}^{n_k}} \left[ k_2 \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \frac{\partial(\vartheta_2 - \vartheta_0^{n_k})}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r} \frac{\partial(\vartheta_2 - \vartheta_0^{n_k})}{\partial r} \right) + \right. \\
& \qquad \left. + c_v \varrho_2 \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} w_1 + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r} w_2 \right) (\vartheta_2 - \vartheta_0^{n_k}) \right] r \, d\Omega - \\
& - \int_{\Omega_{Ca}^{n_k} \setminus \Omega_{Ca}^{ee}} \left[ k_2 \left( \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial x} \frac{\partial(\vartheta_0 - \vartheta_2^{n_k})}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial r} \frac{\partial(\vartheta_0 - \vartheta_2^{n_k})}{\partial r} \right) + \right. \\
& \qquad \left. + c_v \varrho_2 \left( \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial x} w_1^{n_k} + \frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial r} w_2^{n_k} \right) (\vartheta_0 - \vartheta_2^{n_k}) \right] r \, d\Omega = 0
\end{aligned}
$$

Poslední dva integrály na levé straně mají limitu nula pro $\Omega^{n_k} \to \Omega^P$ , protože integrujeme omezené funkce přes oblasti s $\text{meas}(\Omega_{Ca}^{ee} \setminus \Omega_{Ca}^{n_k}) \to 0$ a $\text{meas}(\Omega_{Ca}^{n_k} \setminus \Omega_{Ca}^{ee}) \to 0$. Třetí integrál od konce má limitu nula, neboť $\frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial x}$, $\frac{\partial \vartheta_2^{n_k}}{\partial r}$, $\vartheta_2$, $\vartheta_2^{n_k}$ jsou omezené funkce a $\boldsymbol{w}^{n_k} \to \boldsymbol{w}$ (viz (3.60)). Prvních šest integrálů je nezáporných a konvergují k $A_{\Omega^P}(\vartheta - \vartheta^{n_k}, \boldsymbol{w}, \vartheta - \vartheta^{n_k})$. Z H-elipticity bilineární formy $A_{\Omega^P}(\vartheta, \boldsymbol{w}, \psi)$ (viz (2.102)) dostaneme

$$
\|\vartheta - \vartheta^{n_k}\|^2_{\boldsymbol{H}^P} \le C A_{\Omega^P}(\vartheta - \vartheta^{n_k}, \boldsymbol{w}, \vartheta - \vartheta^{n_k}) \to 0 \tag{3.62}
$$

a tedy $\vartheta^{n_k} \to \vartheta$ v $\boldsymbol{H}^P(\Omega^P)$. Zbývá dokázat, že

$$
\mathcal{J}^P(F^{ee}) \le \text{liminf}_{n \to \infty} \mathcal{J}^P(F^{ee}_{n_k}) \ ,
$$

což plyne ze skutečnosti, že čtverec normy $\|\vartheta|_{\Gamma_1}\|_{0,r,\Gamma_1}$ je slabě zdola polospojitý funkcionál. $\square$

## 3.3 Optimalizace izolační bariéry

Další možností jak řídit lokálně intenzitu chlazení je vložit do dutiny razníku, jež byla po optimalizaci tvaru modifikována na vyrobitelný tvar (viz kapitola 3.2), tzv. izolační bariéru ve tvaru kroužku proměnlivé tloušťky s výrazně menším koeficientem vodivosti než má materiál razníku.

Pro zjednodušení popisu opět otočíme systém do horizontální polohy, abychom mohli popsat vnitřní povrch izolační bariéry pomocí funkce jedné proměnné.
Definujeme funkci

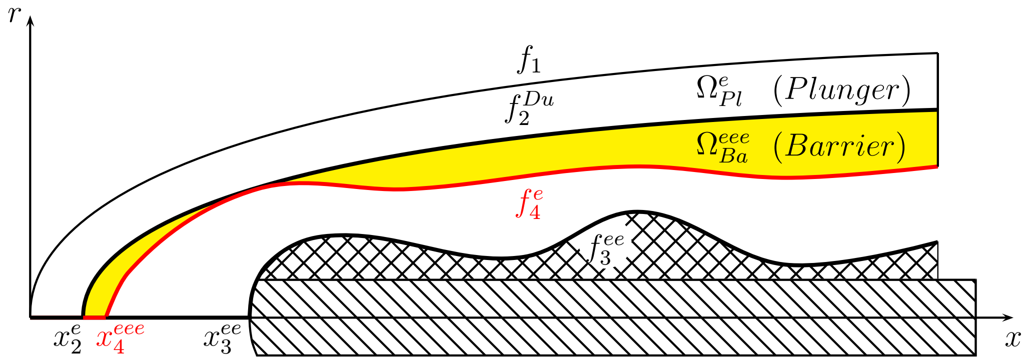
$$F_4^e(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in [0,\, x_4^{eee}] \\ f_4^e(x) & \text{pro} \quad x \in [x_4^{eee},\, 1] \end{cases}, \tag{3.63}$$

kde $x_4^{eee} \in [x_2^e,\, x_3^{ee} - s_2]$, $f_4^e \in C^{(0),1}([x_4^{eee},\, 1])$, $f_4^e(x_4^{eee}) = 0$ a $f_3^{ee}(x) + s_2 \leq f_4^e(x) \leq f_2^{Du}(x)$, kde $f_2^{Du}$, $f_3^{ee}$ jsou dané funkce a $s_2 > 0$ je minimální přípustná šířka mezery mezi vnitřní stěnou dutiny razníku a regulačním proudovým tělesem.

Dále definujeme množinu přípustných návrhových funkcí

$$\begin{aligned} U_{ad}^{eee} = \{\; & F_4^e(x) \in C^{(0),1}([0,1])\,;\; F_4^e(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in [0,\, x_4^{eee}] \\ f_4^e(x) & \text{pro} \quad x \in [x_4^{eee},\, 1] \end{cases}, \\ & x_4^{eee} \in [x_2^e,\, x_3^{ee} - s_2],\; f_4^e \in C^{(0),1}([x_4^{eee},\, 1]),\; f_4^e(x_4^{eee}) = 0, \\ & f_3^{ee}(x) + s_2 \leq f_4^e(x) \leq f_2^{Du}(x),\; f_2^{Du},\, f_3^{ee} \text{ dány},\; s_2 > 0 \}\,, \end{aligned}$$

kde funkce $f_4^e$ reprezentuje vnitřní tvar izolační bariéry umístěné v dutině razníku.




Obrázek 3.5: *Schéma razníku s vyznačenou částí optimalizované hranice izolační bariéry.*

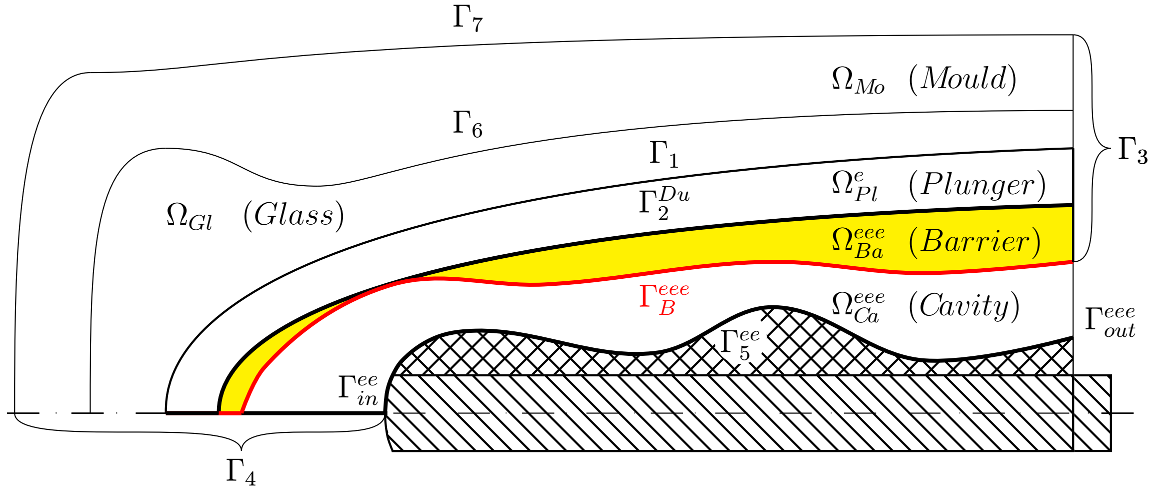
Uvažujeme oblast $\Omega_{Ba}^{eee}$ závislou na návrhové funkci $F_4^e(x)$ definovanou vztahem

$$\Omega_{Ba}^{eee} = \{(x,\, r) \in R^2\,;\; F_4^e(x) < r < f_2^{Du}(x), \quad \text{pro} \quad x \in [0,\, 1]\}\,.$$

Označme $\Theta$ množinu všech přípustných oblastí $\Omega_{Ba}^{eee} \subset R^2$ s lipschitzovskou hranicí tvořenou funkcí $F_4^e \in U_{ad}^{eee}$. Analogicky jako v předešlém zavedeme konvergenci na množině $\Theta$.

Jelikož je každá oblast $\Omega_{Ba}^{eee}$ jednoznačně dána funkcí $F_4^e$, tak řekneme, že posloupnost oblastí ${}^n\Omega_{Ba}^{eee} \in \Theta$ konverguje k oblasti $\Omega_{Ba}^{eee} \in \Theta$ právě, když posloupnost funkcí ${}^nF_4^e(x)$ konverguje stejnoměrně na $[0,1]$ k funkci $F_4^e(x)$ definující $\Omega_{Ba}^{eee}$.

Nyní uvažujeme rovinnou oblast $\Omega^B = \mathrm{Int}\,\overline{\Omega_{Mo} \cup \Omega_{Gl} \cup \Omega_{Pl}^e \cup \Omega_{Ba}^{eee} \cup \Omega_{Ca}^{eee}}$, které reprezentují rovinný průřez systémem forma, skleněný výlisek, razník, izolační bariéra a chladicí dutina razníku (viz obr. 3.6).




Obrázek 3.6: *Schéma celého systému s vyznačenou částí optimalizované hranice.*

Podobně jako v předešlých kapitolách označíme $\Gamma_1$ hranici mezi razníkem $\Omega_{Pl}^e$ a skleněným výliskem $\Omega_{Gl}$, $\Gamma_2^{Du}$ hranici mezi raníkem $\Omega_{Pl}^e$ a izolační bariérou $\Omega_{Ba}^{eee}$ a $\Gamma_B^{eee}$ hranici mezi izolační bariérou $\Omega_{Ba}^{eee}$ a dutinou razníku $\Omega_{Ca}^{ee}$. Dále označíme $\Gamma_3$ část hranice spojující systém forma, skleněný výlisek, razník a izolační bariéra s lisem, $\Gamma_4$ celou část osy symetrie (viz obr. 3.6) a $\Gamma_5^{ee}$ část hranice tvořené vnějším povrchem regulačního proudového tělesa. $\Gamma_6$ označuje část hranice mezi skleněným výliskem $\Omega_{Gl}$ a formou $\Omega_{Mo}$ a $\Gamma_7$ je vnější hranice sklářské formy, jež je obklopena vnějším prostředím. $\Gamma_{in}^{ee}$ označuje část hranice, kterou je chladicí voda přiváděna do dutiny razníku a $\Gamma_{out}^{eee}$ značí část hranice, kterou voda odtéká.

V souladu s postupem z předcházejících kapitol předpokládáme rotační symetrii úlohy. Provedeme transformaci do válcových souřadnic a následnou dimenzionální redukci do souřadnic $x,\ r$.
Analogickým postupem jako v kapitole 2.1 zavedeme v dutině razníku $\Omega_{Ca}^{eee}$ rychlostní pole proudící vody jako gradient jednoznačného řešení Neumannovy úlohy (2.17) pro potenciál proudění ve tvaru

$$\boldsymbol{w}^{eee} = \mathrm{grad}\Phi^{eee}\ , \tag{3.64}$$

(viz věta 2.1.2).

Opět rozdělíme hledanou funkci $\vartheta$ reprezentující rozložení teploty v systému tentokrát na součet pěti funkcí

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4\ , \tag{3.65}$$

kde

$$\vartheta_i = \begin{cases} \vartheta|_{\Omega_i} & \text{in} \quad \Omega_i \\ 0 & \text{in} \quad \Omega^B \setminus \Omega_i \end{cases} \qquad \text{for} \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ , \tag{3.66}$$

($\Omega_0 \equiv \Omega^e_{Pl}$, $\Omega_1 \equiv \Omega_{Gl}$, $\Omega_2 \equiv \Omega^{eee}_{Ca}$, $\Omega_3 \equiv \Omega_{Mo}$, $\Omega_4 \equiv \Omega^{eee}_{Ba}$).
Dále označme $\vartheta_i|_{\Gamma_j}$ stopu řešení $\vartheta_i$ na hranici $\Gamma_j$, je-li $\Gamma_j$ část hranice $\Omega_i$ pro $i = 0, 1, 2, 3, 4,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ ($\Gamma_2 = \Gamma_2^{Du},\ \Gamma_8 = \Gamma^{ee}_{in},\ \Gamma_9 = \Gamma^{eee}_{out},\ \Gamma_{10} = \Gamma^{eee}_B$).

Stavovou úlohu definujeme na základě variační formulace rovnice energie na $\Omega^B$ do níž dosadíme složky rychlosti vody $\boldsymbol{w}^{eee} = (w_1^{eee}, w_2^{eee})$.
Nejprve definujeme ve shodě s (2.81) až (2.85) operátory

$$\mathrm{Energy}^{velo}_{\Omega^B}(\vartheta,\, \boldsymbol{w}^{eee},\, \psi) = c_v \varrho_2 \int_{\Omega^{eee}_{Ca}} \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} w_1^{eee} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r} w_2^{eee} \right) \psi r \, d\Omega \ , \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Energy}^{cond}_{\Omega^B}(\vartheta,\, \psi) = \ & k_0 \int_{\Omega^e_{Pl}} \left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega + \\ & + \ k_1 \int_{\Omega_{Gl}} \left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega + \\ & + \ k_2 \int_{\Omega^{eee}_{Ca}} \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega + \\ & + \ k_3 \int_{\Omega_{Mo}} \left( \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega + \\ & + \ k_4 \int_{\Omega^{eee}_{Ba}} \left( \frac{\partial \vartheta_4}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_4}{\partial r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega \ , \end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\mathrm{Environment}_{\Omega^B}(\vartheta,\, \psi) = \int_{\Gamma_7} \alpha \vartheta_3|_{\Gamma_7} \psi r \, d\Gamma \ , \tag{3.69}$$

$$\mathrm{Source}_{\Omega^B}(\psi) = \varrho_1 \int_{\Omega_{Gl}} q \psi r \, d\Omega \ , \tag{3.70}$$

$$\mathrm{Coeff}_{\Omega^B}(\psi) = \int_{\Gamma_1} \beta_1 \psi r \, d\Gamma + \int_{\Gamma_6} \beta_6 \psi r \, d\Gamma + \int_{\Gamma_7} \alpha \vartheta_{ext} \psi r \, d\Gamma \ . \tag{3.71}$$

Dále označíme

$$\begin{aligned} A_{\Omega^B}(\vartheta,\, \boldsymbol{w}^{eee},\, \psi) \ = \ & \mathrm{Energy}^{velo}_{\Omega^B}(\vartheta,\, \boldsymbol{w}^{eee},\, \psi) + \mathrm{Energy}^{cond}_{\Omega^B}(\vartheta,\, \psi) + \\ & + \ \mathrm{Environment}_{\Omega^B}(\vartheta,\, \psi) \end{aligned} \tag{3.72}$$

a

$$F_{\Omega^B}(\psi) = \mathrm{Source}_{\Omega^B}(\psi) + \mathrm{Coeff}_{\Omega^B}(\psi) \ . \tag{3.73}$$

Zavedeme váhový Sobolevův prostor $H^1_r(\Omega_i)$ (viz [4]) s normou

$$\|v\|_{1,r,\Omega_i} = \left( \int_{\Omega_i} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + v^2 \right] r \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad i = 0, 1, 2, 3, 4 \ , \tag{3.74}$$

($\Omega_0 \equiv \Omega^e_{Pl},\ \Omega_1 \equiv \Omega_{Gl},\ \Omega_2 \equiv \Omega^{eee}_{Ca},\ \Omega_3 \equiv \Omega_{Mo},\ \Omega_4 \equiv \Omega^{eee}_{Ba}$).

