



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta strojní



Dynamika soustavy těles, aplikace na výukovou pomůcku

Bakalářská práce

Studijní program: B2301 – Strojní inženýrství

Studijní obor: 2301R000 – Strojní inženýrství

Autor práce: **Diana Gregorová**

Vedoucí práce: doc. Ing. Miroslav Šír, CSc.



ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Diana Gregorová**

Osobní číslo: **S13000055**

Studijní program: **B2301 Strojní inženýrství**

Studijní obor: **Strojní inženýrství**

Název tématu: **Dynamika soustavy těles, aplikace na výukovou pomůcku.**

Zadávací katedra: **Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Je dána soustava tří těles v rovině. Na tělese č. 1 (základní rám) je vytvořena rovinná drsná plocha, která má funkci jednostranné kinematické vazby pro dva body tělesa č. 2. Součástí tělesa 2 je stator rotačního motoru, jehož rotor je součástí tělesa 3. Těleso č. 3 je vzhledem k ose rotace nevyvážené, takže při jeho rotaci vzniknou dynamické síly, které uvedou celou soustavu do pohybu.

Práce bude obsahovat dvě podstatné části:

I. Matematický model soustavy v systému Maple, pomocí kterého se určí

- podmínky trvalého kontaktu mezi tělesy 1 a 2,
- kinematika pohybu tělesa 2 vzhledem k tělesu 1,
- parametry motoru

a to pro dva případy:

1. Úhlová rychlost relativní rotace 3/2 je konstantní,
2. Hnací moment z tělesa 2 na těleso 3 je konstantní.

II. Funkční vzorek soustavy sestavený ze stavebnice Lego Robotics.

Rozsah grafických prací: Podle potřeby, obrázky, tabulky, grafy.

Rozsah pracovní zprávy: 50 stran

Forma zpracování bakalářské práce: tištěná/elektronická

Seznam odborné literatury:

- [1] JULIŠ, K., O. TEPŘÍK a A. SLAVÍK: *Statika*. Praha: SNTL, 1987.
- [2] BRÁT, V., J. ROSENBERG a V. JÁČ: *Kinematika*. Praha: SNTL, 1987.
- [3] BROUSIL, J., J. SLAVÍK a V. ZEMAN: *Dynamika*. Praha: SNTL, 1989.
- [4] ŠÍR, M.: *Přednášky z Dynamiky*, LS 2014/2015.

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Miroslav Šír, CSc.

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

Datum zadání bakalářské práce: 18. listopadu 2015

Termín odevzdání bakalářské práce: 18. února 2017

prof. Dr. Ing. Petr Lenfeld
děkan



doc. Ing. Iva Petříková, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 1. března 2016

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum: 7. července 2016

Podpis: Gregorova

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce doc. Ing. Miroslavu Šírovi CSc. za odborné vedení, řadu cenných rad a věnovaný čas při zpracování této práce.

Abstrakt

Tato práce se zabývá návrhem didaktické pomůcky při řešení dynamiky soustavy těles a zároveň se snaží poukázat na spojitost teoretických výpočtů s praktickým experimentem. Jako demonstrační předmět byla použita soustava dvou těles, kde jedním z nich je rotující nevývažek.

V matematickém řešení dynamiky byly sestaveny rovnice rovnováhy, specifikace sil a kinematické rovnice. Samotná řešení a celkové výpočty byly provedeny pomocí softwaru Maple. Dále byl navrhnout a sestrojen fyzický model, se kterým byl uskutečněn reálný experiment.

V závěru byly výpočty porovnány s praktickým pokusem.

Klíčová slova:

didaktická pomůcka, dynamika, soustava těles, nevývažek, Maple

Abstract

This thesis describes the design of didactic aid in solving dynamics of bodies system and alongside it is trying to point to the continuity of theoretical calculations with practical experiment. As a demonstration object was used a system of two bodies, where one of them is a rotating imbalance.

The mathematical solution of dynamics was assembled equations of balance, specification forces and kinematic equations. Solutions and overall calculations were performed by using the software Maple. It was also designed and built a physical model. The model was used to practical experiment.

At the end the calculations were compared with the practical test.

Keywords:

didactic aid, dynamics, system of bodies, imbalance, Maple

Obsah

Seznam značení.....	8
1 Úvod.....	11
2 Cíl práce.....	12
3 Rešeršní část.....	13
3.1 Příklady z praxe	14
3.1.1 Vibrační desky, pěchy	14
3.1.2 Dopravní žlaby	14
4 Teoretická východiska	16
4.1 Princip uvolňování jednotlivých těles soustavy v rovině	16
4.2 Pasivní odpory.....	18
4.2.1 Smykové tření	18
4.2.2 Čepové tření.....	19
4.3 Dynamika tělesa v rovině	20
4.4 Posuvný pohyb tělesa.....	21
4.5 Rotační pohyb tělesa.....	23
4.6 Obecný rovinný pohyb tělesa	27
4.7 Dynamika rovinných soustav těles	27
4.7.1 Redukční metoda	28
4.7.2 Uvolňovací metoda	28
5 Matematický model	29
5.1 Dynamika soustavy	29
5.2 Určení jednotlivých charakteristik a parametrů	30
5.2.1 Charakteristiky tělesa 2	30
5.2.2 Charakteristiky tělesa 3	32
5.2.3 Stanovení koeficientu tření f	34
5.2.4 Parametry motoru EV3 Large	35
5.2.5 Kinematické schéma.....	38

5.2.6	Silové schéma	40
5.2.7	Rovnice dynamické rovnováhy	42
5.2.8	Specifikace sil	42
5.2.9	Kinematika	43
5.3	Řešení + výsledky	43
5.3.1	Úhlová rychlost relativní rotace $3/2$ je konstantní	44
5.3.2	Hnací moment tělesa 2 na těleso 3 je konstantní.....	47
5.3.3	Řešení při známé momentové charakteristice	51
6	Funkční model soustavy	57
6.1	Popis modelu	57
6.2	Praktický experiment	57
7	Závěr	59
	Seznam použité literatury	60
	Seznam obrázků.....	62
	Seznam grafů	63
	Seznam tabulek.....	63
	Seznam příloh	63

Seznam značení

m	hmotnost	[kg]
m_2	hmotnost tělesa 2	[kg]
m_3	hmotnost tělesa 3	[kg]
V	objem	[m ³]
ρ	hustota	[kg.m ⁻³]
s	statický moment tělesa	[kg.m]
J_z	moment setrvačnosti k ose z	[kg.m ²]
J_s	moment setrvačnosti k ose otáčení	[kg.m ²]
J_L	moment setrvačnosti k počátku s.s. L	[kg.m ²]
D_{xy}	deviační moment k souřadnicovým osám x a y	[kg.m ²]
t	čas	[s]
u	poloha, dráha	[m]
v	rychlost	[m.s ⁻¹]
a	zrychlení	[m.s ⁻²]
a_t	tečné zrychlení	[m.s ⁻²]
a_n	normálové zrychlení	[m.s ⁻²]
g	gravitační zrychlení	[m.s ⁻²]
r	poloměr	[m]
φ	polohový úhel	[rad]
ω	úhlová rychlost	[rad.s ⁻¹]
α	úhlové zrychlení	[rad.s ⁻²]
i	počet stupňů volnosti	[-]
n	otáčky	[ot/min]
x_T, y_T	souřadnice těžiště	[m]

h	výška k bodu otáčení nevývažku	[m]
l	délka předmětu	[m]
b	délka k bodu otáčení nevývažku	[m]
D	doplňková dynamická síla	[N]
F	síla	[N]
F_G	tíhová síla	[N]
F_T	třecí síla	[N]
G_2	gravitační síla tělesa 2	[N]
G_3	gravitační síla tělesa 3	[N]
N	normálová síla	[N]
N_A, N_B	normálové síly v bodech A a B	[N]
R_x, R_y	reakce v uložení	[N]
T	tečná síla dynamická	[N]
T_2	těžiště tělesa 2	[-]
T_3	těžiště tělesa 3	[-]
T_A, T_B	třecí síly v bodech A a B	[N]
O	odstředivá síla	[N]
M	moment	[N.m]
M_{ξ}	moment čepového tření	[N.m]
M_h	hnací moment	[N.m]
M_D	dynamický moment	[N.m]
M_v	moment valivého odporu	[N.m]
f	koeficient smykového tření	[-]
f_{ξ}	koeficient čepového tření	[-]
f_s	statický koeficient smykového tření	[-]
f_d	dynamický koeficient smykového tření	[-]

r_c	poloměr čepu	[m]
e	rameno valivého odporu/excentricita	[m]
p	hybnost tělesa	[kg.m.s ⁻¹]
b	moment hybnosti tělesa	[kg.m ² .s ⁻¹]
P, Q	koefficienty momentové charakteristiky	[-]

1 Úvod

Dynamika je třetím oborem z mechaniky pevných těles: statika – kinematika - dynamika. V rámci dynamiky studujeme hlavně pohyby a vzájemné interakce mezi tuhými tělesy pohybujícími se jako celek s nenulovým zrychlením. Pro její aplikace je tedy nezbytné kromě zvládnutí popisu silových účinků při jejich působení na tělesa umět popsat i pohybové stavy těles tj. kinematiku.

Základní úlohou dynamiky je nalezení vztahů mezi působícími silovými účinky a vyvolanými pohyby tj. sestavení pohybových rovnic. Základními pojmy jsou prostor, čas, hmotnost a síla.

Dynamika se obecně řadí mezi náročné předměty ve výuce. Tato práce má co nejvíce přiblížit teoretickou výuku s názornou praktickou pomůckou.

2 Cíl práce

Při výuce kinematiky a dynamiky v bakalářském studiu jsou studenti vystaveni požadavku řešit úlohy, které se poněkud odlišují od úloh, které znají z jiných předmětů. Odlišnost spočívá v tom, že výsledkem výpočtů jsou většinou funkce (ve smyslu matematickém) místo číselných hodnot. Takové funkce pak reprezentují pohyb studovaných fyzikálních objektů, jako jsou hmotný bod, soustava hmotných bodů, těleso nebo soustava těles. Potíž bývá v tom, že pod těmito funkcemi je třeba představit si konkrétní pohyb. Proto mají velký význam názorné didaktické pomůcky. Takové pomůcky ovšem nejsou běžně k dispozici.

Mým cílem je proto - ve smyslu zadání BP - vytvořit pomůcku k ilustraci dynamiky soustav těles postupem od matematického modelu k fyzické realizaci. Jako inspirace slouží hračka nazývaná HexBug, která se však jako didaktická pomůcka nehodí vzhledem ke svým rozměrům a parametrům pohybu.

3 Rešeršní část

V dnešní době se ve školství při výuce různých předmětů čím dál více využívá různých didaktických pomůcek. Jsou to objekty či předměty zprostředkující nebo napodobující realitu, napomáhající větší názornosti nebo usnadňující výuku.

Na trhu lze pro běžné vyučující předměty získat velké množství didaktických pomůcek, avšak pro specifická zaměření a složitější výuku, jako je například právě dynamika, je těchto pomůcek velký nedostatek. Často jsou nahrazovány předměty, které nemají s výukou nic společného, například hračkami.

Při výuce dynamiky byla v našem případě pro řešení dynamiky soustav těles použita hračka HexBug. Jako názorná pomůcka není špatná, ale je nedostačující, a to hned z několika důvodů. Hračka je velmi malá, prakticky do ní není vidět a její parametry jsou pro názornost výuky nevhodné. Z těchto důvodů vznikla tato práce.

Snažím se vytvořit takovou didaktickou pomůcku, která svou velikostí, parametry a názorností přiblíží výuku řešení soustavy těles v dynamice, zároveň je zachován princip hračky HexBug. Parametry jsem upravila tak, aby didaktická pomůcka byla co nejvíce názorná a zároveň nebyla složitá pro pochopení soustavy těles a následného vytvoření matematického modelu. Jak se později ukáže, tyto předměty pracují s nevývažkem a suchým třením.



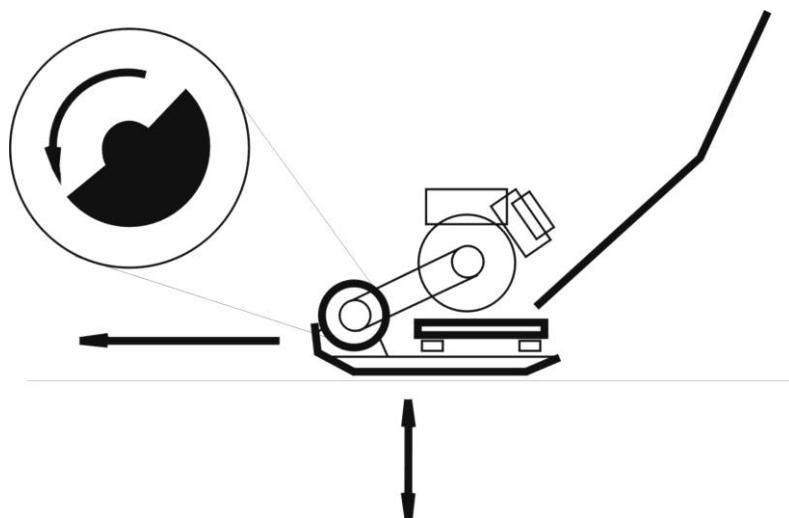
Obrázek 1: Hračka HexBug [1]

3.1 Příklady z praxe

S principem rotujícího nevývažku nebo pohybem tělesa po podložce, kde se uvažuje se suchým třením, se můžeme setkat i v praktickém životě, například: vibrační desky, pěchy, průmyslové vibrační dopravníky, žlaby.

3.1.1 Vibrační desky, pěchy

Hutnická technika je dnes nedílnou součástí procesu stavebních prací. Zde se stále větší měrou uplatňují čistě vibrační stroje: vibrační desky, pěchy atd. Tyto stroje pracují oproti našemu modelu s výrazně jinými parametry (hmotnost, otáčky,...), avšak na stejném principu (rotace nevývažku). Vibrační desky se používají pro hutnění zemin (podkladní vrstvy staveb), hutnění živců (např. při opravách silnic) a jsou nezastupitelné při pokládce zámkové dlažby. [2]



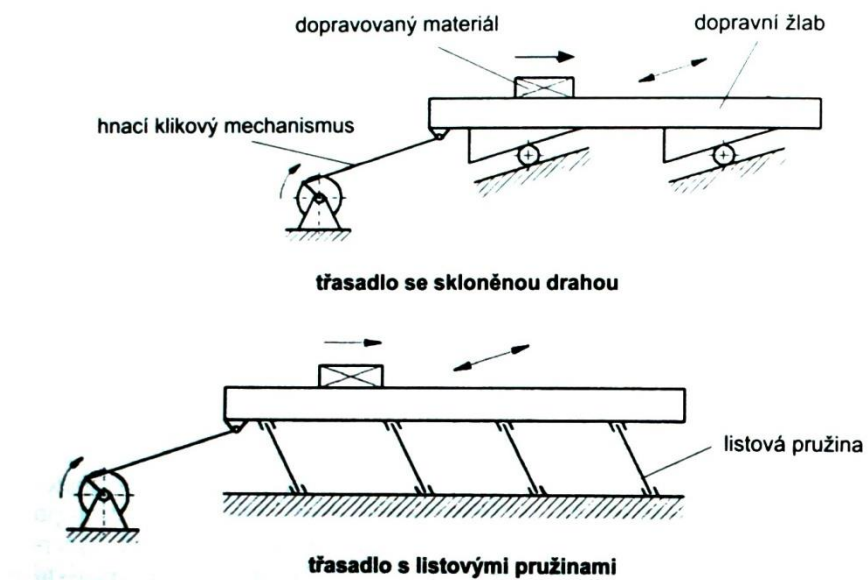
Obrázek 2: Schéma jednosměrné vibrační desky [2]

3.1.2 Dopravní žlaby

Vibrační dopravníky jsou mechanické dopravníky pro dopravu sypkých materiálů využívající k přemísťování setrvačných sil a suchého tření působících na částice dopravovaného materiálu.

Impulsní dopravníky – plechový žlab konající nerovnoměrný postupný vratný pohyb vyvolaný pohonem dopravníku. Částice materiálu vlivem své kinetické energie kloužou po žlabu až do okamžiku, kdy se kinetická energie účinkem tření o žlab

vyčerpá natolik, že se rychlosti žlabu a materiálu vyrovnají, tím jejich relativní pohyb končí. [3]



Obrázek 3: Schematický obrázek dopravního žlabu [3]

4 Teoretická východiska

V této práci se omezíme pouze na rovinný případ soustavy těles, neboť je náš předmět symetrický a není tudíž nutné vyšetřovat případ jako prostorový.

4.1 Princip uvolňování jednotlivých těles soustavy v rovině

Základem je třetí Newtonův zákon akce a reakce: „Dvě tělesa na sebe navzájem působí stejně velkými silami, ale opačného smyslu.“. Celý princip spočívá v rozdělení soustavy na jednotlivá tělesa a nahrazení veškerých vazeb silovými účinky a momenty.

Těleso v rovině má 3 stupně volnosti ($i=3$) – dva posuvy ve směru souřadnicových os a rotace. U vázaného tělesa se počet stupňů volnosti snižuje podle typu vazeb. Rovnice vazbové závislosti je $i = 3 - n$, kde n je počet stupňů volnosti odnímaný vazbami. [4]

Rozlišujeme vazby ideální a vazby reálné, přičemž u vazeb ideálních uvažujeme povrchy těles dokonale hladké, tudíž pasivní odpory zanedbáváme.

V dynamice rovinných soustav můžeme vazby dále dělit na obecnou, rotační, posuvnou a valivou.

Obecná vazba - je tvořena dvěma dotýkajícími se povrchy, pohybujícími se vůči sobě tak, že v bodě dotyku dochází k vzájemnému prokluzu. Vazba znemožňuje posuv kolmo ke společné tečně obou povrchů, umožňuje rotaci a posuv ve směru společné tečny. Tyto pohyby jsou na sobě nezávislé.

Rotační vazba - umožňuje vzájemné natáčení těles vůči sobě, neumožňuje posuv ani v jednom směru.

Posuvná vazba - umožňuje posuv pouze v určitém směru a neumožňuje rotaci.

Valivá vazba - je tvořena dvěma povrchy ve vzájemném kontaktu (dotyku), přičemž nedochází k prokluzu mezi povrchy. Povrchy mohou mít libovolný tvar. [5]

Následující tabulka 1 znázorňuje principy uvolňování soustavy těles. Vazby jsou nahrazeny silovými reakcemi, případně momenty. Je také uveden rozdíl mezi uvolněním ideálním a reálném, kde v případě reálném máme vztahy týkající se pasivních odporů.

Tabulka 1: Principy uvolňování soustavy těles [6]

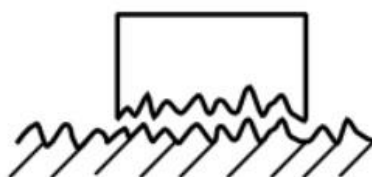
Vazba		Schéma	Uvolnění ideální	Uvolnění reálné	Pasivní odpory
Obecná (-1°)	bod / křivka				$\vec{T} = - \vec{N} f \left(\frac{\vec{v}}{ \vec{v} } \right)$
	křivka / křivka				
	křivka / bod				
Rotační (-2°)	bod / bod				$M_{\delta} = r_{\delta} f_{\delta} \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$
Posuvná (-2°)	přímka / přímka				
Valivá (-2°)	křivka / křivka				$M_v = Ne$
N – normálová síla T – tečná síla f – součinitel smykového tření Rx, Ry – reakce Mδ – moment čepového tření; rδ – poloměr čepu; fδ – koeficient čepového tření Mv – moment valivého odporu, e – rameno valivého odporu M – moment nahrazující posunutí normálové síly v – rychlost ω – úhlová rychlost					

4.2 Pasivní odpory

Ve své práci uvažuji pouze dva druhy pasivních odporů – smykové a čepové tření.

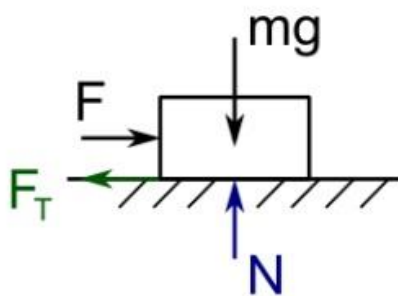
4.2.1 Smykové tření

Smykové tření je základním druhem pasivního odporu. Vzniká při dotyku dvou těles. Je dáno nerovnostmi styčných ploch, které svými výstupky do sebe zasahují a pohybu brání, proto je smykové tření především závislé na druhu materiálu, na stavu styčných ploch a je také jiné za klidu a jiné za pohybu.



Obrázek 4: Nerovnosti styčných ploch [7]

Smykové tření se projevuje tím, že normálová složka reakce N je provázena v místě styku tečnou složkou o velikosti $T = fN$, kde f je součinitel smykového tření. Tato tečná složka působí proti smyslu pohybu uvažovaného tělesa vzhledem k druhému tělesu v místě styku.



Obrázek 5: Působící síly při smykové tření [7]

Rozlišujeme statické tření za klidu a dynamické tření za pohybu. To znamená, že na těleso, které je v klidu, je potřeba vyvinout větší sílu F tak, aby došlo k odtržení od podložky a dalo se do pohybu.

Výsledná třecí síla je tedy

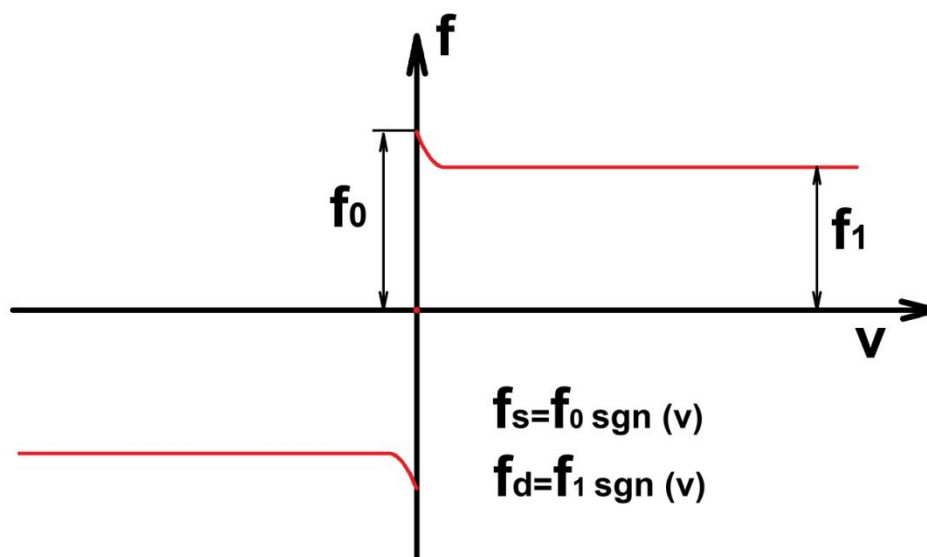
$$F_T = N f_s, \quad (1)$$

v případě statického tření, kde f_s je statický koeficient smykového tření a v případě dynamického tření je

$$F_T = N f_d, \quad (2)$$

kde f_d je statický koeficient smykového tření.

