Technická univerzita v Liberci

Fakulta pedagogická

Systémy majoritního zálohování v automatickém řízení a jejich spolehlivost

Habilitační práce

RNDr. Miroslav Koucký, CSc.

Liberec, září 2003

„Každá uplývající hodina přibližuje naší sluneční soustavu o sedmdesát tisíc kilometrů ke kulové hvězdokupě M13 v souhvězdí Herkula – a přesto se stále najdou škarohlídové, kteří tvrdí, že nic takového jako pokrok neexistuje.“

Ransom K. Fern

Obsah

1. Úvod

S aplikacemi teorie spolehlivosti se lze dnes setkat téměř ve všech oblastech lidské činnosti a z tohoto pohledu má interdisciplinární charakter. Kromě technických disciplín, kde se problematika spolehlivosti studovala jako první a odkud přicházely a dosud přicházejí nejvýznamnější podněty pro její rozvoj, se pojem spolehlivost vyskytuje v různé formě a míře i v dříve neobvyklých oborech – ekonomii, sociologii, psychologii, vzdělávání apod.

Hlavní okruhy otázek spojené s aplikacemi teorie spolehlivosti v technické praxi jsou nejen problematika kvantifikace spolehlivosti (pomocí tzv. ukazatelů, např. pravděpodobnosti bezporuchového provozu apod.), ale i tzv. řízení spolehlivosti, které lze chápat jako obecné postupy vedoucí k dosažení, resp. zajištění požadované úrovně spolehlivosti. Existuje celá řada metod a postupů vhodných pro různé aplikační oblasti. Například zavedení režimu preventivní údržby, který spočívá v organizované a pravidelně prováděné kontrole a výměně komponent systému, umožňuje předejít vzniku poruch, resp. dostatečně včas je odhalit, a ve svém důsledku vede ke zvýšení spolehlivosti systému i při stávají úrovni spolehlivosti jeho prvků. Tento postup nachází uplatnění především u již provozovaných systémů a jeho hlavní předností je skutečnost, že není třeba do systému konstrukčně zasahovat. Nevýhodou, zvláště u složitých systémů, je její organizační a technicko-ekonomické zabezpečení, zejména při požadavku na optimalizaci nákladů. Jinou metodou je postup, kdy se komponenty systému nahrazují tak spolehlivými, aby bylo dosaženo požadované úrovně systémové spolehlivosti. Značnou nevýhodou tohoto přístupu je skutečnost, že náklady na zvyšování spolehlivosti nerostou lineárně a tudíž od jisté úrovně je tento postup prakticky nerealizovatelný.

Praxe, ale i teorie ukazují, že jedním z nejefektivnějších a nejuniverzálnějších způsobů, kterým lze požadovanou úroveň spolehlivosti dosáhnout, je aplikace systémů majoritního zálohování. Jde o metodu, kdy spolehlivostně kritické funkce, resp. komponenty, subsystémy jsou vhodným způsobem zálohovány. Uvedený postup je typický právě pro oblast automatického řízení. Tuto skutečnost lze doložit celou řadou příkladů nejenom z odborné literatury (systémy automatického řízení v letectví, kosmonautice, telekomunikacích a vojenství), ale i z oblasti zájmu autora – jaderné energetiky, kde naprostá většina řídicích (samozřejmě i technologických) systémů je založena na systémech majoritního zálohování. Jejich rozhodujícími přednostmi jsou vysoká spolehlivost, strukturální jednoduchost a obecně nízké náklady.

Cíle habilitační práce

Lze konstatovat, že přes zcela zásadní význam systémů majoritního zálohování, vyplývající především z počtu jejich aplikací, není dle názoru autora tato problematika v běžně dostupné literatuře komplexně zpracovaná. V zahraniční literatuře, převážně technického zaměření, se objevují články, které se zabývají různými aspekty výpočtu ukazatelů spolehlivosti jednotlivých typů systému majoritního zálohování. V české literatuře nejsou autorovi známy, kromě [HR, Ko1, Ko2, St1, St2]†, žádné další publikace zabývající se touto problematikou.

Cílem habilitační práce je systematicky zpracovat problematiku výpočtu základních ukazatelů spolehlivosti systémů majoritního zálohování, především s důrazem na její praktické využití v oblasti moderních vysoce spolehlivých systémů automatického řízení. S ohledem na tento cíl byl také zvolen způsob zpracování uvedeného tématu. Snahou bylo dosáhnout dostatečně přesný a srozumitelný výklad, bez přílišných „teoretických formalit". Získané výsledky jsou v převážné většině původní, pouze v omezené míře převzaté z uváděných zahraničních zdrojů a jsou ve tvaru, který umožňuje jejich bezprostřední použití, resp. jejich počítačovou implementaci.

† Dalším neúplným zdrojem informací o těchto systémech je i informativní příloha B normy ČSN IEC 1165.

1.1 Klasifikace systémů majoritního zálohování

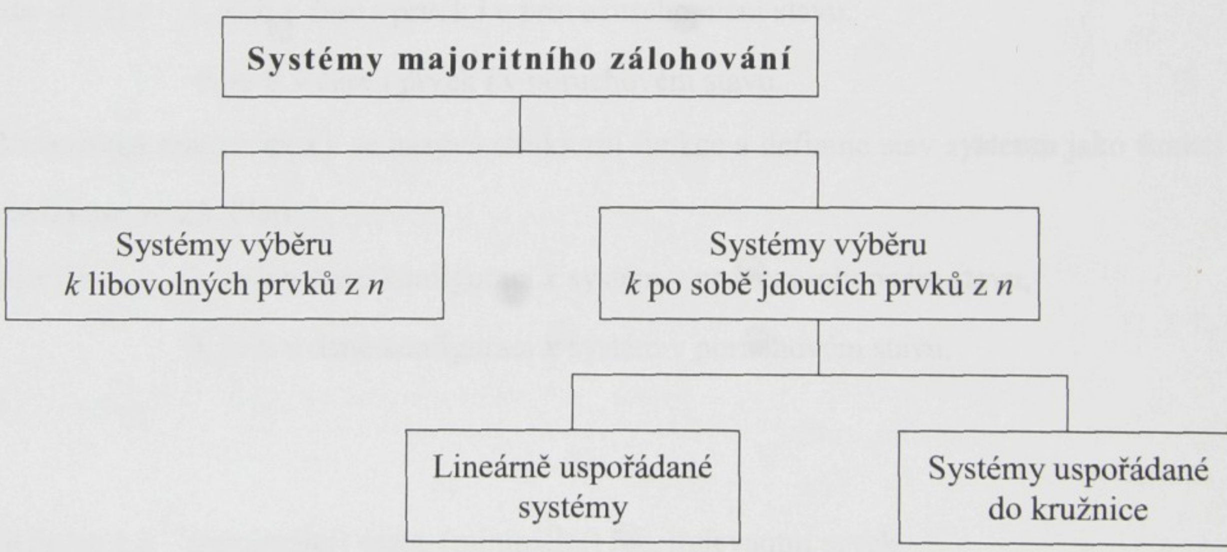
Systémy majoritního zálohování (také označované jako výběrové systémy) tvoří velmi obecnou a širokou třídu koherentních systémů. Podle jejich charakteristických rysů je lze rozdělit na různé typy. Je-li například rozhodující vlastností možnost obnovy, jde o tzv. obnovované, resp. neobnovované systémy majoritního zálohování. V rámci obnovovaných systémů lze zvolit jako další kritérium pro klasifikaci například strategii obnovy. V tomto případě pak může jít o systémy s omezenou, resp. neomezenou obnovou.

Z hlediska funkce výběrových systémů je však rozumné zvolit jako hlavní kritérium pro jejich klasifikaci definici poruchového, popř. provozuschopného stavu. Tímto způsobem lze dostat dva základní kvalitativně odlišné typy systémů:

- Systémy majoritního zálohování *k* libovolných prvků z *n* (systém výběru *k* libovolných prvků z *n*), jejichž provozuschopnost je zajištěna provozuschopností alespoň *k* (libovolných) prvků z celkového počtu *n*.
- Systémy majoritního zálohování *k* po sobě jdoucích prvků z *n* (systém výběru *k* po sobě jdoucích prvků z *n*), jejichž poruchový stav je definován poruchovým stavem alespoň *k* bezprostředně po sobě jdoucích prvků z celkového počtu *n*.

Hlavní rozdíl mezi oběma základními typy systémů spočívá ve významu pořadí porouchaných (provozuschopných) prvků na stav systému. Je zřejmé, že u výběrových systémů *k* libovolných prvků z *n* nehraje pořadí žádnou roli. O stavu systému rozhoduje pouze celkový počet provozuschopných, resp. porouchaných prvků, bez ohledu na to, o které prvky fyzicky jde. Typickou oblastí, kde tyto systémy nacházejí široká uplatnění, jsou vysoce spolehlivé ochranné a řídicí systémy (například systém vnitroreaktorové kontroly na Elektrárně Dukovany (EDU) využívá při vyhodnocování potřeby zásahu systémy majoritního zálohování *k* libovolných prvků z *n*), ale i technologické systémy (například systém napájení parogenerátorů v EDU tvoří výběrový systém dva ze tří, resp. dva z pěti; kompresorové stanice na tranzitním plynovodu tvoří výběrové systémy tři z pěti, resp. pět z devíti).

Naopak, v případě systémů výběru *k* po sobě jdoucích prvků z *n* hraje pořadí provozuschopných, resp. porouchaných prvků podstatnou roli. Stav systému je totiž určen počtem bezprostředně po sobě jdoucích prvků v poruchovém stavu a nikoliv jejich celkovým počtem, který může být výrazně větší než *k*. V závislosti na topologickém uspořádání prvků lze dostat dva typy systémů – systémy s lineárně uspořádanými prvky a systémy s prvky uspořádanými do kružnice. Klasickým příkladem využití lineárně uspořádaného systému majoritního zálohování (*k* po sobě jdoucích prvků z *n*)[†] je tlakové potrubí, na jehož trase je *n* kompresorových stanic. Jestliže při poruše jedné stanice je předcházející schopna tento výpadek nahradit a porucha systému nastává až v případě, kdy dvě bezprostředně po sobě jdoucí stanice jsou v poruchovém stavu, lze tento systém považovat za systém dvou po sobě jdoucích prvků z *n*, typ porucha. Další oblastí, kde jsou tyto systémy intenzivně využívány, jsou sofistikované systémy automatického řízení v oblasti letectví, kosmonautiky, telekomunikací a vojenství. Jednoduchou ukázkou využití systému *k* po sobě jdoucích prvků z *n* uspořádaného do kružnice může být i následovně organizovaná počítačová síť „ring“. Je-li například každý z *n* počítačů přímo propojen se dvěma bezprostředně následujícími, lze tento model sítě považovat za systém dvou po sobě jdoucích prvků z *n*, uspořádaný do kružnice. Přehled o hlavních typech systémů majoritního zálohování si lze učinit ze schématu na obr. 1.



Obr. 1 – klasifikace systémů majoritního zálohování

[†] První zmínky o využití těchto systémů se objevily v roce 1982 v souvislosti s projektem nového urychlovače elementárních částic v Brookhavenu a v souvislosti s problematikou návrhu integrovaných obvodů.

1.2 Přehled spolehlivostních pojmů a definic

Praxe ukazuje, že spolehlivost a pojmy s ní související bývají velmi často chápány intuitivně. Důsledkem z toho vyplývajícím jsou možná nedorozumění, což lze považovat za dostatečný důvod pro následují definice (včetně jejich standardních interpretací).

Definice 1.1 – spolehlivostní systém, konfigurační vektor, strukturní funkce

Nechť $\boldsymbol{X}(t)=(X_1(t),\dots,X_n(t))$, je n-rozměrná náhodná veličina, $\varphi(\boldsymbol{x})$ booleovská funkce, kde $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $x_i\in\{0,1\}$ je booleovský vektor. Potom uspořádanou dvojici $S=(\boldsymbol{X}(t),\varphi(\boldsymbol{x}))$ nazveme n prvkovým spolehlivostním systémem (krátce jen systémem).

Náhodný vektor $\boldsymbol{X}(t)$ se nazývá konfigurační vektor[†] a určuje stavy všech prvků systému (tzv. konfiguraci) v čase t. Náhodná veličina $X_i(t)$, $i\in\{1,\dots,n\}$ definuje stav i-tého prvku,

kde $X_i(t)=$ 1, je-li v čase t prvek i v provozuschopném stavu,

0, je-li v čase t prvek i v poruchovém stavu.

Booleovská funkce $\varphi(\boldsymbol{x})$ se nazývá strukturní funkce a definuje stav systému jako funkci stavů jeho prvků. Platí

$\varphi(\boldsymbol{x})=$ 1, je-li v dané konfiguraci $\boldsymbol{x}$ systém v provozuschopném stavu,

0, je-li v dané konfiguraci $\boldsymbol{x}$ systém v poruchovém stavu.

¤

Definice 1.2 – (minimální) cesta, (minimální) řez, irelevantní prvek

Konfigurace $\boldsymbol{x}$ se nazývá cesta, jestliže $\varphi(\boldsymbol{x})=1$.

Cesta $\boldsymbol{x}$ se nazývá minimální, jestliže pro libovolnou konfiguraci $\boldsymbol{y}$ platí:

$$(\boldsymbol{y}<\boldsymbol{x})\rightarrow\varphi(\boldsymbol{y})=0,$$

kde $\boldsymbol{y}<\boldsymbol{x}$, jestliže $(\forall i\in\{1,\dots,n\}(y_i\le x_i))\wedge(\exists j\in\{1,\dots,n\}(y_j<x_j))$.

[†] Označení konfigurační vektor se běžně používá i pro booleovský vektor $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$. Dále definujeme délku $s(\boldsymbol{x})$ konfigurace $\boldsymbol{x}$ jako $s(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i$.

Konfigurace $\boldsymbol{x}$ se nazývá se řez, jestliže $\varphi(\boldsymbol{x})=0$.

Řez $\boldsymbol{x}$ se nazývá minimální, jestliže pro libovolnou konfiguraci $\boldsymbol{y}$ platí

$$(\boldsymbol{y}>\boldsymbol{x}) \rightarrow \varphi(\boldsymbol{y})=1.$$

Prvek i se nazývá irelevantní, jestliže pro všechna $(\boldsymbol{x}|\bullet_i)$ platí

$$\varphi(\boldsymbol{x}|0_i)=\varphi(\boldsymbol{x}|1_i),$$

kde $(\boldsymbol{x}|\bullet_i)=(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$ a

$$(\boldsymbol{x}|0_i)=(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n),\ (\boldsymbol{x}|1_i)=(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n).$$

¤

Definice 1.3

Nechť $S=(\boldsymbol{X}(t),\varphi(\boldsymbol{x}))$ je spolehlivostní systém. Potom:

- Pravděpodobnost $R_S(t)$ bezporuchového provozu systému S v časovém intervalu $\langle 0,t\rangle$ je definována vztahem

$$R_S(t)=P\left(\min_{u\in\langle 0,\,t\rangle}\varphi(\boldsymbol{X}(u))=1\right).$$

- Funkce okamžité pohotovosti $A_S(t)$ systému S je definována vztahem

$$A_S(t)=P(\varphi(\boldsymbol{X}(t))=1),$$

a součinitel asymptotické pohotovosti A_S jako

$$A_S=\lim_{t\to\infty}A_S(t),$$

pokud uvedená limita existuje.

¤

Poznámka 1.1

- Z předchozích definic je zřejmé, že jde o tzv. dvoustavové systémy, kdy systém i jeho prvky se mohou vyskytovat pouze v jednom ze dvou navzájem se vylučujících stavech, označovaných nejčastěji jako provozuschopný (bezporuchový), resp. poruchový (provozuneschopný).

- Funkce $R_S(t)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že v průběhu časového intervalu $\langle 0,t\rangle$ nedojde k žádné poruše systému, tj. systém bude po celou dobu pouze v provozuschopném stavu. V některé literatuře bývá funkce $R_S(t)$ označována jako spolehlivostní funkce, resp. funkce bezporuchovosti, funkce přežití doby *t*.
- Pravděpodobnost poruchy systému v časovém intervalu $\langle 0,t\rangle$ budeme značit $\overline{R}_S(t)$. Je definována jako pravděpodobnostní doplněk $R_S(t)$, tj. $\overline{R}_S(t)=1-R_S(t)$.
- Hodnota funkce okamžité pohotovosti $A_S(t)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že v čase *t* bude systém v provozuschopném stavu (tedy nikoliv, že během intervalu $\langle 0,t\rangle$ nedojde k jeho poruše). Mezi oběma veličinami zřejmě platí vztah

$$R_S(t)\le A_S(t).$$

Speciálně v případě neobnovovaných systémů dostáváme $R_S(t)=A_S(t)$.

<u>Definice 1.4</u> – duální systém

Řekneme, že $S^D=\left(\boldsymbol{X}(t),\varphi^D(\boldsymbol{x})\right)$ je duální systém k $S=\left(\boldsymbol{X}(t),\varphi(\boldsymbol{x})\right)$, jestliže

$$\varphi^D(\boldsymbol{x})=1-\varphi(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{x}),$$

kde $\boldsymbol{1}-\boldsymbol{x}=(1-x_1,\ldots,1-x_n)$ je tzv. duální konfigurační vektor.

¤

Jako přímý důsledek této definice dostáváme následující užitečnou charakteristiku duálního systému - konfigurace $\boldsymbol{x}$ je (minimální) $\left\{\begin{matrix}\text{cesta}\\ \text{řez}\end{matrix}\right\}$ systému *S* právě tehdy, jestliže konfigurace $\boldsymbol{1}-\boldsymbol{x}$ je (minimální) $\left\{\begin{matrix}\text{řez}\\ \text{cesta}\end{matrix}\right\}$ duálního systému S^D. Odtud také $\left(S^D\right)^D=S$.

Vzhledem k tomu, že většina v práci uvažovaných ukazatelů spolehlivosti je vztahována k určitému časovému intervalu $\langle 0,t\rangle$ pevné délky, budeme pro zjednodušení zápisu proměnnou *t* zpravidla vynechávat. Naopak, v některých případech budeme pro zdůraznění závislosti pravděpodobnosti bezporuchového provozu systému na spolehlivostních parametrech jeho prvků používat obsáhlejší zápis, např. $R_S(\boldsymbol{p})$, kde $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_n)$ je vektor pravděpodobností bezporuchového provozu prvků systému.

Definice 1.5 – koherentní systém

Systém $S = (\boldsymbol{X}, \varphi(\boldsymbol{x}))$ se nazývá koherentní (monotónní), jestliže:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (\forall \boldsymbol{x}\ \varphi(\boldsymbol{x} \mid 1_i) \geq \varphi(\boldsymbol{x} \mid 0_i) \ \wedge \ \exists \boldsymbol{x}\ \varphi(\boldsymbol{x} \mid 1_i) > \varphi(\boldsymbol{x} \mid 0_i)).$$

¤

Poznámka 1.2

Koherentní systémy lze považovat, z praktického hlediska, za „standardně" se chovající systémy, neboť z vlastnosti uvedené v jejich definici vyplývá:

- Poruchový stav všech prvků vede k poruše systému, tj. $\varphi(0, \dots, 0) = 0$, a naopak v případě jejich provozuschopnosti je i systém provozuschopný, tj. $\varphi(1, \dots, 1) = 1$.
- Vztah definující koherentní systém bývá označován jako monotonie strukturní funkce a vyjadřuje skutečnost, že porucha žádného prvku nemůže „zlepšit" funkci systému, tj. způsobit přechod z poruchového do provozuschopného stavu, navíc systém zřejmě neobsahuje irelevantní prvky.

Definice 1.6 – importance prvků systému

Nechť $S = (\boldsymbol{X}, \varphi(\boldsymbol{x}))$ je koherentní systém. Potom:

- $$I_\varphi(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{(x \mid \bullet_i)} [\varphi(\boldsymbol{x} \mid 1_i) - \varphi(\boldsymbol{x} \mid 0_i)]$$

  se nazývá strukturní importance prvku i, $(i = 1, \dots, n)$,

- $$I_R(i) = \frac{\partial R_S(p_1, \dots, p_n)}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

  se nazývá spolehlivostní importance prvku i, $(i = 1, \dots, n)$.

¤

Poznámka 1.3

- Strukturní importance prvku udává poměrnou četnost konfigurací, ve kterých právě porucha uvedeného prvku vede ke změně stavu systému z provozuschopného do poruchového. Tento typ importance je mírou „důležitosti", která závisí pouze na struktuře systému a je invariantní vzhledem k pravděpodobnostem bezporuchového provozu prvků.
- Spolehlivostní importance je komplexnější ukazatel, který kromě struktury systému bere v úvahu také pravděpodobnosti bezporuchového provozu prvků. Interpretovat ji lze jako „spolehlivostní váhu" jednotlivých prvků v rámci systému, neboť

$$\frac{dR_S(p_1,\ldots,p_n)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial R_S(p_1,\ldots,p_n)}{\partial p_i}\cdot\frac{dp_i}{dt},$$

a tedy

$$\Delta R_S=\sum_{i=1}^{n} I_R(i)\cdot\Delta p_i\,.$$

Změnu pravděpodobnosti bezporuchového provozu systému lze tudíž vyjádřit jako lineární kombinaci změn pravděpodobností bezporuchového provozu prvků, jejichž koeficienty jsou právě spolehlivostní importance.

