

Technická univerzita v Liberci

Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

Studijní program: B2612 – Elektrotechnika a informatika

Studijní obor: Informatika a logistika

Formulace úloh pro automatické testování numerického výpočetního kódu

Bakalářská práce

Autor: **Lukáš Gendráč**

Vedoucí práce: doc. Ing. Dalibor Frydrych, Ph.D.

V Liberci 20. 5. 2011

ORIGINÁL

ZADÁNÍ

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím bakalářské práce a konzultantem.

Datum:

Podpis:

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce doc. Ing. Daliboru Frydrychovi, Ph.D. za konzultace, cenné připomínky a rady při zpracování práce. Také bych chtěl poděkovat svým rodičům za umožnění studia a svým blízkým za velkou oporu.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá výpočtem transportu tepla. První část práce je věnována teorii vedení tepla a popisu výpočetního modelu ISERIT. Dále jsou popsány možnosti automatizovaného testování zdrojového kódu v jazyce Java. Druhá část je zaměřena na popis základních úloh se vzorovým řešením. Tyto úlohy jsou podklady pro testování modelu ISERIT.

Klíčová slova

Tepelný tok, transport tepla, okrajové podmínky, ISERIT, JUnit, automatizované testování

Abstract

This thesis deals with the calculation of heat transport. The first part deals with the theory of heat conduction and a description of the computational model ISERIT. The following describes the possibilities of automated testing source code in Java. The second part focuses on the description of the fundamental roles of the benchmark. These tasks are the basis for testing the ISERIT.

Keywords

Heat flow, heat transport, boundary conditions, ISERIT, JUnit, automated testing

Obsah

Prohlášení	3
Poděkování.....	4
Abstrakt	5
Seznam obrázků	7
Seznam použitých symbolů	8
1 Úvod	9
2 Teoretická část.....	10
2.1 Šíření tepla	10
2.1.1 Šíření tepla vedením.....	10
2.2 Model ISERIT.....	10
2.3 Analogie vedení tepla a vedení vlhkosti.....	12
2.4 Souvislost součinitele tepelné vodivosti se součinitelem přestupu tepla	12
2.5 Automatizované testování - JUnit.....	13
3 Základní úlohy a jejich vzorové řešení	14
3.1 Lineární ustálené úlohy	14
3.1.1 Úloha 1: Dirichlet - Dirichlet.....	15
3.1.2 Úloha 2: Dirichlet - Neumann	17
3.1.3 Úloha 3: Dirichlet - Newton	20
3.1.4 Úloha 4: Dirichlet - Dirichlet.....	23
3.1.5 Úloha 5: Dirichlet - Neumann	26
3.1.6 Úloha 6: Dirichlet - Newton	30
3.1.7 Úloha 7: Newton - Newton.....	33
3.2 Nelineární ustálené úlohy	37
3.2.1 Úloha 1: Ověření nelineárního modelu	38
3.2.2 Úloha 2: Dirichlet - Neumann	39
3.2.3 Úloha 3: Dirichlet - Neumann	40
3.2.4 Úloha 4: Dirichlet - Neumann	41
3.3 Neustálená úloha	41
4 Závěr	43
Seznam použité literatury	44
Obsah příloženého CD	44

Seznam obrázků

Obrázek 1: Schéma úlohy Dirichlet - Dirichlet	15
Obrázek 2: Řešení úlohy Dirichlet - Dirichlet	16
Obrázek 3: Schéma úlohy Dirichlet - Neumann	17
Obrázek 4: Řešení úlohy Dirichlet - Neumann.....	18
Obrázek 5: Schéma úlohy Dirichlet - Newton.....	20
Obrázek 6: Řešení úlohy Dirichlet - Newton.....	21
Obrázek 7: Schéma úlohy Dirichlet - Dirichlet (2 materiály)	23
Obrázek 8: Řešení úlohy Dirichlet - Dirichlet (2 materiály)	24
Obrázek 9: Vliv délky materiálu na teplotu T_2	25
Obrázek 10: Vliv měrné tepelné vodivosti na teplotu T_2	26
Obrázek 11: Schéma úlohy Dirichlet - Neumann (2 materiály)	26
Obrázek 12: Řešení úlohy Dirichlet - Neumann (2 materiály)	27
Obrázek 13: Schéma úlohy Dirichlet - Newton (2 materiály)	30
Obrázek 14: Řešení úlohy Dirichlet - Newton (2 materiály).....	31
Obrázek 15: Schéma úlohy Newton - Newton (2 materiály)	33
Obrázek 16: Řešení úlohy Newton - Newton (2 materiály)	34
Obrázek 17: Úloha 1: Lineární funkce	39
Obrázek 18: Úloha 2: Dirichlet - Neumann.....	39
Obrázek 19: Úloha 3: Dirichlet - Neumann.....	40
Obrázek 20: Úloha 4: Dirichlet - Neumann.....	41
Obrázek 21: Neustálená úloha	42
Obrázek 22: Schéma neustálené úlohy.....	42

Seznam použitých symbolů

Označení	Legenda	Jednotka
A	Konstanta	$[K^{-1}]$
a	Tepelná vodivost	$[m^2 s^{-1}]$
C	Tepelná kapacita	$[J K^{-1}]$
c	Měrná tepelná kapacita	$[J kg^{-1} K^{-1}]$
d	Délka	$[m]$
D	Difúzní koeficient	$[m^2 s^{-1}]$
K	Koncentrace vlhkosti	$[kg m^{-3}]$
L	Materiálová konstanta	$[W K^{-1}]$
m	Hmotnost	$[kg]$
n	Konstanta	$[-]$
Q	Teplo	$[J]$
S	Plocha	$[m^2]$
T	Teplota	$[K]$
t	Čas	$[s]$
V	Objem	$[m^3]$
α	Součinitel přestupu tepla (koeficient přestupu tepla)	$[W m^{-2} K^{-1}]$
γ	Koeficient rychlosti výměny vody	$[-]$
ε	Porozita	$[-]$
λ	Měrná tepelná vodivost (součinitel tepelné vodivosti)	$[W m^{-1} K^{-1}]$
ρ	Hustota	$[kg m^{-3}]$
τ	Tortuozita	$[-]$
Φ	Tepelný tok	$[J s^{-1} \text{ nebo } W]$
φ	Inverzní sorpční křivka	$[-]$
χ	Výparné/kondenzační teplo	$[J]$

1 Úvod

Tématem této bakalářské práce je seznámit se s modelem ISERIT a pochopit jeho princip výpočtů. Dále se seznámit s možnostmi automatizovaného testování zdrojových kódů v jazyce Java, v němž je model ISERIT implementován, a navrhnout základní úlohy, které budou řešitelné. Na základě výsledků těchto základních úloh bude možné model ISERIT testovat.

Tato práce by měla sloužit všem, kteří chtějí testovat model ISERIT nebo se dozvědět o způsobech, jakým lze řešit složité termodynamické jevy z pohledu programátora. O způsobech, jakými lze jevy, které jsou popsány soustavou diferenciálních rovnic, zjednodušit a za jakých podmínek je numericky řešit. Tato problematika není příliš popsána v českém jazyce. Veličiny a jejich jednotky nejsou jednotné, z čehož plyne další cíl práce, kterým je sjednotit veličiny a jejich jednotky a určit vztahy, které definují tyto veličiny.

2 Teoretická část

2.1 Šíření tepla

Teplo se šíří vedením, prouděním, sáláním a přenosem látky. Z pohledu tohoto projektu nás zajímá šíření tepla vedením (kondukcí) a prouděním (konvekcí). Dále je důležité jestli se jedná o ustálený děj (teplotní rozdíl je stálý, nezávisí na čase) nebo neustálený děj (dochází k postupnému vyrovnávání teplotních rozdílů).

2.1.1 Šíření tepla vedením

Šíření tepla vedením se uskutečňuje molekulárním přenosem energie mezi látkami, kde molekuly s vyšší kinetickou energií předávají část své energie molekulám s menší kinetickou energií. Jedná se o nejčastější způsob šíření tepla v pevných tělesech, které mají v různých částech různou teplotu.

2.2 Model ISERIT

Jedná se o výpočetní systém pro výpočet transportu tepla a vlhkosti ve formě páry a imobilní vody. Je implementován v jazyce Java a tedy distribuován s příponou .jar. Využívá systém GMSH (generátor sítí, 3D zobrazení, vlastní skriptovací jazyk) a externí řešič soustav lineárních rovnic UMFPACK. Model ISERIT zpracovává vstupní data, která jsou rozdělena do čtyř typů souborů. Prvním typem souboru je .tskb, který je řídicím souborem celého výpočtu a je strukturován standardem XML. Druhým typem souboru je .msh, který popisuje geometrii úlohy. Třetím typem souboru je .mtr, který popisuje materiály figurující v úloze. A posledním typem souboru je .rgm, kde jsou definovány okrajové podmínky úlohy. Výstupem jsou dva typy souborů, první .pos, kam jsou ukládány výsledky systému GMSH a druhý .txt, kde jsou výsledky uloženy jako text. ISERIT řeší 1D, 2D a 3D úlohy.

Základní rovnice modelu ISERIT¹

Provázaný děj neustáleného vedení tepla, difuze vodních par a nerovnovážné interakce mezi vodními parami a vodou sorbovanou v bentonitu je obecně popsán soustavou tří diferenciálních rovnic (1).

$$\begin{aligned}
c_v(T, K_a, K_b) \frac{\partial T}{\partial t} - \chi(T, K_a, K_b) \frac{\partial K_b}{\partial t} &= \nabla \cdot (\lambda(T, K_a, K_b) \nabla T) \\
\varepsilon \frac{\partial K_a}{\partial t} + (1 - \varepsilon) \frac{\partial K_b}{\partial t} &= \nabla \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\tau} D_a(T, K_a, K_b) \nabla K_a \right) \\
\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial K_b}{\partial t} &= \left(\frac{K_a}{K_a^{100}(T)} - \varphi(T, K_a, K_b) \right) \gamma(T, K_a, K_b)
\end{aligned} \tag{1}$$

kde hledané neznámé jsou T teplota, K_a koncentrace vlhkosti ve vzduchu mezi bentonitovými zrnky a K_b koncentrace vlhkosti v zrnech bentonitu. Oblast řešení je označena Ω s hranicí Γ . Úloha je definována na prostorové proměnné $x = \{x, y, z\}$. Dále pak t je čas, $c_v(T, K_a, K_b)$ je tepelná kapacita, $\chi(T, K_a, K_b)$ je výparné/kondenzační teplo, $\lambda(T, K_a, K_b)$ je součinitel tepelné vodivosti, ε je porozita, τ je tortuozita, $D_a(T, K_a, K_b)$ je difúzní koeficient vodních par ve vzduchu, $K_a^{100}(T)$ je koncentrace vlhkosti nasyceného vzduchu v pórech, $\varphi(T, K_a, K_b)$ je inverzní sorpční křivka, a $\gamma = \gamma(T, K_a, K_b)$ je koeficient rychlosti výměny vody mezi vzduchem a bentonitem. Funkce K_a^{100} , φ , c_v , λ , χ , D_a a γ musí být kladné a omezené.

Řešení úlohy popsané soustavou diferenciálních rovnic (1) bude hledáno na oblasti Ω s hranicí Γ . Soustava diferenciálních rovnic (1) je doplněna okrajovými podmínkami. V modelu jsou uvažovány tři standardní typy okrajových podmínek. Pro tento účel je uvažováno rozdělení hranice Γ na tři disjunktní části $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Dirichletova okrajová podmínka definuje teplotu $T_D(t)$, resp. koncentraci vlhkosti $K_D^a(t)$ na hranici Γ_1

$$\begin{aligned}
T(x, t) &= T_D(t) \\
K_a(x, t) &= K_D^a(t)
\end{aligned} \quad x \in \Gamma_1 \tag{2}$$

Neumannova okrajová podmínka definuje tepelný tok $q_T(t)$, resp. tok vlhkosti $q_{Ca}(t)$ přes hranici Γ_2

$$\begin{aligned}
\lambda \nabla T(x, t) \cdot n &= q_T(t) \\
D_a \nabla K_a(x, t) \cdot n &= q_{Ka}(t)
\end{aligned} \quad x \in \Gamma_2 \tag{3}$$

kde n je vnější normála hranice Γ_2 .

Newtonova okrajová podmínka definuje tepelný tok generovaný teplotním spádem $T - T_w(t)$, resp. tok vlhkosti generovaný spádem koncentrace vlhkosti $K_a - K_w^a(t)$ na hranici Γ_3

$$\begin{aligned} \lambda \nabla T \cdot n + \alpha_T(t)(T - T_w(t)) &= 0 & \alpha_T(t) > 0 \\ D_a \nabla K_a \cdot n + \alpha_{Ka}(t)(K_a - K_w^a(t)) &= 0 & \alpha_{Ca}(t) > 0 \end{aligned} \quad x \in \Gamma_3 \quad (4)$$

Počáteční podmínky jsou definovány obecnými funkcemi na oblasti Ω

$$\begin{aligned} T(x,0) &= T_0(x) \\ K_a(x,0) &= K_0^a(x) & x \in \Omega \\ K_b(x,0) &= K_0^f(x) \end{aligned} \quad (5)$$

které jsou buď známé (například konstantní) nebo jsou získány výpočtem úlohy ustáleného děje.