Graf 1 znázorňuje závislost smykového tření na rychlosti. Je na něm vidět přechodová oblast, kdy se těleso odtrhlo od podložky a nadále ustálení hodnoty.



Graf 1: Závislost smykového tření na rychlosti

4.2.2 Čepové tření

Vliv tření na otočný čep v radiálním ložisku se vyjadřuje tak, že se zavádí moment čepového tření $M_{\check{c}}$, přesněji dvojice sil od čepového tření o momentu $M_{\check{c}}$, působící proti smyslu pohybu čepu vzhledem k pánvi. [8]

Moment čepového tření $M_{\check{c}}$ vyjadřujeme vztahem (viz tabulka 1)

$$M_{\check{c}} = r_{\check{c}} f_{\check{c}} \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (3)$$

Jelikož je v našem případě čepový moment zohledněn v momentové charakteristice motoru, není potřeba s ním dále počítat.

4.3 Dynamika tělesa v rovině

Dokonale tuhé těleso je těleso, které pod působením vnějších sil nemění svůj tvar ani velikost. [6]

Hmotové vlastnosti tělesa:

- Nultého řádu

- Celková hmotnost tělesa

$$m = \int_{(m)} dm \quad (4)$$

- Hustota tělesa

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (5)$$

- Prvního řádu

- Statický moment tělesa

$$\vec{s} = \int_{(m)} \vec{r} dm = s_{yz} + s_{zx} = \int_{(m)} x dm \vec{i} + \int_{(m)} y dm \vec{j} \quad (6)$$

- Těžiště

$$\vec{r}_s = \frac{\vec{s}}{m} = \frac{s_{yz}}{m} \vec{i} + \frac{s_{zx}}{m} \vec{j} \quad (7)$$

- Druhého řádu

- Moment setrvačnosti k ose z (k ose otáčení)

$$J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm \quad (8)$$

- k počátku L souřadnicového systému

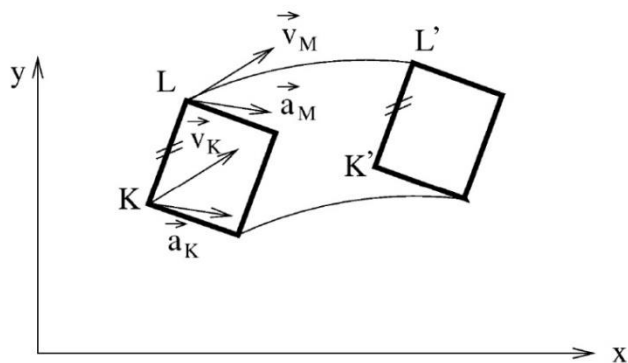
$$J_L = \int_{(m)} r^2 dm \quad (9)$$

- Deviační moment k osám x a y

$$D_{xy} = \int_{(m)} xy dm = D_{yx} \quad (10)$$

4.4 Posuvný pohyb tělesa

Těleso koná posuvný neboli translační pohyb, jestliže kterákoliv jeho přímka, např. přímka KL v obr. 6, zachovává v prostoru svůj směr. Důsledkem toho je, že všechny body tělesa mají v témže čase stejnou rychlost a stejné zrychlení.



Obrázek 6: Posuvný pohyb tělesa [9]

Trajektorie všech bodů jsou vzájemně posunuté křivky. Posuvný pohyb tělesa stačí proto vyšetřovat jako pohyb některého jeho bodu (např. těžiště), který pak charakterizují tři veličiny:

Dráha

$$u \text{ [m]}$$

Rychlost

$$\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt} \text{ [m.s}^{-1}\text{]} \quad (11)$$

Zrychlení

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = \vec{v} \frac{d\vec{v}}{d\vec{u}} \text{ [m.s}^{-2}\text{]} \quad (12)$$

Pohybové rovnice tělesa s posuvným pohybem stanovíme použitím věty o změně hybnosti a o změně momentu hybnosti.

Základní tvar věty o změně hybnosti je

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (13)$$

kde $\vec{p}$ je hybnost tělesa, t je čas a $\vec{F}_i, i = 1, 2, \dots, n$ jsou působící síly, akční a reakční. Protože hybnost tělesa je

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (14)$$

kde m je jeho celková hmotnost, dostáváme dosazením do (13) první Newtonovu pohybovou rovnici

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (15)$$

Zavedením doplňkové dynamické síly

$$\vec{D} = -m\vec{a} \quad (16)$$

dostáváme pohybovou rovnici (15) ve tvaru d'Alembertově

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{D} = \vec{0} \quad (17)$$

Základní tvar věty o změně momentu hybnosti je

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \quad (18)$$

kde $\vec{b}$ je moment hybnosti tělesa a $\vec{r}_i, i = 1, 2, \dots, n$ jsou polohové vektory působišť jednotlivých sil. Moment hybnosti tělesa je definován jako

$$\vec{b} = \int_{(m)} \vec{r} \times \vec{v} dm, \quad (19)$$

přičemž rychlost $\vec{v}$ každého bodu tělesa s posuvným pohybem je stejná. Můžeme tedy napsat

$$\vec{b} = \int_{(m)} \vec{r} dm \times \vec{v} = \vec{r}_s \times m\vec{v}, \quad (20)$$

kde

$$\vec{r}_s = \frac{\int \vec{r} dm}{m} \quad (21)$$

je polohový vektor těžiště tělesa.

Derivace na levé straně výrazu je tedy

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d\vec{r}_s}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r}_s \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_s \times m\vec{v} + \vec{r}_s \times m\vec{a} = \vec{r}_s \times m\vec{a}, \quad (22)$$

protože vektorový součin

$$\vec{v}_s \times m\vec{v} = m(\vec{v}_s \times \vec{v}) = \vec{0}. \quad (23)$$

Dosazením (22) do (18) dostáváme druhou Newtonovu pohybovou rovnici pro těleso a s posuvným pohybem ve tvaru

$$\vec{r}_s \times m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (23)$$

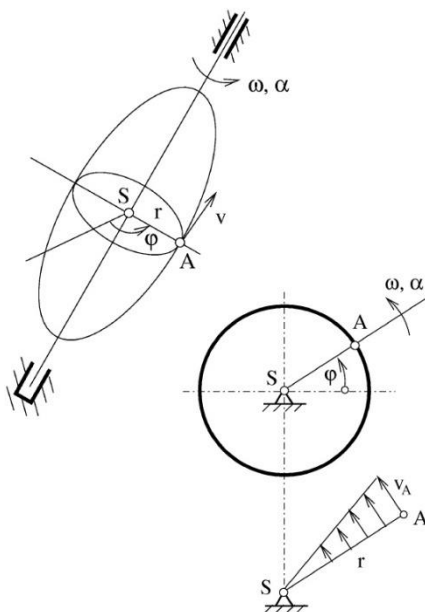
Následně zavedením doplňkové dynamické síly podle (16) dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_s \times \vec{D} = \vec{0}, \quad (24)$$

což je druhá pohybová rovnice posuvného pohybu tělesa ve tvaru d'Alembertově, ze které mj. vyplývá, že působištem dynamické síly $\vec{D}$ je těžiště tělesa.

4.5 Rotační pohyb tělesa

Při rotačním pohybu tělesa se všechny body pohybují po kružnicích se středem na ose rotace. Úhlová rychlost ω a úhlové zrychlení α všech bodů je stejné. [9]



Obrázek 7: Rotační pohyb tělesa [9]

Rotační pohyb tělesa je charakterizován následujícími kinematickými rovnicemi

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (25)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (26)$$

$$v_A = r\omega \quad (27)$$

$$a_{A_t} = r\alpha \quad (28)$$

$$a_{A_n} = r\omega^2, \quad (29)$$

kde:	φ	...polohový úhel [rad]
	ω	...úhlová rychlost [rad.s ⁻¹]
	α	...úhlové zrychlení [rad.s ⁻²]
	t	...čas [t]

r	...poloměr [m]
v_A	...obvodová rychlost v bodě A [m.s ⁻¹]
a_{At}	...tečné zrychlení v bodě A [m.s ⁻²]
a_{An}	...normálové zrychlení v bodě A [m.s ⁻²]

Pohybové rovnice tělesa s rotačním pohybem stanovíme použitím věty o změně hybnosti a o změně momentu hybnosti.

Základní tvar věty o změně hybnosti je

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (30)$$

kde $\vec{p}$ je hybnost tělesa, t je čas a $\vec{F}_i, i = 1, 2, \dots, n$ jsou působící síly, akční a reakční. Protože hybnost tělesa je

$$\vec{p} = m\vec{\omega} \times \vec{r} = m\vec{v}_A, \quad (31)$$

kde m je jeho celková hmotnost a v_A je obvodová rychlost v bodě A, dostáváme dosazením do (30) první Newtonovu pohybovou rovnici

$$m\vec{a}_A = m\vec{a}_{At} + m\vec{a}_{An} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (32)$$

kde a_{At} je tečné zrychlení v bodě A a a_{An} je normálové zrychlení v bodě A.

Základní tvar věty o změně momentu hybnosti je

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \quad (33)$$

kde $\vec{b}$ je moment hybnosti tělesa a $\vec{r}_i, i = 1, 2, \dots, n$ jsou polohové vektory působišť jednotlivých sil. Moment hybnosti tělesa je definován jako

$$\vec{b} = \int_{(m)} \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_{(m)} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \int_{(m)} \vec{\omega} r^2 dm = J_s \vec{\omega}, \quad (34)$$

tzn., že moment hybnosti rotujícího tělesa k ose otáčení je dán součinem momentu setrvačnosti J_s tělesa k této ose a okamžité úhlové rychlosti. Časová změna momentu hybnosti pak je dána součtem momentů vnějších sil k této ose.

Napíšeme-li

$$\frac{d}{dt} J_s \vec{\omega} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_D, \quad (35)$$

kde M_D je dynamický moment, pak

$$J_s \vec{\alpha} = \vec{M}_D \quad (36)$$

je druhá pohybová rovnice rotujícího tělesa, kde $\vec{\alpha}$ je okamžité úhlové zrychlení tělesa a J_s je moment setrvačnosti tělesa k bodu otáčení. (Stále mějme na paměti, že bereme v potaz pouze rovinný případ.)

Následně podle d'Alemberta můžeme psát

$$\vec{D} = -m\vec{a}_A \quad (37)$$

$$\vec{D} = \vec{O} + \vec{T}, \quad (38)$$

pak

$$-m\vec{a}_t = \vec{T} = m\vec{r} \times \vec{\alpha} \quad (39)$$

$$-m\vec{a}_n = \vec{O} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (40)$$

kde T je tečná síla dynamická a O je odstředivá síla.

Dále můžeme psát d'Alembertovy pohybové rovnice ve vektorovém tvaru

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{T} + \vec{O} = \vec{0} \quad (41)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \times \vec{r}_i + \vec{M}_D = \vec{0}. \quad (42)$$

Velikost tečné síly dynamické a síly odstředivé a dynamického momentu je

$$T = me\alpha \quad (43)$$

$$O = me\omega^2 \quad (44)$$

$$M_D = -J_s \alpha, \quad (45)$$

kde e je excentricita. [6]

4.6 Obecný rovinný pohyb tělesa

Při obecném pohybu jsou drahami jednotlivých bodů tělesa obecné křivky. Pokud tyto křivky leží v navzájem rovnoběžných rovinách, vykonává těleso pohyb rovinný. Do obecného pohybu patří jako zvláštní případy pohyb posuvný a pohyb rotační. Aby šlo skutečně o rovinnou úlohu, je třeba, aby těleso mělo rovinu souměrnosti a zatěžující síly byly rozděleny souměrně vzhledem k této rovině, v níž se rovněž děje pohyb. [10]

Dynamiku obecného rovinného pohybu neřešíme přímo, nýbrž nejčastěji metodou základního rozkladu na pohyb posuvný (unášivý) a pohyb rotační (relativní).

Při základním rozkladu bodu platí rychlost libovolného bodu je součtem rychlostí unášivého a relativního pohybu

$$\vec{v} = \vec{v}_{un} + \vec{v}_{rel}. \quad (46)$$

Zrychlení libovolného bodu je součtem zrychlení unášivého a relativního pohybu

$$\vec{a} = \vec{a}_{un} + \vec{a}_{rel} \quad (47)$$

4.7 Dynamika rovinných soustav těles

Z hlediska aplikací probírané látky patří dynamika soustav těles k nejdůležitějším částem dynamiky strojních oborů. Po teoretické stránce se při jejich řešení používá principů a metod z dynamiky soustav bodů, posuvného, rotačního a obecného pohybu tělesa.

Soustavy těles představují obecně složitou mechanickou soustavu. Je charakterizována spojitým rozložením hmot jednotlivých členů, jejich pružností, složitou soustavou pasivních odporů, hnacími a odporovými (technologickými) silovými účinky apod.

Rovinná soustava obsahuje tělesa, která konají pohyb v téže rovině.

4.7.1 Redukční metoda

Při řešení vycházíme z jednoho členu soustavy, tzv. redukčního členu, na který redukuje podle jistých principů hmoty všech členů a pracovní silové účinky (síly, dvojice).

Redukční metoda je vhodná k řešení soustav těles s jedním stupněm volnosti a soustav bez pasivních odporů.

4.7.2 Uvolňovací metoda

Při vlastním řešení postupujeme takto: Jednotlivá tělesa soustavy uvolníme od rámu připojením vnějších reakcí a vzájemně od sebe uvažováním vnitřních reakcí. Pro takto uvolněná tělesa napíšeme pohybové rovnice, jejichž konkrétní tvar závisí na tom, jaký pohyb těleso koná (posuvný, rotační, obecný). K pohybovým rovnicím připojíme další podmínky, tj. kinematické rovnice (vyjadřující vztah mezi kinematickými veličinami jednotlivých bodů a členů), dále statické podmínky (vztahy pro pasivní odpory) resp. jiné závislosti tak, aby soustava byla řešitelná.

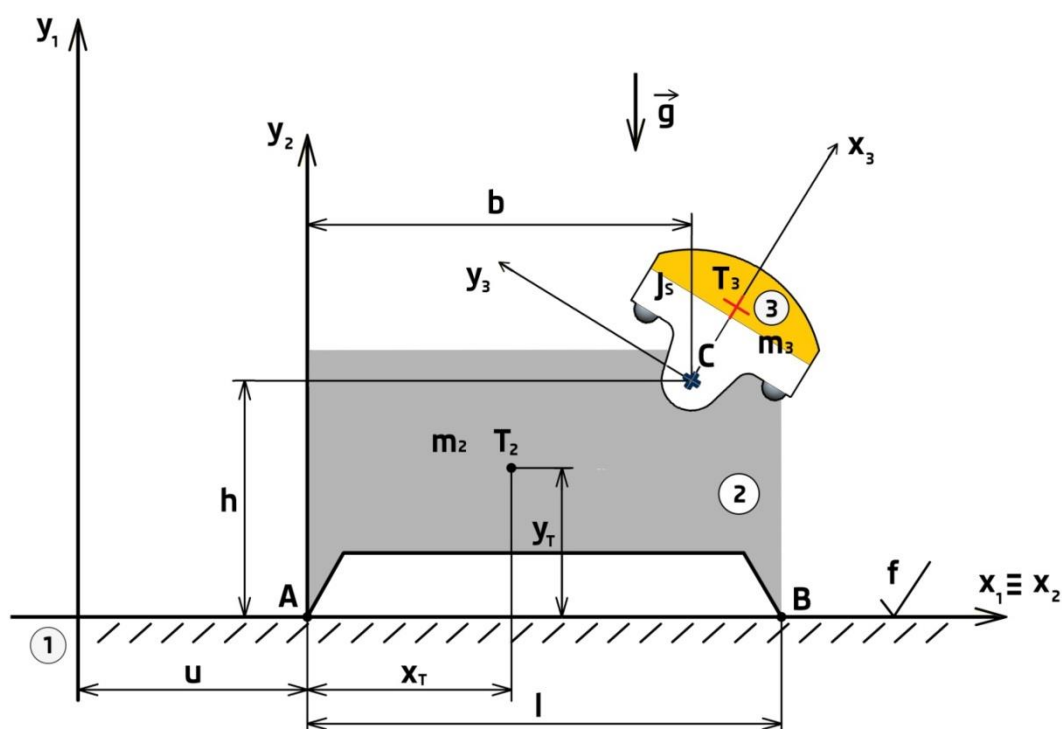
Použijeme d'Alembertova principu tak, že pro jednotlivá uvolněná tělesa napíšeme podmínky rovnováhy všech akčních, reakčních a dynamických silových účinků. Pro soustavu s n -členy tak získáme soustavu $3(n-1)$ rovnic dynamické rovnováhy, kterou doplníme dalšími rovnicemi podle zadání problému.

Výsledná soustava je algebro-diferenciální tzn. obsahuje jak algebraické, tak diferenciální rovnice. V jednodušších případech lze takovou soustavu převést na soustavu hlavních (vlastních) diferenciálních rovnic pro řešení kinematických veličin soustavy a na algebraickou soustavu pro určení reakčních silových účinků a dalších neznámých. Hlavních (vlastních) pohybových rovnic je tolik, kolik je počet stupňů volnosti soustavy. [11]

5 Matematický model

5.1 Dynamika soustavy

Demonstrační předmět je popsán ve třech systémech. Základní rám 1 je popsán souřadnicovým systémem x_1, y_1 . Samotný předmět se pak skládá z tělesa 2 a tělesa 3, popsanými souřadnicovými systémy x_2, y_2 a x_3, y_3 . Těleso 2 je hlavní část demonstračního předmětu, ve kterém se nachází motor a dotýká se základního rámu nožičkami v bodech A a B . Je popsáno hmotností m_2 , polohou těžiště T_2 , které je potřeba určit, a celkovými rozměry. Těleso 3 představuje excentr s nevývažkem. Je popsáno hmotností m_3 a celkovými rozměry. Polohu těžiště T_3 , polohu středu otáčení (bod C) a moment setrvačnosti J_s je třeba určit. V neposlední řadě je také potřeba určit koeficient tření f mezi demonstračním předmětem a základním rámem (podložkou).



Obrázek 8: Dynamické schéma soustavy

Naměřené hodnoty jsou:

$$m_2 = 0.106 \text{ kg}, m_3 = 0.098 \text{ kg}, \quad l = 0.128 \text{ m}, b = 0.106 \text{ m}, h = 0.068 \text{ m}$$

5.2 Určení jednotlivých charakteristik a parametrů

5.2.1 Charakteristiky tělesa 2

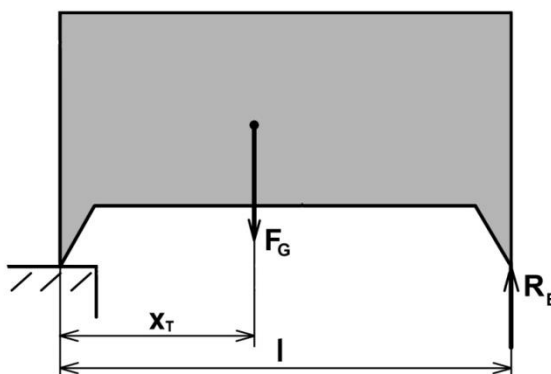
Pro matematický model je potřeba určit polohu těžiště. K tomuto bodu se vážou některé z působících sil na těleso.

Stanovení polohy těžiště T_2

Těžiště T_2 jsem stanovila pomocí vážení s podpěrou. Nejprve jsem si zvažila těleso 2 celé, jehož hmotnost je $m_2 = 0,106 \text{ kg}$. Následně jsem zjišťovala polohu těžiště ve směru osy x tak, že jsem předmět z jedné strany postavila na váhu a z druhé strany podepřela. Bylo nutné zachování předmětu ve vodorovné rovnováze. Ze sestaveného schématu (viz obrázek 9) můžeme pomocí momentové rovnice

$$-F_G x_T + R_B l = 0, \quad (48)$$

která se váže k bodu, kde je těleso podepřeno. F_G je tíhová síla a R_B je reakce v bodě B .



Obrázek 9: Schéma zjišťování polohy těžiště v ose x

Po dosazení do rovnice (48) a následnému vytknutí x_T , můžeme vypočítat polohu těžiště ve směru osy x

$$-m_2 g x_T + m_B g l = 0 \quad (49)$$

$$x_T = \frac{m_B l}{m_2}. \quad (50)$$

Pokud je hmotnost $m_B = 0,04571 \text{ kg}$, pak

$$x_T = \frac{0,04571 \cdot 0,128}{0,106} = 0,05519 \text{ [m]}. \quad (51)$$

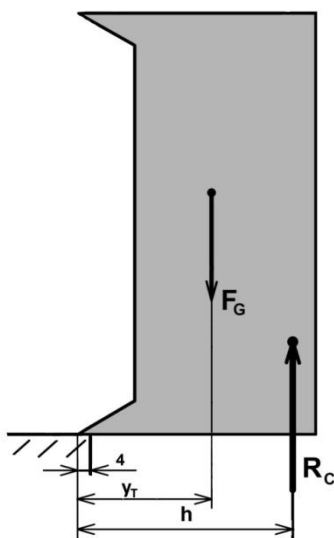


Obrázek 10: Určování polohy těžiště v ose x

Při zjišťování polohy těžiště ve směru osy y jsem postupovala stejným způsobem. Ze sestaveného schématu (viz obrázek 11) můžeme pomocí momentové rovnice

$$-F_G(y_T - 4) + R_C(h - 4) = 0, \quad (52)$$

která se váže k bodu, kde je těleso podepřeno. R_C je reakce v bodě C.



