

Určení efektivních mechanických vlastností kompozitů vyztužených tkaninou plátnové vazby

"Determination of effective elastic properties of carbon-carbon textile reinforced composites".

Bohdana Marvalová

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

Technická universita v Liberci

UNIVERZITNÍ KNIHOVNA
TECHNICKÉ UNIVERZITY V LIBERCI



3146071328

Docentská habilitační práce

Duben 2000

Tato práce vznikla v rámci grantu č. 106/99/0096 Grantové agentury české republiky.

Poděkování

Děkuji svým milým kolegům z Katedry mechaniky a pružnosti, kteří mne podpořili svým zájmem a pochopením.

Zejména děkuji panu Doc. RNDr. Janu Šklíbovi, CSc jak za morální, tak i za materiální podporu – bez jeho nového počítače, který mi dal nezištně k dispozici, bych sotva mohla tuto práci dovést do konce.

Dík patří panu Prof. RNDr. Bohuslavu Střížovi, DrSc za cenné rady a připomínky.

Děkuji i své milé kolegyni paní Doc. Ing. Bohumile Koškové, CSc za uvedení do problematiky textilních kompozitů, za hojnou a čerstvou literaturu, kterou mne zásobovala a za bylinkové čaje, kterými mne napájela v zimních měsících.

Děkuji panu Doc. Ing. Václavu Hercikovi za pozorné přečtení mé práce, za připomínky k ní i za velmi užitečné knížky [3,40,41], které mi daroval.

Děkuji své rodině za trpělivost a za péči, kterou mne při mé práci zahrnovala.

V Liberci dne 18.března 2000

Bohdana Marvalová

U 343 S

KMP

64.10.1

1 CD Rom

M.

Obsah

1. Úvod

2. Přehled modelů pro předpověď mechanických vlastností kompozitů s textilní výztuží

3. Základní pojmy mechaniky textilních kompozitů

3.1 Úvod

3.2 Efektivní moduly

3.3 Reprezentativní objemový element

3.4 Pružnostní analýza kompozitů vyztužených textiliemi

3.5 Anizotropní pružnost

3.5.1 Vztahy mezi napětím a deformací

3.5.2 Transformace souřadnic

3.5.3 Jednotlivé případy elastické symetrie

3.5.4 Inženýrské pružnostní konstanty

4. Aplikace variačních principů v mechanice kompozitů

5. Model reprezentativního objemového elementu

5.1 Geometrie základní buňky

5.2 Stanovení reprezentativního objemového elementu

5.3 Diskretizace reprezentativního objemového elementu

5.3.1 Určení objemových podílů matrice a výztuže v jednotlivých elementech

5.3.2 Určení úhlu sklonu výztuže v jednotlivých elementech

5.3.3 Tenzory tuhosti jednotlivých složek kompozitu

5.3.4 Tenzory tuhosti jednotlivých elementů RVE - cihlový model

5.3.5 Spojitý model kompozitního materiálu

6. Výpočtový algoritmus

6.1 Bázové funkce

6.2 Sestavení systému lineárních rovnic

6.3 Okrajové podmínky

6.4 Výpočet napětí

6.5 Výpočet efektivních modulů

6.6 Výsledky

7. Vlastní frekvence desky z ortotropního materiálu

8. Závěr

9. Literatura

10. Příloha. MATLAB *script files* na CD.

Přehled použitých symbolů

ε_{ij}	tenzor deformace
σ_{ij}	tenzor napětí
$\langle \varepsilon_{ij} \rangle, \langle \sigma_{ij} \rangle$	objemový průměr
C_{ijkl}	tenzor tuhosti
S_{ijkl}	tenzor podajnosti
C_{ijkl}^{Ef}	tenzor tuhosti efektivního materiálu
n_j	vektor vnější normály
u_i	vektor posuvu
Ω	oblast zaujímaná tělesem
Γ	hranice oblasti
Γ_p, Γ_u	hranice oblasti se zadaným zatížením, resp. se zadanými posuvy
$\tilde{p}_i, \tilde{u}_i$	vektor zadaných vnějších sil, resp. zadaných posuvů
RVE	reprezentativní objemový element
V_r	objem reprezentativního objemového elementu
$\delta^* W$	celková virtuální práce
U	potenciální energie
T	kinetická energie
L	Lagrangeův kinetický potenciál
$A(\varepsilon_{ij}), B(\sigma_{ij})$	funkce deformační energie
Π, Π_c	celková potenciální energie, resp. doplňková energie
H, Π_R	Hu-Washizu, resp. Reissnerův funkcional
Φ	funkcional
$\{\sigma\}, \{\varepsilon\}$	sloupcové vektory napětí a deformace
$[C], [S]$	matice elastických konstant
G, Q, M	transformační matice
E, ν, G	inženýrské pružnostní konstanty
ψ_x, ψ_y, w_z	deformace desky

$\psi_{x,x}$ parciální derivace funkce podle x M_x, M_y, M_{xy}

vnitřní momenty desky

 Q_x, Q_y

vnitřní příčné síly desky

 ω

vlastní úhlová frekvence desky

1. Úvod

Úkolem této práce je navrhnout teoretický a výpočtový model pro určení mechanických vlastností kompozitů uhlík-uhlík vyztužených tkaninou plátnové vazby, který by umožnil sledování vlivu geometrie výztuže a mechanických vlastností matrice a výztuže na výsledné mechanické vlastnosti kompozitu.

Kompozity vyztužené textilií mají stále širší použití. Textilní výztuž představuje nejen řadu výhod pro technologii výroby kompozitů jako je snazší manipulace a výborná tvarovatelnost, ale zejména dodává kompozitu stabilní vlastnosti v hlavních směrech. Speciální 3-D tkaniny a pleteniny, konstruované tak, aby výsledné vlastnosti kompozitu byly směrově co nejvyrovnanější, umožňují další velmi zajímavé aplikace. Jejich velkou výhodou je vyšší odolnost proti šíření trhlin, proti rázu a delaminaci. Je tedy důležité umět předpovědět výsledné vlastnosti kompozitu, které jsou předurčeny především prostorovým uspořádáním výztuže. To je cílem celé řady mechanických modelů kompozitů, jejichž stručný přehled je uveden v kapitole 2.

V kapitole 3 jsou vysvětleny základní pojmy a přístupy mechaniky kompozitů a přehled některých partií z teorie pružnosti, ze kterých vychází navržený model.

Kapitola 4 je věnována variačním principům. Jsou zde uvedeny některé neklasické variační principy, ze kterých vychází výpočet napjatosti v základním objemovém elementu kompozitu.

V kapitole 5 je popsán navržený výpočtový model, ve kterém jsou mechanické vlastnosti kompozitu určeny na základě ekvivalence energie napjatosti v reprezentativním objemovém elementu kompozitu (dále jen RVE) a ve stejném objemovém elementu efektivního homogenního materiálu při shodných okrajových podmínkách. RVE je rozdělen na řadu shodných kvádrových elementů s rozdílnými elastickými vlastnostmi, které závisí na geometrii výztuže, na mechanických vlastnostech jednotlivých složek kompozitu a na jejich objemových podílech. RVE je považován za nehomogenní anizotropní těleso s diskretním rozložením mechanických vlastností. Napjatost a deformace RVE je stanovena na základě variačních principů. Výpočtový algoritmus a výsledky výpočtu efektivních mechanických konstant jsou uvedeny v kapitole 6.

V kapitole 7 jsou posouzeny možnosti určovat mechanické vlastnosti kompozitu z vlastních kmitů kompozitních desek. Závěry a doporučení jsou v kapitole 8. V kapitole 9 je seznam použité literatury. Součástí práce je CD se skript files vytvořených v prostředí MATLAB pro realizaci numerických výpočtů.

2. Přehled modelů pro předpověď mechanických vlastností kompozitů s textilní výztuží.

Řada modelů mechanického chování kompozitů vyztužených tkaninou je odvozena z již dlouhou užívaných modelů laminátů se zvlněnými vlákny či vrstvami [13-15].

Zobecněním postupu výpočtu efektivních mechanických vlastností pro jednosměrné kompozity je tzv. „modified matrix method“ navržená Tarnopolskim [16], která je určena pro třísměrné kompozity jejichž 3-D výztuž se kříží pod pravými úhly. Roze a Zigun [17,18] odvodili „curved fibers method“ vhodnou pro kompozity s tkanou výztuží. Chou a kol. [19] navrhli svůj „fiber inclination model“, který je kombinací metody zprůměrování tuhostí a klasické laminační teorie.

Chou a Ishikawa [11] vyvinuli dvoudimenzionální model kompozitů s tkanou výztuží známý jako „mosaic model“, který je vhodný pro první přiblížení, dále „crimp model“ pro výztuž plátňové vazby a „bridging model“ pro výztuže se saténovou vazbou. Všechny tyto modely lze aplikovat i na hybridní výztuže, kdy nitě osnovy a útku jsou z rozdílných materiálů. Teoretickým základem těchto modelů je klasická teorie laminátových desek [12]. Mozaikový model je asambláží nesymetrických pravoúhlých elementů tvořených spojením dvou lamin natočených vůči sobě o 90° . Mosaikový model nezahrnuje zvlnění nití a předpokládá přerušení nití při průchodu z lícové na rubovou stranu tkaniny výztuže. Tyto nespojitosti jsou částečně překlenuty v „crimp“ a „bridging“ modelu. Horní a dolní meze tuhosti a poddajnosti jsou vypočteny za předpokladu konstantní deformace resp. konstantního napětí. Analytické výsledky vyplývající z „crimp“ modelu ukazují, že zvlnění nití vede ke snížení tuhosti v rovině desky. Stejně modely aplikovali tito autoři při určování koeficientů teplotní roztažnosti kompozitu.

Přehled jednotlivých modelů a jejich vzájemné srovnání spolu s experimentálními výsledky uvádí Bogdanovich a Pastore ve své podrobné monografii [20].

Pro předpověď efektivních vlastností kompozitů vyztužených tkaninou je rovněž často užívána metoda konečných prvků, tedy numerická metoda určená především k analýze konstrukcí. Existuje celá škála MKP modelů kompozitního materiálu vyztuženého textilií od relativně jednoduchých modelů skládajících se z roštu zakřivených prutů [4] k detailním modelům, ve kterých matrice a výztuž jsou diskretizovány odděleně a tvoří síť elementů s rozdílnými mechanickými vlastnostmi [5-10].

Zvláštní skupinu tvoří modely založené na mikromechanické odezvě reprezentativního objemového elementu, který je většinou tvořen základní buňkou textilie výztuže a příslušným objemem matrice [6-9,21-25]. Jednotlivé modely většinou vychází z "brick" modelu

RVE zavedeného Bogdanovichem [20], který složitou vnitřní strukturu modeluje soustavou kvádrových elementů s proměnnými mechanickými vlastnostmi. K výpočtu napjatosti a deformace v "brick" modelu RVE za předpokladu, že materiál kompozitu se řídí zobecněným Hookeovým zákonem, jsou často používány variační principy [8,34,35]

3. Základní pojmy mechaniky textilních kompozitů

V této části jsou vysvětleny základní přístupy mechaniky kompozitů a základní pojmy jako jsou efektivní moduly a reprezentativní objemový element, ze kterých vychází navrhovaný model. Dále jsou zde uvedeny základní vztahy mezi napětím a deformací pro anizotropní materiál, které jsou použity k výpočtu mechanických vlastností našeho modelu.

3.1 Úvod

Rozmanitost kompozitních materiálů zjevně nepřipouští jednoduchý a jednotný teoretický přístup k určování jejich mechanických vlastností. Zvolíme-li mikromechanický přístup, máme před sebou heterogenní materiál skládající se z několika oddělených složek s komplikovaným prostorovým uspořádáním a s různými mechanickými vlastnostmi.

Pro potřeby pružnostní analýzy kompozitních konstrukcí však je většinou nutné považovat kompozit za homogenní materiál.

Kompozit vyztužený textilií pochopitelně není sourodým a homogenním materiálem, ale lze ho za takový považovat, pokud jeho měřitelná mechanická odpověď se řídí zobecněným Hookeovým zákonem a jsou-li lokální změny napjatosti a deformace malé ve srovnání s měřitelnými.

Takovýto přístup není v mechanice kontinua ojedinelý, i kovové materiály jako je např. ocel, které všeobecně považujeme za homogenní a sourodé, vykazují na úrovni mikrostruktury heterogenní napjatost a deformaci. Zahrnout tuto mikro-úroveň do analýzy napjatosti a deformace konstrukcí by bylo velmi obtížné a proto je nutné a žádoucí stanovit ekvivalentní materiálové charakteristiky heterogenního materiálu, tj. reprezentovat jej homogenním „efektivním“ materiálem na základě jeho mechanické odezvy.

Pro stanovení efektivních modulů je třeba zvolit reprezentativní objem, kterým je jistá část kompozitního materiálu, jejíž rozměr je mnohem větší, než je charakteristický rozměr mikrostruktury kompozitu, avšak zároveň mnohem menší, než je předpokládaný rozměr analyzované konstrukce či součásti. Předpokládáme, že je-li takový reprezentativní objem podroben rovnoměrné napjatosti, vzniká v něm rovnoměrná deformace a naopak.

Efektivní moduly textilního kompozitu závisí na geometrii výztuže – na periodě provázání nití tkaniny výztuže, na tvaru jejich průřezu, na jejich zvlnění, rozteči ap., na objemovém podílu výztuže a matrice a na elastických vlastnostech materiálu výztuže a matrice. Prostřednictvím efektivních modulů lze vzájemně porovnat mechanické chování kompozitů podobné vnitřní struktury a tyto moduly jsou zároveň vodítkem při jejím navrhování.

Hlavním problémem mikromechaniky je právě určení závislosti mezi efektivními moduly a strukturou kompozitu. Je zřejmé, že vzhledem ke komplikovanosti problému, je platnost teoretických modelů a závěrů, které z nich plynou, dosti limitována.

3.2 Efektivní moduly.

Předpokládáme, že kompozit se chová lineárně elasticky a jeho odezva se řídí zobecněným Hookeovým zákonem. V důsledku zatížení v něm vzniká komplikované rozložení napětí a deformace. Obecně platné vztahy mezi odezvou kompozitu a mezi efektivními pružnostními moduly bychom mohli získat zprůměrováním napětí a deformací v reprezentativním objemu kompozitu. Efektivní tuhosti definujeme [1,2,20] jako součinitele ve vztahu mezi objemovými průměry složek napětí a deformací, které vznikají v RVE za daných okrajových podmínek:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad (3.1)$$

kde $\langle \sigma_{ij} \rangle$ a $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ jsou objemové průměry napětí a deformací:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V_r} \int_{V_r} \sigma_{ij} dV, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V_r} \int_{V_r} \varepsilon_{ij} dV \quad (3.2)$$

a V_r je reprezentativní objemový element kompozitního materiálu, neboli element v němž objemové průměry složek napětí a deformací předpokládáme stejné jako odpovídající veličiny v celém objemu kompozitu.

Okrajové podmínky mohou být dvojího typu [36]:

1. je předepsán vektor vnějšího zatížení na jednotku plochy $\tilde{p}_i$ na části povrchu Γ_p

$$\tilde{p}_i = \sigma_{ji} n_j; \quad (3.3)$$

2. je předepsán vektor posuvu $\tilde{u}_i$ na části povrchu Γ_u

$$\tilde{u}_i = u_i, \quad (3.4)$$

kde

$$\Gamma_u \cup \Gamma_p = \Gamma, \quad \Gamma_u \cap \Gamma_p = 0. \quad (3.5)$$

Vnější zatížení RVE většinou předpokládáme buď ve tvaru $\tilde{p}_i = \sigma_y^0 n_j$, nebo $\tilde{u}_i = \varepsilon_y^0 x_j$, kde σ_y^0 a ε_y^0 jsou konstanty a jsou tedy zároveň objemovými průměry napětí či deformací v ekvivalentním homogenním tělese. V nehomogenním RVE je objemovým průměrem deformace ε_y^0 při okrajové podmínce (3.4) a objemovým průměrem napětí při okrajové podmínce (3.3) je σ_y^0 , neboť pokud u_i a p_i jsou spojitě, pak i pro nehomogenní těleso při daných okrajových podmínkách platí

$$\text{buď} \quad \int_V \sigma_y dV = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (p_i x_j + p_j x_i) d\Gamma \quad \text{anebo} \quad \int_V \varepsilon_y dV = \int_{\Gamma} (u_i n_j + u_j n_i) d\Gamma.$$

Vynásobíme-li vztah (3.1) tenzorem střední deformace, dostáváme:

$$\langle \sigma_y \rangle \langle \varepsilon_y \rangle = C_{ijkl} \langle \varepsilon_y \rangle \langle \varepsilon_{kl} \rangle. \quad (3.6)$$

Po užití Gaussovy-Ostrogradského věty a podmínek rovnováhy a po úpravách dostaneme :

$$\frac{1}{2V_r} \int_V \sigma_y \varepsilon_y dV = \frac{1}{2} C_{ijkl} \langle \varepsilon_y \rangle \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (3.7)$$

Vztah (3.7) lze interpretovat [2] jako ekvivalenci energie napjatosti v RVE kompozitu a ve stejném objemovém elementu z efektivního homogenního materiálu stejně zatíženém.

Objemové průměry složek napětí a deformací i efektivní moduly vypočtené ze vztahů (3.1) a (3.7) závisí na okrajových podmínkách, které vyjadřují specifické vazebné podmínky mezi zkoumaným RVE a ostatními totožnými RVE, které ho obklopují. Předpokládáme-li, že RVE je částí nekonečného tělesa a jeho chování reprezentuje makroskopickou odezvu vnitřních vrstev kompozitu a vyjdeme-li z Voigtova "iso-strain" či z Reussova "iso-stress" modelu vícefázového materiálu [3], můžeme předpokládat buď konstantní posuv nebo konstantní tahové zatížení na hranici RVE kompozitu. V homogenním efektivním materiálu těmto případům odpovídá buď konstantní deformace, nebo konstantní napětí v celém objemu. Experimenty ukazují, že takto stanovené pružnostní konstanty jsou horní a dolní mezi hodnot efektivních modulů. Aby odpovídaly efektivní moduly skutečnosti, je nutné zvolit adekvátní

RVE, správně popsat komplikovanou geometrii výztuže, určit elastické vlastnosti výztuže a matrice a s dostatečnou přesností stanovit napjatost a deformaci RVE.

3.3 Reprezentativní objemový element

Při výpočtu efektivních modulů předpokládáme, že existuje objemový element kompozitní struktury, jehož mechanická odezva reprezentuje odezvu celku. Výběr RVE závisí na typu výztuže – např. u jednosměrných kompozitů obsahuje matici a paralelní svazek vláken jejichž rozložení v průřezu RVE odpovídá typu packingu, u kompozitů výztužených kulovými částicemi je RVE tvaru krychle s daným rozložením kulových částic ap.

Rozměry RVE by měly být mnohem větší, než charakteristický rozměr výztuže (kupř. rozeč vláken u jednosměrných kompozitů). Oprávněnost volby RVE u kompozitů vyztužených textilií není jednoznačná vzhledem k tomu, že rozměry RVE, spojeného většinou se základní buňkou textilie výztuže, mohou být dosti velké - v některých případech i několik centimetrů. Je-li však rozměr RVE velmi malý ve srovnání s rozměry součásti nebo konstrukce, při jejichž pružnostní analýze má být použito efektivních modulů, pak se jeví zprůměrování elastických vlastností v RVE jako rozumné.

3.4 Pružnostní analýza kompozitů vyztužených textiliemi

Kompozity vyztužené textiliemi představují zvláštní skupinu materiálů, které vyžadují netradiční přístupy v pružnostní analýze konstrukcí odlišné od metod užívaných pro vrstvené jednosměrné lamináty, u kterých se napříč tloušťkou mechanické vlastnosti mění skokem od jedné laminy k druhé. Vlastnosti textilních kompozitních materiálu se mění ve všech třech směrech a to v některých místech spojitě a jinde skokem. Tyto materiály se jeví spíše jako nehomogenní soubor anizotropních elementů rozdílných mechanických vlastností.

Pokud lze popsat mechanické vlastnosti efektivními moduly, pak lze aplikovat 3-D analýzu anizotropního homogenního tělesa. Pokud nejsou efektivní moduly přijatelné pro daný typ materiálu a konstrukce, pak je třeba považovat součást z kompozitu s textilní výztuží za nehomogenní těleso skládající se z anizotropních elementů rozdílných vlastností. V takovém případě je pružnostní analýza velmi obtížná a je nutné zavést některá zjednodušení a vytvořit individuální výpočtový model vhodný pro daný typ textilního kompozitu a danou aplikaci.

