Vysoká škola strojní a textilní v Liberci

Fakulta strojní

ROZBOR NAPJATOSTI A NÁVRH KONTROLNÍHO VÝPOČTU TENKOSTĚNNÝCH KRUCENÝCH PRUTŮ

Kandidátská disertační práce

1992 Ing. Jitka JAGROVÁ

Vysoká škola strojní a textilní v Liberci

Fakulta strojní

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

Ing. Jitka Jágrová

Rozbor napjatosti a návrh jednoduchého kontrolního výpočtu tenkostěnných kroucených prutů otevřeného průřezu

Kandidátská disertační práce

UNIVERZITNÍ KNIHOVNA
TECHNICKÉ UNIVERZITY V LIBERCI
3146088178

VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ
Univerzitní knihovna
Voroněžská 1329, Liberec 1

V 2735

Liberec

prosinec 1992

OBSAH

SEZNAM POUŽITÝCH OZNAČENÍ 4

1. ÚVOD 7

2. CÍL PRÁCE 9

3. STRUČNÝ PŘEHLED STAVU ZKOUMANÉ PROBLEMATIKY 10

4. NÁVRH VÝPOČTU NAPJATOSTI 32

4.1 Definice součinitele napjatosti 32

4.2 Výpočet podle deplanační teorie 35

4.3 Srovnání řešení teorií deplanace, MKP a řešení doporučeného ČSN 73 1401 43

4.4 Výpočet podle teorie zkosu 46

4.5 Srovnání řešení teorií zkosu, MKP a řešení doporučeného ČSN 73 1401 51

4.6 Výpočet podle smíšené teorie 53

4.7 Nástin kontrolního výpočtu 64

5. PRŮŘEZOVÉ VELIČINY 68

5.1 Grafické zpracování průřezových veličin 68

5.2 Nahrazení výpočtu ω a I_ω jednodušším způsobem 73

5.3 Vliv různých tloušťek v průřezu 77

5.4 Závislost γ a I_γ na způsobu přenosu normálného napětí 78

6. POUZITI MKP NA ROZBOR NAPJATOSTI 80

6.1 Vliv zpevnění 81

6.2 Vliv tuhosti vetknutí 82

7. APLIKACE VYPOCTU NA KONSTRUKCNí PRVKY 87
RAMU PODVOZKU LIAZ 124.040

8. ZAVER 94

POUZITÁ LITERATURA 98

Seznam použitých označení

$x,y,z(z')$ - souřadné osy, souřadnice

K - střed krutu

C - střed smyku

$a_1 \div a_7$ - koeficienty diferenciální rovnice

$A_1 \div A_6$ - konstanty řešení dif. rovnice

b - šířka průřezu

b_o - šířka části příruby

$C_o, C_o(\ell)$ - opravný součinitel

$c_o \div c_6$ - průřezové konstanty grafického zpracování

C_1, C_2 - konstanty řešení diferenciální rovnice

D_1, D_2 - konstanty řešení diferenciální rovnice

d, d_i - charakteristický rozměr průřezu

E - modul pružnosti v tahu

e - souřadnice středu krutu

G - modul pružnosti ve smyku

h - výška průřezu

I_k - moment tuhosti v krutu

I_ω - moment tuhosti vůči deplanaci

I_ρ - kvadratický moment průvodiče

I_γ - kvadratický moment poměrné plochy průvodiče

I_{pz} - kvadratický moment plochy příruby k ose z(z')

$I_{s,y}$ - kvadratický moment plochy stojiny k ose y

K - součinitel napjatosti

K_A - součinitel napjatosti v exponovaném místě A

$K(x,s)$ - součinitel napjatosti v obecném místě prutu

$\ell, \bar{\ell}, \ell_o$ - délka prutu

$\ell_k, \ell_s(\ell_3)$ - charakteristická délka

ℓ_1 - délka setrvání špičky napětí

ℓ^* - délka zpevnění

$M_k, M_k(x)$ - celkový kroutící moment

$M_1(x)$ - kroutící moment vyvolávající τ_1

$M_\omega(x), M_\gamma(x)$ - kroutící moment vyvolávající τ_2

m_k - rovnoměrně rozdělený kroutící moment

M_o - ohybový moment

n - pomocná veličina

n_o - délka prvku

P(x) - partikulární řešení diferenciální rovnice

p - odchylka K_A

q(x,s) - smykový tok

s - délka střednice

S - plocha průřezu

$S_\omega(s)$ - statický moment polární plochy

$S_\gamma(s)$ - plocha průvodiče

S_o - plocha „výztuhy"

S_{pz} - statický moment příruby k ose z

S_{sy} - statický moment stojiny k ose y

t, t_i, t', t_o - tloušťka průřezu

T - posouvající síla

U - energie napjatosti

u_x, u_y, u_z - posuvy ve směru x,y,z

u(x,s) - deplanace

w(x) - průhyb příruby ve směru y

w - posuv ve směru tečny ke střednici

α^2 - poměrná tuhost

α_o - konstanta průřezu

β^2 - poměrná tuhost

β_o - konstanta průřezu

γ_{xs} - zkos

$\gamma, \gamma(s)$ - poměrná plocha průvodiče

δ - parametr diferenciální rovnice

ε_x - poměrné prodloužení

ζ - parametr diferenciální rovnice

η - poměrný rozměr průřezu

$\vartheta(x)$ - poměrný zkrut

$\varkappa$ - opravný součinitel

λ^2 - poměrná tuhost

ξ - poměrný rozměr průřezu

ρ - průvodič

$\sigma_\omega, \sigma_\omega(x,s)$ - normálné napětí podle deplanační teorie

$\sigma_\gamma, \sigma_\gamma(x,s)$ - normálné napětí podle teorie smyku

σ_{redA} - redukované napětí

$\sigma_{red,o}$ - redukované napětí při volném krutu

τ_o - smykové napětí při volném krutu

$\tau_1(x)$ - prvotní smykové napětí

$\tau_{2\omega}(x), \tau_{2\gamma}(x)$ - druhotné smykové napětí

$\tau(x,s)$ - celkové smykové napětí

$\varphi(x)$ - úhel pootočení

Φ - funkcionál napětí

$\omega, \omega_A, \omega(s)$ - hlavní polární plocha

ω_1 - polární plocha ze středu K

1. Úvod

Současná doba klade značné nároky na strojírenský výrobek z hlediska funkčního, ekonomického, ekologického, příp. estetického. Zatímco dokonalá funkčnost výrobku se samozřejmě předpokládá, je ekonomika tím nikdy nevyčerpaným reservoárem možností, jak výrobek učinit konkurence schopným. K ekonomickému hledisku patří nejen, i když především, efektivnost výroby, ale i návrh konstrukce a konečně i ekonomika vlastní práce konstruktéra či výpočtáře.

A tak konstruktér vždy hledá optimum řešení protikladných požadavků co nejmenší hmotnosti a největší pevnosti a tuhosti konstrukce, nejvhodnějšího funkčního tvaru výrobku a jeho co nejjednoduší výroby a řeší i problém navržení co nejpřesnějšího výpočtového modelu a jeho co nejjednodušího zpracování.

Právě tento problém budeme sledovat na konstrukci vystavené stísněnému krutu. Výpočtový model ať podle teorie deplanační, či podle jen poněkud novější teorie smyku je dobře znám, dostatečně podrobně rozebrán a pravděpodobně i využíván na specializovaných pracovištích (např. u náročných leteckých konstrukcí). Avšak konstruktér, který se s tímto problémem nesetkává často a který je ze základního kursu na vysoké škole vybaven v podstatě základní informací o tom, že existuje, nemá zřejmě pro obsáhnutí celé problematiky dostatečný časový

prostor. Tuto situaci může řešit buď svým konstruktérským citem a zkušenostmi, pak se ale většinou zříká možnosti navrhnout konstrukci co nejhospodárněji. Nebo pomocí nových výpočtových metod, především MKP, zpracuje komplexně napjatost v celém sledovaném objektu. Avšak i v dnešní době pestré nabídky uživatelských programů MKP půjde o časově náročnější práci, neboť zadání a vyhodnocení úlohy spotřebují určitý čas. Kromě toho tento způsob řešení, zřejmě nejvhodnější pro zhodnocení konečného návrhu, neumožní optimalizaci tvaru či rozměrů exponovaných míst konstrukce, anebo jen velmi těžkopádně opakováním celé úlohy. Konstruktér pro první návrh a optimalizaci potřebuje rychlý orientační výpočet, který by rovněž dokázal jednoduše sledovat vliv změny rozměrů, příp. tvaru. Takový výpočet je doporučen v [7], avšak zjednodušení řešení je na úkor předimenzování konstrukce. Hledisko dostatečné přesnosti výpočetního modelu a pracnosti jeho řešení stojí zde proti sobě dál a čeká na další pokus o řešení. Problém je aktuální především u prutů s průřezem otevřeným, kde stísněný krut vytváří výraznější špičky napětí než u prutů s tenkostěnným průřezem uzavřeným.

2. Cíl práce

Vzhledem k tomu, že problematika výpočtu tenkostěnných prutů namáhaných stísněným krutem je značně rozsáhlá a konstruktéři nemají většinou dostatečný časový prostor na to, aby se jí při výpočtu, kontrole či optimalizaci konstrukce mohli dostatečně věnovat, klade si tato práce za hlavní cíl podat jednoduchý návod pro stanovení namáhání nejvíce exponovaných míst kroucených prutů. Z těchto důvodů se snaží zjednodušit na co největší únosnou míru i výpočet potřebných průřezových veličin.

Dále si klade za cíl porovnat výsledky řešení podle jednotlivých teorií popisujících tento výpočtový model a stanovit hranice jejich platnosti pro dostatečně přesná řešení v závislosti na geometrických charakteristikách prutu.

Ačkoliv středem zájmu je především prověřit místo extrémního namáhání, t.j. průřez ve vetknutí, je sledována komplexní napjatost po celé délce prutu, což slouží k lepší možnosti srovnání jednotlivých metod výpočtu. Mezi použité metody patří i MKP, která bude dále použita i k odhadu vlivu tuhosti vetknutí a zpevnění okolí exponovaného místa na napjatost u daného výpočtového modelu.

3. Stručný přehled stavu zkoumané problematiky

Prvky konstrukcí, které je třeba navrhnout, provést jejich pevnostní výpočet a případně optimalisovat, lze v nejširším slova smyslu roztřídit podle jejich rozměrů (a odpovídajících výpočtových schémat) na čtyři skupiny :

- celistvá tělesa, jejichž rozměry jsou ve všech směrech třírozměrného prostoru stejného řádu;
- desky a skořepiny, jejichž dva rozměry jsou veličiny stejného řádu a tloušťka je vzhledem k nim velmi malá;
- pruty plného průřezu, jejichž všechny rozměry průřezu jsou srovnatelné a délka prutu je výrazně větší;
- tenkostěnné pruty, kde délka prutu **l** je větší než charakteristické rozměry průřezu a tyto výrazně větší než tloušťka průřezu **t**. V literatuře (např. [1], [5]) se uvádí, že do této skupiny zařazujeme průřezy, pro než platí

$$\frac{d}{t} \geq (5 \div 10) \quad ,$$

kde **d** je charakteristický rozměr průřezu.

Rozdělení výpočtového modelu na pruty plného a tenkostěnného průřezu vyplynulo z toho, že při kroucení některých tenkostěnných průřezů se tvoří normálná napětí v podélných vláknech prutu. Prut je vystaven složitější napjatosti, než je napjatost volného krutu. Přitom tato napjatost v některých částech prutu může být podstatně

nepříznivější než namáhání volným krutem a její doznívání po délce velmi pozvolné, a to především u prutů s otevřeným tenkostěnným průřezem, na něž se práce soustředí.

Všeobecně známé vztahy volného krutu pro zkrut ϑ, pootočení φ a smykové napětí τ_o jsou

$$\vartheta(x) = \frac{M_k(x)}{GI_k} \quad ,$$

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{M_k(x)}{GI_k}\, dx \quad , \qquad (3.1)$$

$$\tau_{oi} = \frac{M_k t_i}{I_k} \quad ,$$

kde moment tuhosti v krutu I_k lze pro otevřené průřezy určit ze vzorce

$$I_k = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} t_i^3 d_i \quad . \qquad (3.2)$$

Vztahy (3.1) platí pro libovolně uložené a zatížené pruty plného průřezu a některé pruty tenkostěnné (např. skládá-li se průřez ze dvou různých částí). Smyková napětí τ_o mají směr tečny ke střednici průřezu a jejich velikost se mění po tloušťce t; na střednici jsou nulová a maximální jsou v krajním vlákně. Krutová tuhost odpovídající této napjatosti je malá.

U prutů tenkostěnných průřezů libovolného tvaru

(kromě dříve uvedených) nastává volný krut jedině tehdy, jsou-li splněny následující podmínky : prut je prizmatický, vnitřní statický kroutící moment $M_k(x)$ = konst. pro všechny průřezy a prut je uložen tak, že v žádném jeho místě není bráněno volné deformaci průřezu. Není-li toto splněno, vzniká t.zv. stísněný (ohybový, nerovnoměrný) krut.

První zmínka zpracování tohoto problému se objevuje u S.P. Timošenka [12]. Následují další autoři např. [13], [14]. Další podrobné, ucelenější a obecnější zpracování si vynutily především tenkostěnné prvky leteckých konstrukcí, požadavky na jejich optimální řešení a spolehlivost.

Autorem obecné teorie pro otevřené tenkostěnné průřezy, t.zv. deplanační, je V.Z. Vlasov [1]. Tato teorie byla doplněna A.A. Umanským [15] pro průřezy uzavřené. Teorie deplanace je vhodná především pro dlouhé pruty. Podle [1] by měly rozměry prutu splňovat podmínku

$$\frac{\ell}{d} \geq 10 \quad .$$

Podle deplanační teorie nastane stísněný krut tehdy, je-li v nějakém průřezu prutu bráněno jeho volnému zprohýbání - deplanaci. Přitom předpokládáme, že při kroucení prutu se průřez jednak zprohýbá, jednak pootočí kolem středu krutu K, avšak obrys jeho tvaru se v rovině průřezu nezmění.

Diferenciální rovnice, která popisuje stav stísněného krutu, má tvar

$$\vartheta''(x) - \alpha^2\vartheta(x) = - \frac{\alpha^2}{GI_k} M_k(x) \quad , \tag{3.3}$$

kde $\alpha^2 = \frac{GI_k}{EI_\omega}$ značí poměrnou tuhost v kroucení. Je-li GI_K tuhost v krutu, je EI_ω t.zv.tuhost vůči deplanaci, kde průřezová veličina

$$I_\omega = \int_{(S)} \omega^2 \, dS \tag{3.4}$$

se nazývá moment tuhosti vůči deplanaci a vztahuje se k hlavní polární ploše, t.j. polární ploše vytvořené z pólu **P** totožného se středem krutu **K** z počátku **O** položeného do místa průřezu, kde $\omega = 0$.

Odvození diferenciální rovnice vychází z předpokladu, že celkový kroutící moment $M_k(x)$ se rozdělí na část $M_1(x)$, která se spotřebuje na jeho pootočení a část $M_\omega(x)$, spotřebovanou na jeho deplanaci, tedy

$$M_k(x) = M_1(x) + M_\omega(x) \quad . \tag{3.5}$$

Řešení diferenciální rovnice má tvar

$$\vartheta(x) = A_1 \cosh \alpha x + A_2 \sinh \alpha x + P(x) \quad ,$$

kde partikulární řešení

$$P(x) = - \frac{1}{GI_k} \int_0^x m(\xi) \, [\cosh \alpha(x - \xi) - 1] \, d\xi \quad .$$

Pro zatížení osamělým kroutícím momentem $M_k(x) = M_k = \text{konst.}$, má řešení tvar

$$\vartheta(x) = A_1 \cosh \alpha x + A_2 \sinh \alpha x + \frac{M_k}{GI_k} \quad . \qquad (3.6)$$

Konstanty A_1, A_2 se určí z okrajových podmínek. V místě tuhého vetknutí, či opření a v průřezu na ose symetrie platí, že deplanace u = Ø. Protože předpokládáme vztah

$$u(x,s) = - \omega(s) \, \vartheta(x) \quad , \qquad (3.7)$$

kde s je délka střednice v libovolném místě průřezu, platí rovněž ϑ = Ø.

Na volném konci a v místě posuvného vetknutí může řez volně deplanovat a proto zde nevznikají žádná normálná napětí (σ_ω = Ø).

V každém průřezu, kde je bráněno volné deplanaci, vzniká normálné napětí $\sigma_\omega(x,s)$. Předpokládáme-li, že podélná vlákna prutu na sebe nepůsobí, pak

$$\sigma_\omega(x,s) = E\varepsilon_x = E \frac{\partial u(s,x)}{\partial x} = - E \, \omega(s) \, \vartheta'(x) \quad . \qquad (3.8)$$

Průběh $\sigma_\omega(x,s)$ po délce prutu je dán funkcí $\vartheta'(x)$, po průřezu průběhem hlavní polární plochy $\omega(s)$, po tloušťce t je napětí konstantní.