Obrázek 11: Schéma zjišťování polohy těžiště v ose y

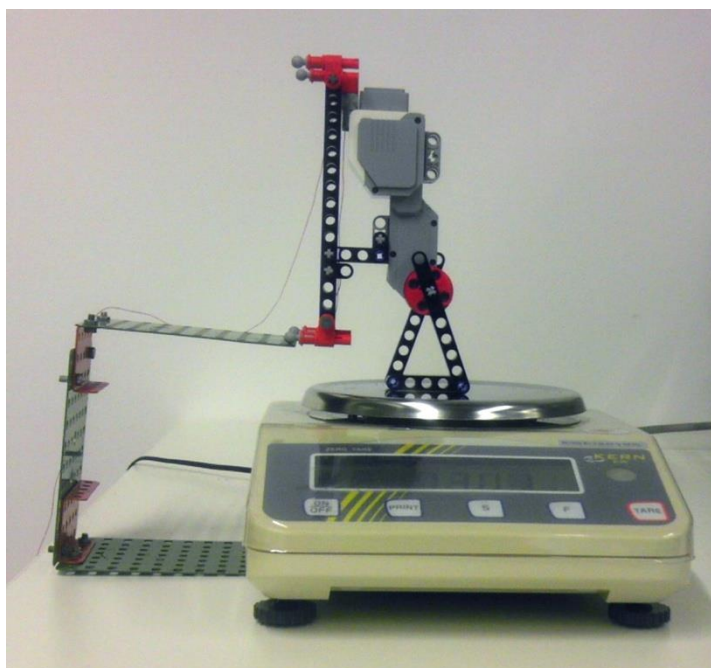
Po dosazení do rovnice (52) a následnému vytknutí y_T , můžeme vypočítat polohu těžiště ve směru osy y

$$-m_2 g(y_T - 0,004) + m_c g(h - 0,004) = 0 \quad (53)$$

$$y_T = \frac{m_c(h - 0,004)}{m_2} + 0,004. \quad (54)$$

Zvážená hmotnost s podpěrou je $m_{cp} = 0,07273 \text{ kg}$, s odečtením podpěry $m_c = 0,06655 \text{ kg}$, potom

$$y_T = \frac{0,06655 * (0,068 - 0,004)}{0,106} + 0,004 = 0,04418 \text{ [m]}. \quad (55)$$



Obrázek 12: Určování polohy těžiště v ose y

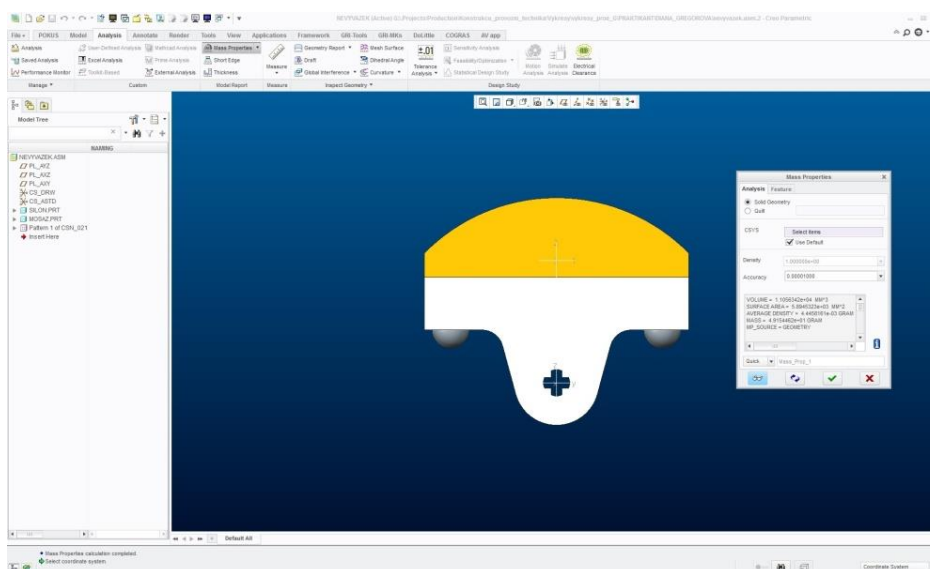
V ose z nebylo nutné zjišťování polohy těžiště, neboť je těleso v této ose symetrické a tím úlohu řešit jako rovinnou.

5.2.2 Charakteristiky tělesa 3

U tělesa 3 bylo nutné stanovení polohy těžiště T_3 , následně excentricitu tělesa a moment setrvačnosti J_s .

Stanovení polohy těžiště T_3 , excentricita

Těžiště T_3 jsem stanovila pomocí programu Creo Parametric. Celé těleso složené z excentru a nevývažku jsem vymodelovala a určila materiálové vlastnosti. Program vygeneroval polohu těžiště ve třech osách, z čehož můžeme následně jednoduše získat hodnotu excentricity e . V našem případě jsem si zvolila počátek souřadnicového systému do osy otáčení nevývažku, takže výsledná excentricita byla hodnotou právě v jedné ose, kde ostatní složky byly nulové. Těžiště T_3 vyšlo v bodě $x_3 = 23,1$ [mm] (excentricita), $y_3 = 0$, $z_3 = 0$.



Obrázek 13: Určení těžiště pomocí softwaru Creo Parametric

Stanovení momentu setrvačnosti J_s

Moment setrvačnosti J_s jsem určila podobně jako těžiště T_3 pomocí počítačového softwaru Creo Parametric (viz příloha I). Software mi vygeneroval momenty setrvačnosti k jednotlivým osám. Nás zajímal pouze jeden moment setrvačnosti, a to konkrétně k ose z . Jelikož máme dva úplně stejné nevývažky, je nutno moment setrvačnost vynásobit dvěma. Výsledný moment setrvačnosti se tedy rovná

$$J_s = 75 \cdot 10^{-6}.$$

5.2.3 Stanovení koeficientu tření f

Hodnota koeficientu tření f je nejdůležitější parametr pro průběh praktického experimentu. Jeho hodnota se dá určit různými způsoby. Mezi nejčastější metody patří: metoda nakloněné roviny, měření pomocí tribometru a měření na rovné desce pomocí závaží, které je zavěšeno přes kladku.

Koeficient tření jsem určovala všemi třemi způsoby. Jednotlivé hodnoty se pro konkrétní materiál desky lišily minimálně, avšak pro výpočet jsem použila hodnotu, která odpovídá měření nejvíce podobné praktickému experimentu (měření na rovné desce).

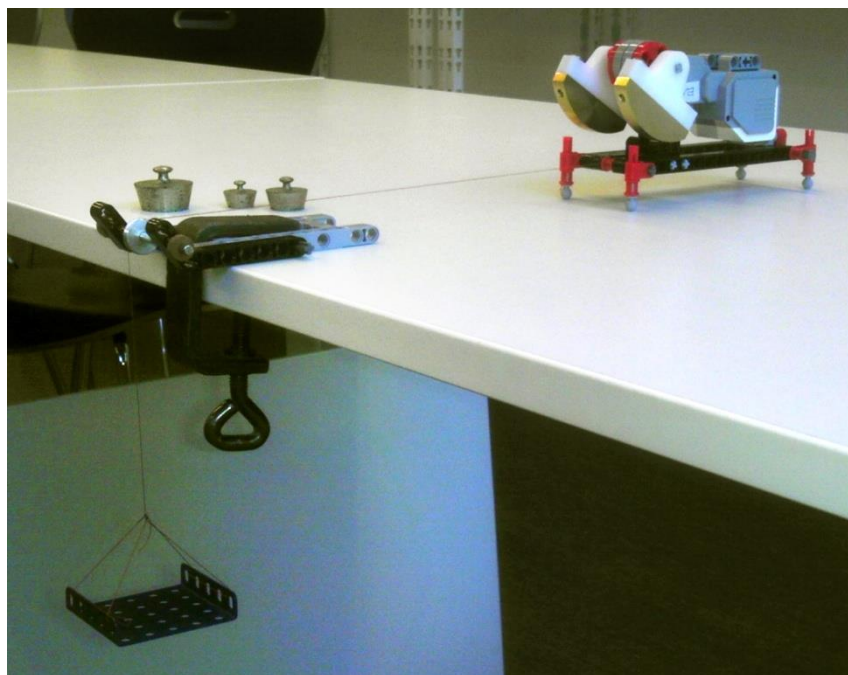
Hodnota koeficientu tření se určí jako poměr závaží zavěšené přes kladku ku celkové hmotnosti předmětu.

Při pohybu soustavy těles bychom měli uvažovat s dvěma typy koeficientu tření. Statický, který působí při rozjezdu soustavy a dynamický, působící po rozjezdu. Pro získání statického koeficientu tření musíme přikládat závaží do té doby, než se předmět sám rozjede. Pro určení dynamického koeficientu tření je třeba počátečního impulsu při rozjezdu a přikládat závaží tak, aby se předmět pohyboval konstantní rychlostí.

Hodnota statického koeficientu tření je $f_s = 0,145$.

Hodnota dynamického koeficientu tření je $f_d = 0,135$.

Zahrnutí hodnoty statického koeficientu tření f_s a dynamického koeficientu tření f_d do výpočtu představuje významnou potíž, neboť je funkce velmi složitá a je málo pravděpodobné, že by to software při standardním integračním schématu vůbec zvládl. Navíc se obě hodnoty liší v jedné setině. Proto jsem se rozhodla použít pouze hodnotu dynamického koeficientu tření, protože v experimentu převládá a zároveň velmi zjednoduší výpočet.



Obrázek 14: Měření koeficientu tření f pomocí závaží

5.2.4 Parametry motoru EV3 Large

Motor EV3 Large ze stavebnice Lego Mindstorm váží 82 g a je napájen zdrojem stejnosměrného napětí. Při napětí 9V (při tomto napětí pracuje běžně ve stavebnici Lego) dosahuje maximálních 175 otáček za minutu a maximálního statického momentu 43 N. cm při 1.8 A. [12]



Obrázek 15: Motor EV3 Large [12]

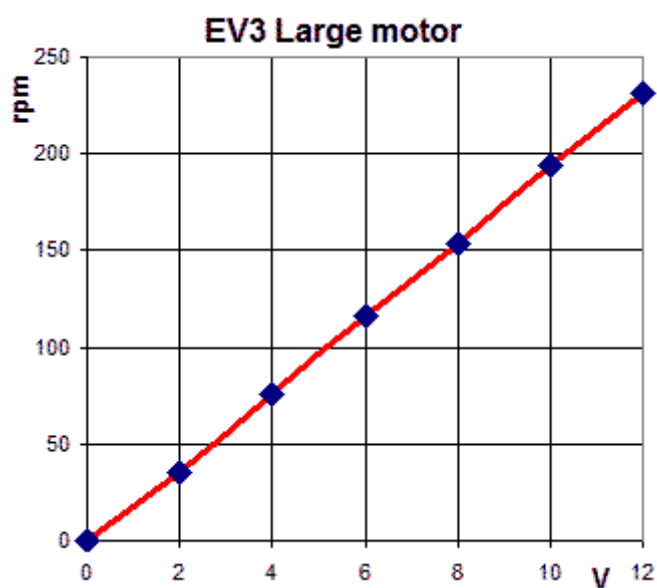
Při našem experimentu jsme využívali motor pro napětí 0-12 V.

V následující tabulce naleznete podrobnější charakteristiku motoru při různých napětích.

Tabulka 2: Charakteristika motoru při různých napětí [12]

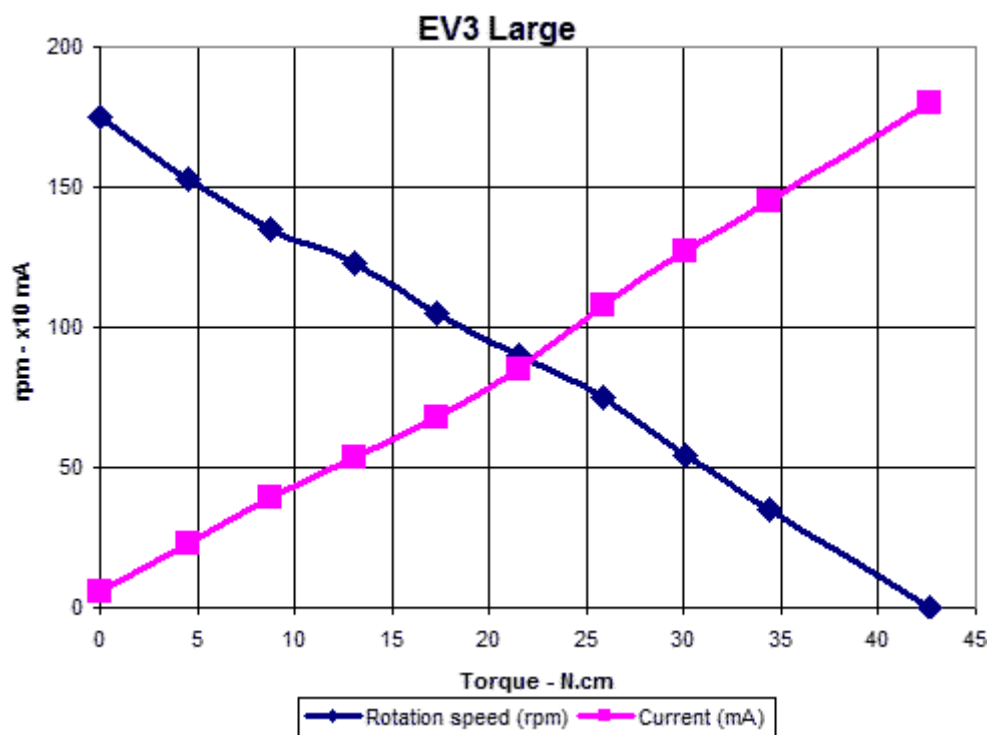
 EV3 large	Krouticí moment	Otáčky	Proud	Mechanický výkon	Elektrický výkon	Účinnost
4.5 V	17.3 N.cm	24 rpm	0.69 A	0.43 W	3.10 W	14 %
6 V	17.3 N.cm	51 rpm	0.69 A	0.92 W	4.14 W	22 %
7.5 V	17.3 N.cm	78rpm	0.69 A	1.41 W	5.17 W	27 %
9 V	17.3 N.cm	105 rpm	0.69 A	1.90 W	6.21 W	31 %
10.5 V	17.3 N.cm	132 rpm	0.69 A	2.39 W	7.24 W	33 %
12 V	17.3 N.cm	153 rpm	0.69 A	2.77 W	8.28 W	33 %

V grafu 2 je znázorněna charakteristika motoru bez zatížení.



Graf 2: Charakteristika motoru bez zatížení [12]

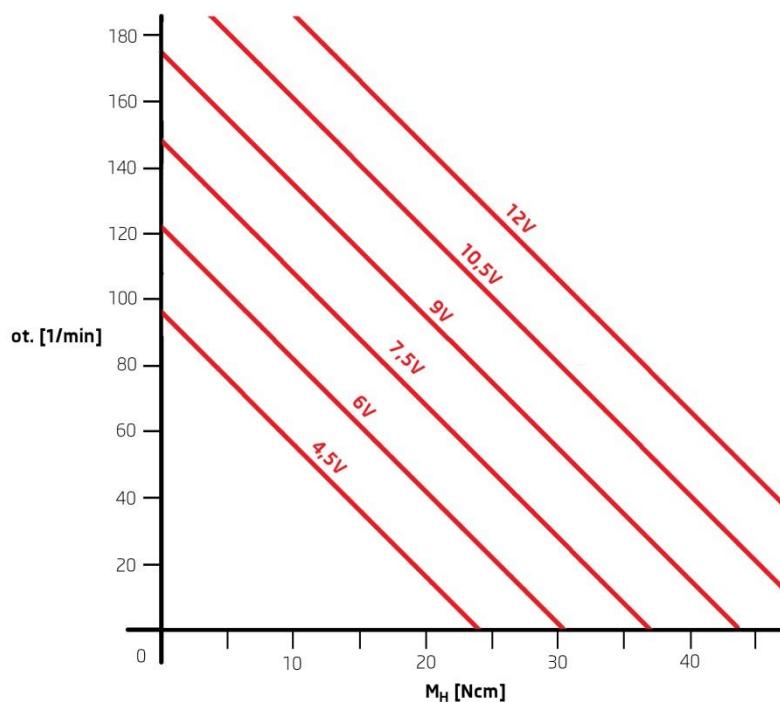
V grafu 3 je znázorněna momentová charakteristika motoru a průběh proudu při napětí 9 V.



Graf 3: Momentová charakteristika motoru při napětí 9 V [12]

Momentová charakteristika motoru je dána rovnicí $n = a - bM_h$. Proložení regresní přímky do množiny bodů momentové charakteristiky v grafu č. 2 jsem získala koeficienty $a = 174,18 \text{ ot/min}$ a $b = 4 \text{ ot/minNcm}$. Tyto koeficienty platí pouze pro napětí 9 V. Pro jiná napětí se koeficient a bude lišit.

Motor má pro všechna napětí průběh momentových charakteristik stejný, který se liší pouze posunutím. Z tabulky 2 jsem pro daný hnací moment $M_h = 17,3 \text{ Ncm}$ odečetla při různém napětí konkrétní otáčky, které nám určí posunutí jednotlivých momentových charakteristik. (viz graf 4)



Graf 4: Momentové charakteristiky motoru pro různá napětí

5.2.5 Kinematické schéma

Kinematická schémata nám umožňují názorně vyobrazit a rozebrat pohyby jednotlivých těles a následně pak určit správně působící síly.

Kinematika tělesa vychází z následujících základních rovnic.

- Pro translační pohyb posuvný to jsou

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (56)$$

$$v = \frac{du}{dt}, \quad (57)$$

kde a je zrychlení tělesa, v je rychlost a u je posuv tělesa, t je pak čas.

- Pro relativní pohyb rotační to jsou

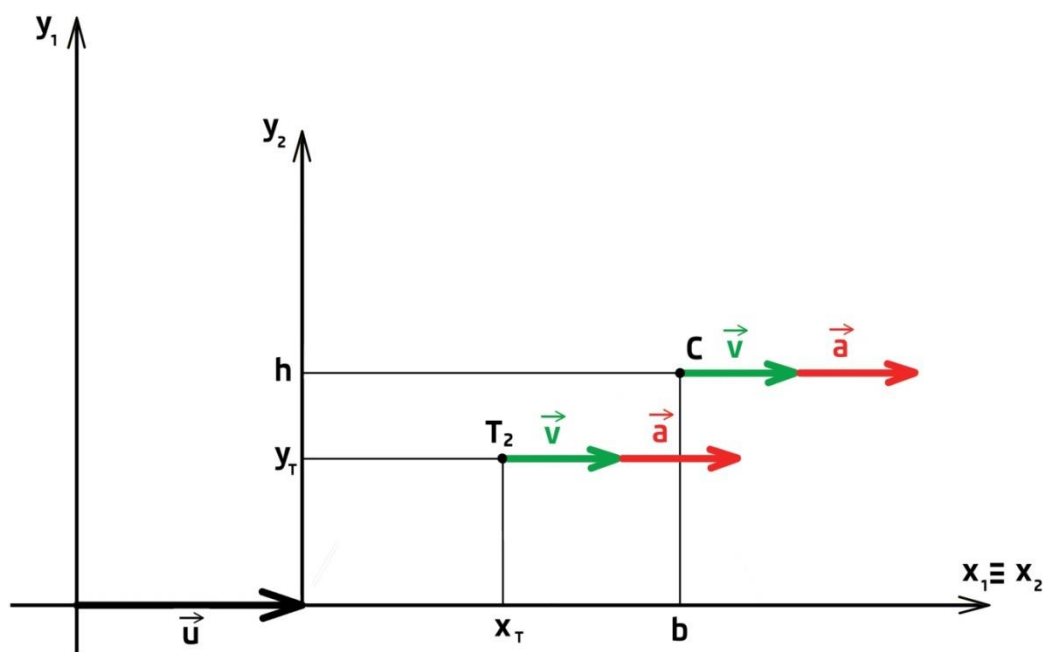
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (58)$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (59)$$

kde α je úhlové zrychlení, ω je úhlová rychlost a φ je polohový úhel.

Kinematické schéma tělesa 2

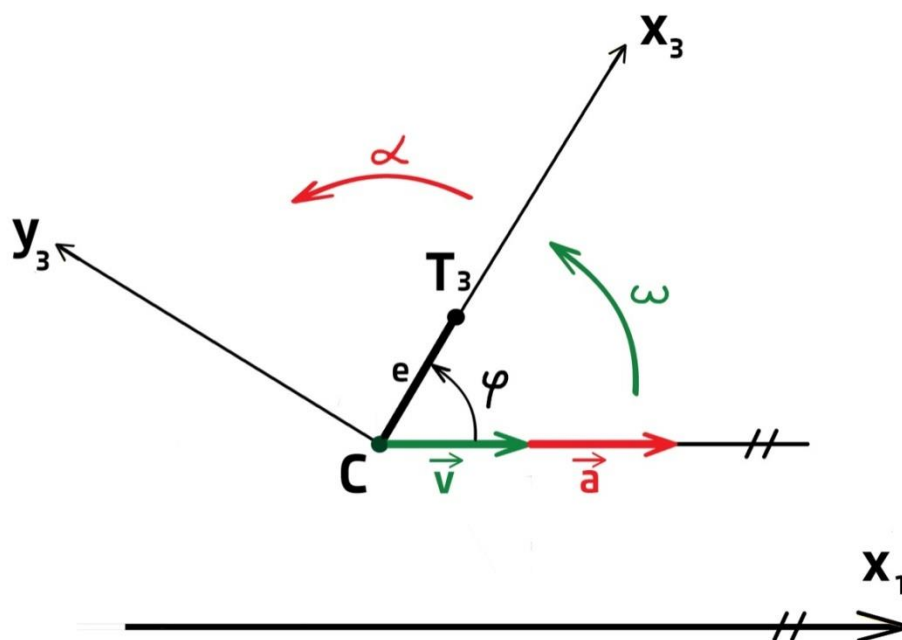
Těleso 2 koná pouze unášivý pohyb posuvný ve směru osy x , kdy se těleso pohybuje rychlostí v se zrychlením a . Okamžitá poloha je pak dána vektorem $\vec{u}$. (viz obrázek 16)



Obrázek 16: Kinematické schéma tělesa 2

Kinematické schéma tělesa 3

Těleso 3 koná obecný rovinný pohyb, který je složen z unášivého pohybu posuvného a z relativního pohybu rotačního. Nevývažek rotuje okolo bodu C s okamžitou výchylkou φ , úhlovou rychlostí ω a úhlovým zrychlením α . Zároveň se těleso posouvá spolu s tělesem 2 ve směru osy x rychlostí v a se zrychlením a . (viz obrázek 17)



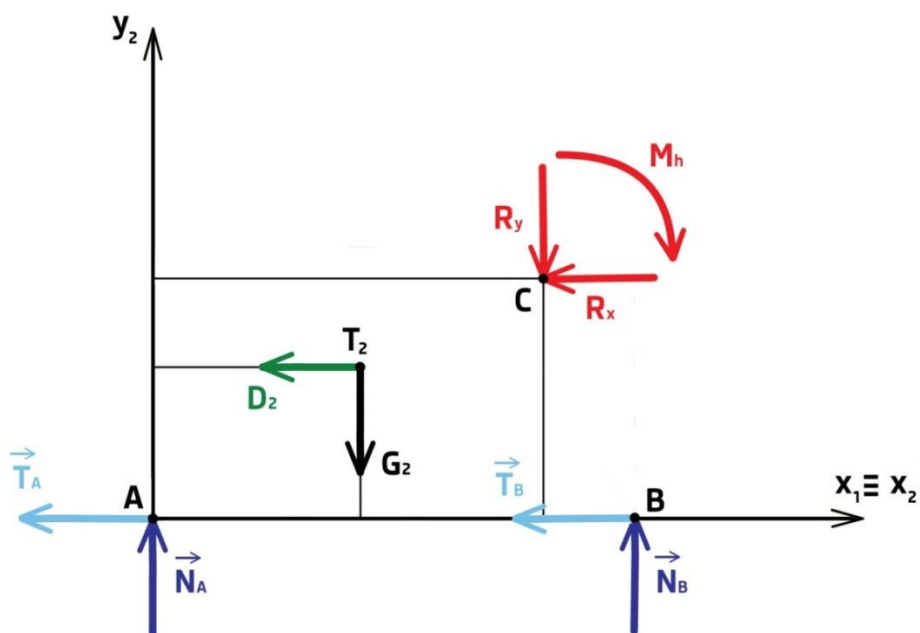
Obrázek 17: Kinematické schéma tělesa 3

5.2.6 Silové schéma

Dalším krokem bylo sestavení silových schémat a určení působících sil.