Jedním z možných přístupů je vytvoření tzv. cihlového modelu, nebo nahrazení diskrétního prostorového rozložení materiálových vlastností hladkými funkcemi souřadnic. Ob

přístupy budou podrobně popsány v kap. 4. K výpočtu napětí a deformací v těchto modelech lze využít variační principy.

3.5 Anizotropní pružnost

3.5.1 Vztahy mezi napětím a deformací

Zobecněný Hookeův zákon můžeme vyjádřit v tenzorovém zápisu:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (3.8)$$

kde σ_{ij} a ε_{ij} jsou tenzory napětí a deformací druhého řádu a C_{ijkl} je tenzor čtvrtého řádu, jehož složky jsou konstanty tuhosti materiálu, 1, 2 a 3 jsou směry os souřadného systému.

Všechny tyto tenzory jsou symetrické, C_{ijkl} má 21 nezávislých složek. Užijeme-li zkráceného zápisu: $\sigma_{ii} = \sigma_i, \varepsilon_{ii} = \varepsilon_i, \tau_{23} = \sigma_{23}, \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}, \tau_{13} = \sigma_{13}, \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}, \tau_{12} = \sigma_{12}, \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$, pak můžeme vztah mezi napětími a deformacemi zapsat v maticovém tvaru:

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\},$$

kde matice $[C]$ je symetrická matice 9x9. Můžeme nyní definovat matici poddajnosti

$$[S] = [C]^{-1}$$

a odpovídající inverzní vztah

$$\{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\}.$$

3.5.2. Transformace souřadnic

Jsou-li $\sigma^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}\}$ a $\varepsilon^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}\}$ vektory napětí a deformace, jejich transformované složky dostaneme ze vztahů $\sigma' = G\sigma$ a $\varepsilon' = Q\varepsilon$, kde G a Q jsou transformační matice:

$$G = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2m_1n_1 & 2n_1l_1 & 2l_1m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2m_2n_2 & 2n_2l_2 & 2l_2m_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2m_3n_3 & 2n_3l_3 & 2l_3m_3 \\ l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & m_2n_3 + n_2m_3 & l_2n_3 + n_2l_3 & l_2m_3 + m_2l_3 \\ l_1l_3 & m_1m_3 & n_1n_3 & m_1n_3 + n_1m_3 & l_1n_3 + n_1l_3 & l_1m_3 + m_1l_3 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & n_1n_2 & m_1n_2 + n_1m_2 & l_1n_2 + n_1l_2 & l_1m_2 + m_1l_2 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & m_1 n_1 & n_1 l_1 & l_1 m_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 & l_2 m_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & m_3 n_3 & n_3 l_3 & l_3 m_3 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & m_2 n_3 + n_2 m_3 & l_2 n_3 + n_2 l_3 & l_2 m_3 + m_2 l_3 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & m_1 n_3 + n_1 m_3 & l_1 n_3 + n_1 l_3 & l_1 m_3 + m_1 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & m_1 n_2 + n_1 m_2 & l_1 n_2 + n_1 l_2 & l_1 m_2 + m_1 l_2 \end{bmatrix},$$

jejichž prvky jsou kombinací prvků transformační matice M pro vektory:

$$M = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix}.$$

Transformační vztah pro tenzor tuhosti do nového souřadného systému bude

$$C' = GCQ^{-1}.$$

3.5.3 Jednotlivé případy elastické symetrie

Předpokládáme-li homogenní rozložení pružnostních vlastností pak jakákoliv translace nemění pružnostní charakteristiky.

a) Jedna rovina symetrie – monoklinický materiál.

Reflexí kupř. vzhledem k rovině (1,2) dostáváme matici složek transformovaného tenzoru tuhosti:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & -c_{14} & -c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & -c_{24} & -c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & -c_{34} & -c_{35} & c_{36} \\ -c_{41} & -c_{42} & -c_{43} & c_{44} & c_{45} & -c_{46} \\ -c_{51} & -c_{52} & -c_{53} & c_{54} & c_{55} & -c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & -c_{64} & -c_{65} & c_{66} \end{bmatrix}$$

Vidíme, že všechny složky se záporným znaménkem musí být nulové a monoklinický materiál má 13 nezávislých elastických konstant.

b) Dvě vzájemně ortogonální roviny symetrie – ortotropní materiál.

Aby se nezměnily vlastnosti materiálu při reflexi vzhledem ke dvěma navzájem kolmým rovinám, může mít materiál pouze 9 nezávislých elastických konstant – třetí rovina kolmá na první dvě je tedy rovněž rovinou symetrie a materiál je ortotropní.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}.$$

Transformací rotace kolem osy 3 dostáváme materiál s monoklinickou symetrií vzhledem k rovině (1,2) atp.

c) Materiál s jednou rovinou izotropie – zvláštní případ ortotropie.

Materiál má v jedné rovině stejné vlastnosti ve všech směrech, tj. při transformaci souřadnic rotací o libovolný úhel kolem osy kolmé k rovině izotropie se jeho elastické konstanty nemění. Tenzor tuhosti má opět 9 složek, ale nejsou navzájem nezávislé, materiál je rovněž nazýván příčně, či transversálně izotropní. Je-li rovinou izotropie rovina (1,2), pak tenzor tuhosti je

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{bmatrix}$$

d) Materiál se dvěma navzájem kolnými rovinami izotropie – izotropní materiál.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{bmatrix}$$

3.5.4 Inženýrské konstanty

Pro přehlednost uvedme přehled běžně užívaných pružnostních konstant a jejich vztah ke složkám jednotlivých tenzorů pružnosti.

a) Izotropní materiál.

Nejčastěji užívanými konstantami jsou Youngův modul E a Poissonův poměr ν , dále pak modul pružnosti ve smyku G , objemový modul κ a Lamého konstanty λ a μ :

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = 1/E, \quad S_{12} = S_{13} = S_{23} = -\nu/E, \quad S_{44} = S_{55} = S_{66} = 1/G.$$

b) Transversálně izotropní materiál.

Za dvě první nezávislé inženýrské konstanty vyberme Youngův modul E_{TT} , Poissonův poměr ν_{TT} , které spolu s odvozeným smykovým modulem $G_T = E_{TT}/2(1+\nu_{TT})$ charakterizují pružné vlastnosti v rovině izotropie. Třetí nezávislou konstantou je Youngův modul E_L ve směru kolmém na rovinu izotropie, čtvrtou konstantou je smykový modul G_L v rovinách kolmých na rovinu izotropie a pátou nezávislou konstantou může být Poissonův poměr ν_{LT} , který charakterizuje příčnou deformaci v rovině izotropie při působení tahového napětí ve směru kolmém na rovinu izotropie. Pro Poissonův poměr ν_{LT} pak platí $\nu_{LT}/E_L = \nu_{TL}/E_T$.

$$S_{11} = S_{22} = 1/E_T, \quad S_{12} = -\nu_{TT}/E_T, \quad S_{13} = S_{23} = -\nu_{LT}/E_L, \\ S_{33} = 1/E_L, \quad S_{44} = S_{55} = 1/G_L, \quad S_{66} = 2(1 + \nu_{TT})/E_T.$$

c) Ortotropní materiál.

Za nezávislé elastické inženýrské konstanty označme tři Youngovy moduly E_1, E_2, E_3 , dále tři moduly ve smyku G_4, G_5, G_6 a tři Poissonovy poměry: ν_{12} charakterizuje příčnou deformaci ve směru 2 v důsledku aplikovaného napětí ve směru 1 atp. Přehledně zapišme:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_y - \frac{\nu_{zx}}{E_z} \sigma_z, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{yz}} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_x + \frac{1}{E_y} \sigma_y - \frac{\nu_{zy}}{E_z} \sigma_z, & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G_{xz}} \tau_{xz}, & \frac{\nu_{ij}}{E_i} &= \frac{\nu_{ji}}{E_j}, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{xz}}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_y + \frac{1}{E_z} \sigma_z, & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} \tau_{xy}, \end{aligned}$$

Dále platí vztahy mezi složkami tenzoru poddajnosti a inženýrskými konstantami:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_x} & S_{12} &= -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & S_{13} &= -\frac{\nu_{zx}}{E_z} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_y} & S_{23} &= -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & S_{33} &= \frac{1}{E_z} \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{yz}} & S_{55} &= \frac{1}{G_{xz}} & S_{66} &= \frac{1}{G_{xy}} \end{aligned}$$

d) Materiál s jednou rovinou elastické symetrie

Nyní přidáme další čtyři nezávislé inženýrské konstanty. Předpokládejme, že rovinou symetrie je rovina (x,y), neboli (1,2), pak má tenzor poddajnosti navíc členy S_{16}, S_{26}, S_{36} a S_{45} .

První tři vážou normální deformace $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ se smykovým napětím τ_{xy} , čtvrtá váže smykovou deformaci γ_{xz} se smykovým napětím τ_{yz} .

Konstanty, které vážou normálová napětí a smykové deformace jsou nazývány koeficienty vzájemného vlivu prvního druhu a konstanty, které vážou smyková napětí a normálové deformace jsou nazývány koeficienty vzájemného vlivu druhého druhu. Konstanty, které vážou smykové deformace a smyková napětí jsou tzv. Čencovovy koeficienty [38].

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\eta_{61}}{G_6} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\eta_{62}}{G_6} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\eta_{63}}{G_6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_4} & \frac{\mu_{54}}{G_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_{45}}{G_4} & \frac{1}{G_5} & 0 \\ \frac{\eta_{16}}{E_1} & \frac{\eta_{26}}{E_2} & \frac{\eta_{36}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{1}{G_6} \end{bmatrix} \quad \frac{\eta_{ij}}{G_i} = \frac{\eta_{ji}}{E_j} \text{ a } \frac{\mu_{ij}}{G_i} = \frac{\mu_{ji}}{G_j}.$$

Monoklinický materiál má tu vlastnost, že všechny tři normální deformace jsou vázány se smykovým napětím v rovině symetrie a naopak – smyková deformace v rovině symetrie závisí na všech třech normálních napětích. Dále pak obě příčné smykové deformace jsou vázány s oběma příčnými smykovými napětími. Význam jednotlivých konstant je zřejmý z uvedené matice poddajnosti.

4. Aplikace variačních principů v mechanice kompozitů

Tyto principy jsou vysvětleny ve vynikající Washizuově monografii [34] spolu s celou řadou příkladů jejich užití. Zde bude uveden jen jejich stručný přehled. Soustředíme se zejména na neklasické variační principy Hu-Washizu a Hellinger-Reissnerův, které jsou méně běžné a kterých budeme dále používat.

Základem variačních principů je princip virtuálních prací, který lze formulovat následovně:

*Nechť mechanický systém s danými geometrickými vazbami je v rovnováze za působení soustavy sil. Pak součet všech virtuálních prací δ^*W všech vnějších i vnitřních sil na libovolných nekonečně malých virtuálních posuvech vyhovujících daným geometrickým vazbám je roven nule:*

$$\delta^*W = 0. \quad (4.1)$$

Jestliže všechny vnější i vnitřní síly jsou konzervativní, tj. mají potenciál U , který je funkcí souřadnic, pak platí:

$$\delta^*W = -\delta U \quad (4.2)$$

a princip virtuálních prací vede k principu stacionární hodnoty potenciální energie U :

Ze všech přípustných konfigurací soustavy je rovnovážný stav charakterizován stacionární hodnotou potenciální energie U :

$$\delta U = 0. \quad (4.3)$$

Tato formulace může být rozšířena i na dynamické problémy, kdy působící síly i geometrické vazby závisí na čase, použijeme-li d'Alembertův princip dynamické rovnováhy a zahrneme-li i virtuální práci setrvačných sil:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta^*W dt = 0, \quad (4.4)$$

kde T je kinetická energie systému, t_1 a t_2 je počáteční a konečný časový okamžik, ve kterých poloha systému odpovídá poloze při skutečném pohybu - virtuální posuvy jsou v těchto okamžicích rovny nule. Jestliže všechny vnější i vnitřní síly mají potenciál U , pro který platí vztah (4.3), dostáváme Hamiltonův princip, který říká:

Mezi všemi možnými virtuálními trajektoriemi systému je skutečná trajektorie charakterizována stacionární hodnotou funkcionálu:

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt .$$

Zavedeme-li Lagrangeův kinetický potenciál [37]

$$L = T - U,$$

pak Hamiltonův princip lze zapsat:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (4.5)$$

Variační metody mají široké použití v pružnostní analýze za předpokladu malých deformací. Existuje-li funkce energie napjatosti a při variaci posuvů zůstávají vnější síly nezměněné, pak princip virtuální práce vede k principu minima deformační energie. Tento variační princip spolu se zavedením Lagrangeových multiplikátorů vede k celé řadě variačních principů včetně principu Hu-Washizuova, Hellinger-Reissnerova, principu minima doplňkové energie a dalších.

Definujme funkci deformační energie $A(\varepsilon_{ij})$ tak, že platí

$$\delta A = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}, \quad \text{kde} \quad 2A = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}. \quad (4.6)$$

Dosadíme-li do (4.6) z Cauchyho vztahů pro deformace

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}), \quad (4.7)$$

dostaneme funkci $A(u)$ a princip virtuální práce můžeme zapsat ve tvaru :

$$\delta \int_{\Omega} A(u_i) d\Omega - \int_{\Omega} X_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma_p} \tilde{p}_i \delta u_i d\Gamma = 0, \quad (4.8)$$

kde Ω je oblast, kterou zaujímá těleso, $\tilde{p}_i$ je vektor zatížení na části povrchu Γ_p a X_i jsou hmotové síly.

Definujeme funkci doplňkové deformační energie $B(\sigma_y)$ tak, že platí

$$\delta B = \varepsilon_y \delta \sigma_y, \quad \text{kde} \quad 2B = S_{ykl} \sigma_y \sigma_{kl}, \quad (4.9)$$

potom princip doplňkové virtuální práce bude ve tvaru:

$$\delta \int_{\Omega} B(\sigma_y) d\Omega - \int_{\Gamma_u} \tilde{u}_i \delta p_i d\Gamma = 0, \quad (4.10)$$

kde $\tilde{u}_i$ je vektor posuvu předepsaný na části povrchu Γ_u a $p_i = \sigma_{ji} n_j$.

Předpokládáme-li, že hmotové síly X_i , povrchová zatížení $\tilde{p}_i$ a posuvy $\tilde{u}_i$ jsou předepsány a při variacích se nemění, pak lze vyjádřit celkovou potenciální energii a celkovou doplňkovou potenciální energii jako:

$$\Pi = \int_{\Omega} [A(u_i) - X_i u_i] d\Omega - \int_{\Gamma_p} \tilde{p}_i u_i d\Gamma \quad \text{a} \quad \Pi_c = \int_{\Omega} B(\sigma_y) d\Omega - \int_{\Gamma_u} \tilde{u}_i p_i d\Gamma \quad (4.11)$$

a princip minima celkové potenciální energie a celkové doplňkové energie vyjádříme vztahy:

$$\delta \Pi = 0 \quad \text{a} \quad \delta \Pi_c = 0 \quad (4.12)$$

Platí-li lineární vztah mezi napětím a deformací, pak platí $A=B$, ve všech případech však platí

$$A + B = \sigma_y \varepsilon_y. \quad (4.13)$$

Hu-Washizův variační funkcionál můžeme vyjádřit ve tvaru :

$$H = \int_{\Omega} \left\{ A(\varepsilon_{ij}) - X_i u_i - \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \sigma_{ij} \right\} d\Omega - \int_{\Gamma_p} \tilde{p}_i u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \tilde{u}_i) p_i d\Gamma, \quad (4.14)$$

kde ε_{ij} , u_i , σ_{ij} a p_i jsou vzájemně nezávislé veličiny podrobené variacím, $\tilde{p}_i$ je vektor zatížení na části povrchu Γ_p a $\tilde{u}_i$ je vektor posuvu předepsaný na části povrchu Γ_u , $A(\varepsilon_{ij})$ je energie napjatosti a X_i jsou hmotové síly. Variací (4.14) vzhledem k těmto osmnácti nezávislým veličinám dostáváme:

$$\begin{aligned} \delta H = \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \delta \varepsilon_{ij} - \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \delta \sigma_{ij} - \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i \right) \delta u_i \right\} d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_p} (\sigma_{ji} n_j - \tilde{p}_i) \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \tilde{u}_i) \delta p_i d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\sigma_{ji} n_j - p_i) \delta u_i d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Stacionární podmínky, které vyplývají z (4.15) jsou: vztahy mezi napětími a deformacemi, Cauchyho vztahy, podmínky rovnováhy a okrajové podmínky na Γ_u a Γ_p . Fyzikální význam Lagrangeových multiplikátorů p_i vyplývá z posledního výrazu v (4.15): jsou to povrchové síly na té části okraje, na které jsou předepsány posuvy.

Funkcionál Hellinger-Reissnerův lze odvodit z obecného funkcionálu (4.14). Veličiny ε_{ij} již nebudeme považovat za nezávislé a jejich variace $\delta \varepsilon_{ij}$ budou nulové, dále budeme předpokládat platnost Cauchyho vztahů (4.7) a lineární vztah mezi napětím a deformací :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (4.16)$$

V takovém případě lze složky deformací zcela vyloučit z podintegrálního výrazu (4.14) a získat funkcionál:

$$\Pi_R = \int_{\Omega} \left\{ \sigma_y \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - X_i u_i - B(\sigma_y) \right\} d\Omega - \int_{\Gamma_p} \tilde{p}_i u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \tilde{u}_i) p_i d\Gamma, \quad (4.17)$$

kde u_i, σ_y a p_i jsou vzájemně nezávislé veličiny podrobené variacím a funkce B plyne z (4.9).

Aplikujeme-li Hellinger-Reissnerův variační teorém spolu s Hamiltonovým principem, získáme funkcionál:

$$\Phi = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi_R) dt \quad (4.18)$$

a pohybové rovnice rovnice systému získáme z podmínky stacionární hodnoty tohoto funkcionálu:

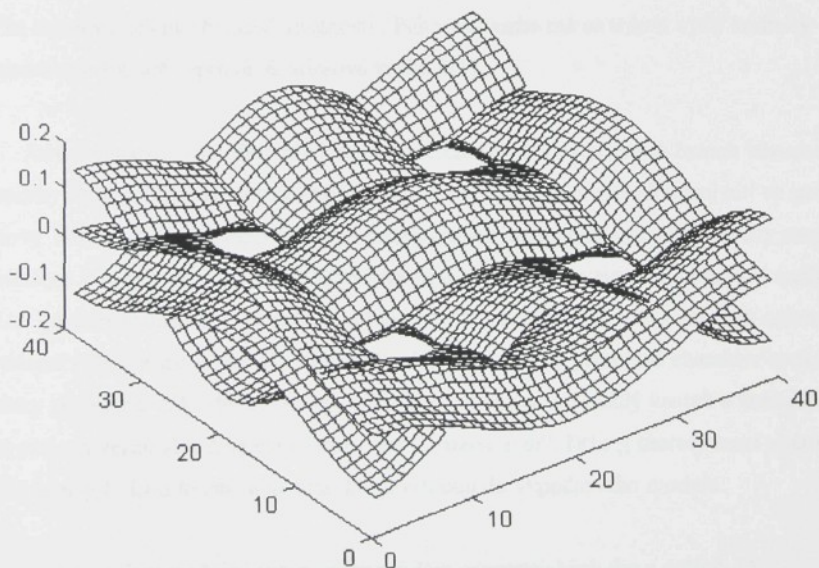
$$\delta \Phi = 0. \quad (4.19)$$

5. Model reprezentativního objemového elementu

Navrhovaný model výpočtu efektivních modulů je určen pro kompozity typu uhlík-uhlík zkoumané na Katedře textilních materiálů FT TU v rámci grantu GAČR No. 106/99/0096.

V současnosti jsou prováděna podrobná měření mikrostruktury těchto kompozitů [26-30] a v závislosti na technologii výroby kompozitu jsou kvantifikovány základní parametry geometrie výztuže, které budou tvořit vstupní data pro výpočet efektivních modulů materiálu.

Je zjišťován průběh vazné vlny, perioda zvlnění a průběh sklonu nitě, tvar průřezu nitě a jeho rozměry a podíl matrice v niti. Zároveň jsou sledovány vnitřní vady kompozitu - pórovitost matrice, dutiny bez matrice v nitích i v prostoru mezi nitěmi, přetrhy nití, trhliny ap. Ortogonální tkaninu výztuže tvoří nitě Torayca T800 typu roving, které jsou z uhlíkových monofilů. Velikost základní buňky plátnové výztuže nepřesahuje několik milimetrů. Uhlíková matrice je vytvořena impregnací výztuže fenolovou pryskyřicí, která je po zavadnutí karbonizována při 1000°C. Základní buňka plátnové vazby výztuže je na Obr.1.