Tvrzení 1.1

Nechť $S=(\boldsymbol{X},\varphi(\boldsymbol{x}))$ je koherentní systém. Potom platí

- pro součinitel asymptotické pohotovosti systému:

$$A_S=\frac{T_S}{T_S+\Phi_S},$$

pro spolehlivostní importanci prvku i:

$$I_R(i)=E\left[\varphi(\boldsymbol{X}\mid 1_i)-\varphi(\boldsymbol{X}\mid 0_i)\right],$$

kde E označuje střední hodnotu, T_S střední dobu do poruchy systému a Φ_S střední dobu do obnovy systému.

- S lze reprezentovat:

- Sériovým řazením všech minimálních řezů, jehož prvky jsou uspořádány paralelně, tj.

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \prod_{x_r \in R} \varphi_{x_r}(\boldsymbol{x}),$$

kde R je množina všech minimálních řezů,

$\varphi_{x_r}(\boldsymbol{x})$ je strukturní funkce odpovídající paralelnímu uspořádání prvků minimálního řezu $\boldsymbol{x}_r$.

- Paralelním řazením všech minimálních cest, jejichž prvky jsou uspořádány sériově, tj.

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = 1 - \prod_{x_c \in C} \left(1 - \varphi_{x_c}(\boldsymbol{x})\right),$$

kde C je množina všech minimálních cest,

$\varphi_{x_c}(\boldsymbol{x})$ je strukturní funkce odpovídající sériovému uspořádání prvků minimální cesty $\boldsymbol{x}_c$.

¤

Relativně často dochází k nejednoznačné interpretaci pojmů střední doba do poruchy, střední doba do obnovy a střední doba mezi poruchami[†]. Zjednodušeně lze činnost systému chápat jako střídavou realizaci náhodné veličiny U vyjadřující dobu do poruchy a realizaci náhodné veličiny V vyjadřující dobu do obnovy. Z tohoto pohledu je význam zmíněných středních dob následující:

- Střední doba do poruchy (T, označovaná také jako *MTTF*) - střední hodnota náhodné veličiny U.
- Střední doba do obnovy (Φ, označovaná také jako *MTTR*) - střední hodnota náhodné veličiny V.
- Střední doba provozu mezi poruchami (u obnovovaných systémů; T, označovaná také jako *MTBF*) – střední hodnota náhodné veličiny U.
- Střední doba mezi poruchami (u obnovovaných systémů) - střední hodnota náhodné veličiny $U + V$, tj. $T + \Phi$.

[†] V oblasti terminologie bude práce vycházet z normy ČSN IEC 50(191)

2. Systémy majoritního zálohování *k* libovolných prvků z *n*

(systémy výběru *k* libovolných prvků z *n*)

Tato kapitola je věnována výhradně prvnímu typu systémů majoritního zálohování, totiž systémům majoritního zálohování *k* libovolných prvků z *n*. Tyto systémy bývají také označovány jako systémy výběru *k* libovolných prvků z *n*, resp. výběrové systémy *k* z *n*.

Definice 2.1 – obecné systémy

Nechť $S = \left(\boldsymbol{X}, \varphi(\boldsymbol{x})\right)$ je systém vyhovující následujícím předpokladům:

- systém se skládá z *n* prvků, které se mohou nacházet pouze v jednom ze dvou vzájemně se vylučujících stavech – provozuschopný stav, nebo poruchový stav[†],
- v čase $t = 0$ jsou všechny prvky v provozuschopném stavu,
- systém je v provozuschopném stavu, jestliže je provozuschopných alespoň *k* libovolných prvků z celkového počtu *n* $(1 \leq k \leq n)$.

Potom *S* nazýváme systémem majoritního zálohování *k* libovolných prvků z *n*, typ *G* a značíme $GA(k,n)$, resp. $GA(k,n;\boldsymbol{p})$, kde $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ je vektor pravděpodobností bezporuchového provozu jednotlivých prvků systému. V případě, kdy všechny prvky mají stejnou pravděpodobnost bezporuchového provozu *p* použijeme označení $GA(k,n;p)$. ¤

Analogicky, ovšem pomocí poruchových stavů prvků, lze definovat systém majoritního zálohování *k* libovolných prvků z *n*, typ *F*. Tento systém je v poruchovém stavu, jestliže je v poruchovém stavu alespoň *k* libovolných prvků z celkového počtu *n*. Tyto systémy budeme značit $FA(k,n)$, resp. $FA(k,n;\boldsymbol{p})$ a $FA(k,n;p)$.

Jiný způsob definice využívá vlastností charakterizujících množinu všech (minimálních) cest, resp. řezů. Oba typy systémů tak lze definovat jako systémy, které mají vlastnosti uvedené v následující tabulce. Tyto charakteristiky jsou vhodným základem pro výpočet horních a dolních odhadů pravděpodobnosti jejich bezporuchového provozu.

[†] Slova funkční, bezporuchový, resp. provozuschopný budou užívána jako ekvivalenty pro provozuschopný stav a neprovozuschopný, resp. provozuneschopný pro poruchový stav.

	$GA(k,n)$	$FA(k,n)$
Množina minimálních cest	$\{x \mid s(x)=k\}$	$\{x \mid s(x)=n-k+1\}$
Množina všech cest	$\{x \mid s(x)\geq k\}$	$\{x \mid s(x)\geq n-k+1\}$
Množina minimálních řezů	$\{x \mid s(x)=k-1\}$	$\{x \mid s(x)=n-k\}$
Množina všech řezů	$\{x \mid s(x)\leq k-1\}$	$\{x \mid s(x)\leq n-k\}$
Strukturní funkce	$\varphi(x)=1,\ s(x)\geq k$ $0,\ s(x)<k$	$\varphi(x)=1,\ s(x)\geq n-k+1$ $0,\ s(x)<n-k+1$

Tab. 1 – vlastnosti charakterizující systémy $GA(k,n)$ a $FA(k,n)$

Poznámka 2.1

Přímo z definice, resp. z výše uvedených vlastností lze snadno nahlédnout platnost následujících tvrzení:

- Systémy $GA(k,n)$ i $FA(k,n)$ jsou koherentní, navzájem duální (ve smyslu definice 1.4) a tudíž platí vztah

$$GA(k,n)=FA(n-k+1,n). \tag{2.1}$$

  V následujících úvahách se proto omezíme na studium systémů $GA(k,n)$. Z duality je pak snadné odvodit analogické vztahy platné pro systémy $FA(k,n)$.

- $GA(1,n)$ odpovídá paralelnímu řazení prvků systému (tzv. substituční zálohování).
- $GA(n,n)$ odpovídá sériovému uspořádání prvků systému.
- Pro strukturní funkci systému $GA(k,n)$ platí

$$\varphi_{GA(k,n)}(x)=\prod_{\substack{x_r \\ s(x_r)=k-1}}\left(1-\psi(x_r,x)\right), \tag{2.2}$$

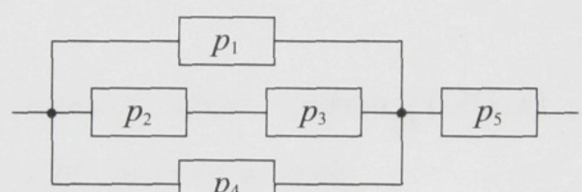
$$\varphi_{GA(k,n)}(x)=1-\prod_{\substack{x_c \\ s(x_c)=k}}\left(1-\psi(x,x_c)\right), \tag{2.3}$$

kde $\psi(x,y)=\begin{cases}1, & x\geq y\\ 0, & \text{jinde}\end{cases}.$

- Zřejmě $\sum_{(x|\bullet_i)}\left[\varphi_{GA(k,n)}(x|1_i)-\varphi_{GA(k,n)}(x|0_i)\right]=C_{n-1}^{k-1}$, tedy strukturní importance všech prvků systému $GA(k,n)$ jsou stejné a platí

$$I_{\varphi_{GA(k,n)}}(i)=\frac{C_{n-1}^{k-1}}{2^{n-1}},\ i=1,2,\ldots,n.$$

- Systémy $GA(k,n)$ tvoří obecnější třídu než sériově-paralelní systémy† a pravděpodobnost bezporuchového provozu libovolného sériově-paralelního systému lze vyjádřit pomocí pravděpodobnosti bezporuchového provozu systému $GA(k,n)$, pro vhodné *k*, *n*. Například sériově-paralelní systém, jehož blokové schéma je na obr. 2, odpovídá systému $GA(2,2;p_A,p_B)$, kde $p_A=R_{GA(1,3;p_1,(p_2\cdot p_3),p_4)}$, $p_B=p_5$.



Obr. 2 – příklad sériově-paralelního systému

† Struktura systémů *GA*(*k*, *n*) je natolik obecná, že pravděpodobnost bezporuchového provozu libovolného *n* prvkového koherentního systému lze vyjádřit jako lineární kombinaci pravděpodobností bezporuchového provozu systémů *GA*(*i*, *n*), *i* = 1,…,*n*. [AP]

2. 1 Obecné systémy GA(k, n)

Za obecné systémy $GA(k,n)$ jsou považovány takové systémy, u kterých nejsou činěny žádné dodatečné předpoklady o náhodných veličinách vyjadřujících stavy prvků, jako například nezávislost, stejné rozdělení apod.

Věta 2.1 - obecné systémy $GA(k,n)$

Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu libovolného systému $GA(k,n)$ platí

$$R_{GA(k,n)} = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \cdot C_{k+i-1}^i \cdot S_{k+i} , \qquad (2.4a)$$

kde $S_{k+i} = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_{k+i} \le n} P\left(X_{j_1} = 1, \ldots, X_{j_{k+i}} = 1\right)$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-k$ (součet se provádí přes všechny kombinace $(k + i)$-té třídy na množině $\{1, \ldots, n\}$),

$P\left(X_{j_1} = x_{j_1}, \ldots,\ X_{j_{k+i}} = x_{j_{k+i}}\right)$ je sdružená pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $\left(X_{j_1}, \ldots,\ X_{j_{k+i}}\right)$, $1 \le j_1 < \ldots < j_{k+i} \le n$.

Důkaz:

Z definice provozuschopného stavu systému $GA(k,n)$ ihned dostáváme pro pravděpodobnost bezporuchového provozu vztah

$$R_{GA(k,n)} = \sum_{r=k}^{n} P(A_r), \qquad (*)$$

kde A_r je množina všech konfigurací délky r, tj. $A_r = \left\{ \boldsymbol{x} \mid s(\boldsymbol{x}) = r \right\}$.

Pro potřeby důkazu označme množinu všech prvků systému symbolem $P_n = \{1, \ldots, n\}$ a systém všech podmnožin množiny P_n symbolem $B(n)$. Na $B(n)$ definujme funkci f následovně:

$$f(I) = P\left(\prod_{i \in I} (X_i = 1) \right), \quad I \in B(n).$$

Snadno zjistíme, že f lze vyjádřit ve tvaru

$$f(I) = \sum_{\substack{J \in B(n) \\ I \subseteq J}} g(J), \qquad (**)$$

kde g je funkce na $B(n)$ definovaná vztahem

$$g(J)=P\left(\prod_{j\in J}(X_j=1)\ \wedge \prod_{i\in P_n\setminus J}(X_i=0)\right),\ J\in B(n).$$

Vzhledem k tomu, že $\left(B(n),\subseteq\right)$ tvoří konečný svaz[†], lze na $(**)$ aplikovat Möbiův zákon inverze číselných funkcí[†]. Dostáváme tak

$$g(I)=\sum_{\substack{J\in B(n)\\ I\subseteq J}} f(J)\cdot\mu(I,J),$$

kde $\mu(I,J)$ je Möbiova funkce[†] svazu $\left(B(n),\subseteq\right)$. Z izomorfnosti[‡] svazů $\left(B(n),\subseteq\right)$ a $\left(\{0,1\}^n,\leq\right)$ dostáváme pro Möbiovu funkci

$$\mu(I,J)=\begin{cases}(-1)^{|J|-|I|}, & \text{pro } I\subseteq J\\ 0, & \text{jinde.}\end{cases} \qquad (***)$$

Odtud zřejmě

$$P(A_r)=\sum_{\substack{I\in B(n)\\ |I|=r}} g(I)=\sum_{\substack{I\in B(n)\\ |I|=r}}\ \sum_{\substack{J\in B(n)\\ I\subseteq J}} f(J)\cdot\mu(I,J).$$

Záměnou pořadí sčítání a využitím $(***)$ dostáváme

$$P(A_r)=\sum_{\substack{J\in B(n)\\ |J|\geq r}} f(J)\cdot\sum_{\substack{I\in B(n)\\ |I|=r\ \wedge\ I\subseteq J}}\mu(I,J)=\sum_{\substack{J\in B(n)\\ |J|\geq r}}(-1)^{|J|-r}\cdot C_{|J|}^r\cdot f(J),$$

tedy

$$P(A_r)=\sum_{i=r}^{n}(-1)^{i-r}\cdot C_i^r\cdot S_i,$$

kde $S_i=\sum_{\substack{J\in B(n)\\ |J|=i}} f(J)$.

Z $(*)$ tak pro pravděpodobnost bezporuchového provozu systému dostáváme

$$R_{GA(k,n)}=\sum_{r=k}^{n}\sum_{i=0}^{n-r}(-1)^i\cdot C_{r+i}^i\cdot S_{r+i}=\sum_{i=0}^{n-k}S_{k+i}\cdot\sum_{r=0}^{i}(-1)^r\cdot C_{k+i}^r.$$

Snadno lze nahlédnout, že vnitřní součet je roven i-tému členu konvoluce posloupností $\left\{C_{k+i}^j\right\}_{j=0}^{k+i}$, $\left\{(-1)^j\right\}_{j=0}^{\infty}$ a je tedy až na činitel $(-1)^i$ roven koeficientu u x^i v součinu vytvořujících funkcí těchto posloupností.

[†] Definice uvedených pojmů viz [Bi].

[‡] Izomorfismus je dán přiřazením charakteristických vektorů prvkům $B(n)$, tj. $h(I)=(u_1,\ldots,u_n)$, kde $u_i=1$ pro $i\in I$, $u_i=0$ pro $i\notin I$.

S ohledem na zřejmou identitu

$$\left(1+x\right)^{k+i} \cdot \frac{1}{1+x} = \left(1+x\right)^{k+i-1} \quad , \ x \neq -1$$

vyplývá z porovnání koeficientů u x^i vztah

$$\sum_{r=0}^{i} \left(-1\right)^r \cdot C_{k+i}^r = \left(-1\right)^i \cdot C_{k+i-1}^i ,$$

tedy

$$R_{GA(k,n)} = \sum_{i=0}^{n-k} \left(-1\right)^i \cdot C_{k+i-1}^i \cdot S_{k+i} \quad .$$

¤

Důsledek 2.1

- Z věty 2.1 a vztahu (2.1) dostáváme pro pravděpodobnost bezporuchového provozu systému $FA\left(k,n\right)$ vztah

$$R_{FA(k,n)} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(-1\right)^i \cdot C_{n-k+i}^i \cdot S_{n-k+i+1} \quad . \tag{2.5}$$

¤

Pro další úvahy označme

$$R\left(0\right) = S_k , \tag{2.6a}$$

$$R\left(m\right) = R\left(m-1\right) + \left(-1\right)^m \cdot C_{k+m-1}^m \cdot S_{k+m} \ , \ m = 1, \ \dots \ , \ n-k , \tag{2.7a}$$

kde zřejmě $R_{GA(k,n)} = R\left(n-k\right)$.

Z Bonferroniho nerovnosti [Fe] navíc vyplývá platnost

$$R\left(2i\right) \le R_{GA(k,n)} \le R\left(2i+1\right) \ , \ i = 0, \ 1, \ \dots \ , \ \left\lfloor \left(n-k\right)/2 \right\rfloor , \text{ resp. } \left\lfloor \left(n-k-1\right)/2 \right\rfloor .$$

Vlastní výpočet je proto vhodné provádět postupně dle vztahů (2.6a) a (2.7a). V každém kroku je pak možné jako odhad pravděpodobnosti $R_{GA(k,n)}$ použít

$$R^*(m)=\frac{\mid R(m)+R(m-1)\mid}{2}\,,\quad m=1,\;\dots\;,\;n-k-1^{\dagger}, \tag{2.8a}$$

pro jehož chybu platí

$$\Delta(m)=\left|R^*(m)-R_{GA(k,n)}\right|\le\frac{1}{2}\cdot C_{k+m-1}^{m}\cdot S_{k+m}\,. \tag{2.9a}$$

Zvláště u rozsáhlých systémů lze tento vztah využít k apriornímu stanovení počtu kroků (hodnota m) nutných k dosažení požadované přesnosti výpočtu pravděpodobnosti bezporuchového provozu systému $GA(k,n)$.

Poznámka 2.2 – alternativní vztahy

Jako alternativu k (2.4a) – (2.9a) lze použít následující vztahy (2.4b) – (2.9b), které vyjadřují pravděpodobnost $R_{GA(k,n)}$ pomocí doplňku, tj. $R_{GA(k,n)}=1-\overline{R}_{GA(k,n)}$. Postupně tak dostáváme:

$$R_{GA(k,n)}=1-\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\cdot C_{n-k+i}^{i}\cdot\overline{S}_{n-k+i+1}\,, \tag{2.4b}$$

kde $\overline{S}_r=\sum\limits_{1\le i_1<\dots<i_r\le n}P\left(X_{i_1}=0,\dots,X_{i_r}=0\right)\,,\; r=n-k+1,\;\dots,\;n$

(součet se provádí přes všechny kombinace r-té třídy na množině $\{1, \dots, n\}$).

Dále

$$R(0)=1-\overline{S}_{n-k+1}\,, \tag{2.6b}$$

$$R(m)=R(m-1)+(-1)^{m+1}\cdot C_{n-k+m}^{m}\cdot\overline{S}_{n-k+m+1}\,,\quad m=\;1,\;\dots\;,k-1, \tag{2.7b}$$

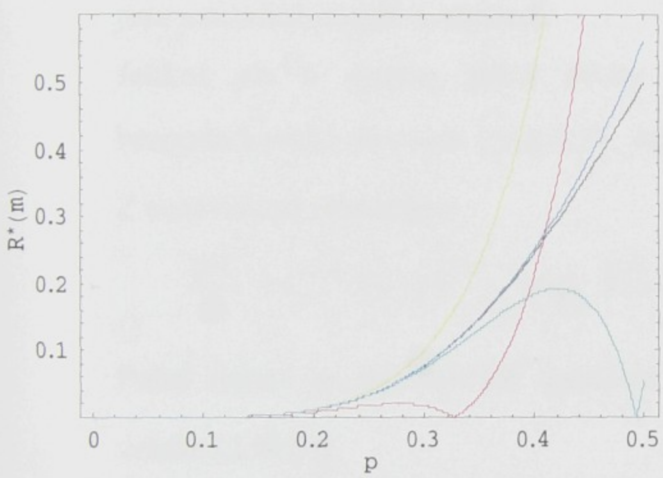
kde $R_{GA(k,n)}=R(k-1)$.

$$R^*(m)=\frac{\mid R(m)+R(m-1)\mid}{2}\,,\quad m=1,\;\dots\;,\;k-2\,, \tag{2.8b}$$

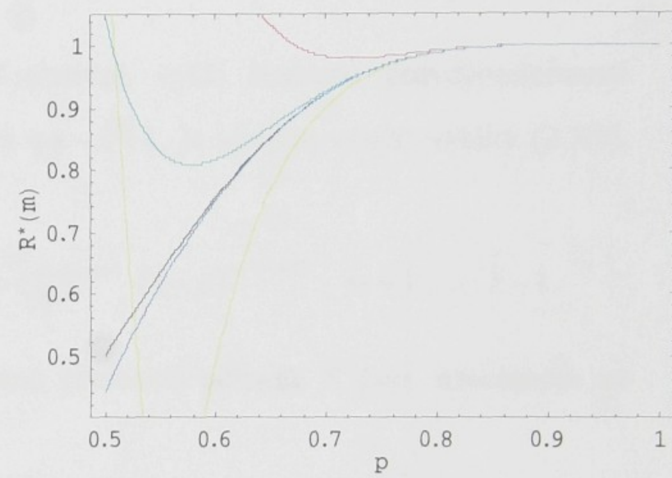
$$\Delta(m)=\left|R^*(m)-R_{GA(k,n)}\right|\le\frac{1}{2}\cdot C_{n-k+m}^{m}\cdot\overline{S}_{n-k+m+1}\,. \tag{2.9b}$$

† Pro $m=0$ položíme $R^*(0)=R(0)$.

Zásadním kritériem, které rozhoduje o volbě výpočetních vztahů, jsou hodnoty pravděpodobností bezporuchového provozu prvků systému. Z výrazů (2.Xa), resp. (2.Xb) je zřejmé, že v případech kdy zmíněné pravděpodobnosti jsou relativně vysoké[†] je třeba použít vztahy (2.Xb). Takto provedená volba výpočetní metody jednak minimalizuje zaokrouhlovací chybu, na druhé straně zaručuje pro dané hodnoty pravděpodobností velmi rychlou konvergenci $R^*(m)$ ke skutečné hodnotě $R_{GA(k,n)}$. Typický průběh konvergence prvních čtyř iterací $R^*(m)$ v závislosti na hodnotě pravděpodobnosti bezporuchového provozu prvků p ukazují následující grafy.