2.3 Analogie vedení tepla a vedení vlhkosti

Pokud se podíváme na diferenciální rovnice neustáleného vedení tepla a vedení vlhkosti, vidíme, že jsou si obě rovnice velice podobné. Lze tedy tvrdit, že princip výpočtu je totožný, jen je třeba si uvědomit, že se mění veličiny a jejich jednotky, ale postup výpočtu je stejný, jedná se jen o jiný typ difúze. Z toho plyne, že když sestavíme úlohu pro vedení tepla, potom může úlohu modifikovat pro vedení vlhkosti. Diferenciální rovnice pro vedení tepla je dána vztahem (6). Diferenciální rovnice pro vedení vlhkosti je dána vztahem (7).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial C_a}{\partial t} = \frac{D_a}{\tau} \cdot \frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2} \quad (7)$$

2.4 Souvislost součinitele tepelné vodivosti se součinitelem přestupu tepla

Už při pohledu na jednotky těchto dvou veličin je jasné, že spolu souvisí. Oba součinitele popisují míru vedení tepla v látce, v případě součinitele tepelné vodivosti v pevném skupenství, v případě součinitele přestupu tepla v kapalném nebo plynném skupenství.

Podívejme se na vzorce pro výpočet tepelného toku pro daná skupenství. Tepelný tok se v pevném tělese spočítá pomocí vztahu (8) a v kapalném tělese pomocí

vztahu (9). Pokud si hodnoty plochy řezu, rozdíly teplot a tepelný tok budou v obou případech rovny, potom musí platit vztah (10). Pro ověření dosadíme jednotky (11).

$$\Phi = \frac{\lambda}{d} \cdot S \cdot \Delta T \quad (8)$$

$$\Phi = \alpha \cdot S \cdot \Delta T \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} \quad (10)$$

$$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1} = \frac{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}{m} \quad (11)$$

$$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1} = W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$$

2.5 Automatizované testování - JUnit

JUnit je open source (s otevřeným zdrojovým kódem) testovací framework (podpora při programování) pro psaní opakovatelných testů - k tvorbě tzv. unit testů v programovacím jazyce Java. Na jeho vývoji se podíleli vývojáři Kent Beck a Erich Gamma. Většina dnešních vývojových prostředí má integrovanou podporu pro spouštění JUnit testů, pokud ne, potom je možné testy spustit zvlášť. Pro spouštění testů nabízí JUnit dva spouštěče - textový a grafický.

Testování funguje tak, že k naší existující třídě napíšeme jinou třídu, která bude sloužit pro testování. Testovací třída obsahuje metodu na nastavení testu (setUp) a úklidovou metodu (tearDown). Testovací třídy je vhodné psát před implementací testované třídy. Název testovací třídy se obvykle tvoří tak, že spojíme název testované třídy se slovem Test (např.: třída Vypocet, testovací třída TestVypocet).

Test může například porovnávat očekávané hodnoty se skutečnými (proto budeme vytvářet základní úlohy a zjišťovat jejich vzorové řešení). Po proběhnutí testů se nám zobrazí, které testovací metody proběhly v pořádku a které selhaly.

3 Základní úlohy a jejich vzorové řešení

Jedná se o sadu úloh, na kterých je demonstrován transport tepla. Úlohy jsou rozděleny do tří částí, přičemž ta nejrozsáhlejší část se zabývá ustálenými ději a zbylé dvě části demonstrují, že je možné numericky řešit i úlohy neustálené či nelineární za určitých podmínek.

Úlohy představují 1D úlohu, kterou si můžeme představit jako vedení tepla tyčí, kde teplota je dána pouze na jejich koncích, jinak je tyč po celé své délce dokonale tepelně izolována. Teploty na koncích jsou definovány okrajovými podmínkami.

Případně si můžeme úlohu představit jako úlohu vedení tepla napříč nekonečně velkou rovinou zdi, která má konstantní tloušťku. Z této zdi je sledován pouze vytknutý segment. Stěny segmentu jsou kolmé k rovině stěn zdi. Teplota (příp. tepelný tok) je dána homogenně po ploše stěn zdi. Směr tepelného toku pak je kolmý na rovinu stěn zdi. Tepelný tok přes hranice vytknutého segmentu je nulový.

Pokud je okrajovou podmínkou zadáván tepelný tok Φ , potom je zadáván z pohledu vnější normály dané hranice.

3.1 Lineární ustálené úlohy

Jedná se o sadu úloh, které počítají ustálené děje a všechny proměnné se chovají lineárně. Obecný vzorec pro výpočet této sady úloh je dán vztahem (12). Všechny úlohy jsou k dispozici na příloženém CD a uživatel může měnit vstupní hodnoty a získávat tak nové výsledky. Každá úloha má své konkrétní řešení, které je demonstrováno i graficky. Všechny veličiny, zasahující do děje, jsou rozděleny do dvou tabulek – vstupní a výstupní. Ke každé úloze jsou přiloženy vzorce potřebné pro výpočet výstupních veličin. Na obrázku řešení úlohy jsou známy, tedy vstupní veličiny, na zelené výplni a neznámy, tedy výstupní veličiny, na oranžové výplni. Vždy je pro přehlednost nejprve uveden 3D schematický obrázek.

$$\Phi = \frac{\lambda \cdot S}{d} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (12)$$

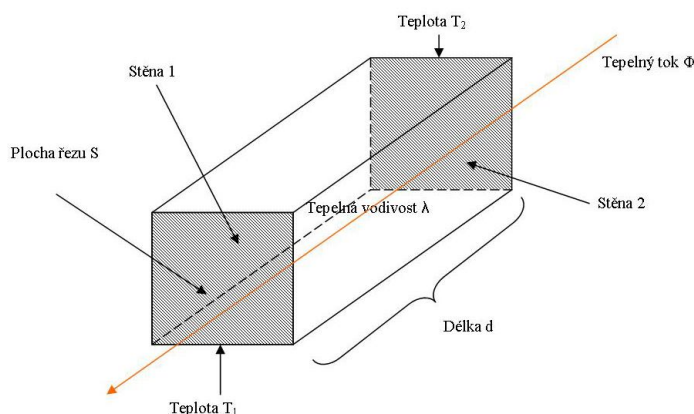
Úlohy charakterizují transport tepla systémem, který tvoří těleso, u kterého sledujeme jeho dvě stěny na každém konci (stěna 1 a stěna 2) a jeho ostatní stěny jsou dokonale tepelně izolovány. V některých úlohách se těleso skládá ze dvou materiálů. Potom sledujeme ještě hodnotu teploty na hranici těchto dvou materiálů. Pokud tyto dva materiály nemají společnou hranici, tedy pokud tvoří dvě „subtělesa“, potom

definujeme další stěny, na kterých sledujeme teplotu (stěna 3 a stěna 4). Stěna 3 je potom stěna na konci prvního subtělesa a stěna 4 je stěna na začátku druhého subtělesa. Každá úloha má zadané okrajové podmínky.

Dále je nutné definovat, jakým způsobem je zadáván a jakým způsobem se počítá tepelný tok Φ . V úlohách je na jednom konci tepelný tok Φ a na druhé straně ten samý, ale s opačným znaménkem. Tepelný tok se totiž vztahuje k vnější normále úlohy. Je to logické, při ustáleném ději je tepelný tok Φ v jakékoli části materiálu stejný. Znaménko znamená, kterým směrem tepelný tok protéká. Tedy pokud je znaménko záporné, znamená to, že tepelný tok Φ směřuje směrem ze systému. Pokud je kladné, tepelný tok Φ směřuje směrem do systému. Z toho je jasné, že tepelný tok Φ teče od kladného znaménka k zápornému, od vyšší teploty k nižší. Směr tepelného toku Φ je ještě pro přehlednost vyobrazen šipkou na obrázku.

Pokud je tepelný tok Φ zadáváný (což nastává v úlohách s Neumannovou okrajovou podmínkou), tak se zadává tepelný tok Φ z pohledu vnější normály dané hranice.

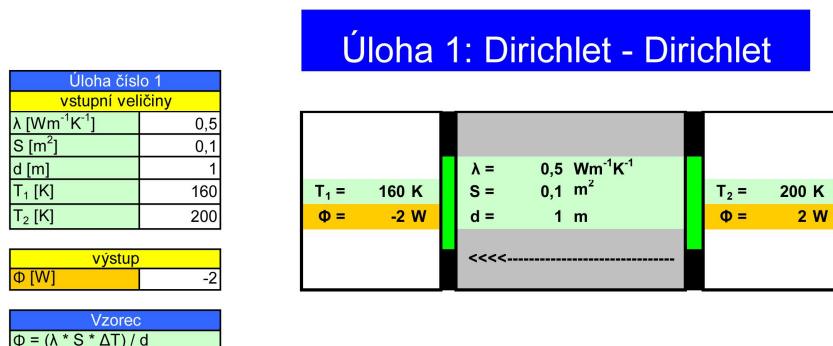
3.1.1 Úloha 1: Dirichlet - Dirichlet



Obrázek 1: Schéma úlohy Dirichlet - Dirichlet

Úloha charakterizuje transport tepla systém, který tvoří těleso, které má na každém konci (stěna 1 a 2) Dirichletovu okrajovou podmínku. Těleso je z jednoho materiálu, který je charakterizován měrnou tepelnou vodivostí λ , délkou d a plochou řezu S . Dirichletova okrajová podmínka definuje teplotu na hranici (stěně) tělesa. V této úloze je Dirichletova okrajová podmínka na stěnách 1 a 2. To je patrné z obrázku (Obrázek 1).

Úloha má tedy vstupní parametry teploty T_1 a T_2 (definovány Dirichletovými okrajovými podmínkami) a vlastnosti materiálu popsány výše. Výstupem a tedy tím, co nás zajímá, je tepelný tok Φ .



Obrázek 2: Řešení úlohy Dirichlet - Dirichlet

Tepelný tok Φ pro tuto ustálenou úlohu je dán vztahem (13).

$$\Phi = \frac{\lambda \cdot S \cdot (T_1 - T_2)}{d} \quad (13)$$

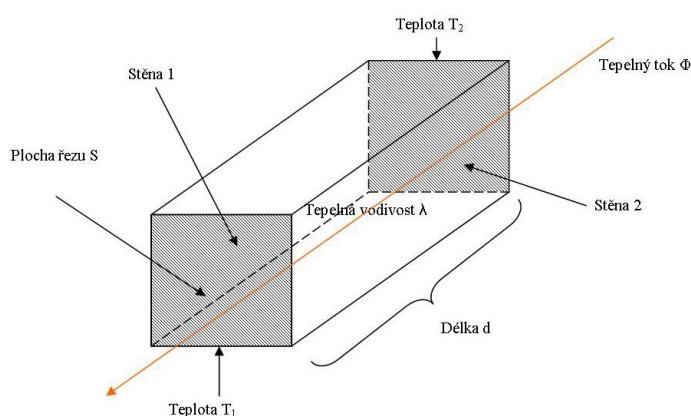
Z úlohy lze vyvodit několik závěrů:

- 1) Pokud hodnotu délky d zkrátíme určitým poměrem, absolutní hodnota tepelného toku Φ se stejným poměrem zvětší a naopak, pokud hodnotu délky d určitým poměrem zvětšíme, hodnota tepelného toku Φ se stejným poměrem zmenší. Můžeme tedy tvrdit, že hodnota tepelného toku Φ je nepřímo úměrná hodnotě délce d .
- 2) Pokud si teploty T_1 a T_2 nejsou rovny, tepelný tok Φ je větší než nula (resp. jeho absolutní hodnota). Pokud prohodíme hodnoty teplot T_1 a T_2 , tepelný tok Φ bude mít stejnou absolutní hodnotu, jen se změní jeho směr. Např.: $T_1 = 100$ K, $T_2 = 200$ K, $\Phi = -5$ W a když teploty prohodíme: $T_1 = 200$ K, $T_2 = 100$ K, $\Phi = 5$ W. V obou případech se hodnota tepelného toku Φ vztahuje k první hranici systému, proto se liší ve znaménku, ale absolutní hodnota je stejná.
- 3) Pokud zvětšíme určitým poměrem hodnotu plochy řezu S , potom se stejným poměrem zvětší i absolutní hodnota tepelného toku Φ a naopak, pokud hodnotu plochy řezu S zmenšíme určitým poměrem, potom se stejným poměrem zmenší i absolutní hodnota tepelného toku Φ . Můžeme tedy tvrdit, že hodnota tepelného toku Φ je přímo úměrná hodnotě plochy řezu S .
- 4) Pokud zvětšíme určitým poměrem hodnotu měrné tepelné vodivosti λ , potom se stejným poměrem zvětší i absolutní hodnota tepelného toku Φ a naopak, pokud

hodnotu měrné tepelné vodivosti λ zmenšíme určitým poměrem, potom se stejným poměrem zmenší i absolutní hodnota tepelného toku Φ . Můžeme tedy tvrdit, že hodnota tepelného toku Φ je přímo úměrná hodnotě měrné tepelné vodivosti λ .

- 5) Úloha nemá smysl při nulové délce d . Dále pokud je měrná tepelná vodivost λ rovná nule, bude i tepelný tok Φ rovný nule. A stejně tak i pokud plocha řezu S bude rovna nule, bude roven nule i tepelný tok Φ .

3.1.2 Úloha 2: Dirichlet - Neumann



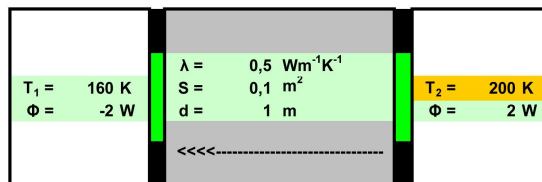
Obrázek 3: Schéma úlohy Dirichlet - Neumann

Úloha charakterizuje transport tepla systém, který tvoří těleso, které má na jednom konci (stěna 1) Dirichletovu okrajovou podmínku a na druhém konci (stěna 2) Neumannovu okrajovou podmínku. Těleso je z jednoho materiálu, který je charakterizován měrnou tepelnou vodivostí λ , délkou d a plochou řezu S . Dirichletova okrajová podmínka definuje teplotu na první hranici (stěna 1) tělesa. Neumannova okrajová podmínka definuje tepelný tok přes druhou hranici (stěna 2) tělesa. To je patrné z obrázku (Obrázek 3).