Smykové napětí $\tau_1(x)$ t.zv. prvotní je způsobeno kroutícím momentem $M_1(x)$

$$\tau_1(x) = \frac{M_1(x)\, t}{I_k} = G\vartheta(x)\, t \quad , \tag{3.9}$$

Jeho rozdělení po průřezu a tloušťce t je stejné jako u volného krutu, po délce je dáno průběhem funkce $\vartheta(x)$.

Proměnnost normálného napětí po délce prutu vyvolává t.zv. druhotné smykové napětí $\tau_{2\omega}(x,s)$ a druhotný smykový tok

$$q(x,s) = -\int \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x}\, t\, ds = E\vartheta''(x)\, S_\omega(s) \quad . \tag{3.10}$$

Z rovnice rovnováhy ke středu krutu K dostaneme

$$M_\omega = \int_0^{s_0} q(s)\, d\omega = \emptyset - \int_0^{s_0} \omega\, dq = - E\vartheta''(x)\, I_\omega \quad . \tag{3.11}$$

Potom lze smykový tok a druhotné smykové napětí vyjádřit výrazy

$$q(x,s) = - \frac{M_\omega(x)\, S_\omega(s)}{I_\omega} \quad ;$$

$$\tau_{2\omega}(x,s) = \frac{- M_\omega(x)\, S_\omega(s)}{I_\omega\, t} \quad . \tag{3.12}$$

Druhotné smykové napětí $\tau_{2\omega}(x,s)$ se mění po délce prutu s funkcí $M_\omega(x)$, po průřezu s průřezovou veličinou

$$S_\omega(s) = \int_{(S)} \omega \, dS \quad ,$$

zvanou statický moment části polární plochy a po tloušťce t je konstantní. Veličina $S_\omega(s)$ a tedy i $\tau_{2\omega}(x,s)$ nabývá maximální hodnoty v těch místech průřezu, kde je hlavní polární plocha nulová.

Výsledné smykové napětí je

$$\tau(x,s) = \tau_1(x) + \tau_{2\omega}(x,s) \quad . \qquad (3.13)$$

Vlastnosti hlavní polární plochy $\omega(s) = \int_0^s \rho_o \, ds$ jsou definovány rovnicemi rovnováhy pro vnitřní síly v průřezu

$$\int_{(S)} \sigma_\omega \, dS = 0 \quad ,$$

$$\int_{(S)} \sigma_\omega \, y \, dS = 0 \quad ,$$

$$\int_{(S)} \sigma_\omega \, z \, dS = 0$$

pro souřadné osy y,z v rovině průřezu.

Stanovením průběhu a velikosti průřezových veličin $\omega(s)$, $S_\omega(s)$ a I_ω pro různé tvary průřezů se podrobně zabývá práce [2].

Pootočení $\varphi(x)$ určíme ze vztahu

$$\varphi(x) = \int \vartheta(x)\, dx + A_3 \,, \qquad (3.14)$$

kde konstanta A_3 je dána okrajovou podmínkou : v místě tuhého či posuvného vetknutí je $\varphi = 0$. Tuhost prutu namáhaného stísněným krutem je vyšší než při krutu volném.

Zavedeme-li pomocnou funkci - t.zv. bimoment $B_\omega(x)$ (moment druhého řádu v $[Nm^2]$)

$$B_\omega(x) = \int_{(S)} \sigma_\omega(x,s)\, \omega(s)\, dS = - EI_\omega \vartheta'(x) \,, \qquad (3.15)$$

lze diferenciální rovnici stísněného krutu také formulovat ve tvaru

$$B_\omega''(x) - \alpha^2 B_\omega(x) = M_k'(x) \,. \qquad (3.16)$$

Dále platí

$$B_\omega'(x) = M_\omega(x) \,, \qquad (3.17)$$

$$\sigma_\omega(x,s) = \frac{B_\omega(x)}{I_\omega}\, \omega(s) \,. \qquad (3.18)$$

Souřadný systém x,y,z, pro nějž všechny uvedené vztahy platí, má počátek (x = 0)v průřezu, který je vetknutý.

Zbývá ještě dodat, že pojmenování jednotlivých veličin, zejména průřezových, je v literatuře dosti různorodé. Zde bylo použito termínů podle [2].

Použití Vlasovovy teorie tenkostěnných konstrukcí pro výpočet znamená řešit diferenciální rovnici s příslušnou pravou stranou (podle charakteru zatěžujícího kroutícího momentu) a s příslušnými okrajovými podmínkami. Tato přílišná pracnost vedla ke snaze výpočet nějakým způsobem pro běžnou konstruktérskou praxi zjednodušit, např. zjednodušením diferenciální rovnice.

Je-li možné u prutu předpokládat, že tuhost v krutu GI_k je mnohem menší než tuhost vůči deplanaci EI_ω, pak $\alpha^2 \rightarrow 0$ a diferenciální rovnice přejde na jednoduchý tvar analogický diferenciální rovnici průhybové čáry ohýbaného nosníku

$$\vartheta''(x) = - \frac{M_k(x)}{EI_\omega} \quad . \tag{3.19}$$

Postupným řešením dostaneme

$$\vartheta'(x) = - \int \frac{M_k(x)}{EI_\omega} \, dx + A_4 \quad ,$$

$$\vartheta(x) = - \int \frac{M_k(x)}{EI_\omega} \, dx + A_4 x + A_5 \quad , \tag{3.20}$$

$$\varphi(x) = \int \vartheta(x) \, dx + A_6 \quad .$$

Konstanty A_4, A_5, A_6 určíme z okrajových podmínek. Funkce $\vartheta(x)$, $\vartheta'(x)$, $\vartheta''(x)$ udávají podle vztahů (3.9), (3.8) a (3.12) průběhy funkcí napětí $\tau_1(x)$, $\sigma_\omega(x)$ a $\tau_{2\omega}(x)$ po délce tyče. Řešení je uvedeno v ČSN 73 1401.

Ukázalo se, že toto řešení dává jen velmi hrubý (nadsazený) odhad namáhání. S chybou výpočtu do 5% je použitelné pouze pro pruty, pro něž platí $\alpha\ell < 0{,}4$ při uložení vetknutí - volný konec a $\alpha\ell < 1{,}5$ při vetknutí na obou koncích (viz. [8]).

Za základ upraveného přesnějšího řešení, uvedeného v komentáři k ČSN 73 1401 (viz [7]), byly vzaty práce [8] a [9] J. Melchera, které modifikují analogii kroucení tenkostěnných prutů s ohybem. Melcher zavádí opravný součinitel $\varkappa$, který respektuje závislost veličin vázaného kroucení na argumentu $\alpha\ell$. Vychází z hodnoty bimomentu, která se pro $0 < \alpha\ell < \infty$ pohybuje v rozsahu $B_{o\omega} > B_\omega > 0$, kde $B_{o\omega}$ je bimoment vyplývající ze zjednodušené analogie (obdoba ohybového momentu $M(x)$). V místě největšího namáhání lze vyjádřit

$$B_\omega = M_k \, F(\alpha l) \quad ,$$

kde

$$F(\alpha l) = F(0) \, (1 - \varkappa) \quad ,$$

přičemž

$$\varkappa = \frac{F(GI_k \rightarrow \emptyset) - F(GI_k)}{F(GI_k \rightarrow \emptyset)} \quad , \qquad (3.21)$$

$$F(GI_k \rightarrow \emptyset) = \lim_{\alpha \rightarrow o} F(GI_k) \quad .$$

Pro jednotlivé způsoby namáhání a jednotlivá uložení je $\varkappa$ zpracováno jednak graficky, jednak udáno příslušným vztahem (viz [7], [9]) .

Zatěžující veličiny stísněného krutu pak lze vyjádřit

$$B_\omega = B_{o\omega}(1 - \varkappa) \quad ,$$

$$M_\omega = M_k(1 - \varkappa) \quad , \qquad (3.22)$$

$$M_1 = M_k \varkappa$$

a odpovídající napětí

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega(x)\ \omega(\emptyset)}{I_\omega} (1 - \varkappa)$$

$$\tau_{2\omega} = \frac{M_\omega(x)\ S_\omega(s)}{tI_\omega} (1 - \varkappa) \qquad (3.23)$$

$$\tau_1 = \frac{M_1(x)\ t}{I_k} \varkappa$$

Pro malé hodnoty $\alpha\ell$ se veličina $\varkappa$ prudce mění, od určité velikosti $\alpha\ell$ se prakticky stabilizuje, což

odpovídá stavu napjatosti v dostatečně dlouhém prutu, který je popsán deplanační teorií.

Na rozdíl od teorie deplanace, která vycházela ze změny velikosti zborcení průřezů a uvažovala nulová smyková napětí ve střední ploše (tedy $\gamma_{xs} = 0$), předpokládá teorie zkosu, že průřez se nebortí. Příčné řezy zůstanou i po zatížení rovinnými a pouze se navzájem pootočí. Dále se předpokládá, že tvar příčného průřezu se nemění.

Ve vztahu pro zkos

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \quad ,$$

kde **w** je přemístění bodu střednice v tečném směru a **u** přemístění ve směru podélné osy, pak platí $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ a tedy

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad .$$

Pootočení průřezu se děje kolem t.zv.středu smyku C, pro nějž platí

$$\oint \gamma t \, ds = 0 \quad ,$$

$$\oint \gamma z t \, ds = 0 \quad , \qquad (3.24)$$

$$\oint \gamma y t \, ds = 0 \quad ,$$

kde průřezová veličina $\gamma(s)$ je definována

$$\gamma(s) = \gamma = \frac{1}{t}\frac{\partial(\rho t)}{\partial s} = \frac{1}{t}\frac{\partial(S_\gamma)}{\partial s} \quad . \tag{3.25}$$

Je-li ρ průvodič daného místa střednice průřezu, t.j. kolmá vzdálenost středu smyku **C** od tečny k danému místu střednice a nazveme-li $S_\gamma = \rho \cdot t$,,plochou průvodiče'', pak $\gamma(s)$ považujme za „poměrnou plochu průvodiče".

Celkový kroutící moment $M_k(x)$ se opět rozdělí na část $M_\gamma(x)$, která vyvolává normálné napětí σ_γ a smykové napětí $\tau_{2\gamma}$ a část $M_1(x)$, která vyvolává prvotní smykové napětí τ_1.

Zavedeme-li opět veličinu bimomentu

$$B_\gamma(x) = \int_l^x M_\gamma(x)\,dx = GI_\rho \int_l^x \vartheta'(x)\,dx \quad , \tag{3.26}$$

neboť

$$M_\gamma(x) = GI_\rho \vartheta'(x) \quad , \tag{3.27}$$

lze z Hookeova zákona určit napětí

$$\tau_{2\gamma} = \frac{M_\gamma(x)}{I_\rho}\rho = \frac{G\vartheta'(x)\,S_\gamma(s)}{t} = \frac{B'_\gamma(x)\,\rho}{I_\rho} \tag{3.28}$$

a z rovnováhy elementu **ds**, **dx** posléze napětí

$$\sigma_\gamma = - \frac{1}{I_\rho} \int_l^x M_\gamma(x)\, \gamma(s)\, dx = - \frac{B_\gamma(x)}{I_\rho}\, \gamma(s) \quad . \qquad (3.29)$$

Průřezová veličina I_ρ - kvadratický moment průvodiče

$$I_\rho = \int_{(S)} \rho^2 t \, dS \quad . \qquad (3.30)$$

Diferenciální rovnice popisující daný jev z hlediska stísněného krutu byla určena pomocí energie vnitřních sil (viz [5]):

$$U = \int_0^l \left[\oint \frac{\sigma_\gamma^2}{2E}\, t \, ds + \oint \frac{1}{2G} (\tau_{2\omega} + \tau_1)^2 \, t \, ds \right] dx \, . \qquad (3.31)$$

Vyjádření pomocí funkcionálu energie ϕ je

$$U = \int_0^l \phi(x, B_\gamma, B'_\gamma)\, dx \, .$$

Po dosazení za jednotlivá napětí má funkcionál tvar

$$\phi = \oint \frac{B_\gamma^2}{2EI_\rho^2}\, \gamma^2 t \, ds + \oint \frac{1}{2G} \left(\frac{\rho}{I_\rho} B'_\gamma + \frac{(M_k - B'_\gamma)}{I_k}\, t \right)^2 t \, ds \qquad (3.32)$$

Výraz lze ještě zpřesnit uvažováním proměnnosti napětí τ_1 po tloušťce stěny t:

$$\phi = \oint \frac{B_\gamma^2}{2EI_\rho^2}\,\gamma^2 t\,ds + \oint\int_0^t \frac{1}{2G}\left(\frac{\rho}{I_\rho}B'_\gamma + \right.$$

$$\left. + \frac{(M_k - B'_\gamma)}{I_k\,t}\,t'\right)^2 dt'ds \quad .$$

Minimum funkcionálu nalezneme pomocí Eulerovy rovnice

$$\frac{\partial\phi}{\partial B_\gamma} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\phi}{\partial B'_\gamma}\right) = 0 \quad . \tag{3.33}$$

Diferenciální rovnice má tvar

$$B''_\gamma\left(\frac{1}{I_\rho} + \frac{1}{I_k} - \frac{\oint S_\gamma t\,ds}{I_\rho I_k}\right)\frac{1}{G} - B_\gamma\frac{I_\gamma}{EI_\rho^2} =$$

$$= m_k\left(\frac{\oint S_\gamma t\,ds}{2GI_\rho I_k} - \frac{1}{GI_k}\right) \tag{3.34}$$

Ve výrazu je ještě třeba definovat kvadratický moment poměrné plochy průvodiče

$$I_\gamma = \oint \gamma^2 t\,ds \quad . \tag{3.35}$$

Teorie zkosu vystihuje dobře skutečnost pro krátké pruty. Pro pruty velmi krátké je ji možno zjednodušit tak, že budeme uvažovat pouze energii napjatosti od smyku γ_{xs}, jak je uvedeno v práci [4] příp. [3]

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} \oint G\gamma_{xs}^2 \, t \, ds \, dx \quad . \tag{3.36}$$

Vzhledem k tomu, že jsou zanedbána prvotní smyková napětí, celý kroutící moment se spotřebuje na smyk a tedy platí

$$M_\gamma(x) = M_k(x) \quad ,$$

$$B_\gamma(x) = \int_l^x M_k(x) \, dx + B_\gamma(\ell) \quad , \tag{3.37}$$

a napětí jsou

$$\tau_{z\gamma} = \frac{M_k(x)}{I_\rho} \rho \quad ,$$

$$\sigma_\gamma = - \frac{B_\gamma(x)}{I_\rho} \gamma(s) \quad . \tag{3.38}$$

Zatímco teorie zkosu dostatečně přesně popisuje stav v krátkém prutu a teorie deplanace v prutu značné délky, existuje mezi nimi oblast, která byla popsána zpřesněnou, t.zv. smíšenou teorií, jež je kombinací obou předchozích (např. [3], [5]). Základem je opět energetická metoda. Ve výpočtu energie je uvažována napjatost teorie deplanace, teorie zkosu i prvotní smyková napětí. Poměr vlivu napjatosti odpovídající teorii zkosu a teorii deplanace se mění po délce prutu.