Dále označíme

$$\boldsymbol{H}^B(\Omega^B) = \{\ \vartheta;\ \vartheta \text{ definvované v } (3.65),\ (3.66),\ \vartheta_i \in H^1_r(\Omega_i) \text{ pro } i = 0,1,2,3,4,$$
$$\vartheta_3|_{\Gamma_6} = \vartheta_1|_{\Gamma_6},\ \vartheta_1|_{\Gamma_1} = \vartheta_0|_{\Gamma_1},\ \vartheta_0|_{\Gamma_B^{eee}} = \vartheta_4|_{\Gamma_B^{eee}},\ \vartheta_4|_{\Gamma_2^{Du}} = \vartheta_2|_{\Gamma_2^{Du}}\}\ ,$$

kde $\vartheta_i|_{\Gamma_j}$ značí stopu funkce $\vartheta_i$ na hranici $\Gamma_j$.
Definujeme normu na $\boldsymbol{H}^B(\Omega^B)$ jako

$$\|\vartheta\|_{\boldsymbol{H}^B} = \left(\|\vartheta_0\|^2_{1,r,\Omega_0} + \|\vartheta_1\|^2_{1,r,\Omega_1} + \|\vartheta_2\|^2_{1,r,\Omega_2} + \|\vartheta_3\|^2_{1,r,\Omega_3} + \|\vartheta_4\|^2_{1,r,\Omega_4}\right)^{\frac{1}{2}}\ . \tag{3.75}$$

**Věta 3.3.1.**
*Prostor $\boldsymbol{H}^B(\Omega^B)$ s normou (3.75) je Hilbertův prostor.*

Dále označíme $\boldsymbol{H}^{B*}(\Omega^B)$ duální prostor k prostoru $\boldsymbol{H}^B(\Omega^B)$ s normou

$$\|F_{\Omega^B}\|_{\boldsymbol{H}^{B*}} = \sup_{\psi \neq 0} \frac{F_{\Omega^B}(\psi)}{\|\psi\|_{\boldsymbol{H}^B}}\ .$$

Definujeme množinu

$$\Omega^B_H = \Omega^B \cup \Gamma_3 \cup \Gamma^{ee}_{in} \cup \Gamma^{eee}_{out}$$

a

$${}^{eee}\mathcal{H}^{2D} = \{v \in C^\infty(\Omega^B_H);\ v|_{\Gamma_3 \cup \Gamma^{ee}_{in} \cup \Gamma^{eee}_{out}} = 0\}\ .$$

Nechť $\boldsymbol{H}^B_0(\Omega^B)$ je uzávěr množiny ${}^{eee}\mathcal{H}^{2D}$ vzhledem k normě $\boldsymbol{H}^B(\Omega^B)$.

Předpokládáme existenci funkce $\vartheta^{eee}_\Gamma \in \boldsymbol{H}^B(\Omega^B)$ splňující stabilní okrajové podmínky ve tvaru

$$\vartheta^{eee}_\Gamma|_{\Gamma^{ee}_{in}} = 288 \qquad \text{na } \Gamma^{ee}_{in}\ , \tag{3.76}$$
$$\vartheta^{eee}_\Gamma|_{\Gamma^{eee}_{out}} = h^{eee}_{out} \qquad \text{na } \Gamma^{eee}_{out}\ , \tag{3.77}$$
$$\vartheta^{eee}_\Gamma|_{\Gamma_3} = h_3 \qquad \text{na } \Gamma_3\ , \tag{3.78}$$

kde $h_3 \in C(\Gamma_3)$ je daná funkce reprezentující ustálenou teplotu na hranici s lisem $\Gamma_3$ (viz obr. 3.6) a $h^{eee}_{out} \in C(\Gamma^{eee}_{out})$ je daná funkce reprezentující rozložení teploty na výstupu z dutiny razníku $\Gamma^{eee}_{out}$.

Variační formulaci rovnice energie použijeme jako
**Stavová úloha:**
Hledáme funkci $\vartheta \equiv \vartheta(F^e_4) \in \boldsymbol{H}^B(\Omega^B)$ takovou, že

$$A_{\Omega^B}(\vartheta,\ \boldsymbol{w}^{eee},\ \psi)\ =\ F_{\Omega^B}(\psi) \quad \forall \psi \in\ \boldsymbol{H}^B_0(\Omega^B)\ , \tag{3.79}$$
$$\vartheta - \vartheta^{eee}_\Gamma \in\ \boldsymbol{H}^B_0(\Omega^B)\ , \tag{3.80}$$

kde $F^e_4 \in U^{eee}_{ad}$ a $\boldsymbol{w}^{eee}$ je odpovídající rychlostní pole chladicí vody ve tvaru gradientu (3.64) řešení úlohy typu (2.17) pro potenciál proudění.

**Poznámka**
Stavová úloha je řešena ve dvou krocích. Nejprve nalezneme potenciál $\Phi$ rychlostního pole vody jako řešení úlohy (2.17) v oblasti $\Omega^{eee}_{Ca}$. Složky rychlostního pole $\boldsymbol{w}^{eee}$ dosadíme do (3.67) a rozložení teploty $\vartheta$ v celém systému $\Omega^B$ nalezneme řešením stavové úlohy (3.79), (3.80).

**Věta 3.3.2.** *(existence a jednoznačnost řešení stavové úlohy)*
*Stavová úlohy (3.79), (3.80) má jediné řešení $\vartheta(F_4^e)$ pro každé $F_4^e \in U_{ad}^{eee}$ a příslušné rychlostní pole chladicí vody $\boldsymbol{w}^{eee}$ získané jako gradient (3.64) jediného řešení úlohy (2.17) na oblasti $\Omega_{Ca}^{eee}$, navíc existuje konstanta $C > 0$ taková, že*

$$\|\vartheta(F_4^e)\|_{\boldsymbol{H}^B} \leq C\|F_{\Omega^B}\|_{\boldsymbol{H}^{B*}} \ . \tag{3.81}$$

*Důkaz.* Probíhá zcela analogicky jako důkaz Věty 2.2.3 pouze s tím rozdílem, že $\Omega_{Pl}$ nahradíme $\Omega_{Ba}^{eee}$ a $\Omega_{Ca}$ oblastí $\Omega_{Ca}^{eee}$. □

Dále formulujeme **úlohu optimálního návrhu pro tvar izolační bariéry:**
Definujeme **účelový funkcionál** ve tvaru

$$\mathcal{J}^B(F_4^e) = \|\vartheta(F_4^e)|_{\Gamma_1} - K_{\Gamma_1}\|^2_{0,r,\Gamma_1} \ , \tag{3.82}$$

kde $\vartheta(F_4^e)|_{\Gamma_1}$ je stopa řešení $\vartheta(F_4^e)$ stavové úlohy (3.79), (3.80) na oblasti $\Omega_{Pl}^e$ na hranici $\Gamma_1$, $K_{\Gamma_1}$ je daná konstanta reprezentující optimální teplotu povrchu razníku.
Hledáme **optimální návrh** $F_{Opt}^B \in U_{ad}^{eee}$ takový, aby

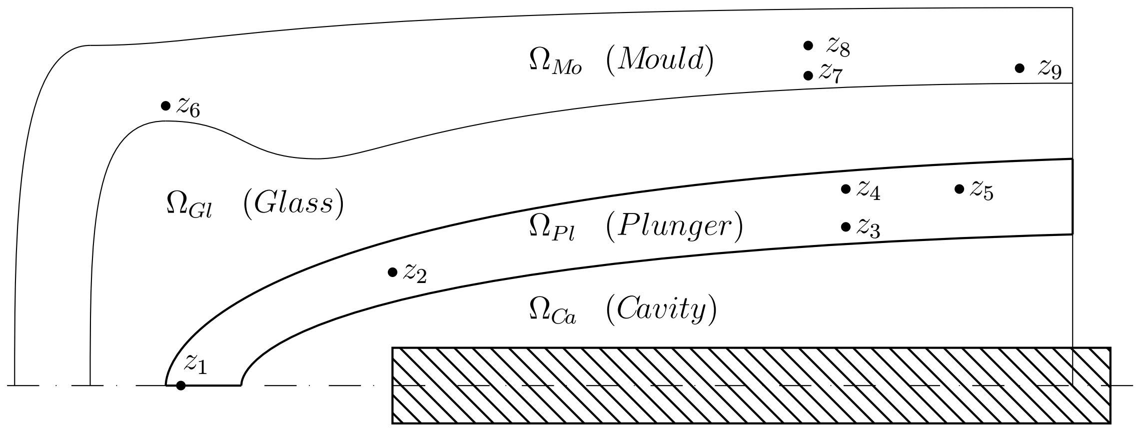
$$\mathcal{J}^B(F_{Opt}^B) \leq \mathcal{J}^B(F_4^e) \qquad \forall\ F_4^e \in U_{ad}^{eee} \ . \tag{3.83}$$

**Věta 3.3.3.** *(existence řešení úlohy optimálního návrhu izolační bariéry)*
*Úloha optimálního návrhu (3.83) má alespoň jedno řešení.*

*Důkaz.* Probíhá zcela analogicky jako důkaz Věty 3.1.2 pouze s tím rozdílem, že $\Omega_{Pl}$ nahradíme $\Omega_{Ba}^{eee}$, $\Omega_{Ca}$ oblastí $\Omega_{Ca}^{eee}$ a $f_1$ funkcí $f_2^{Du}$. □

## 3.4 Úloha identifikace koeficientů přestupu

Na základě dříve provedených měření, jejichž výsledky jsou shrnuty v [5], známe průběhy teploty během lisovacího cyklu v devíti daných bodech. Bod $z_1$ byl umístěn v ose razníku, tj. na hranici $\Gamma_4$, body $z_2$, $z_3$, $z_4$ a $z_5$ uvnitř razníku, tedy v oblasti $\Omega_{Pl}$ a body $z_6$, $z_7$, $z_8$ a $z_9$ uvnitř sklářské formy, tedy v oblasti $\Omega_{Mo}$ (viz obr. 3.7).
V jednotlivých bodech určíme střední hodnotu z naměřených průběhů teploty během lisovacího cyklu a označíme je $t(z_i)$, pro $i = 1, \ldots, 9$. Předpokládáme existenci funkce $\kappa \in C(\Omega)$ takové, že $\kappa(z_i) = t(z_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, 9$ ($\kappa$ může být například interpolační funkce z naměřených hodnot).




Obrázek 3.7: *Schéma systému forma, výlisek a razník s rozmístěním bodů měření.*

Dále definujeme množinu přípustných návrhových funkcí

$$
\begin{aligned}
U_{ad}^{\alpha\beta} = \{ \ & (\alpha,\, \beta_1,\, \beta_6) \in C^{(0),1}(\Gamma_7) \times C^{(0),1}(\Gamma_1) \times C^{(0),1}(\Gamma_6)\,; \\
& \text{(tj. lipschitzovských funkcí vzhledem k parametru délky příslušné hranice)}, \\
& 0 < \alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max},\ |\alpha'| \le C_1\ ,\ 0 < \beta_{\min} \le \beta_1,\, \beta_6 \le \beta_{\max},\ |\beta_i'| \le C_2 \}\ ,
\end{aligned}
$$

kde funkce $\alpha$ reprezentuje součinitel přestupu tepla na hranici $\Gamma_7$, (viz (2.78)) a $\beta_1$, resp. $\beta_6$, reprezentuje měrný tok přeměňované hmotnosti tělesa (viz (2.79), resp. (2.80)).

Pro formulaci stavové úlohy užijeme operátory (2.81) až (2.85) z kapitoly 2.2. Připomeňme, že v (2.83) a (2.85) vystupují návrhové funkce v pozici koeficientů v některých složkách stavového problému. Tedy pro zdůraznění této závislosti označíme

$$
\mathrm{Environment}_\Omega(\vartheta,\, \alpha,\, \psi) = \int_{\Gamma_7} \alpha \vartheta_3|_{\Gamma_7} \psi r \,\mathrm{d}\Gamma\,, \tag{3.84}
$$

$$
\mathrm{Coeff}_\Omega(\alpha,\, \beta,\, \psi) = \int_{\Gamma_1} \beta_1 \psi r \,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_6} \beta_6 \psi r \,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_7} \alpha \vartheta_{ext} \psi r \,\mathrm{d}\Gamma\,. \tag{3.85}
$$

Dále označme

$$
\begin{aligned}
A_\Omega(\vartheta,\, \alpha,\, \boldsymbol{w},\, \psi) \ = \ & \mathrm{Energy}_\Omega^{velo}(\vartheta,\, \boldsymbol{w},\, \psi) + \mathrm{Energy}_\Omega^{cond}(\vartheta,\, \psi) + \\
+ \ & \mathrm{Environment}_\Omega(\vartheta,\, \alpha,\, \psi)
\end{aligned} \tag{3.86}
$$

a

$$F_\Omega(\alpha,\, \beta,\, \psi) = \mathrm{Source}_\Omega(\psi) + \mathrm{Coeff}_\Omega(\alpha,\, \beta,\, \psi)\ . \tag{3.87}$$

Dále předpokládáme existenci funkce $\vartheta_\Gamma^{\alpha\beta} \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ splňující (2.90) až (2.92).

**Stavový problém** potom má tvar:
Hledáme funkci $\vartheta \equiv \vartheta(\alpha,\, \beta) \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ takovou, že

$$A_\Omega(\vartheta,\, \alpha,\, \boldsymbol{w},\, \psi) \ = \ F_\Omega(\alpha,\, \beta,\, \psi) \qquad \forall \psi \in \boldsymbol{H}_0(\Omega)\,, \tag{3.88}$$
$$\vartheta - \vartheta_\Gamma^{\alpha\beta} \ \in \ \boldsymbol{H}_0(\Omega)\ , \tag{3.89}$$

kde $(\alpha,\, \beta_1,\, \beta_6) \in U_{ad}^{\alpha\beta}$ a $\boldsymbol{w}$ je gradient slabého řešení úlohy (2.17).

**Věta 3.4.1.** *(existence a jednoznačnost řešení stavové úlohy identifikace)*
*Pro každé $(\alpha,\, \beta_1,\, \beta_6) \in U_{ad}^{\alpha\beta}$ má úloha (3.88), (3.89) právě jedno řešení $\vartheta(\alpha,\, \beta)$.*

*Důkaz.* Analogický jako u Věty 2.2.3. □

Budeme řešit **úlohu identifikace:**
Definujeme **účelový funkcionál** ve tvaru

$$\mathcal{J}^{\mathcal{I}}(\alpha,\, \beta) = \|\vartheta(\alpha,\, \beta) - \kappa\|_{\boldsymbol{H}}^2\ , \tag{3.90}$$

kde $\vartheta(\alpha,\, \beta)$ je řešení stavové úlohy (3.88), (3.89) a hledáme optimální návrh $(\alpha^{Opt},\, \beta_1^{Opt},\, \beta_6^{Opt}) \in U_{ad}^{\alpha\beta}$ tak, aby

$$\mathcal{J}^{\mathcal{I}}(\alpha^{Opt},\, \beta^{Opt}) \le \mathcal{J}^{\mathcal{I}}(\alpha,\, \beta) \qquad \forall (\alpha,\, \beta_1,\, \beta_6) \in U_{ad}^{\alpha\beta}\ . \tag{3.91}$$

**Věta 3.4.2.** *(existence řešení úlohy identifikace)*
*Úloha (3.91) má alespoň jedno řešení.*

*Důkaz.* K důkazu užijeme abstraktní existenční větu A.2.2 viz dodatek.
Označme $U = [C([0, L_{\Gamma_i}])]^3$, kde $L_{\Gamma_i}$ označuje délku $\Gamma_i\,,\ i = 1,\, 6,\, 7,$

$$U^0 = \{(\alpha,\, \beta_1,\, \beta_6) \in U\, ;\alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max}, \beta_{\min} \le \beta_1,\, \beta_6 \le \beta_{\max}\}\ .$$