Úloha má tedy vstupní parametry teplotu T_1 (definovanou Dirichletovou okrajovou podmínkou) a tepelný tok Φ (zadáván z pohledu vnější normály stěny 2, definovaný Neumannovou okrajovou podmínkou) a vlastnosti materiálu popsány výše. Výstupem a tedy tím, co nás zajímá, je teplota T_2 .

Úloha číslo 2	
vstupní veličiny	
λ [Wm ⁻¹ K ⁻¹]	0,5
S [m ²]	0,1
d [m]	1
T_1 [K]	160
Φ [W]	2
výstup	
T_2 [K]	200
Vzorec	
$T_2 = T_1 + (\Phi \cdot d) / (\lambda \cdot S)$	

Úloha 2: Dirichlet - Neumann



Obrázek 4: Řešení úlohy Dirichlet - Neumann

Teplotu T_2 pro tuto ustálenou úlohu spočítáme dosazením do vztahu (14). Tepelný tok Φ je zadáván z pohledu vnější normály. Tedy pokud jeho hodnota bude kladná, tak už víme, že teplota T_2 bude větší než teplota T_1 a naopak, pokud bude hodnota tepelného toku záporná, potom teplota T_2 bude menší než teplota T_1 a tím pádem určíme, kterým směrem tepelný tok Φ poteče. Tedy pokud bude hodnota tepelného toku kladná (T_2 bude větší než T_1), tepelný tok Φ bude směřovat směrem z T_2 k T_1 a naopak, pokud bude hodnota tepelného toku Φ záporná (T_2 bude menší než T_1), tepelný tok Φ bude směřovat směrem do T_2 z T_1 .

$$T_2 = T_1 + \frac{\Phi \cdot d}{\lambda \cdot S} \quad (14)$$

Z úlohy lze vyvodit několik závěrů:

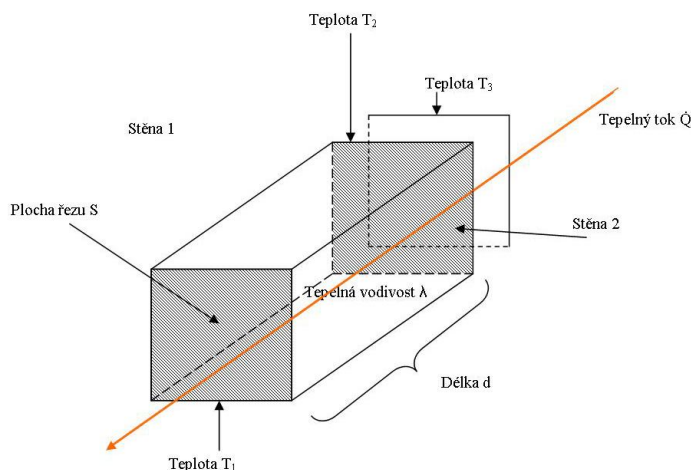
- 1) Ze vzorce (14) pro výpočet plyne, že pokud má mít úloha řešení a tedy i smysl, musí být hodnota měrné tepelné vodivosti λ větší než nula a zároveň hodnota plochy řezu S větší než nula.
- 2) Na úlohu se musíme dívat ze dvou úhlů. Ten první je, když je zadaná hodnota tepelného toku Φ kladná (když tepelný tok Φ teče směrem z T_2 k T_1). Potom se, se zvyšováním hodnoty tepelné vodivosti λ , snižuje hodnota sledované teploty T_2 . To je správně, je jasné, že když bude hodnota tepelné vodivosti λ větší, tak tím „rychleji“ tepelný tok Φ proteče, proto se hodnota teploty T_2 rychleji přiblíží k hodnotě teploty T_1 . Lze tedy říct, že čím větší bude hodnota měrné tepelné vodivosti λ , tím menší bude rozdíl teplot T_1 a T_2 . Obdobně je tomu ve chvíli, kdy je zadaná hodnota tepelného toku Φ záporná (tedy tepelný tok Φ teče směrem z T_1 k T_2). V tomto případě zvyšování hodnoty měrné tepelné vodivosti λ způsobí zvyšování hodnoty sledované teploty T_2 . Je to logické, princip je stejný, jen si musíme uvědomit, že tepelný tok Φ teče opačným směrem než v minulém případě a tedy hodnota teploty T_1 je větší než hodnota teploty T_2 . Ale

stále tedy platí, že čím větší je hodnota měrné tepelné vodivosti λ , tím menší je rozdíl teplot T_1 a T_2 .

- 3) Obdobně, jako je tomu v bodě 2 s měrnou tepelnou vodivostí λ , je to i s plochou řezu S . Opět tedy musíme zohlednit, jestli je zadaná hodnota tepelného toku Φ kladná nebo záporná. Pokud je kladná (tedy T_2 je větší než T_1 a tepelný tok tedy směřuje z T_2 k T_1), potom se, se zvyšováním hodnoty plochy řezu S , snižuje hodnota teploty T_2 . Z čehož plyne, že čím větší bude plocha řezu S , tím menší bude rozdíl mezi teplotami T_1 a T_2 . Pokud bude záporná (tedy T_2 je menší než T_1 a tepelný tok Φ tedy směřuje z T_1 k T_2), potom se, se zvyšováním hodnoty plochy řezu S , bude zvyšovat i hodnota teploty T_2 . Opět je potřeba si uvědomit, že princip je úplně stejný, jen tepelný tok Φ teče opačným směrem a stále tedy platí, že čím větší bude plocha řezu S , tím menší bude rozdíl teplot T_1 a T_2 .
- 4) U délky d je závislost na výsledné teplotě T_2 trochu jiná. Opět ale musíme řešení rozdělit na dvě části. Záleží opět na tom, jestli je zadaná hodnota tepelného toku Φ kladná nebo záporná. Pokud je kladná (tedy T_2 je větší než T_1 a tepelný tok Φ směřuje směrem z T_2 k T_1) tak platí, že čím větší je hodnota délky d , tím větší je i hodnota teploty T_2 . Z toho plyne logický závěr, že když je vzdálenost mezi teplotami T_1 a T_2 větší, musí být i větší rozdíl mezi těmito teplotami, samozřejmě za předpokladu, že hodnota tepelného toku Φ se nezmění. Pokud je zadaná hodnota tepelného toku Φ záporná (tedy T_2 je menší než T_1 a tepelný tok Φ směřuje směrem z T_1 k T_2) tak platí, že čím větší je hodnota délky d , tím menší je hodnota teploty T_2 . Platí tedy analogicky to samé, jen má tepelný tok Φ opačný směr. Stále tedy platí, že čím je větší vzdálenost mezi teplotami T_1 a T_2 , tím větší je rozdíl mezi těmito teplotami, opět za předpokladu, že tepelný tok Φ se nezmění (což je samozřejmostí, když se jedná o ustálenou úlohu).
- 5) O jak velikou hodnotu zvětšíme nebo zmenšíme hodnotu teploty T_1 , tak o stejně velikou hodnotu se zvětší nebo zmenší hodnota teploty T_2 a to bez ohledu na to, jakým směrem směřuje tepelný tok Φ .
- 6) Z čistě matematického hlediska lze říci, že čím větší je hodnota tepelného toku Φ , tím větší je hodnota teploty T_2 . Pokud ale uvážíme, že znaménko u tepelného toku Φ značí jen směr, je potřeba se nad tím více zamyslet. Bereme-li tepelný tok Φ pouze ve směru z T_2 k T_1 , tedy jeho hodnota bude nabývat jen kladných

hodnot, potom platí první věta. Ale pokud se zaměříme na opačný směr tepelného toku Φ , ve směru z T_1 k T_2 , tedy jeho hodnota bude nabývat záporných hodnot, přičemž platí, že záporné znaménko značí právě zmíněný opačný směr, potom platí, že čím větší bude absolutní hodnota tepelného toku Φ , tím menší bude hodnota teploty T_2 .

3.1.3 Úloha 3: Dirichlet - Newton



Obrázek 5: Schéma úlohy Dirichlet - Newton

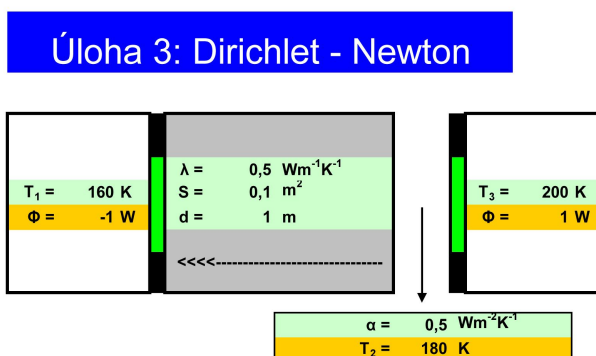
Úloha charakterizuje transport tepla systém, který má na jednom konci (těleso - stěna 1) Dirichletovu okrajovou podmínku a na druhém konci Newtonovu okrajovou podmínku. Těleso je z jednoho materiálu, který je charakterizován měrnou tepelnou vodivostí λ , délkou d a plochou řezu S . Dirichletova okrajová podmínka definuje teplotu na první hranici (stěna 1) tělesa. Newtonova okrajová podmínka definuje tepelný tok generovaný teplotním spádem. To je patrné z obrázku (Obrázek 5).

Úloha má tedy vstupní parametry teploty T_1 (definovanou Dirichletovou okrajovou podmínkou) a T_3 (definovanou Newtonovou okrajovou podmínkou), součinitel přestupu tepla α a vlastnosti materiálu popsány výše. Výstupem a tedy tím, co nás zajímá je teplota T_2 (stěna 2) a tepelný tok Φ .

Úloha číslo 3	
vstupní veličiny	
λ [Wm ⁻¹ K ⁻¹]	0,5
S [m ²]	0,1
d [m]	1
T_1 [K]	160
T_3 [K]	200
α [Wm ⁻² K ⁻¹]	0,5

výstup	
Φ [W]	-1
T_2 [K]	180

Vzorce	
$\Phi = S \cdot (T_1 - T_3) / [(d / \lambda) + (1 / \alpha)]$	
$T_2 = T_3 + \Phi / (\alpha \cdot S)$	



Obrázek 6: Řešení úlohy Dirichlet - Newton

Abychom mohli spočítat teplotu T_2 , potřebujeme znát tepelný tok Φ , který úlohou protéká. Tepelný tok Φ je dán vztahem (15). A když už známe hodnotu tepelného toku Φ můžeme spočítat hodnotu teploty T_2 . Teplota T_2 je dána vztahem (16).

$$\Phi = \frac{S \cdot (T_1 - T_3)}{\frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha}} \quad (15)$$

$$T_2 = T_3 + \frac{\Phi}{\alpha \cdot S} \quad (16)$$

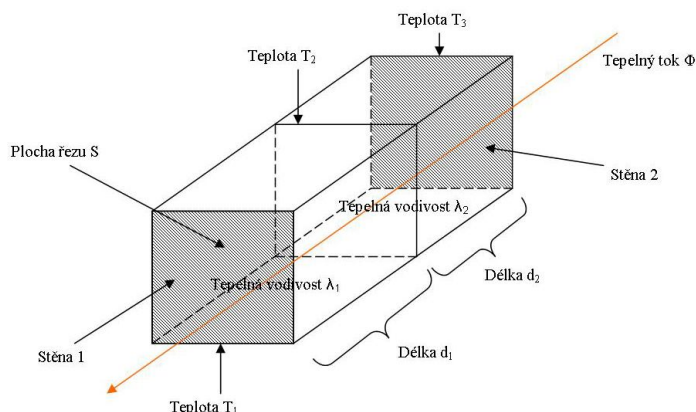
Z úlohy lze vyvodit několik závěrů:

- 1) Pokud zvětšujeme hodnotu měrné tepelné vodivosti λ , zvětšuje se i absolutní hodnota tepelného toku Φ a zároveň se mění hodnota teploty T_2 v závislosti na tom, kterým směrem tepelný tok Φ teče. Pokud teče ve směru z T_1 k T_3 , potom se hodnota teploty T_2 zvětšuje společně s hodnotou měrné tepelné vodivosti λ a naopak, pokud tepelný tok Φ teče směrem z T_3 k T_1 , potom se hodnota teploty T_2 zmenšuje při zvětšování hodnoty měrné tepelné vodivosti λ .
- 2) Pokud zvětšujeme hodnotu plochy řezu S , zvětšuje se i absolutní hodnota tepelného toku Φ , ale teplota T_2 zůstává stejná. Lze tedy říci, že teplota T_2 je nezávislá na ploše řezu S . Důvod vidíme na vzorci (17). Je to jen upravený vzorec (16), kde je místo tepelného toku Φ dosazen vzorec na jeho výpočet. Potom vidíme, že můžeme součin dvou zlomků zkrátit a ze vzorce pro výpočet teploty T_2 nám vypadá plocha řezu S a to je důkaz toho, že teplota T_2 je opravdu nezávislá na velikosti plochy řezu S .

$$T_2 = T_3 + \frac{S \cdot (T_1 - T_3)}{\frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot S} \quad (17)$$