Obr.1 Základní buňka plátnové výztuže

5.1 Geometrie základní buňky

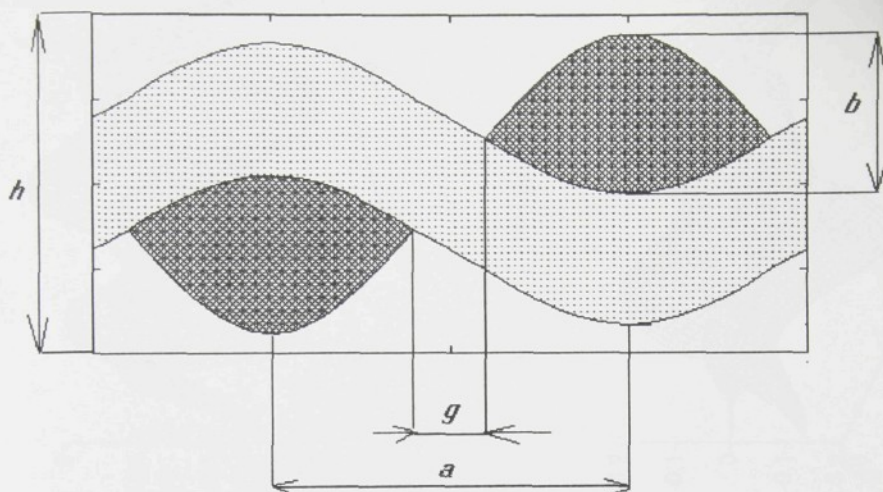
Výztuž daného kompozitu tvoří ortogonální tkanina plátnové vazby, která se skládá ze dvou systémů rovnoběžných navzájem překřížených nití. Její strukturu tvoří periodicky se opakující základní vzor – elementární buňka, jejíž geometrie je charakteristická pro jednotlivý typ tkaniny. Z obrázku základní buňky je patrné zvlnění jednotlivých nití při průchodu z rubu na líc tkaniny a naopak. Toto zvlnění je největší právě u tkaniny plátnové vazby, jak tomu nasvědčuje její nejvyšší koeficient provázanosti $k=1$ (poměr počtu zkřížených nití ku celkovému počtu nití v základní buňce tkaniny [27]). Tento dva parametr popisuje zároveň periodicitu struktury tkaniny.

Zásadní význam pro určování mechanických vlastností má rozložení úhlu sklonu nití a úhlu provázání, dva parametry, které jsou v současné době sledovány při kvantifikaci mikrostruktury [26-30]. Úhel sklonu ψ osy nitě v libovolném bodě je úhel, který svírá tečna k ose nitě s rovinou textilní vrstvy. Úhel provázání je úhel, pod kterým prochází nit' z rubu textilní vrstvy na líc, nebo naopak. Je zpravidla roven maximálnímu úhlu sklonu [42]

S těmito dvěma parametry úzce souvisí i tzv. koeficient zvlnění (crimp) tj. poměr délky zvlněné nitě k její volné délce, ke kterému se zároveň úzce vztahuje objemový podíl nití, tloušťka tkaniny a její mechanické vlastnosti. Plátnová vazba má až třikrát vyšší hodnoty koeficientu zvlnění než keprová, či atlasová vazba [21].

Jsou k dispozici výsledky předchozích měření [29,30] na příčných řezech laboratorními vzorky osmivrstvých kompozitů uhlík-uhlík. Řezy byly vedeny střednicemi nití ve směru osnovy i útku a byly vyleštěny běžnými metalografickými technikami. Dílčí obrazy struktury zvětšené 70x byly po digitalizaci RGB kamerou přeneseny do systému obrazové analýzy LUCIA G, kde byly odečteny souřadnice střednice nitě s krokem 0,2 mm a zároveň určena i odpovídající výška průřezu nitě. Z těchto měření byly stanoveny průměrné charakteristické parametry geometrie základní buňky výztuže plátnové vazby pro každý vzorek a laminátovou vrstvu: perioda vazné vlny l , výška průřezu nitě b , rozteč a nití, šířka g mezery mezi nitěmi a tloušťka laminy h . Jsou to základní data, která vstupují do výpočtového modelu.

Model však umožňuje i vstup podrobnějších geometrických dat z dalších již probíhajících měření tvaru a rozměru průřezu a podílu matrice uvnitř nití.



Obr.2 Parametry základní buňky

V prvním přiblížení byla geometrie základní buňky výztuže aproximována tzv. sinusovým modelem [5], který umožňuje rekonstruovat trojrozměrnou geometrii základní buňky z parametrů naměřených ve střední rovině nití na skutečných vzorcích kompozitu - z periody vazné vlny l , výšky průřezu nitě b , rozteče a nití, šířky g mezery mezi nitěmi a tloušťky laminy h viz Obr.2.

Rozměry buňky v našem případě jsou:

Perioda $l = 3,1 \text{ mm}$

Rozteč $a = l/2 = 1,55 \text{ mm}$

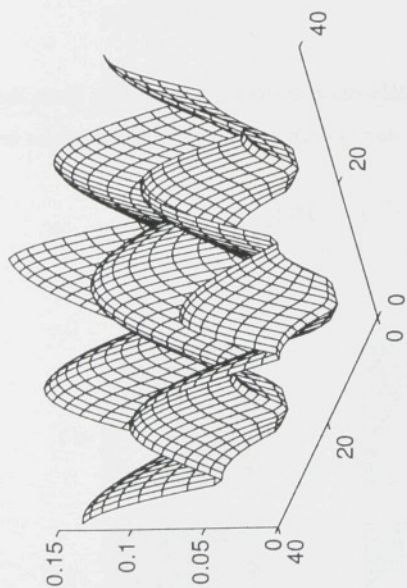
Mezera $g = 0,2 \text{ mm}$

Výška $b = 0,2 \text{ mm}$

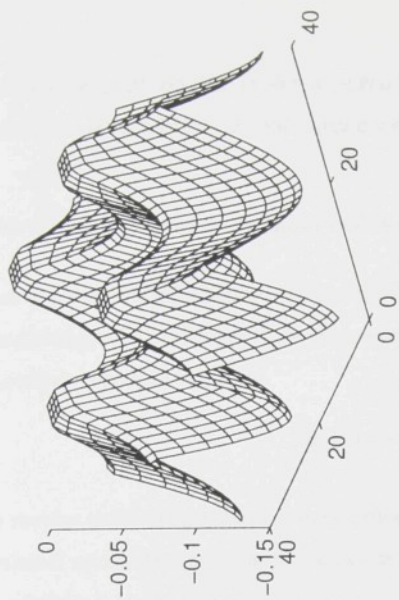
Tloušťka vrstvy $h = 0,4 \text{ mm}$

Pomocí sinusového modelu byly vypočteny v pravidelné síti souřadnice bodů povrchu nití osnovy a útku tj. souřadnice ploch, které oddělují výztuž a matici a ploch, které oddělují zkřížené nitě osnovy a útku výztuže viz Obr.3. Další zpracování těchto geometrických dat a výpočet rozložení tuhostí v RVE jsou již na sinusovém modelu zcela nezávislé. To umožňuje v budoucnu zpracování geometrických dat získaných podrobnějším měřením na skutečných

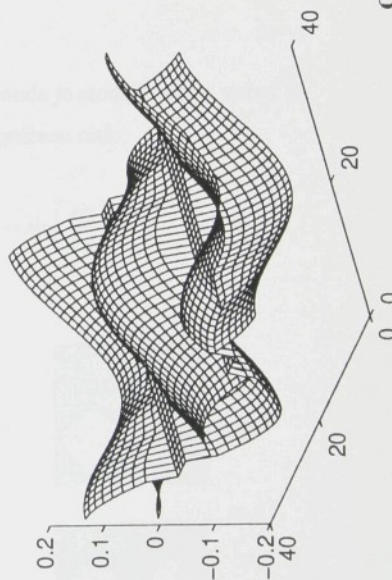
Hranice horní matrice



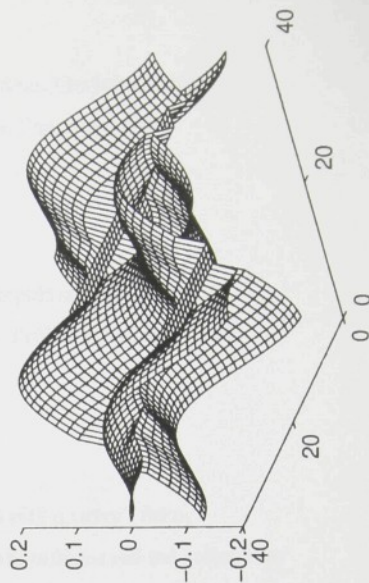
Hranice dolní matrice



Nit osnovy



Nit utluku



vzorcích, nebo popř. použití jiného spojitého geometrického modelu, kterých existuje v literatuře celá řada [9,31-32] počínající dobře známým modelem Piercovým [43].

Sinusový model geometrie základní buňky

Sinusový model základní buňky plátňové vazby [5] je tvořen kompaktními funkcemi popisujícími plochy oddělující od sebe matici a jednotlivé nitě. Průběh střednice vazné vlny osnovy je popsán vztahem:

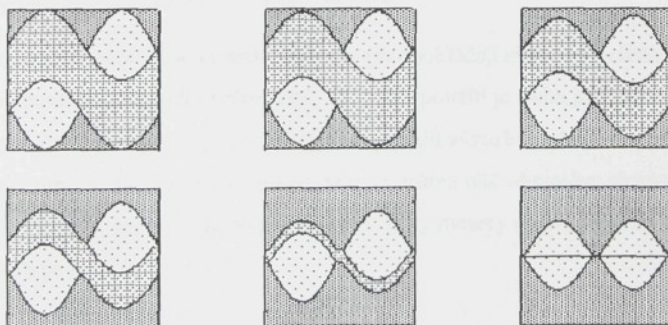
$$p_c(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

Tato rovnice může být použita k popisu průběhu střednice každé nitě osnovy i útku, změníme-li znaménko a *x-ovou* souřadnici za *y-ovou*. Vnitřní profil průřezu nití má stejný tvar jako střednice a je dán následující funkcí :

$$p_l(x) = -\sin\left(\frac{\pi|x|}{a}\right).$$

Vnější profil průřezu nitě je rovněž sinusoidální, ale jeho amplituda je modifikována, neboť je nutné zahrnout vliv šířky mezery mezi nitěmi *g* a nesymetrii průřezu nitě:

$$p_E(x) = (1 + \beta) \sin\left(\frac{\pi(|x| - g/2)}{a - g}\right) - \beta, \quad \text{kde} \quad \beta = \sin\left(\frac{\pi g}{2a}\right).$$



Obr. 4 Příčné řezy základní buňkou plátňové vazby.

Nesymetrie průřezů nití je patrná z Obr.4, kde jsou uvedeny příčné řezy základní buňkou. Povrch nití osnovy a útku v oblasti $-a \leq x \leq a$ a $-a \leq y \leq a$ tvoří lineární kombinace těchto tří funkcí s koeficienty ve tvaru následujících nespojitých interpolačních funkcí :

$$R(x) = \begin{cases} \frac{x}{g} + \frac{1}{2}, & |x| < \frac{g}{2} \\ H(x), & \frac{g}{2} \leq |x| \leq a - \frac{g}{2} \\ \frac{(\text{sign}(x)a - x) + \frac{1}{2}}{g}, & a - \frac{g}{2} \leq |x| \leq a \end{cases} \quad \text{kde} \quad H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \end{cases}$$

$$F_H(x) = H\left(|x| - \frac{g}{2}\right) - H\left(|x| + \frac{g}{2} - a\right), \quad F_R(\eta, x, y) = R(\eta \text{sign}(y)x),$$

kde parametr $\eta = \begin{cases} -1 \\ +1 \end{cases}$ pro dolní a horní povrch nitě. Základní funkce povrchu je ve tvaru:

$$s_n(\eta, x, y) = \frac{b}{2} F_H(y) [\text{sign}(y)p_C(x) + \eta F_R(\eta, x, y)p_I(y) + \eta F_R(-\eta, x, y)p_E(y)]$$

Povrch nití osnovy a útku lze vyjádřit pomocí této základní funkce:

$$\begin{aligned} s_u(\eta, x, y) &= s_n(\eta, x, y) && - \text{pro} \quad \text{útek} \\ s_o(\eta, x, y) &= -s_n(-\eta, x, y) && - \text{pro} \quad \text{osnovu} \end{aligned}$$

Spojité modely geometrie výztuže většinou předpokládají sinusový průběh vazné vlny a kruhový, polygonální či eliptický průřez nití. Při jejich použití je třeba jistě opatrnosti, neboť jejich společnou nectností bývá nižší objemový podíl výztuže, než je ve skutečné kompozitní struktuře. V daném sinusovém modelu je průřez nitě ohraničen sinusovkami a objemový podíl výztuže, který závisí na poměru g/a šířky mezery mezi nitěmi ku jejich rozteči, se pohybuje mezi 0.55 a 0.65.

5.2 Stanovení reprezentativního objemového elementu

Má-li být kompozitní materiál tvořený různými složkami nahrazen ekvivalentním homogenním materiálem, je třeba stanovit efektivní tuhost kompozitu reprezentovanou tenzorem tuhosti ve vztahu (3.1). Tento tenzor tuhosti váže průměrná napětí a průměrné deformace (3.2) v elementárním objemu materiálu. Je však třeba si uvědomit, že ve vícesložkovém materiálu nejde o napjatost a deformaci v nekonečně malém elementu, jak je běžně předpokládáno v teorii pružnosti, ale že je nutné zvolit tzv. reprezentativní objemový element (RVE) konečných rozměrů, v jehož rámci bude zprůměrována napjatost a deformace.

Vzhledem k periodicitě struktury výztuže byl jako reprezentativní objemový element zvolen kvádr, který obsahuje základní buňku plátnové vazby na Obr.1 spolu s příslušným objemem matrice. Pro plátnovou vazbu rozměry RVE zpravidla nepřesahují několik málo milimetrů a jeho tloušťka se pohybuje v rozmezí několika desetin milimetru (v následujícím výpočtu jsou rozměry RVE $3,1 \times 3,1 \times 0,4$ mm). Buňka plátnové vazby má v ideálním případě dvě roviny symetrie a pro výpočet napjatosti by postačilo modelovat pouze její jednu čtvrtinu. Počítáme však s tím, že v budoucnu budou do výpočtu vstupovat přímo údaje naměřené na skutečné mikrostruktuře, u níž lze přesnou symetrii jen těžko předpokládat.

Předpokládáme, že matrice vyplňuje čtvrtinu objemu nití a celý zbývající objem kvádrů nezaplněný nitěmi. Skutečné poměry jsou poněkud odlišné a model bude dále zpřesněn. Ve skutečných vzorcích matrice nevyplňuje celý zbývající objem, ale spíše tvoří vrstvu povlékající výztuž, model lze však i této skutečnosti snadno přizpůsobit.

Podíl matrice v průřezu nitě, který je předmětem současných měření, vstupuje do výpočtu jako jeden z parametrů.

RVE byl rozdělen řadu elementů a pro každý z nich byly odděleně stanoveny složky tenzoru tuhosti. RVE pak považujeme za nehomogenní anizotropní těleso s diskretním rozložením mechanických vlastností. Jeho odezva na zatížení je stanovena pomocí variačních principů.

5.3 Diskretizace RVE

RVE byl rozdělen na řadu elementárních kvádrů stejných rozměrů. Byla zvolena pravidelná síť s čtyřiceti děleními ve směru osy x a útku a dvanácti děleními ve směru tloušťky tj. celkem 19200 elementů. Každý element je charakterizován souřadnicemi x_i, y_i, z_i svého středu, svými objemovými podíly V_m, V_x, V_y matrice a nití výztuže ve směru x a y , sklony nití výztuže ve středu elementu v obou směrech a složkami tenzoru tuhosti elementu vzhledem ke zvolenému souřadnému systému x, y, z , kde osy x a y jsou zvoleny ve směru osy a útku tkaniny výztuže a osa z ve směru tloušťky.

Poznamenejme, že tak husté dělení RVE bylo zvoleno hlavně pro proložení prostorového rozložení jednotlivých složek tuhosti kompozitu spojitými funkcemi tří souřadnic v rámci RVE. Napětí a efektivní moduly pružnosti byly vypočteny i pro rozdělení $20 \times 20 \times 6$ elementů. Zatímco čas výpočtu se radikálně snížil, výsledky výpočtu se lišily o méně než 5%. Optimální počet elementů bude záviset na typu výztuže a jeho stanovení bude předmětem dalších zkoumání.

5.3.1 Určení objemových podílů matrice a výztuže v jednotlivých elementech

V této etapě výpočtu je již geometrický model RVE plně diskretizován. Pro pravidelnou síť v rovině (x, y) jsou určeny matice obsahující z -ové souřadnice hraničních ploch oddělujících

- a) horní matici a výztuž
- b) nitě osy a útku
- c) dolní matici a výztuž

jak je zřejmé z Obr.3. Stejná pravidelná síť v rovině (x, y) je základnou dělení RVE na objemové elementy, kterým jsou přiřazeny souřadnice x_i, y_i, z_i jejich středu. Pro každý tento element je nutné stanovit jeho polohu vzhledem k hraničním plochám, zda se nachází uvnitř matrice, nebo uvnitř nitě osy a útku. Některé elementy zasahují do dvou, popř. i tří fází kompozitu zároveň a v tom případě je nutné stanovit objemový podíl jednotlivých složek v elementu. Pro elementy, které obsahují výztuž, je třeba stanovit i sklon výztuže v jejich středu.

Tato procedura probíhá postupně pro sloupce elementů napříč tloušťkou kompozitní vrstvy tak, jakoby o geometrii RVE nebylo a priori nic známo. Budou-li k dispozici data z měření geometrie kompozitu na skutečných vzorcích, bude výpočet začínat právě v této fázi. Hustotu těchto dat lze podle potřeby zvýšit proložením splajny a interpolací.

Nejprve jsou pro i -tý sloupec elementů určeny průřezy osy sloupce s hraničními plochami mezi jednotlivými složkami kompozitu jako průměr z -ových souřadnic vždy čtyř okolních bodů dané hraniční plochy nejbližších k ose i -tého sloupce. Postupně je zjišťována poloha středu každého elementu i -tého sloupce vzhledem k hraničním plochám a zjišťováno zda a nakolik přesahují hrany elementů hraniční plochy viz Obr.5.

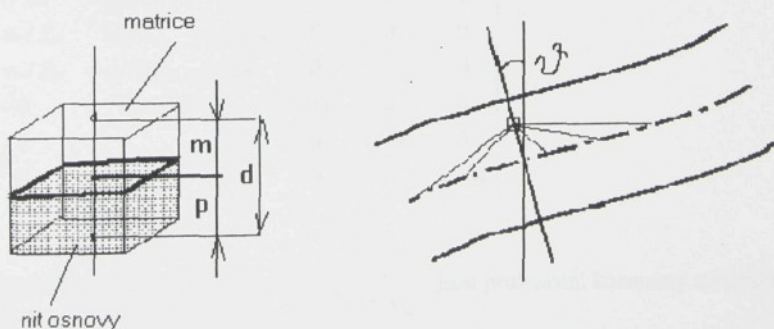
Objemové podíly jednotlivých složek v daném elementu jsou stanoveny jako poměr délky úseků, které vytínají hraniční plochy na ose elementu, ku výšce elementu:

$$V_m = m/d, \quad V_x = p/d,$$

atp. jak je zřejmé z uvedeného obrázku. Pro určení objemových podílů je nutné znát i objemový podíl matrice uvnitř nitě. Tento parametr, který lze určit z obrazové analýzy průřezů nití, nebo kvalifikovaně odhadnout [20], byl pro potřeby výpočtu zvolen $V_{mv} = 0.25$.

5.3.2 Určení úhlu sklonu výztuže v jednotlivých elementech

Tenzor tuhosti jednotlivých elementů RVE v základním souřadném systému závisí na orientaci výztuže, která je v každém elementu odlišná.



Obr.5 Určení objemových podílů matrice a výztuže a úhlu sklonu výztuže

Určení sklonu nitě v elementu přímo z naměřených souřadnic střednice nitě není jednoduché, neboť je nutné derivovat naměřená data. Je proto vhodné naměřená data nejprve vyhladit buď lokálně proložením splajnů [30,33], nebo globálně [26] pomocí Fourierovy řady.