Množina $U_{ad}^{\alpha\beta}$ je omezená a uzavřená v $U$ a navíc se skládá ze stejně stejnoměrně spojitých funkcí. Dle Arzelovy-Ascoliho věty je tedy zaručena kompaktnost $U_{ad}^{\alpha\beta}$ v $[C([0, L_{\Gamma_i}])]^3$.
Položíme $V = \boldsymbol{H}(\Omega)$ s normou (2.89). Dle věty 2.2.1 je $V$ Hilbertův prostor. Dále $A_\Omega(\cdot\,,\, \alpha,\, \boldsymbol{w},\, \cdot\,)$ je bilineární forma definovaná na $V \times V$ a $F_\Omega(\alpha,\, \beta,\, \cdot\,)$ lineární funkcionál na $V$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Environment}_\Omega(\vartheta,\, \alpha,\, \psi) \ &= \ \int_{\Gamma_7} \alpha \vartheta_3|_{\Gamma_7} \psi r \,\mathrm{d}\Gamma \le \alpha_{\max} \|\vartheta_3|_{\Gamma_7}\|_{0,r,\Gamma_7} \|\psi\|_{0,r,\Gamma_7} \le \\ &\le \ \alpha_{\max} C \|\vartheta_3\|_{1,r,\Omega_{Mo}} \|\psi\|_{1,r,\Omega_{Mo}} \le C\alpha_{\max} \|\vartheta\|_{\boldsymbol{H}} \|\psi\|_{\boldsymbol{H}}\ , \end{aligned} \tag{3.92}$$

kde jsme ve druhé nerovnosti užili Hölderovu nerovnost na $L^2_r(\Gamma_7)$ a ve třetí nerovnosti Větu o stopách pro $\Omega_{Mo}$ (viz [2] str. 9), což společně s (2.98) a (2.99) dává nerovnost (A.19).
Dále

$$\text{Environment}_\Omega(\vartheta,\, \alpha,\, \vartheta) \;=\; \int_{\Gamma_7} \alpha\, (\vartheta_3|_{\Gamma_7})^2\, r\, \mathrm{d}\Gamma \geq \alpha_{\min}\, (\|\vartheta_3|_{\Gamma_7}\|_{0,r,\Gamma_7})^2 \geq 0\;, \tag{3.93}$$

což spolu s (2.101) a (2.95) z Věty 2.2.2 dává (A.20).
Označme $\alpha^n = \alpha + e^n,\; e^n \in C(\Gamma_7)$. Předpokládáme, že $\alpha^n \to \alpha$ v $C(\Gamma_7)$, tedy pro každé $\varepsilon_1 > 0$, existuje $n$ takové, že

$$\|e^n\|_{C(\Gamma_7)} < \varepsilon_1\;.$$

Dále platí

$$\begin{aligned}
&|A_\Omega(\vartheta^n,\, \alpha^n,\, \boldsymbol{w},\, \psi) - A_\Omega(\vartheta^n,\, \alpha,\, \boldsymbol{w},\, \psi)| \leq |\int_{\Gamma_7} (\alpha^n - \alpha)\vartheta_3|_{\Gamma_7}\psi r\, \mathrm{d}\Gamma| \leq \\
&\leq \|e^n\|_{C(\Gamma_7)} |\int_{\Gamma_7} \vartheta^n_3|_{\Gamma_7}\psi r\, \mathrm{d}\Gamma| \leq \|e^n\|_{C(\Gamma_7)} \|\vartheta^n_3|_{\Gamma_7}\|_{0,r,\Gamma_7} \|\psi\|_{0,r,\Gamma_7} \leq \\
&\leq \|e^n\|_{C(\Gamma_7)} C_3^2 \|\vartheta^n_3\|_{1,r,\Omega_{Mo}} \|\psi\|_{1,r,\Omega_{Mo}} \leq \varepsilon_1 C_3^2 \|\vartheta^n\|_{\boldsymbol{H}} \|\psi\|_{\boldsymbol{H}}\;,
\end{aligned} \tag{3.94}$$

kde jsme ve třetí nerovnosti užili Hölderovu nerovnost na $L^2_r(\Gamma_7)$ a ve čtvrté větu o stopách pro $\Omega_{Mo}$.
Nechť posloupnost $\{\vartheta^n\}$, $\vartheta^n \rightharpoonup \vartheta$ (slabě). Z předpokladu slabé konvergence plyne omezenost posloupnosti $\{\vartheta^n\}_{n=1}^\infty$ ve $V$.
Označme $V^*$ duální prostor $V$. Potom analogicky jako v (2.100) dostaneme

$$\begin{aligned}
&|A_\Omega(\vartheta^n,\, \alpha,\, \boldsymbol{w},\, \psi)| \leq \\
&\quad \leq [2c_v\varrho_2 \max(|w_1|, |w_2|, 1) + 2\max(k_0, k_1, k_2, k_3) + \alpha_{\max} C_1]\, \|\vartheta^n\|_{\boldsymbol{H}} \|\psi\|_{\boldsymbol{H}}\;.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

To znamená, že $A_\Omega(\cdot\,,\, \alpha,\, \boldsymbol{w},\, \psi) \in V^*$ pro všechna $\psi \in V$ a tedy $\lim_{n\to\infty} A_\Omega(\vartheta^n,\, \alpha,\, \boldsymbol{w},\, \psi) = A_\Omega(\vartheta,\, \alpha,\, \boldsymbol{w},\, \psi)$ platí pro všechna $\psi \in V$, což společně s (3.94) zaručí, že

$$A_\Omega(\vartheta^n,\, \alpha^n,\, \boldsymbol{w},\, \psi) \to A_\Omega(\vartheta,\, \alpha,\, \boldsymbol{w},\, \psi) \quad \forall \psi \in V\;. \tag{3.96}$$

Dále označme $\beta_1^n = \beta_1 + h_1^n,\; h_1^n \in C(\Gamma_1)$ a $\beta_6^n = \beta_6 + h_6^n,\; h_6^n \in C(\Gamma_6)$. Předpokládáme, že $\beta_1^n \to \beta_1$ v $C(\Gamma_1)$ a $\beta_6^n \to \beta_6$ v $C(\Gamma_6)$. Tedy pro každé $\varepsilon_2 > 0$ existuje $n$ takové, že

$$\max(\|h_1^n\|_{C(\Gamma_1)}, \|h_6^n\|_{C(\Gamma_6)}) < \varepsilon_2\;.$$

$$
\begin{aligned}
&|F_\Omega(\alpha^n,\, \beta^n,\, \psi) - F_\Omega(\alpha,\, \beta,\, \psi)| = \\
&= |\int_{\Gamma_1} (\beta_1^n - \beta_1)\psi r \,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_6} (\beta_6^n - \beta_6)\psi r \,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_7} (\alpha^n - \alpha)\vartheta_{ext}\psi r \,\mathrm{d}\Gamma| \le \\
&\le \|h_1^n\|_{C(\Gamma_1)}|\int_{\Gamma_1} \psi r \,\mathrm{d}\Gamma| + \|h_6^n\|_{C(\Gamma_6)}|\int_{\Gamma_6} \psi r \,\mathrm{d}\Gamma| + \|e^n\|_{C(\Gamma_7)}|\int_{\Gamma_7} \vartheta_{ext}\psi r \,\mathrm{d}\Gamma| \le \\
&\le \|h_1^n\|_{C(\Gamma_1)}\|\psi\|_{0,r,\Gamma_1}\|1\|_{0,r,\Gamma_1} + \|h_6^n\|_{C(\Gamma_6)}\|\psi\|_{0,r,\Gamma_6}\|1\|_{0,r,\Gamma_6} + \\
&\quad + \|e^n\|_{C(\Gamma_7)}\|\vartheta_{ext}\|_{0,r,\Gamma_7}\|\psi\|_{0,r,\Gamma_7} \le \\
&\le \|h_1^n\|_{C(\Gamma_1)}C_0\|\psi\|_{1,r,\Omega_{Pl}}\|1\|_{0,r,\Gamma_1} + \|h_6^n\|_{C(\Gamma_6)}C_3\|\psi\|_{1,r,\Omega_{Mo}}\|1\|_{0,r,\Gamma_6} + \\
&\quad + \|e^n\|_{C(\Gamma_7)}C_3\|\vartheta_{ext}\|_{0,r,\Gamma_7}\|\psi\|_{1,r,\Omega_{Mo}} \le \\
&\le \max(\|h_1^n\|_{C(\Gamma_1)}, \|h_6^n\|_{C(\Gamma_6)}) \max(C_0, C_3)\, (\|\psi\|_{1,r,\Omega_{Pl}}\|1\|_{0,r,\Gamma_1} + \|\psi\|_{1,r,\Omega_{Mo}}\|1\|_{0,r,\Gamma_6}) + \\
&\quad + \|e^n\|_{C(\Gamma_7)}C_3\|\vartheta_{ext}\|_{0,r,\Gamma_7}\|\psi\|_{1,r,\Omega_{Mo}} \le \\
&\le \varepsilon_2 \cdot \max(C_0, C_3)\cdot(\|\psi\|_{1,r,\Omega_{Pl}}\|1\|_{0,r,\Gamma_1} + \|\psi\|_{1,r,\Omega_{Mo}}\|1\|_{0,r,\Gamma_6}) + \\
&\quad + \varepsilon_1 C_3\|\vartheta_{ext}\|_{0,r,\Gamma_7}\|\psi\|_{1,r,\Omega_{Mo}}\ ,
\end{aligned}
$$

kde jsme ve druhé nerovnosti užili Hölderovu nerovnost a ve třetí větu o stopách. Tedy

$$
\langle F(\alpha^n, \beta^n),\, \psi\rangle \to \langle F(\alpha, \beta),\, \psi\rangle \qquad \text{pro všechna } \psi \in V\ . \tag{3.97}
$$

Nyní ověříme omezenost $F_\Omega(\alpha,\, \beta,\, \psi)$

$$
\begin{aligned}
F_\Omega(\alpha,\, \beta,\, \psi) \;&=\; \int_{\Omega_{Gl}} q\psi r \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_1} \beta_1\psi r \,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_6} \beta_6\psi r \,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_7} \alpha\vartheta_{ext}\psi r \,\mathrm{d}\Gamma \le \\
&\le\; \int_{\Omega_{Gl}} |q\psi r| \,\mathrm{d}\Omega + \beta_{\max}\|\psi\|_{0,r,\Gamma_1}\|1\|_{0,r,\Gamma_1} + \\
&\qquad + \beta_{\max}\|\psi\|_{0,r,\Gamma_6}\|1\|_{0,r,\Gamma_6} + \alpha_{\max}\|\psi\|_{0,r,\Gamma_7}\|\vartheta_{ext}\|_{0,r,\Gamma_7} \le \\
&\le\; \varrho_1 \left(\int_{\Omega_{Gl}} q^2 r\, d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_{Gl}} \psi^2 r\, d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} + \beta_{\max}C_0\|\psi\|_{1,r,\Omega_{Pl}}\|1\|_{0,r,\Gamma_1} + \\
&\qquad + \beta_{\max}C_3\|\psi\|_{1,r,\Omega_{Mo}}\|1\|_{0,r,\Gamma_6} + \alpha_{\max}C_3\|\psi\|_{1,r,\Omega_{Mo}}\|\vartheta_{ext}\|_{0,r,\Gamma_7} \le \\
&\le\; \varrho_1\|q\|_{L_r^2(\Omega_{Gl})}\|\psi\|_{L_r^2(\Omega_{Gl})} + C_0\beta_{\max}\|1\|_{0,r,\Gamma_1}\|\psi\|_{1,r,\Omega_{Pl}} + \\
&\qquad + C_3(\beta_{\max}\|1\|_{0,r,\Gamma_6} + \alpha_{\max}\|\vartheta_{ext}\|_{0,r,\Gamma_7})\|\psi\|_{1,r,\Omega_{Mo}} \le \\
&\le\; \varrho_1\|q\|_{L_r^2(\Omega_{Gl})}\|\psi\|_{\boldsymbol{H}} + K\|\psi\|_{\boldsymbol{H}}\ ,
\end{aligned} \tag{3.98}
$$

kde jsme v první nerovnosti užili Hölderovu nerovnost a ve druhé větu o stopách. Nyní vztahy (A.19), (A.20), (3.96), (3.97), (3.98) společně se skutečností, že čtverec normy $\|\cdot\|_{\boldsymbol{H}}$ je slabě zdola polospojitý funkcionál tvoří předpoklady abstraktní existenční věty A.2.2 a ta zaručuje existenci řešení úlohy (3.91). □

## 3.5 Úloha identifikace tepelného zdroje

Lisování skleněné produkce na karuselovém lisu je periodický proces, při kterém se v průběhu každého cyklu odvede ze skleněného výlisku určité množství tepla. Cílem úlohy identifikace tepelných zdrojů je najít stacionární tepelný zdroj, který v průběhu lisovacího cyklu vygeneruje v jednotlivých částech skleněného výlisku stejné množství tepla jaké je odtud ve skutečnosti v průběhu cyklu odvedeno (viz též [34]).

Při řešení problému vyjdeme ze základní rovnice vedení tepla ve tvaru

$$c_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \frac{k}{\varrho}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}\right) = q \qquad \text{v} \;\; [0;\, T] \times \Omega_{Gl} \;. \tag{3.99}$$

V prvním kroku je třeba určit kolik tepla během jednoho cyklu je nutno odvést z jednotlivých částí výlisku, aby bylo dosaženo v čase zvednutí razníku, (tj. čas $T = 13$ sekund) na hranici $\Gamma_1$ konstantní požadované teploty o velikosti $K_{\Gamma_1}$ K.

**Úloha A:**
Budeme tedy řešit smíšenou úlohu pro vedení tepla bez vnitřních zdrojů, která má ve válcových souřadnicích diferenciální tvar

$$c_1 \frac{\partial \vartheta_A}{\partial t} - \frac{k_1}{\varrho_1}\left(\frac{\partial^2 \vartheta_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta_A}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta_A}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad \text{v} \;\; [0;\, 13] \times \Omega_{Gl} \;\;, \tag{3.100}$$

kde $c_1$ označuje specifické teplo skloviny a $k_1$ koeficient teplotní vodivosti skloviny a $\varrho_1$ měrnou hmotnost skloviny. S počáteční podmínkou

$$\vartheta_A(0, x, r) = 1423 \qquad \text{v} \;\; \Omega_{Gl} \tag{3.101}$$

(to odpovídá konstantní teplotě 1423 K v okamžiku dávkování skloviny)
a okrajovými podmínkami

$$\vartheta_A(t, x, r) = \frac{K_{\Gamma_1} - 1423}{13} t + 1423 \qquad \text{na} \;\; [0;\, 13] \times \Gamma_1 \;\;, \tag{3.102}$$

(tato podmínka zaručuje dochlazení vnitřní strany výlisku v čase 13 sekund na požadovanou teplotu $K_{\Gamma_1}$) a

$$\vartheta_A(t, x, r) = \frac{K_{\Gamma_1} - 1423}{88}\, t + 1423 \qquad \text{na} \;\; [0;\, 13] \times \Gamma_6 \;\;, \tag{3.103}$$

(ta zaručí dochlazení vnější strany výlisku v okamžiku vyjmutí výlisku z formy, tj. čase 88 sekund na požadovanou teplotu $K_{\Gamma_1}$).
Z osové symetrie úlohy dostaneme okrajovou podmínku v ose systému

$$\frac{\partial \vartheta_A}{\partial n}(t, x, r) = 0 \qquad \text{na} \;\; [0;\, 13] \times \Gamma_4 \tag{3.104}$$

a na hranici oddělující výlisek od lisu podmínku

$$\vartheta_A(t, x, r) = h_3(t, x, r) \qquad \text{na} \;\; [0;\, 13] \times \Gamma_3 \;\;. \tag{3.105}$$

K této úloze (3.100) - (3.105) chceme najít stacionární úlohu s časově nezávislým zdrojem tepla, která bude mít stejné řešení jako úloha (3.100) - (3.105) v čase 13 sekund.

**Úloha B:**
Hledáme hustotu tepelných zdrojů $q(x,r)$ takovou, aby řešení úlohy

$$-\frac{k_1}{\varrho_1}\left(\frac{\partial^2\vartheta_B}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta_B}{\partial r}+\frac{\partial^2\vartheta_B}{\partial x^2}\right) = q \qquad \text{v } \Omega_{Gl} \ , \tag{3.106}$$

s okrajovými podmínkami

$$\vartheta_B(x,r) = K_{\Gamma_1} \qquad \text{na } \Gamma_1 \ , \tag{3.107}$$

$$\vartheta_B(x,r) = \frac{K_{\Gamma_1}-1423}{88}\,13+1423 \qquad \text{na } \Gamma_6 \ , \tag{3.108}$$

$$\frac{\partial\vartheta_B}{\partial n}(x,r) = 0 \qquad \text{na } \Gamma_4 \tag{3.109}$$

a

$$\vartheta_B(x,r) = h_3(13\,,\,x,\,r) \qquad \text{na } \Gamma_3 \ , \tag{3.110}$$

odpovídalo řešení úlohy (3.100) - (3.105) v čase 13.

**Poznámka.**
Chceme nalézt takový tepelný zdroj stacionární úlohy B, kterým by bylo odvedeno za 13 sekundy stejné množství energie jako u nestacionární úlohy A, která vede k optimálnímu dochlazení (k dosažení požadované povrchové teploty $K_{\Gamma_1}$ K) v čase separace výlisku a razníku, respektive výlisku a formy.

Předpokládáme tedy, že řešení úlohy A (3.100) - (3.105) v čase 13, označme ho $\vartheta_A^*(13\,,x,\,r)$, je shodné se stacionárním řešením úlohy B (3.106) - (3.110), jež označíme $\vartheta_B^*(x,\,r)$. Tedy užitím (3.100) a (3.106) dostaneme

$$c_1\frac{\partial\vartheta_A}{\partial t} = \frac{k_1}{\varrho_1}\left(\frac{\partial^2\vartheta_A}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta_A}{\partial r}+\frac{\partial^2\vartheta_A}{\partial x^2}\right) = \frac{k_1}{\varrho_1}\left(\frac{\partial^2\vartheta_B}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta_B}{\partial r}+\frac{\partial^2\vartheta_B}{\partial x^2}\right) = -q \ , \tag{3.111}$$

tedy

$$c_1\frac{\partial\vartheta_A}{\partial t} = -q \qquad \text{v } [0;\,13]\times\Omega_{Gl} \ . \tag{3.112}$$

Integrací přes libovolný časový interval $[t_1,\,t_2]\subset[0;\,13]$ dostaneme

$$c_1\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\vartheta_A}{\partial t}\,\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} q\,\mathrm{d}t \qquad \text{v } [0;\,13]\times\Omega_{Gl} \ , \tag{3.113}$$

tedy

$$c_1(\vartheta_A(t_2,\, x,\, r) - \vartheta_A(t_1,\, x,\, r)) = (t_1 - t_2)q(x,\, r) \qquad \text{v} \;\; \Omega_{Gl} \tag{3.114}$$

a tedy

$$q(x,\, r) = \frac{c_1}{t_2 - t_1}(\vartheta_A(t_1,\, x,\, r) - \vartheta_A(t_2,\, x,\, r)) \qquad \text{v} \;\; \Omega_{Gl} \;\;, \tag{3.115}$$

kde $\vartheta_A$ je řešení úlohy (3.100) - (3.105).