Graf 1 – průběhy (2.7a) v doporučeném rozsahu $(0 \le p \le 0{,}5;\ k = 6,\ n = 11)$



Graf 2 – průběhy (2.7b) v doporučeném rozsahu $(0{,}5 \le p \le 1;\ k = 6,\ n = 11)$

— $R_{GA(k,n)}$ … průběh exaktní hodnoty pravděpodobnosti bezporuchového provozu

— $R^*(1)$ — $R^*(2)$ — $R^*(3)$ — $R^*(4)$ … průběhy odhadů pravděpodobnosti $R_{GA(k,n)}$

Jako doplňkové hledisko lze při volbě výpočetních vztahů vzít v úvahu hodnoty k a n. Je zřejmé, že v případě kdy $k \le \lfloor n/2 \rfloor$ vyžaduje výpočet $R_{GA(k,n)}$ prováděný dle vztahů

[†] Jako vhodné kritérium, kdy lze z hlediska volby typu výpočtu považovat prvky systému za relativně spolehlivé, je geometrický průměr jejich pravděpodobností bezporuchového provozu. Tj. prvky lze pro dané účely považovat za spolehlivé, jestliže $\sqrt[n]{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n} \ge 0{,}5$

(2.Xb) méně kroků (hodnota m) než v případě použití (2.Xa). Je-li výpočet prováděn v souladu s výše uvedenými kritérii, je možné použít odhad $R^*(m)$ jako dostatečně přesnou aproximaci $R_{GA(k,n)}$ již pro malá m. Navržený způsob výpočtu dokumentuje následující příklad.

Příklad 2.1 – výpočet $R_{GA(k,n)}$

S přesností řádu 10^{-5} vypočtěte pravděpodobnost bezporuchového provozu systému $GA(k=5, n=11; p=0,9)$. Předpokládejte, že náhodné veličiny vyjadřující stavy prvků jsou nezávislé, stejně rozdělené.

Jelikož jde o systém, jehož prvky mají relativně vyšší hodnotu pravděpodobnosti bezporuchového provozu $(p \geq 0,5)$, navíc $k < n-k+1$, je vhodné využít vztahy (2.Xb).

Z nezávislosti dostáváme

$$\overline{S}_{n-k}^{(n)} = C_n^{n-k} \cdot (1-p)^{n-k}\ , \text{ resp. } \overline{S}_{n-k+m+1}^{(n)} = C_n^{n-k+m+1} \cdot (1-p)^{n-k+m+1}\ , \ m=1,\dots,\ k-1 .$$

Počet iterací m zajišťujících dosažení zadané přesnosti odhadu $R^*(m)$ nalezneme ze vztahu (2.9b), tj.

$$\frac{1}{2} \cdot C_{6+m}^{m} \cdot C_{11}^{7+m} \cdot 0.1^{7+m} \leq 10^{-5} .$$

Odtud $m = 0$ a k dosažení požadované přesnosti postačuje provést pouze první iteraci. Pro názornost byl proveden úplný výpočet a jeho jednotlivé kroky prováděné dle vztahů (2.6b) – (2.9b), včetně výsledků, jsou obsaženy v následující tabulce.

m	0	1	2	3	4
$R(m)$	0,999967	0,99997855	0,99997701	0,9999771024	0,9999771003
$R^*(m)$	0,999967	0,99997278	0,99997778	0,999977056	- - - -
$\Delta^*(m)$	1,6500 E-5	5,7750 E-6	7,7000 E-7	4,6200 E-8	- - - -
$\Delta(m)$	1,0100 E-5	4,3203 E-6	6,7970 E-7	4,4300 E-8	- - - -

Tab. 2 – výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu systému $GA(5,11;\ 0,9)$ dle (2.Xb)

Popis tabulky:

$R(m)$ - hodnoty počítané dle vztahů (2.6b) a (2.7b),

pravděpodobnost bezporuchového provozu $R_{GA(5,11)} = R(4) = 0,9999771003$,

$R^*(m)$ - průběžné odhady pravděpodobnosti $R_{GA(5,11)}$ počítané dle vztahu (2.8b),

$R^*(0) = 0,999967$ ...odhad pravděpodobnosti bezporuchového provozu vypočtený s přesností řádu 10^{-5},

$\Delta^*(m)$ - odhad chyby $R^*(m)$ vypočítaný jako pravá strana vztahu (2.9b),

$\Delta(m)$ - skutečná chyba průběžného odhadu $R^*(m)$.

Při nerespektování kritéria pro volbu výpočetních vztahů by užití (2.Xa) vedlo k následujícímu postupu.

Snadno zjistíme, že nerovnost

$$\frac{1}{2} \cdot C_{4+m}^{m} \cdot C_{11}^{5+m} \cdot 0,9^{5+m} \leq 10^{-5}$$

nemá v oboru $m \in \{0,1,\dots,6\}$ řešení, tedy k dosažení požadované přesnosti je nutné provést kompletní výpočet, tj. všech sedm iterací. Pro hledanou pravděpodobnost bezporuchového provozu pak platí $R_{GA(5,11)} = R(6)$. Skutečný průběh výpočtu je obsažen v následující tabulce.

m	0	1	2	3	4	5	6
$R(m)$	272,806	-954,822	1412,747	-1073,201	418,368	-64,900	0,9999771003
$R^*(m)$	272,806	341,008	228,963	169,773	327,416	176,734	- - - -
$\Delta^*(m)$	136,403	613,814	1183,785	1242,974	745,784	241,634	- - - -
$\Delta(m)$	271,806	340,008	227,963	168,773	326,416	175,734	- - - -

Tab. 3 – výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu systému $GA(5,11;\,0,9)$ dle (2.Xa)

¤

Výpočetní metoda prezentovaná větou 2.1, resp. poznámkou 2.2, je nejefektivnějším autorovi známým způsobem výpočtu pravděpodobnosti bezporuchového provozu obecných systémů $GA(k,n)$. Označíme-li $l = \min(k-1, n-k)$, potom je třeba v průběhu výpočtu vyčíslit pravděpodobnosti $\sum_{i=0}^{l} C_n^i$ průniků, tudíž pro složitost dostáváme odhad $O\left[\left(e \cdot n/l\right)^l\right]$, kde symbol O je tzv. „velké o“.

Výše zmíněné tvrzení o efektivnosti doložíme následujícím porovnáním s ostatními v literatuře se vyskytujícími metodami výpočtu pravděpodobnosti bezporuchového provozu koherentních systémů:

- Princip inkluze a exkluze - IE

  Výpočet probíhá dle vztahu [BP, Rh, Ro]

$$R_{GA(k,n)} = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le m} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot A_{i_3}) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{m+1} P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_m),$$

  kde $m = C_n^k$,

  A_i , $i = 1, \dots, m$ jsou všechny různé minimální cesty, tj. náhodné jevy tvaru

$$A_i = \left\{ \left(X_{i_1} = 1, \dots, X_{i_k} = 1 \right) \mid 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n \right\}.$$

  V průběhu výpočtu je třeba vyčíslit pravděpodobnosti $\sum_{i=1}^{m} C_m^i$ obecně různých průniků, tedy pro složitost dostáváme odhad $O\left(2^{C_n^k}\right)$.

- Metoda označovaná v zahraniční literatuře jako disjoint product - DP

  Výpočet probíhá dle vztahu [Ro, Lo, AB]

$$R_{GA(k,n)} = P(A_1) + P(\overline{A}_1 \cdot A_2) + P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) + \dots + P(\overline{A}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{m-1} \cdot A_m),$$

  kde m a A_i mají stejný význam jako v předchozí odrážce, $\overline{A}_i$ je negace jevu A_i.

  V i-tém členu $(i = 1, \dots, m)$ je ovšem nutné provést průnik minimální cesty A_i s negacemi všech předchozích, tj. $\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_{i-1}$. Pro složitost tak zřejmě dostaneme odhad $O\left[\left(e \cdot n/k\right)^{2k}\right]$.

Ostatní metody (například vyčíslení pravděpodobností všech provozuschopných konfigurací označované v zahraniční literatuře jako state-space enumeration method [Ro, BP]) jsou použitelné pouze pro malé systémy nebo pro systémy, kde náhodné veličiny vyjadřující stavy prvků jsou nezávislé (metoda faktorizace - factoring method [Ro, BH, AB]).

Příklad 2.2 – porovnání složitosti

Výše uvedené charakteristiky složitosti jednotlivých metod výpočtu pravděpodobnosti bezporuchového provozu lze dokumentovat na příkladu obecného systému $GA(2,3)$. Všechny jeho minimální cesty tvoří konfigurace, které lze zapsat ve tvaru (110), (101), (011). Pro zjednodušení zápisu sdružené pravděpodobnostní funkce použijeme

$$P(x_1 \dots x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n),$$

resp. tečkovou konvenci

$$P(x_1 \dots x_{i-1} \bullet x_{i+1} \dots x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n).$$

Přímou aplikací vztahů (2.6a) a (2.7a) dostáváme:

$$R(0) = S_2 = P((11\bullet)) + P((1\bullet1)) + P((\bullet11)),$$

$$R(1) = R(0) - C_2^1 \cdot S_3 = R(0) - 2P((111)).$$

Odtud

$$R_{GA(2,3)} = P((11\bullet)) + P((1\bullet1)) + P((\bullet11)) - 2P((111)),$$

a celkově bylo třeba vyčíslit pravděpodobnosti 4 členů.

Užitím principu inkluze a exkluze dostáváme:

$$R^{IE}(0) = P((11\bullet)) + P((1\bullet1)) + P((\bullet11)),$$

$$R^{IE}(1) = R^{IE}(0) - P((11\bullet)\cdot(1\bullet1)) - P((11\bullet)\cdot(\bullet11)) - P((1\bullet1)\cdot(\bullet11)),$$

$$R^{IE}(2) = R^{IE}(1) + P((11\bullet)\cdot(1\bullet1)\cdot(\bullet11)),$$

tedy celkově bylo třeba vyčíslit pravděpodobnosti 7 členů.

Užitím metody disjoint product dostáváme:

$$R^{DP}(0) = P((11\bullet)),$$

$$R^{DP}(1) = R^{DP}(0) + P\left(\left(\overline{11\bullet}\right)\cdot(1\bullet 1)\right) = R^{DP}(0) + P\left(\left((0\bullet\bullet)+(\bullet 0\bullet)\right)\cdot(1\bullet 1)\right) =$$

$$= R^{DP}(0) + P\left((0\bullet\bullet)\cdot(1\bullet 1)\right) + P\left((\bullet 0\bullet)\cdot(1\bullet 1)\right),$$

$$R^{DP}(2) = R^{DP}(1) + P\left(\left(\overline{11\bullet}\right)\cdot\left(\overline{1\bullet 1}\right)\cdot(\bullet 11)\right) =$$

$$= R^{DP}(1) + P\left(\left((0\bullet\bullet)+(\bullet 0\bullet)\right)\cdot\left((0\bullet\bullet)+(\bullet\bullet 0)\right)\cdot(\bullet 11)\right) =$$

$$= R^{DP}(1) + P\left((0\bullet\bullet)\cdot(\bullet 11)\right) + P\left((0\bullet 0)\cdot(\bullet 11)\right) + P\left((00\bullet)\cdot(\bullet 11)\right) + P\left((\bullet 00)\cdot(\bullet 11)\right)$$

tedy celkově bylo třeba vyčíslit pravděpodobnosti 7 členů.

Na závěr je vhodné zdůraznit, že rozdíl mezi počtem členů, jejichž pravděpodobnosti je nutné vyčíslit při výpočtu založeném na větě 2.1 a ostatními „standardními“ metodami, není lineární funkcí *n* ani *k*. Je tedy zřejmé, že přednosti v práci navržené metody jsou u rozsáhlejších obecných systémů $GA(k,n)$ podstatně výraznější, zvláště pokud využijeme odhady (2.6) – (2.8).

Význam věty 2.1 není dotčen ani skutečností, že u celé řady reálných systémů je dnes obvyklé předpokládat splnění alespoň jedné z následujících podmínek. Ty umožňují odvodit jednodušší a výpočetně efektivnější vztahy pro výpočet jejich pravděpodobnosti bezporuchového provozu (viz odstavec 2.2).

(P1) Permutovatelnost.
Systém vyhovuje podmínce permutovatelnosti, jestliže sdružená pravděpodobnostní funkce $P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ je symetrickou funkcí svých proměnných.

(P2) Nezávislost.
Systém vyhovuje podmínce nezávislosti (dále označován jako systém s nezávislými parametry), jestliže náhodné veličiny vyjadřující stavy prvků systému jsou nezávislé, tj. sdružená pravděpodobnostní funkce je součinem marginálních pravděpodobnostních funkcí

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n).$$

(P3) Homogenita.

Řekneme, že systém je homogenní, jestliže náhodné veličiny vyjadřující stavy prvků systému jsou stejně rozdělené †.

Poznámka 2.3 – permutovatelnost

- Permutovatelnost může tvořit v praxi přijatelný kompromis mezi zcela obecnými systémy $GA(k,n)$ a systémy s nezávislými parametry. V tomto případě lze totiž nahlédnout, že náhodné vektory $\left(X_{i_1},\ldots,X_{i_r}\right)$, $1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n$ mají stejné rozdělení, které závisí pouze na hodnotě r a nezávisí na konkrétní volbě indexů $i_1, \ldots, i_r$.
- Při výpočtu dle věty 2.1, resp. poznámky 2.2 dostáváme pro S_r, resp. $\overline{S}_r$ vztahy

$$S_r = C_n^r \cdot P_r, \quad \overline{S}_r = C_n^r \cdot \overline{P}_r \tag{2.10}$$

  kde $P_r = P\left(X_1 = 1,\ldots,X_r = 1\right)$, $\overline{P}_r = P\left(X_1 = 0,\ldots,X_r = 0\right)$, $r = 1, \ldots, n$.
- Každý systém, který vyhovuje podmínce permutovatelnosti, vyhovuje i podmínce homogenity (obrácená implikace zřejmě neplatí). Obecně však nevyhovuje podmínce nezávislosti veličin $X_1,\ldots,X_n$.

† V případě, kdy systém vyhovuje podmínce nezávislosti (P2), lze homogenitu popsat vztahem $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ \ P\left(X_i = 1\right) = p$.

2. 2 Systémy $GA(k, n)$ s nezávislými parametry

V tomto odstavci se budeme zabývat výhradně systémy s nezávislými parametry. Tyto systémy jsou nejrozšířenějším modelem, který je v současné době používán při většině[†] standardních aplikací $GA(k,n)$. Je zřejmé, že podmínka nezávislosti má zásadní význam a jedním z podstatných důsledků je zjednodušení výpočtů pravděpodobnosti bezporuchového provozu prezentovaný následující větou.

Věta 2.2 – nezávislost

Nechť systém $GA(k,n;p_1,\dots,p_n)$ splňuje podmínku nezávislosti. Potom pro pravděpodobnost jeho bezporuchového provozu platí rekurentní vztah:

$$R_{GA(k,n;p_1,\dots,p_n)} = p_n \cdot \left[R_{GA(k-1,n-1;p_1,\dots,p_{n-1})} - R_{GA(k,n-1;p_1,\dots,p_{n-1})}\right] + R_{GA(k,n-1;p_1,\dots,p_{n-1})} \tag{2.11}$$

s počátečními podmínkami $R_{GA(k,n;p_1,\dots,p_n)} = 0$, pro $n < k$, (2.12)

$$R_{GA(0,n;p_1,\dots,p_n)} = 1, \text{ pro } 0 = k \le n. \tag{2.13}$$

Důkaz:

Množinu všech provozuschopných konfigurací systému rozložíme dle stavu n-tého prvku. Aplikací věty o úplné pravděpodobnosti a s ohledem na podmínku nezávislosti dostáváme vztah

$$R_{GA(k,n;p_1,\dots,p_n)} = p_n \cdot R_{GA(k-1,n-1;p_1,\dots,p_{n-1})} + q_n \cdot R_{GA(k,n-1;p_1,\dots,p_{n-1})},$$

který po jednoduché úpravě vede k (2.11).

Nutné počáteční podmínky (2.12), (2.13) jsou logickým důsledkem definice 2.1, kterou lze formálně rozšířit i na případ $n < k$, resp. $k = 0$.

¤

[†] Za výjimku lze považovat systémy, u kterých může dojít k tzv. poruše se společnou příčinou nebo je třeba uvažovat snížení spolehlivosti z důvodu zvýšené zátěže způsobené poruchami ostatních prvků. V tomto případě je nutné použít výsledky předchozího odstavce 2.1 a pravděpodobnost bezporuchového provozu určit ze vztahů (2.4) - (2.8), resp. z poznámky 2.2.

Speciálně pro systémy s paralelní strukturou $(\text{substituční zálohování, } 1 = k \leq n)$ dostáváme explicitní tvar

$$R_{GA(1,n;p_1,\ldots,p_n)} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$$

a v případě sériové struktury $(1 \leq k = n)$ platí

$$R_{GA(n,n;p_1,\ldots,p_n)} = \prod_{i=1}^{n} p_i \, .$$

Při počítačové implementaci věty 2.2 není vhodné vztah (2.11) realizovat pomocí rekurzivního volání procedury s postupně se zmenšujícími hodnotami parametrů, ale použít následující algoritmus†:

Algoritmus 1

p: array[1 .. n] of real; {vektor pravděpodobností bezporuchového provozu prvků}

r: array[1 .. $n - k + 1$] of real;

begin

$r[1] = p[1]$;

for $j = 2$ to $n - k + 1$ do $r[j] = p[j]\cdot(1 - r[j-1]) + r[j-1]$;

for $i = 2$ to k do begin

$r[1] = p[i]\cdot r[1]$;

for $j = 2$ to $n - k + 1$ do $r[j] = p[j+i-1]\cdot(r[j] - r[j-1]) + r[j-1]$;

end;

end;

Výpočet tedy probíhá postupně po jednotlivých „řádcích“ schématu z obr. 3 a po jeho

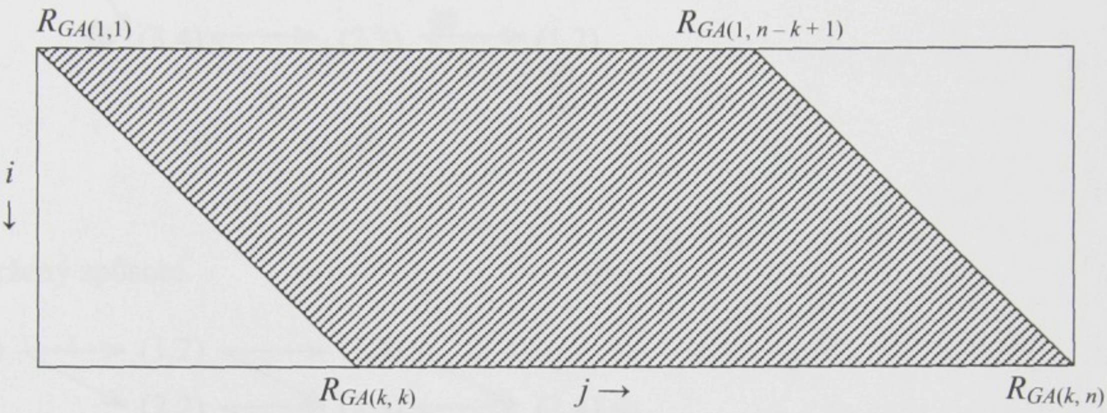
† Zápis využívá standardní a všeobecně srozumitelné příkazové struktury vyšších programovacích jazyků a je dnes běžně využíván v odborné literatuře. Nejde tedy o skutečný zápis programu se všemi formálními náležitostmi.

ukončení platí

$$R_{GA(k,k+i-1;p_1,\dots,p_{k+i-1})} = r[i] \ , \ i = 1,\dots,n-k+1 ,$$

tedy $R_{GA(k,n;p_1,\dots,p_n)} = r[n-k+1]$.

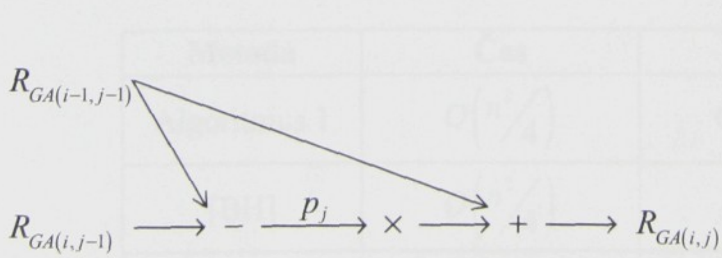
(V případě $k < n - k + 1$ je paměťově výhodnější provádět výpočet po diagonálách.)



Obr. 3 – schéma výpočtu $R_{GA(k,\, n)}$

Dále je zřejmé, že pro každou dvojici (i, j) , $i = 1,\dots,k$; $j = i,\dots,n-k+i$ je hodnota $R_{GA(i,j;p_1,\dots,p_j)}$ počítána právě jednou a to dle schématu znázorněného na obr. 4. Celkový počet kroků výpočtu tak lze odhadnout vztahem $k \cdot (n-k+1)$.

Ze schématu na obr. 4 je také zřejmé, že při výpočtu $R_{GA(i,j)}$ je kromě pravděpodobnosti p_j třeba mít k dispozici hodnoty $R_{GA(i-1,j-1)}$ a $R_{GA(i,j-1)}$. Pro paměťovou složitost tak dostáváme $n + \min(k, n-k+1)$.