Poznamenejme, že průřezy nití nejsou symetrické, jak je zřejmé z Obr.4 a střednice nití jsou tedy plochy, které mají křivost ve směru x i y . Předpokládejme však, že jednotlivá vlákna nitě jsou souběžná a že průřez nitě je v každém bodě kolmý k průniku roviny rovnoběžné s rovinou (x,z) popř. (y,z) s plochou její střednice. Pak lze vypočítat z -ové souřadnice střední plochy nití ve směru osnovy či útku ve svislých rovinách procházejících středy elementů jako průměr souřadnic horní a dolní hraniční plochy příslušné nitě v těchto rovinách. Takto vypočtenými body střednic byly proloženy kubické splajny a z nich pak následně vypočteny souřadnice střední plochy v desetkrát hustším dělení. Pro jednotlivé elementy pak byla numericky nalezena nejkratší spojnice jejich středu s body střednice příslušné nitě. Předpokládáme, že její úhel ϑ je totožný s úhlem sklonu průřezu nitě ve středu daného elementu viz Obr.5. a tedy i se sklonem výztuže ve středu elementu.

5.3.3 Tenzory tuhosti materiálu jednotlivých složek kompozitu

Předpokládáme, že materiál matrice je homogenní a izotropní a materiál vláken výztuže je homogenní a příčně izotropní. Matice poddajnosti materiálu matrice:

$$S_m = \begin{bmatrix} 1/E_m & -\nu_m/E_m & -\nu_m/E_m & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_m/E_m & 1/E_m & -\nu_m/E_m & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_m/E_m & -\nu_m/E_m & 1/E_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_m \end{bmatrix}$$

Kde $E_m = 30 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0.19$ a $G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}$ jsou pružnostní konstanty materiálu matrice.

Matice poddajnosti příčně izotropního materiálu výztuže, kde jeho první dvě osy definují rovinu izotropie (rovinu průřezu nitě) a třetí osa je orientována ve směru vláken výztuže:

$$S_v = \begin{bmatrix} 1/E_T & -\nu_{TT}/E_T & -\nu_{LT}/E_L & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{TT}/E_T & 1/E_T & -\nu_{LT}/E_L & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{LT}/E_L & -\nu_{LT}/E_L & 1/E_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_T \end{bmatrix}$$

s hodnotami $E_L = 210 \text{ GPa}$, $E_T = 72 \text{ GPa}$, $G_L = 86 \text{ GPa}$, $\nu_{LT} = 0.27$, $\nu_{TT} = 0.3$ a modul pružnosti ve smyku v rovině průřezu je dán vztahem $G_T = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TT})}$.

Složky tenzorů tuhosti C_m a C_v obou materiálů získáme invertováním matic S_m a S_v .

5.3.4 Určení tenzorů tuhosti jednotlivých elementů RVE – cihlový model

Široce používaný model kompozitního materiálu založený na zprůměrování tuhosti jednotlivých složek vychází z Voigtova modelu polykrystalického agregátu. Tento model předpokládá, že ve vicesložkové soustavě je při zatížení přetvoření každé ze složek stejné, ale napětí nikoliv. Předpoklad stejného přetvoření (iso-strain) vede k následujícímu vztahu pro tenzor tuhosti C_s soustavy s n složkami:

$$C_s = \sum_{i=1}^n k_i C_i, \quad (5.1)$$

kde C_i je tenzor tuhosti i -té složky a k_i je objemový podíl této složky.

Obdobným způsobem bychom mohli zprůměrovat tenzory poddajnosti S_i jednotlivých komponent v elementu:

$$S_s = \sum_{i=1}^n k_i S_i, \quad (5.2)$$

V mechanice kompozitních materiálů se tento model rovněž často používá - vychází z Reussova modelu, který předpokládá, že při zatížení je ve vicesložkové soustavě napětí každé

ze složek stejné, ale přetvoření nikoliv (iso-stress model). Z experimentů vyplývá, že modely iso-strain a iso-stress představují horní a dolní ohraničení elastických vlastností kompozitů. V mechanice jednosměrných kompozitů kombinuje oba tyto modely tzv. směsový model.

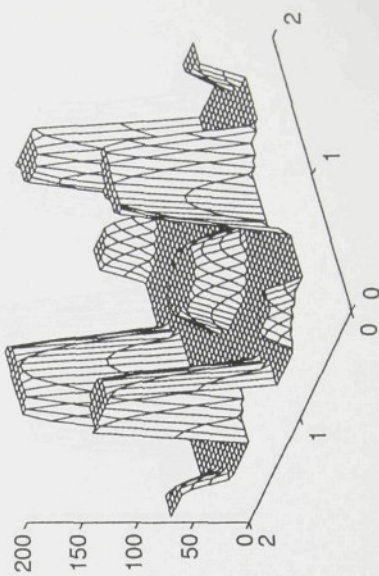
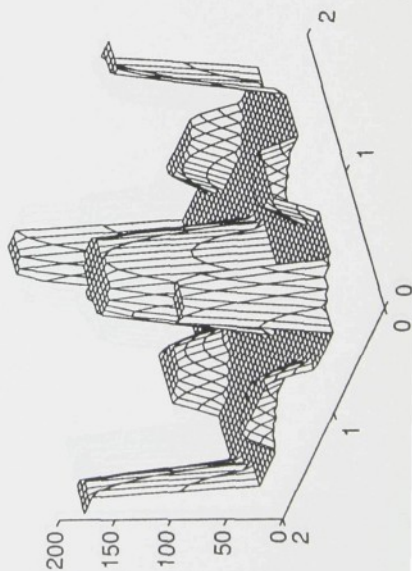
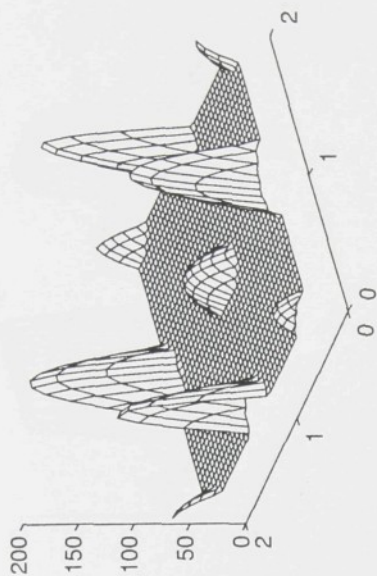
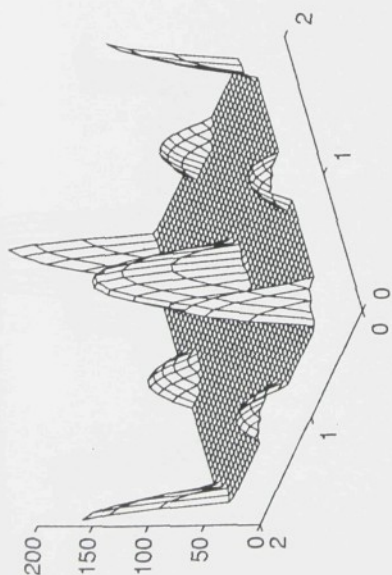
V našem případě jsou v jednotlivých elementech přítomny jedna, dvě nebo i tři složky (matrice a výztuž osnovy či útku, nebo matrice a výztuž osnovy i útku zároveň). V každém elementu je úhel sklonu výztuže rozdílný a je tedy nutné tenzor tuhosti materiálu výztuže předem transformovat do základního souřadného systému. Nejprve orientujeme tenzor tuhosti tak, aby rovina izotropie materiálu výztuže byla totožná s rovinou průřezu nitě ve středu příslušného elementu, potom následuje transformace složek tenzoru do základního souřadného systému x,y,z tj. rotace kolem příslušné osy o úhel sklonu nitě θ_i ve středu daného elementu. Po vynásobení tenzorů matrice a výztuže příslušnými objemovými podíly a po sečtení dostáváme výslednou tuhost jednotlivých elementů podle vztahu (5.1).

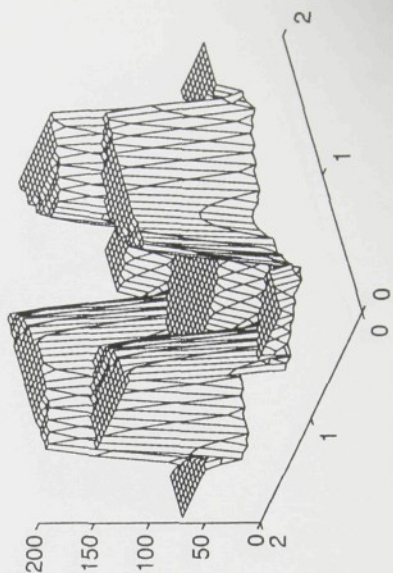
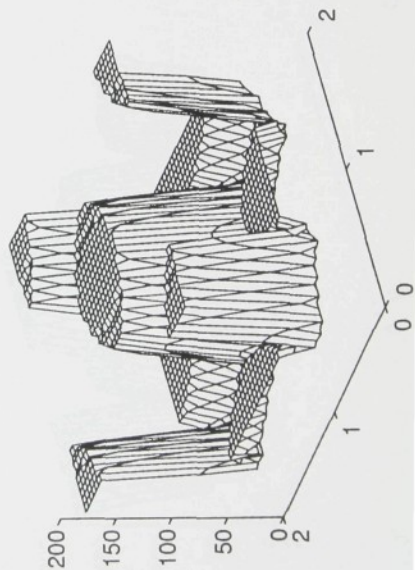
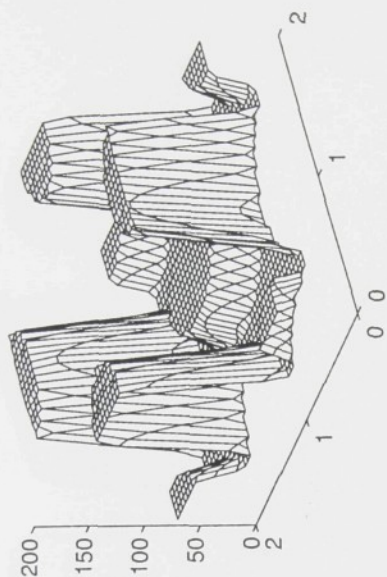
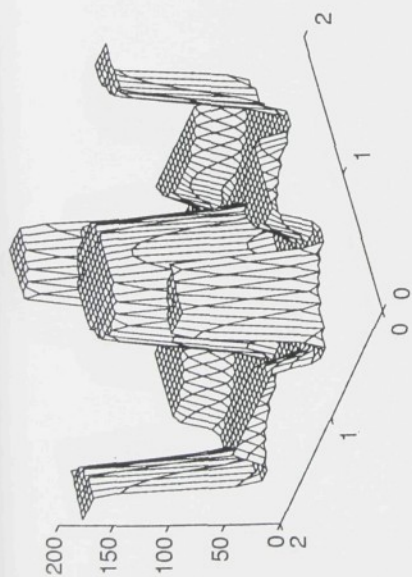
Výsledný materiál elementů uvnitř nití, ve kterých jsou přítomny pouze dvě složky kompozitu (matrice a nit pouze v jednom směru - osnovy nebo útku) je monoklinický. Elementy na společných hranicích mezi nitěmi, které obsahují všechny tři složky kompozitu jsou anizotropní a elementy, ve kterých je přítomná pouze matrice jsou izotropní. Ve všech elementech RVE jsou složky C_{16} , C_{26} , C_{36} a C_{45} rovny nule, C_{14} a C_{25} jsou zanedbatelné a největší hodnoty C_{15} a C_{24} jsou o řád nižší než složka C_{33} .

Alternativou k výpočtu tuhosti v elementech uvnitř nití podle "iso-strain" modelu je použití některého z modelů určených pro jednosměrné kompozity, který předpokládá příčné izotropní materiál vláken jako je model Hillův, nebo Hashinův [20].

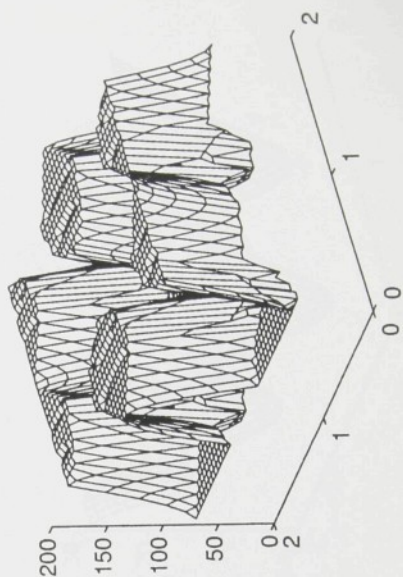
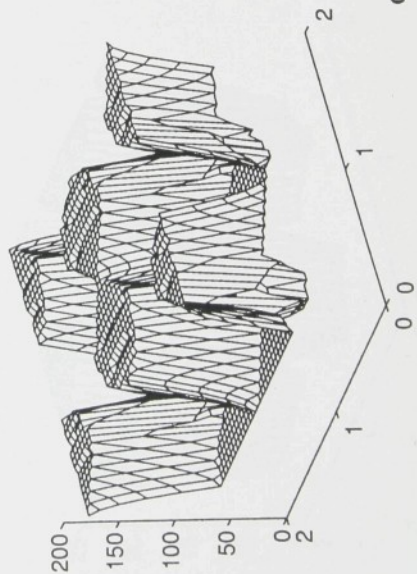
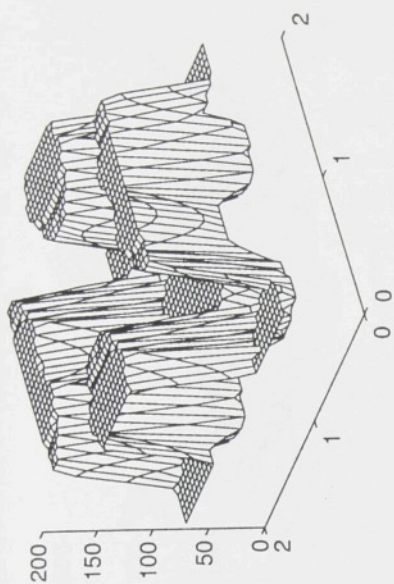
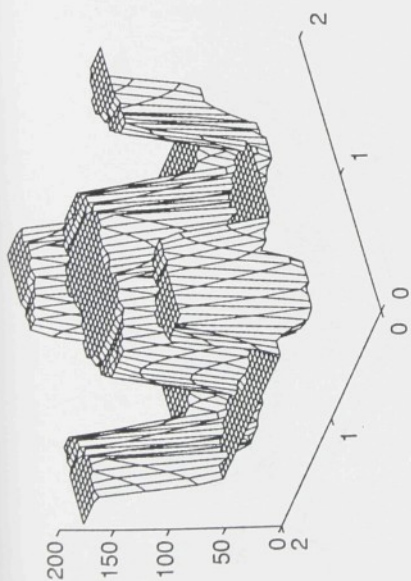
Zprůměrováním elastických vlastností v elementech na hraničních plochách mezi maticí a výztuží a mezi jednotlivými nitěmi jsme vytvořili plynulejší přechod mezi vlastnostmi elementů na obou stranách hraniční plochy.

Rozložení hodnot složky C_{11} tenzoru tuhosti v RVE v rovinách symetrických ke střední rovině (x,y) je patrné z Obr.6-8. V levé části obrázků je rozložení této složky v řezech postupujících od horního povrchu, v pravé části je rozložení v řezech postupujících od dolního povrchu RVE směrem k jeho střední rovině. Hodnoty C_{11} jsou v GPa . Rozložení tuhostí, kte-



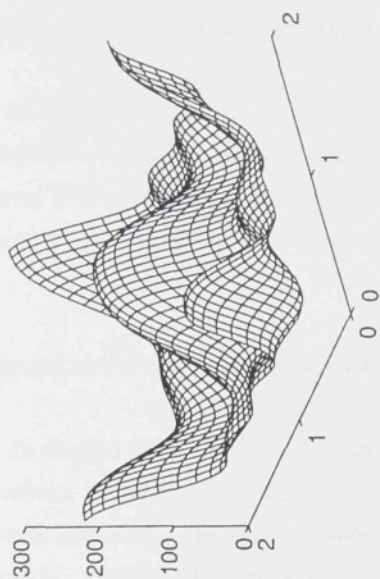


Obr. 7

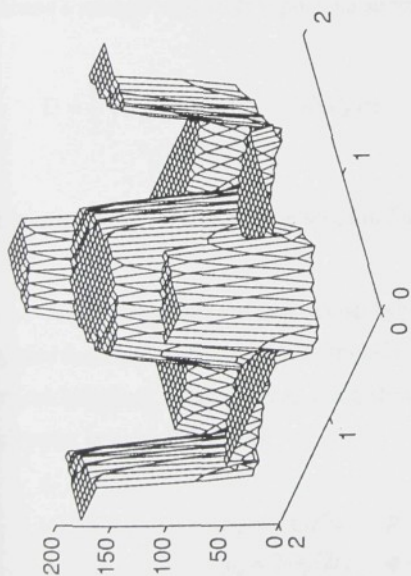
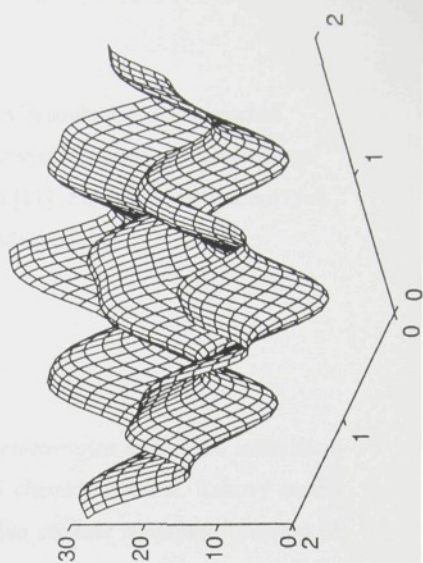


Obr. 8

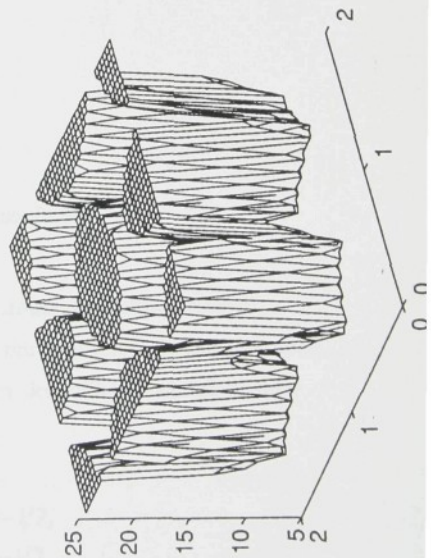
Slozka C11—spojite rozlozeni



Slozka C12—spojite rozlozeni



Slozka C12—diskretni rozlozeni



ré vzdáleně připomíná lesní mýtinu, věrně odpovídá geometrii výztuže. Vyšší pařezy odpovídají nitím ve směru osy x a ty nižší nitím ve směru osy y .

Na konci diskretizačního procesu je RVE reprezentován souborem 3-D elementů s rozdílnými elastickými vlastnostmi. Materiál v rámci jednotlivých elementů považujeme za homogenní a anizotropní. Narozdíl od mozaikového modelu [11] skládajícího se z deskových 2-D elementů lze tento 3-D model RVE nazvat cihlovým modelem [20].

5.3.5 Spojitý model kompozitního materiálu

Za přechod mezi cihlovým modelem a plně homogenizovaným efektivním materiálem lze považovat model se spojitě rozloženými pružnostními charakteristikami. Takový model lze sestavit proložením diskretních hodnot tuhostí cihlového modelu spojitými funkcemi tří proměnných. Získáme tak anizotropní nehomogenní model materiálu se spojitým prostorovým rozložením elastických vlastností. Napjatost v takovém modelu lze stanovit pomocí variačních principů, kdy deformace bude aproximována spojitými polynomiálními funkcemi a energie napjatosti vypočtena ze vztahu:

$$U = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl}(x, y, z) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dx dy dz,$$

kde tenzor tuhosti $C_{ijkl}(x, y, z)$ je spojitou funkcí všech tří souřadnic.