- 3) Pokud zvětšujeme hodnotu délky d , snižuje se absolutní hodnota tepelného toku Φ a mění se i hodnota teploty T_2 v závislosti na tom, kterým směrem teče tepelný tok Φ . Pokud teče směrem z T_1 k T_3 , potom se hodnota teploty T_2 zmenšuje při zvětšování hodnoty délky d a naopak, pokud tepelný tok Φ teče směrem z T_3 k T_1 , potom se hodnota teploty zvětšuje společně s hodnotou délky d .
- 4) Pokud se zvětšuje nebo zmenšuje rozdíl teplot T_1 a T_3 , potom se zvětšuje nebo zmenšuje i absolutní hodnota tepelného toku Φ a zároveň se zmenšuje nebo zvětšuje hodnota teploty T_2 .
- 5) Pokud si teploty T_1 a T_3 nejsou rovny, tepelný tok Φ je větší než nula (resp. jeho absolutní hodnota). Pokud prohodíme hodnoty teplot T_1 a T_3 , tepelný tok Φ bude mít stejnou absolutní hodnotu, jen se změní jeho směr. Např.: $T_1 = 100 \text{ K}$, $T_3 = 200 \text{ K}$, $\Phi = -2,5 \text{ W}$ a když teploty prohodíme: $T_1 = 200 \text{ K}$, $T_3 = 100 \text{ K}$, $\Phi = 2,5 \text{ W}$. V obou případech se hodnota tepelného toku Φ vztahuje k první hranici systému, proto se liší ve znaménku, ale absolutní hodnota je stejná.
- 6) Pokud zvětšujeme hodnotu součinitele přestupu tepla α , zvětšuje i absolutní hodnota tepelného toku Φ a mění se hodnota teploty T_2 v závislosti na tom, jakým směrem teče tepelný tok Φ . Pokud teče směrem z T_1 k T_3 , potom se zmenšuje hodnota teploty T_2 se zvětšováním hodnoty součinitele přestupu tepla α a naopak, pokud tepelný tok Φ teče směrem z T_3 k T_1 , potom se zvětšuje hodnota teploty T_2 společně se zvyšováním hodnoty součinitele přestupu tepla α .
- 7) Ze vzorců pro výpočet je jasné, že úloha má smysl při nenulových hodnotách plochy řezu S , součinitele přestupu tepla α a součinitele měrné tepelné vodivosti λ .

3.1.4 Úloha 4: Dirichlet - Dirichlet



Obrázek 7: Schéma úlohy Dirichlet - Dirichlet (2 materiály)

Úloha charakterizuje transport tepla systémem, který tvoří těleso, které má na každém konci (stěna 1 a 2) Dirichletovu okrajovou podmínku. Těleso se skládá ze dvou materiálů, které mají společnou hranici a ideálně na sebe navazují. Jedná se o materiály, které jsou charakterizovány měrnou tepelnou vodivostí λ , délkou d a plochou řezu S , která je pro oba materiály stejná. Dirichletova okrajová podmínka definuje teplotu na hranici (stěně) tělesa. To je patrné z obrázku (Obrázek 7).

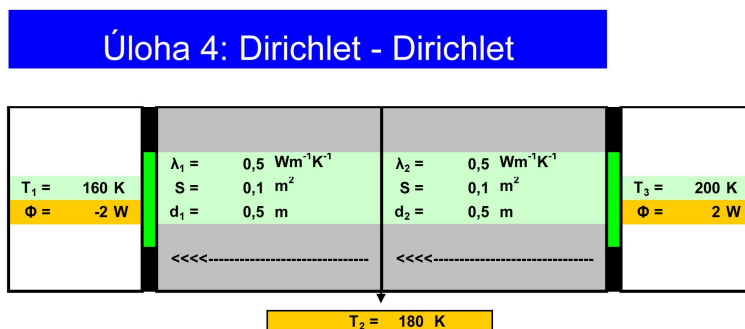
Úloha má tedy vstupní parametry teploty T_1 a T_3 (definované Dirichletovými okrajovými podmínkami) a vlastnosti materiálu popsány výše. Výstupem a tedy tím, co nás zajímá je teplota T_2 (na hranici materiálů, tedy tam, kde se materiály stýkají) a tepelný tok Φ .

Tato úloha rozšiřuje úlohu 1. Pokud budou mít oba materiály stejnou měrnou tepelnou vodivost λ a její hodnota bude stejná jako v úloze 1, součet obou délek s hodnotami d_1 a d_2 bude stejný jako hodnota délky d v úloze 1, plocha řezu S bude mít stejnou hodnotu jako v úloze 1, potom můžeme tvrdit, že výsledky musí a budou vycházet stejně jako v úloze 1. Důkaz je vidět na obrázku (Obrázek 8).

Úloha číslo 4	
vstupní veličiny	
S [m ²]	0,1
d ₁ [m]	0,5
d ₂ [m]	0,5
λ ₁ [Wm ⁻¹ K ⁻¹]	0,5
λ ₂ [Wm ⁻¹ K ⁻¹]	0,5
T ₁ [K]	160
T ₃ [K]	200

výstup	
Φ [W]	-2
T ₂ [K]	180

Vzorce	
$\Phi = (T_1 - T_3) \cdot S / [(d_1 / \lambda_1) + (d_2 / \lambda_2)]$	
$T_2 = T_3 + (\Phi \cdot d_2) / (\lambda_2 \cdot S)$	



Obrázek 8: Řešení úlohy Dirichlet - Dirichlet (2 materiály)

Abychom mohli spočítat teplotu T_2 , potřebujeme znát tepelný tok Φ , který úlohou protéká. Tepelný tok Φ je dán vztahem (18). Když známe hodnotu tepelného toku Φ , tak už můžeme spočítat hodnotu teploty T_2 , která je dána vztahem (19).

$$\Phi = \frac{S \cdot (T_1 - T_3)}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}} \quad (18)$$

$$T_2 = T_3 + \frac{\Phi \cdot d_2}{\lambda_2 \cdot S} \quad (19)$$

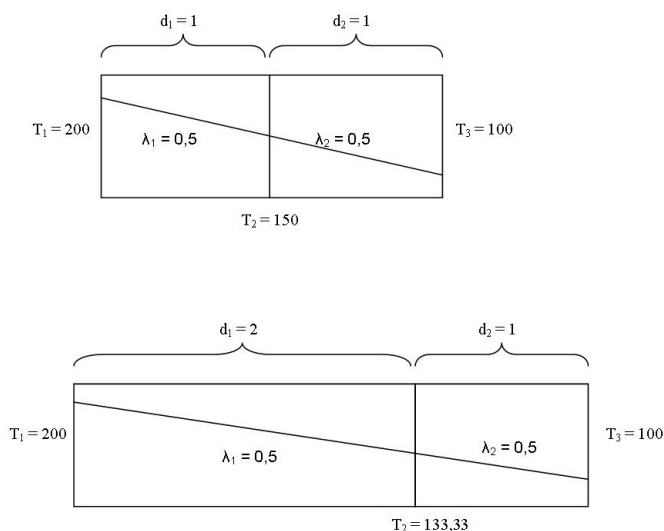
Z úlohy lze vyvodit několik závěrů:

- 1) Pokud zvětšíme plochu řezu S , zvětšuje se i absolutní hodnota tepelného toku Φ , ale hodnota teploty T_2 zůstává stejná. Můžeme tedy říct, že teplota T_2 je nezávislá na ploše řezu S a to bez ohledu na to, jaké ostatní vlastnosti mají oba materiály. Důvod vidíme na vzorci (20). Je to jen upravený vzorec (19), kde je místo tepelného toku Φ dosazen vzorec na jeho výpočet. Potom vidíme, že můžeme součin dvou zlomků zkrátit a ze vzorce pro výpočet teploty T_2 nám vypadává plocha řezu S a to je důkaz toho, že teplota T_2 je opravdu nezávislá na velikosti plochy řezu S .

$$T_2 = T_3 + \frac{S \cdot (T_1 - T_3)}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}} \cdot \frac{d_2}{\lambda_2 \cdot S} \quad (20)$$

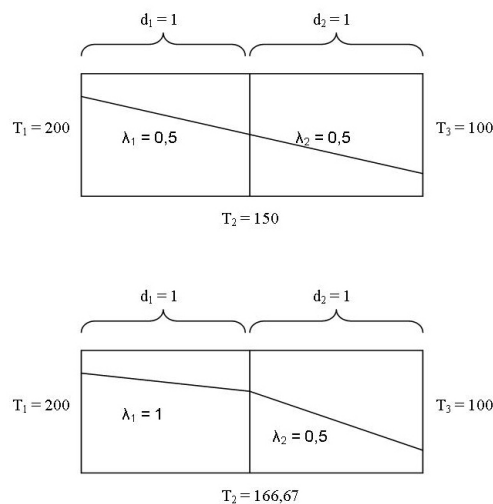
- 2) Pokud zvětšíme hodnotu celkové délky (tedy hodnotu dílčí délky d_1 nebo d_2 nebo obou), potom se zmenšuje absolutní hodnota tepelného toku Φ . Zároveň se změní hodnota teploty T_2 a to v závislosti na tom, kterým směrem teče tepelný tok Φ a kterou délku jsme zvětšili. Například, pokud tepelný tok Φ poteče směrem z T_1 k T_3 a zvětšíme délku prvního materiálu d_1 , potom se

hodnota teploty T_2 zmenší. Je to logické, protože pokud tepelný tok Φ teče ve směru z T_1 k T_3 , znamená to, že hodnota teploty T_3 je menší než hodnota teploty T_1 . A pokud se tedy zvětší hodnota délky d_1 , potom je jasné, že místo, kde sledujeme teplotu T_2 , bude blíže k místu teploty T_3 a hodnota teploty T_2 je tak samozřejmě menší. Lépe pochopitelné je to z obrázku (Obrázek 9).



Obrázek 9: Vliv délky materiálu na teplotu T_2

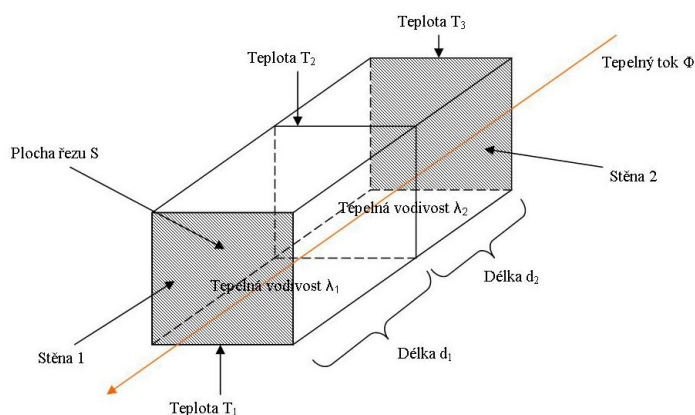
- 3) Pokud zvětšíme hodnotu měrné tepelné vodivosti λ_1 nebo λ_2 , případně obou, potom se zvětší i absolutní hodnota tepelného toku Φ a změní se hodnota teploty T_2 a to v závislosti na tom, jakým směrem teče tepelný tok Φ a jakou měrnou tepelnou vodivost λ jsme zvětšili. Například, pokud tepelný tok Φ poteče směrem z T_1 k T_3 a zvětšíme hodnotu měrné tepelné vodivosti prvního materiálu λ_1 , potom se hodnota teploty T_2 zvětší. Což je jasné, protože pokud se zvětší hodnota měrné tepelné vodivosti prvního materiálu λ_1 , tak se zlepší tepelná vodivost prvního materiálu vůči vodivosti druhého materiálu a potom je tedy logické, že hodnota teploty T_2 se bude více blížit hodnotě teplotě T_1 , protože tepelná vodivost mezi teplotami T_1 a T_2 je lepší, než tepelná vodivost mezi teplotami T_2 a T_3 . Lépe pochopitelné je to z obrázku (Obrázek 10).



Obrázek 10: Vliv měrné tepelné vodivosti na teplotu T_2

- 8) Pokud si teploty T_1 a T_3 nejsou rovny, tepelný tok Φ je větší než nula (resp. jeho absolutní hodnota). Pokud prohodíme hodnoty teplot T_1 a T_3 , tepelný tok Φ bude mít stejnou absolutní hodnotu, jen se změní jeho směr. Např.: $T_1 = 100$ K, $T_3 = 200$ K, $\Phi = -2,5$ W a když teploty prohodíme: $T_1 = 200$ K, $T_3 = 100$ K, $\Phi = 2,5$ W. V obou případech se hodnota tepelného toku Φ vztahuje k první hranici systému, proto se liší ve znaménku, ale absolutní hodnota je stejná.
- 4) Úloha má smysl a tedy i řešení jen při celkové nenulové délce (součet délek d_1 a d_2 je nenulový), při nenulových měrných tepelných vodivostích λ_1 a λ_2 a při nenulové ploše řezu S .