Uvolnění tělesa 2

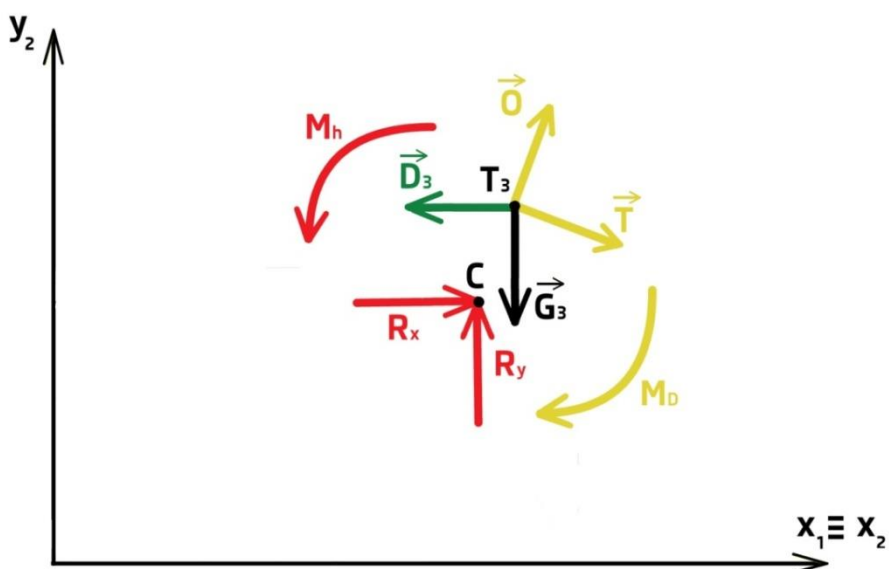
Těleso 2 se dotýká základního rámu v bodech A a B , kde na něj působí normálové síly N_A, N_B a třecí síly T_A, T_B . V těžišti T_2 působí gravitační síla G_2 a síla dynamická D_2 . V bodě C je těleso 2 spojeno s tělesem 3, kde na něj působí reakce R_x, R_y a reakce na hnací moment M_h .



Obrázek 18: Silové schéma tělesa 2

5.2.6.1 Uvolnění tělesa 3

Těleso 3 je excentr s nevývažkem. Ve středu otáčení C působí reakce od tělesa 2 R_x, R_y . V těžišti T_3 dále pak působí gravitační síla G_3 , dynamická síla D_3 , odstředivá síla O a tečná síla dynamická T . Na těleso 3 působí ještě hnací moment M_h a moment dynamický M_D .



Obrázek 19: Silové schéma tělesa 3

5.2.7 Rovnice dynamické rovnováhy

Po zakreslení kinematických a silových schémat obou těles můžeme přistoupit k sestavení samotných rovnic dynamické rovnováhy zvlášť pro těleso 2 a zvlášť pro těleso 3.

Rovnice dynamické rovnováhy tělesa 2

Rovnice rovnováhy pro těleso 2 jsou vztaženy k souřadnicovému systému x_2, y_2 . První rovnice je sestavena ze složek sil ve směru osy x , druhá rovnice je sestavena ze složek sil ve směru osy y a poslední rovnice je momentová, která je vztažena k těžišti tělesa (k bodu T_2).

$$-R_x - T_A - T_B - D_2 = 0 \quad (60)$$

$$-G_2 - R_y - N_A - N_B = 0 \quad (61)$$

$$M_h + (h - y_T)R_x + (x_T - b)R_y - x_T N_A + (l - x_T)N_B - y_T(T_A + T_B) = 0 \quad (62)$$

Rovnice dynamické rovnováhy tělesa 3

Rovnice rovnováhy pro těleso 3 jsou vztaženy k souřadnicovému systému x_1, x_2 , neboť potřebujeme znát okamžitou polohu nevývažku vzhledem k základnímu rámu. Stejně tak, jako u tělesa 2, je první rovnice sestavena ze složek sil ve směru osy x , druhá rovnice je sestavena ze složek sil ve směru osy y a poslední rovnice je momentová, která je vztažena k těžišti tělesa (k bodu T_3).

$$R_x - D_3 + O \cos \varphi + T \sin \varphi = 0 \quad (63)$$

$$-G_3 + R_y + O \sin \varphi - T \cos \varphi = 0 \quad (64)$$

$$M_h + e(R_x \sin \varphi - R_y \cos \varphi) - M_D = 0 \quad (65)$$

5.2.8 Specifikace sil

Dalším důležitým krokem je specifikace některých sil, jako jsou síly gravitační, dynamické (doplňkové) síly, odstředivá síla, tečná síla dynamická, dynamický moment a síly třecí.

$$G_2 = m_2 g \quad (66)$$

$$G_3 = m_3 g \quad (67)$$

$$D_2 = m_2 a \quad (68)$$

$$D_3 = m_3 a \quad (69)$$

$$O = m e \omega^2 \quad (70)$$

$$T = m e \alpha \quad (71)$$

$$M_D = J_s \alpha \quad (72)$$

$$T_A = \text{sgn}(v) f N_A \quad (73)$$

$$T_B = \text{sgn}(v) f N_B \quad (74)$$

5.2.9 Kinematika

Kinematika popisuje pohyby těles, které jsou vyjádřeny následujícími rovnicemi. Za nezávisle proměnnou zvolíme polohový úhel rotace φ nevývažku. Proto bude

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\varphi}{d\varphi} \frac{d\omega}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi} \quad (75)$$

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega} \quad (76)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\varphi}{d\varphi} \frac{dv}{dt} = \omega \frac{dv}{d\varphi} \quad (77)$$

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{d\varphi}{d\varphi} \frac{du}{dt} = \omega \frac{du}{d\varphi} \quad (78)$$

5.3 Řešení + výsledky

Celkový pohyb demonstračního tělesa je natolik složitý, že jsem přistoupila k řešení pomocí matematického softwaru Maple. Do tohoto softwaru jsem zadala všechny

rovnice rovnováhy, specifikace sil a kinematiku pohybu. Rovnice jsem postupně upravovala v softwaru tak, abych získala všechny neznámé.

Řešení dynamiky soustavy těles jsem dělala podle zadání ve dvou variantách. V prvním případě je konstantní úhlová rychlost nevývažku, v druhém je konstantní hnací moment tělesa 2 na těleso 3. Nad rámec této bakalářské práce jsem se věnovala variantě, kdy je dána momentová charakteristika.

5.3.1 Úhlová rychlost relativní rotace 3/2 je konstantní

V tomto případě nevývažek rotuje konstantní úhlovou rychlostí ω a hnací moment M_h se mění v závislosti na φ .

Pokud má být úhlová rychlost konstantní, pak musí být úhlové zrychlení rovno nule, neboť derivace konstanty je nulová.

$$\omega = konst. \rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{d\varphi} = 0 \quad (79)$$

Řešení v programu Maple

Postupnými úpravami v softwaru jsem dospěla k následujícím konečným tvarům pro normálové síly N_A, N_B ; třecí síly T_A, T_B ; reakční síly R_x, R_y ; hnací moment M_h a zrychlení a . Celý postup řešení v softwaru je v příloze II.

$$\begin{aligned} N_A = & -\frac{1}{l} [-m_2gl - m_3gl + m_3el\omega^2 \sin \varphi + M_h - hm_3a + hm_3e\omega^2 \cos \varphi + y_Tm_3a \\ & - y_Tm_3e\omega^2 \cos \varphi + bm_3g - bm_3e\omega^2 \sin \varphi + x_Tm_2g + y_Tfm_2gsgn(v) \\ & + y_Tfm_3gsgn(v) - y_Tfm_3e\omega^2sgn(v) \sin \varphi] \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} N_B = & \frac{1}{l} [M_h - hm_3a + hm_3e\omega^2 \cos \varphi + y_Tm_3a - y_Tm_3e\omega^2 \cos \varphi + bm_3g \\ & - bm_3e\omega^2 \sin \varphi + x_Tm_2g + y_Tfm_2gsgn(v) + y_Tfm_3gsgn(v) \\ & - y_Tfm_3e\omega^2sgn(v) \sin \varphi] \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned}
T_A = & -f \operatorname{sgn}(v) \frac{1}{l} [-m_2 g l - m_3 g l + m_3 e l \omega^2 \sin \varphi + M_h - h m_3 a + h m_3 e \omega^2 \cos \varphi \\
& + y_T m_3 a - y_T m_3 e \omega^2 \cos \varphi + b m_3 g - b m_3 e \omega^2 \sin \varphi + x_T m_2 g \\
& + y_T f m_2 g \operatorname{sgn}(v) + y_T f m_3 g \operatorname{sgn}(v) - y_T f m_3 e \omega^2 \operatorname{sgn}(v) \sin \varphi]
\end{aligned}
\tag{82}$$

$$\begin{aligned}
T_B = & f \operatorname{sgn}(v) \frac{1}{l} [M_h - h m_3 a + h m_3 e \omega^2 \cos \varphi + y_T m_3 a - y_T m_3 e \omega^2 \cos \varphi + b m_3 g \\
& - b m_3 e \omega^2 \sin \varphi + x_T m_2 g + y_T f m_2 g \operatorname{sgn}(v) + y_T f m_3 g \operatorname{sgn}(v) \\
& - y_T f m_3 e \omega^2 \operatorname{sgn}(v) \sin \varphi]
\end{aligned}
\tag{83}$$

$$R_x = m_3 a - m_3 e \omega^2 \cos \varphi \tag{84}$$

$$R_y = m_3 g - m_3 e \omega^2 \sin \varphi \tag{85}$$

$$M_h = -e m_3 [a \sin \varphi - g \cos \varphi] \tag{86}$$

$$\begin{aligned}
a = & \frac{1}{m_3 + m_2} [m_3 e \omega^2 \cos \varphi - f m_2 g \operatorname{sgn}(v) - f m_3 g \operatorname{sgn}(v) \\
& + f m_2 e \omega^2 \operatorname{sgn}(v) \sin \varphi]
\end{aligned}
\tag{87}$$

Rychlost v a polohu u předmětu získáme řešením dvou následujících diferenciálních rovnic:

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{a}{\omega} \tag{88}$$

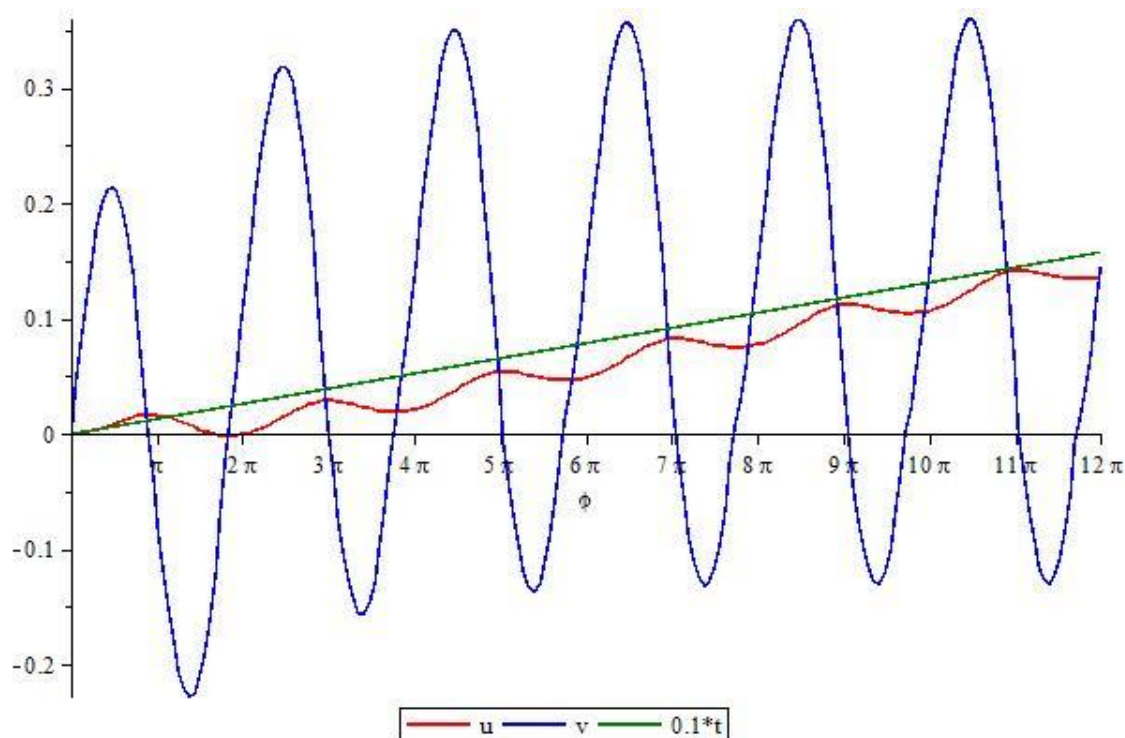
$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{v}{\omega} \tag{89}$$

Výsledky

Pro konkrétní vypočtené hodnoty je nutné dosazení veškerých parametrů a zadání konkrétní velikosti úhlové rychlosti ω , v tomto případě $\omega = 24$ [1/s]. Výsledný pohyb

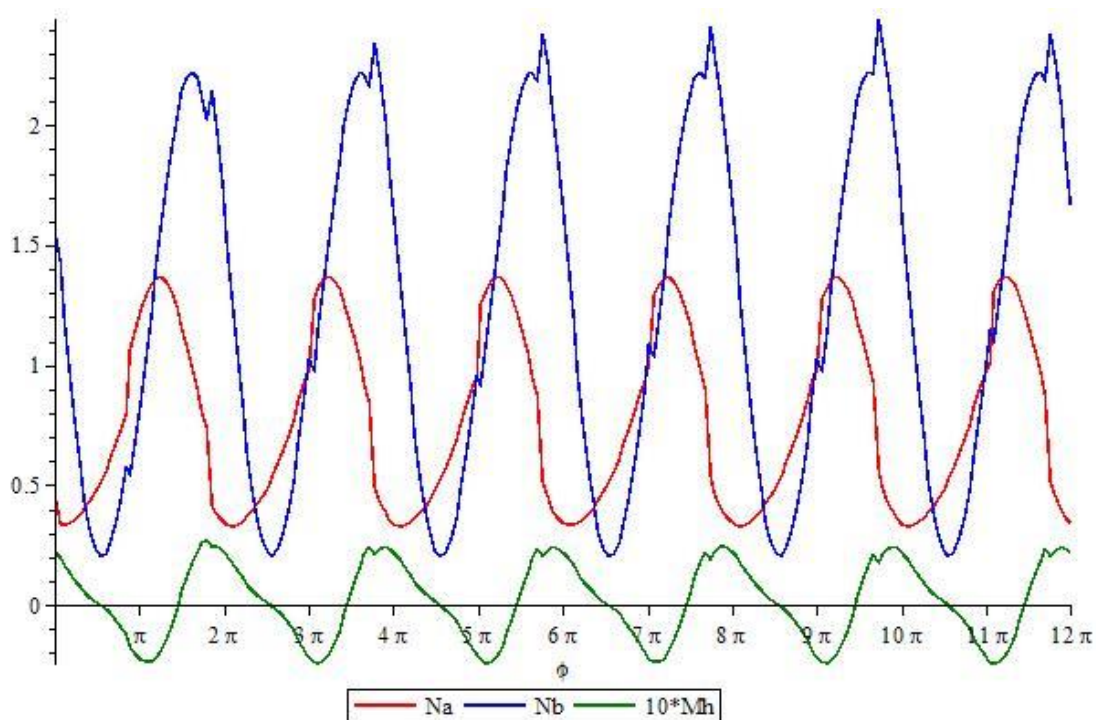
demonstračního předmětu včetně důležitých působících sil nalezneme v následujících dvou grafech (5 a 6).

Graf 5 znázorňuje závislost polohy u (červená), rychlosti v (modrá) a času t (zelená) na polohovém úhlu φ . Při $\omega = 24 \text{ [1/s]}$ vidíme, že výsledný pohyb předmětu bude dopředu a mimo přechodového děje při rozjezdu se pohyb předmětu ustálí.



Graf 5: Závislost polohy u , rychlosti v a času t na polohovém úhlu φ

Z grafu 6 můžeme odečíst okamžité hodnoty normálových sil a hnacího momentu. Je dána podmínka trvalého kontaktu předmětu s podložkou, která se týká právě normálových sil. Aby podmínka byla splněna, je nutné, aby tyto síly byly v každém okamžiku kladné. Podíváme-li se do grafu 6, můžeme s jistotou říci, že podmínka je splněna.



Graf 6: Závislost normálových sil N_A , N_B a hnacího momentu M_h na úhlu φ

5.3.2 Hnací moment tělesa 2 na těleso 3 je konstantní

V tomto případě uvažujeme, že nevyvážek rotuje s konstantním hnacím momentem M_h .

Řešení v programu Maple

Postupnými úpravami v softwaru jsem dospěla k následujícím konečným tvarům pro normálové síly N_A, N_B ; třecí síly T_A, T_B ; reakční síly R_x, R_y ; úhlové zrychlení α a zrychlení a . Celý postup řešení v softwaru je v příloze III.

$$\begin{aligned}
 N_A = & -\frac{1}{l} [-m_2 gl - m_3 gl + m_3 el \omega^2 \sin \varphi - m_3 el \alpha \cos \varphi + M_h - h m_3 a \\
 & + h m_3 e \omega^2 \cos \varphi + h m_3 e \alpha \sin \varphi + y_T m_3 a - y_T m_3 e \omega^2 \cos \varphi - y_T m_3 e \alpha \sin \varphi \\
 & + b m_3 g - b m_3 e \omega^2 \sin \varphi + b m_3 e \alpha \cos \varphi + x_T m_2 g + y_T f m_2 g \operatorname{sgn}(v) \\
 & + y_T f m_3 g \operatorname{sgn}(v) - y_T f m_3 e \omega^2 \operatorname{sgn}(v) \sin \varphi + y_T f m_3 e \alpha \operatorname{sgn}(v) \cos \varphi]
 \end{aligned}
 \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
N_B = & \frac{1}{l} [M_h - hm_3a + hm_3e\omega^2 \cos \varphi + hm_3e\alpha \sin \varphi + y_T m_3a - y_T m_3e\omega^2 \cos \varphi \\
& - y_T m_3e\alpha \sin \varphi + bm_3g - bm_3e\omega^2 \sin \varphi + bm_3e\alpha \cos \varphi + x_T m_2g \\
& + y_T f m_2 g \operatorname{sgn}(v) + y_T f m_3 g \operatorname{sgn}(v) - y_T f m_3 e \omega^2 \operatorname{sgn}(v) \sin \varphi \\
& + y_T f m_3 e \alpha \operatorname{sgn}(v) \cos \varphi]
\end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned}
T_A = & -f \operatorname{sgn}(v) \frac{1}{l} [-m_2gl - m_3gl + m_3el\omega^2 \sin \varphi - m_3el\alpha \cos \varphi + M_h - hm_3a \\
& + hm_3e\omega^2 \cos \varphi + hm_3e\alpha \sin \varphi + y_T m_3a - y_T m_3e\omega^2 \cos \varphi - y_T m_3e\alpha \sin \varphi \\
& + bm_3g - bm_3e\omega^2 \sin \varphi + bm_3e\alpha \cos \varphi + x_T m_2g + y_T f m_2 g \operatorname{sgn}(v) \\
& + y_T f m_3 g \operatorname{sgn}(v) - y_T f m_3 e \omega^2 \operatorname{sgn}(v) \sin \varphi + y_T f m_3 e \alpha \operatorname{sgn}(v) \cos \varphi]
\end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned}
T_B = & f \operatorname{sgn}(v) \frac{1}{l} [M_h - hm_3a + hm_3e\omega^2 \cos \varphi + hm_3e\alpha \sin \varphi + y_T m_3a \\
& - y_T m_3e\omega^2 \cos \varphi - y_T m_3e\alpha \sin \varphi + bm_3g - bm_3e\omega^2 \sin \varphi + bm_3e\alpha \cos \varphi \\
& + x_T m_2g + y_T f m_2 g \operatorname{sgn}(v) + y_T f m_3 g \operatorname{sgn}(v) - y_T f m_3 e \omega^2 \operatorname{sgn}(v) \sin \varphi \\
& + y_T f m_3 e \alpha \operatorname{sgn}(v) \cos \varphi]
\end{aligned} \tag{93}$$

$$R_x = m_3a - m_3e\omega^2 \cos \varphi - m_3e\alpha \sin \varphi \tag{94}$$

$$R_y = m_3g - m_3e\omega^2 \sin \varphi + m_3e\alpha \cos \varphi \tag{95}$$

$$\begin{aligned}
a = & \frac{1}{m_3 + m_2} [m_3e\omega^2 \cos \varphi + m_3e\alpha \sin \varphi - f m_2 g \operatorname{sgn}(v) - f m_3 g \operatorname{sgn}(v) \\
& + f m_3 e \omega^2 \operatorname{sgn}(v) \sin \varphi - f m_3 e \alpha \operatorname{sgn}(v) \cos \varphi]
\end{aligned} \tag{96}$$

$$\begin{aligned}
\alpha = & [M_h m_3 + M_h m_2 + m_3^2 e^2 f \omega^2 \operatorname{sgn}(v) \sin^2 \varphi - m_2 m_3 e f g \operatorname{sgn}(v) \sin \varphi \\
& - m_3^2 e f g \operatorname{sgn}(v) \sin \varphi - m_3^2 e g \cos \varphi - m_2 m_3 e g \cos \varphi + m_3^2 e^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi] \\
& / [m_3^2 e^2 f \operatorname{sgn}(v) \sin \varphi \cos \varphi + m_2 m_3 e^2 \sin^2 \varphi + m_3^2 e^2 \cos^2 \varphi + m_2 m_3 e^2 \cos^2 \varphi \\
& + J_S m_3 + J_S m_2]
\end{aligned} \tag{97}$$

Úhlovou rychlost ω , rychlost v a polohu u předmětu získáme řešením čtyř následujících diferenciálních rovnic:

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{a}{\omega} \quad (98)$$

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{v}{\omega} \quad (99)$$

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{\alpha}{\omega} \quad (100)$$