Jednotlivé složky tenzoru tuhosti byly proloženy metodou nejmenších čtverců spojitými funkcemi ve tvaru goniometrického polynomu tří proměnných (6.1) pátého stupně, který má 231 členů. Souřadnice x_i , y_i a z_i středů jednotlivých elementů jsou ekvidistantní a jejich počet je sudý. Položme-li

$$\begin{aligned} x_p &= 2\pi p/2s, & p &= 1/2, \dots, 2s-1/2, \\ y_q &= 2\pi q/2t, & q &= 1/2, \dots, 2t-1/2, \\ z_r &= 2\pi r/2u, & r &= 1/2, \dots, 2u-1/2, \end{aligned}$$

pak goniometrické funkce právě tak, jako splňují podmínku ortogonalitu na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$, splňují podmínku ortogonalitu na diskrétní množině bodů $\{x_p, y_q, z_r\}$. Matice soustavy normálních rovnic vyplývající z podmínek minima kvadrátů odchylek je tedy diagonální a tato vlastnost zjednodušuje určení koeficientů polynomu (6.1) a zároveň tím se tím vyhneme i problému špatné podmíněnosti soustavy normálních rovnic. Jsou-li $\tilde{f}_{pqr}$ hodnoty aproximované funkce v bodech $\{x_p, y_q, z_r\}$ a označíme-li:

$$\Phi = \frac{1}{8stu} \sum_p \sum_q \sum_r \tilde{f}_{pqr} \phi_x(x_p) \phi_y(y_q) \phi_z(z_r),$$

kde $\phi_x(x_p), \phi_y(y_q), \phi_z(z_r)$ jsou po řadě všechny kombinace báзовých funkcí ve vztahu (6.1), pak koeficienty aproximačního polynomu lze vyjádřit ve tvaru:

$$\beta_{ijk} = \lambda_{ijk} \Phi, \quad \text{kde} \quad \lambda_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i, j, k = 0, \\ 2 & \text{pro } i \neq 0, j, k = 0 \vee j \neq 0, i, k = 0 \vee k \neq 0, i, j = 0, \\ 4 & \text{pro } i, j \neq 0, k = 0 \vee i, k \neq 0, j = 0 \vee j, k \neq 0, i = 0, \\ 8 & \text{pro } i, j, k \neq 0, \end{cases}$$

Např. pro první dva koeficienty vztahu (6.1) dostáváme výrazy :

$$a_{000} = \frac{1}{8stu} \sum_p \sum_q \sum_r \tilde{f}_{pqr}, \quad a_{100} = \frac{1}{4stu} \sum_p \sum_q \sum_r \tilde{f}_{pqr} \cos(kx_p),$$

podobně určíme i ostatní koeficienty aproximačního polynomu. Výhodou aproximace ortogonálními polynomy je rovněž nezávislost jejich koeficientů na počtu členů aproximačního polynomu, další členy vyššího stupně jednoduše přidáme podle shora uvedených vztahů.

Spojité aproximace tuhostí goniometrickými polynomy tří proměnných v rovinách rovnoběžných s rovinou (x, y) a diskrétní rozložení tuhostí je porovnáno na Obr.9. Pověsimně si, že spojitě rozložení složky C_{11} se přibližně shoduje s průběhem nitě ve směru osnovy (směr osy x) na Obr.3.

Aproximace složek tenzoru tuhosti kompozitů s tkanou výztuží goniometrickými polynomy se jeví jako velmi slibná vzhledem k periodicitě geometrie výztuže a k poměrně pravidelnému zvlnění vláken.

Alternativou k aproximaci polynomy ve třech proměnných by mohla být oddělená aproximace goniometrickými polynomy pouze dvou proměnných x a y v řadě řezů rovnoběžných s rovinou (x,y) , která by pravděpodobně přesněji vystihovala průběh složek tuhostí v jednotlivých řezech.

Aproximace jednotlivých složek tenzoru tuhosti goniometrickými polynomy tří proměnných byla vyzkoušena při výpočtu variace energie napjatosti pro určování napětí v zatíženém RVE. Čas potřebný k výpočtu se tím dramaticky snížil. Pro doporučení daného postupu je však nutné podrobné prozkoumání otázky přesnosti aproximace, se kterým se v budoucnu počítá.

Výsledky aproximace tuhostí ortogonálními goniometrickými polynomy rovněž nepřímo potvrzují adekvátnost použití diskretní Fourierovy transformace při kvantifikaci parametrů geometrie tkané výztuže kompozitů [26-30] na KTM FT TU.

6. Výpočtový algoritmus

K výpočtu napětí v RVE kompozitu bylo použito Hu-Washizu variačního principu (4.15), ve kterém jsou podrobeny variacím složky vektorů σ , ϵ , u a p tj. celkem 18 veličin.

Byly zvoleny báze funkce [40,41] a jednotlivé veličiny byly aproximovány polynomy sestavenými jako lineární kombinace báze funkcí. Variací funkcionálu podle jednotlivých koeficientů polynomů byla získána matice soustavy lineárních rovnic, z okrajových podmínek pak vektor pravé strany. Byla vypočtena napětí pro sérii zatížení posuvy na hranici reprezentativního elementu a určeny efektivní moduly pružnosti z ekvivalence energie napjatosti. Pro numerický výpočet byla vytvořena celá řada programů tzv. *script files* pro MATLAB, které jsou přiloženy na CD mediu. Pro potřeby KTM FT TU bude vytvořena jejich uživatelská verze.

6.1 Báze funkce

Složky vektorů σ , ϵ , u a p byly aproximovány ortogonálními polynomy goniometrických funkcí ve třech proměnných:

$$f(x, y, z) = \sum_{ijk} (a_{ijk}^I \cos ix \cos jy \cos kz + b_{ijk}^{II} \cos ix \cos jy \sin kz + c_{ijk}^{III} \cos ix \sin jy \cos kz + d_{ijk}^{IV} \cos ix \sin jy \sin kz + e_{ijk}^V \sin ix \cos jy \cos kz + f_{ijk}^{VI} \sin ix \cos jy \sin kz + g_{ijk}^{VII} \sin ix \sin jy \cos kz + h_{ijk}^{VIII} \sin ix \sin jy \sin kz), \quad (6.1)$$

kde $i, j, k = 0, 1, \dots, n_b$.

V našem případě $n_b = 5$ a každá z 18 funkcí aproximována polynomem (6.1), který má 231 členů.

6.2 Sestavení systému lineárních rovnic

Systém lineárních rovnic pro určení koeficientů aproximací složek vektorů σ , ϵ , u a p vyplývá ze stacionární podmínky Hu-Washizuova funkcionálu (4.15):

$$\delta H = \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} - \sigma_y \right) \delta \varepsilon_y - \left[\varepsilon_y - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \delta \sigma_y - \left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_j} + X_i \right) \delta u_i \right\} d\Omega +$$

$$+ \int_{\Gamma_p} (\sigma_{ji} n_j - \tilde{p}_i) \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u_i - \tilde{u}_i) \delta p_i d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\sigma_{ji} n_j - p_i) \delta u_i d\Gamma = 0.$$

Označíme-li F , N , M a G matice báзовých funkcí a jejich derivací a e , d , s a r sloupcové vektory koeficientů jednotlivých polynomů, pak můžeme zapsat vektory jednotlivých veličin jako součiny:

$$\sigma = F s, \quad \sigma = C \varepsilon, \quad \varepsilon = F e, \quad u = N d, \quad p = N r, \quad V^T u = M d \quad \text{a} \quad \operatorname{div} \sigma = G s. \quad (6.2)$$

V případě, že neuvažujeme hmotové síly, lze systém lineárních rovnic vyplývajících ze stacionární podmínky Hu-Washizuova funkcionálu (4.15) formálně zapsat ve tvaru [44]:

$$\begin{bmatrix} E & S & 0 & 0 \\ S^T & 0 & D & 0 \\ 0 & D^T & 0 & P \\ 0 & 0 & P^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ s \\ d \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p^0 \\ u^0 \end{Bmatrix}, \quad (6.3)$$

kde

$$\begin{aligned} S &= - \int_{\Omega} F^T F d\Omega, & D &= \int_{\Omega} F^T M d\Omega, \\ P &= - \int_{\Gamma_u} N^T N d\Gamma, & E &= \int_{\Omega} F^T C F d\Omega, \\ u^0 &= \int_{\Gamma_u} N^T N \tilde{u} d\Gamma, & p^0 &= \int_{\Gamma_p} N^T N \tilde{p} d\Gamma. \end{aligned} \quad (6.4)$$

V těchto vztazích integrujeme přes oblast Ω , kterou zaujímá RVE – v našem případě je to kvádr jehož výška je rovna tloušťce laminy a rozměr zbývajících dvou stran je roven délce periody plátnové vazby výztuže, event. integrujeme přes povrch Γ_u kvádrů, na kterém

jsou předepsány posuvy $\tilde{u}_i$ a přes povrch Γ_p , na kterém je předepsán vektor vnějších povrchových sil $\tilde{p}_i$.

Předpokládáme, že heterogenní materiál RVE se řídí zobecněným Hookeovým zákonem

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(x, y, z) \varepsilon_{kl}, \quad (6.5)$$

kde tuhosti $C_{ijkl}(x, y, z)$ jsou funkcí všech tří souřadnic. V cihlovém modelu jsme přiřadili středu každého i -tého elementu (x_i, y_i, z_i) příslušné hodnoty složek tenzoru tuhosti $C_{ijkl}(x_i, y_i, z_i)$, máme tedy diskretní rozložení složek C_{ijkl} a předpokládáme, že pro každý element platí:

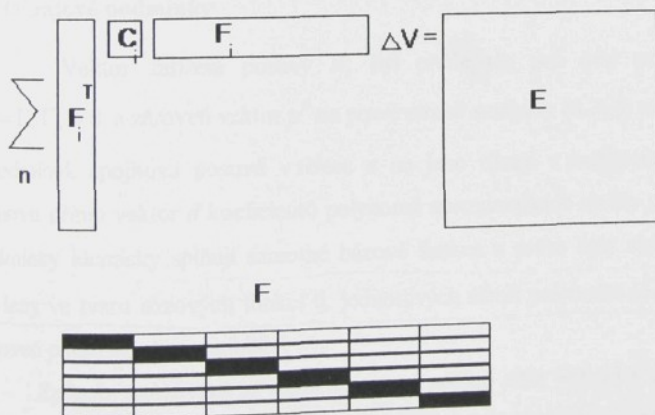
$$\{\sigma^{(i)}\} = [C^{(i)}] \{\varepsilon^{(i)}\}, \quad (6.6)$$

kde $[C^{(i)}]$ je matice složek tuhosti daného elementu. Potom integrál $\int_{\Omega} A(\varepsilon_y) d\Omega$ ve vztahu

(4.6) můžeme nahradit sumací a matici E soustavy (6.3) lze zapsat ve tvaru:

$$E = \sum_n F^{(i)T} C^{(i)} F^{(i)} \Delta V, \quad (6.7)$$

kde $F^{(i)}$ je matice hodnot básových funkcí ve středu i -tého elementu, $C^{(i)}$ je matice tenzoru tuhosti elementu, ΔV je objem elementu a n je počet elementů v RVE, viz násl. schema:



Vlastní numerický výpočet matice E pochopitelně probíhá podle algoritmu, který využívá pouze vektor báзовých funkcí čerňe vyznačený ve schematu matice F (ostatní její prvky jsou nulové) a symetii matic C a E . Matice E je rozdělena na bloky E_{ij} velikosti $n_f \times n_f$, kde n_f je počet báзовých funkcí. Označíme-li $f = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n_b}\}$ vektor báзовých funkcí, pak

$$E_{ij} = \sum_n (c_{ij})_k f_k^T f_k,$$

kde $(c_{ij})_k$ je příslušná složka tenzoru tuhosti k -tého elementu a f_k je vektor hodnot báзовých funkcí ve středu k -tého elementu. Submatice E_{ij} , kterých je v našem případě 17, jsou symetrické a stačí vypočítat pouze jejich horní trojúhelníkovou část. Přesto je tato část výpočtu velmi náročná na čas vzhledem k počtu báзовých funkcí a počtu elementů RVE.

V důsledku ortogonalitы báзовých funkcí je matice S diagonální, matice jednotlivé bloky matice D jsou dvoudiagonální, což usnadňuje řešení soustavy (6.3) – připomeňme, že v našem případě je to soustava lineárních rovnic pro 18×231 neznámých koeficientů.

Byl rovněž sestaven numerický výpočet, v němž byla matice E vypočtena pomocí spojitého rozložení tuhosti $C_{ijkl}(x, y, z)$, aproximovaného ortogonálními polynomy. Tento výpočet je nepoměrně rychlejší, než pro diskretní rozložení, avšak vliv této aproximace na konečné řešení bude teprve vyhodnocován.

6.3 Okrajové podmínky

Vektor zatížení posuvy $\tilde{u}_i$ byl předepsán pro celý povrch RVE, tedy platí $\Gamma_u = \Gamma, \Gamma_p = 0$ a zároveň vektor p^θ na pravé straně soustavy (6.3) je nulový. V tom případě lze z podmínek spojitosti posuvů v tělese a na jeho okraji v posledním řádku soustavy (6.3) stanovit přímo vektor d koeficientů polynomů aproximujících složky posuvu u^i v tělese. Tyto podmínky identicky splňují samotné báзовé funkce a proto byly složky vektoru zatížení $\tilde{u}_i$ zvoleny ve tvaru báзовých funkcí tj. jednotlivých členů polynomu (6.1). Tyto funkce splňují zároveň podmínky kompatibility.

Způsob zatěžování se může na první pohled zdát odtržený od reality, uvědomme si však, že každé jiné - realističtější - zatížení modelu by bylo jen lineární kombinací báзовých funkcí.

Zatížení byla kombinována způsobem, který simuloval materiálové testy pro určení mechanických vlastností anizotropního materiálu, o němž a priori nic nevíme tj. neznáme

orientaci jeho možných rovin elasticke symetrie či izotropie. Byla to jednoosá zatížení ve všech třech směrech, smyková zatížení v navzájem kolmých rovinách a biaxiální testy. Deformace RVE odpovídající některým zatížením jsou zřejmé z Obr. 10, 14, 18 a 20. V horní části obrázků je 3-D graf deformace v rovinách rovnoběžných s rovinou (x,y) , v dolní části je průběh jejich izolinií.

6.4 Výpočet napětí

Po dosazení koeficientů d složek vektoru u posuvů do druhého řádku soustavy (6.3) můžeme vypočítat vektor e koeficientů složek vektoru deformace ϵ a z prvního řádku koeficienty s složek vektoru napětí σ , výpočet je snadný, neboť matice S je diagonální. Po dosazení do třetího řádku (6.3) bychom mohli vypočítat staticky neurčité reakce ve vazbách. Napětí byla vypočtena pro celou sérii zatížení.

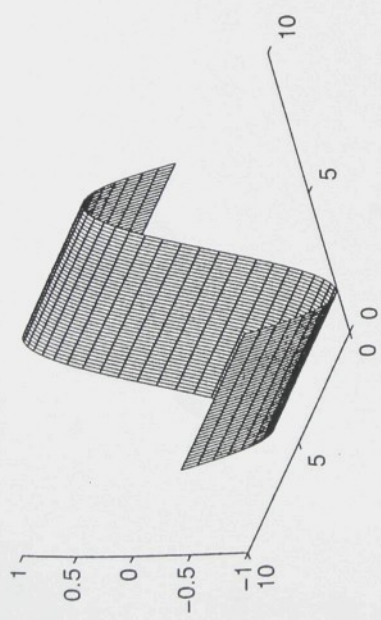
Rozložení napětí v rovinách rovnoběžných s rovinou (x,y) pro některá zatížení jsou na Obr. 10-21. Opět jsou zde v horní části obrázku napětí v jednotlivých rovinách zobrazena v 3-D grafech, kde směr osy x je doprava a v dolní části obrázku jsou jejich izolinie, v grafech izolinií je osa x svislá.

Na Obr. 10-13 je průběh jednotlivých napětí pro deformaci $\epsilon_x = \sin(x)$. Velikost napětí σ_x se postupně zvyšuje od horního okraje RVE směrem k jeho střední rovině a zároveň se mění jeho rozložení v závislosti na tom, kde daná rovina protíná nitě výztuže ve směru osy x a útku, v místech, kde protíná matici je vždy výrazný pokles hodnoty napětí, které si však všude podrží základní sinusový průběh – uprostřed je RVE téměř bez napětí. Podobný průběh jeví i napětí σ_y a σ_z , která vznikají v důsledku zabránění příčné deformaci. Tato napětí jsou o řád nižší, než napětí σ_x . Jako odezva na toto zatížení se objevuje i napětí τ_{xz} viz. Obr. 13,

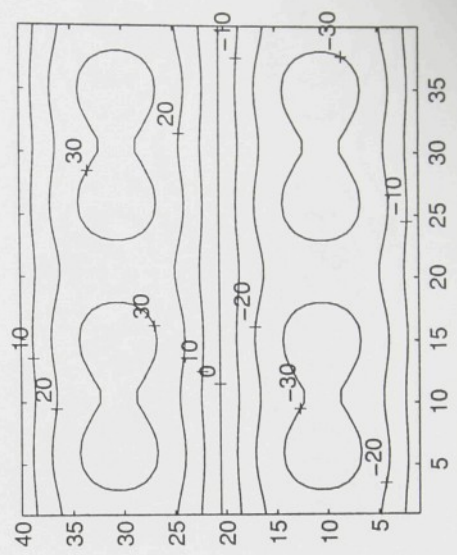
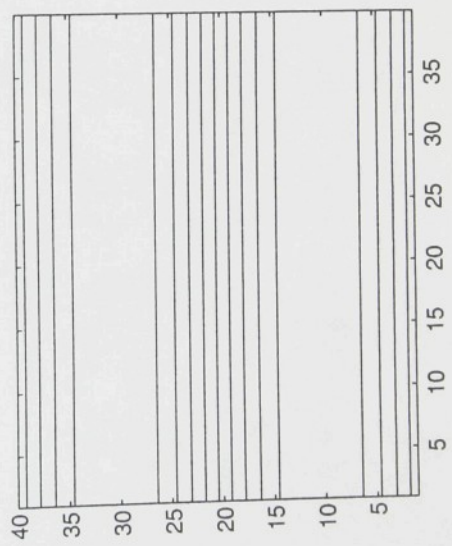
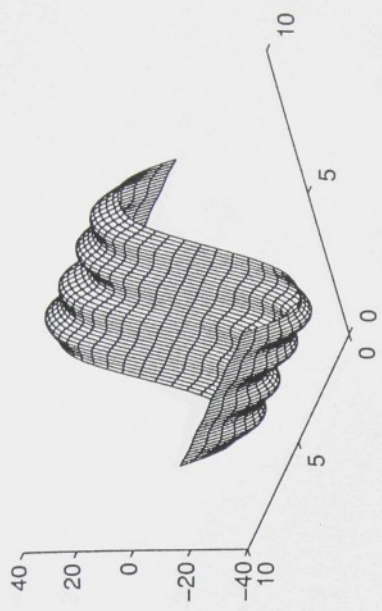
jeho velikost je však o dva řády menší, než velikost normálního napětí σ_x .

Průběh normálních napětí při sinusovém průběhu deformace je přísně symetrický, zatímco v průběhu smykových napětí je symetrie mírně porušena. Jak uvidíme na dalších obrázcích, je tomu u kosinového průběhu deformace právě naopak. Je otázkou, zda tento jev není vlastní použitému sinusovému modelu základní buňky.