Pro kroutící momenty a bimomenty platí následující rovnice

$$M_k(x) = M_\omega(x) + M_\gamma(x) + M_1(x) \quad , \tag{3.39}$$

$$B(x) = B_\omega(x) + B_\gamma(x) \quad . \tag{3.40}$$

Dále platí

$$B'_\omega(x) = M_\omega(x) \quad ,$$
$$B'_\gamma(x) = M_\gamma(x) \quad , \tag{3.41}$$

z čehož vyplývá

$$M_k(x) = M_1(x) + B'(x) = M_1(x) + B'_\omega(x) + B'_\gamma(x) \tag{3.42}$$

Napětí v průřezu jsou definována následovně

$$\sigma = \frac{B_\omega(x)}{I_\omega}\,\omega(s) - \frac{B_\gamma(x)}{I_\rho}\,\gamma(s) \quad ,$$
$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{M_1(x)}{I_k}\,t - \frac{M_\omega(x)\,S_\omega(s)}{I_\omega t} + \frac{M_\gamma(x)\,S_\gamma(s)}{I_\rho t} \quad . \tag{3.43}$$

Základní řešení je opět energetická metoda, takže celková energie jest

$$U = \int \phi(x\ ,\ B\ ,\ B_\omega\ ,\ B'_\omega\ ,\ B_\gamma\ ,\ B'_\gamma)\ dx \quad , \tag{3.44}$$

kde

$$\phi = \oint \frac{\sigma^2}{2E}\ t\ ds + \oint \frac{\tau^2}{2G}\ t\ ds = \phi_1 + \phi_2 \quad . \tag{3.45}$$

Dosazením za napětí σ a τ ze vztahů (3.43) a (3.41) dostaneme

$$\phi_1 = \oint \frac{1}{2E} \left[\frac{B_\omega}{I_\omega}\,\omega - \frac{B_\gamma}{I_\rho}\,\gamma \right]^2 t\ ds \quad ,$$

$$\phi_2 = \int_0^l \oint \frac{1}{2G} \left[- B'_\omega \left(\frac{t'}{I_k} + \frac{S_\omega}{I_\omega t} \right) + B'_\gamma \left(\frac{S_\gamma}{t I_\rho} - \frac{t'}{I_k} \right) + \right.$$

$$\left. + M_k \frac{t'}{I_k} \right]^2 ds\ dt' \quad .$$

Použijeme-li Eulerovu rovnici postupně pro $\mathbf{B}_\omega$, $\mathbf{B}_\gamma$

$$\frac{\partial \phi}{\partial B_\omega} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial B'_\omega} \right) = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial B_\gamma} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial B'_\gamma} \right) = 0 \quad , \tag{3.46}$$

dostaneme soustavu diferenciálních rovnic

$$- B''_\omega\ a_1 + B_\omega\ a_2 + B''_\gamma\ a_3 + B_\gamma\ a_2 = m_k\ a_4 \tag{3.47}$$

$$B''_{\omega}\, a_3 + B_{\omega}\, a_2 - B''_{\gamma}\, a_5 + B_{\gamma}\, a_6 = m_k\, a_7 \quad . \qquad (3.48)$$

Koeficienty v těchto rovnicích, dané příslušnými průřezovými veličinami, jsou následující

$$a_1 = \frac{1}{G}\left[\frac{1}{I_k} + \frac{\oint S_{\omega}\, t\, ds}{I_{\omega} I_k} + \frac{\oint S_{\omega}^2\, ds \,/\, t}{I_{\omega}^2}\right] \quad ,$$

$$a_2 = \frac{1}{EI_{\omega}} \quad ,$$

$$a_3 = \frac{1}{G}\left[\frac{\oint S_{\gamma}\, t\, ds}{2I_{\rho} I_k} - \frac{\oint S_{\omega}\, t\, ds}{2I_{\omega} I_k} - \frac{1}{I_k} - \frac{1}{I_{\rho}}\right] \quad ,$$

$$a_4 = -\frac{1}{G}\left[\frac{1}{I_k} + \frac{\oint S_{\omega}\, t\, ds}{2I_{\omega} I_k}\right] \quad , \qquad (3.49)$$

$$a_5 = \frac{1}{G}\left[\frac{1}{I_{\rho}} - \frac{\oint S_{\gamma}\, t\, ds}{I_{\rho} I_k} + \frac{1}{I_k}\right] \quad ,$$

$$a_6 = \frac{I_{\gamma}}{EI_{\rho}^2} \quad ,$$

$$a_7 = \frac{1}{G}\left[\frac{\oint S_{\gamma}\, t\, ds}{2I_{\rho} I_k} - \frac{1}{I_k}\right] \quad .$$

Je-li prut zatížen osamělými kroutícími momenty, jsou rovnice (3.47), (3.48) homogenní ($m_k = 0$). Rovnice (3.47), (3.48) lze řešit jako soustavu s předpokládaným řešením dle [5] ve tvaru

$$B_\omega = D_1 e^{\lambda x} \quad ; \quad B_\gamma = D_2 e^{\lambda x} \quad .$$

Nebo lze získat jedinou diferenciální rovnici vyjádřením např. B''_γ z rovnic (3.48) a B_γ ze vztahu (3.40) a dosazením do rovnice (3.47). V práci [3] při zjednodušení výrazu pro energii napjatosti zanedbáním energie od τ_1 tak byla získána diferenciální rovnice

$$B''_\omega(x) - \lambda^2 B_\omega(x) = - \lambda^2 B(x) \quad , \tag{3.50}$$

kde

$$\lambda^2 = \frac{G \left[\frac{I_\gamma}{I_\rho^2} - \frac{1}{I_\omega} \right]}{E \left[\frac{1}{I_\omega^2} \oint S_\omega^2 \frac{ds}{t} - \frac{1}{I_\rho} \right]} \tag{3.51}$$

Řešení má tvar

$$B_\omega = C_1 \sinh \lambda x + C_2 \cosh \lambda x - \lambda \int_0^x B(\xi) \sinh \lambda (x - \xi) \, d\xi \, .$$

(3.52)

Budou-li se naopak eliminovat veličiny B''_ω , B_ω dostaneme

$$B''_\gamma(x) - \lambda^2 B_\gamma(x) = B''(x) = m_k \tag{3.53}$$

a příslušné řešení

$$B_\gamma = D_1 \sinh \lambda x + D_2 \cosh \lambda x + \frac{1}{\lambda} \int_0^x m_k(\xi) \sinh \lambda(x - \xi)\, d\xi \,. \qquad (3.54)$$

Pro řešení postačí vybrat jednu z diferenciálních rovnic (3.50), (3.53). Zbývající neznámou určíme ze vztahu (3.40).

Okrajové podmínky lze pro pevné uložení pro danou variační úlohu formulovat

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial B'_\omega} \right]_{x=0} = \emptyset \quad ; \quad \left[\frac{\partial \phi}{\partial B'_\gamma} \right]_{x=0} = \emptyset$$

Na volném konci je $B = \emptyset$ a tedy $B_\omega = - B_\gamma$ podle (3.40), avšak z podmínek rovnováhy každé napjatosti plyne $B_\omega = B_\gamma = \emptyset$.

Soustava rovnic (3.47), (3.48) poskytuje prakticky obecné řešení pro problém stísněného krutu. Řešení podle teorie deplanace a teorie zkosu z ní dostaneme jako zvláštní případy. V tomto obecném řešení jsou do celkové energie napjatosti zahrnuty složky energie od všech působících napětí. Zanedbáme-li některé z nich (vzhledem k malým hodnotám napětí) výrazy pro součinitele a_i podle (3.49) a rovněž i diferenciální rovnice se zjednoduší.

Diferenciální rovnici (3.16) odpovídající deplanační teorii bychom získali z rovnice (3.47) vynecháním veličin B_γ , B''_γ , při čemž ve výrazu pro energii napjatosti je zanedbána složka odpovídající $\tau_{2\omega}$. Diferenciální rovnici

$$B_\gamma = D_1 \sinh \lambda x + D_2 \cosh \lambda x + \frac{1}{\lambda} \int_0^x m_k(\xi) \sinh \lambda(x - \xi)\, d\xi \,. \qquad (3.54)$$

Pro řešení postačí vybrat jednu z diferenciálních rovnic (3.50), (3.53). Zbývající neznámou určíme ze vztahu (3.40).

Okrajové podmínky lze pro pevné uložení pro danou variační úlohu formulovat

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial B'_\omega} \right]_{x=0} = 0 \quad ; \quad \left[\frac{\partial \phi}{\partial B'_\gamma} \right]_{x=0} = 0$$

Na volném konci je $B = 0$ a tedy $B_\omega = - B_\gamma$ podle (3.40), avšak z podmínek rovnováhy každé napjatosti plyne $B_\omega = B_\gamma = 0$.

Soustava rovnic (3.47), (3.48) poskytuje prakticky obecné řešení pro problém stísněného krutu. Řešení podle teorie deplanace a teorie zkosu z ní dostaneme jako zvláštní případy. V tomto obecném řešení jsou do celkové energie napjatosti zahrnuty složky energie od všech působících napětí. Zanedbáme-li některé z nich (vzhledem k malým hodnotám napětí) výrazy pro součinitele a_i podle (3.49) a rovněž i diferenciální rovnice se zjednoduší.

Diferenciální rovnici (3.16) odpovídající deplanační teorii bychom získali z rovnice (3.47) vynecháním veličin B_γ , B''_γ , při čemž ve výrazu pro energii napjatosti je zanedbána složka odpovídající $\tau_{2\omega}$. Diferenciální rovnici

(3.34) pro teorii zkosu dostaneme z rovnice (3.48) vynecháním B_ω , B''_ω. Zjednodušenou teorii zkosu získáme zanedbáním energie napjatosti od normálného a prvotního smykového napětí.

4. Návrh výpočtu napjatosti v prutech tenkostěnného otevřeného průřezu

4.1 Definice součinitele napjatosti

Jak již bylo řečeno v úvodu, je cílem následujícího návrhu poskytnout konstruktérovi návod k jednoduchému výpočtovému zpracování namáhání prutů vystavených stísněnému krutu. Napjatost vznikající v prutu při tomto způsobu namáhání znamená při klasickém řešení vyřešit diferenciální rovnici s příslušnými okrajovými podmínkami a s příslušnou pravou stranou, určit potřebné průřezové veličiny a posléze spočítat jednotlivá napětí σ, případně τ_1, τ_2 a vyhodnotit napjatost pro sledované místo prutu.

Budeme-li se věnovat pouze napjatosti, lze veškeré okrajové podmínky zahrnout do jedné podmínky pro volný konec, případně posuvné vetknutí (B = Ø) a jedné podmínky pro tuhé vetknutí, případně opření či průřez v ose symetrie. I pro různé kombinace těchto uložení lze však z prutu vyjmout takovou část, jejíž jeden koncový průřez se chová jako tuho vetknutý (x = Ø) a druhý koncový průřez jako volný za předpokladu zatížení prutu osamělými kroutícími momenty (viz obr. 1, kde průřezy v místech **B** se chovají jako volný konec). V dalším je v podstatě možno se zabývat pouze tímto jedním druhem uložení.

Podstatou zjednodušení výpočtu namáhání prutu je

srovnání skutečné napjatosti s napjatostí odpovídající volnému krutu.

Pro libovolný průřez prutu a jeho libovolné místo je zaveden součinitel napjatosti

$$K(x,s) = \frac{\sigma_{red}(x,s)}{\sigma_{red,o}} = \frac{\sqrt{\sigma^2(x,s) + 3[\tau_1(x) + \tau_2(x,s)]^2}}{\sqrt{3\,\tau_o^2}} , \tag{4.1}$$

kde $\sigma(x,s)$, $\tau_1(x)$ a $\tau_2(x,s)$ jsou napětí v daném místě od stísněného krutu a

$$\tau_o = \frac{M_k\, t}{I_k} \tag{4.2}$$

je smykové napětí od volného krutu konstantní po délce prutu a také v krajních vláknech jednotlivých částí průřezu o konstantních tloušťkách.

Součinitel v sobě zahrnuje zhodnocení napjatosti pomocí příslušné pevnostní podmínky. V této práci byla použita podmínka H-M-H, vhodná pro houževnaté oceli nižší a střední pevnosti, z níž jsou většinou z plechů ohýbané a válcované profily vyrobeny. Pro jiné chování materiálu prutu je možno vztah (4.1) jednoduše upravit podle příslušné vhodné podmínky.

Nejnepříznivější napjatost se vytvoří v místě vetknutí v přírubě průřezu a charakterizuje ji součinitel napjatosti daného místa

$$K = K_A = \frac{\sigma_{redA}}{\sqrt{3}\,\tau_o} \quad . \qquad (4.3)$$

Součinitel K_A je možno určit z dále uvedených vztahů, případně pro některé běžné profily odečíst z přiložených grafů. Zbývá vypočítat podle jednoduchého vztahu (4.2) napětí τ_o a je podchycena špička namáhání

$$\sigma_{redA} = K_A \sqrt{3}\,\tau_o \quad .$$

Vztahy pro součinitel K_A se podle jednotlivých výpočtových teorií uvedených v kapitole 3 liší. Do které kategorie výpočet konkrétního prutu zařadíme, závisí na geometrických charakteristikách prutu, především na poměru jeho délky a ostatních rozměrů průřezu. Tento poměr je v literatuře většinou uváděn jako rozhodující absolutní faktor, avšak toto je často zavádějící informace. Na vhodnost použití příslušné teorie má významný vliv i tvar a vzájemné rozměry průřezu. Než zvolíme vhodný výpočtový model, je třeba stanovit mezní délku ℓ_k, která tvoří rozhraní mezi smíšenou teorií ($\ell < \ell_k$) a teorií deplanační ($\ell \geq \ell_k$) a mezní délku ℓ_s, tvořící rozhraní mezi teorií zkosu ($\ell \leq \ell_s$) a smíšenou teorií ($\ell_s < \ell < \ell_k$). Obě délky jsou dány geometrickými, případně materiálovými charakteristikami prutu.

Délkou prutu ℓ je zde myšlena vzdálenost mezi

průřezem vetknutým a průřezem, který se chová jako volný konec, která např. podle obr.1a je rovna skutečné délce prutu, podle obr. 1b její polovině a podle obr. 1c její jedné čtvrtině.

V grafech sloužících k stanovení K, příp. délky ℓ_k, ℓ_s jsou uvažovány profily o konstantní tloušťce t, což bývá splněno u profilů ohýbaných z plechu. Vliv různých tloušek je rozebrán v kapitole 5.

4.2 Výpočet podle teorie deplanace

V každém místě prutu lze určit normálné napětí $\sigma_\omega(x,s)$ podle vztahu (3.18), prvotní smykové napětí $\tau_1(x)$ podle vztahu (3.9) a druhotné smykové napětí $\tau_{2\omega}(x,s)$ podle (3.12). Výsledná napjatost daného místa s přihlédnutím k (3.13) je zhodnocena vztahem

$$\sigma_{red}(x,s) = \sqrt{\sigma_\omega^2(x,s) + 3[\tau_1(x) + \tau_{2\omega}(x,s)]^2} \qquad (4.4)$$

V nejvíce namáhaném místě v rohu profilu A (obr. 2) v průřezu ve vetknutí (x = Ø) mají napětí velikost

$$\sigma_{\omega A} = \frac{\omega_A}{I_\omega} B(Ø) = \frac{\omega_A}{I_\omega} \frac{M_k}{\alpha} \operatorname{tgh} \alpha\ell \quad ,$$

$$\tau_{2A} = Ø \qquad (\text{neboť } S_{\omega A} = Ø) \quad , \qquad (4.5)$$

$$\tau_{1A} = Ø \qquad (\text{neboť } \vartheta(Ø) = Ø) \quad .$$

V místě A tedy vzniká jednoosá napjatost ($\sigma_{\omega A}$), potom

$$\sigma_{redA} = \sigma_{\omega A} \quad .$$

Součinitel napjatosti je

$$K_A = \frac{\sigma_{\omega A}}{\sqrt{3}\ \tau_o} = \frac{\omega_A}{t} \sqrt{\frac{I_k E}{3 I_\omega G}}\ \mathrm{tgh}\ \alpha\ell \qquad (4.6)$$

U dlouhých tyčí, pro něž je tento výpočet určen, lze předpokládat, že tgh $\alpha\ell \longrightarrow 1$ a tedy

$$K_A = \frac{\omega_A}{t} \sqrt{\frac{I_k E}{3 I_\omega G}} \quad . \qquad (4.7)$$

Součinitel K_A není závislý na délce prutu a uvážíme-li, že $I_k = f(t^3)$, $I_\omega = f(t)$ a $\omega_A \neq f(t)$, zjistíme, že není závislý ani na tloušce t. Pro daný materiál (E/G) je součinitel K především průřezovou veličinou závislou pouze na tvaru a rozměrech průřezu. Pro běžné tvary profilů I, U, Z je pro různé hodnoty poměru šířky a výšky profilu b/h součinitel K uveden v grafu na obr. 3.

Zkoumáme-li napjatost v prutu při stísněném krutu celkově, lze sledovat závislost σ_{red} , případně K(x,s) buď jako funkci souřadnice s (K(s)) po šířce příruby

(viz. obr. 4 v různých průřezech prutu) nebo jako funkci x (K(x)) po délce prutu pro roh profilu A (obr. 5). Napjatost byla sledována na I profilu pro různé poměry b/h a pro t/h = 1/20. Součinitel K(x,s) nezávisí na délce prutu ℓ. Závislost na tloušce t je zřejmá z obr. 6.

Sledujeme-li průběh K(x) v rohu profilu A podle obr. 5, je

$$K_A(x) = \frac{1}{\sqrt{3}\,\tau_0}\sqrt{\sigma_A^2(x) + 3\tau_1^2(x)} \quad , \qquad (4.8)$$

neboť $\tau_{2A}(x) = 0$. Napětí τ_1 v rohu profilu je sice též rovno nule, ale podle předpokladů membránové analogie v těsné blízkosti místa A dosahuje v krajním vlákně již své plné výše. V tomto místě je ještě $\sigma_\omega(s) \cong \sigma_{\omega A}$ a lze předpokládat vztah (4.8).