Obr. 4 – způsob výpočtu $R_{GA(i,\, j)}$

Rozdíl mezi rekurzivním způsobem implementace věty 2.2 a výše navrženým lze demonstrovat na systému $GA(3,5;p_1,\dots,p_5)$. Čísla v závorkách jsou hodnoty parametrů i, j (resp. k, n).

Rekurzivní způsob:

$$\begin{tikzcd}
(3,5) \arrow[r] \arrow[dddr] & (2,4) \arrow[r] \arrow[dr] & (1,3) & \\
 & & (2,3) \arrow[r] \arrow[dr] & (1,2) \\
 & & & (2,2) \\
 & (3,4) \arrow[r] \arrow[ddr] & (2,3) \arrow[r] \arrow[dr] & (1,2) \\
 & & & (2,2) \\
 & & (3,3) &
\end{tikzcd}$$

Navržený způsob:

$$\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[r] \arrow[dr] & (1,2) \arrow[r] \arrow[dr] & (1,3) \arrow[dr] & & \\
 & (2,2) \arrow[r] \arrow[dr] & (2,3) \arrow[r] \arrow[dr] & (2,4) \arrow[dr] & \\
 & & (3,3) \arrow[r] & (3,4) \arrow[r] & (3,5)
\end{tikzcd}$$

Kromě evidentně vyšších paměťových nároků, vyžadovala rekurze i více kroků, neboť se výpočet pro hodnoty parametrů (2,3) opakoval.

Poznámka 2.4

Kromě obecných metod výpočtu pravděpodobnosti bezporuchového provozu, které při aplikaci na $GA(k,n)$ nedosahují srovnatelné časové, resp. paměťové složitosti, lze v literatuře [BH, SP] nalézt speciální postupy výpočtu $R_{GA(k,n)}$. Porovnání jejich složitosti s navrženým algoritmem 1 obsahuje následující tabulka 4.

Metoda	**Čas**	**Paměť**
Algoritmus 1	$O\left(n^2/4\right)$	$O\left(3/2\cdot n\right)$
[BH]	$O\left(n^2/4\right)$	$O(2\cdot n)$
[SP]	$O\left(n^2\right)$	$O(3\cdot n)$

Tab. 4 – porovnání výpočetní složitosti

Algoritmus v [BH] je založen na vytvořující funkci $f(x)=\prod_{i=1}^{n}(q_i+p_ix)$ a zřejmé skutečnosti, že $R_{GA(k,n;p_1,\dots,p_n)}$ lze vyjádřit jako součet $\sum_{j=k}^{n}K_j$, kde K_j je pravděpodobnost toho, že právě libovolných j prvků systému $GA(k,n;p_1,\dots,p_n)$ je provozuschopných. K_j proto tvoří koeficient u x^j v rozvoji $f(x)$ v mocninnou řadu.

Algoritmus navržený v [SP] využívá nelineární rekurentní vztah vyššího řádu, který je ekvivalentní se vztahem

$$R_{GA(k,n;p_1,\dots,p_n)}=R_{GA(k,n-2;p_1,\dots,p_{n-2})}+p_n\cdot\left[R_{GA(k-1,n-1;p_1,\dots,p_{n-1})}-R_{GA(k,n-2;p_1,\dots,p_{n-2})}\right]+$$

$$+p_{n-1}\cdot\left[R_{GA(k-1,n-2;p_1,\dots,p_{n-2})}-R_{GA(k,n-2;p_1,\dots,p_{n-2})}\right]+p_n\cdot p_{n-1}\cdot\left[R_{GA(k,n-2;p_1,\dots,p_{n-2})}-R_{GA(k-1,n-2;p_1,\dots,p_{n-2})}\right].$$

Snadno nahlédneme, že tento vztah může být odvozen z věty 2.2 jejím opakovaným užitím, tj. dosazením

$$R_{GA(k,n-1;p_1,\dots,p_{n-1})}=p_{n-1}\cdot\left[R_{GA(k-1,n-2;p_1,\dots,p_{n-2})}-R_{GA(k,n-2;p_1,\dots,p_{n-2})}\right]+R_{GA(k,n-2;p_1,\dots,p_{n-2})}$$

do vztahu (2.11). V průběhu výpočtu podle [SP] je proto třeba mít k dispozici vždy dva řádky schématu analogického obr. 3.

<u>Věta 2.3</u> – odhady

Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu systému $GA(k,n;p_1,\dots,p_n)$ s nezávislými parametry platí

$$\prod_{\substack{\mathbf{x}\\ s(\mathbf{x})=k-1}}\left[1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)^{1-x_i}\right]\le R_{GA(k,n;p_1,\dots,p_n)}\le 1-\prod_{\substack{\mathbf{x}\\ s(\mathbf{x})=k}}\left(1-\prod_{i=1}^{n}p_i^{x_i}\right). \qquad (2.14)$$

Důkaz:

Každý koherentní systém je ze spolehlivostního hlediska (viz tvrzení 1.1) ekvivalentní s paralelním uspořádáním všech svých minimálních cest, jejichž prvky jsou řazeny sériově. S ohledem na (2.3) tak pro strukturní funkci *GA*(*k*, *n*) dostáváme

$$\varphi_{GA(k,n)}(\boldsymbol{x}) = 1 - \prod_{\substack{\boldsymbol{y} \\ s(\boldsymbol{y})=k}} \left(1 - \prod_{\substack{i \\ y_i=1}} x_i \right). \qquad (*)$$

Analogicky, z ekvivalence se sériovým upořádáním všech jeho minimálních řezů, jejichž prvky jsou řazeny paralelně, dostáváme

$$\varphi_{GA(k,n)}(\boldsymbol{x}) = \prod_{\substack{\boldsymbol{y} \\ s(\boldsymbol{y})=k-1}} \left(1 - \prod_{\substack{i \\ y_i=0}} (1 - x_i) \right). \qquad (**)$$

Dále z koherentnosti systémů $GA(k, n)$ zřejmě vyplývá

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \exists \boldsymbol{x} \quad \varphi(\boldsymbol{x} \mid 1_i) - \varphi(\boldsymbol{x} \mid 0_i) = 1$$

tedy

$$E\left[\varphi(\boldsymbol{X} \mid 1_i) - \varphi(\boldsymbol{X} \mid 0_i) \right] > 0.$$

Odtud s ohledem na tvrzení 1.1 platí

$$\frac{\partial R_{GA(k,n;p_1,\ldots,p_n)}}{\partial p_i} > 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

a tudíž funkce spolehlivosti je pro $(p_1, \ldots, p_n) \in (0,\ 1)^n$ rostoucí v každém svém argumentu p_i.

Z nezávislosti a $(*)$ tak dostaneme

$$R_{GA(k,n;p_1,\ldots,p_n)} \le 1 - \prod_{\substack{\boldsymbol{x} \\ s(\boldsymbol{x})=k}} \left(1 - \prod_{i=1}^{n} p_i^{x_i} \right)$$

resp. z $(**)$

$$R_{GA(k,n;p_1,\ldots,p_n)} \ge \prod_{\substack{\boldsymbol{x} \\ s(\boldsymbol{x})=k-1}} \left(1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)^{1-x_i} \right).$$

¤

Speciálně, v případě homogenního systému platí odhady

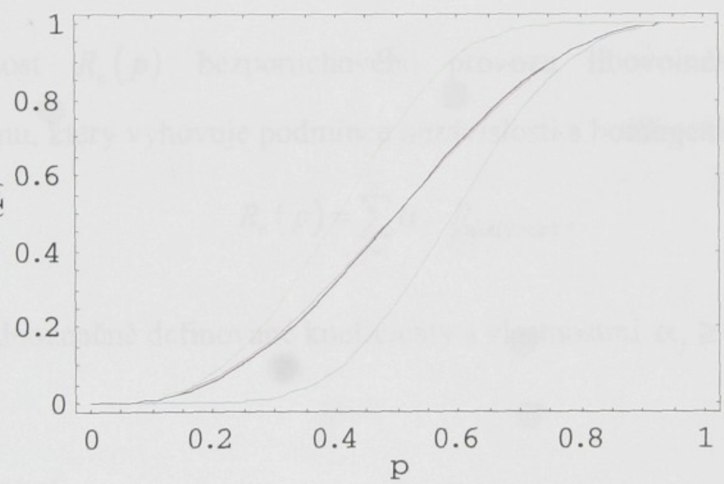
$$\left(1 - (1-p)^{n-k+1}\right)^{C_n^{k-1}} \le R_{GA(k,n;p)} \le 1 - \left(1 - p^k\right)^{C_n^k}. \qquad (2.15)$$

Z jejich tvaru je zřejmé, že dolní odhad lze použít jako dostatečně přesný pro systém, jehož prvky mají „vysokou" pravděpodobnost poruchy a horní pro systémy s „malou" pravděpodobností poruchy prvků. Jejich vážená kombinace

$$R^*_{GA(k,n)} = p\cdot\left(1-(1-p)^{n-k+1}\right)^{C_n^{k-1}} + (1-p)\cdot\left(1-\left(1-p^k\right)^{C_n^k}\right) \qquad (2.16)$$

je vyhovující při většině praktických aplikací. V situaci, kdy náhodné veličiny vyjadřující stavy prvků jsou nestejně rozdělené, lze místo odhadů z (2.14) použít odhady (2.15), resp. (2.16) a za p dosadit geometrický průměr pravděpodobností bezporuchového provozu všech prvků systému, tj. $p = \sqrt[n]{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n}$.

Tyto skutečnosti demonstruje následující graf, který navíc ukazuje obecný a pro závislost $R_{GA(k,n;p)}$ na p typický průběh ve tvaru S. Důkaz platný pro koherentní systémy lze nalézt v [BP, str. 54].



Graf 3 – průběhy odhadů (2.15) a (2.16) pro systém $GA(3, 5)$

— $R_{GA(3,5;p)}$ — vážený odhad (2.16)

— horní odhad (2.15) — dolní odhad (2.15)

Poznámka 2.5 – normální rozdělení

Je zřejmé, že v případě homogenních systémů $GA(k,n;p)$ má náhodná veličina vyjadřující počet prvků v poruchovém stavu binomické rozdělení řádu n s parametrem p. Pro dostatečně velké hodnoty $n \cdot p \cdot (1-p)$ [†] tak lze použít aproximaci

$$R_{GA(k,n;p)} \cong 1 - \Phi\left(\frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right),$$

kde $\Phi(u)$ označuje distribuční funkci normovaného normálního rozdělení $N(0;1)$.

¤

Z úvodu kapitoly 2 vyplynulo, že systémy výběru k libovolných prvků z n tvoří obecnější třídu než sériově-paralelní struktury. Následující věta ukazuje jejich specifické postavení dokonce mezi všemi koherentními systémy, jejichž prvky mají stejně rozdělené náhodné veličiny vyjadřující stavy. V rámci této třídy je lze považovat z hlediska spolehlivosti za optimální [Ph, Be].

Věta 2.4 – [AP]

Pro pravděpodobnost $R_n(p)$ bezporuchového provozu libovolného n prvkového koherentního systému, který vyhovuje podmínce nezávislosti a homogenity, platí

$$R_n(p) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot R_{GA(j,n;p)}, \tag{2.17}$$

kde $\{\alpha_j\}_{j=1}^{n}$ jsou jednoznačně definované koeficienty s vlastnostmi $\alpha_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$.

Důkaz:

Pro $R_n(p)$ zřejmě platí

$$R_n(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i},$$

kde a_i je počet cest velikosti i.

Definujme koeficienty $\{\alpha_j\}_{j=1}^{n}$ soustavou vztahů $C_n^i \cdot \sum_{j=1}^{i} \alpha_j = a_i$, $i = 1,\ldots,n$. Z tvaru matice této soustavy je patrné, že je regulární, má vždy jediné řešení a platí $\alpha_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$. Navíc dostáváme

---

[†] Standardně bývá doporučováno $n \cdot p \cdot (1-p) \geq 9$.

$$R_n(p)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i}\alpha_j\right]\cdot C_n^i\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}.$$

Záměna pořadí sčítání vede (vzhledem ke tvaru strukturní funkce systémů $GA(k,n)$ - tabulka 1) k dokazovanému vztahu, tj.

$$R_n(p)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\cdot\left[\sum_{i=j}^{n}C_n^i\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}\right]=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\cdot R_{GA(j,n;p)}.$$

¤

Důsledek 2.2

Pro střední dobu do poruchy libovolného n prvkového koherentního systému, který vyhovuje podmínce nezávislosti a homogenity, platí

$$T_S=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot T_{GA(i,n;p)}. \qquad (2.18)$$

Důkaz:

Nechť $F(t)$ je distribuční funkce doby do poruchy výše zmíněného n prvkového koherentního systému. Zřejmě $F(t) = 0$, pro $t\le 0$, tedy pro střední dobu do poruchy T_S platí

$$T_S=\int_0^\infty\left(1-F(t)\right)dt=\int_0^\infty R_n(t)\,dt, \qquad (*)$$

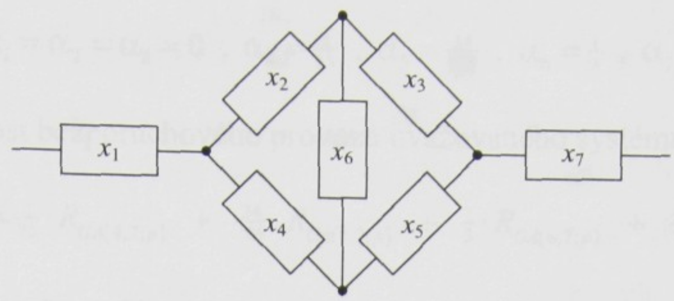
kde $R_n(t)$ je funkce spolehlivosti uvažovaného systému. Z (2.17) vyplývá

$$T_S=\int_0^\infty\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot R_{GA(i,n;p)}(t)\,dt=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\int_0^\infty R_{GA(i,n;p)}(t)\,dt.$$

S ohledem na obecnou platnost $(*)$ tak dostáváme dokazovaný vztah.

¤

Uvedené vlastnosti jsou dokladem specifického postavení systémů výběru k libovolných prvků z n v rámci koherentních systémů a lze je demonstrovat (včetně způsobu výpočtu koeficientů α_i) na příkladu systému, jehož blokové schéma (nemá sériově-paralelní strukturu) je uvedeno na obr. 5.



Obr. 5 – schéma analyzovaného systému

Přehled všech cest, nutný pro další výpočty, je dán následujícím seznamem.

Délka cesty	Seznam cest
1 – 3	$\emptyset$
4	$(x_1x_2x_3x_7)$, $(x_1x_4x_5x_7)$
5	$(x_1x_2x_3x_4x_7)$, $(x_1x_2x_3x_5x_7)$, $(x_1x_2x_3x_6x_7)$, $(x_1x_2x_4x_5x_7)$, $(x_1x_3x_4x_5x_7)$, $(x_1x_4x_5x_6x_7)$, $(x_1x_2x_5x_6x_7)$, $(x_1x_3x_4x_6x_7)$
6	$(x_1x_2x_3x_4x_5x_7)$, $(x_1x_2x_3x_4x_6x_7)$, $(x_1x_2x_3x_5x_6x_7)$, $(x_1x_2x_4x_5x_6x_7)$, $(x_1x_3x_4x_5x_6x_7)$
7	$(x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7)$

Pro $\{a_i\}_{i=1}^{7}$ tak dostáváme

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \ , \ a_4 = 2 \ , \ a_5 = 8 \ , \ a_6 = 5 \ , \ a_7 = 1 .$$

Hledané koeficienty $\{\alpha_j\}_{j=1}^{7}$ pak nalezneme jako řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 35 & 35 & 35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 35 & 35 & 35 & 35 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tedy

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \ , \ \alpha_4 = \tfrac{2}{35} \ , \ \alpha_5 = \tfrac{34}{105} \ , \ \alpha_6 = \tfrac{1}{3} \ , \ \alpha_7 = \tfrac{2}{7} .$$

Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu uvažovaného systému tak platí

$$R(p) = \tfrac{2}{35} \cdot R_{GA(4,7;p)} + \tfrac{34}{105} \cdot R_{GA(5,7;p)} + \tfrac{1}{3} \cdot R_{GA(6,7;p)} + \tfrac{2}{7} \cdot R_{GA(7,7;p)}$$

a dosazením explicitního vyjádření $R_{GA(k,n;p)}$ získáme

$$R(p) = 2 \cdot p^4 + 2 \cdot p^5 - 5 \cdot p^6 + 2 \cdot p^7 .$$

Pro střední dobu do poruchy zřejmě platí

$$T_S = \tfrac{2}{35} \cdot T_{GA(4,7)} + \tfrac{34}{105} \cdot T_{GA(5,7)} + \tfrac{1}{3} \cdot T_{GA(6,7)} + \tfrac{2}{7} \cdot T_{GA(7,7)} .$$

2. 2. 1 Obnovované systémy $GA(k, n)$

Významnou spolehlivostní charakteristikou obnovovaných systémů je funkce okamžité pohotovosti, resp. součinitel asymptotické pohotovosti[†]. Z definice 1.3 a 2.1 lze nahlédnout, že k jejich výpočtu lze použít vztahy analogické vztahům pro výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu. Jde především o větu 2.2, algoritmus 1 a odhady z věty 2.3. V uvedených vztazích je však třeba místo pravděpodobností p_i dosadit součinitele asymptotické pohotovosti počítané ze vztahu

$$A_i = \frac{T_i}{T_i + \Phi_i}\,,\ i = 1, \ldots, n\,, \qquad (*)$$

kde T_i je střední doba do poruchy a Φ_i je střední doba do obnovy prvku i. Pro úplnost připomeňme, že předpoklad nezávislosti zůstává v platnosti.

Příklad 2.3

Uvažujme systém $GA(2, 5)$ jehož prvky mají exponenciálně rozdělené doby do poruchy i doby do obnovy s parametry danými tabulkou:

	Číslo prvku				
Intenzita	1	2	3	4	5
poruchy	1,1765E-2	1,1765E-2	1,1111E-2	1,0526E-2	1,0526E-2
obnovy	6,6667E-2	6,6667E-2	1,0000E-1	2,0000E-1	2,0000E-1

Pro součinitele asymptotické pohotovosti prvků tak ze vztahu $(*)$ dostáváme:

$$A_1 = A_2 = 0,85\ ;\ A_3 = 0,90\ ;\ A_4 = A_5 = 0,95\,.$$

Průběh výpočtu $A_{GA(2,5)}$ dle algoritmu 1 dokumentuje následující schéma

$A_{GA(1,1)} = 0,850000$	$A_{GA(1,2)} = 0,977500$	$A_{GA(1,3)} = 0,997750$	$A_{GA(1,4)} = 0,999888$	
	$A_{GA(2,2)} = 0,722500$	$A_{GA(2,3)} = 0,952000$	$A_{GA(2,4)} = 0,995463$	$A_{GA(2,5)} = 0,999666$

a odtud hledaný součinitel asymptotické pohotovosti systému $A_{GA(2,5)} = 0,999666$.

Při výpočtu odhadů dle věty 2.3 dostáváme

[†] V případě neobnovovaných systémů je pravděpodobnost bezporuchového provozu zřejmě rovna hodnotě funkce okamžité pohotovosti.

$$0,999477 \le A_{GA(2,5)} = 0,999666 \le 1,000000$$

a ze vztahu (2.16), kde byl dosazen geometrický průměr součinitelů asymptotických pohotovostí prvků, tj. $A = \sqrt[5]{A_1 \cdot \ldots A_5} = 0,898888$, zjistíme

$$A^*_{GA(2,5)} = 0,999530.$$

Poznámka 2.6

V literatuře [Gr] lze nalézt algoritmus pro výpočet pohotovosti systémů $GA(k, n)$ založený na metodě označované jako state-space enumeration. Analýzou výpočetní složitosti zjistíme, že pro jeho paměťovou složitost platí odhad $O(4 \cdot n)$, pro časovou $O\left(\frac{3}{8} \cdot n^2 + 2 \cdot n\right)$ a tedy v obou případech nedosahuje efektivity v práci navrženého algoritmu 1.