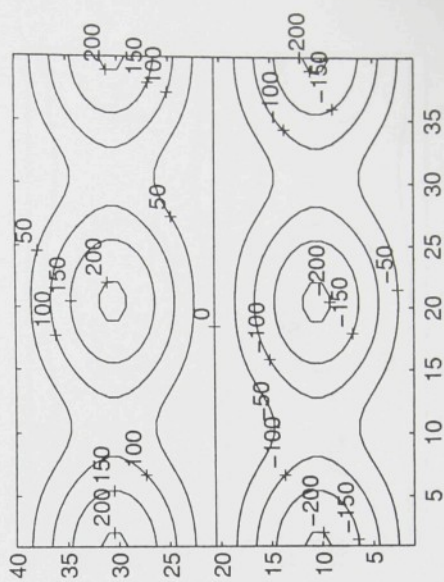
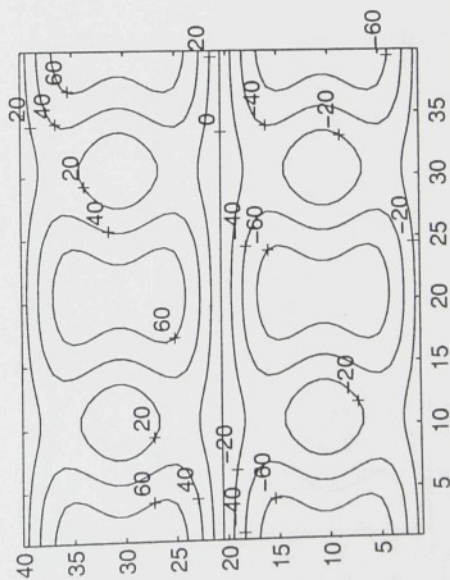
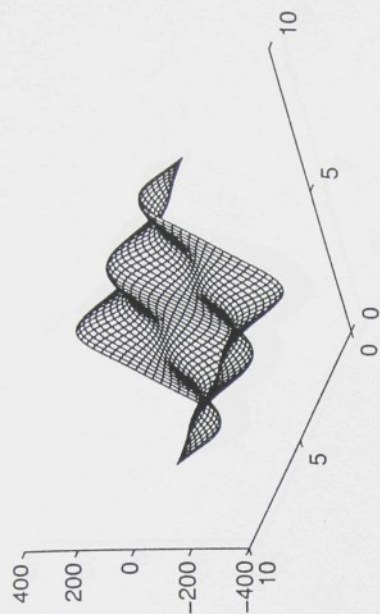
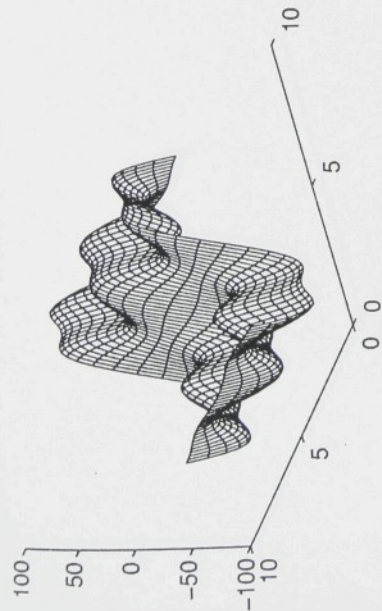
Ex pro $ux=\cos(x)$, $uy=uz=0$



Sx pro $ux=\cos(x)$, $uy=uz=0$

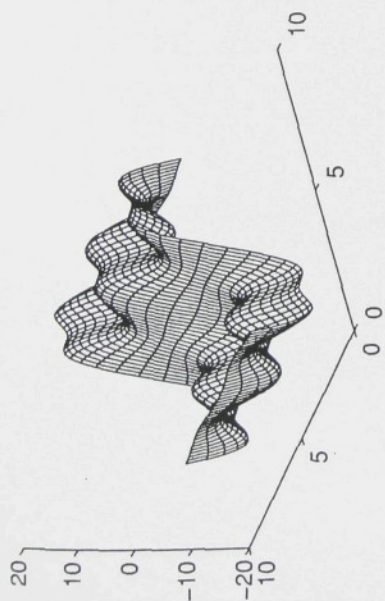


Obr. 10

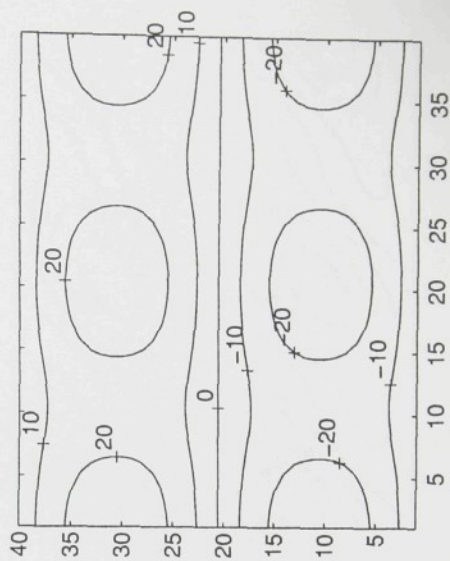
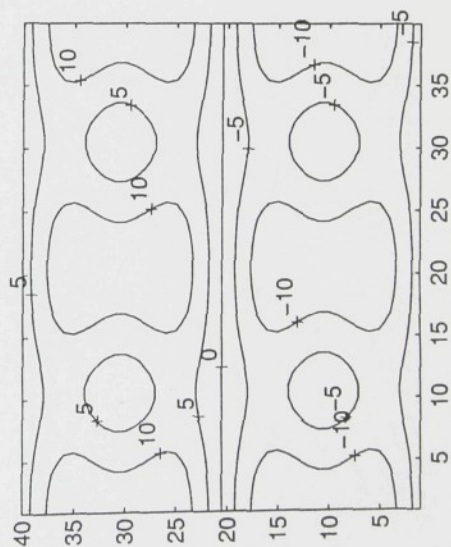
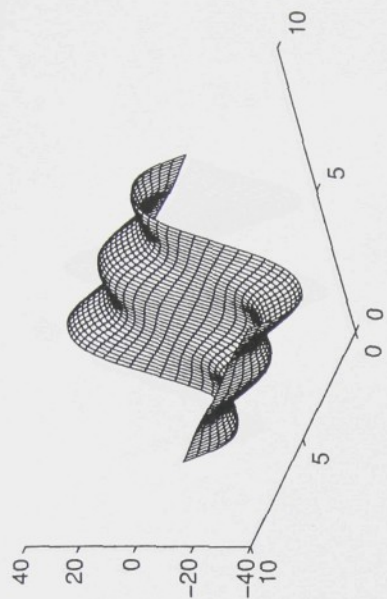


Obr. 11

Sy pro $ux=\cos(x)$, $uy=uz=0$

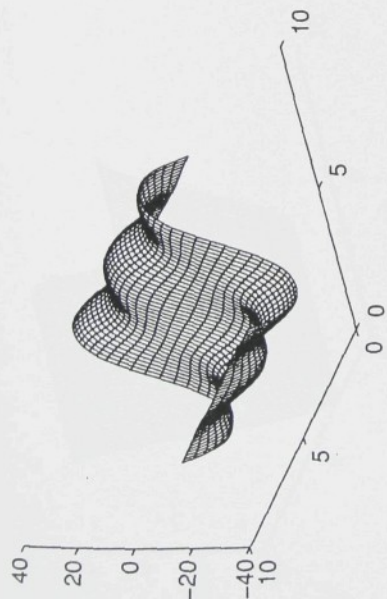


Sy pro $ux=\cos(x)$, $uy=uz=0$

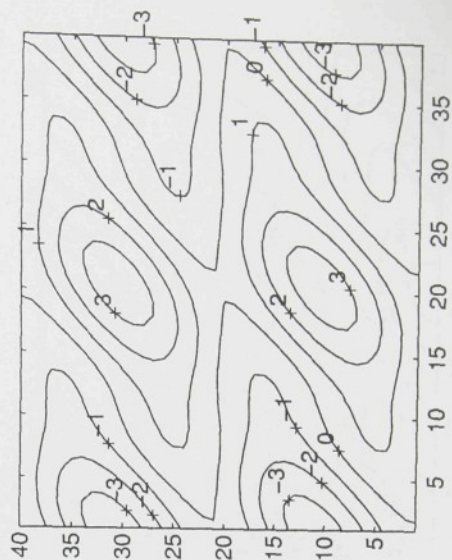
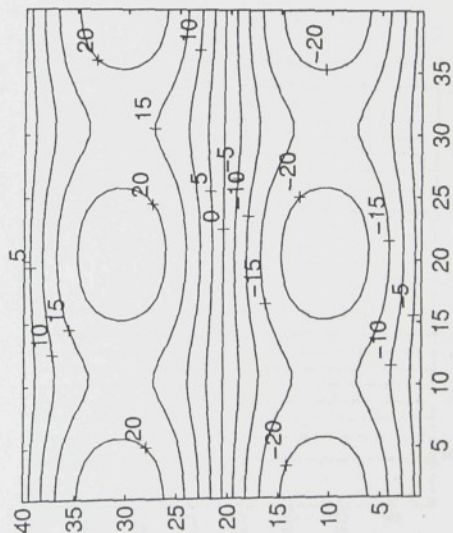
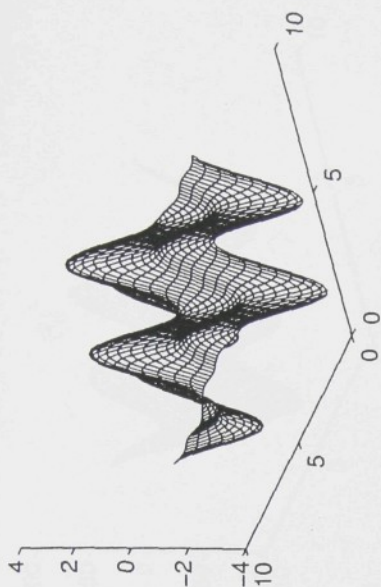


Obr. 12

Sz pro $u_x = \cos(x)$, $u_y = u_z = 0$

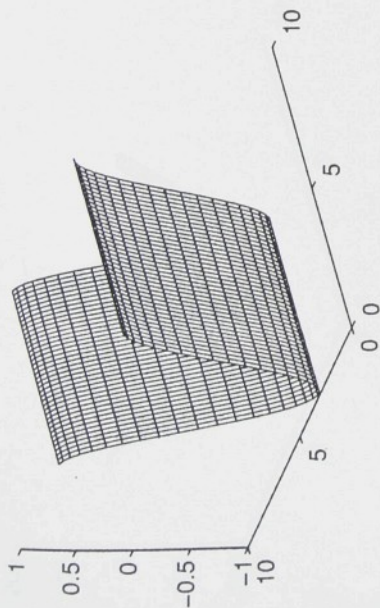


Sxz pro $u_x = \cos(x)$, $u_y = u_z = 0$

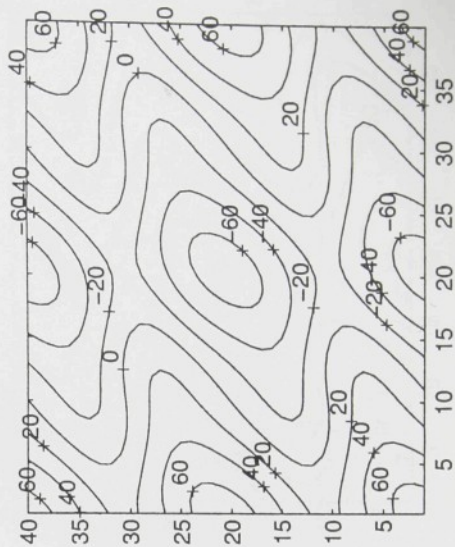
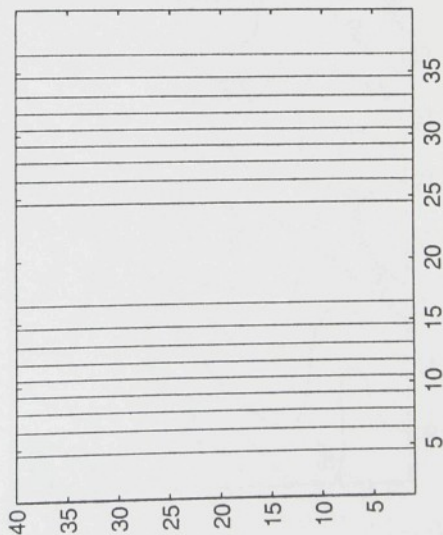
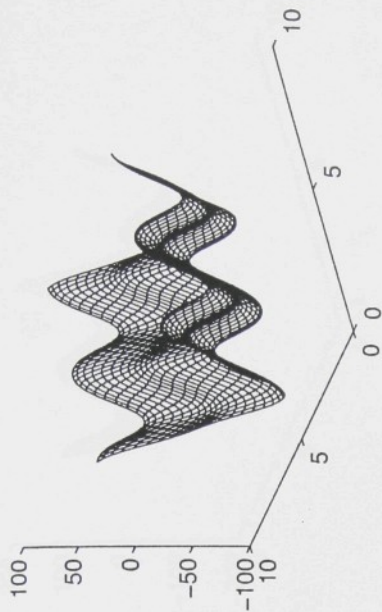


Obr. 13

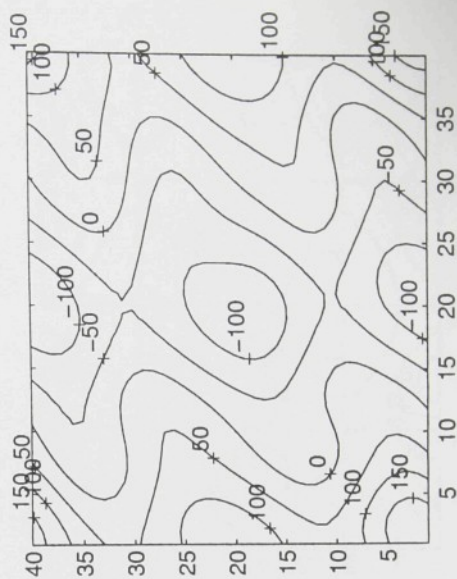
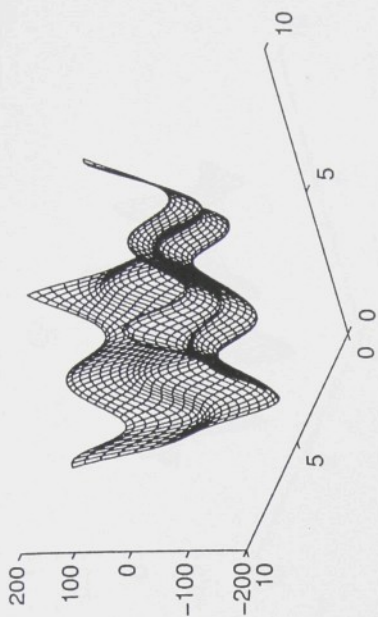
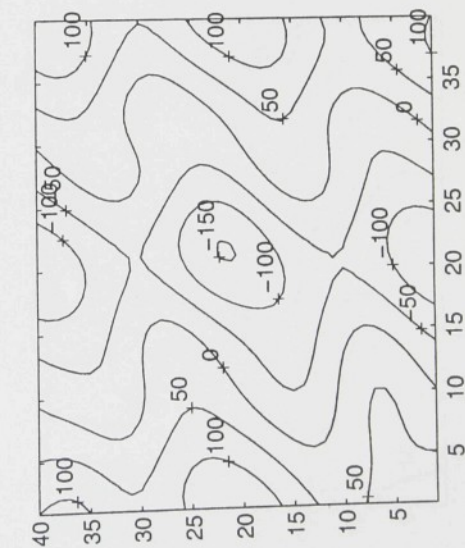
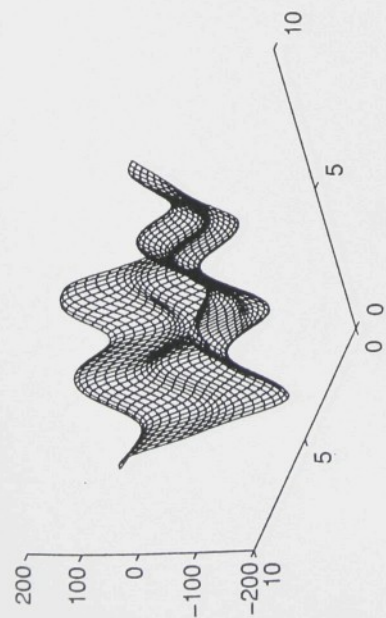
Ey pro $uy=\sin(y)$, $ux=uz=0$



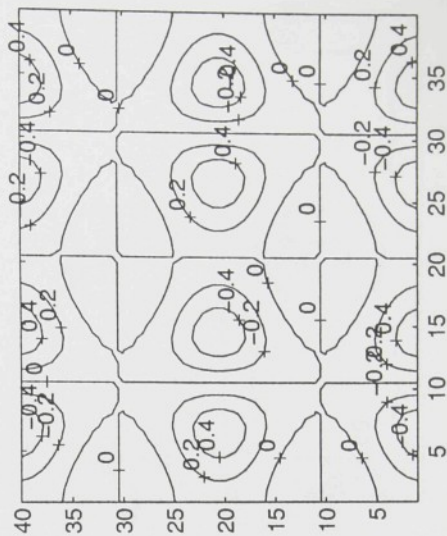
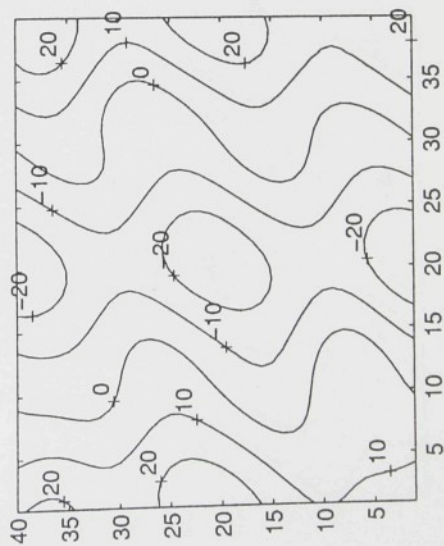
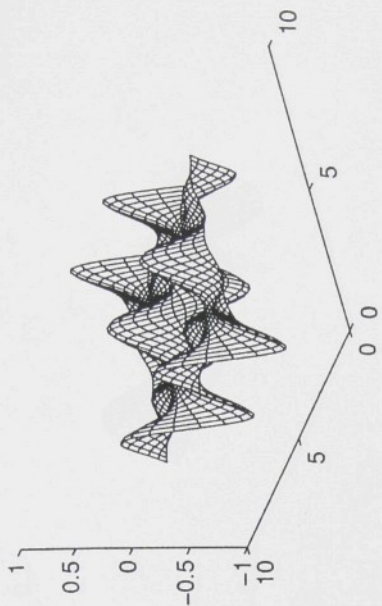
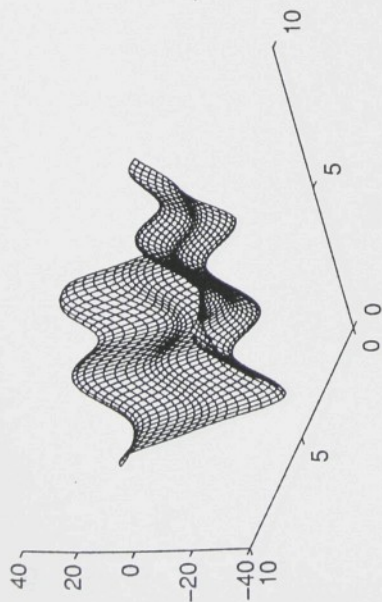
Sy pro $uy=\sin(y)$, $ux=uz=0$



Obr. 14

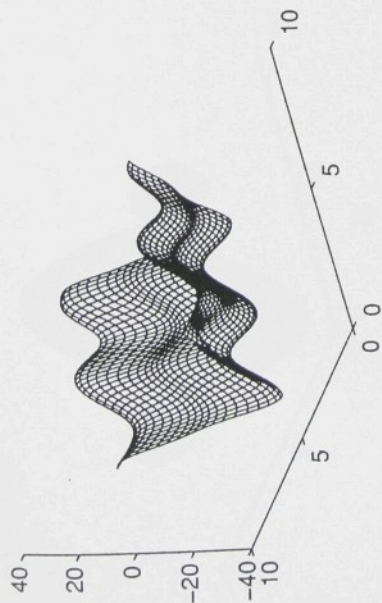


Obr. 15

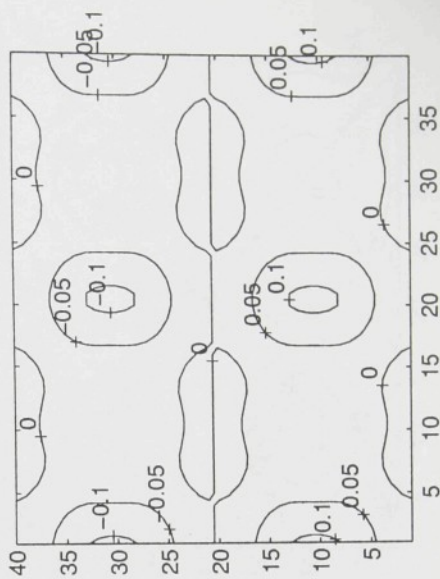
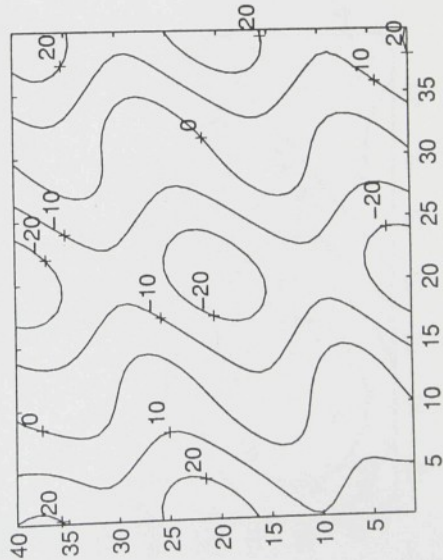
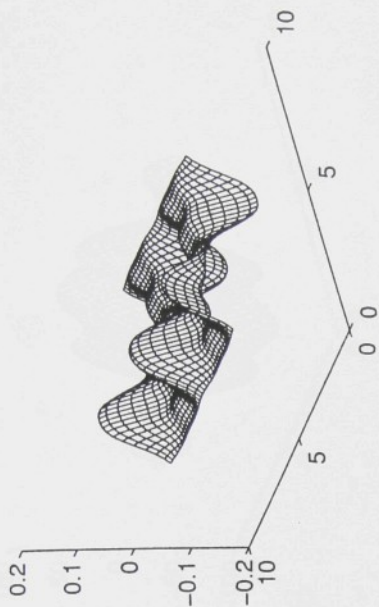