Poblíž místa vetknutí shledáme na obr. 5 napjatost podobající se průběhům napětí v okolích vrubů, což vlastně odpovídá náhlému zásahu do průběhu volných deplanací v místě uložení.

Z grafu lze odečíst délku ℓ_1, která představuje délku části prutu vystavené zvýšenému namáhání, neboť pro napjatost volného krutu je K(x) = 1. Ze zjednodušujícího předpokladu, že funkce K(x) se v okolí vetknutí málo liší od lineární závislosti, lze určit ℓ_1

$$\ell_1 \cong \frac{K_A - 1}{|K_A'(0)|} \quad , \qquad (4.9)$$

kde $K_A'(0)$ je derivací funkce $K(x)$ pro $x = 0$. Je-li funkce

$$K_A(x) = \frac{1}{\sqrt{3}\,\tau_0} \sqrt{\left(\frac{\omega_A M_k}{I_\omega\,\alpha}\right)^2 [\,\sinh \alpha x - \operatorname{tgh} \alpha\ell \cos \alpha x\,]^2 +$$

$$+ 3\left(\frac{M_k t}{I_k}\right)^2 [\,\operatorname{tgh} \alpha\ell \sin \alpha x - \cosh \alpha x + 1\,]^2} \quad ,$$

dostaneme za předpokladu, že $\operatorname{tgh} \alpha\ell \longrightarrow 1$

$$K_A'(x) = \frac{P}{Q} \quad ,$$

kde

$$P = \alpha[(K_A^2 + 1)(\sinh 2\alpha x - \cosh 2\alpha x) +$$

$$+ \cosh \alpha x - \sinh \alpha x\,]$$

a

$$Q = \sqrt{(K_A^2 + 1)(\sinh \alpha x - \cosh \alpha x)^2 + 2(\sinh \alpha x -$$

$$- \cosh \alpha x) + 1}$$

a pro $x = \emptyset$ je $K_A'(\emptyset) = - \alpha K$. Potom

$$\ell_1 \cong \frac{K_A - 1}{\alpha K_A} \quad . \tag{4.10}$$

Přesnější vztah dostaneme, hledáme-li průsečík křivky $K_A(x)$ s konstantou $K_A = 1$ pro volný krut. Pak podle (4.8) je

$$\frac{1}{\sqrt{3}\,\tau_o} \sqrt{\frac{M_k^2\,\omega_A^2}{I_\omega^2\,\alpha^2} \{ \sinh \alpha x - \operatorname{tgh} \alpha\ell \cosh \alpha x \}^2 +$$

$$+ 3\,\frac{t^2 M_k^2}{I_k^2} \{ 1 - \cosh \alpha x + \operatorname{tgh} \alpha\ell \sin \alpha x \}^2} = 1$$

Po úpravě a dosazení za $\operatorname{tgh} \alpha\ell \cong 1$ dostaneme

$$1 = (K_A^2 + 1) (\sinh \alpha x - \cosh \alpha x)^2 + 2(\sinh \alpha x -$$

$$- \cosh \alpha x) + 1 \quad .$$

Dosadíme-li za

$$\sinh \alpha x = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}$$

a za

$$\cosh \alpha x = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} ,$$

dostaneme

$$2e^{\alpha x} = (K_A^2 + 1)$$

a konečně

$$x = \ell_1 = \frac{1}{\alpha} \lg (\frac{K_A^2 + 1}{2}) . \qquad (4.11)$$

Vztah (4.10) vykazuje chybu až 20% vzhledem ke vztahu (4.11) a vyhovuje spíše pro menší hodnoty K_A.

Délka uplatnění zvýšeného namáhání ℓ_1 v závislosti na poměru b/h pro různé t/h je pro profil I znázorněna na obr. 7.

Délka ℓ_2 udává místo nejpříznivější napjatosti a získáme ji ze vztahu $K_A' = 0$ (pro $x = \ell_2$). Odtud vyjde

$$\ell_2 = \frac{1}{\alpha} \lg (1 + K_A) \qquad (4.12)$$

Délku ℓ_2 lze sledovat na obr. 8 v závislosti na poměru b/h pro různé t/h pro profil I. Tohoto místa lze využít pro ukončení případného zpevnění exponovaného okolí vetknutí, protože tato změna průřezu bude rovněž znamenat místní špičku napětí.

Největší význam má stanovení délky ℓ_k. Lze říci, že v

tomto místě přestává působit stísněný krut a zbývající část tyče o délce větší než ℓ_k je vystavena v podstatě volnému krutu ($K_A \cong 1$). Můžeme proto vyslovit předpoklad, že má-li prut délku $\ell \geq \ell_k$, neovlivňují se napjatosti obou koncových průřezů navzájem a prut se skutečně chová podle vztahu, který platí v teorii deplanace. Je tedy délka ℓ_k hranicí platnosti deplanační teorie. Její velikost stanovíme z podmínky $K_A(x) \longrightarrow 1$, kde zvolíme přesnost výpočtu, kterou chceme dosáhnout, předepsáním tolerance hodnoty $K_A(x)$ oproti 1. Označíme-li tuto odchylku **p**, platí

$$1 - K_A(x) \leq p \quad , \tag{4.13}$$

tedy

$$(1 - p)^2 = K_A^2(x) = \frac{1}{3\tau_0^2} [\sigma_A^2(x) + 3\tau_1^2(x)] \quad .$$

Po úpravě lze pro $\operatorname{tgh} \alpha\ell \longrightarrow 1$ psát

$$(1 - p)^2 = (K_A^2 + 1) (\sinh \alpha x - \cosh \alpha x)^2 +$$

$$+ 2(\sinh \alpha x - \cosh \alpha x) + 1 \quad ,$$

$$p(p - 2) = (K_A^2 + 1) \left(\frac{-1}{e^{\alpha x}} \right)^2 + 2\left(\frac{-1}{e^{\alpha x}} \right)$$

a konečně po zavedení $n = p(2 - p)$ a $y = e^{\alpha x}$ dostaneme rovnici

$$ny^2 - 2y + (K_A^2 + 1) = \emptyset \qquad (4.14)$$

s kořeny

$$y_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - n(K_A^2 + 1)}}{n} \; ;$$

$$y_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - n(K_A^2 + 1)}}{n} \; .$$

Kořen y_1 vede pro $p = \emptyset$ ($n = \emptyset$) na výraz

$$y_1 = \lim_{n \to o} \frac{1 - \sqrt{1 - n(K_A^2 + 1)}}{n} = \lim_{n \to o} \frac{(K_A^2 + 1)}{2\sqrt{1 - n(K_A^2 + 1)}} =$$

$$= \frac{K_A^2 + 1}{2} = e^{\alpha x_1} \quad ,$$

což je v podstatě pro $x_1 = \ell_1$ vztah (4.11). Tento vztah lze získat také přímo z rovnice (4.14) pro $n = \emptyset$.

Druhý kořen y_2 vede konečně na výraz pro ℓ_k

$$\ell_k = \frac{1}{\alpha} \lg \left[\frac{1 + \sqrt{1 - n(K_A^2 + 1)}}{n} \right] \quad ,$$

případně

$$\ell_k = \frac{1}{\alpha} \lg \left[\frac{1 + \sqrt{1 - p(2-p)(K_A^2 + 1)}}{p(2-p)} \right] \quad . \tag{4.15}$$

Závislost ℓ_k na poměru b/h pro různá t/h pro profil I je uvedena na obr. 9 a závislost na předepsané přesnosti p opět pro různá b/h na obr.10.

4.3 Srovnání řešení teorií deplanace, MKP a řešení doporučeného ČSN 73 1401

Použijeme-li pro řešení stísněného krutu zjednodušenou diferenciální rovnici (3.19) a do vztahů (3.20) dosadíme pro $M_k(x) = M_k$ okrajové podmínky $B(\ell) = 0$ a $\vartheta(0) = 0$, po výpočtu konstant $A_5 = 0$, $A_4 = \frac{M_k \ell}{EI_\omega}$ dostaneme

$$\vartheta'(x) = \frac{M_k}{EI_\omega} (\ell - x) \quad , \tag{4.16}$$

$$\vartheta(x) = \frac{M_k}{EI_\omega} \left(\ell x - \frac{x^2}{2} \right) \quad . \tag{4.17}$$

Napětí v rohu profilu vypočteme podle vztahů (3.8), (3.9) a (3.12)

$$\sigma_A(x) = - E\omega_A \vartheta'(x) = - \frac{M_k \omega_A}{I_\omega} (\ell - x) \quad ,$$

$$\tau_{zA}(x) = 0 \quad , \tag{4.18}$$

$$\tau_1(x) = Gt \frac{M_k}{EI_\omega} \left(\ell x - \frac{x^2}{2} \right) \quad ,$$

Součinitel napjatosti $K_A(x)$ je dán opět vztahem (4.8) a v místě maximálního namáhání pro

$$\sigma_A(\emptyset) = \frac{- M_k \omega_A \ell}{I_\omega}$$

je roven

$$K_A = \frac{\omega_A I_k \ell}{\sqrt{3}\, t I_\omega} \quad . \qquad (4.19)$$

Jeho závislost na průřezových veličinách je odlišná od vztahu (4.7) a především se liší tím, že je funkcí délky ℓ.

Tento způsob výpočtu dává značně nadsazené výsledky pro špičky napětí v místě vetknutí, jak ukazuje obr. 11, kde je pro prut o profilu I a rozměrech $\ell/h = 15$, $b/h = 1/2$, $t/h = 1/20$ znázorněna funkce součinitele $K_A(x)$ po délce prutu jednotlivými způsoby výpočtu. Z obr. 11 je patrna velmi dobrá shoda mezi průběhem funkce $K_A(x)$ vypočteným podle deplanační teorie a zjištěným metodou konečných prvků po celé délce prutu (viz kapitola 6). Hodnota K_A podle (4.19) je několikanásobně vyšší. Další průběh $K_A(x)$ daný zjednodušenou diferenciální rovnicí (do něhož se promítá vliv $\tau_1(x)$) už je zcela nereálný.

Lze říci, že pro dlouhé nosníky je toto zjednodušené řešení nevhodné.

Řešení podle [9], doporučené v Komentáři k ČSN 73 1401, kde vnitřní účinky v průřezu x vypočteme podle vztahů (3.22) a příslušná napětí podle (3.23) a kde je

$$\varkappa = 1 - \frac{2\,\mathrm{tgh}\,(\alpha\ell/2)}{\alpha\ell} \quad , \tag{4.20}$$

dává hodnotu K_A v exponovaném místě vetknutí

$$K_A = \frac{\omega_A I_k \ell}{\sqrt{3}\,t I_\omega}\,(1 - \varkappa) = \frac{\omega_A I_k \ell}{\sqrt{3}\,t I_\omega}\,\frac{2\,\mathrm{tgh}\,(\alpha\ell/2)}{\alpha\ell} \quad . \tag{4.21}$$

Ve srovnání s deplanační teorií jsou tyto výsledky přijatelnější, avšak stále ještě vedou k předimenzování průřezu. Dá se říci, že ve srovnání s výpočtem navrženým v této kapitole je výpočet méně přesný a přitom není méně pracný.

Srovnáme-li průběh napjatosti po délce tyče určený teorií deplanace a MKP, liší se výrazněji v okolí volného konce. To je dáno špičkou napětí, která vznikne v místě přiložení kroutícího momentu M_k. Způsob modelování přiložení M_k je uveden v kap. 6.

Na obr. 12 je dále uvedena závislost součinitele K_A na poměru b/h pro jednotlivé způsoby výpočtu.

4.4 Výpočet podle teorie zkosu

Diferenciální rovnice popisující daný jev pro $M_k(x) =$ $= \text{konst.} = M_k$ (a tedy $m_k = \emptyset$) je podle (3.34)

$$B''_\gamma - \beta^2 B_\gamma = \emptyset \quad , \tag{4.22}$$

kde

$$\beta^2 = \frac{a_6}{a_5} \quad , \qquad a_6 = \frac{I_\gamma}{EI_\rho^2} \quad ,$$

$$a_5 = \frac{1}{G}\left[\frac{1}{I_\rho} + \frac{1}{I_k} - \frac{S_\gamma t\, ds}{I_k I_\rho}\right] \quad . \tag{4.23}$$

Pokud ve výrazu pro energii napjatosti zanedbáme energii od $\tau_{z\gamma}$, dostaneme

$$\beta^2 = \frac{GI_\gamma I_k}{EI_\rho(I_k + I_\rho)} \quad . \tag{4.24}$$

Rozdíl ve výsledcích je velmi malý.

Řešení rovnice (4.22) má tvar

$$B_\gamma = C_1 \sinh \beta x + C_2 \cosh \beta x$$

a okrajové podmínky této úlohy pro vetknutí - volný konec jsou

$$M_\gamma(0) = B'_\gamma(0) = M_k$$

$$B_\gamma(\ell) = 0 \qquad (4.25)$$

Po určení konstant C_1, C_2 dostaneme

$$B_\gamma(x) = \frac{M_k}{\beta}\,(\,\sinh \beta x - \operatorname{tgh} \beta\ell \cosh \beta x\,)\quad ,$$

$$B'_\gamma(x) = M_\gamma(x) = M_k(\,\cosh \beta x - \operatorname{tgh} \beta\ell \sin \beta x\,)\quad , \qquad (4.26)$$

$$M_1(x) = M_k - B'_\gamma(x) = M_k(\,1 - \cosh \beta x + \operatorname{tgh} \beta\ell \sinh \beta x\,)\ .$$

Odpovídající napětí podle (3.38) jsou

$$\sigma_\gamma(x) = \frac{B_\gamma(x)}{I_\rho}\,\gamma(s)\quad ,$$

$$\tau_{2x}(x) = \frac{M_\gamma(x)}{I_\rho}\,\rho\quad , \qquad (4.27)$$

$$\tau_1(x) = \frac{M_1(x)}{I_k}\,t\quad .$$

Pro průřezy skládající se z rovných částí jsou průřezové veličiny γ a ρ konstantní v jednotlivých částech průřezu (např. v přírubě) a jsou tedy konstantní i napětí σ_γ a $\tau_{2\gamma}$. Zůstává proměnnost pouze po délce tyče. Pro součinitel napjatosti opět platí

$$K_A(x) = \frac{\sqrt{\sigma_\gamma^2(x) + 3[\,\tau_{2\gamma}(x) + \tau_1(x)\,]^2}}{\sqrt{3}\,\tau_o} \qquad (4.28)$$

Průběh $K_A(x)$ po délce prutu pro I profil v závislosti na různých rozměrech b/h při t/h = 1/20, je-li ℓ = 2h, je zřejmý z obr. 13 a při ℓ = 3h z obr. 14. Délka prutu ℓ je u krátkých prutů faktor, který ovlivňuje velikost napjatosti.

Vypočteme-li poměrnou tuhost β podle přesných vztahů (4.23), případně podle přibližných (4.24) nepřestoupí chyba β hodnotu $\sim 6\%$.

V exponovaném místě nabývají jednotlivá napětí velikosti

$$\sigma_{\gamma A} = \sigma_\gamma(\emptyset) = -\frac{\gamma\, M_k}{I_\rho}\,\mathrm{tgh}\,\beta\ell \quad ,$$

$$\tau_{2\gamma} = \frac{\rho\, M_k}{I_\rho} \quad , \qquad (4.29)$$

$$\tau_1(\emptyset) = \emptyset \quad .$$

Potom je

$$K_A = \frac{1}{\sqrt{3}\,\tau_o}\sqrt{\sigma_\gamma^2(\emptyset) + 3\tau_{2\gamma}^2(\emptyset)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}\,\tau_o}\sqrt{\gamma^2\left(\frac{\mathrm{tgh}\,\beta\ell}{\beta}\right)^2 + 3\rho^2} \qquad (4.30)$$

Závislost K_A na délce tyče ℓ pro různé b/h profilu I je uvedena na obr. 15.

Tloušťka t se objeví v průřezových veličinách takto:

$$I_k = f(t^3) \quad , \qquad I_\rho = f(t) \quad ,$$

takže lze vyjádřit

$$K_A = t \cdot \bar{K}_A \quad , \tag{4.31}$$

kde

$$\bar{K}_A = \frac{I_k}{\sqrt{3}\, t^2 I_\rho} \sqrt{\gamma^2 \left(\frac{\operatorname{tgh} \beta\ell}{\beta} \right)^2 + 3\rho^2} \quad , \tag{4.32}$$

Pomocí součinitele $\bar{K}_A$ je eliminována závislost na t. Skutečný součinitel napjatosti K_A po odečtení $\bar{K}_A$ z grafu lze určit ze vztahu (4.31).