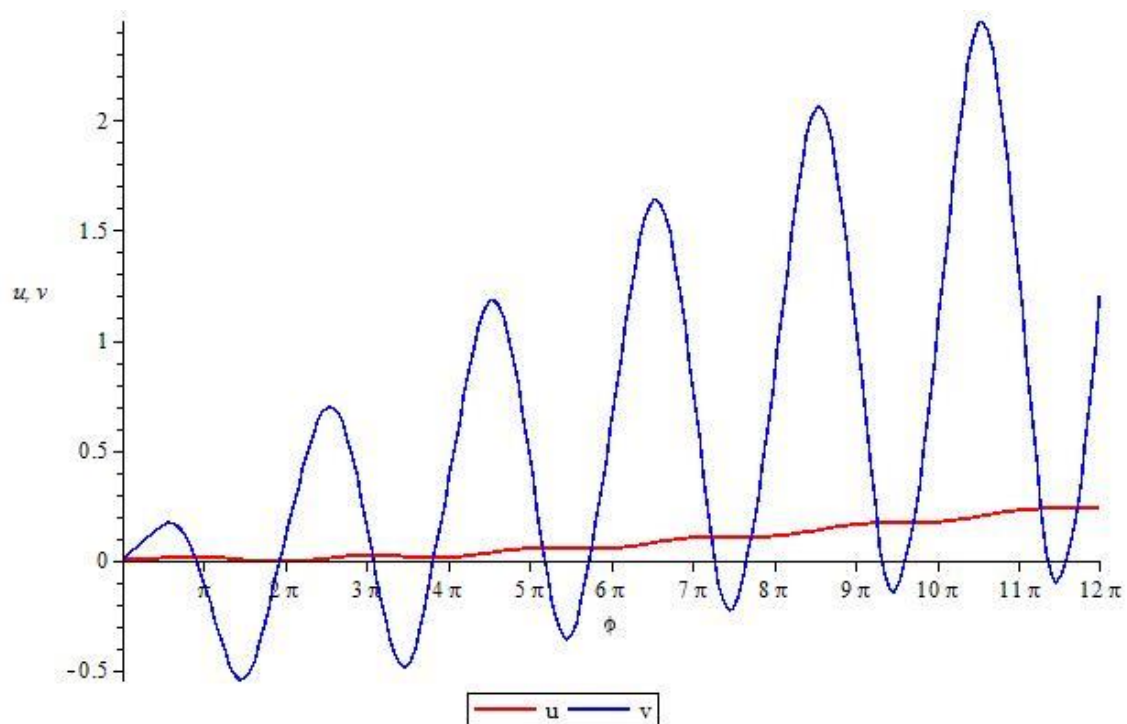
$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{\omega} \quad (101)$$

Výsledky

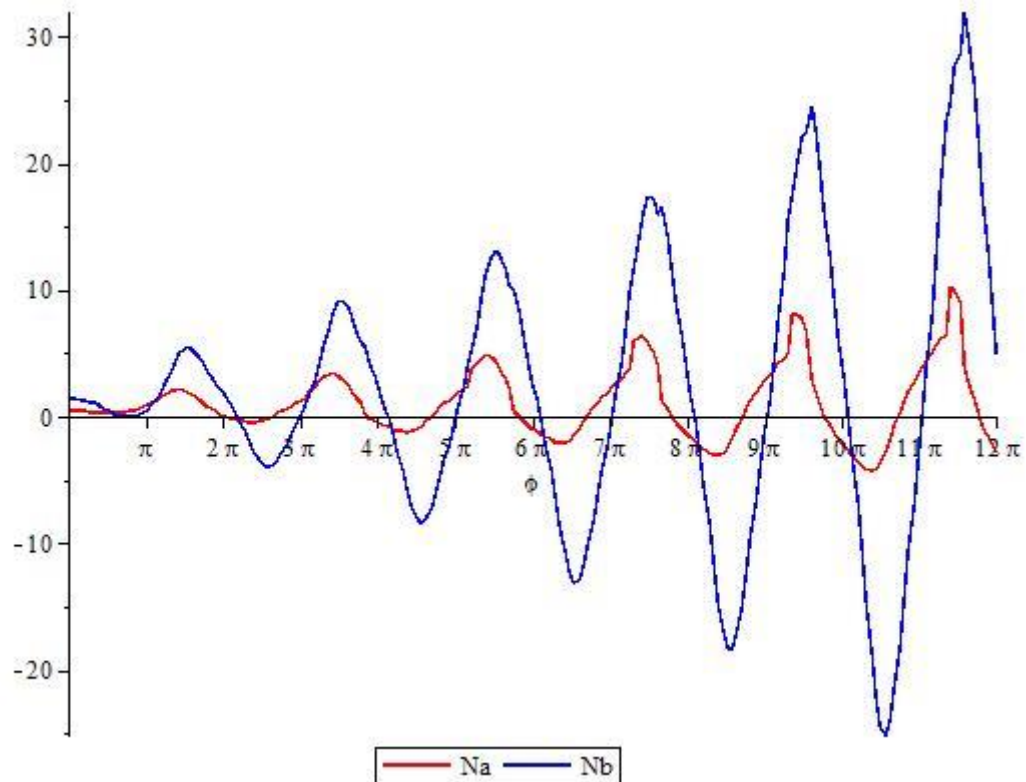
Tak jako pro předchozím řešení musíme dosadit veškeré parametry a zadání konkrétní hodnotu tentokrát pro hnací moment M_h , v tomto případě $M_h = 0,02 \text{ [Nm]}$. Výsledný pohyb demonstračního předmětu včetně důležitých působících sil nalezneme v následujících dvou grafech (7 a 8).

Graf 7 znázorňuje závislost polohy u (červená) a rychlosti v (modrá) na polohovém úhlu nevývažku φ . Při $M_h = 0,02 \text{ [Nm]}$ vidíme, že výsledný pohyb bude dopředu a předmět se bude stále zrychlovat.

Z grafu 8 je však patrné, že tato část zadání nesplňuje podmínku trvalého kontaktu s podložkou, neboť normálové síly N_A, N_B zasahují do záporných hodnot a docházelo by tak při pohybu ke ztracení kontaktu s podložkou.



Graf 7: Závislost polohy u a rychlosti v na úhlu ϕ při konstantním M_h



Graf 8: Závislost normálových sil N_A a N_B na úhlu ϕ při konstantním M_h

5.3.3 Řešení při známé momentové charakteristice

V tomto případě jsem do specifikace sil zadala ještě průběh momentové charakteristiky našeho použitého motoru. Předpokládala jsem, že při tomto zadání se výsledky budou nejvíce přibližovat realitě. Vedly mě k tomu výsledky z předchozích situací, kdy nejsme schopni bez dalších přídavných zařízení (např. regulátor otáček) reálně docílit požadovaných vstupních podmínek (konstantní úhlová rychlost ω , resp. konstantní hnací moment M_h).

V rovnicích jsem hnací moment M_h nahradila funkcí $M_h = P - Q\omega$, kde P a Q jsou přepočtené koeficienty momentové charakteristiky motoru tak, abych dokázala vyjádřit hnací moment M_h v závislosti na úhlové rychlosti ω .

$$n = a - bM_h \quad (\text{viz 5.2.4 Parametry motoru}) \quad (102)$$

$$M_h = \frac{a-n}{b} = \frac{a}{b} - \frac{n}{b} = \frac{a}{b} - \frac{30\pi}{b}\omega = P - Q\omega, \quad (103)$$

kde $\omega = \frac{2\pi n}{60}$.

Nejprve můžeme vypočítat koeficienty P , Q pro napětí 9 V, neboť z regresní křivky známe parametry a , b .

$$M_{h9V} = \frac{a}{b} - \frac{30\pi}{b}\omega = \frac{174,18}{400} - \frac{30}{400\pi}\omega$$

$$M_{h9V} = P - Q\omega = 0,4357 - 0,0239\omega$$

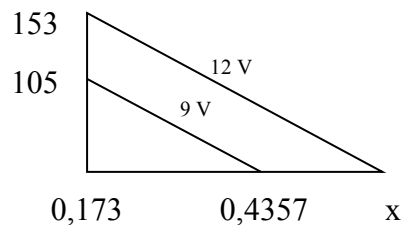
Z podobnosti trojúhelníků dále získáme koeficient P pro jiná napětí. Koeficient Q je pro všechna napětí stejná.

Např. pro napětí 12 V:

$$\frac{153}{105} = \frac{x - 0,173}{0,4357 - 0,173}$$

$$x = \frac{153 \cdot (0,4357 - 0,173)}{105} + 0,173 = 0,5558$$

$$P_{12V} = 0,5558$$



Takto postupujeme pro všechna zbylá napětí. V následující tabulce nalezneme hodnoty koeficientů pro různá napětí, která jsem podle předchozího příkladu vypočítala.

Tabulka 3: Hodnoty koeficientů P, Q pro různá napětí

Napětí [V]	Koeficient P	Koeficient Q
4,5	0,2330	0,0239
6	0,3006	0,0239
7,5	0,3681	0,0239
9	0,4357	0,0239
10,5	0,5033	0,0239
12	0,5558	0,0239

Řešení v programu Maple

Postupnými úpravami v softwaru jsem dospěla k následujícím konečným tvarům pro normálové síly N_A, N_B ; třecí síly T_A, T_B ; reakční síly R_x, R_y ; úhlové zrychlení α a zrychlení a . Celý postup řešení v softwaru je v příloze IV.

$$\begin{aligned}
 N_A = & -\frac{1}{l} [-m_2gl - m_3gl + m_3el\omega^2 \sin \varphi - m_3el\alpha \cos \varphi + P - Q\omega - hm_3a \\
 & + hm_3e\omega^2 \cos \varphi + hm_3e\alpha \sin \varphi + y_T m_3a - y_T m_3e\omega^2 \cos \varphi - y_T m_3e\alpha \sin \varphi \\
 & + bm_3g - bm_3e\omega^2 \sin \varphi + bm_3e\alpha \cos \varphi + x_T m_2g + y_T f m_2g \operatorname{sgn}(v) \\
 & + y_T f m_3g \operatorname{sgn}(v) - y_T f m_3e\omega^2 \operatorname{sgn}(v) \sin \varphi + y_T f m_3e\alpha \operatorname{sgn}(v) \cos \varphi]
 \end{aligned}
 \tag{104}$$

$$\begin{aligned}
 N_B = & \frac{1}{l} [P - Q\omega - hm_3a + hm_3e\omega^2 \cos \varphi + hm_3e\alpha \sin \varphi + y_T m_3a \\
 & - y_T m_3e\omega^2 \cos \varphi - y_T m_3e\alpha \sin \varphi + bm_3g - bm_3e\omega^2 \sin \varphi + bm_3e\alpha \cos \varphi \\
 & + x_T m_2g + y_T f m_2g \operatorname{sgn}(v) + y_T f m_3g \operatorname{sgn}(v) - y_T f m_3e\omega^2 \operatorname{sgn}(v) \sin \varphi \\
 & + y_T f m_3e\alpha \operatorname{sgn}(v) \cos \varphi]
 \end{aligned}
 \tag{105}$$

$$\begin{aligned}
T_A = & -fsgn(v)\frac{1}{l}[-m_2gl - m_3gl + m_3el\omega^2 \sin \varphi - m_3el\alpha \cos \varphi + P - Q\omega \\
& - hm_3a + hm_3e\omega^2 \cos \varphi + hm_3e\alpha \sin \varphi + y_Tm_3a - y_Tm_3e\omega^2 \cos \varphi \\
& - y_Tm_3e\alpha \sin \varphi + bm_3g - bm_3e\omega^2 \sin \varphi + bm_3e\alpha \cos \varphi + x_Tm_2g \\
& + y_Tfm_2gsgn(v) + y_Tfm_3gsgn(v) - y_Tfm_3e\omega^2sgn(v) \sin \varphi \\
& + y_Tfm_3e\alpha sgn(v) \cos \varphi]
\end{aligned}
\tag{106}$$

$$\begin{aligned}
T_B = & fsgn(v)\frac{1}{l}[P - Q\omega - hm_3a + hm_3e\omega^2 \cos \varphi + hm_3e\alpha \sin \varphi + y_Tm_3a \\
& - y_Tm_3e\omega^2 \cos \varphi - y_Tm_3e\alpha \sin \varphi + bm_3g - bm_3e\omega^2 \sin \varphi + bm_3e\alpha \cos \varphi \\
& + x_Tm_2g + y_Tfm_2gsgn(v) + y_Tfm_3gsgn(v) - y_Tfm_3e\omega^2sgn(v) \sin \varphi \\
& + y_Tfm_3e\alpha sgn(v) \cos \varphi]
\end{aligned}
\tag{107}$$

$$R_x = m_3a - m_3e\omega^2 \cos \varphi - m_3e\alpha \sin \varphi \tag{108}$$

$$R_y = m_3g - m_3e\omega^2 \sin \varphi + m_3e\alpha \cos \varphi \tag{109}$$

$$\begin{aligned}
a = & \frac{1}{m_3 + m_2}[m_3e\omega^2 \cos \varphi + m_3e\alpha \sin \varphi - fm_2gsgn(v) - fm_3gsgn(v) \\
& + fm_3e\omega^2sgn(v) \sin \varphi - fm_3e\alpha sgn(v) \cos \varphi]
\end{aligned}
\tag{110}$$

$$\begin{aligned}
\alpha = & [Pm_3 + Pm_2 - Q\omega m_3 - Q\omega m_2 + m_3^2e^2f\omega^2sgn(v)\sin^2\varphi \\
& - m_2m_3efgsgn(v)\sin\varphi \\
& - m_3^2efgsgn(v)\sin\varphi - m_3^2eg\cos\varphi - m_2m_3eg\cos\varphi + m_3^2e^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi] \\
& / [m_3^2e^2fsgn(v)\sin\varphi\cos\varphi + m_2m_3e^2\sin^2\varphi + m_3^2e^2\cos^2\varphi + m_2m_3e^2\cos^2\varphi \\
& + J_Sm_3 + J_Sm_2]
\end{aligned}
\tag{111}$$

Úhlovou rychlost ω , rychlost v a polohu u předmětu získáme řešením čtyř následujících diferenciálních rovnic:

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{a}{\omega} \quad (112)$$

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{v}{\omega} \quad (113)$$

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{\alpha}{\omega} \quad (114)$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{\omega} \quad (115)$$

Výsledky

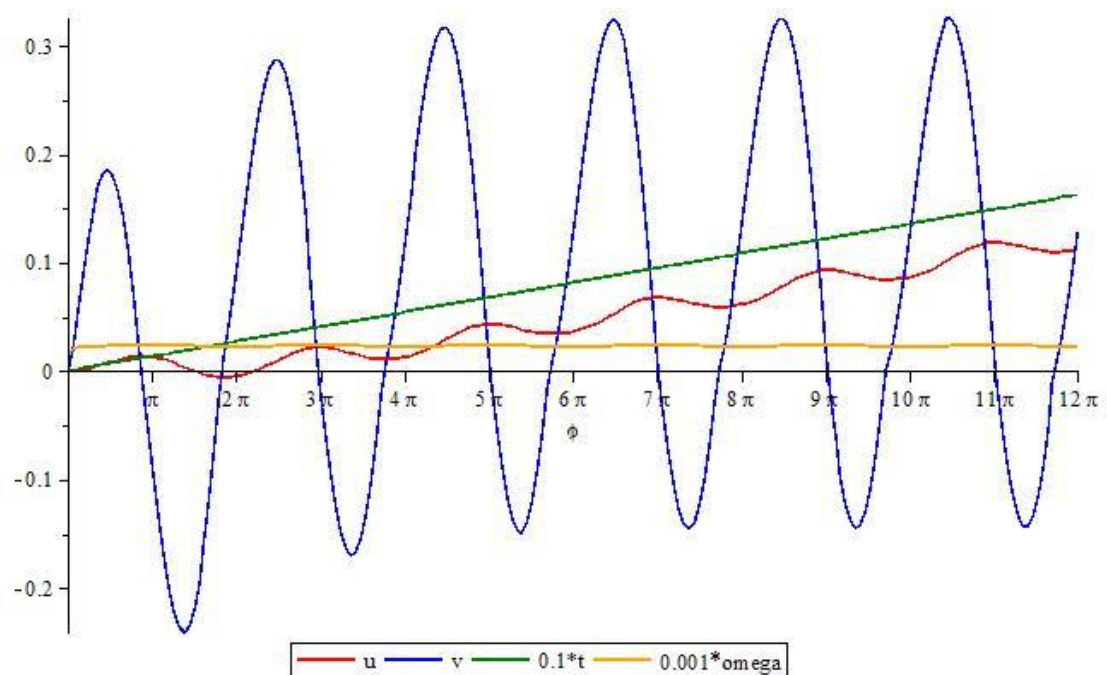
Pro konkrétní vypočtené hodnoty je nutné dosazení veškerých parametrů a zadání konkrétní momentové charakteristiky, v tomto případě

$$M_{h12V} = P - Q\omega = 0,5558 - 0,0239\omega,$$

která je pro vstupní napětí 12 V.

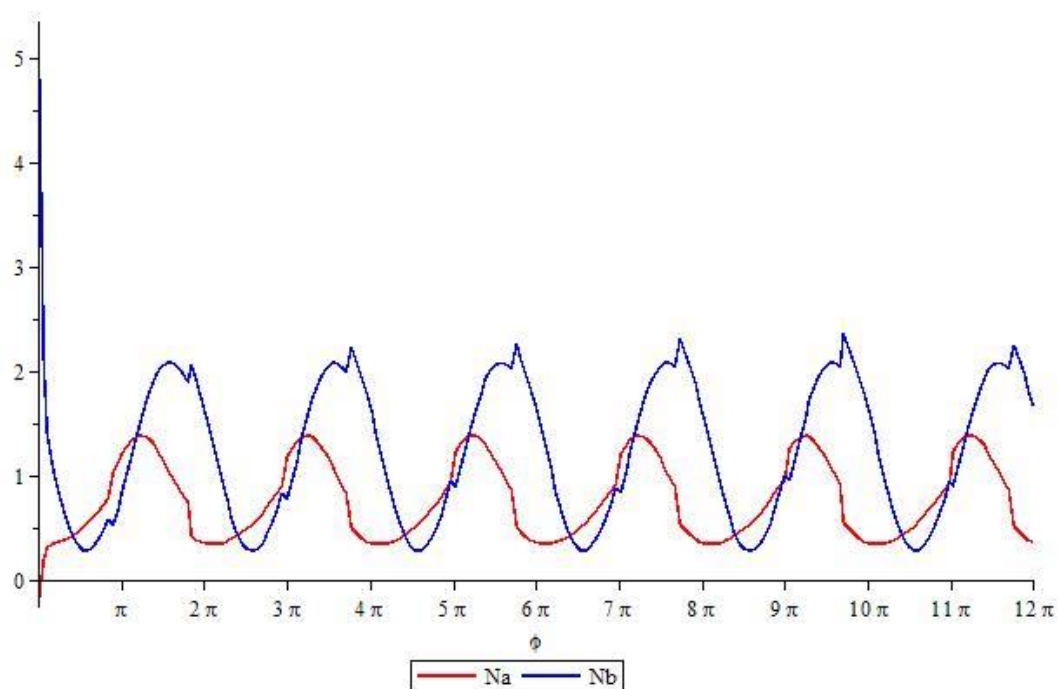
Výsledný pohyb demonstračního předmětu včetně důležitých působících sil nalezneme v následujících dvou grafech (9 a 10).

Graf 9 znázorňuje závislost polohy u (červená), rychlosti v (modrá), času t (zelená) a úhlové rychlosti ω na polohovém úhlu nevývažku φ . Vidíme, že výsledný pohyb předmětu bude dopředu a mimo přechodového děje při rozjezdu se pohyb předmětu ustálí. Úhlová rychlost je téměř konstantní.



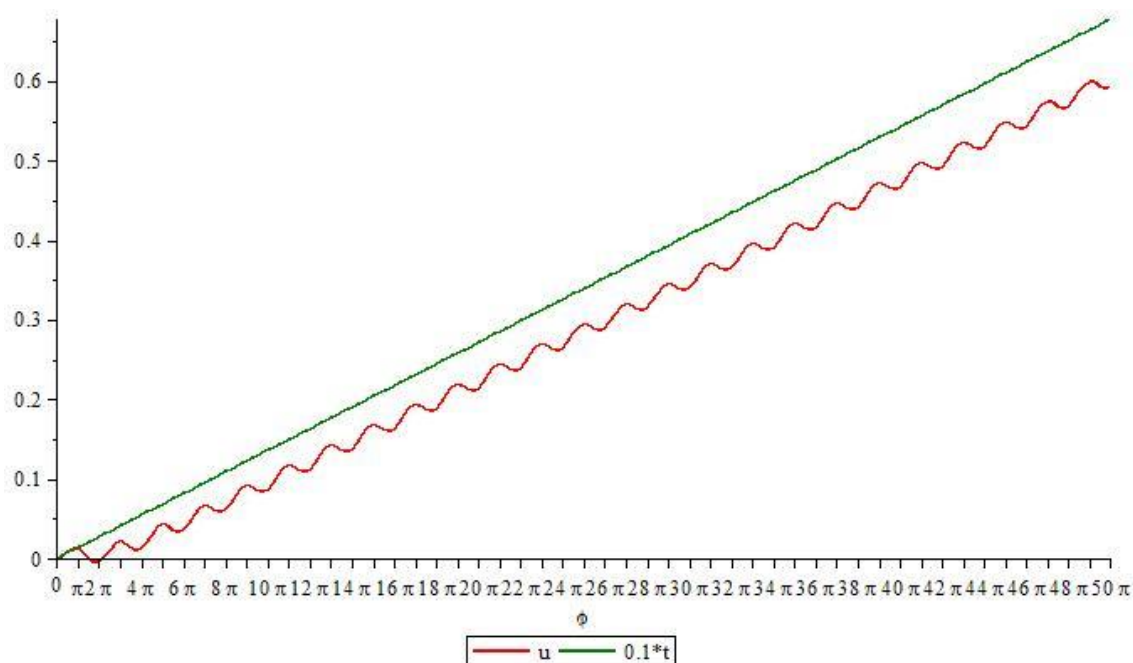
Graf 9: Závislost polohy u , rychlost v , času t a úhlové rychlosti na úhlu ϕ

Z grafu 10 můžeme odečíst okamžité hodnoty normálových sil. Okamžité hodnoty jsou vždy kladné, tím je splněna podmínka trvalého kontaktu předmětu s podložkou.



Graf 10: Závislost normálových sil na úhlu ϕ

Pro srovnání matematického modelu s reálným experimentem nám slouží graf 11. Zajímá nás, za jak dlouho urazí předmět vzdálenost půl metru. Abychom se vyhnuli přechodovému ději při rozjezdu, počítáme s časem, až po ujetí vzdálenosti 5 centimetrů. Z toho vyplývá, že matematickému modelu trvá pro ujetí 50 centimetrů 5,2 sekund.



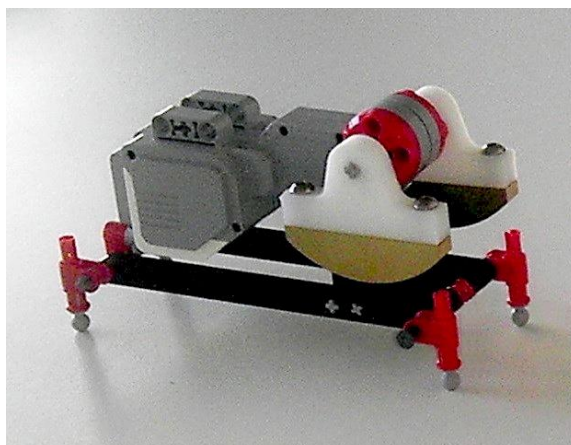
Graf 11: Graf závislosti okamžité polohy a času na polohovém úhlu φ

6 Funkční model soustavy

6.1 Popis modelu

Předlohou pro stavbu modelu byla hračka „HexBug“, která funguje na stejném principu.

Samotný model včetně motoru byl sestaven ze stavebnice Lego Mindstorm. Excentr s nevývažkem byly zadány do výroby na základě předem vytvořených výkresů (viz příloha V).