Obr. 16

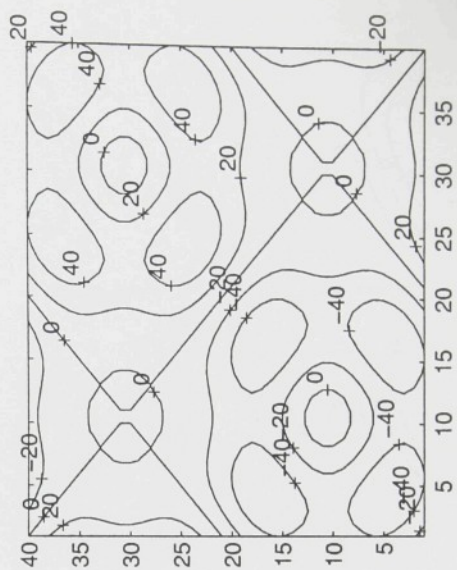
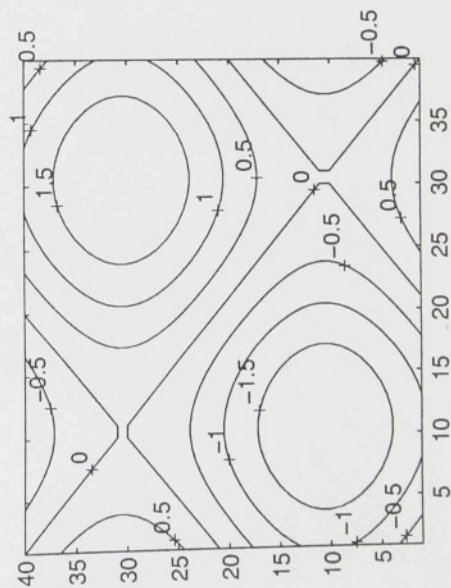
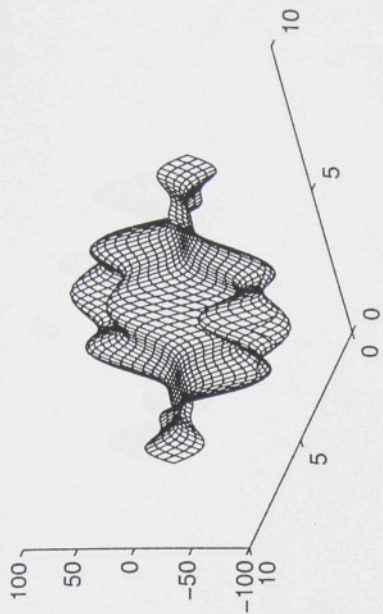
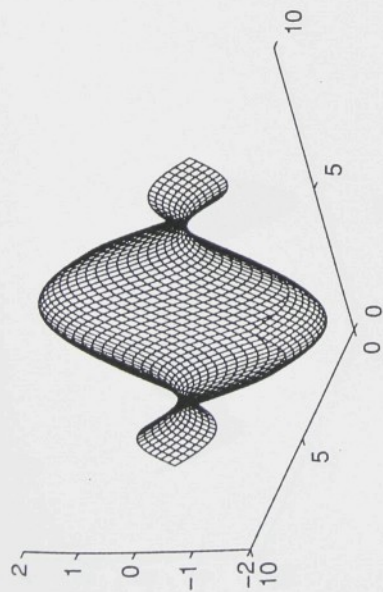
Sz pro $u_y = \sin(y)$, $u_x = u_z = 0$



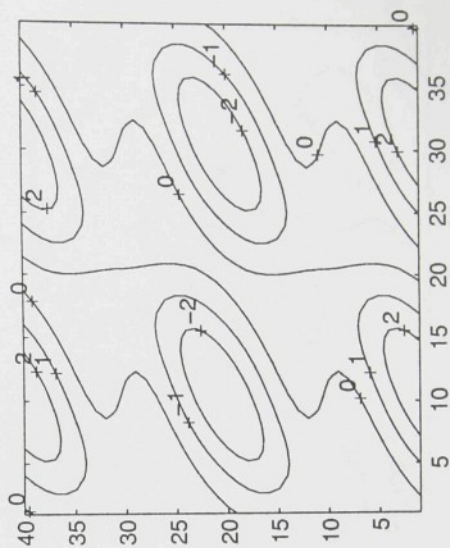
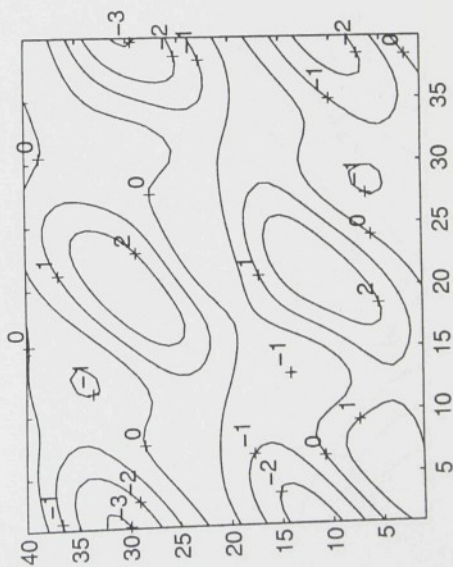
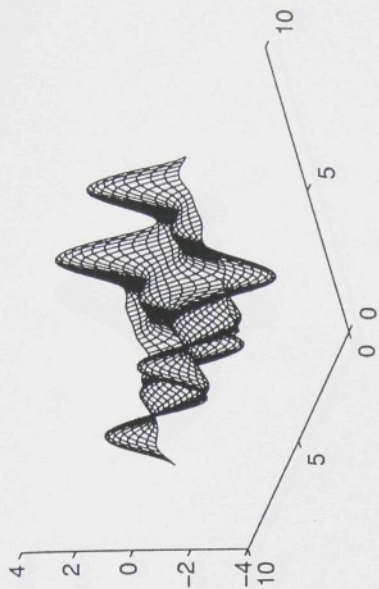
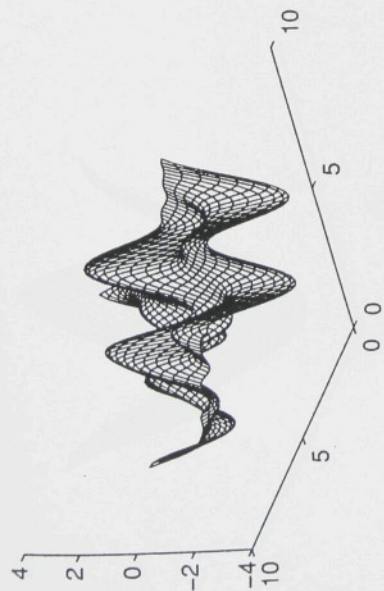
Sxz pro $u_y = \sin(y)$, $u_x = u_z = 0$



Obr. 17

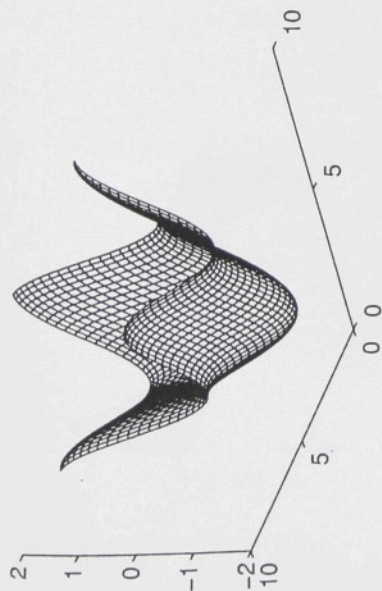


Obr. 18

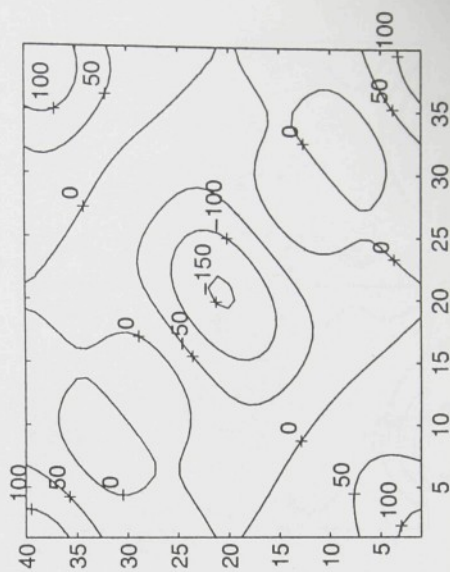
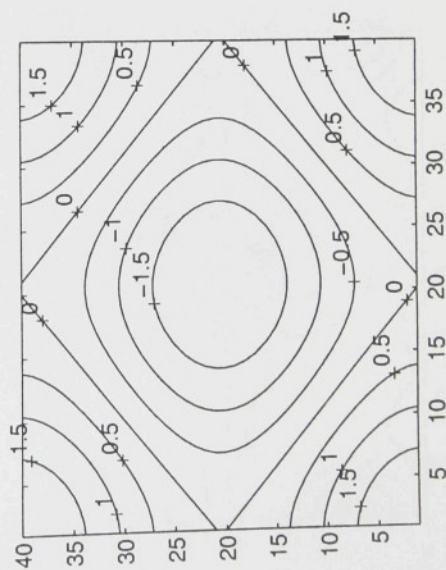
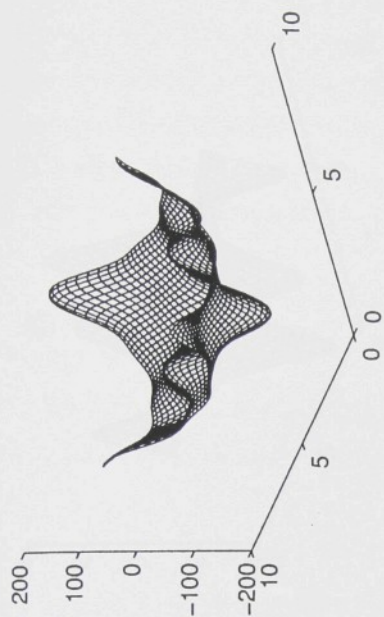


Obr. 19

Exy pro $ux=\sin(y)$, $uy=\sin(x)$, $uz=0$

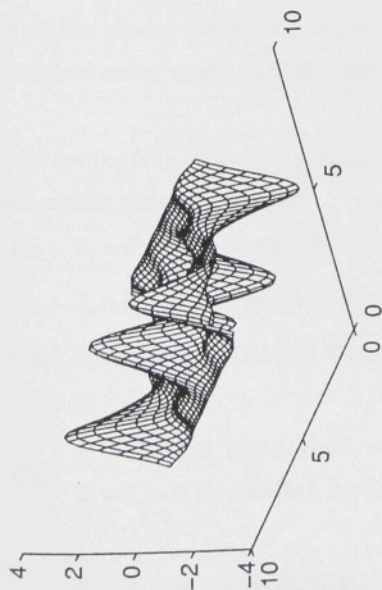


Sxy pro $ux=\sin(y)$, $uy=\sin(x)$, $uz=0$

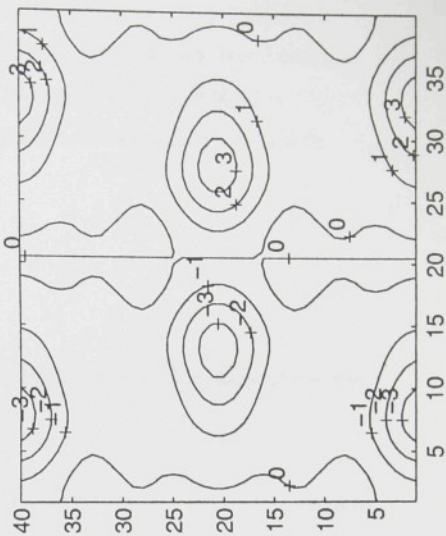
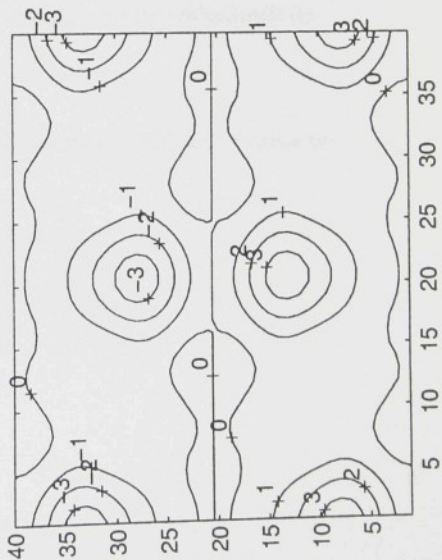
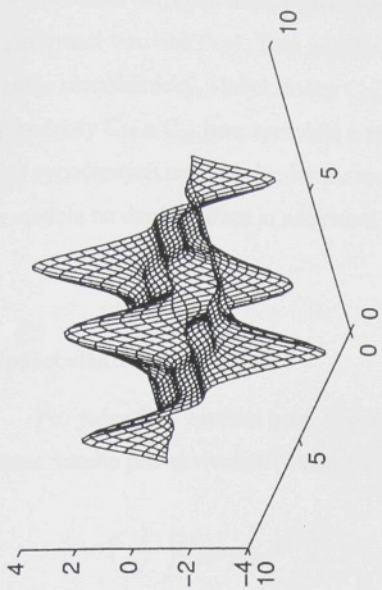


Obr. 20

Syz pro $ux=\sin(y)$, $uy=\sin(x)$, $uz=0$



Sxz pro $ux=\sin(y)$, $uy=\sin(x)$, $uz=0$



Obr. 21

objevují velmi malá smyková napětí v rovinách (x,z) a (y,z) jako odezva na normálnou i smykovou deformaci v rovině (x,y) . Tato napětí vznikají v důsledku toho, že materiál elementů uvnitř nití je monoklinický, i když složky C_{14} a C_{25} jejich tenzoru tuhosti jsou zanedbatelné a největší hodnoty C_{15} a C_{24} jsou zpravidla o řád nižší než nejmenší hodnota složky C_{33} .

O vypočtených napětích lze konstatovat, že se shodují s očekávanými průběhy a že odezva modelu na daná zatížení je adekvátní.

6.5 Výpočet efektivních modulů

Pro jednotlivá zatížení byla vypočtena energie napjatosti v RVE a dosazena na pravou stranu vztahu pro ekvivalenci energie napjatosti

$$\left(\frac{1}{V} \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV \right)^{Ef} = \left(\frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \right)^{RVE}, \quad (6.8)$$

kde na levé straně je energie napjatosti ve stejném elementu efektivního materiálu shodně zatíženém jako RVE.

Vzhledem k charakteru zatížení posuvy ve tvaru ortogonálních bázových funkcí (6.1), je nutné zatížení vhodně kombinovat tak, aby objemový integrál ze součinu příslušných deformací na levé straně vztahu (6.8) byl různý od nuly.

Pro získání rovnic (6.8), ve kterých jsou nenulové koeficienty pouze u složek C_{ii} matice tuhosti byla použita následující zatížení:

$$C_{11} : \tilde{u}_y = \tilde{u}_z = 0, \tilde{u}_x = \cos(kx) \vee \tilde{u}_x = \sin(kx), \quad k = 1, \dots, 5;$$

$$C_{22} : \tilde{u}_x = \tilde{u}_z = 0, \tilde{u}_y = \cos(ky) \vee \tilde{u}_y = \sin(ky), \quad k = 1, \dots, 5;$$

$$C_{33} : \tilde{u}_x = \tilde{u}_y = 0, \tilde{u}_z = \sin(kz), \quad k = 1, \dots, 5;$$

$$C_{44} : \begin{matrix} \tilde{u}_x = \tilde{u}_y = 0, \tilde{u}_z = \cos(ky) \vee \tilde{u}_z = \sin(ky); \\ \tilde{u}_x = \tilde{u}_z = 0, \tilde{u}_y = \sin(kz), \quad k = 1, \dots, 5 \end{matrix};$$

$$C_{55} : \begin{matrix} \tilde{u}_x = \tilde{u}_y = 0, \tilde{u}_z = \cos(kx) \vee \tilde{u}_z = \sin(kx); \\ \tilde{u}_y = \tilde{u}_z = 0, \tilde{u}_x = \sin(kz), \quad k = 1, \dots, 5 \end{matrix};$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_y = \tilde{u}_z = 0, \tilde{u}_x = \cos(ky) \vee \tilde{u}_x = \sin(ky), \\ C_{66} : \tilde{u}_x = \tilde{u}_z = 0, \tilde{u}_y = \cos(kx) \vee \tilde{u}_y = \sin(kx), k = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Pro získání složek, které vážou normálná napětí a normálné deformace v rozdílných rovinách jsou nutné následující kombinace zatížení:

$$C_{12}: \begin{aligned} \tilde{u}_z = 0, \tilde{u}_x = \cos(jx)\sin(ky) \wedge \tilde{u}_y = \sin(jx)\cos(ky), \quad j, k = 1, \dots, 5 \\ \tilde{u}_z = 0, \tilde{u}_x = \cos(jx)\cos(ky) \wedge \tilde{u}_y = \sin(jx)\sin(ky), \quad j, k = 1, \dots, 5, \end{aligned}$$

$$C_{13}: \begin{aligned} \tilde{u}_y = 0, \tilde{u}_x = \sin(jx)\cos(kz) \wedge \tilde{u}_z = \cos(jx)\sin(kz), \quad j, k = 1, \dots, 5 \\ \tilde{u}_y = 0, \tilde{u}_x = \cos(jx)\cos(kz) \wedge \tilde{u}_z = \sin(jx)\sin(kz), \quad j, k = 1, \dots, 5, \end{aligned}$$

$$C_{23}: \begin{aligned} \tilde{u}_x = 0, \tilde{u}_y = \sin(jy)\cos(kz) \wedge \tilde{u}_z = \cos(jy)\sin(kz), \quad j, k = 1, \dots, 5 \\ \tilde{u}_x = 0, \tilde{u}_y = \cos(jy)\cos(kz) \wedge \tilde{u}_z = \sin(jy)\sin(kz), \quad j, k = 1, \dots, 5, \end{aligned}$$

Počet kombinací zatížení se rovnal 120. Pro každé zatížení byly určeny průběhy jednotlivých složek napětí a pro ně vypočtena energie napjatosti a dosazena do vektoru pravé strany soustavy lineárních rovnic (6.8) pro určení efektivních tuhostí. Výsledkem byla soustava 720 lineárních rovnic pro 21 neznámých složek tenzoru tuhosti. Hodnota matice soustavy je 9, což implikuje devět nezávislých složek tenzoru tuhosti a ortotropní efektivní materiál. Po vyloučení lineárně závislých sloupců pomocí Gauss-Jordanovy eliminace s pivotingem, byla tato soustava řešena Q-R rozkladem [39].

Totožného výsledku bylo dosaženo i řešením pomocí nejmenších čtverců s podmínkou, že vektor výsledného řešení bude mít pouze kladné složky. Lze použít i zobecněné inverze matice soustavy – tzv. pseudoinverze a dalších nástrojů, kterých dnes nabízí každý toolbox numerické lineární algebry celou řadu.

6.6 Výsledky

Tenzor tuhosti efektivního materiálu vypočtený uvedeným způsobem:

$$C_{ef} = \begin{bmatrix} 80.2 & 22.6 & 17.3 & 0 & 0 & 0 \\ 22.6 & 79.1 & 17.3 & 0 & 0 & 0 \\ 17.3 & 17.3 & 53.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 23.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 23.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40.8 \end{bmatrix}$$

a inženýrské konstanty efektivního materiálu: $E_x \doteq E_y = 70$ GPa, $E_z = 48$ GPa, $G_{yz} = G_{zx} = 23.4$ GPa, $G_{xy} = 40.8$ GPa, $\nu_{xy} \doteq \nu_{yx} = 0.23$, $\nu_{zx} = \nu_{yz} = 0.17$.