Použijeme-li zjednodušené teorie smyku, jak je uvedena např. v [3], kdy ve výrazu pro energii napjatosti je uvažována pouze energie od τ_z podle (3.36), vede vztah (4.1) na

$$K_A(x) = \frac{1}{\sqrt{3}\, \tau_o} \sqrt{\sigma_\gamma^2(x) + 3\tau_{z\gamma}^2} \quad , \tag{4.33}$$

kde

$$\tau_{z\gamma} = \frac{M_k}{I_\rho}\,\rho = \text{konst} \quad ,$$

(4.34)

$$\sigma_\gamma(x) = -\frac{\gamma}{I_\rho} \cdot \{ \int_l^x M_k \, dx + B_\gamma(\ell) \} \quad .$$

Z okrajové podmínky $B_\gamma(\ell) = 0$ plyne

$$B_\gamma(x) = M_k(x - \ell) \quad . \qquad (4.35)$$

V exponovaném místě je $B_\gamma(0) = - M_k \ell$ a součinitel napjatosti

$$K_A = \frac{I_k}{\sqrt{3}\ t\ I_\rho} \sqrt{\gamma^2\ell^2 + 3\rho^2} \quad . \qquad (4.36)$$

Závislost na **t** je opět možno vyloučit pomocí součinitele $\bar{K}_A$:

$$K_A = t\ \bar{K}_A \quad ,$$

$$\bar{K}_A = \frac{I_k}{\sqrt{3}\ t^2 I_\rho} \sqrt{\gamma^2\ell^2 + 3\rho^2} \quad . \qquad (4.37)$$

Zjednodušenou teorii, která skýtá výhodu jednoduššího vztahu (4.36) oproti (4.30), lze použít tehdy, platí-li s dostatečnou přesností $\ell \cong \frac{\operatorname{tgh} \beta\ell}{\beta}$. Připustíme-li např. toleranci 10%, je

$\beta\ell \cong 1,1 \ \mathrm{tgh}\ \beta\ell$.

Rozvedeme-li tgh $\beta\ell$ v řadu, pak

$$\beta\ell = 1,1\left[\ \beta\ell - \frac{1}{3}(\beta\ell)^3 + \frac{1}{6}(\beta\ell)^5 + \ldots\ \right] \quad ,$$

a po zavedení $y = (\beta\ell)^2$ dostaneme

$$y^2 - 2y + 0,6 = 0 \quad ,$$

kde

$$y_{1,2} = 1 \pm 0,632 \quad .$$

Nejmenší kladný kořen $\beta\ell = \beta\ell_3 \cong 0,61$. Tedy pro délky tyče menší než ℓ_3, kde

$$\ell_3 = \frac{0,61}{\beta} \quad , \tag{4.38}$$

lze této teorie použít s příslušnou předepsanou přesností.

4.5 Srovnání řešení teorií zkosu, MKP a řešení doporučeného ČSN 73 1401

Srovnání bylo provedeno sledováním napjatosti v prutu v průřezu I o rozměrech $b/h = 0,5$, $t/h = 1/20$ a délce $\ell = 2h$ (viz obr. 16) a $\ell = 3h$ (viz obr. 17).

Součinitel napjatosti $K_A(x)$ byl opět sledován po délce tyče. Napětí pro výpočet součinitele podle zjednodušené diferenciální rovnice jsou dána vztahy (4.18) a podle Melchera vztahy (3.23). Napětí podle teorie zkosu určují vztahy (4.27) a podle její zjednodušené varianty vztahy (4.34). V obr. 16 a obr. 17 jsou dále vyneseny hodnoty $K_A(x)$ získané na výpočtovém modelu metodou konečných prvků.

Z obr. 16 a 17 je zřejmé, že napjatost v místě vetknutí podle zjednodušené diferenciální rovnice je více než dvojnásobně větší. Rovněž upravený výpočet podle Melchera je značně nadsazen, korekce pomocí součinitele $\varkappa$ je méně účinná než u dlouhých prutů při srovnávání s teorií deplanační. Hodnoty napětí zjištěné pomocí MKP v místě vetknutí nám pomohou k stanovení velikosti části příruby, která přenáší normálná napětí (viz. kap. 5.4).

Zajímavé je sledování průběhu napjatosti po délce tyče. Průběh klesající funkce $K_A(x)$ podle teorie zkosu směrem k volnému konci je pozvolnější než u MKP, zatímco klesající funkce $K_A(x)$ přibližné teorie zkosu, která vůbec neuvažuje vliv napětí $\tau_1(x)$, jež se právě uplatňuje v okolí volného konce, je naopak strmější. V prvém případě je vliv $\tau_1(x)$ poněkud přeceněn, v druhém nedoceněn.

Srovnáme-li dál napjatost v místě vetknutí u různě dlouhých prutů, je zřejmé, že kratší pruty jsou pevnější, napjatost v nich je výrazně menší než základní napjatost

volného krutu ($K_A < 1$).

4.6 Výpočet podle smíšené teorie

Ze soustavy rovnic (3.47) a (3.48) dostaneme pomocí (3.40) jedinou diferenciální rovnici

$$B''_\omega - \lambda^2 B_\omega = - \lambda^2 B \quad , \tag{4.39}$$

kde

$$\lambda^2 = \frac{(a_6 - a_2) a_3}{(a_3^2 - a_1 a_5)} \tag{4.40}$$

Součinitelé $a_1 \div a_6$ jsou dány vztahy (3.49) a jsou závislé pouze na průřezových veličinách a materiálu prutu. Podle [3], kde je v řešení zanedbáno napětí τ_1, je funkce bimomentu navržena ve tvaru $B(x) = - M_k (\ell - x)$. Řešení diferenciální rovnice podle (3.52) pro okrajové podmínky

$$B_\omega(1) = 0 \quad , \qquad B'_\omega(0) = 0$$

má tvar

$$B_\omega(x) = \frac{M_k}{\lambda} \left[\tgh \lambda\ell \cos \lambda x - \sinh \lambda x \right] - M_k (\ell - x) , \tag{4.41}$$

$$M_\omega(x) = B'_\omega(x) = M_k[\ \mathrm{tgh}\ \lambda\ell\ \sinh \lambda x - \cosh \lambda x + 1\ ] \quad .$$

Odpovídající napětí $\sigma(x)$ a $\tau_2(x)$ získáme ze vztahů (3.43). Toto řešení dává v místě vetknutí výraz pro součinitel napjatosti

$$K_A = \frac{I_k \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{\omega}{I_\omega}\left(\mathrm{tgh}\ \lambda\ell - \lambda\ell\right) + \frac{\gamma}{I_\rho}\ \mathrm{tgh}\ \lambda\ell\right]^2 + 3\,\frac{\rho^2}{tI_\rho^2}}}{\sqrt{3}\ t} \quad ,$$

což vede k nadsazeným velikostem napětí v celém rozsahu délek, jak ukazuje obr. 34 (křivka 3) a zvláště pro délky blížící se k hodnotě ℓ_k je nevhodné. Zanedbání vlivu napětí τ_1 ($M_k = B'_\omega + B'_\gamma$) se projeví zvláště u prutů o délkách $\ell \to \ell_k$, kde je část prutu v okolí volného konce zatížena napjatostí blížící se napjatosti volného krutu.

Dále byla navržena funkce B(x) tak, aby pro délky prutu blížící se k hodnotě ℓ_s shora a k hodnotě ℓ_k zdola charakter průběhu napjatosti odpovídal napjatostem teorie zkosu a deplanace. Vyjdeme ze vztahu (3.39)

$$M_k = B'(x) + M_1(x)$$

a budeme předpokládat, že funkce $M_1(x)$ má stejný průběh po délce prutu jako v teorii deplanace, t. j.

$$M_1(x) = GI_k\vartheta(x) =$$

$$= M_k (1 - \cosh \lambda x + \operatorname{tgh} \lambda \ell \sinh \lambda x) \quad . \qquad (4.42)$$

Pak je

$$B'(x) = M_k - M_1(x) =$$

$$= M_k (\cosh \lambda x - \operatorname{tgh} \lambda \ell \sinh \lambda x) \qquad (4.43)$$

a

$$B(x) = \int B'(x)\, dx + c_3 =$$

$$= \frac{M_k}{\lambda} (\sinh \lambda x - \operatorname{tgh} \lambda \ell \cosh \lambda x) + c_3 \quad , \qquad (4.44)$$

kde z okrajové podmínky $B(\ell) = 0$ plyne $c_3 = 0$.

Řešení podle (3.52) je

$$B_\omega(x) = c_1 \sinh \lambda x + c_2 \cosh \lambda x - M_k \int_0^x (\sinh \lambda \xi -$$

$$- \operatorname{tgh} \lambda \ell \cosh \lambda \xi) \sinh \lambda (x - \xi)\, d\xi \qquad (4.45)$$

a po určení integrálu

$$B_\omega(x) = c_1 \sinh \lambda x + c_2 \cosh \lambda x - \qquad (4.46)$$

$$- \frac{M_k}{2\lambda} [\lambda x (\cosh \lambda x - \operatorname{tgh} \lambda \ell \sinh \lambda x) - \sinh \lambda x] \quad .$$

Z okrajových podmínek vyjde

$$c_1 = 0 \quad ,$$

$$c_2 = \frac{M_k}{2\lambda} \left[\lambda\ell - \operatorname{tgh} \lambda\ell - \lambda\ell \operatorname{tgh}^2 \lambda\ell \right] \quad .$$

Po dosazení dostaneme

$$B_\omega(x) = \frac{M_k}{2\lambda} \left[\sinh \lambda x \left(1 - \lambda x \operatorname{tgh} \lambda\ell \right) + \right.$$

$$\left. + \cosh \lambda x \left\{ \lambda \left(\ell - x \right) - \lambda\ell \operatorname{tgh}^2 \lambda\ell - \operatorname{tgh} \lambda\ell \right\} \right] \qquad (4.47)$$

V místě vetknutí je

$$B_\omega(0) = \frac{M_k}{2\lambda} \left[\lambda\ell \left(1 - \operatorname{tgh}^2 \lambda\ell \right) - \operatorname{tgh} \lambda\ell \right] \quad . \qquad (4.48)$$

Dále je

$$M_\omega(x) = B'_\omega(x) = \frac{M_k}{2} \left[\sinh \lambda x \left\{ \lambda\ell \left(1 - \operatorname{tgh}^2 \lambda\ell \right) - \lambda x \right\} + \right.$$

$$\left. + \lambda x \operatorname{tgh} \lambda\ell \cosh \lambda x \right] \quad . \qquad (4.49)$$

Určíme zbývající funkce

$$B_\gamma(x) = B(x) - B_\omega(x) \quad ,$$

$$B_{\gamma}(x) = \frac{M_k}{2\lambda} [\sinh \lambda x(1 - \lambda x \operatorname{tgh} \lambda \ell) +$$

$$+ \cosh \lambda x\{ \lambda(x - \ell) + \lambda \ell \operatorname{tgh}^2 \lambda \ell - \operatorname{tgh} \lambda \ell \}] \quad . \tag{4.50}$$

Pro místo vetknutí platí

$$B_{\gamma}(0) = \frac{M_k}{2\lambda} [\lambda \ell(\operatorname{tgh}^2 \lambda \ell - 1) - \operatorname{tgh} \lambda \ell] \tag{4.51}$$

a dále

$$M_{\gamma}(x) = B'_{\gamma}(x) = \frac{M_k}{2} [\cosh \lambda x (2 - \lambda x \operatorname{tgh} \lambda \ell) +$$

$$+ \sinh \lambda x\{ \lambda x + \lambda \ell(\operatorname{tgh}^2 \lambda \ell - 1) - 2\operatorname{tgh} \lambda \ell \}] \quad . \tag{4.52}$$

Po dosazení do vztahů (3.43) dostaneme pro okraj příruby, kde $\tau_{z\omega}(x) = 0$ následující napětí

$$\sigma(x) = \frac{M_k}{2\lambda} \{ [\cosh \lambda x(\lambda \ell - \lambda \ell \operatorname{tgh}^2 \lambda \ell - \operatorname{tgh} \lambda \ell) -$$

$$- \lambda x \cos \lambda x + \sinh \lambda x(1 + \lambda x \operatorname{tgh} \lambda \ell)] \frac{\omega_A}{I_{\omega}} -$$

$$- \frac{\gamma}{I_{\rho}} [\cosh \lambda x(\lambda x - \lambda \ell + \lambda \ell \operatorname{tgh}^2 \lambda \ell - \operatorname{tgh} \lambda \ell) +$$

$$+ \sinh \lambda x \, (\, 1 - \lambda x \, \mathrm{tgh} \, \lambda \ell \,) \,] \, \} \quad , \tag{4.53}$$

$$\tau_2(x) = \tau_{2\gamma}(x) = \frac{M_k \, \rho}{2 t I_\rho} \, [\, \cosh \lambda x (\, 2 - \lambda x \, \mathrm{tgh} \, \lambda \ell \,) +$$

$$+ \sinh \lambda x \, \{ \, \lambda x + \lambda \ell (\, \mathrm{tgh}^2 \, \lambda \ell - 1 \,) - 2 \mathrm{tgh} \, \lambda \ell \, \} \,] \quad , \tag{4.54}$$

$$\tau_1(x) = \frac{M_k \, t}{I_k} \, (\, 1 - \cosh \lambda x + \mathrm{tgh} \, \lambda \ell \, \sinh \lambda x \,) \tag{4.55}$$

Napětí σ_ω a σ_γ mají v krajích přírub různá znaménka podle znamének ω_A, γ. Nejvíce bude namáháno to místo, kde obě napětí budou mít stejná znaménka a tedy do výpočtu σ_{red} zahrneme

$$\sigma_\omega(x) = \left| \frac{\omega_A B_\omega(x)}{I_\omega} \right| \quad ;$$

$$\sigma_\gamma(x) = \left| - \frac{\gamma \, B_\gamma(x)}{I_\rho} \right| \quad .$$

Výsledné redukované napětí je

$$\sigma_{red}(x) = \sqrt{\sigma^2(x) + 3[\, \tau_2(x) + \tau_1(x) \,]^2} \tag{4.56}$$

a

$$K(x) = \frac{\sigma_{red}(x)}{\sqrt{3} \, \tau_0} \quad . \tag{4.57}$$

Průběh součinitele K(x) po délce prutu profilu I o rozměrech h/b = 2, t/h =1/20 a ℓ = 5h je na obr. 35.

V exponovaném průřezu v místě vetknutí opět v kraji příruby A jsou napětí

$$\sigma_A = \sigma(\emptyset) = \frac{M_k}{2\lambda} D \quad ,$$

kde

$$D = \frac{\omega}{I_\omega} \mid \lambda\ell(1 - tgh^2 \lambda\ell) - tgh \lambda\ell \mid +$$

$$+ \frac{\gamma}{I_\rho} \{ \lambda\ell(1 - tgh^2 \lambda\ell) + tgh \lambda\ell \} \quad ,$$

$$\tau_2(\emptyset) = \frac{M_k \rho}{I_\rho} \quad , \qquad (4.58)$$

$$\tau_1(\emptyset) = \emptyset \quad .$$

Potom je

$$K_A(\ell) = \frac{1}{\sqrt{3}\ \tau_o} \cdot \sqrt{\sigma_A^2 + 3\tau_2^2(\emptyset)} =$$

$$= \frac{I_k}{\sqrt{3}\ t} \cdot \sqrt{\frac{D^2}{4\lambda^2} + 3 \frac{\rho^2}{I_\rho^2}} \quad . \qquad (4.59)$$

Součinitel napjatosti $K_A(\ell)$ je kromě na rozměrech

průřezu závislý na délce prutu ℓ, což je zřejmé z obr. 34 (křivka 1). Tento průběh by měl navazovat pro malé délky ℓ na K_A vypočtené podle teorie zkosu (4.30) a pro délky $\ell \rightarrow \ell_k$ by se měl blížit k hodnotě K_A vypočtené podle teorie deplanace (4.7).

Z obr. 34 je zřejmé, že toto průběh funkce $K_A(\ell)$ vcelku splňuje. Pro $\ell \rightarrow \ell_k$ je skutečně $K_A(\ell_k) \rightarrow K_A$ podle teorie deplanace (označme dále K_{A1}). Toto platí tehdy, předpokládáme-li, že $\lambda \rightarrow \alpha$ a tomu odpovídající velikost průřezových veličin γ a I_γ (viz kap. 5.4). Na obr. 34 jsou vyneseny hodnoty K_A pro pruty o délce ℓ = 3h a ℓ = 5h zjištěné pomocí MKP.

Nevýhodou tohoto řešení je složitost a pracnost výpočtu K_A podle (4.59) zvláště s přihlédnutím k výpočtu λ a σ_A podle (4.58). Nabízet proto konstruktérovi tyto složité výrazy pro zjednodušený výpočet by bylo téměř opovážlivé.