Dosadíme-li nyní $t_1 = 0$ (počátek lisovacího cyklu) a $t_2 = 13$ (okamžik vyjmutí razníku z výlisku) dostaneme

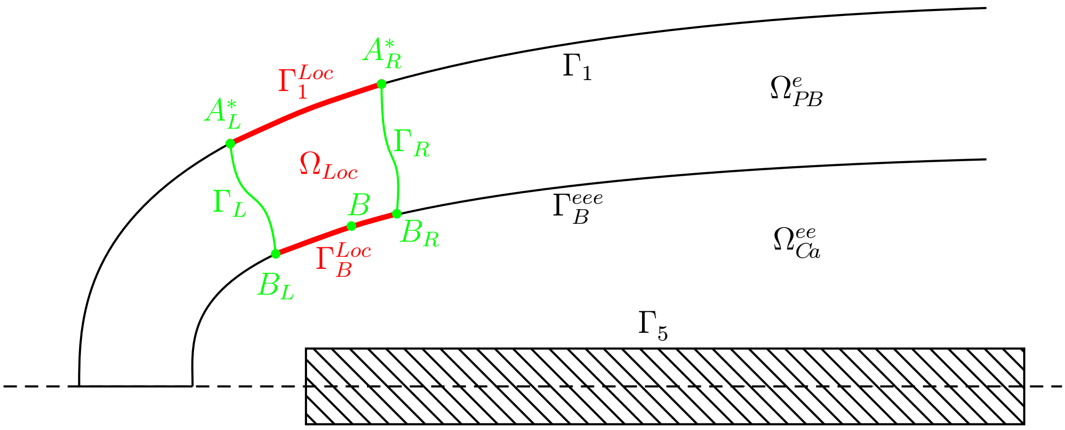
$$q(x,\, r) = \frac{c_1}{13}(1423 - \vartheta_A(13\,,\, x,\, r)) \qquad \text{v} \;\; \Omega_{Gl} \;\;. \tag{3.116}$$

Úlohu (3.100) - (3.105) budeme nyní řešit numericky, tím nalezneme hodnoty funkce $\vartheta_A(13\,, x, r)$ v jednotlivých uzlech sítě, dosadíme je do (3.116) a tím dostaneme hodnoty vhodné hustoty tepelných zdrojů $q(x,\, r)$, které dosazujeme do výrazů $\mathrm{Source}_G(\psi)$ z (2.69) vystupujícího v rovnici (2.74), resp. $\mathrm{Source}_\Omega(\psi)$ z (2.84) vystupujícího v rovnici (2.93), resp. $\mathrm{Source}_{\Omega^S}(\psi)$ z (3.12) vystupujícího v rovnici (3.21), resp. $\mathrm{Source}_{\Omega^P}(\psi)$ z (3.44) vystupujícího v rovnici (3.53), resp. $\mathrm{Source}_{\Omega^B}(\psi)$ z (3.70) vystupujícího v rovnici (3.79), resp. $\mathrm{Source}_\Omega(\psi)$ z (2.84) vystupujícího v rovnici (3.88).

## 3.6 Citlivostní analýza

Citlivostní analýza byla publikována v článku [34]. Jejím cílem je navrhnout způsob modifikace hranice dutiny razníku tvořené izolační bariérou tak, aby došlo v minimalizaci účelového funkcionálu (3.24). Stavová úloha popisuje chlazení horké skloviny v oblasti $\Omega_{Gl}$ chladicí vodou proudící v oblasti $\Omega_{Ca}^{ee}$. To je dobré zdůvodnění pro zavedení fyzikálního předpokladu, že tepelná energie je přenášena po spádnicích teplotního pole razníku a izolační bariéry z hranice $\Gamma_1$ na hranici $\Gamma_B^{eee}$. Řízení rozložení teploty na hranici $\Gamma_1$ je založeno na lokální změně tepelného odporu způsobeného změnou tloušťky izolační bariéry. Proto řídíme teplotu na $\Gamma_1$ posouváním vnitřní hranice izolační bariéry $\Gamma_B^{eee}$.

Označme $\Omega_{PB}^e = \mathrm{Int}\,\overline{\Omega_{Pl}^e \cup \Omega_{Ba}^{eee}}$. Nechť je $B \in \Gamma_B^{eee}$ hraniční bod $\Omega_{PB}^e$ a $U_B$ je jeho dvoudimenzionální okolí. Nechť jsou $B_L$, $B_R \in \Gamma_B^{eee}$ hraniční body $\overline{U_B}$ a $\Gamma_L$, $\Gamma_R \subset \Omega_{PB}^e$ spádnice teplotního pole razníku a izolační bariéry takové, že $B_L \in \Gamma_L$ a $B_R \in \Gamma_R$. Nechť jsou $A_L^* \in \Gamma_L \cap \Gamma_1$, $A_R^* \in \Gamma_R \cap \Gamma_1$ a $\Omega_{Loc} \subset \Omega_{PB}^e$ je podoblast ohraničená $\Gamma_L$, $\Gamma_1^{Loc}$, $\Gamma_R$, $\Gamma_B^{Loc}$, kde $\Gamma_1^{Loc} = \Gamma_1 \cap \overline{\Omega_{Loc}}$, $\Gamma_B^{Loc} = \Gamma_B^{eee} \cap \overline{\Omega_{Loc}}$ (viz obr. 3.8).




Obrázek 3.8: *Teplotní spádnice určují bodové přiřazení definující homeomorfismus přenosu tepla.*

Uvažujeme Neumannovu okrajovou úlohu na $\Omega_{Loc}$ jako

$$-k_i \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right) = 0 \qquad \text{v } \Omega_{Loc}\,, \tag{3.117}$$

$$k_i \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = g \qquad \text{na } \Gamma_L \cup \Gamma_1^{Loc} \cup \Gamma_R \cup \Gamma_B^{Loc}\,, \tag{3.118}$$

kde $k_i$ je koeficient teplotní vodivosti v $\Omega_i$ $(i = 0, 4)$ a $g$ je lokální tepelný tok. Podle druhého zákona termodynamiky dostaneme

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0 \qquad \text{on } \Gamma_L \cup \Gamma_R\,, \tag{3.119}$$

(neboť $\Gamma_L$, $\Gamma_R$ jsou teplotní spádnice teplotního pole) a dle nutné podmínky pro existenci řešení Neumannovy okrajové úlohy dostaneme

$$k_0 \int_{\Gamma_1^{Loc}} \frac{\partial \vartheta}{\partial n} r \, d\Gamma \;=\; -k_4 \int_{\Gamma_B^{Loc}} \frac{\partial \vartheta}{\partial n} r \, d\Gamma \ . \tag{3.120}$$

Tato rovnost umožňuje definovat homeomorfismus přenosu tepla.

**Definice.** *(homeomorfismus přenosu tepla)*
*Zobrazení $\mathcal{S} : \Gamma_1 \to \Gamma_B^{eee}$ nazýváme homeomorfismus přenosu tepla, jestliže platí: pro každé okolí $\Gamma_1^{Loc} \subset \Gamma_1$ platí, že teplo, které do oblasti $\Omega_{PB}^e$ vteče tímto okolím $\Gamma_1^{Loc}$ z oblasti $\Omega_{PB}^e$ odteče okolím $\mathcal{S}(\Gamma_1^{Loc}) = \Gamma_B^{Loc} \subset \Gamma_B^{eee}$.*

Jestliže v nějaké části $\Gamma_1$ potřebujeme snížit teplotu, lokálně snížíme tepelný odpor tím, že posuneme body $\Gamma_B^{eee}$ ve směru spádnice teploty do vnitřku izolační bariéry (tím snížíme její tloušťku). Naopak v místech hranice $\Gamma_1$, kde potřebujeme vyšší teplotu, zvýšíme tepelný odpor zvýšením tloušťky izolační bariéry, což lokálně sníží intenzitu chlazení.

Množství tepelné energie, které garantuje pokles teploty povrchové vrstvy $\Gamma_1^{Loc}$ tloušťky $h$ z teploty $\widetilde{\vartheta}_0(A^*)$ (hodnota FEM (3.117), (3.118) v bodě $A^* \in \Gamma_1^{Loc}$, $\mathcal{S}(A^*) = B$) na teplotu $T_{\Gamma_1}$, lze přibližně vyjádřit ve tvaru

$$Q_{\Gamma_1}^{Loc} = c_0 \varrho_0 P_{\Gamma_1^{Loc}} h(\widetilde{\vartheta}_0(A^*) - T_{\Gamma_1}) \ , \tag{3.121}$$

kde $P_{\Gamma_1^{Loc}}$ je plocha vytvořená rotací $\Gamma_1^{Loc}$ kolem osy $x$.
Tato energie musí být odvedena z podoblasti $\Omega_{Loc}$ povrchem $\Gamma_B^{Loc}$, neboť $\mathcal{S}(\Gamma_1^{Loc}) = \Gamma_B^{Loc}$. Toho lze dosáhnout snížením teploty $\widetilde{\vartheta}_4(B)$ (hodnota FEM řešení (3.117), (3.118) v bodě $B \in \Gamma_B^{Loc}$) na hodnotu $T_{\Gamma_B^{eee}}$.
Množství tepelné energie, která způsobí, že teplota $\widetilde{\vartheta}_4(B)$ poklesne na požadovanou hodnotu $T_{\Gamma_B^{eee}}$ povrchové vrstvy $\Gamma_B^{Loc}$ tloušťky $h$ může být vyjádřena přibližně ve tvaru

$$Q_{\Gamma_B^{Loc}} = c_4 \varrho_4 P_{\Gamma_B^{Loc}} h(\widetilde{\vartheta}_4(B) - T_{\Gamma_B^{eee}}) \ , \tag{3.122}$$

kde $P_{\Gamma_B^{Loc}}$ je plocha vytvořená rotací $\Gamma_B^{Loc}$ kolem osy $x$.

**Poznámka**
Vzhledem k velkému rozdílu vodivostí razníku a izolační bariéry může být izolační odpor razníku zanedbán. Z tohoto důvodu nahradíme ve výpočtu hranici $\Gamma_1$ hranicí $\Gamma_2$.

V souladu s předpoklady, nahradíme bod $A^*$ bodem $A$, který je průsečíkem $\Gamma_2$ s teplotní spádnicí z bodu $A^*$.
Porovnáním (3.121) vyhodnoceného na $\Gamma_2$ a (3.122) dostaneme

$$c_4 \varrho_4 P_{\Gamma_2^{Loc}} h(\widetilde{\vartheta}_4(A) - T_{\Gamma_1}) = c_4 \varrho_4 P_{\Gamma_B^{Loc}} h(\widetilde{\vartheta}_4(B) - T_{\Gamma_B^{eee}}) \ . \tag{3.123}$$

Odtud dostaneme odhad pro teplotu $T_{\Gamma_B^{eee}}$ odpovídající $T_{\Gamma_1}$ jako

$$T_{\Gamma_B^{eee}} = \widetilde{\vartheta}_4(B) - \frac{P_{\Gamma_2^{Loc}}}{P_{\Gamma_B^{Loc}}} (\widetilde{\vartheta}_4(A) - T_{\Gamma_1}) \ . \tag{3.124}$$

Je-li spádnice teploty rovnoběžná s osou $x$ (tj. s osou systému v důsledku symetrie), je úloha (3.117) redukována na stacionární jednodimenzionální vedení tepla ve směru proměnné $x$ a má lineární řešení. Je-li spádnice teploty rovnoběžná s osou $r$ (tj. v hypotetickém případě tvaru trubky), je úloha (3.117) redukována na stacionární jednodimenzionální vedení tepla ve směru proměnné $r$ a má logaritmické řešení. Tedy můžeme předpokládat, že řešení podél teplotní spádnice s obecným směrem má charakter mezi těmito extrémními stavy. Pro účely analýzy citlivosti předpokládáme lineární závislost teploty na délce teplotní spádnice.
Uvažujeme fixovanou teplotu na hranici $\Gamma_B^{eee}$ a nahradíme teplotní spádnici spojující $A$ a $B$ přímkou spojující $A$ a $B$ (viz analogie pro $A^i$ a $B^i$ na obr. 3.9a) a dostaneme

$$\frac{T_{\Gamma_1} - \widetilde{\vartheta}_4(B)}{\mathrm{dist}(A,B) - \mathrm{Shift(B)}} = \frac{\widetilde{\vartheta}_4(B) - T_{\Gamma_B^{eee}}}{\mathrm{Shift(B)}} \,, \tag{3.125}$$

kde Shift(B) je odhad pro posunutí bodu $B$ ve směru vektoru $\vec{v} = A - B$, které zvýší nebo sníží lokálně teplotu na $\Gamma_1^{Loc}$. Odtud plyne

$$\mathrm{Shift(B)} = \frac{\mathrm{dist}(A,B)}{\frac{T_{\Gamma_1} - \widetilde{\vartheta}_4(B)}{\widetilde{\vartheta}_4(B) - T_{\Gamma_B^{eee}}} + 1} \,. \tag{3.126}$$

Zvolíme řídící body $B^0$, $B^1$, …, $B^m \in \Gamma_B^{eee}$ tak, aby

$$B^i = [x_i,\, f_4^e(x_i)] \quad \text{for} \quad x_P \le x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = x_H$$

a přidružené stínové body $A^0$, $A^1$, …, $A^m \in \Gamma_2$ takové, že $B^i = \mathcal{S}(A^i)$ pro $i = 0, 1, \dots, m$.

Dále označíme $A^i = [x_{A^i},\, f_2(x_{A^i})]$ pro $i = 0, 1, \dots, m$ a $\Gamma_2^i \subset \Gamma_2$ je část hranice $\Gamma_2$ s koncovými body $A_L^i$, $A_R^i$ ($A_L^i \in \Gamma_2$ je střední bod $A^{i-1}A^i$ a $A_R^i \in \Gamma_2$ je střední bod $A^iA^{i+1}$). $B_L^i = \mathcal{S}(A_L^i)$ a $B_R^i = \mathcal{S}(A_R^i)$ jsou obrazy $A_L^i$, $A_R^i$ při homeomorfismu přenosu tepla.

Aproximujeme

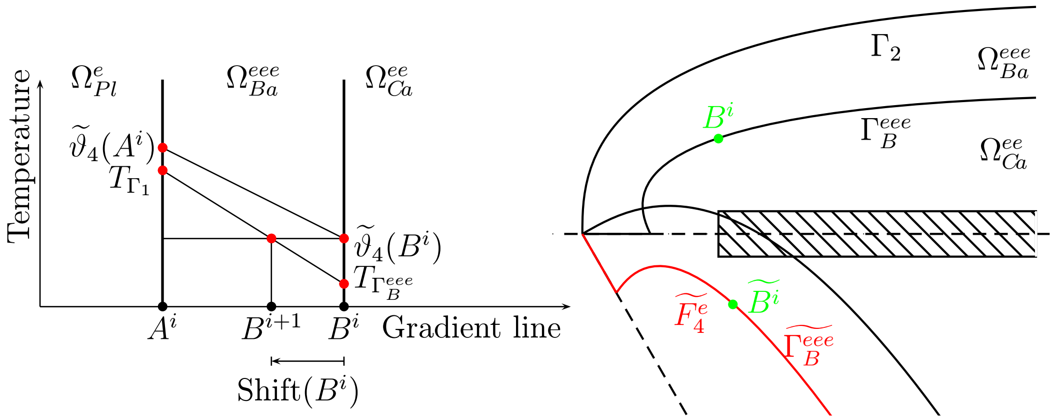
$$P_{\Gamma_2^{Loc}}(A^i) \approx 2\pi\, f_2(x_{A^i}) \sqrt{(x_{A_R^i} - x_{A_L^i})^2 + (f_2(x_{A_R^i}) - f_2(x_{A_L^i}))^2} \tag{3.127}$$

a

$$P_{\Gamma_B^{Loc}}(B^i) \approx 2\pi\, f_4^e(x_i) \sqrt{(x_{B_R^i} - x_{B_L^i})^2 + (f_4^e(x_{B_R^i}) - f_4^e(x_{B_L^i}))^2} \,. \tag{3.128}$$

Dosadíme tyto aproximace do (3.124) a potom (3.124) do (3.126), abychom vypočítali velikost posunutí řídícího bodu $B^i$ ve směru vektoru $\vec{v^i} = A^i - B^i$ pro příští iteraci ze vzorce

$$\mathrm{Shift}(B^i) = \frac{\mathrm{dist}(A^i, B^i)}{\frac{f_4^e(x_i)\sqrt{(x_{B_R^i} - x_{B_L^i})^2 + (f_4^e(x_{B_R^i}) - f_4^e(x_{B_L^i}))^2}}{f_2(x_{A^i})\sqrt{(x_{A_R^i} - x_{A_L^i})^2 + (f_2(x_{A_R^i}) - f_2(x_{A_L^i}))^2}} \cdot \frac{T_{\Gamma_1} - \widetilde{\vartheta}_4(B^i)}{\widetilde{\vartheta}_4(A^i) - T_{\Gamma_1}} + 1} \,, \tag{3.129}$$




Obrázek 3.9: a) *Odhad posunutí.* b) *Schéma rotovaného systému.*

kde $\widetilde{\vartheta}_4$ značí řešení stavové úlohy (2.93) - (2.94) a $T_{\Gamma_1}$ teplotu, na kterou je vnější povrch razníku $\Gamma_1$ optimalizován (viz obr. 3.9a). Kladná hodnota Shift$(B^i)$ znamená posunutí ve směru vektoru $\vec{v^i}$, tj. do oblasti $\Omega^{eee}_{Ba}$ (bariéra) a záporná hodnota Shift$(B^i)$ posunutí ve směru vektoru $-\vec{v^i}$, tj. do oblasti $\Omega^{ee}_{Ca}$ (dutina razníku).