Věta 2.5

Nechť $GA(k,n;p)$ je obnovovaný homogenní systém s nezávislými parametry, jehož všechny prvky mají střední dobu do poruchy T a střední dobu do obnovy Φ. Potom platí:

a) $$A_{GA(k,n;p)} = 1 - \frac{C_n^{k-1}}{\sum_{i=0}^{n-k+1} C_n^{k+i-1} \cdot \left(T/\Phi\right)^i}, \tag{2.19}$$

b) $$T_{GA(k,n;p)} = \Phi_{GA(k,n;p)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} C_n^{k+i-1} \cdot \left(T/\Phi\right)^i}{C_n^{k-1}}. \tag{2.20}$$

Důkaz:

ad a) Označme N náhodnou veličinu udávající počet prvků, které jsou v provozuschopném stavu. Vzhledem k nezávislosti a homogenitě systému je zřejmé, že N má binomické rozdělení řádu n s parametrem rovným součiniteli asymptotické pohotovosti prvku, tj. $A = \frac{T}{T+\Phi}$. Odtud pro asymptotickou pohotovost systému $GA(k, n; p)$ platí

$$A_{GA(k,n;p)} = P(N \ge k \mid N \ge k-1) = 1 - \frac{P(N = k-1)}{P(N \ge k-1)}.$$

Využitím explicitního tvaru pravděpodobnostní funkce veličiny N dostaneme

$$A_{GA(k,n;p)} = 1 - \frac{C_n^{k-1} \cdot A^{k-1} \cdot (1-A)^{n-k+1}}{\sum_{i=k-1}^{n} C_n^i \cdot A^i \cdot (1-A)^{n-i}}.$$

Odtud

$$A_{GA(k,n;p)} = 1 - \frac{C_n^{k-1} \cdot \left(T/_{\Phi}\right)^{k-1}}{\sum_{i=k-1}^{n} C_n^i \cdot \left(T/_{\Phi}\right)^{i}}$$

a několika snadnými úpravami dostáváme vztah (2.19).

ad b) Využitím obecně známého vztahu pro výpočet součinitele asymptotické pohotovosti (tvrzení 1.1) dostáváme

$$A_{GA(k,n;p)} = \frac{T_{GA(k,n;p)}}{T_{GA(k,n;p)} + \Phi_{GA(k,n;p)}},$$

kde $T_{GA(k,n;p)}$ je střední doba do poruchy a $\Phi_{GA(k,n;p)}$ je střední doba do obnovy systému $GA(k,n;p)$. Odtud

$$T_{GA(k,n;p)} = \frac{A_{GA(k,n;p)} \cdot \Phi_{GA(k,n;p)}}{1 - A_{GA(k,n;p)}}$$

Dosazením (2.19) a několika dalšími úpravami dostaneme vztah (2.20).

¤

Exponenciální rozdělení patří ve spolehlivostní praxi mezi nejpoužívanější [BP, GU, KL]. Aplikací věty 2.5 tak dostáváme následující.

<u>Důsledek 2.3</u>

Pro obnovovaný homogenní systém $GA(k,n;p)$, jehož prvky mají exponenciální rozdělení doby do poruchy s intenzitou λ a doby do obnovy s intenzitou μ, platí

$$A_{GA(k,n;p)} = 1 - \frac{C_n^{k-1}}{\sum_{i=0}^{n-k+1} C_n^{k+i-1} \cdot \left(\mu/_{\lambda}\right)^{i}}, \tag{2.21}$$

$$\Phi_{GA(k,n;p)} = \frac{1}{(n-k+1)\cdot\mu}, \tag{2.22}$$

(Zřejmě $\Phi_{GA(k,n;p)} = \min(T_1,\ldots,T_{n-k+1})$, kde T_i , $i = 1,\ldots,n-k+1$ jsou exponenciálně rozdělené náhodné veličiny s parametrem μ.)

$$T_{GA(k,n;p)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-k} C_n^{k+i} \cdot \left(\mu/\lambda\right)^i}{k \cdot C_n^k \cdot \lambda}. \tag{2.23}$$

Speciálně v případě substitučního zálohování $(k=1)$ platí pro součinitel asymptotické pohotovosti

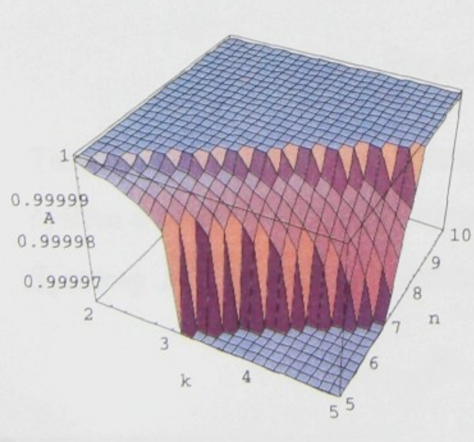
$$A_{GA(1,n;p)} = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n$$

a pro střední dobu do poruchy

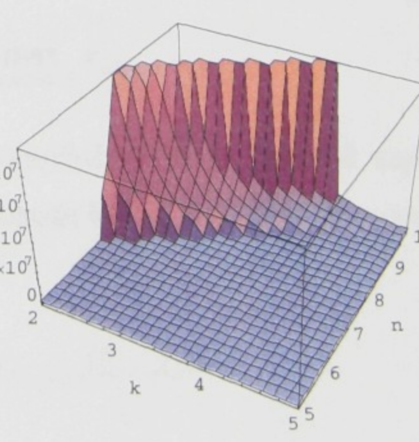
$$T_{GA(1,n;p)} = \frac{\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)^n - 1}{n\mu}.$$

¤

Na závěr této kapitoly je třeba poznamenat, že pro libovolná pevná k, λ, μ $(\mu \geq \lambda)$ lze vhodnou volbou n dosáhnout libovolně velký součinitel asymptotické pohotovosti (< 1) a libovolně dlouhou střední dobu do poruchy. Lze také ukázat, že rychlost konvergence $A_{GA(k,n;p)}$, resp. divergence $T_{GA(k,n;p)}$ má geometrický charakter a jde tedy o velmi efektivní způsob zálohování (viz následující grafy).



Graf 4 - konvergence součinitele asymptotické pohotovosti



Graf 5 - divergence střední doby do poruchy

3. Systémy majoritního zálohování *k* po sobě jdoucích prvků z *n*

(systémy výběru *k* po sobě jdoucích prvků z *n*)

V této kapitole je věnována pozornost výhradně druhému typu systémů majoritního zálohování, totiž systémům majoritního zálohování *k* po sobě jdoucích prvků z *n*, označovaných také jako výběrové systémy *k* po sobě jdoucích prvků z *n*.

Definice 3.1 – lineárně uspořádaný systém

Nechť $S = (\boldsymbol{X}, \varphi(\boldsymbol{x}))$ je spolehlivostní systém, jehož prvky jsou uspořádány lineárně[†] a který splňuje následující podmínky:

- systém i jeho prvky se mohou nacházet pouze v jednom ze dvou vzájemně se vylučujících stavech – provozuschopný stav, poruchový stav,
- v čase $t = 0$ jsou všechny prvky v provozuschopném stavu,
- systém je v poruchovém stavu, jestliže je v poruchovém stavu alespoň *k* po sobě jdoucích prvků z celkového počtu n, $(1 \le k \le n)$.

Potom *S* nazýváme lineárně uspořádaným systémem majoritního zálohování *k* po sobě jdoucích prvků z *n*, typ *F* a značíme $FC_L(k,n)$, resp. $FC_L(k,n;\boldsymbol{p})$, kde $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ je vektor pravděpodobností bezporuchového provozu jednotlivých prvků systému. V případě, kdy všechny prvky mají stejnou pravděpodobnost bezporuchového provozu *p*, použijeme označení $FC_L(k,n;p)$. ¤

Z výše uvedené definice lze nahlédnout tyto základní vlastnosti systémů $FC_L(k,n)$.

- Pro strukturní funkci platí

$$\varphi_{FC_L(k,n)}(\boldsymbol{x}) = \min_{1 \le i \le n-k+1} \max_{i \le j \le i+k-1} x_j . \tag{3.1}$$

  Tento vztah má základní význam, neboť jednoznačně definuje lineárně uspořádaný systém a bude využíván při výpočtu pravděpodobnosti bezporuchového provozu.

- Systémy $FC_L(k,n)$ jsou koherentní, tj.

$$\varphi_{FC_L(k,n)}(0,\ldots,0) = 0 \quad \wedge \quad \varphi_{FC_L(k,n)}(1,\ldots,1) = 1 ,$$

[†] Tj. při daném uspořádání má každý prvek kromě prvního jediného předchůdce a každý kromě posledního jediného následníka.

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\} \quad \left(\forall \boldsymbol{x}\ \varphi_{FC_L(k,n)}(\boldsymbol{x}|1_i) \geq \varphi_{FC_L(k,n)}(\boldsymbol{x}|0_i) \quad \wedge \quad \exists \boldsymbol{x}\ \varphi_{FC_L(k,n)}(\boldsymbol{x}|1_i) > \varphi_{FC_L(k,n)}(\boldsymbol{x}|0_i)\right).$$

- Množinu všech minimálních řezů $FC_L(k,n)$ tvoří

$$\left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, (s(\boldsymbol{x}) = n-k) \ \wedge \ \left(\min_{1 \le i \le n-k+1} \ \max_{i \le j \le i+k-1} x_j = 0 \right) \right\}, \tag{3.2}$$

tj. konfigurace ve kterých se vyskytuje právě k po sobě jdoucích prvků v poruše.

- Množinu všech řezů $FC_L(k,n)$ tvoří

$$\left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \min_{1 \le i \le n-k+1} \ \max_{i \le j \le i+k-1} x_j = 0 \right\}, \tag{3.3}$$

tj. konfigurace, ve kterých se vyskytuje alespoň k po sobě jdoucích prvků v poruše.

Definice 3.2 – systém uspořádaný do kružnice

Nechť S je spolehlivostní systém jehož prvky jsou uspořádány do kružnice† a který splňuje následující podmínky:

- systém se skládá z n prvků, které se mohou nacházet pouze v jednom ze dvou vzájemně se vylučujících stavech – provozuschopný stav, poruchový stav,
- v čase $t = 0$ jsou všechny prvky v provozuschopném stavu,
- systém je v poruchovém stavu, jestliže je v poruchovém stavu alespoň k po sobě jdoucích prvků z celkového počtu n, $(1 \le k \le n)$.

Potom S se nazývá systém majoritního zálohování k po sobě jdoucích prvků z n, typ F, uspořádaný do kružnice a bude označován $FC_K(k,n)$, resp. $FC_K(k,n;\boldsymbol{p})$, $FC_K(k,n;p)$. ¤

Z definice vyplývají následující základní vlastnosti systémů $FC_K(k,n)$.

- Pro strukturní funkci systému platí

$$\varphi_{FC_K(k,n)}(\boldsymbol{x}) = \min_{1 \le i \le n} \ \max_{i \le j \le i+k-1} x_{\tilde{j}}, \tag{3.4}$$

kde $\tilde{j}$ označuje nejmenší kladný zbytek j mod n.

- Systémy $FC_K(k,n)$ jsou koherentní, tj.

$$\varphi_{FC_K(k,n)}(0,\ldots,0) = 0 \ \wedge \ \varphi_{FC_K(k,n)}(1,\ldots,1) = 1,$$

† Tj. každý prvek má při daném uspořádání jediného předchůdce i následníka.

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\} \quad \left(\forall \boldsymbol{x}\ \varphi_{FC_K(k,n)}(\boldsymbol{x} \mid 1_i) \geq \varphi_{FC_K(k,n)}(\boldsymbol{x} \mid 0_i) \ \wedge\ \exists \boldsymbol{x}\ \varphi_{FC_K(k,n)}(\boldsymbol{x} \mid 1_i) > \varphi_{FC_K(k,n)}(\boldsymbol{x} \mid 0_i)\right)$$

- Množinu všech minimálních řezů $FC_K(k,n)$ tvoří

$$\left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, (s(\boldsymbol{x}) = n-k) \ \wedge\ \left(\min_{1 \leq i \leq n} \max_{i \leq j \leq i+k-1} x_{\tilde{j}} = 0 \right) \right\}, \tag{3.5}$$

všech řezů

$$\left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \min_{1 \leq i \leq n} \max_{i \leq j \leq i+k-1} x_{\tilde{j}} = 0 \right\}, \tag{3.6}$$

kde $\tilde{j}$ označuje nejmenší kladný zbytek j mod n.

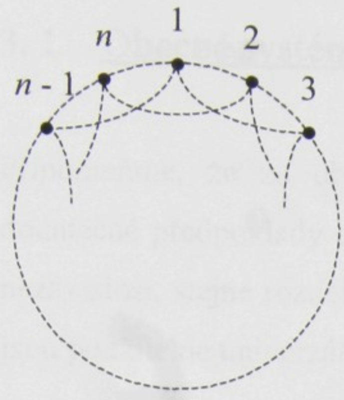
Analogicky k výše uvedeným definicím 3.1 a 3.2 je možné nadefinovat obě varianty uspořádání systémů majoritního zálohování *k* po sobě jdoucích prvků z *n*, typ *G*, které jsou v provozuschopném stavu, jestliže je provozuschopných alespoň *k* po sobě jdoucích prvků z celkového počtu *n*. Označíme-li tyto systémy $GC_L(k,n)$, resp. $GC_K(k,n)$ lze snadno ukázat, že pro jejich pravděpodobnost bezporuchového provozu platí vztah

$$R_{GC_\bullet(k,n;p_1,\ldots,p_n)} = 1 - R_{FC_\bullet(k,n;q_1,\ldots,q_n)},$$

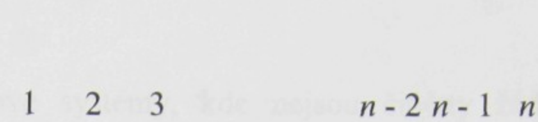
kde • označuje uspořádání prvků systému (tj. *L*, resp. *K*) a $q_i = 1 - p_i$. Bez újmy na obecnosti se lze proto omezit v dalších úvahách na typ *F*.

Poznámka 3.1

- Zásadní rozdíl mezi oběma variantami výběrových systémů *k* po sobě jdoucích prvků z *n* spočívá právě ve vlastnostech uspořádání jeho prvků. U lineárně uspořádaného systému jsou prvky číslovány vzestupně 1,..., *n* a existuje jediný prvek (číslo 1), který nemá předchůdce a existuje jediný prvek (číslo *n*), který nemá následníka. V případě uspořádání do kružnice jsou prvky číslovány ve směru chodu hodinových ručiček (1,..., *n*) a každý prvek má svého předchůdce i následníka. Význam tohoto rozdílu v uspořádání prvků, ve vztahu k definici stavu systému, dokumentuje následující příklad (*k* = 2) z obr. 6. Je zřejmé, že porucha prvků *n* a 1 vede k poruše systému uspořádaného do kružnice, nikoliv však k poruše lineárně uspořádaného systému.



Systém uspořádaný do kružnice



Systém uspořádaný lineárně

Obr. 6 – systémy dvou po sobě jdoucích prvků z n, typ F

- Na rozdíl od výběrových systémů $GA(k,n)$, k jejichž poruše vede porucha libovolných k prvků (tj. uspořádání prvků těchto systémů je z hlediska stavu nepodstatné) je zřejmé, že u obou variant výběrových systémů k po sobě jdoucích prvků z n může být celkový počet porouchaných prvků podstatně větší – u lineárně uspořádaného systému $n-\left\lfloor n/k \right\rfloor$ a u systémů uspořádaných do kružnice $n-\left\lfloor n/k \right\rfloor$ v případě kdy k dělí n a $n-\left\lfloor n/k \right\rfloor-1$ v ostatních případech.

Kromě již uvedených vlastností platí následující:

- Substituční zálohování (tj. paralelní řazení prvků), je spolehlivostně ekvivalentní s oběma variantami výběrových systémů n po sobě jdoucích prvků z n, tj.

$$R_{FC_K(n,n;\boldsymbol{p})} = R_{FC_L(n,n;\boldsymbol{p})} = R_{GA(1,n;\boldsymbol{p})}.$$

- Lineárně uspořádaný n prvkový systém je spolehlivostně ekvivalentní s $(n+1)$ prvkovým systémem uspořádaným do kružnice, kde $p_{n+1}=1$, tj.

$$R_{FC_L(k,n;p_1,\dots,p_n)} = R_{FC_K(k,n+1;p_1,\dots,p_n,p_{n+1}=1)}.$$

- Výběrový systém $(n-1)$ po sobě jdoucích prvků z n uspořádaných do kružnice je spolehlivostně ekvivalentní s výběrovým systémem 2 prvků z n, tj.

$$R_{FC_K(n-1,n;p_1,\dots,p_n)} = R_{GA(2,n,p_1,\dots,p_n)}.$$

3. 1 Obecné systémy $FC_{\bullet}(k, n)$

Připomeňme, že za obecné považujeme takové systémy, kde nejsou činěny žádné dodatečné předpoklady o náhodných veličinách vyjadřujících stavy prvků, jako například nezávislost, stejné rozdělení apod. V tomto smyslu jde o nejobecnější variantu a výsledky jsou použitelné univerzálně.

Věta 3.1 – obecné systémy $FC_{\bullet}(k,n)^{\dagger}$

Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu obecného libovolně uspořádaného (tj. lineárně nebo do kružnice) systému $FC_{\bullet}(k,n)$ platí

$$R_{FC_{\bullet}(k,n)} = \sum_{c \in C_{\bullet}} \mu_{C_{\bullet}}(\mathbf{0},c) \cdot P\left(\prod_{i \in c}(X_i = 0)\right), \tag{3.7}$$

kde $C_{\bullet}$ je spojový polosvaz generovaný minimálními řezy systému $FC_{\bullet}(k,n)$,

$\mu_{C_{\bullet}}$ je Möbiova funkce na $C_{\bullet}$.

Důkaz:

Označme $C_{\bullet}$ množinu, která obsahuje prázdnou množinu $\varnothing$, všechny minimální řezy systému $FC_{\bullet}(k,n)$ a je uzavřená na sjednocení. Množina $C_{\bullet}$ je zřejmě částečně uspořádaná inkluzí. Z koherentnosti systémů $FC_{\bullet}(k,n)$ zřejmě vyplývá, že tvoří spojový polosvaz, kde operace spojení $\vee$ je definována jako sjednocení, tj.

$$c \vee d = c \cup d, \quad c,d \in C_{\bullet}.$$

Nejmenší prvek uvedeného polosvazu budeme dále značit **0** a největší **1**.

Na množině $C_{\bullet}$ definujme funkce *f* a *g* následovně

$$f(c) = P\left(\prod_{i \in c}(X_i = 0)\right), \text{ kde } f(\mathbf{0}) = 1,$$

$$g(c) = P\left(\prod_{i \in c}(X_i = 0) \wedge \prod_{j \notin c}(X_j = 1)\right), \quad c \in C_{\bullet}.$$

† V závislosti na variantě systému je třeba symbol • všude nahradit symbolem L pro lineárně uspořádané systémy a K pro systémy uspořádané do kružnice.

Snadno nahlédneme platnost $f(c)=\sum_{\substack{d\in C_\bullet \\ c\subseteq d}} g(d)$ a tudíž aplikací Möbiova zákona inverze číselných funkcí dostáváme

$$g(c)=\sum_{\substack{d\in C_\bullet\setminus\mathbf{0} \\ c\subseteq d}} f(d)\cdot\mu_{C_\bullet}(c,d),\, c\in C_\bullet\setminus\mathbf{0}.$$

Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu systému $FC_\bullet(k,n)$ tak zřejmě platí

$$R_{FC_\bullet(k,n)}=1-\sum_{c\in C_\bullet\setminus\mathbf{0}} g(c)=1-\sum_{c\in C_\bullet\setminus\mathbf{0}}\sum_{\substack{d\in C_\bullet\setminus\mathbf{0} \\ c\subseteq d}} f(d)\cdot\mu_{C_\bullet}(c,d),$$

tedy

$$R_{FC_\bullet(k,n)}=1+\sum_{d\in C_\bullet\setminus\mathbf{0}} f(d)\cdot\left(-\sum_{\substack{c\in C_\bullet\setminus\mathbf{0} \\ c\subseteq d}}\mu_{C_\bullet}(c,d)\right).$$

Přímo z definice Möbiovy funkce dostáváme

$$0=\sum_{\substack{c\in C_\bullet \\ c\subseteq d}}\zeta(\mathbf{0},c)\cdot\mu_{C_\bullet}(c,d)=\zeta(\mathbf{0},\mathbf{0})\cdot\mu_{C_\bullet}(\mathbf{0},d)+\sum_{\substack{c\in C_\bullet\setminus\mathbf{0} \\ c\subseteq d}}\zeta(\mathbf{0},c)\cdot\mu_{C_\bullet}(c,d),\quad d\in C_\bullet\setminus\mathbf{0},$$

kde $\zeta(c,d)$ je $\zeta-$funkce definovaná na $C_\bullet$ vztahy $\zeta(c,d)=1$, jestliže $c\subseteq d$ a $\zeta(c,d)=0$ jinde. Odtud

$$\mu_{C_\bullet}(\mathbf{0},d)=-\sum_{\substack{c\in C_\bullet \\ c\subset d}}\mu_{C_\bullet}(\mathbf{0},c)$$

a pro pravděpodobnost bezporuchového provozu systému $FC_\bullet(k,n)$ tak dostáváme

$$R_{FC_\bullet(k,n)}=1+\sum_{d\in C_\bullet\setminus\mathbf{0}} f(d)\cdot\mu_{C_\bullet}(\mathbf{0},d)=\sum_{d\in C_\bullet} f(d)\cdot\mu_{C_\bullet}(\mathbf{0},d).$$

¤

Poznámka 3.2

- Výpočet $R_{FC_\bullet(k,n)}$ je vhodné provádět postupně dle vztahu

$$R(m)=R(m-1)+\sum_{\|c\|=m}\mu_{C_\bullet}(\mathbf{0},c)\cdot P\left(\prod_{i\in c}(X_i=0)\right),\, m=1,\dots,\|\mathbf{1}\|^{\dagger},\qquad(3.8)$$

kde $R(0)=1$ a $\|c\|$ označuje výšku řezu c (tj. maximální délku řetězce mezi $\mathbf{0}$ a c).

† Součet se provádí přes všechny řezy dané výšky.