Obrázek 20: Funkční model soustavy

6.2 Praktický experiment

Praktický experiment nám poslouží pro srovnání s teoretickou částí. Nejvíce přibližující se realitě je třetí doplňující případ při známé momentové charakteristice. Pro náš použitý motor máme konkrétní momentovou charakteristiku, kterou můžeme zadat do softwaru Maple.

Měření jsem prováděla pro napětí 12 V a vzdálenost 50 cm tak, že jsem si pomocí dvou čar na podložku naměřila 50 centimetrů, předmět jsem postavila cca 10 centimetrů před první čáru a pustila ho. Pomocí stopky jsem pak měřila čas, za jak dlouho předmět překonal určenou vzdálenost (start i cíl byly letmé). Experiment proběhl desetkrát, z čehož jsem následně stanovila časový průměr. V konkrétních hodnotách můžeme říci, že předmět urazí vzdálenost půl metru za 4,9 sekund.

Tabulka 4: Tabulka časů, za jak dlouho předmět 50 cm

Číslo měření	Čas
1	5 s
2	4,9 s
3	5,1 s
4	4,9 s
5	5 s
6	4,7 s
7	5,1 s
8	4,8 s
9	4,8 s
10	4,7 s
Průměr	4,9 s

7 Závěr

Práce na téma dynamiky soustavy těles byla velmi zajímavá. Byla o to zajímavější, že k teoretickému výzkumu, sestavení rovnic rovnováhy, modelování dat nevývažku, zjišťování těžiště, koeficientu tření a dalších výpočtů jsem vše mohla porovnat s praktickým pokusem a reálným pohybem opravdového fyzického modelu. Toto byl pro mne obrovský přínos, zda jsem postupovala správně a zda má teoretická práce vypovídající hodnotu v praktické situaci.

Jak říká zadání bakalářské práce, měla jsem řešit dva případy, kdy je úhlová rychlost konstantní a kdy je hnací moment konstantní. Jak už bylo v textu řečeno, ani v jednom případě nejsme schopni bez dalších přídavných zařízení (např. regulátor otáček) reálně docílit požadovaných vstupních podmínek (konstantní úhlová rychlost ω , resp. konstantní hnací moment M_h). Tudíž jsem přistoupila k třetímu možnému řešení, a to konkrétně případ, kdy počítáme s momentovou charakteristikou použitého motoru. Tento jediný případ můžeme totiž navodit v reálném experimentu. Pokud tedy porovnáme vypočtené hodnoty z matematického modelu s reálným experimentem, výsledky jsou velmi podobné. V matematickém modelu trvá předmětu k překonání 50 cm 5,2 sekundy a fyzickému modelu 4,9 sekund, což je více než uspokojivý výsledek. Odchyłky mohou být způsobeny jednak vůlemi u fyzického modelu, neboť stavebnice není úplně dokonalá, ale také velikost koeficientu tření. Povrch podložky, na které jsem koeficient tření měřila, není tak úplně stejnorodý, tudíž je možné, že při praktickém experimentu může docházet k odchyłkám. Tento povrch jsem si vybrala cíleně, protože bude použit v reálném experimentu u obhajoby své závěrečné práce.

Ve své práci vidím přínos nejen pro mne, ale i pro společnost. Podle mého názoru je přínosné pracovat v teoretické rovině řešení problémů spjaté s dynamikou soustavy těles a ušetřit tím nemalé prostředky a čas. Zároveň jsem dokázala, že teoretická výuka se dá s úspěchem předvést na jednoduše sestrojených didaktických pomůckách, se kterými se v oboru dynamiky téměř nesetkáme.

Seznam použité literatury

- [1] Robot Toys [Online] [Citace: 1.7.2016] Dostupné z www:
<http://www.robotmarketplace.com/products/0-HEXBUGNANO-NO.html>
- [2] Vibrační deska [Online] [Citace: 3.7.2016] Dostupné z www:
https://cs.wikipedia.org/wiki/Vibra%C4%8Dn%C3%AD_deska
- [3] Dopravní a zdvihací stroje [Online] [Citace: 1.7.2016] Dostupné z www:
http://uvp3d.cz/drtic/?page_id=2128
- [4] Uložení a rovnováha bodu a tělesa [Online] [Citace: 5.7.2016] Dostupné z www:
http://www.kme.zcu.cz/kmet/ppe/teorie/04_uarbat.pdf
- [5] Základy mechaniky [Online] [Citace: 1.7.2016] Dostupné z www:
www.elearn.vsb.cz/archived/FS/ZMech/CD.../ZM04_teleso_na_podporach.pps
- [6] ŠÍR, M.: *Přednášky z dynamiky*, LS 2014/2015.
- [7] Statika s pasivními odpory [Online] [Citace: 1.7.2016] Dostupné z www:
<http://bacula.nti.tul.cz/~petr.sidlof/vyuka/NTI-MEC/prednasky/pr05-Statika-4.pdf>
- [8] VRZALA, R., PETŘÍKOVÁ, I.: *Mechanika I. - Statika*. Vyd. 1. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2009, 238 s. ISBN 978-80-7372-570-9.
- [9] Kinematika a dynamika tělesa [Online] [Citace: 1.7.2016] Dostupné z www:
http://www.kme.zcu.cz/kmet/ppe/teorie/07_kadt.pdf
- [10] BRADSKÝ, Z., JÁČ, V.: *Mechanika II. – Kinematika*. Vyd. 3. Liberec: Vysoká škola strojní a textilní v Liberci, 1986, 197 s.
- [11] BRADSKÝ, Z., VRZALA, R.: *Mechanika III. - Dynamika*. Vyd. 3. Liberec: Vysoká škola strojní a textilní v Liberci, 1987, 251 s.
- [12] Technic Motors compared characteristics [Online] [Citace: 1.7.2016] Dostupné z www: <http://www.philohome.com/motors/motorcomp.htm>
- [13] JÁČ, V., POLCAR, M.: *Mechanika I. - Statika*. Vyd. 3. Liberec: Vysoká škola strojní a textilní v Liberci, 1985, 185 s.

- [14] BRÁT, V., ROSENBERG, J., JÁČ, V.: *Kinematika*. Vyd. 1. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1987, 256 s.

Seznam obrázků

Obrázek 1: Hračka HexBug [1].....	13
Obrázek 2: Schéma jednosměrné vibrační desky [2]	14
Obrázek 3: Schematický obrázek dopravního žlabu [3].....	15
Obrázek 4: Nerovnosti styčných ploch [7]	18
Obrázek 5: Působící síly při smykové tření [7].....	18
Obrázek 6: Posuvný pohyb tělesa [9]	21
Obrázek 7: Rotační pohyb tělesa [9]	24
Obrázek 8: Dynamické schéma soustavy	29
Obrázek 9: Schéma zjišťování polohy těžiště v ose x	30
Obrázek 10: Určování polohy těžiště v ose x	31
Obrázek 11: Schéma zjišťování polohy těžiště v ose y	31
Obrázek 12: Určování polohy těžiště v ose y	32
Obrázek 13: Určení těžiště pomocí softwaru Creo Parametric	33
Obrázek 14: Měření koeficientu tření f pomocí závaží	35
Obrázek 15: Motor EV3 Large [12]	35
Obrázek 16: Kinematické schéma tělesa 2	39
Obrázek 17: Kinematické schéma tělesa 3	40
Obrázek 18: Silové schéma tělesa 2	41
Obrázek 19: Silové schéma tělesa 3	41
Obrázek 20: Funkční model soustavy	57

Seznam grafů

Graf 1: Závislost smykového tření na rychlosti	19
Graf 2: Charakteristika motoru bez zatížení [12]	36
Graf 3: Momentová charakteristika motoru při napětí 9 V [12]	37
Graf 4: Momentové charakteristiky motoru pro různá napětí	38
Graf 5: Závislost polohy u , rychlosti v a času t na polohovém úhlu φ	46
Graf 6: Závislost normálových sil N_A , N_B a hnacího momentu M_h na úhlu φ	47
Graf 7: Závislost polohy u a rychlosti v na úhlu φ při konstantním M_h	50
Graf 8: Závislost normálových sil N_A a N_B na úhlu φ při konstantním M_h	50
Graf 9: Závislost polohy u , rychlosti v , času t a úhlové rychlosti na úhlu φ	55
Graf 10: Závislost normálových sil na úhlu φ	55
Graf 11: Graf závislosti okamžité polohy a času na polohovém úhlu φ	56

Seznam tabulek

Tabulka 1: Principy uvolňování soustavy těles [6]	17
Tabulka 2: Charakteristika motoru při různých napětích [12]	36
Tabulka 3: Hodnoty koeficientů P , Q pro různá napětí	52
Tabulka 4: Tabulka časů, za jak dlouho předmět 50 cm	58

Seznam příloh

Příloha I: Výtah hmotových charakteristik ze softwaru Creo Parametric pro excentr s nevývažkem

Příloha II: Program Maple pro řešení s konstantní úhlovou rychlostí

Příloha III: Program Maple pro řešení s konstantním hnacím momentem

Příloha IV: Program Maple pro řešení s momentovou charakteristikou

Příloha V: Výkresy

Příloha I: Výtah hmotových charakteristik ze softwaru Creo Parametric pro excentr s nevývažkem

File Edit View

VOLUME = 1.1056342e+04 MM^3

SURFACE AREA = 5.8945323e+03 MM^2

AVERAGE DENSITY = 4.4458161e-03 GRAM / MM^3

MASS = 4.9154462e+01 GRAM

MP_SOURCE = GEOMETRY

CENTER OF GRAVITY with respect to _NEUVVAZEK coordinate frame:

X Y Z 0.000000e+00 0.000000e+00 2.3098539e+01 MM

INERTIA with respect to _NEUVVAZEK coordinate frame: (GRAM * MM^2)

INERTIA TENSOR:

Ixx Ixy Ixz 3.7450720e+04 0.000000e+00 0.000000e+00

Iyx Iyy Iyz 0.000000e+00 2.9369415e+04 0.000000e+00

Izx Izy Izz 0.000000e+00 0.000000e+00 8.5897575e+03

INERTIA at CENTER OF GRAVITY with respect to _NEUVVAZEK coordinate frame: (GRAM * MM^2)

INERTIA TENSOR:

Ixx Ixy Ixz 1.1224726e+04 0.000000e+00 0.000000e+00

Iyx Iyy Iyz 0.000000e+00 3.1434197e+03 0.000000e+00

Izx Izy Izz 0.000000e+00 0.000000e+00 8.5897575e+03

PRINCIPAL MOMENTS OF INERTIA: (GRAM * MM^2)

I1 I2 I3 3.1434197e+03 8.5897575e+03 1.1224726e+04

ROTATION MATRIX from _NEUVVAZEK orientation to PRINCIPAL AXES:

0.00000 0.00000 1.00000

1.00000 0.00000 0.00000

0.00000 1.00000 0.00000

ROTATION ANGLES from _NEUVVAZEK orientation to PRINCIPAL AXES (degrees):

angles about x y z 0.000 90.000 90.000

RADII OF GYRATION with respect to PRINCIPAL AXES:

R1 R2 R3 7.9968640e+00 1.3219316e+01 1.5111459e+01 MM

MASS PROPERTIES OF COMPONENTS OF THE ASSEMBLY

(in assembly units and the _NEUVVAZEK coordinate frame)

DENSITY MASS C.G.: X Y Z

SILON MATERIAL: SILON_PA6

1.16000e-03 6.96503e+00 0.00000e+00 0.00000e+00 1.02998e+01

MOSAZ MATERIAL: MOSAZ

8.40900e-03 3.82358e+01 0.00000e+00 0.00000e+00 2.63261e+01

CSN_021146_01_M4X14 MATERIAL: UNKNOWN

7.82900e-03 1.97680e+00 0.00000e+00 -2.00000e+01 1.44318e+01

CSN_021146_01_M4X14 MATERIAL: UNKNOWN

7.82900e-03 1.97680e+00 0.00000e+00 2.00000e+01 1.44318e+01

Příloha II: Program Maple pro řešení s konstantní úhlovou rychlostí

```

> restart;
> with(plots):
with(plottools):
with(linalg):
> r1:= -Rx-Ta-Tb-D2=0;
r2:= -G2-Ry+Na+Nb=0;
r3:=-Mh+(h-yt)*Rx+(xt-b)*Ry-xt*Na+(1-xt)*Nb-yt*(Ta+Tb)=0;


$$r1 := -Rx - Ta - Tb - D2 = 0$$


$$r2 := -G2 - Ry + Na + Nb = 0$$


$$r3 := -Mh + (h - yt) Rx + (xt - b) Ry - xt Na + (1 - xt) Nb - yt (Ta + Tb) = 0$$


> r4:=Rx-D3+Od*cos(phi)+T*sin(phi)=0;
r5:=-G3+Ry+Od*sin(phi)-T*cos(phi)=0;
r6:=Mh+e*(Rx*sin(phi)-Ry*cos(phi))-Md=0;


$$r4 := Rx - D3 + Od \cos(\phi) + T \sin(\phi) = 0$$


$$r5 := -G3 + Ry + Od \sin(\phi) - T \cos(\phi) = 0$$


$$r6 := Mh + e (Rx \sin(\phi) - Ry \cos(\phi)) - Md = 0$$


> G2:=m2*g;
D2:=m2*a;
G3:=m3*g;
D3:=m3*a;
Od:=m3*e*omega^2;
T:=m3*e*alpha;
Md:=Js*alpha;
Ta:=signum(v(phi))*f*Na;
Tb:=signum(v(phi))*f*Nb;


$$G2 := m2 g$$


$$D2 := m2 a$$


$$G3 := m3 g$$


$$D3 := m3 a$$


$$Od := m3 e \omega^2$$


$$T := m3 e \alpha$$


$$Md := J_s \alpha$$


$$Ta := \text{signum}(v(\phi)) f Na$$


$$Tb := \text{signum}(v(\phi)) f Nb$$


```

```
> alpha:=0;
```

$$\alpha := 0$$

```
> Rx:=solve(r4,Rx);
```

```
Ry:=solve(r5,Ry);
```

$$Rx := m3 a - m3 e \omega^2 \cos(\phi)$$

$$Ry := m3 g - m3 e \omega^2 \sin(\phi)$$

```
> r1;r2;r3;
```

$$-m3 a + m3 e \omega^2 \cos(\phi) - \text{signum}(v(\phi)) fNa - \text{signum}(v(\phi)) fNb \\ - m2 a = 0$$

$$-m2 g - m3 g + m3 e \omega^2 \sin(\phi) + Na + Nb = 0$$

$$-Mh + (h - yt) (m3 a - m3 e \omega^2 \cos(\phi)) + (xt - b) (m3 g \\ - m3 e \omega^2 \sin(\phi)) - xt Na + (l - xt) Nb \\ - yt (\text{signum}(v(\phi)) fNa + \text{signum}(v(\phi)) fNb) = 0$$

```
> solve({r2,r3},{Na,Nb}):
```

```
assign(%);
```

```
> Na;Nb;
```

$$-\frac{1}{l} (-m2 gl - m3 gl + m3 e \omega^2 \sin(\phi) l + Mh - h m3 a \\ + h m3 e \omega^2 \cos(\phi) + yt m3 a - yt m3 e \omega^2 \cos(\phi) + b m3 g \\ - b m3 e \omega^2 \sin(\phi) + xt m2 g + yt \text{signum}(v(\phi)) f m2 g \\ + yt \text{signum}(v(\phi)) f m3 g - yt \text{signum}(v(\phi)) f m3 e \omega^2 \sin(\phi)) \\ \frac{1}{l} (Mh - h m3 a + h m3 e \omega^2 \cos(\phi) + yt m3 a - yt m3 e \omega^2 \cos(\phi) \\ + b m3 g - b m3 e \omega^2 \sin(\phi) + xt m2 g + yt \text{signum}(v(\phi)) f m2 g \\ + yt \text{signum}(v(\phi)) f m3 g - yt \text{signum}(v(\phi)) f m3 e \omega^2 \sin(\phi))$$

```
> Mh:=solve(r6,Mh);
```

$$Mh := -e m3 (\sin(\phi) a - \cos(\phi) g)$$

```
> r1;
```

```
a:=solve(r1,a);
```

$$\begin{aligned}
& -m_3 a + m_3 e \omega^2 \cos(\phi) + \frac{1}{l} \left(\text{signum}(v(\phi)) f(-m_2 g l - m_3 g l \right. \\
& \quad + m_3 e \omega^2 \sin(\phi) l - e m_3 (\sin(\phi) a - \cos(\phi) g) - h m_3 a \\
& \quad + h m_3 e \omega^2 \cos(\phi) + y t m_3 a - y t m_3 e \omega^2 \cos(\phi) + b m_3 g \\
& \quad - b m_3 e \omega^2 \sin(\phi) + x t m_2 g + y t \text{signum}(v(\phi)) f m_2 g \\
& \quad \left. + y t \text{signum}(v(\phi)) f m_3 g - y t \text{signum}(v(\phi)) f m_3 e \omega^2 \sin(\phi) \right) \\
& - \frac{1}{l} \left(\text{signum}(v(\phi)) f(-e m_3 (\sin(\phi) a - \cos(\phi) g) \right. \\
& \quad - h m_3 a + h m_3 e \omega^2 \cos(\phi) + y t m_3 a - y t m_3 e \omega^2 \cos(\phi) \\
& \quad + b m_3 g - b m_3 e \omega^2 \sin(\phi) + x t m_2 g + y t \text{signum}(v(\phi)) f m_2 g \\
& \quad \left. + y t \text{signum}(v(\phi)) f m_3 g - y t \text{signum}(v(\phi)) f m_3 e \omega^2 \sin(\phi) \right) \\
& - m_2 a = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a := \frac{1}{m_3 + m_2} & \left(m_3 e \omega^2 \cos(\phi) - \text{signum}(v(\phi)) f m_2 g \right. \\
& \left. - \text{signum}(v(\phi)) f m_3 g + \text{signum}(v(\phi)) f m_3 e \omega^2 \sin(\phi) \right)
\end{aligned}$$

> dr1:=diff(v(phi),phi)=a/omega;

dr2:=diff(u(phi),phi)=v(phi)/omega;

dr3:=diff(t(phi),phi)=1/omega;

$$\begin{aligned}
dr1 := \frac{d}{d\phi} v(\phi) &= \frac{1}{(m_3 + m_2) \omega} \left(m_3 e \omega^2 \cos(\phi) \right. \\
& - \text{signum}(v(\phi)) f m_2 g - \text{signum}(v(\phi)) f m_3 g \\
& \left. + \text{signum}(v(\phi)) f m_3 e \omega^2 \sin(\phi) \right)
\end{aligned}$$

$$dr2 := \frac{d}{d\phi} u(\phi) = \frac{v(\phi)}{\omega}$$

$$dr3 := \frac{d}{d\phi} t(\phi) = \frac{1}{\omega}$$

> m2:=0.106; # kg

m3:=0.098; # kg

l:=0.128; # m

xt:=0.05519; # m

yt:=0.04418; # m

b:=0.104; # m

h:=0.068; # m

e:=0.023; # m

g:=9.81; # m/s2

f:=0.135; # 1

```
omega:=24; # 1/s2
```

```
m2:=0.106
```

```
m3:=0.098
```

```
l:=0.128
```

```
xt:=0.05519
```

```
yt:=0.04418
```

```
b:=0.104
```

```
h:=0.068
```

```
e:=0.023
```

```
g:=9.81
```

```
f:=0.135
```

```
ω := 24
```

```
> dr1;dr2;
```

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} v(\phi) &= 0.2651764706 \cos(\phi) - 0.05518125000 \operatorname{signum}(v(\phi)) \\ &\quad + 0.03579882353 \operatorname{signum}(v(\phi)) \sin(\phi) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\phi} u(\phi) = \frac{1}{24} v(\phi)$$

```
>
```

```
res:=dsolve({dr1,dr2,dr3,v(0)=0,u(0)=0,t(0)=0},numeric,maxfun=50000000);
```

```
res:=proc(x_rkf45) ... end proc
```

```
> res(Pi);
```

$$\begin{aligned} [\phi = 3.14159265358979, t(\phi) = 0.130899693899575, u(\phi) \\ = 0.0156511572612880, v(\phi) = -0.0693351993184129] \end{aligned}$$

```
> Mh;
```

```
Rx;Ry;
```

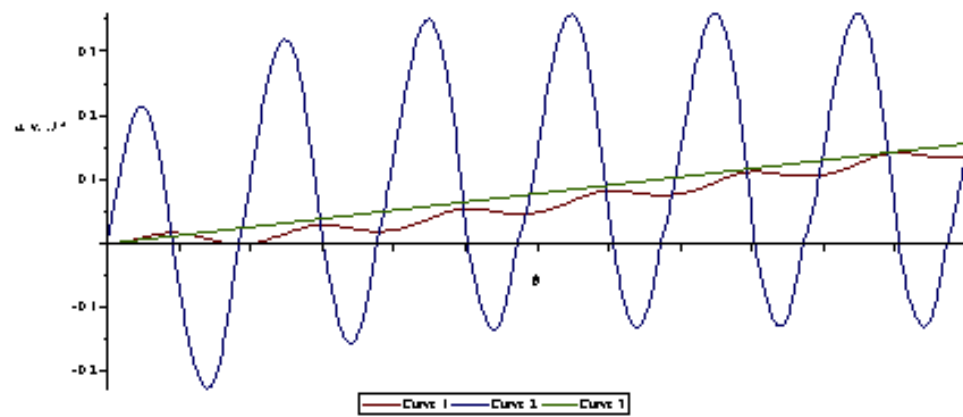
$$\begin{aligned} &-0.002254 \sin(\phi) (6.364235294 \cos(\phi) \\ &\quad - 1.324350000 \operatorname{signum}(v(\phi)) \\ &\quad + 0.8591717647 \operatorname{signum}(v(\phi)) \sin(\phi)) + 0.02211174 \cos(\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-0.6746089412 \cos(\phi) - 0.1297863000 \operatorname{signum}(v(\phi)) \\ &\quad + 0.08419883294 \operatorname{signum}(v(\phi)) \sin(\phi) \end{aligned}$$

$$0.96138 - 1.298304 \sin(\phi)$$

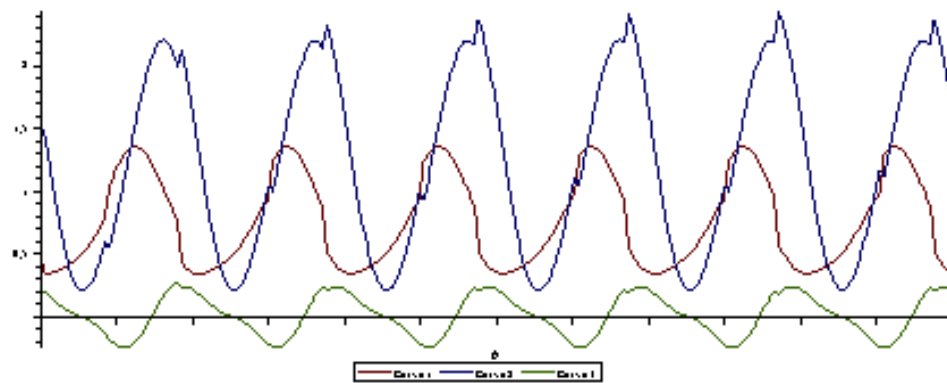
```
>
```

```
odeplot(res,[phi,u(phi)],[phi,v(phi)],[phi,0.1*t(phi)]),phi=0..12*Pi,tickmarks=[spacing(Pi),default]);
```