3.1.5 Úloha 5: Dirichlet - Neumann

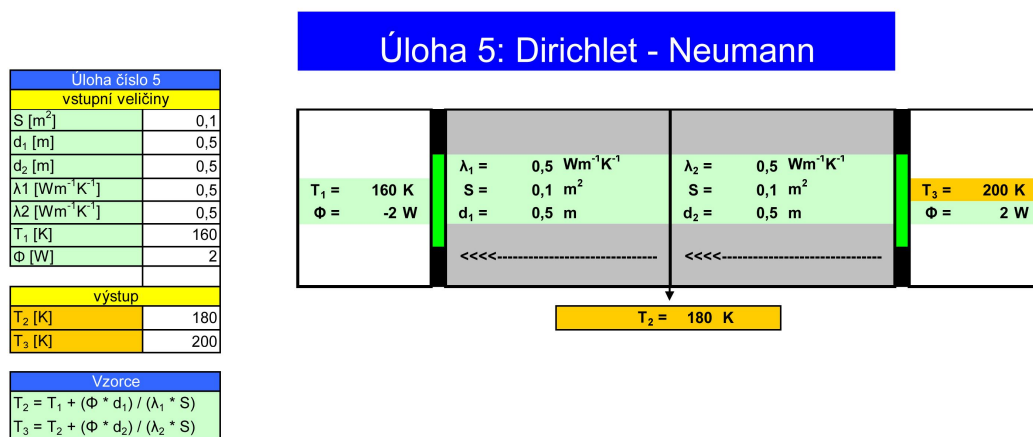


Obrázek 11: Schéma úlohy Dirichlet - Neumann (2 materiály)

Úloha charakterizuje transport tepla systémem, který tvoří těleso, které má na jednu konci (stěna 1) Dirichletovu okrajovou podmínku a na druhém (stěna 2) Neumannovu okrajovou podmínku. Těleso se skládá ze dvou materiálů, které mají společnou hranici a ideálně na sebe navazují. Jedná se o materiály, které jsou charakterizovány měrnou tepelnou vodivostí λ , délkou d a plochou řezu S , která je pro oba materiály stejná. Dirichletova okrajová podmínka definuje teplotu na první hranici (stěna 1) tělesa. Neumannova okrajová podmínka definuje tepelný tok přes druhou hranici (stěna 2) tělesa. To je patrné z obrázku (Obrázek 11).

Úloha má tedy vstupní parametry teplotu T_1 (definovanou Dirichletovou okrajovou podmínkou) a tepelný tok Φ (zadáván z pohledu vnější normály stěny 2, definovaný Neumannovou okrajovou podmínkou) a vlastnosti materiálu popsány výše. Výstupem a tedy tím, co nás zajímá, jsou teploty T_2 a T_3 , tedy teplota na druhém okraji tělesa (stěna 2) a teplota na hranici obou materiálů.

Tato úloha rozšiřuje úlohu 2. Pokud budou mít oba materiály stejnou měrnou tepelnou vodivost λ a její hodnota bude stejná jako v úloze 2, součet obou délek s hodnotami d_1 a d_2 bude stejný jako hodnota délky d v úloze 2, plocha řezu S bude mít stejnou hodnotu jako v úloze 2 a směr i velikost tepelného toku Φ bude stejný jako v úloze 2, potom můžeme tvrdit, že výsledky musí a budou vycházet stejné jako v úloze 2. Důkaz je vidět na obrázku (Obrázek 12).



Obrázek 12: Řešení úlohy Dirichlet - Neumann (2 materiály)

Abychom mohli spočítat teplotu T_3 , potřebujeme znát nejprve teplotu T_2 , kterou spočítáme po dosazení do vztahu (21). Když známe hodnotu teploty T_2 , tak už můžeme spočítat hodnotu teploty T_3 a ta je dána vztahem (22).

$$T_2 = T_1 + \frac{\Phi \cdot d_1}{\lambda_1 \cdot S} \quad (21)$$

$$T_3 = T_2 + \frac{\Phi \cdot d_2}{\lambda_2 \cdot S} \quad (22)$$

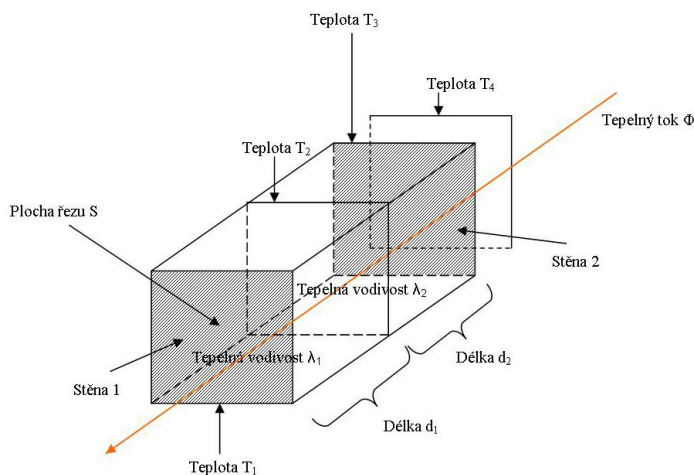
Z úlohy lze vyvodit několik závěrů:

- 1) Pokud má mít úloha řešení a tedy i smysl, musí být hodnoty měrných tepelných vodivosti λ_1 a λ_2 větší než nula a zároveň hodnota plochy řezu S větší než nula.
- 2) Musíme zohlednit, jestli je zadávaná hodnota tepelného toku Φ kladná nebo záporná. Pokud je kladná (tedy T_3 je větší než T_1 a tepelný tok tedy směřuje z T_3 k T_1), potom se, se zvyšováním hodnoty plochy řezu S , snižují hodnoty teplot T_2 a T_3 . Z čehož plyne, že čím větší bude plocha řezu S , tím menší bude rozdíl mezi teplotami T_1 a T_3 . Pokud bude zadávaná hodnota tepelného toku Φ záporná (tedy T_3 je menší než T_1 a tepelný tok Φ tedy směřuje z T_1 k T_3), potom se, se zvyšováním hodnoty plochy řezu S , budou zvyšovat i hodnoty teplot T_2 a T_3 . Opět je potřeba si uvědomit, že princip je úplně stejný, jen tepelný tok Φ teče opačným směrem a stále tedy platí, že čím větší bude plocha řezu S , tím menší bude rozdíl teplot T_1 a T_3 .
- 3) Je-li zadaná hodnota tepelného toku Φ kladná (tedy T_3 je větší než T_1 a tepelný tok Φ směřuje směrem z T_3 k T_1) tak platí, že čím větší je hodnota celkové délky tělesa (tedy součet dílčích délek d_1 a d_2), tím větší je hodnota teploty T_3 . Je-li zadaná hodnota tepelného toku Φ záporná (tedy T_3 je menší než T_1 a tepelný tok Φ směřuje směrem z T_1 k T_3) tak platí, že čím větší je hodnota celkové délky tělesa (tedy součet dílčích délek d_1 a d_2), tím menší je hodnota teploty T_3 . U závislosti teploty T_2 na délkách d_1 a d_2 je to trochu jinak. Je potřeba si uvědomit, že z pohledu teploty T_2 nehraje roli celková délka, ale dílčí délky d_1 a d_2 a směr tepelného toku Φ . Například, pokud tepelný tok Φ poteče směrem z T_1 k T_3 a zvětšíme hodnotu délky prvního materiálu d_1 , potom se hodnota teploty T_2 zmenší. Ale pokud zvětšíme hodnotu délky druhého materiálu d_2 , potom hodnota teploty T_2 zůstane stejná a změní se jen hodnota teploty T_3 (v tomto případě se zmenší). To je způsobeno tím, že když se nezmění hodnota délky d_1 a tepelný tok nejprve teče prvním materiálem (tedy ve směru z T_1 k T_3), tak teplota na konci tohoto materiálu, tedy teplota T_2 , musí být stejná, i když se změnila délka druhého materiálu, která tedy na teplotu T_2 nemá vliv (v tomto směru toku), což je patrné i ze vzorce (21) pro výpočet. Ale pokud, za stejného směru toku, zvětšíme hodnotu délky d_1 , potom už ovlivňujeme jev v prvním materiálu, a proto se teplota T_2 na konci tohoto materiálu již změní.

- 4) Obdobně, jako je tomu se závislostí teplot T_2 a T_3 na délkách d_1 a d_2 , je tomu se závislostí teplot T_2 a T_3 na měrných tepelných vodivostech λ_1 a λ_2 . Je-li zadaná hodnota tepelného toku Φ kladná (tedy T_3 je větší než T_1 a tepelný tok Φ směřuje směrem z T_3 k T_1) tak platí, že čím větší je hodnota měrné tepelné vodivosti (λ_1 nebo λ_2 nebo obou), tím menší je hodnota teploty T_3 . Je-li zadaná hodnota tepelného toku Φ záporná (tedy T_3 je menší než T_1 a tepelný tok Φ směřuje směrem z T_1 k T_3) tak platí, že čím větší je hodnota měrné tepelné vodivosti (λ_1 nebo λ_2 nebo obou), tím větší je hodnota teploty T_3 . Je potřeba si uvědomit, že z pohledu teploty T_2 je důležité, která hodnota měrné tepelné vodivosti λ se mění a jaký je směr tepelného toku Φ . Například, pokud tepelný tok Φ poteče směrem z T_1 k T_3 a zvětšíme hodnotu měrné tepelné vodivosti prvního materiálu λ_1 , potom se hodnota teploty T_2 zvětší. Ale pokud zvětšíme hodnotu měrné tepelné vodivosti druhého materiálu λ_2 , potom hodnota teploty T_2 zůstane stejná. To je způsobeno tím, že když se nezmění hodnota měrné tepelné vodivosti λ_1 a tepelný tok nejprve teče prvním materiálem (tedy ve směru z T_1 k T_3), tak teplota na konci tohoto materiálu, tedy teplota T_2 , musí být stejná, i když se změnila měrná tepelná vodivost druhého materiálu, která tedy na teplotu T_2 nemá vliv (v tomto směru toku), což je patrné i ze vzorce (21) pro výpočet. Ale pokud, za stejného směru toku, zvětšíme hodnotu měrné tepelné vodivosti λ_1 , potom už ovlivňujeme jev v prvním materiálu, a proto se teplota T_2 na konci tohoto materiálu již změní.
- 5) Pokud tepelný tok Φ teče směrem z T_1 k T_3 (tedy zadáme jeho hodnotu se záporným znaménkem), potom se, se zvětšující hodnotou teploty T_1 , zvětšují i hodnoty teplot T_2 a T_3 a to přesně o hodnotu, o kterou jsme zvětšili teplotu T_1 . Pokud tepelný tok Φ teče směrem z T_3 k T_1 (tedy zadáme jeho hodnotu s kladným znaménkem), potom se, se zvětšující hodnotou teploty T_1 , zmenšují i hodnoty teplot T_2 a T_3 a to přesně o hodnotu, o kterou jsme zvětšili teplotu T_1 .
- 6) Čím větší je hodnota tepelného toku Φ , tím větší jsou hodnoty teplot T_2 a T_3 . Ale je potřeba si uvědomit, že se nejedná o absolutní hodnotu. Bereme-li tepelný tok Φ pouze ve směru z T_3 k T_1 , tedy jeho hodnota bude nabývat jen kladných hodnot, potom platí první věta. Ale pokud se zaměříme na opačný směr tepelného toku Φ , ve směru z T_1 k T_3 , tedy jeho hodnota bude nabývat záporných hodnot, přičemž platí, že záporné znaménko značí právě zmíněný

opačný směr, potom platí, že čím větší bude absolutní hodnota tepelného toku Φ , tím menší budou hodnoty teploty T_2 a T_3 .

3.1.6 Úloha 6: Dirichlet - Newton

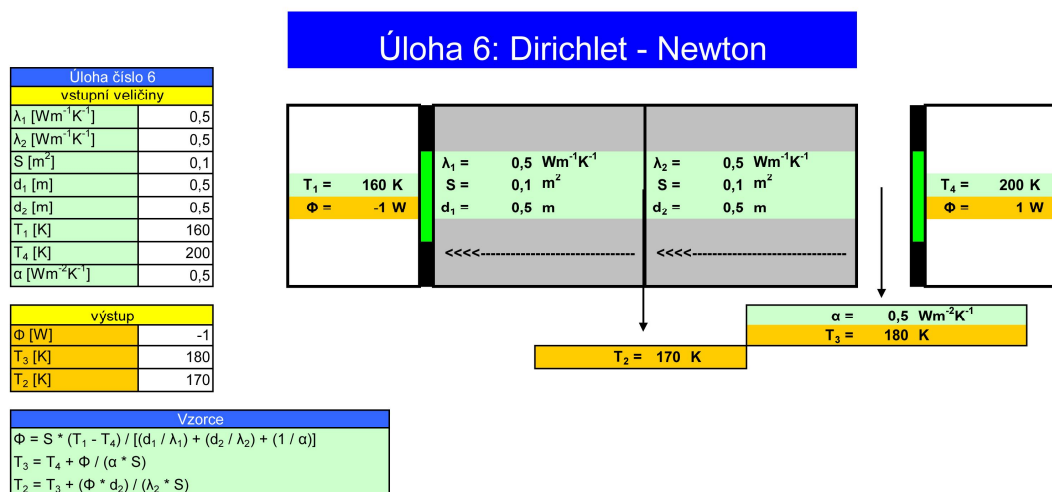


Obrázek 13: Schéma úlohy Dirichlet - Newton (2 materiály)

Úloha charakterizuje transport tepla systémem, který má na jednom konci (těleso - stěna 1) Dirichletovu okrajovou podmínku a na druhém konci Newtonovu okrajovou podmínku. Těleso se skládá ze dvou materiálů, které mají společnou hranici a ideálně na sebe navazují. Jedná se o materiály, které jsou charakterizovány měrnou tepelnou vodivostí λ , délkou d a plochou řezu S , která je pro oba materiály stejná. Dirichletova okrajová podmínka definuje teplotu na první hranici (stěna 1) tělesa. Newtonova okrajová podmínka definuje tepelný tok generovaný teplotním spádem. To je patrné z obrázku (Obrázek 13).

Úloha má tedy vstupní parametry teploty T_1 (definovanou Dirichletovou okrajovou podmínkou) a T_4 (definovanou Newtonovou okrajovou podmínkou), součinitel přestupu tepla α a vlastnosti materiálu popsány výše. Výstupem a tedy tím, co nás zajímá, jsou teploty T_2 a T_3 , tedy teplota na druhém okraji (stěna 2) tělesa a teplota na hranici obou materiálů, a tepelný tok Φ .