Průběžně počítané hodnoty $R(m)$ lze použít jako odhad pravděpodobnosti $R_{FC_\bullet(k,n)}$ s vlastností $R(\|\mathbf{1}\|) = R_{FC_\bullet(k,n)}$.

- Z hlediska praktického využití vztahů (3.7), (3.8) je podstatný způsob výpočtu hodnot Möbiovy funkce. V případě zcela obecných systémů $FC_\bullet(k,n)$ není možné nalézt její jednoduchý explicitní tvar a je třeba využít některý z následujících postupů:
  - Postup založený přímo na definici Möbiovy funkce jako inverzní k ζ - funkci a faktu, že obě funkce lze reprezentovat maticemi. Lze snadno ukázat, že zmíněné matice jsou navzájem inverzní a tedy hodnoty $\mu_{C_\bullet}(\mathbf{0},c)$ tvoří první řádek matice inverzní k Z-matici reprezentující funkci ζ, tj. $\mathrm{Z} = \left(\zeta_{c,d}\right)_{c,d\in C}$, kde $\zeta_{c,d} = \zeta(c,d)$. Jelikož uvedená Z-matice je horní trojúhelníková a řídká 0-1 matice, je způsob výpočtu snadno počítačově implementovatelný i pro poměrně rozsáhlé systémy.
  - Druhá metoda je založena na vztazích

$$\mu_{C_\bullet}(\mathbf{0},d) = -\sum_{\substack{c\in C_\bullet \\ c\subset d}} \mu(\mathbf{0},c), \quad \mu_{C_\bullet}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 1 \tag{3.9}$$

  vyplývajících z důkazu věty 3.1. I tento přístup k výpočtu je zřejmě použitelný pro rozsáhlé systémy.

  Navíc lze ukázat, že pro hodnoty $\mu_{C_\bullet}$ a jednotlivé varianty systému platí:

  Systém $FC_L(k,n)$: $\forall c\in C_L \quad \mu_{C_L}(\mathbf{0},c)\in\{-1,0,1\}$,

  Systém $FC_K(k,n)$: $\forall c\in C_K - \{\mathbf{1}\} \quad \mu_{C_K}(\mathbf{0},c)\in\{-1,0,1\}$,

  $\mu_{C_K}(\mathbf{0},\mathbf{1})\in\{-1,k\}$.

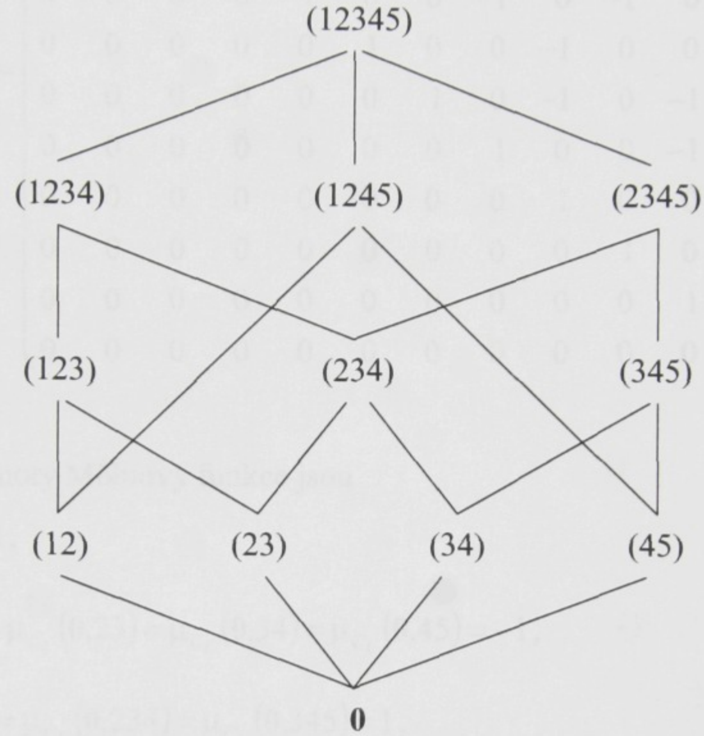
¤

Vztahy (3.7), (3.8) jsou nejefektivnější autorovi známé vztahy určené pro výpočet $R_{FC_\bullet(k,n)}$ obecných systémů $FC_\bullet(k,n)$. Z důkazu věty 3.1 totiž vyplývá, že obsahují minimální počet členů nejjednoduššího možného tvaru. Je zřejmé, že k výpočtu pravděpodobnosti bezporuchového provozu obecných systémů $FC_\bullet(k,n)$ lze využít i „univerzální“ metody, jako například princip inkluze a exkluze, disjoint product apod. Tyto metody však jsou výpočetně podstatně složitější, neboť na rozdíl od prezentovaných obsahují členy stejného tvaru, ovšem opačného znaménka (viz následující příklad).

Příklad 3.1

a) Výpočet $R_{FC_L(2,5)}$.

Z (3.2) je zřejmé, že minimální řezy tvoří dvojice prvků (1,2), (2,3), (3,4), (4,5) a Hasseův diagram příslušný spojovému polosvazu C_L je na obr. 7.



Obr. 7 – spojový polosvaz minimálních řezů systému $FC_L(2,5)$

Pro výpočet hodnot Möbiovy funkce využijeme první metodu z poznámky 3.2, tj. inverzi Z-matice, která má tvar

$$Z = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Invertováním Z dostáváme

$$Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a tedy hledané hodnoty Möbiovy funkce jsou

$$\mu_{C_L}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 1,$$

$$\mu_{C_L}(\mathbf{0},12) = \mu_{C_L}(\mathbf{0},23) = \mu_{C_L}(\mathbf{0},34) = \mu_{C_L}(\mathbf{0},45) = -1,$$

$$\mu_{C_L}(\mathbf{0},123) = \mu_{C_L}(\mathbf{0},234) = \mu_{C_L}(\mathbf{0},345) = 1,$$

$$\mu_{C_L}(\mathbf{0},1245) = 1, \quad \mu_{C_L}(\mathbf{0},1234) = \mu_{C_L}(\mathbf{0},2345) = 0,$$

$$\mu_{C_L}(\mathbf{0},12345) = -1.$$

Označíme-li pro zjednodušení zápisu $P(i_1 \dots i_m) = P(X_{i_1} = 0, \dots X_{i_m} = 0)$, dostáváme aplikací (3.9) vztahy

$$R(1) = 1 + \sum_{\|c\|=1} \mu_{C_L}(\mathbf{0},c) \cdot P\left(\prod_{i \in c}(X_i = 0)\right) = 1 - P(12) - P(23) - P(34) - P(45),$$

$$R(2) = R(1) + \sum_{\|c\|=2} \mu_{C_L}(\mathbf{0},c) \cdot P\left(\prod_{i \in c}(X_i = 0)\right) = R(1) + P(123) + P(234) + P(345) + P(1245),$$

$R(3) = R(2)$, jelikož pro všechny řezy c s výškou 3 platí $\mu(\mathbf{0},c) = 0$,

$$R_{FC_L(2,5)} = R(4) = R(2) - P(12345).$$

Pro porovnání, výpočet dle principu inkluze a exkluze probíhá následovně

$$R^{IE}(1) = 1 - P(12) - P(23) - P(34) - P(45),$$

$$R^{IE}(2) = R(1) + P(123) + P(1234) + P(1245) + P(234) + P(2345) + P(345)$$

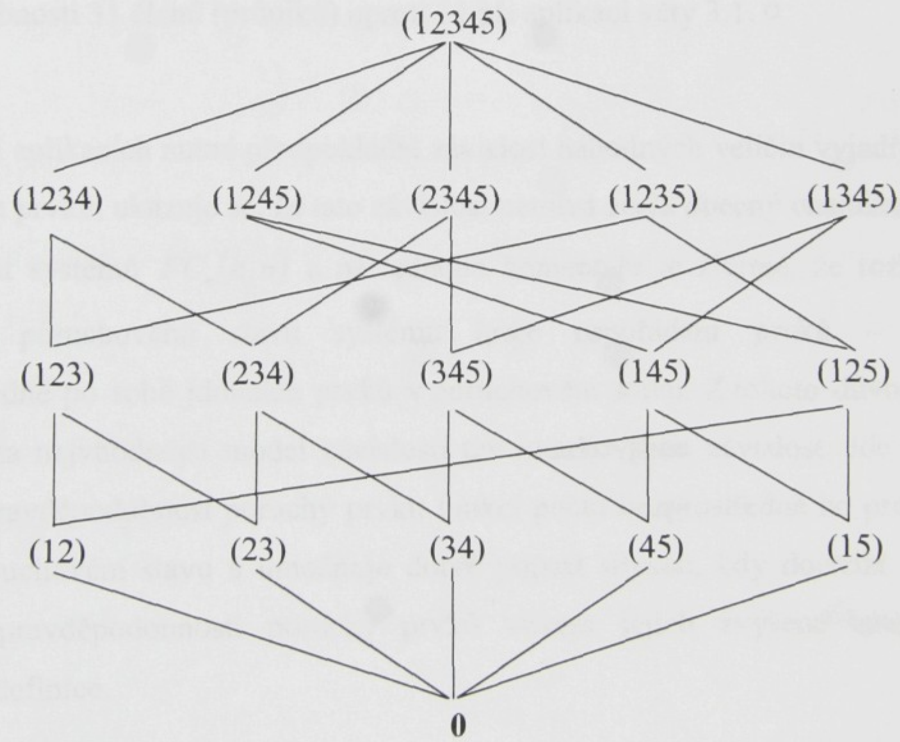
$$R^{IE}(3) = R(2) - P(1234) - P(12345) - P(12345) - P(2345)$$

$$R_{FC_L(2,5)} = R^{IE}(4) = R(3) + P(12345).$$

Při výpočtu dle metody z věty 3.1 bylo třeba vyčíslit pravděpodobnosti 9 průniků oproti 15 při použití principu inkluze a exkluze.

b) Výpočet $R_{FC_K(2,5)}$.

Minimální řezy tvoří dvojice (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (1,5) a Hasseův diagram odpovídající spojovému polosvazu C_K je na obr. 8.



Obr. 8 – spojový polosvaz minimálních řezů systému $FC_K(2,5)$

Aplikací druhého postupu z poznámky 3.2, tj. vztahu (3.9) dostáváme

$$\mu_{C_K}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 1,$$

$$\mu_{C_K}(\mathbf{0},12)=\mu_{C_K}(\mathbf{0},23)=\mu_{C_K}(\mathbf{0},34)=\mu_{C_K}(\mathbf{0},45)=\mu_{C_K}(\mathbf{0},15)=-1,$$

$$\mu_{C_K}(\mathbf{0},123)=\mu_{C_K}(\mathbf{0},234)=\mu_{C_K}(\mathbf{0},345)=\mu_{C_K}(\mathbf{0},145)=\mu_{C_K}(\mathbf{0},125)=1$$

$$\mu_{C_K}(\mathbf{0},1234)=\mu_{C_K}(\mathbf{0},1245)=\mu_{C_K}(\mathbf{0},2345)=\mu_{C_K}(\mathbf{0},1235)=\mu_{C_K}(\mathbf{0},1345)=0,$$

$$\mu_{C_K}(\mathbf{0},12345)=-1,$$

tedy

$$R(1)=1-P(12)-P(23)-P(34)-P(45)-P(15),$$

$$R(2)=R(1)+P(123)+P(234)+P(345)+P(145)+P(125),$$

$R(3)=R(2)$, jelikož pro všechny řezy c s výškou 3 platí $\mu(\mathbf{0},c)=0$,

$$R_{FC_K(2,5)}=R(4)=R(2)-P(12345).$$

Pro porovnání, v případě aplikace principu inkluze a exkluze je třeba postupně vyčíslit pravděpodobnosti 31 členů (průniků) oproti 11 při aplikaci věty 3.1. ¤

Pokud je při aplikacích nutné předpokládat závislost náhodných veličin vyjadřujících stavy jednotlivých prvků, ukazuje se, že tato závislost nemívá zcela obecný charakter. Z definice obou variant systémů $FC_{\bullet}(k,n)$ a následného komentáře je zřejmé, že rozhodující roli při definici poruchového stavu systému hraje uspořádání prvků – libovolných k bezprostředně po sobě jdoucích prvků v poruchovém stavu. Z tohoto důvodu je možné považovat za nejvhodnější model závislosti tzv. markovskou závislost. Jde o model, ve kterém je pravděpodobnost poruchy prvku funkcí počtu bezprostředně ho předcházejících prvků v poruchovém stavu a umožňuje dobře popsat situace, kdy dochází například ke zvyšování pravděpodobnosti poruchy prvků vlivem jejich zvýšené zátěže. Přesněji následující definice.

<u>Definice 3.3</u> – systémy s markovskou závislostí

Řekneme, že systém majoritního zálohování k po sobě jdoucích prvků z n je systém s markovskou závislostí řádu (k – 1), jestliže pravděpodobnost poruchy libovolného prvku systému je funkcí počtu bezprostředně ho předcházejících po sobě jdoucích prvků v poruchovém stavu.

Příslušné pravděpodobnosti poruch prvků jsou tedy definovány následovně:

- pro $FC_L(k,n)$

$$q_{1|0} = P(X_1 = 0),\quad q_{i|0} = P(X_i = 0 | X_{i-1} = 1),\ i = 2,\dots n,$$

$$q_{i|i-1} = P(X_i = 0 | X_{i-1} = 0,\dots,X_1 = 0),\quad i = 2,\dots,k$$

$$q_{i|j} = P(X_i = 0 | X_{i-1} = 0,\dots,X_{i-j} = 0, X_{i-j-1} = 1),\quad i = 3,\dots,n\ ,$$

$$j = 1,\dots,\min(k-1, i-2),$$

- pro $FC_K(k,n)$

$$q_{i|0} = P(X_i = 0 | X_{i-1} = 1),\quad q_{i|j} = P(X_i = 0 | X_{i-1} = 0,\dots,X_{i-j} = 0, X_{i-j-1} = 1),$$

$$i = 1,\dots,n\ ;\ j = 1,\dots,k-1,$$

kde indexy je třeba brát jako nejmenší kladné zbytky modulo n.

Pravděpodobnosti bezporuchového provozu prvků jsou pro oba typy systémů definovány vztahem $p_{i|j} = 1 - q_{i|j}$. ¤

U obou variant systémů tak pravděpodobnosti $q_{i|j}$ vyjadřují pravděpodobnost vzniku poruchy prvku i v situaci, kdy právě j bezprostředních předchůdců (ve smyslu uspořádání) je v poruchovém stavu (tj. $(j+1)$-ní předchůdce je provozuschopný). V případech, kdy bude třeba zdůraznit markovskou závislost, použijeme označení $FC_{\bullet}(k,n;q_{1|j},\dots,q_{n|j})$.

<u>Věta 3.2</u> – systémy s markovskou závislostí řádu k - 1

Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu systému $FC_L(k,n)$ s markovskou závislostí řádu $k-1$ platí

$$R_{FC_L(k,n)} = 1 - \sum_{i=0}^{n-k} Q_{i+1,k} \cdot R_{FC_L(k,i)|0}\ , \tag{3.10}$$

kde $Q_{i,j} = \prod_{l=0}^{j-1} q_{i+l|l}\ ,\quad i = 1,\dots,n\ ;\ j = 1,\dots,\min(k, n-i+1),$

$$R_{FC_L(k,0)|0} = 1\ ,\quad R_{FC_L(k,i)|0} = \sum_{j=0}^{\min(k-1,i-1)} p_{i|j} \cdot R_{FC_L(k,i-1)|j}\quad \text{pro } i \geq 1,$$

$$R_{FC_L(k,i)|j} = Q_{i-j+1,j} \cdot \sum_{l=0}^{\min(k-1,i-j-1)} p_{i-j|l} \cdot R_{FC_L(k,i-j-1)|l}\quad \text{pro } 0 < j < i \leq n,$$

$$R_{FC_L(k,i)|i} = Q_{1,i}\quad \text{pro } 0 < i < k \qquad \text{a} \qquad R_{FC_L(k,i)|j} = 0\quad \text{pro } i < j < k.$$

Důkaz:

Označme A množinu všech řezů systému $FC_L(k,n)$, tj. $A=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\varphi_{FC_L(k,n)}(\boldsymbol{x})=0\right\}$.

Z vyjádření strukturní funkce ve tvaru (3.1) pak snadno nahlédneme, že množiny

$$B_i=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\min_{0\le j\le n-k}\left\{j\,\middle|\,\max_{j+1\le l\le j+k}x_l=0\right\}=i\right\},\quad i=0,\dots,n-k$$

tvoří rozklad A (B_i obsahuje všechny řezy, ve kterých první „poruchový" řetězec začíná na pozici $i+1$). Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu systému dostáváme

$$R_{FC_L(k,n)}=1-\sum_{i=0}^{n-k}P(B_i).$$

Zřejmě platí

$$B_i=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\varphi_{FC_L(k,i)}(x_1,\dots,x_i)=1\wedge x_i=1\wedge x_{i+1}=\ldots=x_{i+k}=0\right\}$$

(pro $i=0$ je třeba formálně dodefinovat $x_0=1$, $\varphi_{FC_L(k,0)}=1$), tedy

$$P(B_i)=P\left(x_{i+1}=\ldots=x_{i+k}=0\,\middle|\,\varphi_{FC_L(k,i)}(x_1,\dots,x_i)=1\wedge x_i=1\right)\cdot P\left(\varphi_{FC_L(k,i)}(x_1,\dots,x_i)=1\wedge x_i=1\right)$$

S ohledem na definici $q_{i,j}$ lze psát

$$P\left(x_{i+1}=\ldots=x_{i+k}=0\,\middle|\,\varphi_{FC_L(k,i)}(x_1,\dots,x_i)=1\wedge x_i=1\right)=q_{i+1|0}\cdot q_{i+2|1}\cdot\ldots\cdot q_{i+k|k-1}=Q_{i+1,k}$$

a označíme-li

$$R_{FC_L(k,i)|0}=P\left(\varphi_{FC_L(k,i)}(x_1,\dots,x_i)=1\wedge x_i=1\right),\quad i\ge 0,\qquad (*)$$

podmíněnou pravděpodobnost bezporuchového provozu systému $FC_L(k,i;p_1,\dots,p_i)$ za podmínky, že poslední prvek je provozuschopný (tedy $R_{FC_L(k,0)|0}=1$), dostáváme

$$R_{FC_L(k,n)}=1-\sum_{i=0}^{n-k}Q_{i+1,k}\cdot R_{FC_L(k,i)|0}\,.$$

Pro $i\ge 1$ lze zřejmě psát

$$\left\{(x_1,\dots,x_i)\,\middle|\,\varphi_{FC_L(k,i)}(x_1,\dots,x_i)=1\wedge x_i=1\right\}=$$

$$=\bigcup_{j=0}^{\min(k-1,i-1)}\left\{(x_1,\dots,x_i)\,\middle|\,\varphi_{FC_L(k,i-1)}(x_1,\dots,x_{i-1})=1\wedge x_{i-j-1}=1\wedge x_{i-j}=\ldots=x_{i-1}=0\wedge x_i=1\right\}.$$

Odtud

$$P\left(\varphi_{FC_L(k,i-1)}(x_1,\dots,x_{i-1})=1 \wedge x_{i-j-1}=1 \wedge x_{i-j}=\dots=x_{i-1}=0 \wedge x_i=1\right)=$$

$$=P\left(x_i=1 \,\middle|\, \varphi_{FC_L(k,i-1)}(x_1,\dots,x_{i-1})=1 \wedge x_{i-j-1}=1 \wedge x_{i-j}=\dots=x_{i-1}=0\right)\cdot$$

$$\cdot P\left(\varphi_{FC_L(k,i-1)}(x_1,\dots,x_{i-1})=1 \wedge x_{i-j-1}=1 \wedge x_{i-j}=\dots=x_{i-1}=0\right).$$

Označíme-li v souladu s $(*)$

$$R_{FC_L(k,i-1)\,|\,j}=P\left(\varphi_{FC_L(k,i-1)}(x_1,\dots,x_{i-1})=1 \wedge x_{i-j-1}=1 \wedge x_{i-j}=\dots=x_{i-1}=0\right),\ j\geq 1,\ i\geq 1$$

podmíněnou pravděpodobnost bezporuchového provozu systému $FC_L(k,i-1;p_1,\dots,p_{i-1})$ za podmínky, že posledních j prvků je v poruchovém stavu, dostáváme

$$R_{FC_L(k,i)|\,0}=\sum_{j=0}^{\min(k-1,i-1)} p_{i|\,j}\cdot R_{FC_L(k,i-1)|\,j}\,.$$

Stejné úvahy vedou ke vztahu

$$R_{FC_L(k,i)|\,j}=Q_{i-j+1,j}\cdot\sum_{l=0}^{\min(k-1,i-j-1)} p_{i-j|\,l}\cdot R_{FC_L(k,i-j-1)|\,l} \qquad \text{pro } 0<j<i\leq n,$$

se zřejmými podmínkami

$$R_{FC_L(k,i)|\,i}=Q_{1,i}\ \text{ pro } 0<i<k \qquad \text{a} \qquad R_{FC_L(k,i)|\,j}=0\ \text{ pro i} <j<k.$$

¤

Důsledek 3.1

V případě, kdy pravděpodobnost poruchy prvku závisí pouze na stavu bezprostředně předcházejícího prvku (tzv. markovská závislost řádu 1), dostáváme

$$R_{FC_L(k,n)}=\left[1+A_{n,k}\right]\cdot R_{FC_L(k,n-1)}-A_{n,k}\cdot R_{FC_L(k,n-2)}-$$

$$-q_{n|1}\cdot\ldots\cdot q_{n-k+2|1}\cdot q_{n-k+1|0}\cdot p_{n-k|1}\cdot R_{FC_L(k,n-k-1)} \tag{3.11}$$

kde $A_{n,k}=\left(p_{n-k|0}-p_{n-k|1}\right)\cdot\dfrac{q_{n|1}\cdot q_{n-k+1|0}}{q_{n-k+1|1}\cdot q_{n-k|0}}$

a s počáteční podmínkou $R_{FC_L(k,n)}=1$ pro $0\leq n<k$.