Podíváme-li se na průběh součinitele $K_A(\ell)$ podle teorie zkosu (dále $K_{A2}(\ell)$), je z obr. 34 (křivka 2) zřejmé, že charakter funkce je rovněž zachován. Vezmeme-li za základ výpočtu tuto závislost podle vztahu (4.30) a navrhneme nový tvar křivky $K_A(\ell)$ pro interval $\ell_s < \ell < \ell_k$ ve tvaru

$$K_A(\ell) = \frac{I_k}{\sqrt{3}\, t I_\rho} \sqrt{\gamma^2 \left(\frac{\operatorname{tgh}\, \delta \ell}{\delta} \right)^2 + 3\rho^2} \quad . \qquad (4.60)$$

Je třeba určit parametr δ tak, aby vyhověl pro libovolnou délku ℓ v rovnosti

$$K_A(\ell) = K_{A2}(\ell)\ \frac{K_{A1}}{K_{A2}(\ell_k)}\ , \tag{4.61}$$

kde

$$K_{A1} = \frac{I_k\ \omega_A}{\sqrt{3}\ t\alpha I_\omega}\ ,$$

$$K_{A2}(\ell) = \frac{I_k}{\sqrt{3}\ tI_\rho}\ \sqrt{\gamma^2\left(\frac{\operatorname{tgh}\ \beta\ell}{\beta}\right)^2 + 3\rho^2}$$

$$K_A(\ell_k) = \frac{I_k}{\sqrt{3}\ tI_\rho}\ \sqrt{\frac{\gamma^2}{\beta^2} + 3\rho^2}$$

pro $\operatorname{tgh}\ \beta\ell_k \rightarrow 1$.

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$C_o^2(\ell) = \left(\frac{\operatorname{tgh}\ \delta\ell}{\delta}\right)^2 = \left(\frac{\omega I_\rho}{\alpha I_\omega}\right)^2 \frac{\left(\gamma\ \frac{\operatorname{tgh}\ \beta\ell}{\beta}\right)^2 + 3\rho^2}{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 + 3\rho^2} - 3\rho^2 \tag{4.62}$$

a potom je součinitel napjatosti

$$K_A(\ell) = \frac{I_k}{\sqrt{3}\ tI_\rho}\sqrt{\gamma^2 C_o^2(\ell) + 3\rho^2} \qquad (4.63)$$

Položíme-li spodní část intervalu pro délku ℓ podle (4.38) do hodnoty

$$\ell_s = \ell_3 = \frac{0,61}{\beta} \quad , \qquad (4.64)$$

lze s dostatečnou přesností předpokládat, že

$$3\rho << \gamma \frac{tgh\ \beta\ell_s}{\beta} \quad ,$$

pak toto platí pro libovolné $\ell > \ell_s$ v celém intervalu platnosti smíšené teorie ($3\rho << \gamma \frac{tgh\ \beta\ell}{\beta}$). Pak součinitel $C_o(\ell)$ lze vyjádřit jednodušeji

$$C_o(\ell) = \frac{tgh\ \delta\ell}{\delta} = \frac{\omega_A I_\rho}{\alpha I_\omega \gamma}\ tgh\ \beta\ell \quad . \qquad (4.65)$$

Rovněž vztah pro součinitel napjatosti se tím zjednoduší

$$K_A(\ell) = \frac{I_k\ \gamma}{\sqrt{3}\ tI_\rho}\ \frac{tgh\ \delta\ell}{\delta} = \frac{I_k \omega_A\ tgh\ \beta\ell}{\sqrt{3}\ t\alpha I_\omega} \qquad (4.66)$$

Rozdíl mezi výsledky podle (4.66) a (4.63) je zanedbatelný.

Na obr. 36 je vynesena závislost $K_A(\ell)$ podle (4.66)

(křivka 2) ve srovnání s hodnotou stanovenou smíšenou teorií podle (4.59) (křivka 1). Nahrazení vyhovuje velmi dobře v horní části intervalu (ℓ_s, ℓ_k), ve spodní části dává hodnoty poněkud vyšší. Pro zpřesnění je možno pro délky $\ell \rightarrow \ell_s$ určit součinitele napjatosti jako střední hodnotu $K_A(\ell)$ podle (4.66) a $K_A(\ell)$ podle (4.30). Body jsou opět vyznačeny výsledky podle MKP. Jejich shoda se jeví dokonce lepší s náhradní křivkou 2 než křivkou 1 podle smíšené teorie.

Průběh součinitele K_A podle (4.66) v závislosti na ℓ pro různá b/h je pro profil I uveden na obr. 37.

Srovnání celkové napjatosti po souřadnici x pro délku prutu $\ell = 5h$ je zřejmé z obr. 35 pro přesné řešení podle smíšené teorie (vztah 4.59), řešení podle ČSN 73 1401, podle [7] a pomocí MKP. Závěry o výsledcích jsou obdobné jako u teorie zkosu.

Pozn.: Namáhání na krut se u prutů často vyskytuje současně s ohybem. Obyčejně však maximální ohybové momenty působí v těchže místech jako extrémní namáhání od stísněného krutu (vetknutí, průřezy v ose symetrie). V exponovaném místě vzniká při stísněném krutu jednoosá napjatost (teorie deplanace), nebo ji lze za jednoosou přibližně považovat ($\tau_2 << \sigma_A$) u teorie smíšené. V tom případě je výsledné normálné napětí dáno superposicí σ_o a σ_A, které lze určit zde uvažovaným způsobem.

Jakmile napjatost stísněného krutu není jednoosá, je

nutný pro její zhodnocení komplexní výpočet σ_{red}

$$\sigma_{red} = \sqrt{[\ \sigma_o(x) + \sigma(x)\ ]^2 + 3[\ \tau_1(x) + \tau_2(x) + \tau(x)\ ]^2} \quad , \tag{4.67}$$

kde $\sigma_o(x)$ je příslušné napětí od ohybového momentu a $\tau(x)$ od posouvající síly.

V exponovaném místě je třeba se složitější napjatostí počítat u velmi krátkých nosníků ($\ell < \ell_s$), kde existují napětí τ_2 a σ_A. Tam se však lze podle přibližné teorie smyku obejít bez řešení diferenciální rovnice a σ_A, τ_2 vypočítat z jednoduchých vztahů (3.38).

Pokud nás při kombinovaném namáhání s ohybem zajímá nejen místo extrémního zatížení, ale i napjatost v jiném průřezu, či jiném místě průřezu než A, nezbývá než jednotlivá napětí určit a komplexně zhodnotit podle (4.67). Výhoda definice součinitele napjatosti v tomto případě pozbývá smysl.

4.7 Nástin kontrolního výpočtu

Při kontrole exponovaného místa A prutu namáhaného stísněným krutem postupujeme následovně:

1) Vypočteme průřezové veličiny I_k, I_ω, I_ρ, I_γ, ω_A, γ, ρ.

2) Určíme charakteristické délky prutu ℓ_s, ℓ_k:

$$\ell_s = \frac{0,61}{\beta} \quad ,$$

kde

$$\beta^2 = \frac{GI_\gamma I_k}{EI_\rho (I_\rho + I_k)} \quad ,$$

$$\ell_k = \frac{1}{\alpha} \lg \left[\frac{1 + \sqrt{1 - n(K_A^2 + 1)}}{n} \right] \quad ,$$

kde

$$\alpha^2 = \frac{GI_k}{EI_\omega} \quad ,$$

$$K_A = \frac{\omega_A I_k}{\sqrt{3}\ tI_\omega \alpha}$$

a zvolíme-li **p**, je $n = p(2 - p)$.

3) Přiřadíme délku prutu ℓ do příslušného intervalu. Délkou ℓ je myšlena vzdálenost mezi vetknutím a průřezem prutu, který se chová jako volný konec (viz obr. 1). Pak platí jedna z následujících eventualit:

a) $\ell \geq \ell_k$,

b) $\ell \leq \ell_s$,

c) $\ell_s < \ell < \ell_k$.

4) Vypočteme napětí v prutu při volném krutu

$$\tau_o = \frac{M_k\, t}{I_k}$$

a redukované napětí podle HMH odpovídající volnému krutu

$$\sigma_{red,o} = \sqrt{3}\, \tau_o \quad .$$

5) a) Platí-li $\ell \geq \ell_k$, vypočteme součinitel napjatosti

$$K_A = \frac{\omega_A I_k}{\sqrt{3}\, t I_\omega \alpha} \quad .$$

b) Platí-li $\ell \leq \ell_s$, vypočteme

$$K_A = \frac{I_k}{\sqrt{3}\, t I_\rho} \sqrt{\gamma^2 \ell^2 + 3\rho^2} \quad .$$

c) Platí-li $\ell_s < \ell < \ell_k$, je

$$K_A \cong \frac{\omega_A I_k \, \mathrm{tgh}\, \beta\ell}{\sqrt{3}\, t I_\omega \alpha} \quad .$$

6) Napětí v místě A jest

$$\sigma_A = K_A\, \sigma_{red,o} \quad .$$

Průřezové veličiny I_k, I_ω, ω_A, parametry diferenciální rovnice α, β, délku ℓ_k a příslušné součinitele napjatosti

K_A lze určit pro profily I, U, Z z příslušných přiložených grafů v závislosti na poměrných rozměrech průřezu.

5. Průřezové veličiny

Při výpočtu napjatosti při stísněném krutu jakýmkoli způsobem se nevyhneme určení řady průřezových veličin, zřejmých z příslušných vztahů v kapitole 3 a rovněž definovaných v této kapitole. Použijeme-li způsob výpočtu navržený v této práci, je třeba především určit moment tuhosti v krutu I_k pro výpočet τ_o a posléze řadu dalších průřezových veličin vyskytujících se ve výrazech (4.7), (4.30), případně (4.36) a (4.66) pro K_A a ve výrazech (4.15) a (4.64) pro ℓ_k a ℓ_s. Ačkoli se podařilo odstranit pracnost řešení diferenciální rovnice, zbývající část, t.j. právě stanovení příslušných průřezových veličin zůstává. V této kapitole je uveden pokus o alespoň částečné zjednodušení této části řešení.

5.1 Grafické zpracování průřezových veličin

Pro nejběžnější tenkostěnné otevřené profily, t.j. profil I, U a Z, jsou přiloženy grafy některých průřezových veličin zpracované na počítači pro profily o konstantní tloušťce. Veličiny uvedené v grafech jsou upraveny zavedením

$$\xi = \frac{b}{h} \quad ; \quad \eta = \frac{h}{t} \quad . \tag{5.1}$$

Rozsah poměrů b/h a h/t je volen tak, aby vyhovoval běžným rozměrům ohýbaných průřezů vyskytujících se v

konstrukcích automobilů, případně textilních strojů. Rovněž vyhovuje pro rozměry válcovaných profilů podle ČSN.

Moment tuhosti v kroucení I_k je pro profil I, U a Z po zavedení vztahů (5.1)

$$I_k = \frac{1}{3} t^3 (2b + h) = \frac{1}{3} \frac{t^3}{h^3} (2 \frac{b}{h} + 1) h^4 =$$

$$= \frac{(2\xi + 1)}{3\eta^3} h^4 = c_1 h^4 \quad . \tag{5.2}$$

Pro ostatní průřezové veličiny profilu I dál platí

$$\omega_A = \frac{bh}{4} = \frac{h^2}{4} \cdot \frac{b}{h} = h^2 \frac{\xi}{4} = c_0 h^2 \quad , \tag{5.3}$$

$$I_\omega = \frac{th^2b^3}{24} = \frac{\xi^3}{24\eta} h^6 = c_2 h^6 \quad , \tag{5.4}$$

$$\alpha_o = \sqrt{\frac{I_k}{I_\omega}} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} = c_3 \frac{1}{h} \quad , \tag{5.5}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{GI_k}{EI_\omega}} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{c_1 G}{c_2 E}} = c_4 \frac{1}{h} \quad , \tag{5.6}$$

kde α_o je konstanta nezávislá na vlastnostech materiálu a platí pro ni

$$\alpha_o^2 = \alpha \frac{E}{G} \quad . \tag{5.7}$$

Příslušné grafy pro odečtení konstant c_1, c_2, c_3, c_4 jsou na obr. 19, 20, 21, 22. Konstantu c_0 pro profily **I**, **U** a **Z** odečteme na obr. 18.

Pro profil **U** dostaneme opět průřezové veličiny jako součin mocnin **h** a odečtených konstant $c_2 \div c_4$ podle následujících vztahů

$$\omega_A = \frac{h}{2}(b - e) = \left(\frac{\xi - e_o}{2}\right) h^2 = c_o h^2 \quad , \tag{5.8}$$

$$I_\omega = \frac{th^2}{6}[(b - e)^3 + e^3] + \frac{te^2h^3}{12} =$$

$$= \frac{1}{12\eta}[e_o^2(1 + 6\xi) + 2\xi^2(\xi - 3e_o)]\, h^6 =$$

$$= c_2 h^6 \quad , \tag{5.9}$$

$$\alpha_o = \sqrt{\frac{I_k}{I_\omega}} = \frac{2}{\eta}\sqrt{\frac{2\xi + 1}{[e_o^2(1 + 6\xi) + 2\xi^2(\xi - 3e_o)}}\,\frac{1}{h} = \frac{c_3}{h} \quad , \tag{5.10}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{GI_k}{EI_\omega}} = c_3\sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{1}{h} = \frac{c_4}{h} \quad , \tag{5.11}$$

kde délka **e** určuje polohu středu krutu **K** podle obr. 2; pro e_o dále platí

$$e = \frac{3b^2}{h + 6b} = h\, e_o = \frac{3\xi^2}{1 + 6\xi} h \quad . \tag{5.12}$$

Příslušné grafy nalezneme na obr. 23, 24 a 25.

Podobně pro profil Z po zavedení vztahů (5.1) dostaneme

$$\omega_A = \frac{bh}{2} = \frac{\xi}{2} h^2 = c_o h^2 \quad , \tag{5.13}$$

$$I_\omega = \frac{tb^3h^2}{12} \left(2 - \frac{3b}{2b + h} \right) = \frac{\xi^3}{12\eta} \frac{(\xi + 2)}{(2\xi + 1)} h^6 =$$

$$= c_2 h^6 \quad , \tag{5.14}$$

$$\alpha_o = \sqrt{\frac{I_k}{I_\omega}} = \frac{2(2\xi + 1)}{\eta\xi\sqrt{\xi(\xi + 2)}} \frac{1}{h} = \frac{c_3}{h} \quad , \tag{5.15}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{GI_k}{EI_\omega}} = c_3 \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{1}{h} = \frac{c_4}{h} \quad , \tag{5.16}$$

Grafy c_2, c_3 a c_4 jsou na obr. 26, 27 a 28.

Pomocí vtahů (5.1) lze vyjádřit průřezové veličiny pro libovolný tvar průřezu a posléze zpracovat do grafu.

Průřezové veličiny týkající se teorie zkosu a vyskytující se ve výrazu (4.36) vedou pro profil skládající se z rovných částí na jednoduché výrazy

$$S_{\gamma_i} = \rho_i t \quad ,$$

$$\gamma_i = \frac{S_{\gamma(i + \Delta s)} - S_{\gamma(i - \Delta s)}}{S_{oi}} \quad ,$$

$$\beta = \sqrt{\frac{G}{E}}\, c_5 \frac{1}{h} = c_6 \frac{1}{h} \quad .$$

Příslušné grafy pro konstanty c_5, c_6 jsou na obr. 32 a 33 a lze je použít pro všechny tři jmenované profily.

5.2 Nahrazení výpočtu hlavní polární plochy ω a I_ω jednodušším způsobem

Zde uvedený návrh výpočtu hlavní polární plochy ω_A a z ní vyplývajícího momentu tuhosti vůči deplanaci I_ω byl inspirován řešením uvedeným v [10]. Zde se předpokládá, že ohyb přírub je provázený vznikem posouvajících sil T tvořících silovou dvojici T·h. Rovnice rovnováhy pak je

$$M_k = G\vartheta I_k + Th \quad . \qquad (5.18)$$

Pro ohyb v přírubě můžeme psát

$$\frac{dM_o}{dx} = T = - EI_{pz} w''' \quad ,$$

kde w je průhyb příruby ve směru osy y a $I_{pz} = \frac{b^3 t}{12}$ je kvadratický moment plochy příruby k ose z podle obr. 2.

Pro úhel pootočení průřezu $\varphi(x)$, pro nějž platí

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} \qquad \text{a} \qquad w(x) = \varphi(x) \frac{h}{2} \quad ,$$

dostaneme po dosazení do (5.18) diferenciální rovnici

$$M_k = GI_k \vartheta(x) - \frac{EI_{pz} h^2}{2} \vartheta''(x)$$

a po úpravě

$$\vartheta''(x) - \zeta^2 \vartheta^2 = - \zeta^2 \frac{M_k}{GI_k} \quad , \qquad (5.19)$$

kde

$$\zeta = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2GI_k}{EI_{pz}}} \qquad (5.20)$$

je veličina nahrazující poměrnou tuhost α v diferenciální rovnici stísněného krutu (3.3). Je závislá pouze na I_k a kvadratickém momentu plochy I_{pz}, což jsou běžné průřezové veličiny při namáhání na ohyb a krut.