Tato úloha rozšiřuje úlohu 3. Pokud budou mít oba materiály stejnou měrnou tepelnou vodivost λ a její hodnota bude stejná jako v úloze 3, součet obou délek s hodnotami d_1 a d_2 bude stejný jako hodnota délky d v úloze 3, plocha řezu S bude mít stejnou hodnotu jako v úloze 3, součinitel přestupu tepla α bude mít stejnou hodnotu jako v úloze 3, hodnota teploty T_1 bude stejná jako v úloze 3, hodnota teploty T_4 bude stejná jako hodnota teploty T_3 v úloze 3 můžeme tvrdit, že výsledky musí a budou vycházet stejně jako v úloze 3. Důkaz je vidět na obrázku (Obrázek 14).



Obrázek 14: Řešení úlohy Dirichlet - Newton (2 materiály)

Tepelný tok Φ je dán vztahem (23). Když známe hodnotu tepelného toku Φ , potom můžeme spočítat hodnotu teploty T_3 podle vztahu (24). Když známe hodnotu teploty T_3 , potom můžeme spočítat hodnotu teploty T_2 podle vztahu (25).

$$\Phi = \frac{S \cdot (T_1 - T_4)}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha}} \quad (23)$$

$$T_3 = T_4 + \frac{\Phi}{\alpha \cdot S} \quad (24)$$

$$T_2 = T_3 + \frac{\Phi \cdot d_2}{\lambda_2 \cdot S} \quad (25)$$

Z úlohy lze vyvodit několik závěrů:

- 1) Pokud zvětšíme hodnotu měrné tepelné vodivosti (λ_1 nebo λ_2 nebo obou), zvětší se i absolutní hodnota tepelného toku Φ . A změní se i hodnoty teplot T_2 a T_3 a to v závislosti na tom, jakým směrem teče tepelný tok Φ a jakou dílčí měrnou tepelnou vodivost změníme. Například, pokud teče tepelný tok Φ směrem z T_4 k T_1 , potom platí, že s rostoucí hodnotou měrné tepelné vodivosti prvního materiálu λ_1 , se zmenší hodnoty teplot T_2 a T_3 . Ale pokud zvětšíme hodnotu měrné tepelné vodivosti druhého materiálu λ_2 , potom se hodnota teploty T_2 zvětší a hodnota teploty T_3 zmenší. Je to logické, pokud zvětšíme hodnotu měrné tepelné vodivosti, která má vliv mezi dvěma teplotami, potom je jasné, že hodnota těchto teplot si bude bližší, lépe řečeno, jejich rozdíl bude menší.
- 2) Pokud zvětšíme hodnotu plochy řezu S , zvětší se i absolutní hodnota tepelného toku Φ , ale hodnoty teplot T_2 a T_3 se nemění. Lze tedy říci, že teploty T_2 a T_3 je

nezávislé na ploše řezu S . Důvod pro nezávislost teploty T_2 na ploše řezu S vidíme na vzorci (26). Je to jen upravený vzorec (25), kde je místo tepelného toku Φ dosazen vzorec na jeho výpočet. Potom vidíme, že můžeme součin dvou zlomků zkrátit a ze vzorce pro výpočet teploty T_2 nám vypadává plocha řezu S a to je důkaz toho, že teplota T_2 je opravdu nezávislá na velikosti plochy řezu S . Důvod pro nezávislost teploty T_3 na ploše řezu S vidíme na vzorci (27) a je to analogicky totožné jako s nezávislostí teploty T_2 na ploše řezu S . Je to jen upravený vzorec (24), kde je místo tepelného toku Φ dosazen vzorec na jeho výpočet. Můžeme tvrdit, že teplota T_3 je opravdu nezávislá na velikosti plochy řezu S .

$$T_2 = T_3 + \frac{S \cdot (T_1 - T_4)}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{d_2}{\lambda_2 \cdot S} \quad (26)$$

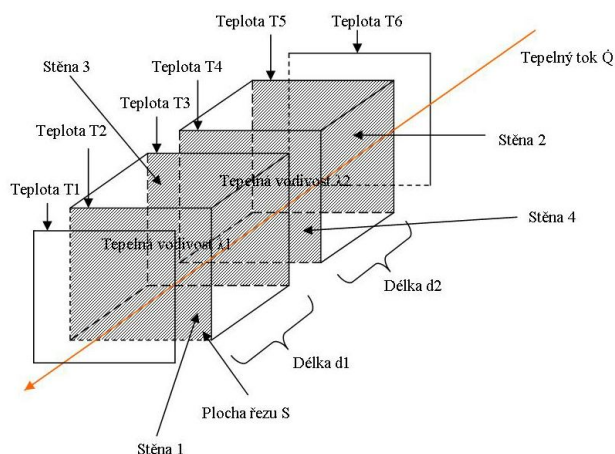
$$T_3 = T_4 + \frac{S \cdot (T_1 - T_3)}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot S} \quad (27)$$

- 3) Pokud zvětšíme celkovou délku tělesa (tedy pokud zvětšíme délku prvního materiálu d_1 nebo druhého d_2 nebo obou), potom se zmenší absolutní hodnota tepelného toku Φ . Zároveň se změní hodnota teplot T_2 a T_3 a to v závislosti na tom, jakým směrem teče tepelný tok Φ a jakou dílčí hodnotu délky jsme zvětšili. Například, pokud tepelný tok Φ směřuje směrem z T_1 k T_4 a zvětšíme hodnotu délky prvního materiálu d_1 , potom zmenší se hodnoty obou sledovaných teplot T_2 a T_3 . Ale pokud zvětšíme hodnotu délky druhého materiálu d_2 , potom se hodnota teploty T_2 zvětší a hodnota teploty T_3 naopak zmenší. Je to očekávané a logické, protože pokud zvětšíme, za udávaného směru, hodnotu délky d_1 , potom je jasné, že rozdíl teplot T_2 a T_1 musí být větší a hodnota teploty T_2 je menší než při původní délce d_1 . Potom je jasné, že i teplota T_3 musí být menší, protože jev v druhém materiálu se sice nezměnil, ale vychází z menší teploty T_2 .
- 4) Pokud se zvětšuje nebo zmenšuje rozdíl teplot T_1 a T_4 , potom se zvětšuje nebo zmenšuje i absolutní hodnota tepelného toku Φ a zároveň zmenšují nebo zvětšují hodnoty teplot T_2 a T_3 .
- 5) Pokud si teploty T_1 a T_4 nejsou rovny, tepelný tok Φ je větší než nula (resp. jeho absolutní hodnota). Pokud prohodíme hodnoty teplot T_1 a T_4 , tepelný tok Φ bude mít stejnou absolutní hodnotu, jen se změní jeho směr. Např.: $T_1 = 100 \text{ K}$,

$T_4 = 200 \text{ K}$, $\Phi = -2 \text{ W}$ a když teploty prohodíme: $T_1 = 200 \text{ K}$, $T_4 = 100 \text{ K}$, $\Phi = 2 \text{ W}$. V obou případech se hodnota tepelného toku Φ vztahuje k první hranici systému, proto se liší ve znaménku, ale absolutní hodnota je stejná.

- 6) Pokud zvětšujeme hodnotu součinitele přestupu tepla α , zvětšuje i absolutní hodnota tepelného toku Φ a mění se hodnoty teplot T_2 a T_3 v závislosti na tom, jakým směrem teče tepelný tok Φ . Pokud teče směrem z T_1 k T_4 , potom se zmenšují hodnoty teplot T_2 a T_3 se zvětšováním hodnoty součinitele přestupu tepla α a naopak, pokud tepelný tok Φ teče směrem z T_4 k T_1 , potom se zvětšují hodnoty teplot T_2 a T_3 společně se zvyšováním hodnoty součinitele přestupu tepla α .
- 7) Úloha má smysl při nenulových hodnotách plochy řezu S , součinitele přestupu tepla α a obou součinitelů měrné tepelné vodivosti λ_1 a λ_2 .

3.1.7 Úloha 7: Newton - Newton

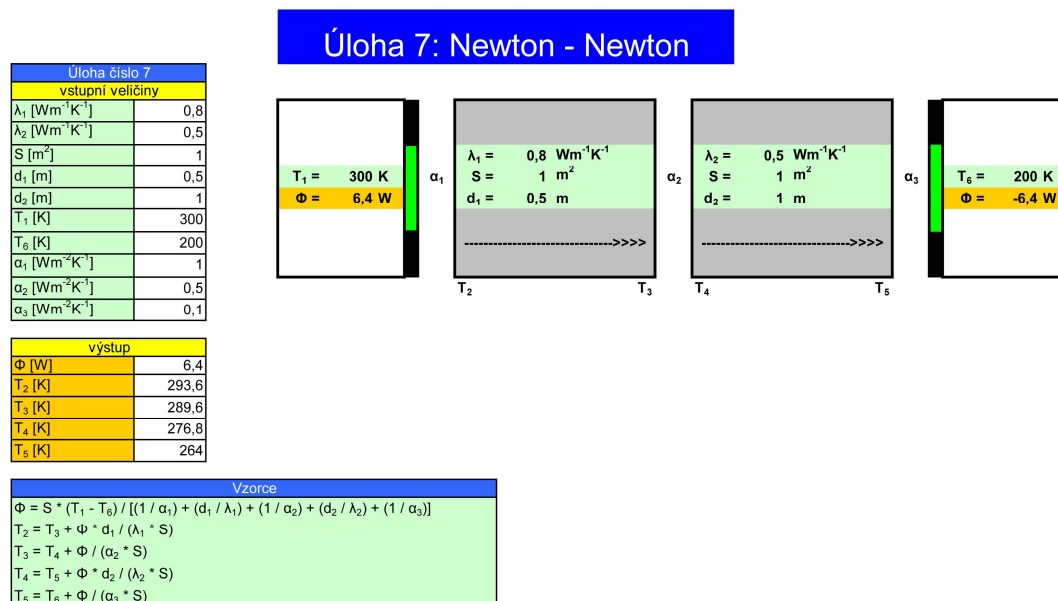


Obrázek 15: Schéma úlohy Newton - Newton (2 materiály)

Úloha charakterizuje transport tepla systémem, který má na obou koncích Newtonovu okrajovou podmínku, která definuje tepelný tok generovaný teplotním spádem. Systém obsahuje těleso, které se skládá ze dvou materiálů a teplotní spád je i mezi oběma materiály a těleso tak dělí na dvě subtělesa. Jedná se o materiály, které jsou charakterizovány měrnou tepelnou vodivostí λ , délkou d a plochou řezu S , která je pro oba materiály stejná.

Úloha má tedy vstupní parametry teploty T_1 a T_6 (definované Newtonovými okrajovými podmínkami), součinitele přestupu tepla α_1 , α_2 , α_3 a vlastnosti materiálu

popsány výše. Výstupem a tedy tím, co nás zajímá, jsou teploty na obou koncích obou subtěles (stěna 1, 2, 3 a 4), tedy teploty T_2 , T_3 , T_4 a T_5 a tepelný tok Φ .



Obrázek 16: Řešení úlohy Newton - Newton (2 materiály)

Tepelný tok Φ je dán vztahem (28). Když známe hodnotu tepelného toku Φ , potom můžeme spočítat hodnotu teploty T_5 , která je dána vztahem (29). Když známe hodnotu teploty T_5 , potom můžeme spočítat hodnotu teploty T_4 podle vzorce (30). Když známe hodnotu teploty T_4 , potom můžeme spočítat hodnotu teploty T_3 podle vzorce (31). Když známe hodnotu teploty T_3 , potom můžeme spočítat hodnotu teploty T_2 a to dosazením do vztahu (32).

$$\Phi = \frac{S \cdot (T_1 - T_6)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_3}} \quad (28)$$

$$T_5 = T_6 + \frac{\Phi}{\alpha_3 \cdot S} \quad (29)$$

$$T_4 = T_5 + \frac{\Phi \cdot d_2}{\lambda_2 \cdot S} \quad (30)$$

$$T_3 = T_4 + \frac{\Phi}{\alpha_2 \cdot S} \quad (31)$$

$$T_2 = T_3 + \frac{\Phi \cdot d_1}{\lambda_1 \cdot S} \quad (32)$$

Z úlohy lze vyvodit několik závěrů:

- 1) Pokud zvětšíme hodnotu měrné tepelné vodivosti λ_1 nebo λ_2 nebo obou, potom se zvětší i absolutní hodnota tepelného toku Φ a zároveň se mění všechny sledované teploty a to v závislosti na tom, jakým směrem teče tepelný tok Φ a jakou hodnotu měrné tepelné vodivosti jsme změnili. Pokud zvětšíme hodnotu měrné tepelné vodivosti λ_1 a tepelný tok poteče směrem z T_1 k T_6 , potom se hodnota teploty T_2 , tedy teploty na stěně 1, zmenší a ostatní hodnoty sledovaných teplot se zvětší. Pokud zvětšíme hodnotu měrné tepelné vodivosti λ_2 a tepelný tok poteče směrem z T_1 k T_6 , potom se hodnota teploty T_5 , tedy teploty na stěně 2, zvětší a ostatní hodnoty sledovaných teplot se zmenší. Pokud zvětšíme hodnotu obou měrných tepelných vodivostí a tepelný tok poteče směrem z T_1 k T_6 , potom se hodnoty teplot na stěnách 1 a 4, zmenší a ostatní hodnoty sledovaných teplot se zvětší. V případě, že tok poteče opačným směrem, tedy směrem z T_6 k T_1 , potom budou výsledky přesně opačné (tedy tam, kde byl důsledek zvýšení teploty, teď bude snížení teploty a naopak).
- 2) Pokud zvětšíme hodnotu plochy řezu S , zvětší se i absolutní hodnota tepelného toku Φ , ale hodnoty všech sledovaných teplot se nemění. Lze tedy říci, že teploty T_2 , T_3 , T_4 a T_5 jsou nezávislé na velikosti plochy řezu S . Důvod pro nezávislost teploty T_5 na ploše řezu S vidíme na vzorci (33). Je to jen upravený vzorec (29), kde je místo tepelného toku Φ dosazen vzorec na jeho výpočet. Potom vidíme, že můžeme součin dvou zlomků zkrátit a ze vzorce pro výpočet teploty T_5 nám vypadává plocha řezu S a to je důkaz toho, že teplota T_5 je opravdu nezávislá na velikosti plochy řezu S . Důvod pro nezávislost teploty T_4 na ploše řezu S vidíme na vzorci (34) a je to analogicky totožné jako s nezávislostí teploty T_5 na ploše řezu S . Je to jen upravený vzorec (30), kde je místo tepelného toku Φ dosazen vzorec na jeho výpočet. Můžeme tvrdit, že teplota T_4 je opravdu nezávislá na velikosti plochy řezu S . Důvod pro nezávislost teploty T_3 na ploše řezu S vidíme na vzorci (35) a je to analogicky totožné jako s nezávislostí teplot T_5 a T_4 na ploše řezu S . Je to jen upravený vzorec (31), kde je místo tepelného toku Φ dosazen vzorec na jeho výpočet. Můžeme tvrdit, že teplota T_3 je opravdu nezávislá na velikosti plochy řezu S . Důvod pro nezávislost teploty T_2 na ploše řezu S vidíme na vzorci (36) a je to analogicky totožné jako s nezávislostí teplot T_5 , T_4 a T_3 na ploše řezu S . Je to jen upravený vzorec (32), kde je místo tepelného toku Φ dosazen vzorec na jeho

výpočet. Můžeme tvrdit, že teplota T_2 je opravdu nezávislá na velikosti plochy řezu S .

$$T_5 = T_6 + \frac{S \cdot (T_1 - T_6)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_3}} \cdot \frac{1}{\alpha_3 \cdot S} \quad (33)$$

$$T_4 = T_5 + \frac{S \cdot (T_1 - T_6)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_3}} \cdot \frac{d_2}{\lambda_2 \cdot S} \quad (34)$$

$$T_3 = T_4 + \frac{S \cdot (T_1 - T_6)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_3}} \cdot \frac{1}{\alpha_2 \cdot S} \quad (35)$$

$$T_2 = T_3 + \frac{S \cdot (T_1 - T_6)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_3}} \cdot \frac{d_1}{\lambda_1 \cdot S} \quad (36)$$

- 3) Pokud zvětšíme hodnotu celkové délky (zvětšíme hodnotu délky d_1 nebo d_2 nebo obou), potom se zmenší absolutní hodnota tepelného toku Φ a změní se sledované teploty v závislosti na tom, jakým směrem teče tepelný tok Φ a jakou dílčí hodnotu délky jsme zvětšili. Pokud zvětšíme hodnotu délky d_1 a tepelný tok poteče směrem z T_1 k T_6 , potom se hodnota teploty T_2 , tedy teploty na stěně 1, zvětší a ostatní hodnoty sledovaných teplot se zmenší. Pokud zvětšíme hodnotu délky d_2 a tepelný tok Φ poteče směrem z T_1 k T_6 , potom se hodnota teploty T_5 , tedy teploty na stěně 2, zmenší a ostatní hodnoty sledovaných teplot se zvětší. Pokud zvětšíme hodnotu obou délek a tepelný tok Φ poteče směrem z T_1 k T_6 , potom se hodnoty teplot na stěnách 1 a 4 zvětší a ostatní hodnoty sledovaných teplot se zmenší. V případě, že tepelný tok Φ poteče opačným směrem, tedy směrem z T_6 k T_1 , potom budou výsledky přesně opačné (tedy tam, kde byl důsledek zvýšení teploty, teď bude snížení teploty a naopak).
- 4) Pokud se zvětšuje nebo zmenšuje rozdíl teplot T_1 a T_6 , potom se zvětšuje nebo zmenšuje i absolutní hodnota tepelného toku Φ a zároveň zmenšují nebo zvětšují hodnoty všech sledovaných teplot.
- 5) Pokud si teploty T_1 a T_6 nejsou rovny, tepelný tok Φ je větší než nula (resp. jeho absolutní hodnota). Pokud prohodíme hodnoty teplot T_1 a T_6 , tepelný tok Φ bude mít stejnou absolutní hodnotu, jen se změní jeho směr. Např.: $T_1 = 100 \text{ K}$, $T_6 = 200 \text{ K}$, $\Phi = -1,25 \text{ W}$ a když teploty prohodíme: $T_1 = 200 \text{ K}$, $T_6 = 100 \text{ K}$,

$\Phi = 1,25 \text{ W}$. V obou případech se hodnota tepelného toku Φ vztahuje k první hranici systému, proto se liší ve znaménku, ale absolutní hodnota je stejná.

- 6) Pokud zvětšíme hodnotu součinitelů přestupu tepla α_1 nebo α_2 nebo α_3 nebo všech tří, potom se zvětší i absolutní hodnota tepelného toku Φ a zároveň se mění všechny sledované teploty a to v závislosti na tom, jakým směrem teče tepelný tok Φ a jakou dílčí hodnotu součinitelů přestupu tepla jsme změnili. Pokud zvětšíme hodnotu součinitele přestupu tepla α_1 a tepelný tok poteče směrem z T_1 k T_6 , potom se hodnoty všech sledovaných teplot zvětší. Pokud zvětšíme hodnotu součinitele přestupu tepla α_2 a tepelný tok poteče směrem z T_1 k T_6 , potom se hodnoty teplot T_2 a T_3 , tedy teploty na stěnách 1 a 3, zmenší a hodnoty teplot T_4 a T_5 , tedy teploty na stěnách 4 a 2, zvětší. Pokud zvětšíme hodnotu součinitele přestupu tepla α_3 a tepelný tok poteče směrem z T_1 k T_6 , potom se hodnoty všech sledovaných teplot zmenší. Pokud zvětšíme hodnoty součinitelů přestupu tepla α_1 a α_2 a tepelný tok poteče směrem z T_1 k T_6 , potom se hodnoty všech sledovaných teplot zvětší. Pokud zvětšíme hodnoty součinitelů přestupu tepla α_2 a α_3 a tepelný tok poteče směrem z T_1 k T_6 , potom se hodnoty všech sledovaných teplot zmenší. Pokud zvětšíme hodnoty součinitelů přestupu tepla α_1 a α_3 a tepelný tok poteče směrem z T_1 k T_6 , potom se hodnoty teplot T_2 a T_3 , tedy teploty na stěnách 1 a 3, zvětší a hodnoty teplot T_4 a T_5 , tedy teploty na stěnách 4 a 2, zmenší. Pokud zvětšíme hodnotu všech tří součinitelů přestupu tepla α_1 , α_2 a α_3 a tepelný tok poteče směrem z T_1 k T_6 , potom se hodnoty teplot na stěnách 1 a 4, zvětší a ostatní hodnoty sledovaných teplot se zmenší. V případě, že tok poteče opačným směrem, tedy směrem z T_6 k T_1 , potom budou výsledky přesně opačné (tedy tam, kde byl důsledek zvýšení teploty, teď bude snížení teploty a naopak).

3.2 *Nelineární ustálené úlohy*

Jedná se o ustálené úlohy s nekonstantní měrnou tepelnou vodivostí λ . To znamená, že v každé části materiálu působí jiná hodnota tepelné vodivosti λ , která je popsána právě její funkcí, závislou na teplotě. Obecný vzorec pro výpočet této sady úloh je dán vztahem (37). Tepelná vodivost λ je popsána rovnicí $\lambda = \lambda(T)$. Analytické řešení této rovnice je většinou velice komplikované a často takovou rovnici ani nelze analyticky řešit.

$$\Phi = \frac{\lambda(T) \cdot S}{d} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (37)$$

Úlohu lze ale řešit za určitých podmínek numericky. Důležitým krokem je diskretizace úlohy. Tedy rozdělit úlohu na jednotlivé kroky, pro které jsme schopni hodnotu měrné tepelné vodivosti λ numericky spočítat. K tomu, abychom úlohu mohli numericky řešit, je potřeba mít definované počáteční podmínky. Takže v úlohách máme danou hodnotu teploty T_0 a k ní odpovídající hodnotu měrné tepelné vodivosti λ_0 . Dalšími proměnnými figurujícími v úlohách jsou teplota T (teplota, pro kterou počítáme měrnou tepelnou vodivost λ) a koeficient strmosti A . Jedná se o ustálené úlohy a proto je hodnota tepelného toku Φ konstantní a rovná jednomu wattu. Vliv změny měrné tepelné vodivosti λ potom pozorujeme na grafu průběhu teploty T .

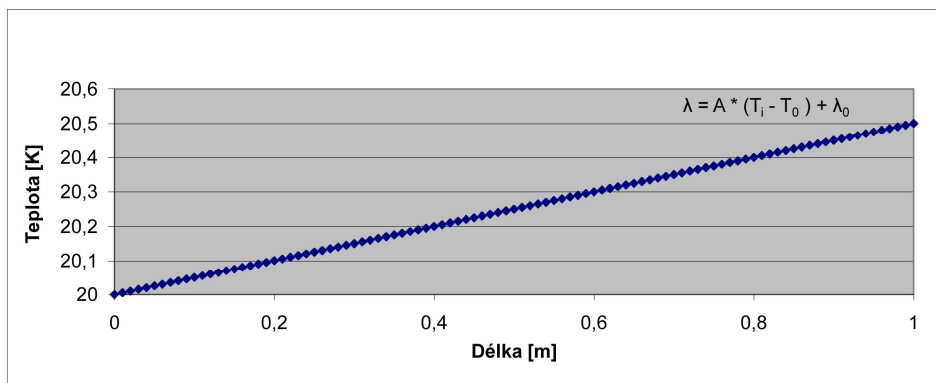
3.2.1 Úloha 1: Ověření nelineárního modelu

V této úloze si chceme ověřit, jestli můžeme tímto modelem počítat i úlohy, kdy měrná tepelná vodivost λ bude lineární. V této úloze je měrná tepelná vodivost λ dána rovnicí $\lambda = A \cdot (T - T_0) + \lambda_0$. Přičemž hodnota koeficientu strmosti A musí být nulová, abychom dosáhli toho, že funkce měrné tepelné vodivosti λ bude funkcí lineární nebo lépe řečeno konstantní.

Aby byla úloha numericky řešitelná, je důležité, abychom měli zadány počáteční podmínky. Ty jsou součástí vstupních hodnot, které vidíme v tabulce na obrázku (Obrázek 17). Z obrázku je také vidět, že průběh teploty je lineární, což je způsobeno konstantní funkcí měrné tepelné vodivosti λ . Tímto jsme tedy ověřili, že tento model umí počítat i úlohy, kdy je měrná tepelná vodivost λ lineární (konstantní) funkcí.

$$\text{Úloha: } \lambda = A \cdot (T_i - T_0) + \lambda_0$$

Vstupní hodnoty	
A = 0	K ⁻¹
T ₀ = 20	K
λ ₀ = 0,5	Wm ⁻¹ K ⁻¹
n = 100	
d ₀ = 0	m
d ₁ = 1	m
Φ = 1	W

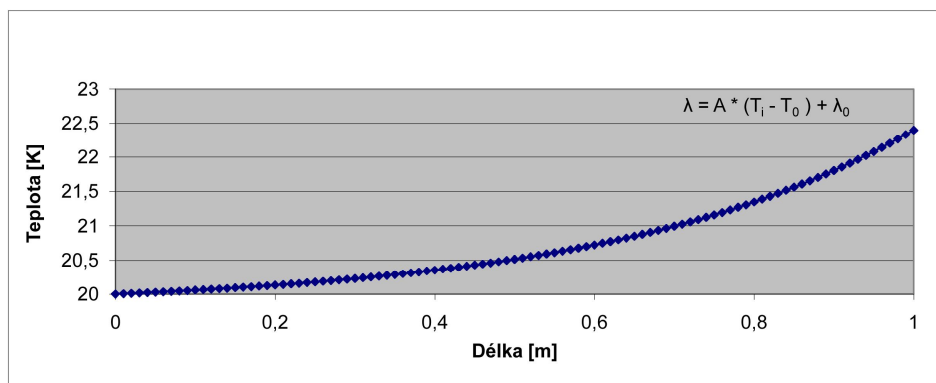


Obrázek 17: Úloha 1: Lineární funkce

3.2.2 Úloha 2: Dirichlet - Neumann

$$\text{Úloha: } \lambda = A \cdot (T_i - T_0) + \lambda_0$$

Vstupní hodnoty	
A = 2,6	K ⁻¹
T ₀ = 20	K
λ ₀ = 0,5	Wm ⁻¹ K ⁻¹
n = 100	
d ₀ = 0	m
d ₁ = 1	m
Φ = 1	W