¤

Vztahy (3.10), (3.11) lze samozřejmě aplikovat i na homogenní systémy $FC_L(k,n)$ s markovskou závislostí[†]. Jde o systémy, kde

$$\forall i,j \in \{1,\dots,n\} \quad q_{i|m} = q_{j|m},$$

tedy každé dva prvky mají stejné podmíněné pravděpodobnosti poruch, které jsou funkcí pouze počtu bezprostředně předcházejících prvků v poruchovém stavu. V tomto případě budeme používat označení $q_{\bullet|m}$ místo $q_{i|m}$ a $p_{\bullet|m}$ místo $p_{i|m}$.

Příklad 3.2

a) Výpočet $R_{FC_L(3,7)}$ - nehomogenní systém s markovskou závislostí řádu 2.

Uvažujme nehomogenní lineárně uspořádaný systém $FC_L(3,7)$ s markovskou závislostí řádu dva. Symbolickou aplikací věty 3.2 tak pro jeho pravděpodobnost bezporuchového provozu dostáváme

$$R_{FC_L(3,7)} = 1 - \sum_{i=0}^{4} Q_{i+1,3} \cdot R_{FC_L(3,i)|0},$$

kde $Q_{1,3} = q_{1|0} \cdot q_{2|1} \cdot q_{3|2}$, $Q_{2,3} = q_{2|0} \cdot q_{3|1} \cdot q_{4|2}$, $Q_{3,3} = q_{3|0} \cdot q_{4|1} \cdot q_{5|2}$,

$Q_{4,3} = q_{4|0} \cdot q_{5|1} \cdot q_{6|2}$, $Q_{5,3} = q_{5|0} \cdot q_{6|1} \cdot q_{7|2}$.

Pro podmíněné pravděpodobnosti bezporuchového provozu postupně nalezneme

$R_{FC_L(3,0)|0} = 1$,

$R_{FC_L(3,1)|0} = p_{1|0} \cdot R_{FC_L(3,0)|0} = p_{1|0}$, $R_{FC_L(3,1)|1} = Q_{1,1} = q_{1|0}$,

$R_{FC_L(3,2)|0} = p_{2|0} \cdot R_{FC_L(3,1)|0} + p_{2|1} \cdot R_{FC_L(3,1)|1} = p_{1|0} \cdot p_{2|0} + q_{1|0} \cdot p_{2|1}$,

$R_{FC_L(3,2)|1} = Q_{2|1} \cdot p_{1|0} \cdot R_{FC_L(3,0)|0} = p_{1|0} \cdot q_{2|0}$, $R_{FC_L(3,2)|2} = Q_{1|2} = q_{1|0} \cdot q_{2|1}$,

$R_{FC_L(3,3)|0} = p_{3|0} \cdot R_{FC_L(3,2)|0} + p_{3|1} \cdot R_{FC_L(3,2)|1} + p_{3|2} \cdot R_{FC_L(3,2)|2} =$

[†] V případě homogenních systémů $FC_L(k,n)$ s markovskou závislostí řádu jedna lze nalézt explicitní vztahy pro výpočet jejich pravděpodobnosti bezporuchového provozu – viz [Ko2].

$$= \left(p_{1|0} \cdot p_{2|0} + q_{1|0} \cdot p_{2|1}\right) \cdot p_{3|0} + p_{1|0} \cdot q_{2|0} \cdot p_{3|1} + q_{1|0} \cdot q_{2|1} \cdot p_{3|2},$$

$$R_{FC_L(3,3)|1} = Q_{3|1} \cdot \left[p_{2|0} \cdot R_{FC_L(3,1)|0} + p_{2|1} \cdot R_{FC_L(3,1)|1} \right] = \left[p_{1|0} \cdot p_{2|0} + q_{1|0} \cdot p_{2|1} \right] \cdot q_{3|0},$$

$$R_{FC_L(3,3)|2} = Q_{2,2} \cdot p_{1|0} \cdot R_{FC_L(3,0)|0} = p_{1|0} \cdot q_{2|0} \cdot q_{3|1},$$

$$R_{FC_L(3,4)|0} = p_{4|0} \cdot R_{FC_L(3,3)|0} + p_{4|1} \cdot R_{FC_L(3,3)|1} + p_{4|2} \cdot R_{FC_L(3,3)|2} =$$

$$= \left[\left(p_{1|0} \cdot p_{2|0} + q_{1|0} \cdot p_{2|1}\right) \cdot p_{3|0} + p_{1|0} \cdot q_{2|0} \cdot p_{3|1} + q_{1|0} \cdot q_{2|1} \cdot p_{3|2} \right] \cdot p_{4|0} +$$

$$+ \left(p_{1|0} \cdot p_{2|0} + q_{1|0} \cdot p_{2|1}\right) \cdot q_{3|0} \cdot p_{4|1} + p_{1|0} \cdot q_{2|0} \cdot q_{3|1} \cdot p_{4|2}.$$

(Z těchto vztahů je jasně patrná myšlenka výpočtu, která je využívána i v případě systémů s nezávislými parametry.)

Pro úplnost výpočtu předpokládejme, že podmíněné pravděpodobnosti bezporuchového provozu $p_{i|j}$ jednotlivých prvků systému, jsou dány následující tabulkou (zvýšením zátěže způsobené poruchou bezprostředního předchůdce dochází k 5% snížení „spolehlivosti"):

$j \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7
0	0,9600	0,9550	0,9500	0,9450	0,9400	0,9350	0,9300
1	0,9120	0,9073	0,9025	0,8978	0,8930	0,8883	0,8835
2	0,8664	0,8619	0,8574	0,8529	0,8484	0,8438	0,8393

Odpovídající podmíněné pravděpodobnosti poruch jsou dány vztahem $q_{i\,|\,j} = 1 - p_{i\,|\,j}$.

Výpočtem pak dostáváme:

$Q_{1,3} = 5{,}2876\text{E-}04$; $Q_{2,3} = 6{,}4540\text{E-}04$; $Q_{3,3} = 7{,}7468\text{E-}04$;

$Q_{4,3} = 9{,}1924\text{E-}04$; $Q_{5,3} = 1{,}0770\text{E-}03$;

$R_{FC_L(3,0)|0} = 1{,}0000\text{E+}00$; $R_{FC_L(3,1)|0} = 9{,}6000\text{E-}01$; $R_{FC_L(3,1)|1} = 4{,}0000\text{E-}02$;

$R_{FC_L(3,2)|0} = 9{,}5309\text{E-}01$, $R_{FC_L(3,2)|1} = 4{,}3200\text{E-}02$, $R_{FC_L(3,2)|2} = 3{,}7080\text{E-}03$;

$R_{FC_L(3,3)|0} = 9{,}4760\text{E-}01$; $R_{FC_L(3,3)|1} = 4{,}7655\text{E-}02$; $R_{FC_L(3,3)|2} = 4{,}2120\text{E-}03$;

$R_{FC_L(3,4)|0} = 9{,}4186\text{E-}01$.

Odtud výsledná pravděpodobnost bezporuchového provozu $R_{FC_L(3,7)} = 0{,}996\,228$.

b) Výpočet $R_{FC_L(3,7)}$ - homogenní systém s markovskou závislostí řádu 2.

Z homogenity ihned vyplývá

$$Q_{1,3} = Q_{2,3} = Q_{3,3} = Q_{4,3} = Q_{5,3} = q_{\bullet|0} \cdot q_{\bullet|1} \cdot q_{\bullet|2},$$

$$R_{FC_L(3,0)|0} = 1, \; R_{FC_L(3,1)|0} = p_{\bullet|0}, \; R_{FC_L(3,1)|1} = q_{\bullet|0},$$

$$R_{FC_L(3,2)|0} = p_{\bullet|0}^2 + q_{\bullet|0} \cdot p_{\bullet|1}, \; R_{FC_L(3,2)|1} = p_{\bullet|0} \cdot q_{\bullet|0}, \; R_{FC_L(3,2)2} = q_{\bullet|0} \cdot q_{\bullet 1},$$

$$R_{FC_L(3,3)|0} = p_{\bullet|0}^3 + 2 \cdot p_{\bullet|0} \cdot q_{\bullet|0} \cdot p_{\bullet|1} + q_{\bullet|0} \cdot q_{\bullet|1} \cdot p_{\bullet|2},$$

$$R_{FC_L(3,3)|1} = p_{\bullet|0}^2 \cdot q_{\bullet|0} + p_{\bullet|1} \cdot q_{\bullet|0}^2, \; R_{FC_L(3,3)2} = p_{\bullet|0} \cdot q_{\bullet|0} \cdot q_{\bullet 1},$$

$$R_{FC_L(3,4)|0} = p_{\bullet|0}^4 + 3 \cdot q_{\bullet|0} \cdot p_{\bullet|1} \cdot p_{\bullet|0}^2 + 2 \cdot q_{\bullet|0} \cdot q_{\bullet|1} \cdot p_{\bullet|2} \cdot p_{\bullet|0} + q_{\bullet|0}^2 \cdot p_{\bullet|1}^2$$

a tedy pro hledanou pravděpodobnost bezporuchového provozu systému $FC_L(3,7)$ dostáváme

$$R_{FC_L(3,7)} = 1 - q_{\bullet|0} q_{\bullet|1} q_{\bullet|2} \cdot \left[1 + p_{\bullet|0} + p_{\bullet|0}^2 + p_{\bullet|0}^3 + p_{\bullet|0}^4 + q_{\bullet|0} \cdot \left(p_{\bullet|1} + 2 p_{\bullet|0} p_{\bullet|1} + 3 p_{\bullet|0}^2 p_{\bullet|1}\right) + \right.$$

$$\left. + q_{\bullet|0}^2 p_{\bullet|1}^2 + q_{\bullet|0} q_{\bullet|1} \cdot \left(p_{\bullet|2} + 2 p_{\bullet|0} p_{\bullet|1}\right)\right]. \qquad (*)$$

Pro numerický výpočet předpokládejme, analogicky k části a), že vlivem zvýšené zátěže způsobené poruchou bezprostředního předchůdce dochází k 5% snížení pravděpodobnosti bezporuchového provozu prvku. Dostáváme tak

i	0	1	2
$p_{\bullet\|i}$	0,9500	0,9025	0,8574
$q_{\bullet\|i}$	0,0500	0,0975	0,1426

a numerickým výpočtem dle (*) $R_{FC_L(3,7)} = 0,966\,684$.

¤

3. 2 Systémy $FC_{\bullet}(k, n)$ s nezávislými parametry

V tomto odstavci se budeme zabývat výhradně systémy $FC_{\bullet}(k,n)$, které vyhovují podmínce nezávislosti (P2).

Věta 3.3 – vztah $FC_K(k, n) \times FC_L(k, n)$

Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu systému $FC_K(k, n)$, $k < n$[†] platí

$$R_{FC_K(k,n;p_1,\dots,p_n)} = \sum_{i=1}^{k} A_i \cdot \sum_{j=n-k+1}^{n} B_j \cdot R_{FC_L(k,j-i-1;p_{i+1},\dots,p_{j-1})}, \tag{3.12}$$

kde $A_1 = p_1$ a $A_i = p_i \cdot \prod_{l=1}^{i-1} q_l$ pro $i > 1$,

$B_n = p_n$ a $B_j = p_j \cdot \prod_{l=j+1}^{n} q_l$ pro $j < n$.

Důkaz:

Označme $S = \{x \mid \varphi_{FC_K(k,n)}(x) = 1\}$ množinu všech cest systému $FC_K(k,n)$ a definujme množiny $S_{i,j}$ následovně

$$S_{i,j} = \left\{x \mid \varphi_{FC_K(k,n;p_1,\dots,p_n)} = 1 \wedge i = \min\{l \mid x_l = 1\} \wedge j = \max\{l \mid x_l = 1\}\right\}.$$

Vzhledem k definici strukturních funkcí obou variant systémů a indexů i, j, lze psát

$$S_{i,j} = \left\{x \mid \varphi_{FC_L(k,j-i-1;p_{i+1},\dots,p_{j-1})} = 1 \wedge i = \min\{l \mid x_l = 1\} \wedge j = \min\{l \mid x_l = 1\}\right\},$$

což vzhledem k předpokladu nezávislosti vede ke vztahu

$$P(S_{i,j}) = A_i \cdot R_{FC_L(k,j-i-1;p_{i+1},\dots,p_{k-1})} \cdot B_j, \tag{$*$}$$

kde $A_1 = p_1$, $A_i = p_i \cdot \prod_{l=1}^{i-1} q_l$ pro $i > 1$, $B_n = p_n$ a $B_j = p_j \cdot \prod_{l=j+1}^{n} q_l$ pro $j < n$.

Množiny $\{S_{i,j}\}_{i=1,\, j=n-k+i}^{k,n}$ tvoří zřejmě rozklad S a pro pravděpodobnost bezporuchového provozu systému $FC_K(k,n)$ tak dostáváme

---

[†] Pro $k = n$ viz poznámka 3.1

$$R_{FC_K(k,n;p_1,\dots,p_n)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=n-k+i}^{n} P(S_{i,j}),$$

což po dosazení $(*)$ a následné úpravě vede k dokazovanému vztahu.

¤

Důsledek 3.2

- Aplikací věty 3.3 na systémy vyhovující podmínce homogenity dostáváme

$$R_{FC_K(k,n;p)} = p^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} i \cdot q^{i-1} \cdot R_{FC_L(k,n-i-1;p)} . \qquad (3.13)$$

- Z výše uvedených vztahů (3.12) a (3.13) vyplývá, že výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu systému uspořádaného do kružnice lze převést na výpočet pravděpodobností bezporuchového provozu lineárně uspořádaných systémů. Bez újmy na obecnosti se tak lze zabývat pouze lineárně uspořádanými systémy.

Věta 3.4

Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu systému $FC_L(k,n)$ platí

$$R_{FC_L(k,n;p_1,\dots,p_n)} = R_{FC_L(k,n-1;p_1,\dots,p_{n-1})} - q_n \cdot \ldots \cdot q_{n-k+1} \cdot p_{n-k} \cdot R_{FC_L(k,n-k-1;p_1,\dots,p_{n-k-1})} \qquad (3.14)$$

s počátečními podmínkami $R_{FC_L(k,k;p_1,\dots,p_k)} = 1 - \prod_{i=1}^{k} q_i$ a $R_{FC_L(k,n;p_1,\dots,p_n)} = 1$, pro $n < k$.

Důkaz:

Označme A množinu všech konfigurací systému $FC_L(k,n)$, které současně tvoří cesty systému $FC_L(k,n-1;p_1,\dots,p_{n-1})$, tj.

$$A = \left\{ (x_1,\dots,x_n) \middle| \varphi_{FC_L(k,n-1;p_1,\dots,p_{n-1})}(x_1,\dots,x_{n-1}) = 1 \right\}$$

a B množinu všech řezů systému $FC_L(k,n)$, které tvoří cesty systému $FC_L(k,n-k-1;p_1,\dots,p_{n-k-1})$, tj.

$$B = \left\{ (x_1,\dots,x_n) \middle| \varphi_{FC_L(k,n-k-1;p_1,\dots,p_{n-k-1})}(x_1,\dots,x_{n-k-1}) = 1 \wedge x_{n-k} = 1 \wedge x_{n-k+1} = 0 \wedge \ldots \wedge x_n = 0 \right\}.$$

Odtud zřejmě

$$R_{FC_L(k,n;p_1,\dots,p_n)} = P(A \setminus B),$$

dále

$$P(A) = R_{FC_L(k,n-1;p_1,\dots,p_{n-1})}$$

a z předpokladu nezávislosti

$$P(B) = q_n \cdot \ldots \cdot q_{n-k+1} \cdot p_{n-k} \cdot R_{FC_L(k,n-k-1;p_1,\dots,p_{n-k-1})}.$$

Následným využitím zřejmé relace $B \subseteq A$ dostáváme dokazované tvrzení.

¤

Poznámka 3.3

Z koherentnosti systémů $FC_\bullet(k,n)$ zřejmě vyplývá

$$R_{FC_\bullet(k,n;p_{\min})} \le R_{FC_\bullet(k,n;p_1,\dots,p_n)} \le R_{FC_\bullet(k,n;p_{\max})},$$

kde $p_{\min} = \min(p_1,\dots,p_n)$, $p_{\max} = \max(p_1,\dots,p_n)$.

V případě, kdy systém nevyhovuje podmínce homogenity, lze vždy použít odhad

$$R_{FC_\bullet(k,n;p_1,\dots,p_n)} \cong R_{FC_\bullet(k,n;p)},$$

kde $p = \sqrt[n]{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n}$,

$R_{FC_\bullet(k,n;p)}$ je libovolný vztah pro výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu odpovídající varianty homogenního systému $FC_\bullet(k,n)$.

Pro chybu takového odhadu zřejmě platí

$$\left| R_{FC_\bullet(k,n;p_1,\dots,p_n)} - R_{FC_\bullet(k,n;p)} \right| \le R_{FC_\bullet(k,n;p_{\max})} - R_{FC_\bullet(k,n;p_{\min})}.$$

¤

Příklad 3.3

a) Pravděpodobnost bezporuchového provozu $FC_L(3,7;p_1,\dots,p_7)$.

Aplikací vztahu (3.14) snadno dostáváme

$$R_{FC_L(3,7;p_1,\dots,p_7)} = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 - p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 - p_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5 - p_3 \cdot q_4 \cdot q_5 \cdot q_6 -$$

$$- p_4 \cdot q_5 \cdot q_6 \cdot q_7 \cdot (1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3).$$

b) Pravděpodobnost bezporuchového provozu $FC_K(3,7;p_1,\dots,p_7)$.

Aplikací vztahů (3.12) a (3.14) dostáváme

$$R_{FC_K(3,7;p_1,\dots,p_7)} = A_1 \cdot \left[B_5 \cdot (1 - q_2 \cdot q_3 \cdot q_4) + B_6 \cdot (1 - q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 - p_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5) + \right.$$

$$\left. + B_7 \cdot (1 - q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 - p_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5 - p_3 \cdot q_4 \cdot q_5 \cdot q_6) \right] +$$

$$+ A_2 \cdot \left[B_5 + B_6 \cdot (1 - q_3 \cdot q_4 \cdot q_5) + B_7 \cdot (1 - q_3 \cdot q_4 \cdot q_5 - p_3 \cdot q_4 \cdot q_5 \cdot q_6) \right] +$$

$$+ A_3 \cdot \left[B_5 + B_6 + B_7 \cdot (1 - q_4 \cdot q_5 \cdot q_6) \right],$$

kde $A_1 = p_1$, $A_2 = q_1 \cdot p_2$, $A_3 = q_1 \cdot q_2 \cdot p_3$,

$B_7 = p_7$, $B_6 = p_6 \cdot q_7$, $B_5 = p_5 \cdot q_6 \cdot q_7$.

¤

Věta 3.5†

Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu systému $FC_{\bullet}(k,n;p)$, $1 \le k < n$‡, který vyhovuje podmínce homogenity, platí:

a) $$R_{FC_L(k,n;p)} = 1 - \sum_{i=1}^{\tilde{n}} (-1)^{i-1} \cdot C_{n-ki}^{i-1} \cdot p^{i-1} \cdot q^{ki} \cdot \left[1 + p \cdot \frac{n - ki - i + 1}{i} \right], \qquad (3.15)$$

kde $\tilde{n} = \left\lfloor \dfrac{n+1}{k+1} \right\rfloor$.

b) $$R_{FC_K(k,n;p)} = 1 - \sum_{i=0}^{\hat{n}} (-1)^i \cdot \left(p \cdot q^k \right)^{i+1} \cdot C_{n-k\cdot(i+1)}^{i+1} \cdot \left[1 + \frac{k \cdot (i+1)}{n - k \cdot (i+1)} \right] - q^n, \qquad (3.16)$$

kde $\hat{n} = \left\lfloor \dfrac{n-k-1}{k+1} \right\rfloor$.

---

† V [LP] lze nalézt vztahy pro výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu systémů $FC_{\bullet}(k,\ n;\ p)$ odvozované za stejných předpokladů jako ve větě 3.5. Uváděné vztahy však nejsou přesné.

‡ Pro $k = n$ viz poznámka 3.1

Důkaz:

ad a) Množinu všech provozuschopných konfigurací $S = \{ \boldsymbol{x} \mid \varphi_{FC_L(k,n)}(\boldsymbol{x}) = 1 \}$ rozložíme podle počtu porouchaných prvků dané konfigurace do tříd S_j, $j = 0, \ldots, n$, tj.

$$S = \bigcup_{j=0}^{n} S_j ,$$

kde $S_j = \{ \boldsymbol{x} \mid \varphi_{FC_L(k,n)}(\boldsymbol{x}) = 1 \ \wedge \ j = n - s(\boldsymbol{x}) \}$.