Hodnota ζ^2 se shoduje s poměrnou tuhostí α^2 u profilu I se dvěma osami souměrnosti, kde hlavní polární plocha ve stojině je nulová a veškerá napětí σ a τ_z podle deplanační teorie nesou pouze příruby. Platí tedy rovnost

$$I_\omega = \frac{I_{pz} h^2}{2} \quad .$$

Dále jsou navrženy pro hlavní polární plochu ω a I_ω vztahy, v nichž velikost těchto veličin určíme rovněž pomocí známých veličin - kvadratických a statických momentů plochy přírubových a stojinových částí profilu, aniž by bylo vůbec třeba definovat ω, I_ω. Vztahy jsou

vhodné pro průřezy skládajících se z rovných částí s jednou osou symetrie případně antisymetrické. Předpokládají znalost polohy středu krutu **K**.

Jejich sestavení vycházelo z představy o polární ploše ω_1 vytvořené ze středu krutu **K**. U profilů s osou symetrie je ω_1 totožné s hlavní polární plochou ω.

Velikost hlavní polární plochy je v libovolném místě průřezu (např. **A**)

$$\omega_A = y_A z_A - \frac{\Sigma S_{pz} z}{S} - \frac{\Sigma S_{sy} y}{S} , \qquad (5.21)$$

kde S_{pz} je statický moment příslušné přírubové části profilu k ose z,

S_{sy} je statický moment stojiny k ose **y**,

S je celková plocha průřezu,

z, příp. **y** je vzdálenost příruby (stojiny) od středu krutu **K**,

z_A, y_A jsou průvodičové vzdálenosti místa **A** od středu krutu **K**; jejich znaménko je dáno stejnými pravidly jako pro průvodič ρ (viz kap. 5.1). Proto např. souřadnice **y** v bodě **D** profilu **U** mění znaménko. Druhý a třetí člen výrazu (5.21) značí korekci hodnoty ω_A v případě, že $\omega_1 \neq \omega$. U průřezů s alespoň jednou osou symetrie jsou výrazy $\Sigma S_{sy} y$, $\Sigma S_{pz} z$ rovny nule.

Moment tuhosti vůči deplanaci lze určit ze vztahu

$$I_\omega = \Sigma I_{sy} y^2 + \Sigma I_{pz} z^2 - \frac{(\Sigma S_{pz} z)^2}{S} -$$

$$- \frac{(\Sigma S_{py} y)^2}{S} \quad , \qquad (5.22)$$

kde I_{sy} je kvadratický moment plochy stojinových částí profilu k ose y

a I_{pz} je kvadratický moment plochy přírubových částí profilu k ose z (z').

Osy y a z (z') procházejí takovými místy průřezu, kde $\omega_i = 0$ (obr. 2).

Aplikujeme-li vztahy (5.21) a (5.22) na profily I, C, Z, dostaneme pro profil I

$$\omega_A = \frac{b}{2} \frac{h}{2}$$

$$I_\omega = 2 \frac{b^3 t}{12} (\frac{h}{2})^2 \quad ,$$

pro profil U

$$\omega_A = \frac{h}{2} (- e + b) \quad ,$$

$$I_\omega = \frac{h^3 t}{12} e^2 + 2[\frac{te^3}{3} + \frac{t}{3} (b - e)^3] (\frac{h}{2})^2 \quad ,$$

a pro profil Z

$$\omega_A = \frac{hb}{2} - 2\,\frac{b^2 t}{2S}\,\frac{h}{2} \quad ,$$

$$I_\omega = 2\,\frac{b^3 t}{2}\,(\,\frac{h}{2}\,)^2 - \frac{4}{S}\,(\,\frac{b^2 t}{2}\,\frac{h}{2}\,)^2 \quad .$$

Vztahy se shodují s výrazy pro ω, I_ω uvedenými v [2].

Pokud bychom se chtěli obejít bez zjišťování polohy středu krutu **K**, lze u profilu ⊏ předpokládat, že $e \cong \frac{b}{3}$. Chyba výpočtu ve sledovaném rozsahu rozměrů, t.j. pro $\frac{b}{h} \in \langle 0{,}2 \div 1 \rangle$, činí maximálně 16% pro ω_A a 9% pro I_ω.

5.3 Vliv různých tlouštěk jednotlivých částí profilu

Zatímco vztahy pro K_A, případně $K_A(x)$ a charakteristické délky ℓ_k, ℓ_s jsou universální pro libovolný tvar a rozměry profilu, zpracování těchto rozměrů do grafů pro vybrané profily **I**, **U**, **Z** bylo provedeno pro konstantní tloušťku **t** průřezu.

Má-li průřez v přírubě tloušťku **t** a ve stojině t_o ($t > t_o$) sníží se velikost I_k a tedy zvýší τ_o a σ_{red}. Tím se zmenší velikost špičky napětí dané součinitelem K_A i když absolutní hodnoty napětí mohou být vyšší než u průřezu s konstantní tloušťkou. Na obr. 29, 30 a 31 jsou porovnány součinitelé K_A vždy pro dvojici profilů **I**, **U**, **Z** o konstantní a nekonstantní tloušťce pro poměr $t/t_o = 2$, což odpovídá např. vzájemným relacím tlouštěk u válcovaných profilů podle ČSN. Z uvedených grafů je zřejmé, že špička napětí pro $t > t_o$ je nižší a téměř

nepodstatná vůči $\sigma_{red,o}$. Použijeme-li tedy uvedené grafy pro výpočet K_A u profilu, kde $t_o < t$, nanejvýš konstrukci poněkud předimenzujeme.

U teorie zkosu se tloušťka stojiny t_o v průřezových veličinách neprojeví, jak vyplývá ze vztahů (5.17) pro S_γ, γ, I_ρ a I_γ.

5.4 Závislost γ a I_γ na způsobu přenosu normálného napětí

V literatuře uvádějící teorii zkosu, např. v [3], se předpokládá, že normálné napětí přenesou pouze výztuhy o ploše průřezu S_o zpevňující průřez, zatímco smyková napětí přenesou příruby. Dále se uvádí, že pokud prut takové výztuhy nemá, přenesou se normálná napětí částí příruby.

Zůstává otázka, jaká část příruby se bude podílet na přenosu normálného napětí, na čemž závisí velikost poměrné plochy průvodiče γ a kvadratického momentu poměrné plochy průvodiče I_γ. Za tím účelem byly zpracovány dva výpočetní modely krouceného prutu o délkách $\ell = 2h$ a $\ell = 3h$ metodou konečných prvků. V exponovaném místě A profilu ve vetknutí byly zjištěny hodnoty σ_{redA} a odtud určeno $K_A = 0,387$ pro $\ell = 2h$ a $K_A = 0.571$ pro $\ell = 3h$. Oběma těmto hodnotám odpovídá ze vztahu (4.36) velikost $\gamma \cong 2,5$. Z definice γ je

$$\gamma = \frac{S_\gamma}{S_o} = \frac{ht}{2} \frac{1}{b_o t}$$

a odtud

$b_o \cong 4$ mm .

Lze předpokládat, že napětí se rozdělí zhruba po celé šířce příruby ($\frac{b}{2} - \frac{t}{2} \cong 4{,}5$ mm v daném modelu o $b = 10$ mm a $t = 1$ mm).

Má-li parametr λ diferenciální rovnice (4.39) u smíšené teorie nabýt rozumné velikosti, ukazuje se, že plocha S_o části příruby, o níž předpokládáme, že přenáší normálná napětí, musí být značně menší, než jsme předpokládali v teorii zkosu. To odpovídá představě, že tímto způsobem se přenese jen část σ_γ z celkového normálného napětí σ.

Vyjdeme-li z podmínky, že kořeny diferenciální rovnice jsou reálná čísla, pak mezní hodnota šířky b_o „fiktivní výztuhy" ($S_o = b_o t$) vychází ze vztahu $I_\gamma \to \frac{I_\rho^2}{I_\omega}$ podle (3.51). Odtud např. pro profil I platí $b_o \to b/6$. Pro takovou hodnotu platí, že $\lambda \to \alpha$.

6. Použití MKP na rozbor napjatosti

Vybrané modely byly řešeny pomocí uživatelského programu TPS 10.

Veškeré modely mají průřez ve tvaru I o rozměrech b = 10 mm, h = 20 mm, t = 1 mm. Při aplikaci bylo použito obdélníkových prvků o rozměrech ($t \times b/2 \times n_o$) v přírubě a ($t \times h/2 \times n_o$) ve stojině. Třetí rozměr prvku je $n_o = h/2$ po celé délce prutů kratších a u prutů o délce $\ell = 15h$ v okolí obou konců prutu; ve střední části prutů, kde je napjatost stabilizována, je délka prvků trojnásobná. Zatížení kroutícím momentem $M_k = 1{,}05.10^{-7}$ MNm bylo rozděleno do tří uzlů stojiny posledního průřezu o velikostech $M_k/3$. Dlouhé pruty jsou uloženy podle obr. 1a, kratší podle obr. 1b. Tím se odstraní vliv místních špiček napětí v okolí působiště M_k, které by u krátkých prutů ovlivnily nezanedbatelnou část průběhu napětí po délce. V místě vetknutí byly předepsány nulové posuvy ve směrech souřadných os u_x, u_y, u_z a nulová pootočení kolem těchto os. V místě opření (obr. 1b) je předepsán nulový posuv u_x a nulové pootočení kolem os y, z.

Odečítána byla redukovaná napětí, případně byly výsledky přepočítany na součinitele napjatosti K pro libovolné místo průřezu či pro okraj příruby (K_A). Délky prutů byly vybrány tak, aby obsáhly všechny intervaly výpočtu podle jednotlivých teorií. Pro délku modelu $\ell = 15h$ platí $\ell > \ell_k$, pro délku $\ell = 2h$ platí

$\ell < \ell_s$ a pro délky $\ell = 3h$ a $\ell = 5h$ pak $\ell_s < \ell < \ell_k$. V příslušných intervalech bylo provedeno srovnání výsledků MKP s jednotlivými teoriemi především v exponovaném místě **A**, ale bylo možno provést diskusi o napjatosti v celém tělese (viz obr. 11, 16 a 35 a kap. 4.3, 4.5 a 4.6). Pomocí modelů o délce $\ell = 2h$ a $\ell = 3h$ byla také stanovena velikost průřezových veličin γ a I_γ.

6.1 Vliv zpevnění

Srovnáván byl model o konstantním průřezu o délce $\ell = 15h$ a model zpevněný v místě vetknutí podle obr. 38.

Redukovaná napětí pro krajní vlákna příruby po délce obou prutů jsou vynesena na obr. 39. Z jejich průběhu je možno usoudit, že zpevnění sice výrazně sníží namáhání ve vetknutí, avšak špička napětí se objeví poblíž místa přechodu zpevněné části do příruby o konstantní tloušťce a je v podstatě stejné velikosti. Zpevnění by bylo třeba navrhnout tak, aby změna tvaru v místě **B** byla šetrnější (např. zmenšení poměru b_1/b, případně jiným tvarováním hrany **AB**).

Pootočení nezpevněné tyče vypočteme ze vztahu

$$\varphi(x) = \frac{M_k}{\alpha G I_k} \left[\operatorname{tgh} \alpha\ell (\cosh \alpha x - 1) - \sinh \alpha x + \alpha x \right] . \qquad (6.1)$$

Pro volný konec platí

$$\varphi(\ell) = \frac{M_k}{\alpha G I_k} [\ \alpha\ell - \mathrm{tgh}\ \alpha\ell\ ] = 0{,}0239 \text{ rad} \quad . \qquad (6.2)$$

Pootočení ve zpevněném prutu odhadneme pro zkrácenou délku prutu $\bar{\ell} \cong \ell - \ell^*/2$. Potom je $\varphi(\bar{\ell}) \cong 0{,}0224$ rad.

Na volném konci nezpevněného modelu podle MKP byl zjištěn posuv místa uprostřed příruby ve směru osy y $u_y = 0{,}215$ mm, na zpevněném modelu $u_y = 0{,}209$ mm. Potom $\varphi(\ell) \cong \mathrm{tgh}\ \varphi(\ell) = \frac{2u_y}{h} = 0{,}0215$ rad pro nezpevněný prut a $\varphi(\ell) = 0{,}0209$ rad pro zpevněný prut. Zpevnění zde představuje zmenšení deformace o $\sim 3\%$.

Výsledky výpočtu podle (6.2) a podle MKP se liší o $\sim 11\%$.

6.2 Vliv tuhosti vetknutí

Pro sledování vlivu „nedokonalého" vetknutí byl zaveden model podle obr. 40 a to ve dvou variantách provedení průřezu části **CD**. Varianta **2** má průřez ve tvaru I o rozměrech $(b_1 \times h_1 \times t_1) = (20 \times 40 \times 2)$ mm, varianta **3** pak má obdélníkový průřez $(t_2 \times h_2) = (1 \times 20)$ mm; délka obou je $2\ell_5 = 240$ mm. Část **AB** má průřez **I** o rozměrech $(b \times h \times t) = (10 \times 20 \times 1)$ mm, a délka $\ell = 300$ mm u obou variant. Varianta **4** je upravenou variantou **2** se zpevněním stejným jako na obr. 38. Srovnání se děje s prutem **AB** tuho vetknutým v místě **A** (1). Zatěžující kroutící moment je $M_k = 1{,}05.10^{-7}$ MNm.

Deformaci prutu **AB** podle deplanační teorie (neboť $\ell > \ell_k$) lze popsat:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\vartheta(0)}{\alpha} \sinh \alpha x - \frac{B(0)}{GI_k} (\cosh \alpha x - 1) -$$

$$- \frac{M_k}{\alpha GI_k} (\sinh \alpha x - \alpha x) \qquad (6.3)$$

$$\vartheta(x) = \vartheta(0) - \cosh \alpha x - B(0) \frac{\alpha}{GI_k} \sinh \alpha x -$$

$$- \frac{M_k}{GI_k} (\cosh \alpha x - 1) \qquad (6.4)$$

a dále

$$B(x) = - \vartheta(0) \frac{GI_k}{\alpha} \sinh \alpha x + B(0) \cosh \alpha x + \frac{M}{\alpha} \sinh \alpha x \quad , \qquad (6.5)$$

$\varphi(0)$ a $\vartheta(0)$ jsou pootočení a poměrný zkrut v místě **A**, který je dán deformací části **CD** konstrukce. Bimoment $B(0)$ určíme z okrajové podmínky $B(\ell) = 0$:

$$B(0) = \frac{\operatorname{tgh} \alpha \ell}{\alpha} [GI_k \vartheta(0) - M_k] \quad . \qquad (6.6)$$

Napětí v místě spoje **A** jsou :

$$\sigma_A(0) = \frac{\omega_A}{I_\omega} B(0) = \frac{\omega_A \operatorname{tgh} \alpha \ell}{I_\omega \alpha} [GI_k \vartheta(0) - M_k] \quad , \qquad (6.7)$$

$$\tau_1(\emptyset) = Gt\vartheta(\emptyset)$$

Hodnoty napětí $\tau_1(\emptyset)$ jsou zanedbatelné, hodnoty $\sigma_A(\emptyset)$ se zmenšující se tuhostí vetknutí (části **CD**) poněkud klesají. V tab. I jsou uvedeny hodnoty napětí v místě spojení **A** pro eventuality 1 ÷ 4 a zároveň hodnoty $\sigma_A(\emptyset)$ vypočtené podle (6.7) pro příslušné $\vartheta(\emptyset)$ odečtené z modelů MKP. Zajímavý je průběh napětí na modelu 3. V místě spoje **B** je zde odečteno napětí $\sigma_A \cong 10,4$ MPa, avšak špička napětí ($\sigma_{max} \cong 16,3$ MPa) vzniká ve vzdálenosti $\sim h$ od spoje, což je zřejmě způsobeno větší poddajností části **CD**. Průběh napětí σ_{redA} rohu příruby po délce prutu **AB** pro jednotlivé eventuality je vynesen na obr. 41.