Konstrukce hranice $\Gamma^{eee}_B$ je prováděna takovým způsobem, že v každé iteraci jsou všechny řídicí body $B^i$ nejprve otočeny v negativním smyslu o $60^o$ do pozice $\widetilde{B^i}$. V této pozici je vytvořen kubický spline, tvořící nový tvar hranice $\widetilde{\Gamma^{eee}_B}$ a tato křivka je otočena zpět do původního systému souřadnic, ve kterém jsou řešeny další úlohy. To umožňuje dosáhnout v dolní části dutiny tvar hranice $\Gamma^{eee}_B$ se zápornou tečnou (viz obr. 3.9b).

# Kapitola 4

# Numerická realizace úlohy

V numerickém experimentu byl navržen a odladěn algoritmus pro optimalizaci izolační bariéry pro lisování vázy z olovnatého křišťálu. Optimalizovaná hranice byla modelována pomocí přirozených kubických spline funkcí. Nejprve byl nalezen stacionární zdroj tepla jako řešení úlohy identifikace tepelného zdroje (3.100) - (3.105) z kapitoly 3.5 a pak byl použit ve všech iteracích algoritmu. V každé iteraci byl nejprve nalezen potenciál rychlostního pole chladicí vody řešením úlohy (2.17) a z něj byly vypočteny složky rychlostního pole vody ve tvaru (2.18). Následně bylo zjištěno rozložení teploty v celém systému řešením stavové úlohy (2.93) - (2.94). Potom byla vypočtena hodnota účelového funkcionálu pro cílovou teplotu $T_{\Gamma_1} = 1073$ $[K]$ $(= 800^oC)$ na $\Gamma_1$ v dané iteraci a byly nalezeny nové polohy kontrolních bodů řídící hranice izolační bariéry $\Gamma_B^{eee}$ pomocí citlivostní analýzy. Nový tvar hranice izolační bariéry byl navržen tak, že byla sestrojena přirozená kubická spline funkce procházející kontrolními body nové iterace. Bylo provedeno 99 iterací procesu optimalizace a mezi nimi byla nalezena iterace s nejmenší hodnotou účelového funkcionálu. Numerický experiment byl publikován v [34].

## 4.1 Fyzikální parametry systému

Pro numerickou úlohu bylo užito parametrů vázy z olovnatého křišťálu, na níž byly v průběhu roku 1999 provedeny měření publikované ve výzkumné zprávě [5]. Váza o výšce $0,267$ $[m]$ a hmotnosti $1,55$ $[kg]$ byla lisována na karuselovém lisu, na kterém razník lisuje střídavě v šesti formách. Celková délka pracovního cyklu formy byla 162 sekund, přičemž pracovní cyklus razníku trval 27 sekund.
Pro výpočty byla uvažována sklovina s hustotou $\varrho_1 = 2500$ $[kg/m^3]$, specifikým teplem $c_{v1} = 796$ $[J/kg.K]$ a tepelnou vodivostí $k_1 = 3,8$ $[W/m.K]$. Razník a forma byly z oceli o hustotě $\varrho_0 = \varrho_3 = 7800$ $[kg/m^3]$, specifikém teplu $c_{v0} = c_{v3} = 482$ $[J/kg.K]$ a tepelné vodivosti $k_0 = k_3 = 73$ $[W/m.K]$. Izolační bariéra byla vyrobena z keramiky o hustotě $\varrho_4 = 4500$ $[kg/m^3]$, specifikém teplu $c_{v4} = 900$ $[J/kg.K]$ a tepelné vodivosti $k_4 = 2,5$ $[W/m.K]$. Chladicí vodu uvažujeme s hustotou $\varrho_2 = 1000$ $[kg/m^3]$, specifikým teplem $c_{v2} = 4180$ $[J/kg.K]$ a tepelnou vodivostí $k_2 = 0,6$ $[W/m.K]$. Chlazení bylo realizováno množstvím $V = 1$ $[l/min]$ vody při teplotě na vstupu $\vartheta_{in} = 288$ $[K]$ $(= 15^oC)$. Teplota okolního prostředí byla uvažována $\vartheta_{ext} = 333$ $[K]$ $(= 60^oC)$. Koeficient přestupu tepla mezi vnějším povrchem formy a okolním prostředím jsme volili $\alpha = 14$ $[W/m^2.K]$

(hodnota používaná pro podlahové vytápění). Koeficienty měrného toku přeměňované hmotnosto tělesa byly zvoleny $\beta_1 = \beta_6 = 0$. Cílová teplota vnějšího povrchu razníku $\Gamma_1$ byla volena $T_{\Gamma_1} = 1073$ $[K]$ $(= 800^oC)$.
Reálný periodický proces chlazení byl pro zjednodušení nahrazen stacionárním vedením tepla pro střední hodnoty teplot.

## 4.2 Určení stacionárního zdroje tepla

Stacionární zdroj tepla byl určen jako řešení úlohy identifikace tepelného zdroje z kapitoly 3.5 s počáteční teplotou $T_0 = 1423$ $[K]$ $(= 1150^oC)$ v oblasti $\Omega_{Gl}$ a předepsaným lineárním poklesem teploty na cílovou teplotu $T_{\Gamma_1} = 1073$ $[K]$ $(= 800^oC)$ na hranici $\Gamma_1$ v čase $t_P = 13$ $[s]$ a na hranici $\Gamma_6$ v čase $t_M = 88$ $[s]$. Řešíme úlohu (3.100) - (3.105) metodou časové diskretizace s časovým krokem $\tau = 1$ $[s]$ pro nehomogenní počáteční a okrajové podmínky ve tvaru

$$c_{v1}\varrho_1\vartheta_A^k - k_1\tau\left(\frac{\partial^2\vartheta_A^k}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta_A^k}{\partial r} + \frac{\partial^2\vartheta_A^k}{\partial x^2}\right) = c_{v1}\varrho_1\vartheta_A^{k-1} \qquad \text{v} \ \ \Omega_{Gl} \ , \tag{4.1}$$

$$\vartheta_A^0(x,r) = T_0 \qquad \text{v} \ \ \Omega_{Gl} \ , \tag{4.2}$$

$$\vartheta_A^k(x,r) = T_0 - \tau\frac{T_0 - T_{\Gamma_1}}{t_P}k \qquad \text{na} \ \ \Gamma_1 \ , \tag{4.3}$$

$$\vartheta_A^k(x,r) = T_0 - \tau\frac{T_0 - T_{\Gamma_1}}{t_M}k \qquad \text{na} \ \ \Gamma_6 \ , \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial\vartheta_A^k}{\partial n}(x,r) = 0 \qquad \text{na} \ \ (\Gamma_3 \cup \Gamma_4^G) \ , \tag{4.5}$$

pro $k = 1, 2, \dots, N_A$ s $N_A = 13$. Užijeme Software FreeFem++. Síť o 25 781 uzlech a 50 511 trojúhelnících byla vytvořena automatickým generováním a na ní byly užity spojité po částech kvadratické Lagrangeovy prvky P2.
Úlohu pro slabou formulaci časově diskretizovaného problému zapíšeme v software FreeFem++ ve tvaru

$$\begin{aligned}\text{problem dHeat}(\vartheta^k, \psi) = {} & \text{int2d}(\Omega_{Gl})((c_{v1} * \varrho_1 * \vartheta^k * \psi + \\ & +k_1 * \tau * (dx(\vartheta^k) * dx(\psi) + dy(\vartheta^k) * dy(\psi))) * y) + \\ & +\text{int2d}(\Omega_{Gl})(-c_{v1} * \varrho_1 * \vartheta^{k-1} * \psi * y) + \\ & +\text{on}(\Gamma_6, \vartheta^k = g_2) + \text{on}(\Gamma_1, \vartheta^k = g_1);\end{aligned}$$

kde proměnná $y$ užitá v programu reprezentuje proměnnou $r$ z úlohy (4.1) - (4.5) a

$$\begin{aligned}\vartheta^0(x,r) &= T_0 && \text{v} \ \ \Omega_{Gl} \ , \\ g_1(x,r) &= T_0 - \tau\frac{T_0 - T_{\Gamma_1}}{t_P}k && \text{na } \Gamma_1 \ , \\ g_2(x,r) &= T_0 - \tau\frac{T_0 - T_{\Gamma_1}}{t_M}k && \text{na } \Gamma_6 \ .\end{aligned}$$

Stacionární zdroj tepla v oblasti $\Omega_{Gl}$ v souladu s (3.116) dostaneme dosazením tohoto numerického řešení na poslední časové vrstvě do vztahu

$$f(x,r) = \frac{c_{v1}}{t_P}(T_0 - \vartheta_A^{N_A}(x,r)) \qquad [W/kg]\;, \tag{4.6}$$

kde $c_{v1} = 796$ $[J/kg.K]$ je specifické teplo skla.
Následně byl tento zdroj použit ve všech 99-ti iteracích úlohy optimalizace.

## 4.3 Určení rychlosti chladicí vody

V každé iteraci optimalizačního procesu nejprve otočíme jedenáct bodů $B^i$ na body $\widetilde{B^i}$ a pak vytvoříme hranici $\widetilde{\Gamma_B^{eee}}$ jako přirozený kubický spline s jedenácti řídícími body $\widetilde{B^i}$ a otočte jej zpět na hranici $\Gamma_B^{eee}$. Nastavení řídících bodů pro výpočet kubického spline v počáteční iteraci bylo následující

$$[0,015;0],\ [0,020;0,010],\ [0,030;0,016],\ [0,044;0,018],\ [0,060;0,020],\ [0,085;0,022],$$
$$[0,118;0,024],\ [0,152;0,025],\ [0,188;0,025],\ [0,226;0,025],\ [0,267;0,025]\ .$$

Po stanovení tvaru dutiny $\Omega_{Ca}^{ee}$ v dané iteraci výpočítáme potenciál rychlostního pole chladicí vody řešením Neumannovy úlohy (2.17). Úloha byla opět vyřešena FEM pomocí softwaru FreeFem++. V počáteční iteraci byla vytvořena síť s 853 uzly a 1469 trojúhelníky automatickým generováním a na ní byly užity spojité počástech kvadratické Lagrangeovy prvky P2.
V software FreeFem++ zapíšeme slabou formulaci úlohy (2.17) ve tvaru

$$\begin{aligned}\text{problem Potential}(\Phi,\varphi) = \text{int2d}(\Omega_{Ca}^{e})((dx(\Phi)*dx(\varphi)+dy(\Phi)*dy(\varphi))*y) -\\ -\text{int1d}(\Gamma_{in})(h_{velo}^{in}*\varphi*y) - \text{int1d}(\Gamma_{out}^{e})(h_{velo}^{out}*\varphi*y);\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} h_{velo}^{in} &= -\frac{V}{\pi*60*a^2};\\ h_{velo}^{out} &= \frac{V}{\pi*60*(y(10)^2-a^2)};\end{aligned}$$

$V = 0,001$ $[m^3/min]$ je objem chladicí vody na vstupu, $a = 0,006$ $[m]$ poloměr plnící trubice a $y(10)$ druhá souřadnice posledního řídícího bodu $B^{10}$.
Rychlostní pole proudící vody dostaneme v souladu s (2.18) dosazením tohoto numerického řešení do vztahů

$$w_1 = \begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \text{v} \quad \Omega_{Ca}^{ee} \\ 0 & \text{v} \quad \Omega - \Omega_{Ca}^{ee} \end{cases}\;, \tag{4.7}$$

$$w_2 = \begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \text{v} \quad \Omega_{Ca}^{ee} \\ 0 & \text{v} \quad \Omega - \Omega_{Ca}^{ee} \end{cases}\;. \tag{4.8}$$

## 4.4 Určení rozložení teploty v systému

Stacionární zdroj tepla $f$ z (4.6) a složky rychlostního pole proudící vody $w_1$, $w_2$ z (4.7), (4.8) byly následně dosazeny do stavové úlohy (3.79), (3.80).
Úloha byla opět vyřešena FEM pomocí softwaru FreeFem ++. V počáteční iteraci byla automaticky vygenerována síť s 121 586 uzly a 242 425 trojúhelníky a byly použity spojité počástech lineární Lagrangeovy prvky P1.
V software FreeFem++ má stavová úloha (3.79), (3.80) tvar

$$\begin{aligned}
\text{problem Thermic}(\vartheta,\psi) = {} & \text{int2d}(\Omega)(((k*(dx(\vartheta)*dx(\psi)+dy(\vartheta)*dy(\psi)))+\\
&+c_{v2}*\varrho_2*(w_1*dx(\vartheta)*\psi+w_2*dy(\vartheta)*\psi))*y)-\\
&-\text{int2d}(\Omega)(\varrho_1*f*\psi*y)+\text{int1d}(\Gamma_7)(\alpha*\vartheta*\psi*y)-\\
&-\text{int1d}(\Gamma_7)(\alpha*\vartheta_{ext}*\psi*y)+\text{on}(\Gamma_{in},\vartheta=\vartheta_{in});
\end{aligned}$$

**Poznámka**
Numerické výpočty provedené se skutečnou hodnotou tepelné vodivosti vody $k_2 = 0,6\ [W/m.K]$, při použití modelu potenciálního proudění chladicí vody v dutině razníku, ukazují zcela nerealistické rozložení teploty ve směru osy $r$. V tenké vrstvě u povrchu izolační bariéry se teplota vody blíží vysoké teplotě bariéry a po několika milimetrech strmě klesá na hodnotu $18^oC$. Ve zbytku dutiny má chladicí voda teplotu přibližně $15^oC$. To ukazuje na skutečnost, že model potenciálního proudění chladicí vody neodpovídá fyzikální skutečnosti, avšak proudění má v dutině razníku pouze pomocný charakter, který upřednostňuje jeden směr pro odvádění tepelné energie. Zavedení reálistického modelu respektujícího stavovou přeměnu vroucí vody na páru u povrchu bariéry by značně zvýšilo výpočetní náročnost a jeho vliv na výsledky úlohy optimalizace by byl zanedbatelný. Nejjednodušší odstranění tohoto rozporu se skutečností, při zachování modelu potenciálního proudění, je významné zvýšení tepelné vodivosti vody, čímž se dosáhne přirozenějšího rozložení teploty ve směru osy $r$ v dutině razníku. Proto jsme ve výpočtech desetkrát zvýšili tepelnou vodivost vody a zvolili $k_2 = 6\ [W/m.K]$.

## 4.5 Určení polohy nových řídících bodů

Citlivostní analýza s ohledem na optimalizaci teploty podél hranice $\Gamma_1$ byla prováděna v každé iteraci. Máme devět vnitřních řídících bodů $B_j^i \in \Gamma_B^{eee}$ z předchozího $j-$té iterace a devět stínových bodů $A_j^i \in \Gamma_2$ jako průsečíky teplotních spádníc vedených z řídících bodů $B_j^i$. Ve stínových bodech $A_j^i$ jsme vypočítali teploty a porovnali je s požadovanou cílovou teplotou na vnější hranici razníku, tj. $T_{\Gamma_1} = 1073\ [K]\ (= 800^oC)$. Pokud byla vypočtená teplota v daném stínovém bodě $A_j^i$ vyšší než cílová teplota, posunuli jsme řídicí bod $B_j^i$ ve směru teplotního gradientu do oblasti $\Omega_{Ba}^{eee}$ (bariéra); v opačném případě jsme ho posunuli do oblasti $\Omega_{Ca}^{ee}$ (dutina). Velikost tohoto posunutí byla zvolena úměrně k množství energie, o které má být odvedeno více, resp. méně, energie k dochlazení na požadovanou teplotu $T_{\Gamma_1}$. Analogicky postupujeme v případě prvního řídícího bodu $B_j^0$ na ose $x$, resp. posledního řídícího bodu $B_j^{10}$ na přímce $x = 0,267$. Velikost posunutí byla zvolena na základě předpokladu o "téměř" lineární závislosti poklesu teploty na tloušťce izolační bariéry (viz také (3.129)). V každé iteraci ($(j+1)$-ní iteraci) byla nová poloha řídících bodů $B^i_{j+1}$ vypočtena dle formule

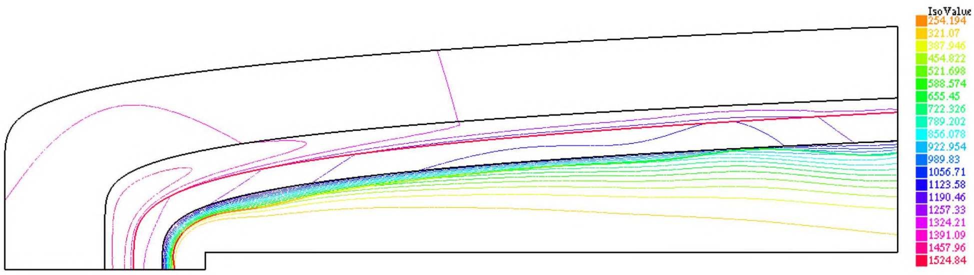
$$
\begin{aligned}
B^i_{j+1} &= B^i_j + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.9)\\
&+\frac{1}{2}\,\frac{1}{\dfrac{r_{B^i_j}\cdot\sqrt{(x_{B^i_{jR}}-x_{B^i_{jL}})^2+(r_{B^i_{jR}}-r_{B^i_{jL}})^2}}{f_2(x_{A^i_j})\cdot\sqrt{(x_{A^i_{jR}}-x_{A^i_{jL}})^2+(f_2(x_{A^i_{jR}})-f_2(x_{A^i_{jL}}))^2}}\cdot\dfrac{T_{\Gamma_1}-\widetilde{\vartheta}_4(B^i_j)}{\widetilde{\vartheta}_4(A^i_j)-T_{\Gamma_1}}+1}\,(A^i_j-B^i_j)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=0,1,\ldots,10\ ,
\end{aligned}
$$

kde $\widetilde{\vartheta}_4(A^i_j)$ a $\widetilde{\vartheta}_4(B^i_j)$ značí řešení stavové úlohy (3.79), (3.80) v $A^i_j$ a $B^i_j$.