>

```
odeplot(res, [[phi, Na], [phi, Nb], [phi, 10*Mh]], phi=0..12*Pi, tickmarks=[spacing(Pi), default]);
```



Příloha III: Program Maple pro řešení s konstantním hnacím momentem

```
> restart;
> with(plots):
with(plottools):
with(linalg):
> r1:= -Rx-Ta-Tb-D2=0;
r2:= -G2-Ry+Na+Nb=0;
r3:=-Mh+(h-yt)*Rx+(xt-b)*Ry-xt*Na+(1-xt)*Nb-
yt*(Ta+Tb)=0;
```

$$r1 := -Rx - Ta - Tb - D2 = 0$$

$$r2 := -G2 - Ry + Na + Nb = 0$$

$$r3 := -Mh + (h - yt) Rx + (xt - b) Ry - xt Na + (1 - xt) Nb - yt (Ta + Tb) = 0$$

```
> r4:=Rx-D3+Od*cos(phi)+T*sin(phi)=0;
r5:=-G3+Ry+Od*sin(phi)-T*cos(phi)=0;
r6:=Mh+e*(Rx*sin(phi)-Ry*cos(phi))-Md=0;
```

$$r4 := Rx - D3 + Od \cos(\phi) + T \sin(\phi) = 0$$

$$r5 := -G3 + Ry + Od \sin(\phi) - T \cos(\phi) = 0$$

$$r6 := Mh + e (Rx \sin(\phi) - Ry \cos(\phi)) - Md = 0$$

```
> G2:=m2*g;
D2:=m2*a;
G3:=m3*g;
D3:=m3*a;
Od:=m3*e*omega(phi)^2;
T:=m3*e*alpha;
Md:=Js*alpha;
Ta:=signum(v(phi))*f*Na;
Tb:=signum(v(phi))*f*Nb;
```

$$G2 := m2 g$$

$$D2 := m2 a$$

$$G3 := m3 g$$

$$D3 := m3 a$$

$$Od := m3 e \omega(\phi)^2$$

$$T := m3 e \alpha$$

$$Md := Js \alpha$$

$$Ta := \text{signum}(v(\phi)) fNa$$

$$Tb := \text{signum}(v(\phi)) fNb$$

> Rx:=solve(r4,Rx) ;

Ry:=solve(r5,Ry) ;

$$Rx := m3 a - m3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) - m3 e \alpha \sin(\phi)$$

$$Ry := m3 g - m3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) + m3 e \alpha \cos(\phi)$$

> solve({r2,r3},{Na,Nb}) :

assign(%) ;

> Na;Nb;

$$-\frac{1}{l} \left(-m2 g l - m3 g l + m3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) l - m3 e \alpha \cos(\phi) l + Mh \right.$$

$$\left. - h m3 a + h m3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) + h m3 e \alpha \sin(\phi) + y t m3 a \right.$$

$$\left. - y t m3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) - y t m3 e \alpha \sin(\phi) + b m3 g \right.$$

$$\left. - b m3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) + b m3 e \alpha \cos(\phi) + x t m2 g \right.$$

$$\left. + y t \text{signum}(v(\phi)) f m2 g + y t \text{signum}(v(\phi)) f m3 g \right.$$

$$\left. - y t \text{signum}(v(\phi)) f m3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right.$$

$$\left. + y t \text{signum}(v(\phi)) f m3 e \alpha \cos(\phi) \right)$$

$$\frac{1}{l} \left(Mh - h m3 a + h m3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) + h m3 e \alpha \sin(\phi) + y t m3 a \right.$$

$$\left. - y t m3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) - y t m3 e \alpha \sin(\phi) + b m3 g \right.$$

$$\left. - b m3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) + b m3 e \alpha \cos(\phi) + x t m2 g \right.$$

$$\left. + y t \text{signum}(v(\phi)) f m2 g + y t \text{signum}(v(\phi)) f m3 g \right.$$

$$\left. - y t \text{signum}(v(\phi)) f m3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right.$$

$$\left. + y t \text{signum}(v(\phi)) f m3 e \alpha \cos(\phi) \right)$$

> r1;

a:=solve(r1,a) ;

alpha:=solve(r6,alpha) ;

$$\begin{aligned}
& -m_3 a + m_3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) + m_3 e \alpha \sin(\phi) + \frac{1}{l} \left(\text{signum}(v(\phi)) f \left(\right. \right. \\
& \quad -m_2 g l - m_3 g l + m_3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) l - m_3 e \alpha \cos(\phi) l + M h \\
& \quad - h m_3 a + h m_3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) + h m_3 e \alpha \sin(\phi) + y t m_3 a \\
& \quad - y t m_3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) - y t m_3 e \alpha \sin(\phi) + b m_3 g \\
& \quad - b m_3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) + b m_3 e \alpha \cos(\phi) + x t m_2 g \\
& \quad + y t \text{signum}(v(\phi)) f m_2 g + y t \text{signum}(v(\phi)) f m_3 g \\
& \quad - y t \text{signum}(v(\phi)) f m_3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \\
& \quad \left. \left. + y t \text{signum}(v(\phi)) f m_3 e \alpha \cos(\phi) \right) \right) \\
& - \frac{1}{l} \left(\text{signum}(v(\phi)) f \left(M h - h m_3 a + h m_3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) \right. \right. \\
& \quad + h m_3 e \alpha \sin(\phi) + y t m_3 a - y t m_3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) \\
& \quad - y t m_3 e \alpha \sin(\phi) + b m_3 g - b m_3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \\
& \quad + b m_3 e \alpha \cos(\phi) + x t m_2 g + y t \text{signum}(v(\phi)) f m_2 g \\
& \quad + y t \text{signum}(v(\phi)) f m_3 g - y t \text{signum}(v(\phi)) f m_3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \\
& \quad \left. \left. + y t \text{signum}(v(\phi)) f m_3 e \alpha \cos(\phi) \right) \right) - m_2 a = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a := & \frac{1}{m_3 + m_2} \left(\text{signum}(v(\phi)) f m_3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right. \\
& - \text{signum}(v(\phi)) f m_3 e \alpha \cos(\phi) + m_3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) \\
& \left. + m_3 e \alpha \sin(\phi) - \text{signum}(v(\phi)) f m_2 g - \text{signum}(v(\phi)) f m_3 g \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha := & \left(M h m_3 + M h m_2 + m_3^2 e^2 \text{signum}(v(\phi)) f \omega(\phi)^2 \sin(\phi)^2 \right. \\
& - m_3 e \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f m_2 g \\
& - m_3^2 e \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f g - m_3^2 e \cos(\phi) g \\
& \left. - m_3 e \cos(\phi) m_2 g + m_3^2 e^2 \cos(\phi) \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right) / \\
& \left(m_3^2 e^2 \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f \cos(\phi) + m_3 e^2 \sin(\phi)^2 m_2 \right. \\
& \left. + m_3^2 e^2 \cos(\phi)^2 + m_3 e^2 \cos(\phi)^2 m_2 + J_s m_3 + J_s m_2 \right)
\end{aligned}$$

```

> dr1:=diff(v(phi),phi)=a/omega(phi);
dr2:=diff(u(phi),phi)=v(phi)/omega(phi);
dr3:=diff(omega(phi),phi)=alpha/omega(phi);
dr4:=diff(t(phi),phi)=1/omega(phi);

```

$$\begin{aligned}
dr1 &:= \frac{d}{d\phi} v(\phi) \\
&= \frac{1}{(m3 + m2) \omega(\phi)} \left(\text{signum}(v(\phi)) f m3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right. \\
&\quad - \left(\text{signum}(v(\phi)) f m3 e (Mh m3 + Mh m2 + m3^2 e^2 \text{signum}(v(\phi) \right. \\
&\quad \left. \left. - m3 e \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f m2 g \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m3^2 e \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f g - m3^2 e \cos(\phi) g \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m3 e \cos(\phi) m2 g + m3^2 e^2 \cos(\phi) \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right) \cos(\phi) \right) / \\
&\quad \left(m3^2 e^2 \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f \cos(\phi) + m3 e^2 \sin(\phi)^2 m2 \right. \\
&\quad \left. + m3^2 e^2 \cos(\phi)^2 + m3 e^2 \cos(\phi)^2 m2 + Js m3 + Js m2 \right) \\
&\quad + m3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) + \left(m3 e (Mh m3 + Mh m2 \right. \\
&\quad \left. + m3^2 e^2 \text{signum}(v(\phi)) f \omega(\phi)^2 \sin(\phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - m3 e \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f m2 g \right. \\
&\quad \left. - m3^2 e \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f g - m3^2 e \cos(\phi) g \right. \\
&\quad \left. - m3 e \cos(\phi) m2 g + m3^2 e^2 \cos(\phi) \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right) \sin(\phi) \Big) / \\
&\quad \left(m3^2 e^2 \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f \cos(\phi) + m3 e^2 \sin(\phi)^2 m2 \right. \\
&\quad \left. + m3^2 e^2 \cos(\phi)^2 + m3 e^2 \cos(\phi)^2 m2 + Js m3 + Js m2 \right) \\
&\quad - \text{signum}(v(\phi)) f m2 g - \text{signum}(v(\phi)) f m3 g)
\end{aligned}$$

$$dr2 := \frac{d}{d\phi} u(\phi) = \frac{v(\phi)}{\omega(\phi)}$$

$$\begin{aligned}
dr3 &:= \frac{d}{d\phi} \omega(\phi) = \left(Mh m3 + Mh m2 \right. \\
&\quad \left. + m3^2 e^2 \text{signum}(v(\phi)) f \omega(\phi)^2 \sin(\phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - m3 e \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f m2 g \right. \\
&\quad \left. - m3^2 e \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f g - m3^2 e \cos(\phi) g \right. \\
&\quad \left. - m3 e \cos(\phi) m2 g + m3^2 e^2 \cos(\phi) \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right) / \\
&\quad \left(\left(m3^2 e^2 \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f \cos(\phi) + m3 e^2 \sin(\phi)^2 m2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m3^2 e^2 \cos(\phi)^2 + m3 e^2 \cos(\phi)^2 m2 + Js m3 + Js m2 \right) \omega(\phi) \right)
\end{aligned}$$

$$dr4 := \frac{d}{d\phi} t(\phi) = \frac{1}{\omega(\phi)}$$

```
> m2:=0.106; # kg
m3:=0.098; # kg
l:=0.128; # m
xt:=0.05519; # m
yt:=0.04418; # m
b:=0.104; # m
h:=0.068; # m
e:=0.023; # m
g:=9.81; # m/s
f:=0.135; # 1
Mh:=0.02; # Nm
Js:=75E-6; # kgm2
```

```
m2:=0.106
m3:=0.098
l:=0.128
xt:=0.05519
yt:=0.04418
b:=0.104
h:=0.068
e:=0.023
g:=9.81
f:=0.135
Mh:=0.02
Js:=0.000075
```

```
> phi0:=evalf(0*Pi/2);
x0:=.0;
omega0:=17;
```

```
phi0:=0.
x0:=0.
omega0:=17
```

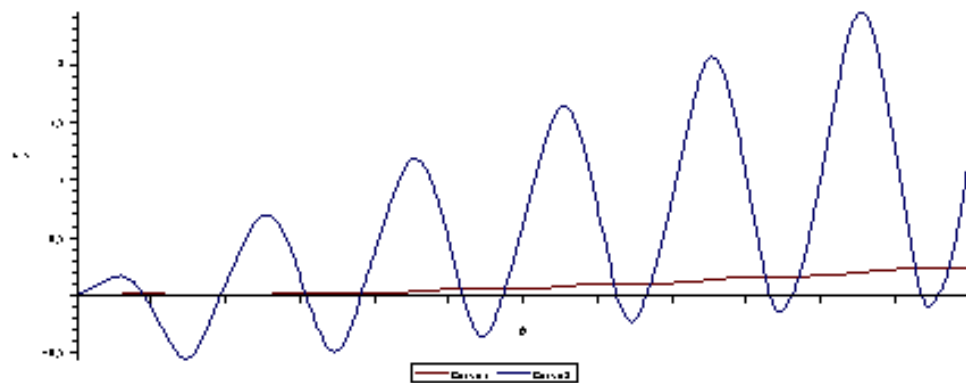
```
>
```

```
Res:=dsolve({dr1,dr2,dr3,dr4,v(phi0)=.0,u(phi0)=x0,omega(phi0)=omega0,t(phi0)=0},numeric, maxfun=500000);
```

```
Res:=proc(x_rkf45) ... end proc
```

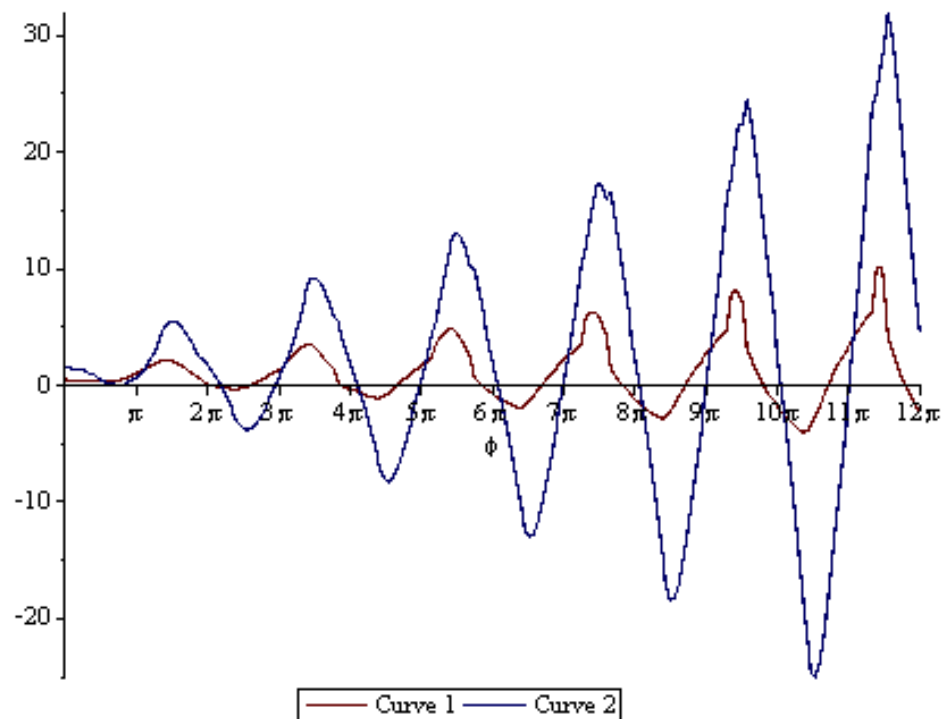
>

```
odeplot(Res, [[phi,u(phi)],[phi,v(phi)]],phi=0..12*Pi,tickmarks=[spacing(Pi),default]);
```



>

```
odeplot(Res, [[phi,Na],[phi,Nb]],phi=0..12*Pi,tickmarks=[spacing(Pi),default]);
```



Příloha IV: Program Maple pro řešení s momentovou charakteristikou

```

> restart;
> with(plots):
with(plottools):
with(linalg):
> r1:= -Rx-Ta-Tb-D2=0;
r2:= -G2-Ry+Na+Nb=0;
r3:=-Mh+(h-yt)*Rx+(xt-b)*Ry-xt*Na+(1-xt)*Nb-
yt*(Ta+Tb)=0;

```

$$r1 := -Rx - Ta - Tb - D2 = 0$$

$$r2 := -G2 - Ry + Na + Nb = 0$$

$$r3 := -Mh + (h - yt) Rx + (xt - b) Ry - xt Na + (1 - xt) Nb - yt (Ta + Tb) = 0$$

```

> r4:=Rx-D3+Od*cos(phi)+T*sin(phi)=0;
r5:=-G3+Ry+Od*sin(phi)-T*cos(phi)=0;
r6:=Mh+e*(Rx*sin(phi)-Ry*cos(phi))-Md=0;

```

$$r4 := Rx - D3 + Od \cos(\phi) + T \sin(\phi) = 0$$

$$r5 := -G3 + Ry + Od \sin(\phi) - T \cos(\phi) = 0$$

$$r6 := Mh + e (Rx \sin(\phi) - Ry \cos(\phi)) - Md = 0$$

```

> G2:=m2*g;
D2:=m2*a;
G3:=m3*g;
D3:=m3*a;
Od:=m3*e*omega(phi)^2;
T:=m3*e*alpha;
Md:=Js*alpha;
Ta:=signum(v(phi))*f*Na;
Tb:=signum(v(phi))*f*Nb;
Mh:=X->P-Q*X;

```

$$G2 := m2 g$$

$$D2 := m2 a$$

$$G3 := m3 g$$

$$D3 := m3 a$$

$$Od := m3 e \omega(\phi)^2$$

$$T := m3 e \alpha$$

$$Md := Js \alpha$$

$$Ta := \text{signum}(v(\phi)) fNa$$

$$Tb := \text{signum}(v(\phi)) fNb$$

$$Mh := X \rightarrow P - QX$$

> Rx:=solve(r4,Rx) ;

Ry:=solve(r5,Ry) ;

$$Rx := m3 a - m3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) - m3 e \alpha \sin(\phi)$$

$$Ry := m3 g - m3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) + m3 e \alpha \cos(\phi)$$

r1:=subs (Mh=Mh (omega (phi)) , r1) ;

r2:=subs (Mh=Mh (omega (phi)) , r2) ;

r3:=subs (Mh=Mh (omega (phi)) , r3) ;

r4:=subs (Mh=Mh (omega (phi)) , r4) ;

r5:=subs (Mh=Mh (omega (phi)) , r5) ;

r6:=subs (Mh=Mh (omega (phi)) , r6) ;

$$\begin{aligned} r1 := & -m3 a + m3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) + m3 e \alpha \sin(\phi) \\ & - \text{signum}(v(\phi)) fNa - \text{signum}(v(\phi)) fNb - m2 a = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r2 := & -m2 g - m3 g + m3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) - m3 e \alpha \cos(\phi) + Na + Nb \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r3 := & -P + Q \omega(\phi) + (h - yt) (m3 a - m3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) \\ & - m3 e \alpha \sin(\phi)) + (xt - b) (m3 g - m3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \\ & + m3 e \alpha \cos(\phi)) - xt Na + (l - xt) Nb \\ & - yt (\text{signum}(v(\phi)) fNa + \text{signum}(v(\phi)) fNb) = 0 \end{aligned}$$

$$r4 := 0 = 0$$

$$r5 := 0 = 0$$

$$\begin{aligned} r6 := & P - Q \omega(\phi) + e ((m3 a - m3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) \\ & - m3 e \alpha \sin(\phi)) \sin(\phi) - (m3 g - m3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \\ & + m3 e \alpha \cos(\phi)) \cos(\phi)) - Js \alpha = 0 \end{aligned}$$

> solve({r2,r3},{Na,Nb}) :

assign(%) ;

> Na;Nb;

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{l} \left(-m_2 g l - m_3 g l + m_3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) l - m_3 e \alpha \cos(\phi) l + P \right. \\
& \quad - Q \omega(\phi) - h m_3 a + h m_3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) + h m_3 e \alpha \sin(\phi) \\
& \quad + y t m_3 a - y t m_3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) - y t m_3 e \alpha \sin(\phi) + b m_3 g \\
& \quad - b m_3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) + b m_3 e \alpha \cos(\phi) + x t m_2 g \\
& \quad + y t \operatorname{signum}(v(\phi)) f m_2 g + y t \operatorname{signum}(v(\phi)) f m_3 g \\
& \quad - y t \operatorname{signum}(v(\phi)) f m_3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \\
& \quad \left. + y t \operatorname{signum}(v(\phi)) f m_3 e \alpha \cos(\phi) \right) \\
& \frac{1}{l} \left(P - Q \omega(\phi) - h m_3 a + h m_3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) + h m_3 e \alpha \sin(\phi) \right. \\
& \quad + y t m_3 a - y t m_3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) - y t m_3 e \alpha \sin(\phi) + b m_3 g \\
& \quad - b m_3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) + b m_3 e \alpha \cos(\phi) + x t m_2 g \\
& \quad + y t \operatorname{signum}(v(\phi)) f m_2 g + y t \operatorname{signum}(v(\phi)) f m_3 g \\
& \quad - y t \operatorname{signum}(v(\phi)) f m_3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \\
& \quad \left. + y t \operatorname{signum}(v(\phi)) f m_3 e \alpha \cos(\phi) \right)
\end{aligned}$$

> a:=solve(r1,a);

alpha:=solve(r6,alpha);

$$\begin{aligned}
a := & \frac{1}{m_3 + m_2} \left(\operatorname{signum}(v(\phi)) f m_3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right. \\
& - \operatorname{signum}(v(\phi)) f m_3 e \alpha \cos(\phi) + m_3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) \\
& \left. + m_3 e \alpha \sin(\phi) - \operatorname{signum}(v(\phi)) f m_2 g - \operatorname{signum}(v(\phi)) f m_3 g \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha := & \left(P m_3 + P m_2 - Q \omega(\phi) m_3 - Q \omega(\phi) m_2 \right. \\
& + m_3^2 e^2 \operatorname{signum}(v(\phi)) f \omega(\phi)^2 \sin(\phi)^2 \\
& - m_3 e \sin(\phi) \operatorname{signum}(v(\phi)) f m_2 g \\
& - m_3^2 e \sin(\phi) \operatorname{signum}(v(\phi)) f g - m_3^2 e \cos(\phi) g \\
& \left. - m_3 e \cos(\phi) m_2 g + m_3^2 e^2 \cos(\phi) \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right) / \\
& \left(m_3^2 e^2 \sin(\phi) \operatorname{signum}(v(\phi)) f \cos(\phi) + m_3 e^2 \sin(\phi)^2 m_2 \right. \\
& \left. + m_3^2 e^2 \cos(\phi)^2 + m_3 e^2 \cos(\phi)^2 m_2 + J_s m_3 + J_s m_2 \right)
\end{aligned}$$