Vyjdeme-li z pružnostních konstant materiálu matrice a výztuže a z objemových podílů matice $V_M = 0.6$ a výztuže $V_x = V_y = 0.2$ a vypočteme-li průměrný tenzor tuhosti našeho kompozitního materiálu pomocí 'iso-strain' neboli 'stiffness averaging' metody podle vztahu (6.8) bez ohledu na zvlnění nití, dostaneme odhad složek tuhosti:

$$C_s = \begin{bmatrix} 81.6 & 16.6 & 16.1 & 0 & 0 & 0 \\ 16.6 & 81.6 & 16.1 & 0 & 0 & 0 \\ 16.1 & 16.1 & 53.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 42.0 \end{bmatrix}$$

Z udivující shody v některých položkách lze soudit, že model výpočtu efektivních vlastností textilního kompozitu navržený v této práci postihuje skutečnost a že jeho poměrně komplikovaná numerická realizace je správná.

7. Vlastní frekvence desky z ortotropního materiálu

Vzhledem k tomu, že v současnosti jsou prováděna měření vlastních frekvencí desek z C-C kompozitů vyztužených tkaninou plátnové vazby, uveďme zde výpočet ohybových vlastních frekvencí ortotropní desky z efektivního materiálu, které by v budoucnu bylo možné porovnat s výsledky těchto měření.

Mějme obdélníkovou desku $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ konstantní tloušťky h . Zahrneme-li vliv příčného zkosu, pak podle Timošenkovy-Mindlinovy teorie desek můžeme vyjádřit složky posuvů pomocí funkcí $\psi_x(x, y, t)$ a $\psi_y(x, y, t)$ jako

$$u_x = z\psi_x, \quad v_y = z\psi_y, \quad w_z = w(x, y, t),$$

pro složky deformace dostáváme vztahy

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= z\psi_{x,x}, & \varepsilon_y &= z\psi_{y,y}, & \varepsilon_z &= 0, \\ \gamma_{xy} &= z(\psi_{y,x} + \psi_{x,y}), & \gamma_{xz} &= w_{,x} + \psi_x, & \gamma_{yz} &= w_{,y} + \psi_y. \end{aligned}$$

Kinetická energie desky bude

$$T = \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\rho}{2} \left[z^2 (\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2) + \dot{w}^2 \right] dx dy dz.$$

Položíme-li

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12z}{h^3} M_x, & \sigma_y &= \frac{12z}{h^3} M_y, & \tau_{xy} &= \frac{12z}{h^3} M_{xy}, \\ \tau_{xz} &= \frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] Q_x, & \tau_{yz} &= \frac{3}{2h} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] Q_y, \end{aligned}$$

pak Reissnerův funkcionál (4.18) lze vyjádřit ve tvaru:

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \int_0^a \int_0^b \{ M_x \psi_{x,x} + M_y \psi_{y,y} + M_{xy} (\psi_{y,x} + \psi_{x,y}) + Q_x (w_{,x} + \psi_x) + Q_y (w_{,y} + \psi_y) - \\ & - \tilde{p}w - \frac{6}{h^3} \left(\frac{M_x^2}{E_x} - 2\nu_{xy} \frac{M_x M_y}{E_x} + \frac{M_y^2}{E_y} + \frac{M_{xy}^2}{G_{xy}} \right) - \frac{3}{5h} \left(\frac{Q_x}{G_{xz}} + \frac{Q_y}{G_{yz}} \right) \} dx dy - \\ & - \int_{C_p} (\tilde{M}_{xv} \psi_x + \tilde{M}_{yv} \psi_y + \tilde{V}_z w) ds - \int_{C_u} [P_x (\psi_x - \tilde{\psi}_x) + P_y (\psi_y - \tilde{\psi}_y) + R(w - \tilde{w})] ds, \end{aligned}$$

kde $\tilde{p}(x, y)$ je příčné zatížení desky ve směru osy z na jednotku střední plochy, ostatní veličiny označené vlnovkou jsou předepsaná zatížení a deformace na bočním okraji desky:

$$\tilde{M}_{xv} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tilde{F}_x z dz, \quad \tilde{M}_{yv} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tilde{F}_y z dz, \quad \tilde{V}_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tilde{F}_z dz,$$

kde $\tilde{F}_x, \tilde{F}_y, \tilde{F}_z$ jsou složky předepsaných vnějších sil na jednotku plochy na boční části povrchu Γ_p , křivky C_p a C_u jsou části obrysu desky, na kterých jsou předepsány vnější síly nebo deformace. Lagrangeovy multiplikátory P_x, P_y a R mají význam staticky neurčitých reakcí v předepsaných vazbách.

Po dosazení do funkcionálu (4.18) a po variacích podle $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y, \psi_x, \psi_y, w, P_x, P_y$ a R dostáváme pro $\tilde{p}(x, y) = 0$ ze stacionární podmínky (4.19) po integraci per partes okrajové podmínky, počáteční podmínky a následující diferenciální rovnice úlohy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{12}{E_x h^3} M_x + \frac{12\nu_{xy}}{E_x h^3} M_y &= 0, \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{12}{E_y h^3} M_y + \frac{12\nu_{xy}}{E_x h^3} M_x &= 0, \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{12\nu_{xy}}{G_{xy} h^3} M_{xy} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x - \frac{6}{5hG_{xz}} Q_x &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y - \frac{6}{5hG_{yz}} Q_y &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{I}_m \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \tilde{I}_m \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} + Q_y - \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} &= 0, \\ \tilde{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \tilde{p} &= 0.\end{aligned}$$

S označením $\tilde{I}_m = \rho h^3/12$, $\tilde{m} = \rho h$.

V našem případě je $E_x = E_y$, $\nu_{xy} = \nu_{yx}$, $G_{xz} = G_{yz}$. Vyloučíme-li těchto rovnic momenty a příčné síly, dostaneme tři rovnice pro neznámé posuvy w, ψ_x a ψ_y :

$$\begin{aligned}D_t \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left(D_o \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} (\nu_{xy} D_o + D_{xy}) + \tilde{I}_m \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} &= 0, \\ D_t \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \left(D_o \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} (\nu_{xy} D_o + D_{xy}) + \tilde{I}_m \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} &= 0, \\ D_t \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \tilde{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0,\end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\text{kde } D_o = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy}^2)}, \quad D_{xy} = \frac{G_{xy} h^3}{12} \quad \text{a} \quad D_t = \frac{5}{6} G_{xz} h.$$

Pro desku prostě podepřenou na celém okraji budou okrajové podmínky ve tvaru:

$$\begin{aligned}w &= 0, M_x = 0, \psi_y = 0 \quad \text{pro } x = 0, x = a; \\ w &= 0, M_y = 0, \psi_x = 0 \quad \text{pro } y = 0, y = b;\end{aligned}$$

Řešení soustavy (7.1) můžeme předpokládat ve tvaru:

$$\begin{aligned}w &= w_o \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \omega_{mn} t, \\ \psi_x &= \alpha \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \omega_{mn} t, \\ \psi_y &= \beta \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \omega_{mn} t.\end{aligned} \quad (7.2)$$

Dosažení do soustavy (7.1) vede na problém vlastních hodnot:

$$\begin{aligned} w_o D_t A + \alpha (D_t + D_o A^2 + D_{xy} B^2 - \tilde{I}_m \omega_{mn}^2) + \beta AB (v_{xy} D_o + D_{xy}) &= 0, \\ w_o D_t B + \alpha AB (v_{xy} D_o + D_{xy}) + \beta (D_t + D_o B^2 + D_{xy} A^2 - \tilde{I}_m \omega_{mn}^2) &= 0, \\ w_o \left(A^2 + B^2 - \frac{\tilde{m} \omega_{mn}^2}{D_t} \right) + \alpha A + \beta B &= 0, \end{aligned} \quad (7.3)$$

kde $A = m\pi/a$ a $B = n\pi/b$. Determinant soustavy musí být roven nule a z této podmínky dostáváme rovnici šestého stupně pro úhlovou frekvenci ω_{mn} .

Pro čtvercovou desku tloušťky h , $a=b$, z uvedeného typu ortotropního materiálu, po označení:

$$P = \left(\frac{E_x}{1 - \nu_{xy}^2} \right) \frac{G_{xy}}{G_{xz}} + \frac{G_{xy}}{G_{xz}}; \quad T = \frac{\rho h^2}{G_{xz}}; \quad r = m\pi \frac{h}{a},$$

dostáváme pro $m=n$ následující vlastní frekvence:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{r^2 (6P + 5) + 30 \pm S} / 6T, \quad \omega_3 = \sqrt{10/T},$$

$$S = [r^4 (25 - 60P + 36P^2) + r^2 (300 + 360P) + 900]^{1/2}.$$

Pro $m=1$, $h/a=1/20$, $h=5$ mm a $\rho=1.81$ g/cm³ dostáváme tři vlastní frekvence, z nichž nejnižší odpovídá ohybovým kmitům – odpovídající vlastní kmitočet je $f_1 = 3.05$ kHz, další dvě frekvence, které jsou mnohem vyšší (kmitočet 366 kHz a 361 kHz), dostáváme v důsledku zahrnutí příčné smykové deformace a rotační inercie [35].

Vypočteme-li vlastní frekvence pro izotropní desku $E = E_x$, $\nu = \nu_{xy}$, $G = E_x/2(1 - \nu_{xy}^2)$, dostáváme kmitočet ohybových kmitů $f_{il}=3.53$ kHz, tedy přibližně o 15% vyšší, než pro ortotropní desku.

Pro srovnání je připraven i výpočet vlastních frekvencí desky metodou MKP na základě cihlového modelu kompozitního materiálu.

8. Závěr

Byl navržen a realizován 3-D mikromechanický model pro výpočet efektivních elastických vlastností kompozitů vyztužených tkaninou plátňové vazby. Model vystihuje základní zákonitosti mechaniky daného materiálu. Získané výsledky numerické realizace modelu jsou ve shodě se skutečností. Model lze využít ke studiu vlivu parametrů geometrie výztuže a mechanických vlastností materiálu jednotlivých komponent na výsledné vlastnosti kompozitu.

K posouzení možnosti kvantitativního vyhodnocení materiálových vlastností pomocí tohoto modelu zatím chybí srovnání s experimentálně stanovenými hodnotami.

Model je založen na předpokladu lineárně elastického chování a perfektní vazby mezi jednotlivými složkami struktury kompozitu. Jak ukazují výsledky měření mikrostruktury na vzorcích kompozitu, mají dané kompozity celou řadu vnitřních vad provázejících složitou technologii vytváření matrice. Tyto vady mechanické vlastnosti kompozitu výrazně ovlivňují. Vliv některých z nich jako je kupř. pórovitost matrice, nepravidelnosti průběhu nití výztuže a tvaru jejich průřezu, nerovnoměrný obsah matrice v nitích výztuže ap. lze do modelu zahrnout.

Během práce na modelu se objevila celá řada zajímavých dílčích problémů, jejichž řešení se lze v budoucnu podrobně věnovat:

- 1) Podrobně prozkoumat možnost použití cihlového modelu spolu s metodou konečných prvků a to jak k určení efektivních modulů pomocí simulovaných materiálových testů, tak i k napětíové analýze kompozitních součástí. Model MKP mohou tvořit pravidelné elementy typu "brick" s odlišnými tuhostmi vypočtenými metodou diskretizace, která byla navržena a realizována v této práci. Data pro takovýto MKP model jsou již připravena.
- 2) Určit přesnost aproximace 3-D rozložení mechanických vlastností spojitými funkcemi dvou a tří prostorových souřadnic, která byla popsána v odstavci 5.3.5 a v prvním přiblížení i realizována. Zároveň ověřit její použití při výpočtu variace energie napjatosti v RVE a vliv této aproximace na výsledné hodnoty efektivních tuhostí.
- 3) Při výpočtu tuhostí elementů RVE uvnitř nití výztuže využít i dalších známých modelů kompozitního materiálu pro jednosměrné kompozity a určit hranice, ve kterých se mohou

pohybovat efektivní moduly.

- 4) Realizovat vstup dalších geometrických dat z měření mikrostruktury do výpočtového modelu.
- 5) V další etapě lze model snadno přizpůsobit pro výpočet efektivních modulů kompozitů s jinými typy textilních výztuží, u kterých je přípustný předpoklad existence RVE. Jsou to různé typy 2-D a 3-D tkanin a pletenin, pro které lze buď sestavit matematický model geometrie jejich periodicky se opakující základní buňky, nebo její parametry přímo odměřit s dostatečnou podrobností na skutečných vzorcích kompozitu.
- 6) Prozkoumat vliv počtu elementů, na které je rozdělen RVE, na výsledné efektivní moduly a stanovit jejich minimální počet v závislosti na typu tkaniny výztuže .
- 7) Jako alternativu k dosud používanému zatížení použít i smíšené okrajové podmínky – zejména uvolnit vazby ve směru kolmém na rovinu (x,y) tj. určit mechanické vlastnosti tenké laminy v této rovině.
- 8) Podrobnějšího prozkoumání by rovněž zasluhovala numerická stránka modelu – stupně volnosti řešení závěrečné přeuročené soustavy lineárních rovnic s nižší hodnotou matice soustavy, než je počet neznámých.
- 9) Systematicky provádět parametrické výpočty tak, aby bylo možné stanovit základní závislosti mezi charakteristickými parametry výztuže (distribuce úhlu sklonu, koeficient provázání, koeficient zvlnění, objemové podíly, mechanické vlastnosti složek) a efektivními mechanickými vlastnostmi a navrhnout jednoduchý způsob jejich výpočtu.

Řešení daného problému poskytlo autorce této práce nejen výsledky použitelné v praxi, ale i radost z hledání a uspokojení z překonávání těžkostí, se kterými se na své cestě za poznáním setkávala.

9. Literatura

- [1] Mechanics of Composite Materials (1974), Volume 2, Ed. Sendeckyj, G.P., Academic Press, N.Y.
- [2] Christensen, R.M. (1982) Vvedenie v mehaniku kompozitov, Mir, Moskva
- [3] Hearmon, R.F.S. (1965) Úvod do teorie pružnosti anizotropních látek, SNTL, Praha
- [4] Lei, C., Wang, A.S., and Ko, F.K. (1988), A finite cell model for 3-D braided composites, in Proc. of ASME Winter Annular Meeting, pp. 123-132, Chicago, ASME
- [5] Kuhn, J.L., Charalambides, P.G. (1999) Modeling of plain weave fabric composite geometry, J. of composite materials, Vol.33, No. 3, pp. 188-220
- [6] Kuhn, J.L., Charalambides, P.G. (1998) Elastic response of porous matrix plain weave fabric composites: Part I - modeling, J. of composite materials, Vol.32, No.16, pp.1426-69
- [7] Kuhn, J.L., Charalambides, P.G. (1998) Elastic response of porous matrix plain weave fabric composites: Part II - results, J. of composite materials, Vol.32, No.16, pp.1472-1507
- [8] Kuhn, J.L., Haan, S.I., Charalambides, P.G. (1999) A semi-analytical method for the calculation of the elastic micro-fields in plain weave fabric composites subjected to in-plane loading, J.of Composite Materials, Vol.33, No.3, pp. 221-260
- [9] Bigaud, D., Bonnel, P., Hamelin, P., (1995) Geometric modeling software for reinforced textile composites, in Proc. of Euromech 334, pp.102-115, Lyon
- [10] Blacketter, D.M., Walrath, D.E., Hansen, A.C. (1993). Modeling damage in plain weave fabric reinforced composite materials. J.of Composites Technology And Research 15 (2), pp. 136-142
- [11] Chou, T.-W., Ishikawa, T., (1989) Analysis and Modeling of Two-Dimensional Fabric Composites – Chap.7 in Textile Structural Composites, Ed. Chou, T.-W. & Ko, F.K., Elsevier, Amsterdam
- [12] Lechnickij, S.G., (1977) Teoria uprugosti anizotropnogo tela, Nauka, Moskva
- [13] Sankar, B.V., Marrey, R.V. (1993) A unit-cell model of textile composite beams for predicting stiffness properties. Composite Science and Technology, 49 (1), pp. 61-69
- [14] Sendeckyj, G.P. (1970) Longitudinal shear modulus of filamentary composite containing curvilinear fibers, Fibre Science and Technology 2, pp. 211-222
- [15] Tarnopolskij, J.G., Portnov, G.G., Zigun, I.G., (1967) Effect of fiber curvature on the modulus of elasticity for unidirectional glass-reinforced plastics in tension, Mechanika polymerov 3(2), pp. 243-249

- [16] Tarnopolskij, J.G., Poljakov, V.A., Zigun, I.G., (1973) Composite materials reinforced with a system of three straight, mutually orthogonal fibers, 1: calculation of elastic characteristic. *Polymer mechanics* 5, pp. 853-860
- [17] Roze, A.V., Zigun, I.G., (1970) Three-dimensionally reinforced fabric materials, 1: Calculation model. *Polymer mechanics* 6 (2), pp. 311-318
- [18] Roze, A.V., Zigun, I.G., Dusin, M.I. (1970) Three-dimensionally reinforced woven materials, 2: Experimental study. *Polymer mechanics* 6 (2), pp. 319-332
- [19] Chou, T.-W., Yang, J.M., Ma, C.L. (1986) Fiber inclination model of three-dimensional textile structural composite, *J.of Composite Materials* 20, pp. 472-484
- [20] Bogdanovich, A.E., Pastore, C.M., (1996) *Mechanics of textile and laminated composites*, Chapman&Hall, N.Y.
- [21] Marvalová, B. (1999) *Mechanické vlastnosti kompozitů vyztužených tkaninou*, TRANSFER '99, VUT, Brno
- [22] Marvalová, B. (1999) *Určení pružnostních charakteristik kompozitu vyztuženého tkaninou.*, Strutex 99, TU, Liberec
- [23] Marvalová, B. (2000) *Prediction of elastic properties of textile reinforced composites*, Inženýrská mechanika 2000, Svratka
- [24] Marvalová, B. (2000) *Computation of micro-stress fields in plain-weave fabric composites*, Texsci 2000, Liberec
- [25] Vandeuren, P., Ivens, J., Verpoest, I., (1995) Extended analytical modeling of the elastic properties of woven fabric composites, in *Proc. of Euromech 334*, pp.140-153, Lyon
- [26] Košek, M., Košková, B.(1999) Analysis of yarn wavy path periodicity of textile composites using discrete Fourier transform, *Proc.of ICCE/6*, Orlando
- [27] Košková, B., Vopička, S., Glogar, P. (1999) Quantitative description of yarn undulation in fabric reinforced composites using inclination angle distribution, *ICCE/6*, Orlando
- [28] Burešová, M. (1998) Klasifikace rozdělení pórů ve 2-D C-C kompozitech, *STRUTEX 98*, TU v Liberci, pp. 164-172
- [29] Košková, M., Hejzlarová, H. (1996) Identification of carbon textile reinforcements anisotropy, *Technitex 96*, Torino
- [30] Vopička, S., Košková, B., Glogar, P. (1998) Approximation of actual yarn shape in textile composites using cubic splines, *Proc. of TEXSCI 98*, pp. 580-3, Liberec
- [31] Liao, T., Adanur, S. (1998) A novel approach to three-dimensional modeling of interlaced fabric structures, *Textile Res.J.* 68(11), pp.841-847

- [32] Naik, N.K., Ganesh, V.K. (1992) Prediction of on-axes elastic properties of plain weave fabric composites, *Composites Science and Technology* 45, 135-152
- [33] Marvalová, B., (1978) Využití splajnových funkcí pro stanovení okamžité rychlosti dynamické trhliny, *EAN* 78, Smolenice
- [34] Wasidzu, K., (1987), *Variacionnye metody v uprugosti i plasticnosti*, Mir, Moskva
- [35] Vinson, J.R., Chou, T.-W. (1975) *Composite materials and their use in structures*, Applied Science Publishers LTD, London
- [36] Höschl, C. (1992) *Pružnost a pevnost I, II*, TU Liberec
- [37] Juliš, K., Brepta, R. a kol. (1987) *Mechanika II – Dynamika*, SNTL, Praha
- [38] Lechnickij, S.G., (1977) *Teorija uprugosti anizotropnovo tela*, Mir, Moskva
- [39] Marvalová, B., (1993) *Napjatost v tenkých deskách s trhlinou*, Kandidátská práce, Liberec
- [40] Rektorys, K., (1974) *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*, SNTL, Praha
- [41] Kolář, V. & kol., (1972) *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*, SNTL, Praha
- [42] Šulcová, D., Myslivec, M., (1998) Rychlá a jednoduchá grafická metoda stanovení geometrického průběhu nití v textilních kompozitech, *Sb. semináře STRUTEX 98*, TU Liberec, pp.151-157
- [43] Pierce, F.T. (1937) The geometry of cloth structure, *Journal of textile institute*, Vol.28, p. 45-96
- [44] Okrouhlík, M., Höschl, C., Plešek, J., Pták, S., Nadrchal, J., (1997) *Mechanika poddajných těles, numerická matematika a superpočítače*, Ústav termomechaniky, Praha

10. Příloha – CD s programy v MATLABu