Křivkový integrál v účelovém funkcionálu $\mathcal{J}^B$ byl počítán numericky obdélníkovou metodou pro ekvidistantní dělení na 1000 podintervalů vzhledem k délce křivky představující hranici $\Gamma_1$.

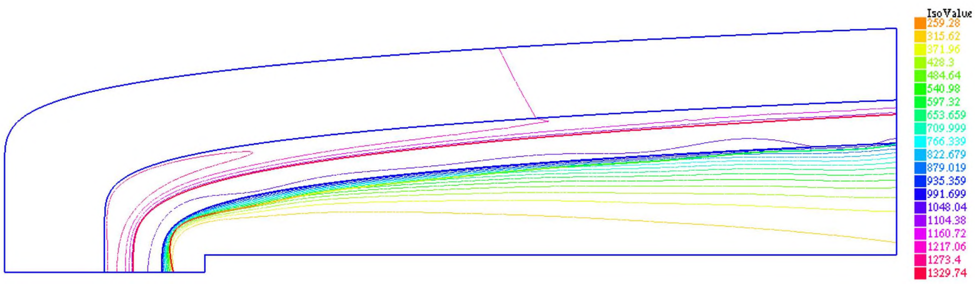
## 4.6 Výsledky iteračního procesu

V počáteční iteraci byla izolační bariéra příliš tlustá, což způsobilo extrémně velkou hodnotu účelového funkcionálu $\mathcal{J}^B_0 = 168\,334,33$.
V následujících iteracích došlo k výraznému ztenčení izolační bariéry, což vedlo k prudkému poklesu hodnot účelového funkcionálu. V 10-té iteraci již byla hodnota účelového funkcionálu $\mathcal{J}^B_{10} = 1\,140,44$ a rozložení teploty v systému je znázorněno na obrázku 4.1.



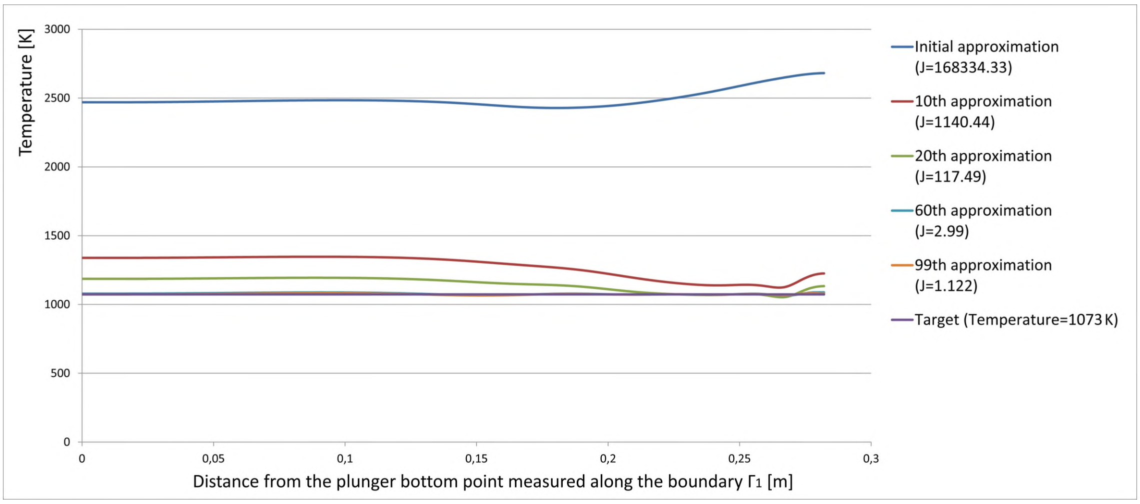

Obrázek 4.1: *Rozložení teploty v 10-té iteraci.*

V 20-té iteraci byla hodnota účelového funkcionálu $\mathcal{J}^B_{20} = 117,49$, v 60-té iteraci $\mathcal{J}^B_{60} = 2,992$ a v poslední 99-té iteraci $\mathcal{J}^B_{99} = 1,122$. Počítali jsme pouze 99 iterací. Rozložení teploty v systému v 99-té iteraci je znázorněno na obrázku 4.2.



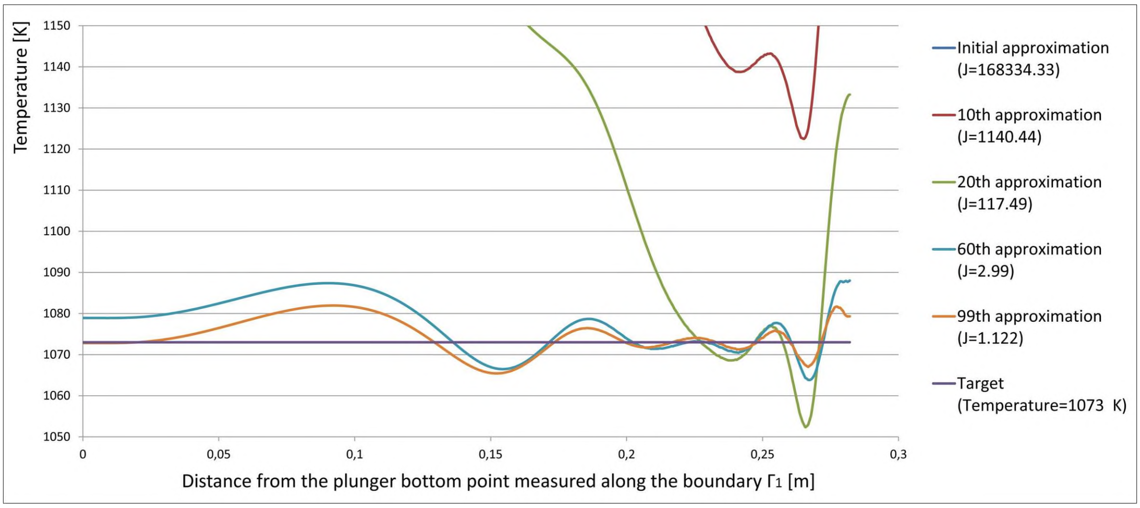

Obrázek 4.2: *Rozložení teploty v 99-té iteraci.*

Následující grafy ukazují rozložení teplot měřených od dolního bodu razníku $[x_L; 0] \in \Gamma_1$ do bodu $[x_H; 0,055] \in \Gamma_1$ podél vnějšího povrchu razníku $\Gamma_1$ v počáteční iteraci, v 10-té, 20-té, 60-té, 99-té iteraci a cílovou teplotu $T_{\Gamma_1} = 1073$ $[K]$.




Obrázek 4.3: *Rozložení teploty podél vnějšího povrchu razníku* $\Gamma_1$.

Graf na obrázku 4.4 má změněné měřítko na ose teploty pro zvýraznění průběhu teploty v posledních iteracích.

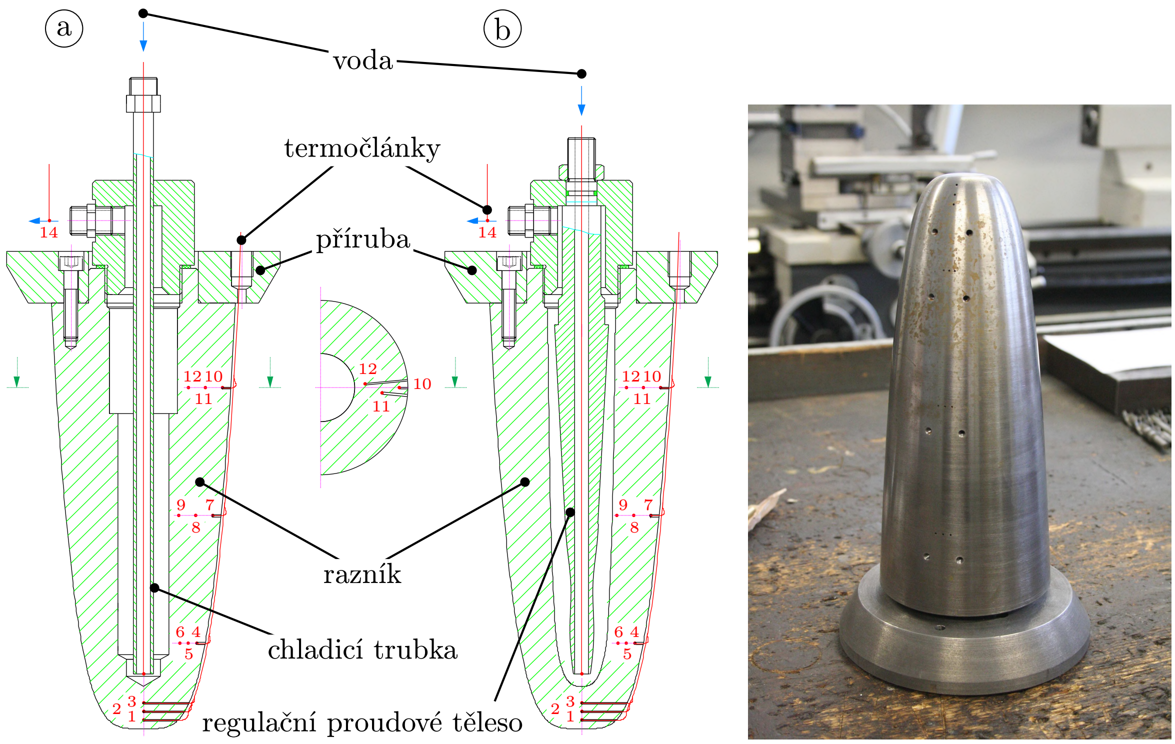



Obrázek 4.4: *Rozložení teploty podél vnějšího povrchu razníku* $\Gamma_1$ *se změněným měřítkem na ose teploty.*

# Kapitola 5

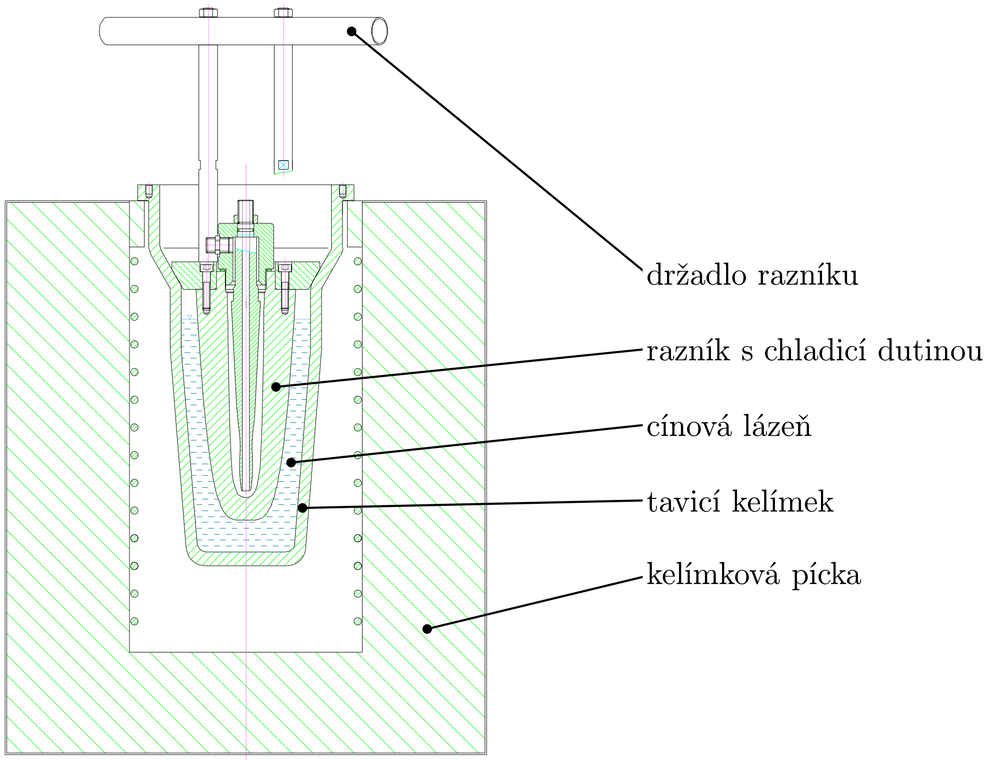
# Experimentální ověření numerických výsledků

K ověření numerických výsledků úlohy optimalizace byl navržen a realizován experiment, ve kterém se porovnávalo rozložení teploty v razníku klasické konstrukce s vrtanou odstupňovanou dutinou (viz obr. 5.1a) a rozložení teploty v razníku s vyjiskřenou vnitřní dutinou, ve které bylo aplikováno proudové regulační těleso (viz obr. 5.1b). Tvar dutiny a proudového regulačního tělesa byl vyroben dle výsledků numerické optimalizace. Podrobný popis experimentálního zařízení je uveden v [17], [42] a detailní vyhodnocení výsledků v [19], [29].




Obrázek 5.1: *Sestava razníku klasické konstrukce, razníku s vyjiskřenou dutinou a proudovým regulačním tělesem a fotografie razníku před experimentem.*

Při experimentu byl razník ponořen do tavicího kelímku s cínem, jenž nahrazoval sklovinu. Kelímek byl z vnější strany zahříván v elektrické pícce výkonem 5 KW. Razník byl chlazen proudící vodou o vstupní teplotě $15°C$ a průtoku $0,5$ litru za minutu. Experiment začínal ve vychladnutém stavu. Pícka se zapnula na plný výkon a po dobu 6 hodin se za stálého proudění chladicí vody snímala teplota ve 12 místech razníku (viz obr. 5.1). Dále byla sledována teplota vody na vstupu a výstupu z chladicí dutiny razníku. Teplota byla monitorována pomocí výpočetní techniky, záznam probíhal s frekvencí 10 Hz. Za výslednou teplotu se brala ustálená hodnota po 6 hodinách.




Obrázek 5.2: *Schéma experimentálního zařízení.*

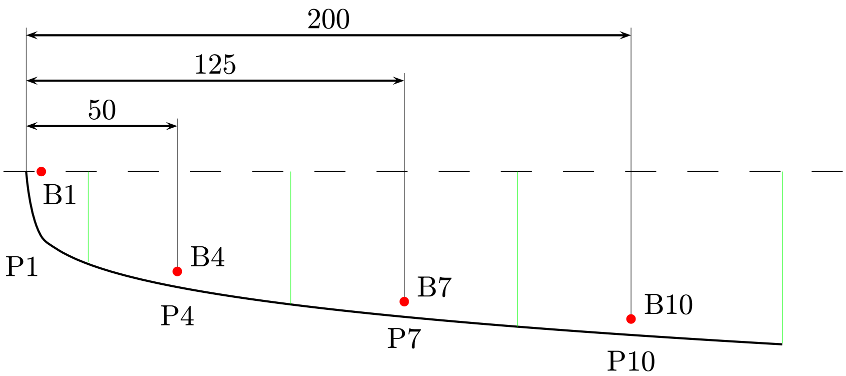
Rozložení teploty na povrchu razníku bylo hodnoceno na základě měření ve čtyřech místech razníku v hloubce 5 mm od povrchu. Jeden z bodů měření byl v ose razníku a další tři ve vzdálenosti 50 mm, 125 mm a 200 mm od roviny kolmé k ose razníku procházející vrcholem razníku (viz obr. 5.3).