> dr1:=diff(v(phi),phi)=a/omega(phi);

dr2:=diff(u(phi),phi)=v(phi)/omega(phi);

dr3:=diff(omega(phi),phi)=alpha/omega(phi);

dr4:=diff(t(phi),phi)=1/omega(phi);

$$\begin{aligned}
dr1 &:= \frac{d}{d\phi} v(\phi) \\
&= \frac{1}{(m3 + m2) \omega(\phi)} \left(\text{signum}(v(\phi)) f m3 e \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right. \\
&\quad - \left(\text{signum}(v(\phi)) f m3 e (P m3 + P m2 - Q \omega(\phi) m3 - Q \omega(\phi) m2) \right. \\
&\quad \left. + m3^2 e^2 \text{signum}(v(\phi)) f \omega(\phi)^2 \sin(\phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - m3 e \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f m2 g \right. \\
&\quad \left. - m3^2 e \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f g - m3^2 e \cos(\phi) g \right. \\
&\quad \left. - m3 e \cos(\phi) m2 g + m3^2 e^2 \cos(\phi) \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \cos(\phi) \right) / \\
&\quad \left(m3^2 e^2 \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f \cos(\phi) + m3 e^2 \sin(\phi)^2 m2 \right. \\
&\quad \left. + m3^2 e^2 \cos(\phi)^2 + m3 e^2 \cos(\phi)^2 m2 + Js m3 + Js m2 \right) \\
&\quad + m3 e \omega(\phi)^2 \cos(\phi) + \left(m3 e (P m3 + P m2 - Q \omega(\phi) m3 \right. \\
&\quad \left. - Q \omega(\phi) m2 + m3^2 e^2 \text{signum}(v(\phi)) f \omega(\phi)^2 \sin(\phi)^2 \right. \\
&\quad \left. - m3 e \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f m2 g \right. \\
&\quad \left. - m3^2 e \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f g - m3^2 e \cos(\phi) g \right. \\
&\quad \left. - m3 e \cos(\phi) m2 g + m3^2 e^2 \cos(\phi) \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \sin(\phi) \right) / \\
&\quad \left(m3^2 e^2 \sin(\phi) \text{signum}(v(\phi)) f \cos(\phi) + m3 e^2 \sin(\phi)^2 m2 \right. \\
&\quad \left. + m3^2 e^2 \cos(\phi)^2 + m3 e^2 \cos(\phi)^2 m2 + Js m3 + Js m2 \right) \\
&\quad \left. - \text{signum}(v(\phi)) f m2 g - \text{signum}(v(\phi)) f m3 g \right)
\end{aligned}$$

$$dr2 := \frac{d}{d\phi} u(\phi) = \frac{v(\phi)}{\omega(\phi)}$$

$$\begin{aligned}
 dr3 := & \frac{d}{d\phi} \omega(\phi) = \left(P m3 + P m2 - Q \omega(\phi) m3 - Q \omega(\phi) m2 \right. \\
 & + m3^2 e^2 \operatorname{signum}(v(\phi)) f \omega(\phi)^2 \sin(\phi)^2 \\
 & - m3 e \sin(\phi) \operatorname{signum}(v(\phi)) f m2 g \\
 & - m3^2 e \sin(\phi) \operatorname{signum}(v(\phi)) f g - m3^2 e \cos(\phi) g \\
 & \left. - m3 e \cos(\phi) m2 g + m3^2 e^2 \cos(\phi) \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right) / \\
 & \left(\left(m3^2 e^2 \sin(\phi) \operatorname{signum}(v(\phi)) f \cos(\phi) + m3 e^2 \sin(\phi)^2 m2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + m3^2 e^2 \cos(\phi)^2 + m3 e^2 \cos(\phi)^2 m2 + Js m3 + Js m2 \right) \omega(\phi) \right)
 \end{aligned}$$

$$dr4 := \frac{d}{d\phi} t(\phi) = \frac{1}{\omega(\phi)}$$

> m2:=0.106; # kg

m3:=0.098; # kg

l:=0.128; # m

xt:=0.05519; # m

yt:=0.04418; # m

b:=0.104; # m

h:=0.068; # m

e:=0.023; # m

g:=9.81; # m/s

f:=0.135; # 1

P:=0.5558;

Q:=0.0239;

Js:=75E-6; # kgm2

m2 := 0.106

m3 := 0.098

l := 0.128

xt := 0.05519

yt := 0.04418

b := 0.104

h := 0.068

e := 0.023

g := 9.81

f := 0.135

P := 0.5558

Q := 0.0239

Js := 0.000075

> dr1;dr2;dr3;dr4;

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\phi} v(\phi) \\
&= \frac{1}{\omega(\phi)} \left(4.901960784 \left(0.000304290 \operatorname{signum}(v(\phi)) \omega(\phi)^2 \right. \right. \\
&\quad \sin(\phi) - \left(0.000304290 \operatorname{signum}(v(\phi)) \left(0.1133832 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 0.0048756 \omega(\phi) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 6.85869660 \cdot 10^{-7} \operatorname{signum}(v(\phi)) \omega(\phi)^2 \sin(\phi)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 0.0006089573196 \sin(\phi) \operatorname{signum}(v(\phi)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 0.00451079496 \cos(\phi) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 0.000005080516 \cos(\phi) \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right) \cos(\phi) \right) / \\
&\quad \left(6.85869660 \cdot 10^{-7} \sin(\phi) \operatorname{signum}(v(\phi)) \cos(\phi) \right. \\
&\quad \left. + 0.000005495252 \sin(\phi)^2 + 0.000010575768 \cos(\phi)^2 \right. \\
&\quad \left. + 0.000015300 \right) + 0.002254 \omega(\phi)^2 \cos(\phi) \\
&\quad + \left(0.002254 \left(0.1133832 - 0.0048756 \omega(\phi) + 6.85869660 \cdot 10^{-7} \operatorname{signum}(v(\phi)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 0.000005080516 \cos(\phi) \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right) \sin(\phi) \right) / \\
&\quad \left(6.85869660 \cdot 10^{-7} \sin(\phi) \operatorname{signum}(v(\phi)) \cos(\phi) \right. \\
&\quad \left. + 0.000005495252 \sin(\phi)^2 + 0.000010575768 \cos(\phi)^2 \right. \\
&\quad \left. + 0.000015300 \right) - 0.27016740 \operatorname{signum}(v(\phi)) \Big)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\phi} u(\phi) = \frac{v(\phi)}{\omega(\phi)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} \omega(\phi) = & \left(0.1133832 - 0.0048756 \omega(\phi) \right. \\ & + 6.85869660 \cdot 10^{-7} \operatorname{signum}(v(\phi)) \omega(\phi)^2 \sin(\phi)^2 \\ & - 0.0006089573196 \sin(\phi) \operatorname{signum}(v(\phi)) \\ & - 0.00451079496 \cos(\phi) \\ & + 0.000005080516 \cos(\phi) \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \left. \right) / \\ & \left(\left(6.85869660 \cdot 10^{-7} \sin(\phi) \operatorname{signum}(v(\phi)) \cos(\phi) \right. \right. \\ & + 0.000005495252 \sin(\phi)^2 + 0.000010575768 \cos(\phi)^2 \\ & \left. \left. + 0.000015300 \right) \omega(\phi) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\phi} t(\phi) = \frac{1}{\omega(\phi)}$$

```
> phi0:=evalf(0*Pi/2);
```

```
x0:=.0;
```

```
omega0:=15;
```

```
phi0:=0.
```

```
x0:=0.
```

```
omega0:=15
```

```
>
```

```
Res:=dsolve({dr1,dr2,dr3,dr4,v(phi0)=.0,u(phi0)=x0,omega(phi0)=omega0,t(phi0)=0},numeric, maxfun=500000);
```

```
Res:=proc(x_rkf45) ... end proc
```

```
> Res(phi0);
```

```
Res(0.348);
```

```
[phi=0., omega(phi)=15., t(phi)=0., u(phi)=0., v(phi)=0.]
```

```
[phi=0.348, omega(phi)=22.1648848568032, t(phi)=0.0172291529699276,
```

```
u(phi)=0.000349225977341845, v(phi)=0.0523854485321950]
```

```
> Mh(omega(phi));
```

```
0.5558 - 0.0239 omega(phi)
```

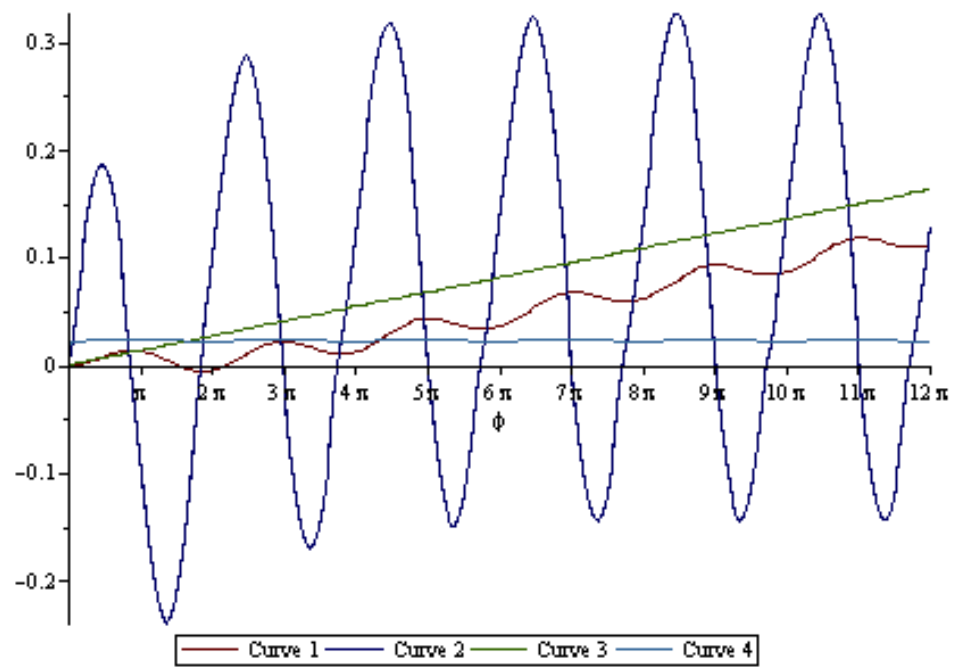
```
> Na;Nb;
```

$$\begin{aligned}
& 0.1867187500 \, \omega(\phi) - 0.1174023859 \, \text{signum}(v(\phi)) \\
& + \left(0.0004226250000 \left(0.1133832 - 0.0048756 \, \omega(\phi) + 6.85869\epsilon \right. \right. \\
& \left. \left. - 0.0006089573196 \sin(\phi) \, \text{signum}(v(\phi)) \right. \right. \\
& \left. \left. - 0.00451079496 \cos(\phi) \right. \right. \\
& \left. \left. + 0.000005080516 \cos(\phi) \, \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right) \cos(\phi) \right) / \\
& \left(6.85869660 \, 10^{-7} \sin(\phi) \, \text{signum}(v(\phi)) \cos(\phi) \right. \\
& \left. + 0.000005495252 \sin(\phi)^2 + 0.000010575768 \cos(\phi)^2 \right. \\
& \left. + 0.000015300 \right) - 3.570427136 \\
& - 0.0004226250000 \, \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \\
& + 0.0001322305060 \, \text{signum}(v(\phi)) \, \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \\
& - \left(0.0002179522703 \left(0.1133832 - 0.0048756 \, \omega(\phi) + 6.85869\epsilon \right. \right. \\
& \left. \left. + 6.85869660 \, 10^{-7} \sin(\phi) \, \text{signum}(v(\phi)) \cos(\phi) \right. \right. \\
& \left. \left. + 0.000005495252 \sin(\phi)^2 + 0.000010575768 \cos(\phi)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 0.000015300 \right) \right. \\
& \left. - \left(0.0001322305060 \, \text{signum}(v(\phi)) \left(0.1133832 - 0.0048756 \, \omega(\phi) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - 0.0006089573196 \sin(\phi) \, \text{signum}(v(\phi)) \right. \right. \\
& \left. \left. - 0.00451079496 \cos(\phi) \right. \right. \\
& \left. \left. + 0.000005080516 \cos(\phi) \, \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \right) \cos(\phi) \right) / \\
& \left(6.85869660 \, 10^{-7} \sin(\phi) \, \text{signum}(v(\phi)) \cos(\phi) \right. \\
& \left. + 0.000005495252 \sin(\phi)^2 + 0.000010575768 \cos(\phi)^2 \right. \\
& \left. + 0.000015300 \right) - 0.0002179522702 \, \omega(\phi)^2 \cos(\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5.571667136 - 0.1867187500 \omega(\phi) \\
& - 0.0001322305060 \operatorname{signum}(v(\phi)) \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \\
& + (0.0001322305060 \operatorname{signum}(v(\phi)) (0.1133832 - 0.0048756 \omega(\phi) \\
& - 0.0006089573196 \sin(\phi) \operatorname{signum}(v(\phi)) \\
& - 0.00451079496 \cos(\phi) \\
& + 0.000005080516 \cos(\phi) \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \cos(\phi)) / \\
& (6.85869660 \cdot 10^{-7} \sin(\phi) \operatorname{signum}(v(\phi)) \cos(\phi) \\
& + 0.000005495252 \sin(\phi)^2 + 0.000010575768 \cos(\phi)^2 \\
& + 0.000015300) + 0.0002179522703 \omega(\phi)^2 \cos(\phi) \\
& + (0.0002179522703 (0.1133832 - 0.0048756 \omega(\phi) + 6.858696 \\
& + 0.000005080516 \cos(\phi) \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \cos(\phi)) / \\
& (6.85869660 \cdot 10^{-7} \sin(\phi) \operatorname{signum}(v(\phi)) \cos(\phi) \\
& + 0.000005495252 \sin(\phi)^2 + 0.000010575768 \cos(\phi)^2 \\
& + 0.000015300) + 0.1174023859 \operatorname{signum}(v(\phi)) \\
& - 0.001831375000 \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \\
& + (0.001831375000 (0.1133832 - 0.0048756 \omega(\phi) + 6.858696 \\
& + 0.000005080516 \cos(\phi) \omega(\phi)^2 \sin(\phi) \cos(\phi)) / \\
& (6.85869660 \cdot 10^{-7} \sin(\phi) \operatorname{signum}(v(\phi)) \cos(\phi) \\
& + 0.000005495252 \sin(\phi)^2 + 0.000010575768 \cos(\phi)^2 \\
& + 0.000015300)
\end{aligned}$$

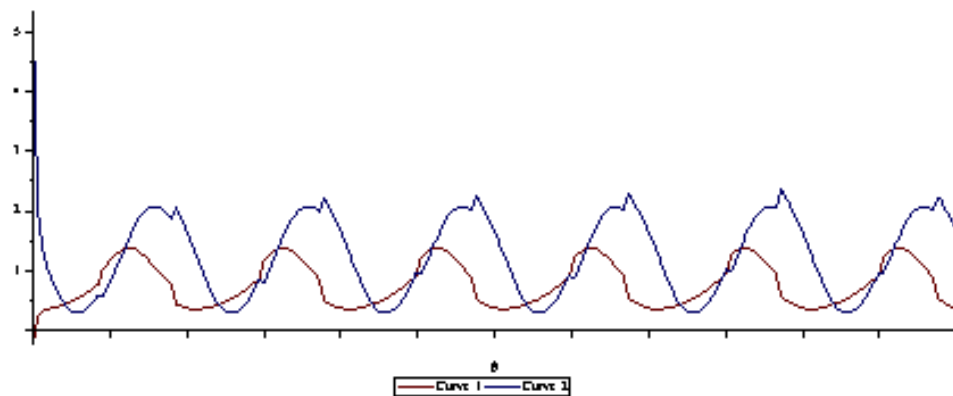
>

```
odeplot(Res, [[phi, u(phi)], [phi, v(phi)], [phi, 0.1*t(phi)], [phi, 0.001*omega(phi)]], phi=0..12*Pi, tickmarks=[spacing(Pi), default]);
```

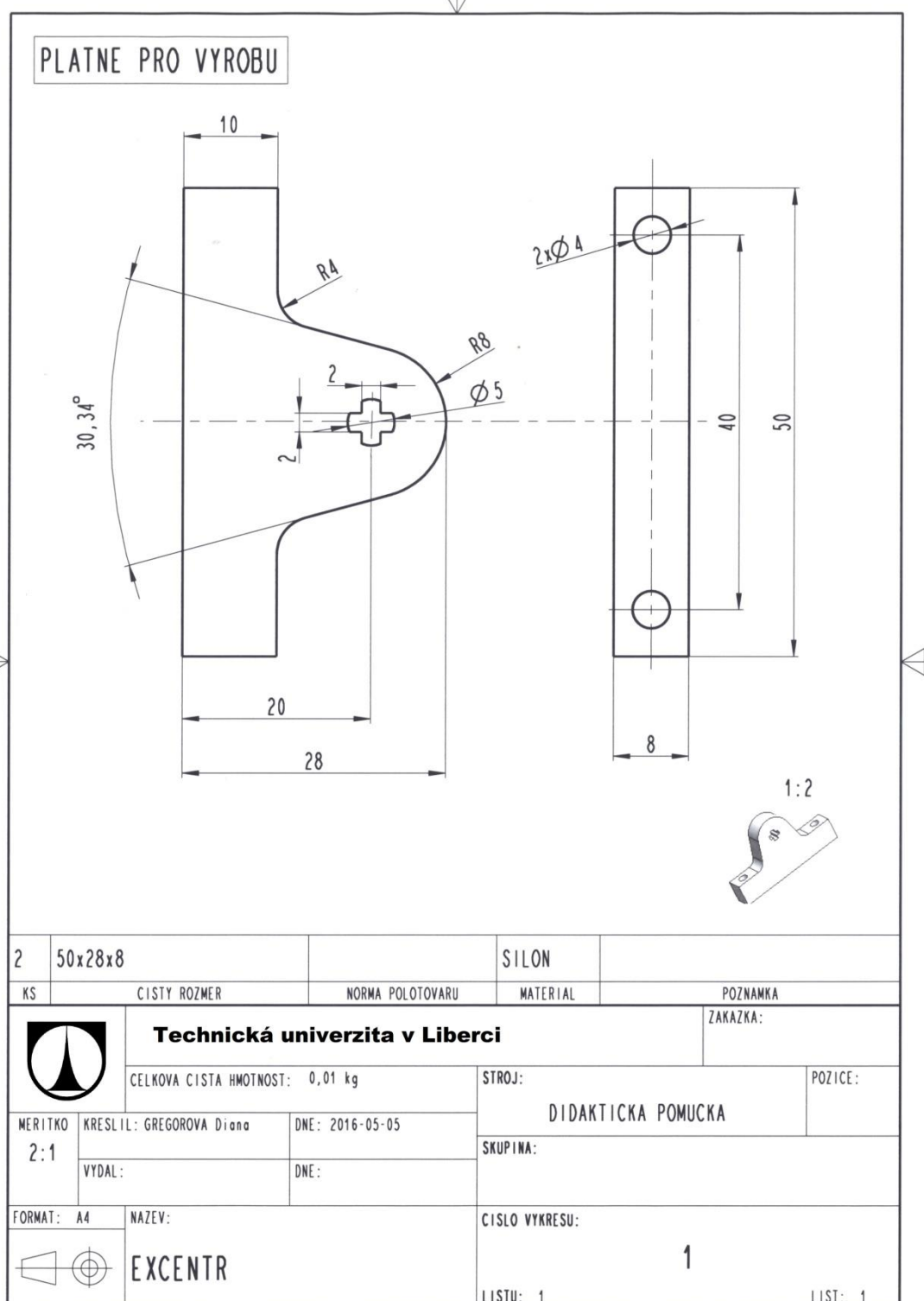


>

```
odeplot(Res, [[phi,Na],[phi,Nb]],phi=0..12*Pi,tickmarks=[spacing(Pi),default]);
```

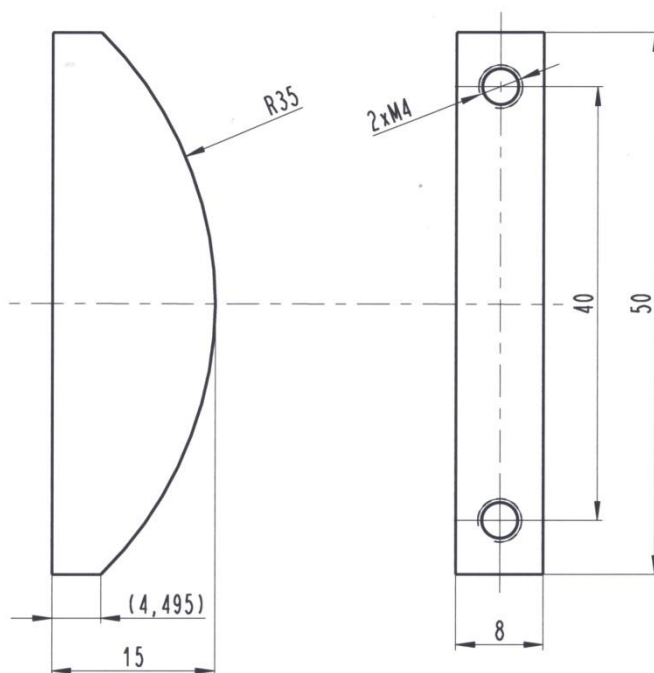


Příloha V: Výkresy



PLATNE PRO VYROBU

3.2/()

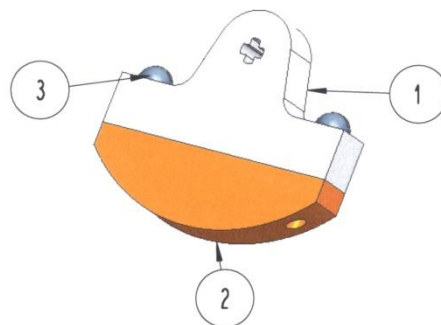
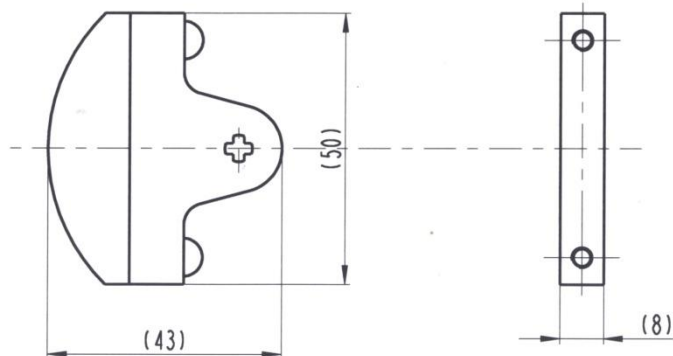


1:2



2	50x15x8		MOSAZ	
KS	CISTY ROZMER	NORMA POLOTOVARU	MATERIAL	POZNAMKA
		Technická univerzita v Liberci		ZAKAZKA:
CELKOVA CISTA HMOTNOST: 0,04 kg		STROJ:		POZICE:
MERITKO 2:1		DNE: 2016-05-05		DIDAKTICKA POMUCKA
VYDAL:		DNE:		SKUPINA:
FORMAT: A4	NAZEV:		CISLO VYKRESU:	
		NEVYVAZEK		2
		LISTU: 1		LIST: 1

PLATNE PRO VYROBU



2	SROUB M4 x 14	CSN 02 1146		0,00		3
1	NEVYVAZEK 2	50x15x8	MOSAZ	0,04		2
1	EXCENTR 1	50x28x8	SILON	0,01		1
KS	NAZEV CISLO VYKRESU	NORMA POLOTOVARU CISTY ROZMER	MATERIAL	HMOTNOST	POZNAMKA	POZICE

		Technická univerzita v Liberci		ZAKAZKA:	
		CELKOVA CISTA HMOTNOST: 0,05 kg		STROJ:	
MERITKO 1:1		KRESLIL: GREGOROVA Diana	DNE: 2016-05-05	DIDAKTICKA POMUCKA	
VYDAL:		DNE:	SKUPINA:		
FORMAT: A4		NAZEV:		CISLO VYKRESU:	
		SESTAVA		3	
				LISTU: 1 LIST: 1	