Odtud pro pravděpodobnost bezporuchového provozu systému dostáváme vztah

$$R_{FC_L(k,n)} = P(S) = \sum_{j=0}^{n} P(S_j) .$$

Vzhledem k předpokladům věty je zřejmé, že pravděpodobnost každé třídy rozkladu může být vyjádřena ve tvaru

$$P(S_j) = L_{j,n-j}^{k-1} \cdot p^{n-j} \cdot q^j ,$$

kde $L_{j,n-j}^{k-1}$ je počet všech různých řetězců délky n, které se skládají z $j \times 0$ (reprezentují prvky v poruchovém stavu) a $(n-j) \times 1$ (reprezentují prvky v provozuschopném stavu) a obsahují nejvýše $k - 1$ po sobě jdoucích 0. Snadno lze nahlédnout, že

$$f_1(x) = \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1}\right)^{n-j+1}$$

je vytvořující funkce koeficientů $L_{j,n-j}^{k-1}$.

Z rozvoje

$$f_1(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-j+1} (-1)^i \cdot C_{n-j+1}^{i} \cdot C_{n-j+l}^{l} \cdot x^{ki+l} ,$$

získáme pro hledané koeficienty vztah

$$L_{j,n-j}^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-j+1} (-1)^i \cdot C_{n-j+1}^{i} \cdot C_{n-ki}^{j-ki} , \qquad (*)$$

tedy

$$R_{FC_L(k,n)} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j+1} (-1)^i \cdot C_{n-j+1}^{i} \cdot C_{n-ki}^{j-ki} \cdot p^{n-j} \cdot q^j .$$

Záměnou pořadí sčítání a následnou transformací mezí vnitřního součtu dostaneme

$$R_{FC_L(k,n)} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=ki}^{n-i+1} (-1)^i \cdot C_{n-j+1}^{i} \cdot C_{n-ki}^{j-ki} \cdot p^{n-j} \cdot q^j . \qquad (**)$$

Z tvaru binomických koeficientů je patrné, že vnitřní součet lze vyčíslit pomocí vytvořující funkce

$$f_2(x) = x \cdot (q + px)^{n-ki},$$

jejíž rozvoj vede k identitě

$$x \cdot (q + px)^{n-ki} = \sum_{j=ki}^{n} C_{n-ki}^{j-ki} \cdot p^{n-j} \cdot q^{j-ki} \cdot x^{n-j+1} .$$

Z i-té derivace uvedené identity dostáváme

$$i \cdot A_{n-ki}^{i-1} \cdot p^{i-1} \cdot (q + px)^{n-ki-i+1} + A_{n-ki}^{i} \cdot p^i \cdot x \cdot (q + px)^{n-ki-i} = \sum_{j=ki}^{n-i+1} A_{n-j+1}^{i} \cdot C_{n-ki}^{j-ki} \cdot p^{n-j} \cdot q^{j-ki} \cdot x^{n-j-i+1}$$

kde $A_s^r = \dfrac{s!}{(s-r)!}$, $0 \le r \le s$. Položíme-li $x = 1$ získáme

$$i \cdot A_{n-ki}^{i-1} \cdot p^{i-1} + A_{n-ki}^{i} \cdot p^i = \sum_{i=ki}^{n-i+1} A_{n-j+1}^{i} \cdot C_{n-ki}^{j-ki} \cdot p^{n-j} \cdot q^{j-ki}$$

a několik následných úprav vede k identitě

$$\sum_{j=ki}^{n-i+1} (-1)^i \cdot C_{n-ki}^{j-ki} \cdot C_{n-j+1}^{i} \cdot p^{n-j} \cdot q^j = (-1)^i \cdot C_{n-ki}^{i-1} \cdot p^{i-1} \cdot q^{ki} \cdot \left[1 + p\frac{n-ki-i+1}{i}\right].$$

Dosazením do $(**)$ nahlédneme platnost dokazovaného vztahu.

ad b) Analogicky k předcházející části důkazu dostáváme

$$R_{FC_K(k,n)} = \sum_{j=0}^{n} K_{j,n-j}^{k-1} \cdot p^{n-j} \cdot q^j ,$$

kde $K_{j,n-j}^{k-1}$ je počet všech různých způsobů, jak na kružnici rozmístit řetězec délky n, který se skládá z $j \times 0$ (prvky v poruchovém stavu) a $(n-j) \times 1$ (prvky v provozuschopném stavu) a obsahují nejvýše $k-1$ po sobě jdoucích 0. Rozkladem všech výše zmíněných rozmístění nahlédneme platnost vztahu

$$K_{j,n-j}^{k-1} = L_{j,n-j}^{k-1} + \sum_{i=1}^{\min(j,k-1)} i \cdot L_{ji,n-j-2}^{k-1} , \qquad (***)$$

navíc je zřejmé, že

$$f_3(x) = \left(x + 2\cdot x^2 + 3\cdot x^3 + \ldots + (k-1)\cdot x^{k-1}\right)\cdot\left(1 + x + \ldots + x^{k-1}\right)^{n-j-1}$$

je vytvořující funkce pro $\sum_{i=1}^{\min(j,k-1)} i\cdot L_{ji,n-j-2}^{k-1}$.

Odtud

$$K_{j,n-j}^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-j}(-1)^i\cdot C_{n-j}^{i}\cdot C_{n-ki-1}^{j-ki} + k\cdot\sum_{i=0}^{n-j-1}(-1)^{i-1}\cdot C_{n-j-1}^{i}\cdot C_{n-ki-k-1}^{j-ki-k},$$

tedy

$$R_{FC_K(k,n)} = \sum_{j=0}^{\hat{n}}\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^i\cdot\left(C_{n-j}^{i}\cdot C_{n-ki-1}^{j-ki} - k\cdot C_{n-j-1}^{i}\cdot C_{n-ki-k-1}^{j-ki-k}\right)\cdot p^{n-j}\cdot q^j.$$

Stejnou technikou jako v závěru důkazu části a) (tj. záměnou pořadí sčítání a vyčíslením vnitřního součtu) dostáváme dokazovaný vztah.

¤

Poznámka 3.4 – odhady

- Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu systému $FC_{\bullet}(k,n)$ platí

$$R_{FC_K(k,n;p_1,\ldots,p_n)} \le R_{FC_L(k,n;p_1,\ldots,p_n)},$$

$$\left(1-(1-p)^k\right)^{n-k+1} \le R_{FC_L(k,n;p)} \le \left(1-(1-p)^k\right)^{\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor},$$

$$\left(1-(1-p)^k\right)^{n} \le R_{FC_K(k,n;p)} \le \left(1-(1-p)^k\right)^{\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor+1}.$$

Tyto odhady jsou zřejmým důsledkem vztahů (3.1), (3.2) , (3.4) , (3.5) a tvrzení 1.1. Pro zběžné výpočty pak dosahují přijatelné přesnosti jejich následující vážené kombinace

$$R_{FC_L(k,n;p)} \cong p\cdot\left(1-(1-p)^k\right)^{n-k+1} + (1-p)\cdot\left(1-(1-p)^k\right)^{\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor}, \qquad (3.17)$$

$$R_{FC_K(k,n;p)} \cong p\cdot\left(1-(1-p)^k\right)^{n} + (1-p)\cdot\left(1-(1-p)^k\right)^{\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor+1}. \qquad (3.18)$$

- Pro přesnější odhad pravděpodobnosti bezporuchového provozu systému $FC_L(k,n;p)$ je vhodné použít [Fe, str. 324-327]

$$R_{FC_L(k,n;p)} \cong \frac{1-q\cdot x_0}{(1+k-k\cdot x_0)\cdot p\cdot x_0^{n+1}} \quad (3.19)$$

a v případě systému $FC_K(k,n;p)$

$$R_{FC_K(k,n;p)} \cong \frac{p\cdot\left[1-(qx_0)^k\cdot(1+k-k\cdot q\cdot x_0)\right]}{(1+k-k\cdot x_0)\cdot(1-q\cdot x_0)\cdot x_0^{n-1}}, \quad (3.20)$$

kde x_0 je jediný kladný kořen rovnice $1-x+p\cdot q^k\cdot x^{k+1}=0$ různý od q^{-1}.

(Důkaz je stejně jako u (3.19) založen na teorii obnovy a využívá vytvořující funkce.)

¤

Empirické testy ukazují, že zvláště odhady (3.19) a (3.20) jsou dostatečně přesné i pro relativně malé hodnoty $n(\geq 7)$. Tuto skutečnost dokládají následující tabulky porovnávající odhady (3.17) – (3.20) s exaktními hodnotami pravděpodobnosti bezporuchového provozu. V tabulkách pro systémy $FC_L(k,n)$ jsou vypočtené hodnoty uváděny v pořadí

odhad (3.17)
odhad (3.19)
exaktní (3.15)

, pro systémy $FC_K(k,n)$ v pořadí

odhad (3.18)
odhad (3.20)
exaktní (3.16)

.

Lineárně uspořádané systémy $FC_L(k,n;p)$

$FC_L(k, n; 0{,}5)$

$n \backslash k$	2	3	4	5
7	0,299 927	0,639 267	0,854 988	0,938 950
	0,265 579	0,632 804	0,843 211	0,937 755
	0,265 625	0,632 813	0,843 750	0,937 500
10	0,156 195	0,506 765	0,757 704	0,882 514
	0,140 626	0,492 184	0,754 869	0,890 667
	0,140 625	0,492 188	0,754 883	0,890 625

$FC_L(k, n; 0{,}7)$

$n \setminus k$	2	3	4	5
	0,623 580	0,894 486	0,975 164	0,994 180
7	0,623 915	0,897 912	0,974 879	0,994 173
	0,623 917	0,897 910	0,974 890	0,994 168
	0,486 761	0,838 693	0,956 421	0,988 400
10	0,496 412	0,844 884	0,958 004	0,989 065
	0,496 412	0,844 884	0,958 004	0,989 065

$FC_L(k, n; 0{,}9)$

$n \setminus k$	2	3	4	5
	0,944 362	0,995 309	0,999 630	0,999 972
7	0,945 513	0,995 401	0,999 630	0,999 972
	0,945 513	0,995 401	0,999 630	0,999 972
	0,917 265	0,992 525	0,999 350	0,999 944
10	0,919 747	0,992 708	0,999 360	0,999 945
	0,919 747	0,992 708	0,999 360	0,999 945

Systémy uspořádané do kružnice $FC_K\left(k, n; p\right)$

$FC_K(k, n; 0{,}5)$

$n \setminus k$	2	3	4	5
	0,224 945	0,531 309	0,757 704	0,869 600
7	0,226 832	0,556 335	0,772 411	0,886 736
	0,226 563	0,617 188	0,835 938	0,929 688
	0,117 146	0,424 629	0,674 218	0,818 563
10	0,120 109	0,432 708	0,691 486	0,842 211
	0,120 117	0,483 398	0,751 953	0,889 648

$FC_K(k, n; 0{,}7)$

$n \setminus k$	2	3	4	5
	0,567 458	0,854 297	0,956 421	0,986 723
7	0,586 595	0,867 591	0,960 076	0,988 052
	0,586 564	0,886 381	0,971 431	0,992 977
	0,442 952	0,801 275	0,938 092	0,980 993
10	0,466 718	0,816 354	0,943 457	0,982 975
	0,466 719	0,834 181	0,954 731	0,988 087

$FC_K(k, n; 0{,}9)$

$n \setminus k$	2	3	4	5
	0,934 918	0,993 419	0,999 350	0,999 935
7	0,937 567	0,993 700	0,999 370	0,999 937
	0,937 567	0,994 600	0,999 550	0,999 964
	0,908 092	0,990 641	0,999 070	0,999 907
10	0,912 018	0,991 012	0,999 100	0,999 910
	0,912 018	0,991 910	0,999 280	0,999 937

4. Závěr

Na úplný závěr chci jako autor vyjádřit přesvědčení, že předkládaná práce splní, kromě kritérií kladených na habilitační práci, také svůj další, neméně důležitý cíl. Tím je poskytnout zájemcům, především z řad technických pracovníků zabývajících se otázkami spolehlivosti, komplexně zpracovanou problematiku výpočtu základních ukazatelů spolehlivosti systémů majoritního zálohování. Systematický přehled o výsledcích práce si lze učinit z následujících tabulek.

***GA*(*k*, *n*)**	Exaktní vztahy	Odhady
Obecné systémy	věta 2.1 vztahy (2.4x), (2.5x)	vztahy (2.6x), (2.7x)
Systémy s nezávislými parametry	věta 2.2 vztah (2.13)	věta 2.3 vztah (2.14)
Homogenní systémy	věta 2.5 vztahy (2.19)-(2.23)	poznámka 2.5 vztahy (2.15), (2.16)

***FC*.(*k*, *n*)**	Exaktní vztahy	Odhady
Obecné systémy	věta 3.1, 3.2 vztahy (3.7), (3.10), (3.11)	poznámka 3.2 vztah (3.8)
Systémy s nezávislými parametry	věta 3.3, 3.4 vztahy (3.12)-(3.14)	poznámka 3.4
Homogenní systémy	věta 3.5, důsledek 3.2 vztahy (3.13), (3.15), (3.16)	poznámka 3.4 vztahy (3.17)-(3.20)

Kromě výše uvedeného přehledu vztahů, které platí pro systémy majoritního zálohování, obsahuje práce také metodu použitelnou pro zcela obecné koherentní systémy. Jde o techniku výpočtu založenou na aplikaci Möbiovy inverze číselných funkcí. Tato metoda je univerzální, výpočetně dostatečně efektivní a umožňuje exaktní výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu, resp. součinitele asymptotické pohotovosti středně velkých koherentních systémů. Pro rozsáhlé systémy je možné jednotlivé iterace využít jako dolní, resp. horní odhad příslušných ukazatelů.

5. Literatura

[Ai] Aigner,M.: Combinatorial Theory. Springer-Verlag, Heidelberg, 1997.

[AP] Ansell,J.I.-Phillips,M.J.: Practical Methods for Reliability Data Analysis. Oxford University Press, New York, 1994.

[Ar] Arulmozhi,G.: Exact equation and an algorithm for reliability evaluation of *K*-out-of-*N*: G system. Reliability Engineering and System Safety 78(2002), 87-91.

[Be] Ansell,J.I.-Bendell,A.: On the optimality of *k*-out-of-*n*:G systems. IEEE Trans. Reliability, Vol. R-31, 1982, pp 206-210.

[BH] Barlow,R.S.-Heidtmann,K.D.: Computing *k*-out-of-*n* system reliability. IEEE Trans. Reliability, Vol. R-33, No. 4, 1984, pp 322-323.

[Bi] Birkhoff,G.: Lattice Theory. American Mathematical Society, Rhode Island, 1995.

[BP] Barlow,R.E.-Proschan,F.: Statistical Theory of Reliability and Life Testing Probability Models. Nauka, Moskva, 1984 (překlad).

[Fe] Feller,W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. 1, Mir, Moskva, 1967 (překlad).

[Gr] McGrady,P.W.: The Availability of a *k*-out-of-*n*:G Network. IEEE Trans. Reliability, Vol. R-34, No. 5, 1985, pp 451-452.

[GU] Gnedenko,B.-Ushakov,I.: Probabilistic reliability engineering. John Wiley & Sons, New York, 1995.

[HR] Hlavička a kol.: Číslicové systémy odolné proti poruchám. ČVUT, Praha, 1992.

[KL] Kapur,K.C.-Lamberson,L.R.: Reliability in Engineering Design. Mir, Moskva, 1980 (překlad).

[Ko1] Koucký,M.: Ukazatele spolehlivosti zálohovaných systémů výběru *k* z *n* s obnovou. Automatizace, No. 11-12, Vol. 33, 1990, pp 317-319.

[Ko2] Koucký,M.: Spolehlivost výběrových systémů *k* po sobě jdoucích prvků z *n* s markovskou závislostí. Automatizace, No. 2, Vol. 35, 1992, pp 46-48.

[Lo] Locks,O.: Recursive disjoint products: a review of three algorithms. IEEE Trans. Reliability, Vol. R-31, April 1982, pp 33-35.

[LP] Lambiris,M.-Papastavridis,S.: Exact Reliability Formulas for Linear & Circular Consecutive-*k*-out-of-*n*:F Systems. IEEE Trans. Reliability, Vol. R-34, 1985, pp 124-126.

[PG] Phillipou,A.N.-Georghiou,C.: Fibonacci polynomials of order *k*, multinomial expansions and probability. Internat. J. Math. & Math. Sci., Vol. 6, No. 3 (1983), pp 545-550.

[Ph] Phillips,M.J.: *k*-out-of-*n*:G Systems Are Preferable. IEEE Trans. Reliability, Vol. R-29, June 1980, pp 166-169.

[Rh] Rohatgi,V.K.: An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics. John Wilew & Sons, New York, 1976.

[Ro] Rosen,K.: Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics. CRC Press, Boca Raton, 2000.

[SP] Sarje,A.K.-Prasad,E.V.: An Efficient Non-Recursive Algorithm for Computing the Reliability of *k*-out-of-*n* Systems. IEEE Transactions on Reliability, Vol. 38, No. 2, 1989, pp 234-235.

[St1] Starý,I.: Spolehlivost systémů. ČVUT, Praha, 1998. (skriptum)

[St2] Starý,I.-Obruča,L.: Teorie spolehlivosti. ČVUT, Praha, 1991. (skriptum)

Přehled značení

n

- celkový počet prvků systému $(n \geq 1)$,

X_i

- náhodná veličina definující stav prvku $i, (i = 1, \ldots, n)$,
- $X_i \in \{0,1\}$, $X_i = 1$ - provozuschopný stav, $X_i = 0$ - poruchový stav,

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$

- konfigurace systému (náhodný vektor stavů prvků systému),
- definice – str.8,

$\varphi_S(\boldsymbol{x})$

- strukturní funkce systému S,
- definice – str. 8,

$P(\cdot)$, $P(\cdot \mid \cdot)$

- pravděpodobnost, podmíněná pravděpodobnost,

$E[\cdot]$

- střední hodnota,

$p_i = P(X_i = 1)$

- pravděpodobnost bezporuchového provozu prvku $i, (i = 1, \ldots, n)$,

$q_i = 1 - p_i$

- pravděpodobnost poruchy prvku $i, (i = 1, \ldots, n)$,

$\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n)$

- vektor pravděpodobností bezporuchového provozu, resp. pravděpodobností poruch prvků systému,

$FA(k,n)$, $FA(k,n;p)$, $FA(k,n;\boldsymbol{p})$

- systém k libovolných prvků z n, typ F (porucha),
- definice – str. 14,

$GA(k,n)$, $GA(k,n;p)$, $GA(k,n;\boldsymbol{p})$

- systém k libovolných prvků z n, typ G (provozuschopnost),
- definice – str. 14,

$FC_L(k,n)$, $FC_L(k,n;p)$, $FC_L(k,n;\boldsymbol{p})$

- lineárně uspořádaný systém k po sobě jdoucích prvků z n, typ F (porucha),
- definice – str. 43,

$GC_L(k,n)$, $GC_L(k,n;p)$, $GC_L(k,n;\boldsymbol{p})$

- lineárně uspořádaný systém k po sobě jdoucích prvků z n, typ G (provozuschopnost),
- definice – str. 45,

$FC_K(k,n)$, $FC_K(k,n;p)$, $FC_K(k,n;\mathbf{p})$

- systém k po sobě jdoucích prvků z n, typ F (porucha), uspořádaný do kružnice,
- definice – str. 44,

$GC_K(k,n)$, $GC_K(k,n;p)$, $GC_K(k,n;\mathbf{p})$

- systém k po sobě jdoucích prvků z n, typ G (provozuschopnost), uspořádaný do kružnice,
- definice – str. 45,

R_S

- pravděpodobnost bezporuchového provozu systému S, (např. $R_{GA(k,n)}$ označuje pravděpodobnost bezporuchového provozu systému $GA(k,n)$),
- definice – str. 9,

$\overline{R}_S = 1 - R_S$

- pravděpodobnost poruchy systému S, (např. $\overline{R}_{FA(k,n)}$ označuje pravděpodobnost poruchy systému $FA(k,n)$),

A_S

- součinitel asymptotické pohotovosti systému S, (např. $A_{FC_L(k,n)}$ označuje součinitel asymptotické pohotovosti systému $FC_L(k,n)$),
- definice – str. 9,

$\overline{A}_S = 1 - A_S$

- součinitel asymptotické nepohotovosti systému S, (např. $\overline{A}_{FC_K(k,n)}$ označuje součinitel asymptotické nepohotovosti systému $FC_K(k,n)$),

T

- střední doba do poruchy, označovaná také *MTTF*, str. 13,

Φ

- střední doba do obnovy, označovaná také *MTTR*, str. 13,

$n!$

- faktoriál, n přirozené číslo,

C_n^k

- binomický koeficient n nad k (n, k libovolná celá čísla),

A_n^k

- variace k-té třídy z n prvků bez opakování ($0 \le k \le n$, přirozená čísla),

$\lfloor x \rfloor$

- dolní celá část x,

$\{x \mid V(x)\}$

- množina všech x majících vlastnost $V(x)$.

¤

- tzv. halmos, tj. symbol využívaný k označení konce definic, tvrzení, důkazů vět apod.