Jednotlivé body měření reprezentují pro účely aproximace účelového funkcionálu rotační plochy o velikostech uvedených v tab. 5.1.

| Plocha odpovídající bodu Bi | P1 | P4 | P7 | P10 | Celkem |
|---|---|---|---|---|---|
| Obsah příslušné plochy razníku $[m^2]$ | 0,003 | 0,016 | 0,021 | 0,029 | 0,069 |

Tabulka 5.1: *Obsahy ploch odpovídajících jednotlivým bodům měření.*

Obrázek 5.3: *Experimentální zařízení před a po experimentu.*




Obrázek 5.4: *Rozmístění bodů měření u povrchu razníku.*

Na každém z razníků byl celý experiment pětkrát opakován. V tab. 5.2 jsou pro oba razníky uvedeny výsledky všech pěti měření, tj. ustálené teploty v bodech měření po 6 hodinách.
V pátém řádku je rozpětí naměřených hodnot v příslušném experimentu a v šestém průměrná teplota vypočítaná jako vážený aritmetický průměr, kde váhami jsou velikosti ploch odpovídajících jednotlivým bodům měření.

$$\overline{\vartheta_l} = \frac{1}{P}(\vartheta_{B1}.P1 + \vartheta_{B4}.P4 + \vartheta_{B7}.P7 + \vartheta_{B10}.P10) \ .$$

V šestém řádku je uveden aritmetický průměr průměrných teplot dosažených v jednotlivých experimentech na každém z testovaných razníků.

$$\boldsymbol{K} = \frac{\sum_{l=1}^{5} \overline{\vartheta_l}}{5} \ .$$

| Číslo | Razník I | | | | | Razník II | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| měření | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $\vartheta_{B1}[^oC]$ | 113,4 | 113,3 | 113,0 | 112,9 | 112,5 | 108,9 | 105,1 | 104,7 | 105,8 | 101,7 |
| $\vartheta_{B4}[^oC]$ | 104,3 | 105,8 | 106,8 | 106,1 | 106,2 | 105,0 | 102,2 | 103,1 | 104,7 | 100,7 |
| $\vartheta_{B7}[^oC]$ | 101,9 | 99,3 | 100,0 | 98,7 | 98,2 | 109,5 | 107,9 | 109,3 | 109,1 | 107,8 |
| $\vartheta_{B10}[^oC]$ | 96,7 | 96,2 | 96,9 | 95,7 | 95,0 | 105,9 | 105,2 | 106,6 | 105,5 | 104,9 |
| $\Delta_{\max}[^oC]$ | 16,7 | 17,1 | 16,1 | 17,2 | 17,5 | 4,5 | 5,7 | 6,2 | 4,4 | 7,1 |
| $\overline{\vartheta_l}$ | 100,8 | 100,1 | 100,8 | 99,8 | 99,3 | 106,9 | 105,3 | 106,5 | 106,4 | 104,7 |
| **K** | 100,2 | | | | | 106,0 | | | | |
| $\mathcal{J}^{Exp}$ | **1,21** | **1,50** | **1,51** | **1,67** | **1,89** | **0,30** | **0,33** | **0,38** | **0,24** | **0,60** |

Tabulka 5.2: *Výsledky pěti experimentů na původním razníku (Razník I) a na optimalizovaném razníku s aplikovaným regulačním proudovým tělesem (Razník II).*

V posledním řádku tab. 5.2 je vypočítána numerická aproximace hodnot účelového funkcionálu $\mathcal{J}^{Exp}$ pro každý experiment ve tvaru

$$\mathcal{J}^{Exp} = (\vartheta_{B1} - \boldsymbol{K})^2.P1 + (\vartheta_{B4} - \boldsymbol{K})^2.P4 + (\vartheta_{B7} - \boldsymbol{K})^2.P7 + (\vartheta_{B10} - \boldsymbol{K})^2.P10\ .$$

Testujeme nulovou hypotézu o shodě středních hodnot vypočítaných aproximací hodnot účelového funkcionálu pro oba razníky proti alternativě, že střední hodnota aproximací hodnot účelového funkcionálu na optimalizovaném razníku je statisticky významně nižší než střední hodnota na razníku původní konstrukce. Označíme $\mu_1$ střední hodnotu aproximací hodnot účelového funkcionálu $\mathcal{J}^{Exp}$ na původním razníku I a $\mu_2$ střední hodnotu aproximace hodnot účelového funkcionálu $\mathcal{J}^{Exp}$ na optimalizovaném razníku II, kde bylo aplikováno regulační proudové těleso.

Užijeme jednostranný dvouvýběrový test pro střední hodnotu, tedy

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu_1 = \mu_2\,, \\ H_1 &: \quad \mu_1 > \mu_2\,. \end{aligned}$$

Testová statistika

$$T = \frac{\overline{\mathcal{J}_1^{Exp}} - \overline{\mathcal{J}_2^{Exp}}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = 3,9857\ ,$$

kde $\overline{\mathcal{J}_1^{Exp}}$, resp. $\overline{\mathcal{J}_2^{Exp}}$, označuje aritmetický průměr dat ze souboru 1, resp. souboru 2, $n_1$, resp. $n_2$, označuje rozsah souboru 1, resp. souboru 2 a $s_1^2$, resp. $s_2^2$, výběrový rozptyl dat ze souboru 1, resp. souboru 2.

Hodnota testové statistiky umožňuje zamítnout nulovou hypotézu dokonce i na hladině významnosti $\alpha = 0,005$, tedy s $99,5\%$-ní pravděpodobností lze tvrdit, že na razníku II dosahujeme v průměru lepších výsledků než na razníku I.

Podíl

$$\frac{\overline{\mathcal{J}_2^{Exp}}}{\overline{\mathcal{J}_1^{Exp}}} = 0,24$$

naznačuje snížení bodového odhadu střední hodnoty hodnot účelového funkcionálu o 76%.

# Kapitola 6

# Závěr

Předložená studie vedla k návrhu nového technického řešení v oblasti chlazení razníku při lisování skleněné produkce. Na toto nové řešení byl podán společně s Ing. Václavem Dvořákem, Ph.D. a doc. Ing. Františkem Novotným, CSc. užitný vzor a patent s názvem „Razník pro tvarování skla lisováním“. Již byl udělen užitný vzor evidovaný Úřadem průmyslového vlastnictví pod číslem zápisu CZ 19792 U1. Je přístupný na adrese

**www.upv.cz**

→ databáze patentů a užitných vzorů → národní databáze → základní vyhledávání →

číslo přihlášky 2009-21235,
číslo zápisu 19792.

Současně byl podán patent s číslem přihlášky PV 2009-328 spolu s žádostí o úplný průzkum. Ten byl Úřadem průmyslového vlastnictví udělen 9.1.2013 pod číslem dokumentu 303669. Je přístupný na adrese

**www.upv.cz**

→ databáze patentů a užitných vzorů → národní databáze → základní vyhledávání →

číslo přihlášky 2009-328,
číslo dokumentu 303669.

Dále v rámci Výzkumného záměru č. MSM 4674788501 poskytnutého MŠMT ČR byl realizován experiment, jehož výsledky prokazují zlepšení teplotního pole u povrchu razníku na hladině významnosti $\alpha = 0,005$.

# Příloha A

# Dodatek

## A.1 Transformace do válcových souřadnic

Provedeme odvození transformace variační formulace rovnice energie z třídimenzionálního modelu v kartézských souřadnicích do válcových souřadnic s provedením následné dimenzionální redukce vycházející z předpokladu rotační symetrie celého problému, tj. nezávislosti na úhlové souřadnici $\varphi$.

**Věta A.1.1.** *(transformace do válcových souřadnic)*
*Předpokládáme rotační symetrii úlohy vzhledem k ose $x$. Potom má úloha ve válcových souřadnicích po provedení dimenzionální redukce úhlové složky $\varphi$ následující vyjádření. Variační formulace rovnice energie (2.74) má tvar*

$$\begin{aligned} Energy_{\Omega}^{velo}(\vartheta,\, \boldsymbol{w},\, \psi) \;&+\; Energy_{\Omega}^{cond}(\vartheta,\, \psi) + Environment_{\Omega}(\vartheta,\, \psi) = \\ &=\; Source_{\Omega}(\psi) + Coeff_{\Omega}(\psi)\ , \end{aligned} \tag{A.1}$$

*kde*

$$Energy_{\Omega}^{velo}(\vartheta,\, \boldsymbol{w},\, \psi) = c_v \varrho_2 \int_{\Omega_{Ca}} \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} w_1 + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r} w_2 \right) \psi r \, d\Omega\ , \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} Energy_{\Omega}^{cond}(\vartheta,\, \psi) =\;& k_0 \int_{\Omega_{Pl}} \left( \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_0}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega + \\ &+\; k_1 \int_{\Omega_{Gl}} \left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega + \\ &+\; k_2 \int_{\Omega_{Ca}} \left( \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega + \\ &+\; k_3 \int_{\Omega_{Mo}} \left( \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) r \, d\Omega\ , \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$Environment_{\Omega}(\vartheta,\, \psi) = \int_{\Gamma_7} \alpha \vartheta_3|_{\Gamma_7} \psi r \, d\Gamma\ , \tag{A.4}$$

$$Source_{\Omega}(\psi) = \varrho_1 \int_{\Omega_{Gl}} q \psi r \, d\Omega\ , \tag{A.5}$$

$$Coeff_{\Omega}(\psi) = \int_{\Gamma_1} \beta_1 \psi r \, d\Gamma + \int_{\Gamma_6} \beta_6 \psi r \, d\Gamma + \int_{\Gamma_7} \alpha \vartheta_{ext} \psi r \, d\Gamma\ . \tag{A.6}$$

*Důkaz.* Úlohu transformujeme do válcových souřadnic následujícími vztahy

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x\,,\\
x_2 &= r\cos\varphi\,,\\
x_3 &= r\sin\varphi\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial x}{\partial x_1} = 1\,, & \dfrac{\partial x}{\partial x_2} = 0\,, & \dfrac{\partial x}{\partial x_3} = 0\,,\\
\dfrac{\partial r}{\partial x_1} = 0\,, & \dfrac{\partial r}{\partial x_2} = \cos\varphi\,, & \dfrac{\partial r}{\partial x_3} = \sin\varphi\,,\\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0\,, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \dfrac{-\sin\varphi}{r}\,, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \dfrac{\cos\varphi}{r}\,,
\end{array}
$$

Předpoklad rotační symetrie problému vzhledem k ose $x$ znamená, že funkce vystupující ve všech rovnicích a jejich derivace nezávisí na úhlové souřadnici $\varphi$. Transformace složek vektorových funkcí (rychlosti proudění $\boldsymbol{u}$) jsou dány následujícími vztahy

$$
\begin{aligned}
u_1 &= w_1\,,\\
u_2 &= w_2\cos\varphi\,,\\
u_3 &= w_2\sin\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Skalární funkce (teplota $\vartheta$, testovací funkce $\psi$) a jejich derivace se transformují dle vztahů

$$
\begin{aligned}
\vartheta &= \vartheta\,,\\
\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1} &= \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\,,\\
\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2} &= \frac{\partial\vartheta}{\partial r}\cos\varphi\,,\\
\frac{\partial\vartheta}{\partial x_3} &= \frac{\partial\vartheta}{\partial r}\sin\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Pro lepší orientaci v textu zde odlišíme trojný a dvojný integrál. Transformujeme jednotlivé členy rovnice energie

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Energy}_G^{velo}(\vartheta,\,\boldsymbol{u},\,\psi) = c_v\varrho_2\iiint_{G_{Ca}}\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_1}u_1\psi + \frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_2}u_2\psi + \frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_3}u_3\psi\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 =\\
&= c_v\varrho_2\iiint_{G_{Ca}}\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}w_1\psi + \frac{\partial\vartheta_2}{\partial r}\cos\varphi w_2\cos\varphi\psi + \frac{\partial\vartheta_2}{\partial r}\sin\varphi w_2\sin\varphi\psi\right) r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =\\
&= c_v\varrho_2\iiint_{G_{Ca}}\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}w_1\psi + \frac{\partial\vartheta_2}{\partial r}w_2\psi\right) r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =\\
&= 2\pi c_v\varrho_2\iint_{\Omega_{Ca}}\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}w_1\psi + \frac{\partial\vartheta_2}{\partial r}w_2\psi\right) r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r = 2\pi\mathrm{Energy}_\Omega^{velo}(\vartheta,\,\boldsymbol{w},\,\psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Energy}_G^{cond}(\vartheta,\,\psi) = \; & k_0 \iiint_{G_{Pl}} \left( \frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\vartheta_0}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \frac{\partial\vartheta_0}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z} \right) \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 + \\
& + \; k_1 \iiint_{G_{Gl}} \left( \frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_3} \right) \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 + \\
& + \; k_2 \iiint_{G_{Ca}} \left( \frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_3} \right) \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 + \\
& + \; k_3 \iiint_{G_{Mo}} \left( \frac{\partial\vartheta_3}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\vartheta_3}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \frac{\partial\vartheta_3}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_3} \right) \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \\
= \; & k_0 \iiint_{G_{Pl}} \left( \frac{\partial\vartheta_0}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta_0}{\partial r}\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r}\cos\varphi + \frac{\partial\vartheta_0}{\partial r}\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\varphi \right) r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \\
& + \; k_1 \iiint_{G_{Gl}} \left( \frac{\partial\vartheta_1}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta_1}{\partial r}\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r}\cos\varphi + \frac{\partial\vartheta_1}{\partial r}\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\varphi \right) r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \\
& + \; k_2 \iiint_{G_{Ca}} \left( \frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta_2}{\partial r}\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r}\cos\varphi + \frac{\partial\vartheta_2}{\partial r}\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\varphi \right) r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \\
& + \; k_3 \iiint_{G_{Mo}} \left( \frac{\partial\vartheta_3}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta_3}{\partial r}\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r}\cos\varphi + \frac{\partial\vartheta_3}{\partial r}\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\varphi \right) r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\
= \; & k_0 \iiint_{G_{Pl}} \left( \frac{\partial\vartheta_0}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta_0}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \right) r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \\
& + \; k_1 \iiint_{G_{Gl}} \left( \frac{\partial\vartheta_1}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta_1}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \right) r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \\
& + \; k_2 \iiint_{G_{Ca}} \left( \frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta_2}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \right) r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \\
& + \; k_3 \iiint_{G_{Mo}} \left( \frac{\partial\vartheta_3}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta_3}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \right) r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\
= \; & 2\pi k_0 \iint_{\Omega_{Pl}} \left( \frac{\partial\vartheta_0}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta_0}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \right) r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r + 2\pi k_1 \iint_{\Omega_{Gl}} \left( \frac{\partial\vartheta_1}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta_1}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \right) r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r + \\
& + 2\pi k_2 \iint_{\Omega_{Ca}} \left( \frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta_2}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \right) r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r + 2\pi k_3 \iint_{\Omega_{Mo}} \left( \frac{\partial\vartheta_3}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta_3}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \right) r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r = \\
= \; & 2\pi\,\mathrm{Energy}_\Omega^{cond}(\vartheta,\,\psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Environment}_G(\vartheta,\,\psi) &= \iint_{\Gamma_7^{3D}} \alpha\vartheta_3|_{\Gamma_7^{3D}}\psi\,\mathrm{d}S = 2\pi \int_{\Gamma_7} \alpha\vartheta_3|_{\Gamma_7}\psi r\,\mathrm{d}\Gamma = \\
&= 2\pi\ \mathrm{Environment}_\Omega(\vartheta,\,\psi) \\
\mathrm{Source}_G(\psi) &= \varrho_1 \iiint_{G_{Gl}} q_1\psi\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = 2\pi\varrho_1 \iint_{\Omega_{Gl}} q_1\psi r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r = \\
&= 2\pi\ \mathrm{Source}_\Omega(\psi)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Coeff}_G(\psi) &= \iint_{\Gamma_1^{3D}} \beta_1 \psi \,\mathrm{d}S + \iint_{\Gamma_6^{3D}} \beta_6 \psi \,\mathrm{d}S + \iint_{\Gamma_7^{3D}} \alpha \vartheta_{ext})\psi \,\mathrm{d}S = \\ &= 2\pi \int_{\Gamma_1} \beta_1 \psi r \,\mathrm{d}\Gamma + 2\pi \int_{\Gamma_6} \beta_6 \psi r \,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_7} \alpha \vartheta_{ext} \psi r \,\mathrm{d}\Gamma = 2\pi \ \mathrm{Coeff}_\Omega(\psi)\end{aligned}$$

Dosadíme-li transformované vztahy do (2.74) a vydělíme číslem $2\pi$ dostaneme (A.1). □

**Věta A.1.2.** *(transformace plošného integrálu do válcových souřadnic)*
*Nechť rotační plocha $S$ vznikne rotací křivky $\Gamma$ s parametrickým vyjádřením*

$$\begin{array}{l} x = x \\ r = r(x) \end{array} \qquad x \in [0,1] \tag{A.7}$$

*kolem osy $x$. Potom platí*

$$\iint_S h(x_1, x_2, x_3) \,\mathrm{d}S = 2\pi \int_\Gamma h(x) r \,\mathrm{d}\Gamma \ . \tag{A.8}$$

*Důkaz.* Plochu $S$ definujeme parametricky pomocí vektorové funkce

$$F(x, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ r(x)\cos\varphi \\ r(x)\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (x,\ \varphi) \in [0,1] \times [0, 2\pi) \ .$$

Potom

$$\mathrm{d}S = \| \frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi} \| \mathrm{d}x\mathrm{d}\varphi = \| \begin{vmatrix} i & i & k \\ 1 & r'(x)\cos\varphi & r'(x)\sin\varphi \\ 0 & -r(x)\sin\varphi & r(x)\cos\varphi \end{vmatrix} \| \mathrm{d}x\mathrm{d}\varphi =$$
$$\sqrt{r(x)^2 (r'(x))^2 + r(x)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}\mathrm{d}x\mathrm{d}\varphi = r(x)\sqrt{1 + (r'(x))^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}\varphi = r\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}\varphi \ ,$$

tedy

$$\begin{aligned}\iint_S h(x_1, x_2, x_3)\mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 h(x,\varphi) \| \frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi} \| \mathrm{d}x\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 h(x) r(x) \sqrt{1 + (r'(x))^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_\Gamma h(x) r\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_\Gamma h(x) r \mathrm{d}\Gamma \ ,\end{aligned}$$

kde jsme využili rotační symetrie funkce $h$ (tedy $h(x,\varphi) = h(x)$) a parametrické vyjádření křivky $\Gamma$ ve tvaru (A.7). □

## A.2 Použitá tvrzení

V důkazech existence obou úloh tvarové optimalizace užíváme výsledek převzatý z [2]. Nechť $\Theta$ je množina přípustných oblastí $\Omega \in R^n$. Předpokládáme, že $\Theta$ je částí nějaké větší množiny $\widetilde{\Theta}; \Theta \subseteq \widetilde{\Theta}$.