Obrázek 18: Úloha 2: Dirichlet - Neumann

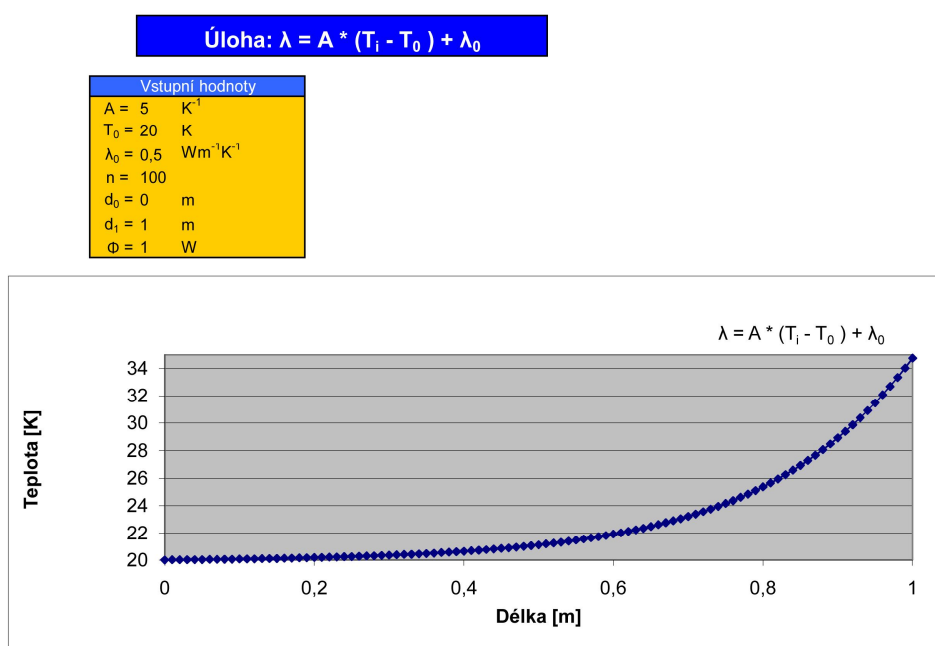
V této úloze je měrná tepelná vodivost λ dána stejnou rovnicí jako v předešlé úloze, tedy $\lambda = A \cdot (T - T_0) + \lambda_0$. Ale tady je hodnota koeficientu strmosti A nenulová a funkce měrné tepelné vodivosti λ je tedy funkcí nelineární.

Vstupních hodnoty vidíme v tabulce na obrázku (Obrázek 18). Z obrázku je také vidět, jak vypadá průběh teploty. Ta se mění velice plynule a pozvolna, což je

způsobeno malou hodnotou koeficientu strmosti A . Kdyby byla jeho hodnota ještě menší, potom by byla funkce téměř lineární.

Při diskretizaci je důležité navrhnout počet kroků tak, aby se úloha chovala co nejlépe, respektive co nejlépe popisovala realitu, ale zároveň, aby měla rozumné množství dat. Je jasné, že pro čím více kroků budeme úlohu počítat, tím přesnější budou výsledky, ale objem dat bude větší a výpočty tak budou pomalejší. Hodnota tepelné vodivosti λ je tady počítána pro $n + 1$ kroků, tedy pro 101 kroků. V průběhu funkce nejsou žádné neočekávané skoky, proto můžeme tvrdit, že počet kroků je dostatečný.

3.2.3 Úloha 3: Dirichlet - Neumann

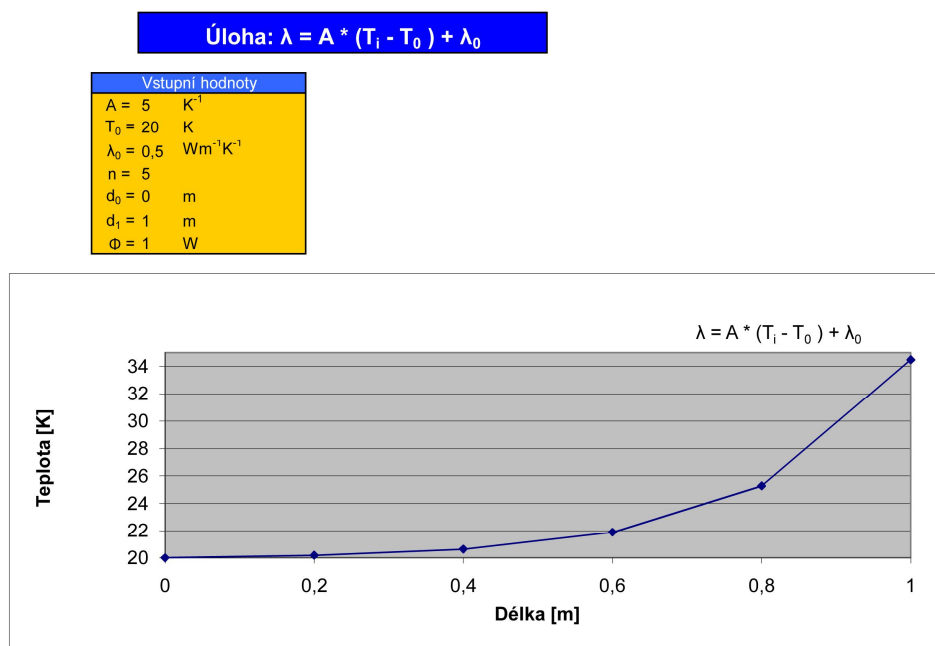


Obrázek 19: Úloha 3: Dirichlet - Neumann

V této úloze je měrná tepelná vodivost λ dána stejnou rovnicí jako v předešlé úloze, tedy $\lambda = A \cdot (T - T_0) + \lambda_0$. Vstupních hodnoty vidíme v tabulce na obrázku (Obrázek 19). Úloha se od té předešlé liší jen v hodnotě koeficientu strmosti A . Z obrázku je také vidět, jak vypadá průběh teploty. Ta se mění rychleji než v předchozí úloze, což je způsobeno hodnotou koeficientu strmosti A , která je téměř dvojnásobná. Je tedy jasné, že čím větší bude hodnota koeficientu strmosti A , tím rychleji bude teplota stoupat a tím bude graf její funkce „konvexnější“.

Hodnota tepelné vodivosti λ je tady počítána také pro $n + 1$ kroků, tedy pro 101 kroků. V průběhu funkce nejsou žádné neočekávané skoky, proto můžeme tvrdit, že počet kroků je dostatečný.

3.2.4 Úloha 4: Dirichlet - Neumann



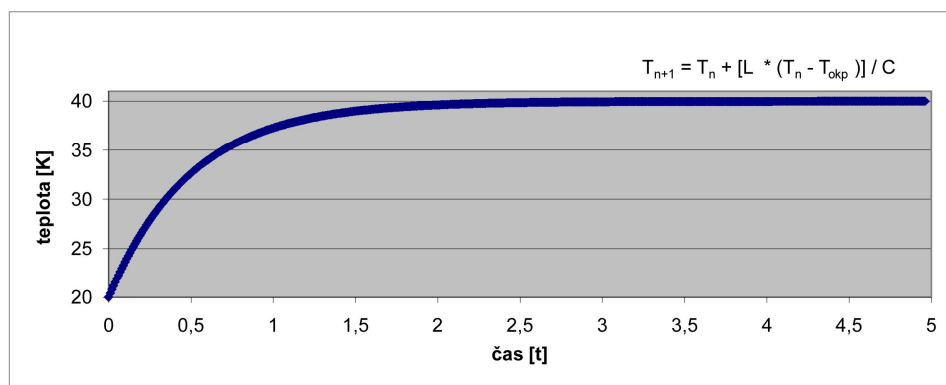
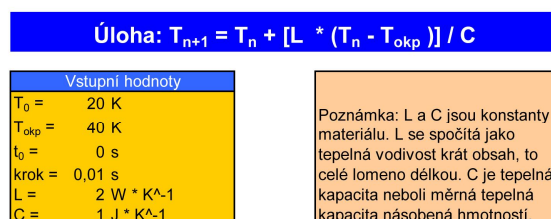
Obrázek 20: Úloha 4: Dirichlet - Neumann

V této úloze je měrná tepelná vodivost λ dána stejnou rovnicí jako v předešlé úloze, tedy $\lambda = A \cdot (T - T_0) + \lambda_0$. Vstupních hodnoty vidíme v tabulce na obrázku (Obrázek 20). Úloha se od té předešlé liší v počtu kroků, ve kterých byla řešena. Z obrázku je také vidět, jak vypadá průběh teploty.

Hodnota tepelné vodivosti λ je tady počítána pro $n + 1$ kroků, tedy pro 6 kroků. Už na první pohled je funkce „hranatější“ a tedy nepřesnější. Pro srovnání se můžeme také, kromě grafu, podívat na hodnotu teploty, na kterou funkce vystoupala. V předešlé úloze to bylo 34,741312 Kelvinů a v této 34,471712 Kelvinů. Je tedy vidět už poměrně značný rozdíl, který je způsoben právě diskretizací úlohy. Počet kroků tedy není dostatečný. V každé úloze je proto nutné zvážit, jakou odchylku budeme tolerovat.

3.3 Neustálená úloha

Jedná se o neustálenou úlohu, což znamená, že hodnoty některých proměnných se mění v závislosti na čase. To znamená, že v každém čase, který je zvolený krokem, jsou počítány ty veličiny, jejichž hodnoty se mění v závislosti na čase. Nemění se hodnoty okrajových podmínek, stejně tak hodnoty obou materiálových konstant L a C . Mění se tedy hodnoty teploty a tepelného toku. Obecný vzorec pro výpočet této úlohy je dán vztahem (6).

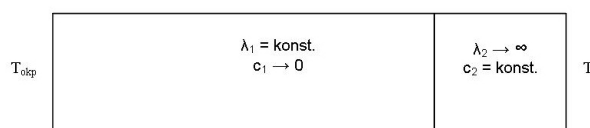


Obrázek 21: Neustálená úloha

Úlohu si můžeme představit jako 1D úlohu vedení tepla tyčí, kde teplota je dána na jednom konci počáteční podmínkou hodnotou teploty T_0 a na druhý konec přivedeme, v počátečním čase, stálý zdroj tepla, který ohřívá tento konec na hodnotu teploty T_{okp} . Tyč je po délce dokonale tepelně izolována. Potom je jasné, že se bude měnit v čase hodnota tepelného toku a hodnota teploty bude v čase stoupat až k hodnotě T_{okp} . Schéma úlohy je na obrázku (Obrázek 22). Změna teploty je popsána rovnicí (38). Přičemž T_{n+1} je hodnota teploty, kterou počítáme a T_n je hodnota teploty z předchozího kroku. Výsledek je prezentován graficky (graf funkce změny teploty) na obrázku (Obrázek 21). Na tomto obrázku také vidíme vstupní hodnoty.

$$T_{n+1} = T_n + \frac{L \cdot (T_n - T_{okp})}{C} \quad (38)$$

I tady je důležitá diskretizace úlohy. V této úloze se nezadá počet kroků, ale krok. Počítáme totiž tepelný tok Φ a teplotu T pro každý krok se znalostí předchozí hodnoty tepelného toku Φ a teploty T . Proto úlohu můžeme řešit jen tehdy, pokud známe počáteční podmínky. Úloha je řešena numericky do té doby, dokud se rozdíl teplot mezi dvěma po sobě jdoucími kroky nezmenší o 0,001 Kelvinu.



Obrázek 22: Schéma neustálené úlohy

4 Závěr

V této bakalářské práci jsem se zaměřil na dosud nepříliš popsanou problematiku, tedy především v českém jazyce. Hlavním úkolem mojí bakalářské práce bylo sjednotit značení a jednotky veličin figurujících v problematice transportu tepla a navrhnout sadu úloh s jejich vzorovými řešeními. Dále jsem měl popsat vzorové úlohy a jejich výsledky. Výsledky pak mohou sloužit jako podklady pro automatizované testování modelu ISERIT.

Seznámil jsem se s modelem ISERIT a s možnostmi automatizovaného testování zdrojového kódu v jazyce Java. Seznámil jsem se se základními úlohami řešenými modelem ISERIT a snažil jsem se pochopit teorii dané problematiky a pomocí získaných znalostí navrhnout vzorové úlohy.

Myslím si, že jsem vytvořil takové úlohy, které mohou pomoci lidem, kteří chtějí programovat termodynamické děje, s využitím numerických metod. Úlohy jsou vytvořeny jako podklady pro automatizované testování, pomocí porovnávání dosažených výsledků s výsledky vzorových úloh. Posouzení, zda se mi povedlo navrhnout ideální vzorové úlohy a správně je popsat, nechám na čtenářích této práce. Já osobně si myslím, že jsou úlohy popsány tak, aby se v nich vyznal i laik.

Seznam použité literatury

- [1] D. Frydrych: Stavba modelů pro řešení speciálních úloh, Habilitační práce, TUL, Liberec, 2007
- [2] Z. Plíva, J. Drábková: Metodika zpracování diplomových, bakalářských a vědeckých prací na FM TUL, TUL, Liberec, 2009
- [3] J. Hejhálek: Stavebnictví a interiér 2/2011, kapitola 3.2 Difúze a kondenzace vodní páry, Praha, 2001

Internetové zdroje

<http://java.vse.cz/pdf/JTestovani.pdf>

<http://ottp.fme.vutbr.cz/skripta/Termomechanika/teorie/T10-01.pdf>

<http://fo.cuni.cz/texty/texttz.pdf>

<http://cs.wikipedia.org/wiki/JUnit>

Obsah přiloženého CD

- Tato dokumentace ve formátu PDF
- Sada lineárních ustálených úloh ve formátu xls (Excel 2007)
- Výsledky nelineárních úloh ve formátu xls + zdrojové kódy v jazyce Java
- Výsledky neustálené úlohy ve formátu xls + zdrojové kódy v jazyce Java
- Převodník teplot ve formátu xls
- Použité obrázky