Pro každou $\Omega \in \widetilde{\Theta}$ definujeme přidružený Hilbertův prostor $V(\Omega)$ funkcí definovaných na $\Omega$. Jestliže $\Omega_n$, $\Omega \in \widetilde{\Theta}$, $n \in N$, pak symbolem

$$\Omega_n \overset{\widetilde{\Theta}}{\to} \Omega\,, \quad \text{pro } n \to \infty \tag{A.9}$$

označíme konvergenci oblastí. Dále

$$u_n \to u\ , \quad \text{pro } n \to \infty \tag{A.10}$$

označuje konvergenci $u_n \in V(\Omega_n)$ k $u \in V(\Omega)$, kde $\Omega_n$ a $\Omega \in \widetilde{\Theta}$. Předpokládáme, že na $\widetilde{\Theta}$ je definována vhodná topologie a konvergence (A.9) a (A.10) jsou také definovány.
Nechť

$$u : \Omega \in \Theta \mapsto u(\Omega) \in V(\Omega) \tag{A.11}$$

je zobrazení, které přiřazuje každé oblasti $\Omega \in \Theta$ přidružené řešení stavové úlohy $u$ a nechť

$$G = \{(\Omega,\, u(\Omega))|\ \Omega \in \Theta\} \tag{A.12}$$

je graf (A.11).
Nechť $I(\Omega, u)$ s $\Omega \in \Theta,\ u \in V(\Omega)$ je účelový funkcionál, jehož hodnoty jsou na $G$ označeny jako $J(\Omega)$, tj.

$$J(\Omega) = I(\Omega, u(\Omega))\ . \tag{A.13}$$

Definujeme **abstraktní úlohu optimálního návrhu**

$$\text{Nalézt } \Omega^* \in \Theta \text{ takové, že}$$
$$J(\Omega^*) \le J(\Omega) \qquad \forall\, \Omega \in \Theta\ . \tag{A.14}$$

**Předpoklady:**
A(i) $G$ je kompaktní v následujícím smyslu: Je-li $\{\Omega_n\},\ \Omega_n \in \Theta$ libovolná posloupnost, potom existuje podposloupnost

$$\{(\Omega_{n_k}, u(\Omega_{n_k}))\} \subset \{(\Omega_n, u(\Omega_n))\} \tag{A.15}$$

a prvek $(\Omega, u(\Omega)) \in G$ takový, že

$$\Omega_{n_k} \ \overset{\Theta}{\to}\ \Omega\,, \qquad \text{pro } n \to \infty \tag{A.16}$$
$$u(\Omega_{n_k}) \ \to\ u(\Omega)\,, \qquad \text{pro } n \to \infty\ . \tag{A.17}$$

A(ii) $I$ je slabě zdola polospojitý: Je-li $\Omega_n,\ \Omega \in \Theta$ takové, že $\Omega_n \overset{\Theta}{\to} \Omega$ a je-li $v_n \in v(\Omega_n),\ v \in V(\Omega)$, takové, že $v_n \to v$ , potom

$$\mathrm{liminf}_{n\to\infty} I(\Omega_n, v_n) \ge I(\Omega, v)\ . \tag{A.18}$$

**Věta A.2.1.**
*Za předpokladů A(i) a A(ii) má problém (A.14) alespoň jedno řešení $\Omega^* \in \Theta$.*

*Důkaz.* Viz [2] str. 29. □

V důkazu existence řešení úlohy identifikace užíváme obecný existenční výsledek převzatý z [3].
Nechť $U$ je Banachův prostor, $U_{ad} \subset U$ kompaktní množina, $V$ Hilbertův prostor s normou $\|\cdot\|$. Uvažujme bilineární formu $a(F;\cdot,\cdot)$ definovanou na $V \times V$ a lineární spojitý funkcionál $\langle f(F),\cdot\rangle$ na $V$. Forma a funkcionál nechť jsou závislé na parametru $F \in U$. Předpokládáme, že existují konstanty $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ a množina $U^o$, $U_{ad} \subset U^o \subset U$ nezávislá na $F, u, v$ taková, že pro všechna $F \in U^o$ a všechna $u, v \in V$ platí

$$a(F;u,v) \leq \alpha_1 \|u\| \|v\| \;, \tag{A.19}$$

$$a(F;u,u) \geq \alpha_0 \|u\|^2 \;. \tag{A.20}$$

Dále předpokládejme

Jestliže $F, F_n \in U^o$, $F_n \to F$ v $U$ a $u_n \rightharpoonup u$ (slabě) ve $V$ pro $n \to \infty$,
pak $a(F_n;u_n,v) \to a(F;u,v) \quad \forall v \in V$; (A.21)
Jestliže $F, F_n \in U^o$, $F_n \to F$ v $U$, pak $\langle f(F_n), v\rangle \to \langle f(F), v\rangle \quad \forall v \in V$; (A.22)
Existuje konstanta $\gamma > 0$, nezávislá na $F$, $v$ taková, že
$|\langle f(F), v\rangle \leq \gamma \|v\| \quad \forall F \in U^o \;\; \forall v \in V$. (A.23)

Uvažujme následující stavový problém:
Pro $F \in U_{ad}$ nalézt $u(F) \in V$ tak, aby platilo

$$a(F;u(F),v) = \langle f(F), v\rangle \quad \forall v \in V \;. \tag{A.24}$$

Za předpokladů (A.19), (A.20) a (A.23) má podle Laxovy-Milgramovy věty stavový problém (A.24) právě jedno řešení pro každé $F \in U^o$.

Nechť je dán funkcionál

$$j : (U \times V) \to R \;,$$

splňující následující podmínku

Jestliže $F, F_n \in U^o$, $F_n \to F$ v $U$ a $u_n \rightharpoonup u$ (slabě) ve $V$, pak
$\liminf_{n\to\infty} j(F_n,u_n) \geq j(F,u)$. (A.25)

Definujeme účelový funkcionál vztahem

$$\mathcal{J}(F) = j(F, u(F)) \;, \tag{A.26}$$

kde $u(F)$ značí řešení problému (A.24).
Formulujeme problém optimálního návrhu:

Nalézt $F^o \in U_{ad}$ takové, že
$\mathcal{J}(F^o) \leq \mathcal{J}(F) \qquad \forall F \in U_{ad}$. (A.27)

**Věta A.2.2.**
*Za předpokladů (A.19) až (A.23) a (A.25) má problém (A.27) alespoň jedno řešení.*

*Důkaz.* Viz [3] str. 270. □

# Literatura

[1] *Feistauer, M., Felcman, J., Straškraba, I.:* Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow, Oxford Science Publications, Clarendon Press - Oxford, 2003.

[2] *Haslinger, J., Neittaanmäki, P.:* Finite element approximation for optimal shape design: Theory and applications. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1988.

[3] *Hlaváček, I.:* Optimization of the shape of axisymmetric shells. Apl. Mat. 28 (1983), 269-294.

[4] *Kufner, A.:* Weighted Sobolev spaces. John Wiley & Sons, New York, 1985.

[5] *Matoušek, I., Cibulka, J.:* Analýza tvarovacího cyklu na karuselovém lisu NOVA. TU v Liberci, Liberec, 1999.

[6] *Rektorys, K.:* Variational methods in mathematics, science and engineering. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland/Boston-U.S.A., 1977.

[7] *Salač, P.:* Shape Optimization of Elastic Axisymmetric Plate on an Elastic Foundation. Appl. Math. 40, 1995, 319-338.

[8] *Salač, P.:* Optimal Design of an Elastic Circular Plate on a Unilateral Elastic Foundation. I: Continuous Problems. Z. Angew. Math. Mech., 82 (2002) 1, 21-32.

[9] *Salač, P.:* Optimal Design of an Elastic Circular Plate on a Unilateral Elastic Foundation. II: Approximate Problems. Z. Angew. Math. Mech., 82 (2002) 1, 33-42.

[10] *Salač, P.:* Variační formulace isotermického lisování skloviny. Sklář a keramik, roč. 56 (2006), ISSN 0037-637XX, 185-191.

[11] *Salač, P.:* Možnosti teorie optimalizace v prostředí sklářské výroby. Sborník XII. Mezinárodní konference sklářské stroje, Liberec, 2006, ISBN 80-7372-092-2, 157-161.

[12] *Salač, P.:* Modelling of cooling process in glass forming. Proceedings of the ICPM'07, Liberec, 2007, ISBN 978-80-7372-252-4, 18-21.

[13] *Salač, P.:* Modelling of heat flow in glass forming. Sborník konference Moderní matematické metody v inženýrství (3mi) 2007, Dolní Lomná u Jablůnkova, ISBN 978-80-248-1649-4, 262-265.

[14] *Salač, P.:* Problem of shape optimization of cooling canal of the plunger in glass forming. Sborník konference Moderní matematické metody v inženýrství (3mi) 2008, Dolní Lomná u Jablůnkova, ISBN 978-80-248-1871-9, 177-181.

[15] *Salač, P.:* Shape optimization of area with cooling medium. Sborník konference Moderní matematické metody v inženýrství (3mi) 2009, Dolní Lomná u Jablůnkova, ISBN 978-80-248-2118-4, 207-211.

[16] *Salač, P., Dvořák, V.:* Shape optimization of axially symmetric through cooling canal. Proceeding of 25th conference Computational Mechanics 2009, 9. – 11. listopadu 2009, Hrad Nečtiny, Czech Republic, ISBN 978-80-7043-824-4.

[17] *Novotný, F., Salač, P., Starý, M.:* Laboratorní stand pro verifikaci nové konstrukce chlazení lisovacího razníku podle UV č. 19792. Technologická laboratoř , Katedra sklářských strojů a robotiky, FS TU v Liberci, 2009.

[18] *Salač, P.:* Optimization of Speed Field in Cavity of Plunger. Sborník konference Moderní matematické metody v inženýrství (3mi) 2010, 31. 5. – 2. 6. 2010, Dolní Lomná u Jablůnkova, ISBN 978-80-248-2342-3, 129-133.

[19] *Salač, P., Dvořák, V.:* Experimental verification of numerical optimization of a plunger for glass pressing. Conference Proceedings of International Conference Experimental Fluid Mechanics 2010, November 24. – 26. 2010, Liberec, ISBN 978-80-7372-670-6, 582–586.

[20] *Salač, P.:* Optimal Design of the Cooling Plunger Cavity. Appl. Math., Praha 58 (2013), 405 – 422.

[21] *Salač, P., Starý, M.:* Optimalizace chlazení razníku. Sklář a keramik, 2011 roč. 61, č. 5 - 6 , 103-106, ISSN OO37-637X.

[22] *Salač, P.:* Optimal Design of the Plunger in Glass Forming. Proceedings of the ICPM'11, October 20-21, 2011, TU v Liberci, Liberec, 119-124, ISBN 978-80-7372-773-4.

[23] *Salač, P.:* Sensitivity Analysis for Plunger Cavity. Sborník konference Moderní matematické metody v inženýrství (3mi) 2011, 30. 5. – 1. 6. 2011, Dolní Lomná u Jablůnkova, ISBN 978-80-248-2517-5, str. 89 – 95.

[24] *Salač, P., Starý, M.:* Verification of Plunger Cooling for Glass Forming in Real Working Mode. Conference Proceedings of International Conference Experimental Fluid Mechanics 2011, November 22. – 25. 2011, 966–970, Jíčín, ISBN 978-80-7372-784-0.

[25] *Salač, P.:* State problem for plunger cooling in glass forming. Conference Proceedings of Seminar on Numerical Analysis'12, January 23. – 27. 2012, 153-156, Liberec, ISBN 978-80-7372-821-2.

[26] *Salač, P.:* Shape optimization in flowing medium cooling. AIP Conf. Proc. 1497, 45 (2012); http://dx.doi.org/10.1063/1.4766765, June 8. – 13. 2012, 45-52, Sozopol, Bulgaria, ISBN 978-0-7354-1111-1, ISSN 0094-243X.

[27] *Salač, P.:* Optimization of plunger cavity. Proceedings of Seminar PANM'16, June 3.-8. 2012, Dolní Maxov, 174-180, ISBN 978-80-85823-62-2.

[28] *Salač, P.:* Problem of identification of heat transfer coefficients. Conference Proceedings of Seminar on Numerical Analysis'13, January 21. – 25. 2013, 97-100, Rožnov pod Radhoštěm, ISBN 978-80-86407-34-0.

[29] *Salač, P., Starý, M.:* The cooling of the pressing device in the glass industry. The International Journal of Multiphysics, Volume 7, Number 3, 2013, 207 – 218.

[30] *Salač, P., Dvořák, V.:* Numerical solution of optimal design for axisymmetrical cooling canal. AIP Conf. Proc. 1570, 172 (2013); http://dx.doi.org/10.1063/1.4854754, June 8. – 13. 2013, Sozopol, Bulgaria, ISBN 978-07354-1198-2.

[31] *Salač, P.:* Numerical results of plunger cavity optimal design. Conference Proceedings of Seminar on Numerical Analysis'14, January 27. – 31. 2014, 91-94, Nymburk, ISBN 978-80-87136-16-4.

[32] *Salač, P., Dvořák, V.:* Shape optimization of the current body located in the cooling canal. AIP Conf. Proc. 1631(2014); http://dx.doi.org/10.1063/v1631, June 8. – 13. 2014, Sozopol, Bulgaria, ISBN 978-07354-1270-5.

[33] *Salač, P.:* Steady heat source representing glass cooled product. Proceedings of the ICPM'14, September 25-26, 2014, TU v Liberci, Liberec, Czech Republic, 87-92, ISBN 978-80-7494-108-5.

[34] *Salač, P.:* Numerical solution of the pressing devices shape optimization problem in the glass industry. Appl. Math., Praha 63 (2018), 643 – 664. http://doi.org/10.21136/AM.2018.0247-17.

[35] *Salač, P., Stebel, J.:* Two-periodic cooling process in glass forming. Conference Proceedings of Seminar on Numerical Analysis'15, January 19. – 23. 2015, 104 - 107, Ostrava, ISBN 978-80-86407-55-5.

[36] *Salač, P.:* Optimization of the insulation barrier in the cooling process. AIP Conf. Proc. 1690, 020017 (2015); http://doi.org/10.1063/1.4936695, June 8. – 13. 2015, Sozopol, Bulgaria.

[37] *Salač, P.:* Numerical results of the shape optimization problem for the insulation barrier. AIP Conf. Proc. 1789, 030004 (2016); http://doi.org/10.1063/1.4968450, June 8. – 13. 2016, Sozopol, Bulgaria.

[38] *Salač, P.:* Regulation of the cooling power in the plunger cavity. AIP Conf. Proc. 1910, 020004 (2017); http://doi.org/10.1063/1.5013941, June 8. – 13. 2017, Sozopol, Bulgaria.

[39] *Salač, P.:* Numerical results for the cooling power optimization problem. AIP Conf. Proc. 2048, 030009 (2018); http://doi.org/10.1063/1.5082067, June 8. – 13. 2018, Sozopol, Bulgaria.

[40] *Salač, P., Stebel, J.:* Shape optimization for a time-dependent model of a carousel press in glass production. Appl. Math., Praha 64 (2019), 195-224, http://doi.org/10.21136/AM.2019.0301-18.

[41] *Salač, P.:* Optimization of the plunger cooling by the core with high thermal conductivity. AIP Conf. Proc. 2172, 070020 (2019); https://doi.org/10.1063/1.5133556, June 8. – 13. 2019, Sozopol, Bulgaria.

[42] *Starý, M.:* Physical modelling of plunger cooling for glass forming. Conference Proceedings of International Conference Experimental Fluid Mechanics 2010, November 24. – 26. 2010, Liberec, ISBN 978-80-7372-670-6, 629–635.

[43] *Šorin, S. N.:* Sdílení tepla. SNTL - Nakladatelství technické literatůry, Praha, 1968.