Tab. I

		1	2	3	4
$\sigma_A(\emptyset)$ MPa	MKP	17,0	16,7	$\sigma_{max} = 16,3$ $\sigma_A = 10,4$	15,5
	teorie depl.	18,1	14,2	9,4	

Po dosazení za $B(\emptyset)$ z (6.6) dostaneme pro deformaci

$$\varphi(x) = \varphi(\emptyset) + \frac{\vartheta(\emptyset)}{\alpha}\,[\,\sinh \alpha x - \operatorname{tgh} \alpha\ell(\,\cosh \alpha x - 1\,)\,] +$$

$$+ \frac{M_k}{\alpha G I_k}\,[\,\operatorname{tgh} \alpha\ell(\,\cosh \alpha x - 1\,) -$$

$$- (\sinh \alpha x - \alpha x)] \quad ,$$

(6.8)

$$\vartheta(x) = \vartheta(0) (\cosh \alpha x - \operatorname{tgh} \alpha \ell \sinh \alpha x) +$$

$$+ \frac{M_k}{GI_k} (\operatorname{tgh} \alpha \ell \sinh \alpha x - \cosh \alpha x + 1) \quad .$$

Na volném konci v místě **B** je

$$\varphi(\ell) = \varphi(0) + \frac{\vartheta(0)}{\alpha} + \frac{M_k}{\alpha GI_k} [\alpha \ell - \operatorname{tgh} \alpha \ell] \quad ,$$

(6.9)

$$\vartheta(\ell) = \frac{\vartheta(0)}{\cosh \alpha \ell} + \frac{M_k}{GI_k} (1 - \frac{1}{\cosh \alpha \ell}) \quad .$$

Pro eventualitu **1**, kdy $\varphi(0) = 0$, $\vartheta(0) = 0$ vypočteme podle (6.9) $\varphi(\ell) = 0{,}0296$ rad, $\vartheta(\ell) = 0{,}0976\ m^{-1}$. Odtud je deplanace $u = u_x = \omega_A \vartheta(\ell) = 0{,}488.10^{-5}$ m. Pootočení $\varphi(\ell)$ (příp. $\varphi(0)$) získáme pomocí posuvu $\mathbf{u}_y$, kde platí $u_y = \frac{h}{2} \varphi$. Posuvy $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$ odečteme na modelech MKP. Hodnoty takto získané jsou uvedeny v tab. II pro místa vetknutí (příp. spoje **A**) a pro volný konec **B**.

Tab. II

	1	2	3	4
$\varphi(0)$ [rad]	0	$0{,}032.10^{-3}$	$0{,}115.10^{-3}$	$0{,}018.10^{-3}$
$\varphi(\ell)$ [rad]	$0{,}215.10^{-1}$	$0{,}233.10^{-1}$	$0{,}283.10^{-1}$	$0{,}229.10^{-1}$
$u_x(0)$ [mm]	0	$0{,}105.10^{-5}$	$0{,}347.10^{-5}$	$0{,}09.10^{-5}$
$u_x(\ell)$ [mm]	$0{,}464.10^{-5}$	$0{,}511.10^{-5}$	$0{,}411.10^{-5}$	$0{,}501.10^{-5}$

Velikost pootočení $\varphi(\emptyset)$ je ve všech případech hodnota velmi malá, což vyplývá z velké ohybové tuhosti části **CD**, kde

$$\varphi_A \cong \frac{M_k \ell}{8EI_{CD}} .$$

I_{CD} je kvadratický moment plochy průřezu části **CD** k neutrálné ose ($I_{CD,2} = 42,67.10^{-9}\ m^4$, $I_{CD,3} = 5,33.10^{-9}\ m^4$).

Deplanace φ na volném konci **B** jsou, jak je zřejmé ze vztahu (6.9), závislé i na $\vartheta(\emptyset)$, (tedy posuvu $\mathbf{u}_x$). Tento posuv se objeví v části **CD** jako důsledek snahy po deplanaci průřezu **A** a může být uvažován jako deformace od krutu části **CD**, či složitější deformace „deskové" části okolí spoje, případně jako následek místních špiček napětí způsobených náhlou změnou tvaru v místě spoje.

7. Aplikace výpočtu na konstrukční prvky rámu podvozku LIAZ 124.040

Tato problematika byla řešena v [16] jako první odhad výpočtu rámu podvozku automobilu LIAZ 124.040. V této kapitole se budeme zabývat pouze pevnostní kontrolou příček rámu, které jsou namáhány na stísněný krut a na něž lze výpočet uvedený v kap. 4 aplikovat.

Rám podvozku je svařen ze dvou podélníků profilu U spojených sedmi příčkami různých tvarů průřezů (obr. 42). V místě spojení podélníků s příčkami se přenášejí do příček kroutící momenty způsobené celkovým namáháním rámu a jeho deformací v místech spoje, dominantní je při tom namáhání rámu při přejezdu po terénních nerovnostech, které jsou nesouměrné vzhledem k svislé rovině procházející podélnou osou vozidla. Dojde tedy k vzájemnému natočení osy přední a zadní nápravy. Z celkového statického řešení podle [16] byly získány hodnoty kroutících momentů M_{k_i} na jednotlivé příčky.

Průřez příček 1 až 3 podle obr. 42 má tvar tenkostěnné trubky. U prutu takového průřezu stísněný krut nevzniká. Příčky jsou tedy namáhány volným krutem. Naopak u příček 4 ÷ 7, vyrobených z ohýbaných plechů o průřezech ve tvaru úhelníků se stísněný krut uplatní.

Uložení příček lze předpokládat podle obr. 1b. Není sice dokonale tuhé ($\varphi \neq 0$), avšak vzhledem k tuhosti

podélníků je možno uvažovat nulovou deplanaci koncových průřezů. Uložení můžeme spíše považovat za opření, což je z hlediska okrajových podmínek pro výpočet napětí totéž. Délka prutu mezi průřezem s nulovou deplanací a průřezem, kde B = Ø je $\ell = p/2$, kde **p** je délka příčky. Zatížení příček kroutícími momenty je vzato z [16].

Příčka 6 má délku p = 670 mm, je prizmatická o průřezu I a rozměrech b = 160 mm, h = 229 mm, t = 6 mm, t_o = 12 mm (tloušťka stojiny). Průřezové veličiny jsou: $I_k = 1{,}55.10^{-7}$ m^4, $\rho = h/2 = 0{,}114$ m, $\gamma = 1{,}49$, $I_\rho = 2{,}61.10^{-5}$ m^4, $I_\gamma = 4{,}08.10^{-3}$m^2. Dále vypočteme podle vztahu (4.24) parametr $\beta = 0{,}59$ 1/m. Pak platí

$$\ell_s = \frac{0{,}61}{\beta} = 1{,}03 \text{ m} \quad .$$

Délka prutu $\ell \cong p/2 = 0{,}334$ m a tedy $\ell < \ell_s$. Napjatost v prutu budeme hodnotit podle teorie zkosu. Podle vztahu (4.36) vypočteme $K_A = 0{,}182$ a pro τ_o = 200 MPa podle (4.2) (je-li $M_k = 5{,}17.10^{-3}$ MNm) konečně dostaneme

$$\sigma_A = K_A \sqrt{3}\, \tau_o = 63 \text{ MPa} \quad .$$

Toto napětí působí v průřezech příčky, které nedeplanují.

Příčka 7 má délku p = 694 mm a je zpevněna, jak je zřejmé z obr. 42, na délku p_7 = 220 mm. Průřez má tvar podle obr. 42 o rozměrech b = 77 mm, h = 217 mm, t = 6 mm,

b_1 = 90 mm, h_1 = 157 mm, t_1 = 5 mm. Vypočteme průřezové veličiny $I_k = 9{,}11.10^{-8}$ m^4, $\rho = 0{,}108$ m, $\rho_1 = 0{,}078$ m, $I_\rho = 1{,}014.10^{-5}$ m^4, $\gamma = 1{,}53$, $\gamma_1 = 0{,}93$, $I_\gamma = 2{,}72.10^{-3}$m^2. Dále podle vztahu (4.24) je $\beta = 0{,}958$ 1/m a charakteristická délka $\ell_s = 0{,}636$ m. Protože délka prutu $\ell = p/2 = 0{,}346$ m, platí opět $\ell < \ell_s$. Podle teorie zkosu vypočteme $K_A = 0{,}281$. Je-li kroutící moment působící na příčku $M_k = 1{,}27.10^{-3}$ MNm, je $\tau_o = 84$ MPa. Špička napětí dosahuje hodnoty

$$\sigma_A = K_A \sqrt{3}\, \tau_o = 41 \text{ MPa} \quad .$$

V tomto výpočtu jsme uvažovali, že příčka je prismatická v průřezu jako ve střední části podle obr. 42. Můžeme také uvažovat, že příčka je v místech podepření plechy vetknutá, pak je její délka p_7. Potom vyjde $K_A = 0{,}178$ a $\sigma_A = 26$ MPa. Skutečná hodnota bude ležet mezi těmito dvěma hodnotami.

Příčka 4 má délku p = 662 mm, průřez ve tvaru I, který je ve střední části plynule zeslaben. Tento tvar s plynule proměnným průřezem nahradíme symetricky umístěným osazením (náhlou změnou průřezu). Rozměry neoslabené části průřezu jsou (b × h × t) = (83 × 197 × 6) mm a zeslabené části ve středu příčky (b × h_1 × t) = (83 × 129 × 6) mm, její délka $2p_4$ = 196 mm. Příčka je zatížena $M_k = 5{,}72.10^{-3}$MNm.

Vzhledem k tomu, že uprostřed příčky je B = Ø, budeme

řešit její polovinu ($\ell = p/2$) o různých průřezech délek p_4 a $p_o = \left(\frac{p}{2} - p_4 \right)$. Zavedeme souřadnici x_1 od místa spoje pro část o délce p_o a x_2 od středu příčky pro část o délce p_4. Lze napsat

$$B_{\gamma 2}(\emptyset) = \emptyset \quad ,$$

$$B'_{\gamma 1}(\emptyset) = M_k \quad , \qquad (7.1)$$

$$B_{\gamma 1}(p_o) = B_{\gamma 2}(p_4) \quad .$$

Bimomenty v jednotlivých částech prutu jsou

$$B_{\gamma 1}(x_1) = M_k (x_1 - p_o) + B_{p1} \quad ,$$

$$B_{\gamma 2}(x_2) = - M_k (x_2 - p_4) + B_{p2} \quad .$$

Z podmínek (7.1) určíme

$$B_{p2} = - M_k \, p_4 = B_{p1} \quad .$$

Potom je

$$B_{\gamma 1}(x_1) = M_k (x_1 - p_o - p_4) \quad ,$$

$$B_{\gamma 2}(x_2) = - M_k \, x_2 \quad . \qquad (7.2)$$

V exponovaných místech dostaneme

$$B_{\gamma 1}(\emptyset) = - M_k \, (\, p_o + p_4 \,) = - 0{,}711.10^{-3} \ \mathrm{MNm^2} \quad ,$$

$$B_{\gamma 2}(\emptyset) = - M_k \, p_4 = - 0{,}516.10^{-3} \ \mathrm{MNm^2} \quad .$$

Vypočteme napětí v přírubě v místě spoje

$$\sigma_1(\emptyset) = \frac{B_{\gamma 1}(\emptyset) \, \gamma_1}{I_{\rho 1}} = 112 \ \mathrm{MPa} \quad ,$$

$$\tau_{2,1}(\emptyset) = \frac{M_k \, \rho_1}{I_{\rho 1}} = 27 \ \mathrm{MPa}$$

a

$$\sigma_{red,1} = \sqrt{\sigma_1(\emptyset)^2 + 3 \, \tau_{2,1}^2(\emptyset)} = 122 \ \mathrm{MPa} \quad .$$

V místě osazení v zeslabeném průřezu je

$$\sigma_2(p_4) = \frac{B_{\gamma 2}(p_4)\gamma_2}{I_{\rho 2}} = 52 \ \mathrm{MPa} \quad ,$$

$$\tau_{2,2}(p_4) = \frac{M_k \, \rho_2}{I_{\rho 2}} = 41 \ \mathrm{MPa}$$

a

$$\sigma_{red,2} = 88 \ \mathrm{MPa} \quad .$$

Průřezové veličiny pro oba průřezy jsou $I_{k1} = 13,73.10^{-8}$ m^4, $I_{k2} = 9,82.10^{-8}$ m^4, $\rho_1 = 0,098$ m, $\rho_2 = 0,065$ m, $\gamma_1 = 1,28$, $\gamma_2 = 0,84$, $I_{\rho 1} = 1,93.10^{-5}$ m^4, $I_{\rho 2} = 0,83.10^{-5}$ m^4, $I_{\gamma 1} = 3,02.10^{-3}$ m^2, $I_{\gamma 2} = 1,3.10^{-3}$ m^2.

Ověřme si správnost použití vztahů podle teorie zkosu. Vypočteme $\beta_1 = 0,65$ 1/m, $\beta_2 = 0,84$ 1/m. Pak vyjde

$$\ell_s = \frac{0,61}{\beta_1} = 0,94 \text{ m} > \frac{p}{2} = 0,332 \text{ m}$$

a

$$\ell_s = \frac{0,61}{\beta_2} = 0,73 \text{ m} > \frac{p}{2} \quad .$$

Použijeme-li výpočet podle kap. 3 pak vždy pro prut o délce dané vzdáleností exponovaného průřezu a průřezu, který se chová jako volný konec (střed příčky). Pak pro zeslabenou část příčky ($\ell = p_4$) dostaneme $\tau_{o2} = 322$ MPa,

$$K_{A2} = \frac{I_{k2}}{\sqrt{3}\, t I_{\rho 2}} \sqrt{(p_4 \gamma_2)^2 + 3\rho_2^2} = 0,158$$

a výsledné napětí v přírubě je $\sigma_2 = 88$ MPa. Pro nezeslabenou část ($\ell = p/2$) dostaneme $\tau_{o1} = 230$ MPa, $K_{A1} = 0,312$ a $\sigma_1 = 122$ MPa.

Příčka 5 má délku p = 693 mm a je opět ve střední části zeslabena plynule proměnným průřezem. Nahradíme jej opět

osazenním o průřezu s rozměry (160 × 160 × 8) mm a délce $2p_5$ = 126 mm. Nezeslabený průřez má rozměry (160 × 247 × 8) mm. Příčka je zatížena M_k = 7,14.10^{-3} MNm. Příslušné průřezové veličiny jsou I_{k1} = 3,84.10^{-7} m^4, I_{k2} = 2,68.10^{-7} m^4, ρ_1 = 0,123 m, ρ_2 = 0,08, γ_1 = 1,72, γ_2 = 1,11, $I_{\rho 1}$ = 3,87.10^{-5} m^4, $I_{\rho 2}$ = 1,64.10^{-5} m^4, $I_{\gamma 1}$ = 6,82.10^{-3} m^2, $I_{\gamma 2}$ = 2,84.$10^{-3}$$m^2$. Odtud určíme β_1 = 0,822 1/m, β_2 = 1,098 1/m a ověříme vhodnost použití teorie zkosu

$$\ell_s = \frac{0,61}{\beta_1} = 0,742 \text{ m} > \frac{p}{2} = 0,346 \text{ m}$$

$$\ell_s = \frac{0,61}{\beta_2} = 0,582 \text{ m} > p_5 = 0,063 \text{ m} \quad .$$

Pro zeslabený průřez v místě osazení vypočteme ($\ell = p_5$) τ_{o2} = 348 MPa, K_{A2} = 0,155 a σ_2 = 93 MPa. Pro průřez nezeslabený je uvažovaná délka $\ell = \frac{p}{2}$ = 0,346 m a dále τ_{o1} = 149 MPa, K_{A1} = 0,452 a σ_1 = 116 MPa.

V práci [16] bylo pro pevnostní kontrolu příček použito deplanační teorie, neboť nebyly ještě navrženy rovnice pro výpočet charakteristických délek ℓ_s, ℓ_k. Celý výpočet se tím dostává do pozměněné podoby, protože změny se objeví i ve výpočtu tuhostí příček podle této teorie, které vstupují do řešení staticky neurčité konstrukce rámu. Výpočet tuhostí podle obou teorií se rovněž liší.

8. Závěr

Hlavní úsilí v této práci bylo věnováno vytvoření jednoduchého návrhu výpočtu namáhání tenkostěnných kroucených prutů otevřeného průřezu, který by sloužil k pevnostní kontrole, návrhu dimenzování průřezu prutu, případně jeho optimalizaci. Jednotlivé teorie, které jsou pro daný způsob namáhání k dispozici, znamenají zabývat se touto problematikou podrobněji. Zde uvedený návrh výpočtu je zamýšlen především jako pomůcka pro běžnou pevnostní kontrolu.

Dosavadní možností orientačního výpočtu je výpočet podle Komentáře k ČSN 73 1401 [7], který vychází ze zjednodušené diferenciální rovnice stísněného krutu a protože dává výsledky namáhání několikanásobně vyšší, je upraven podle prací [8], [9]. I tento výpočet vede k předimenzování konstrukce.

Navržený způsob výpočtu vychází z přesného řešení stísněného krutu, přičemž v prutu takto namáhaném vzniká normálné napětí a druhotné a prvotní smykové napětí. Výpočet vyhodnocuje celkovou napjatost konkrétního místa prutu zavedením součinitele napjatosti K(x,s) definovaného jako poměr redukovaného napětí daného místa při stísněném krutu k redukovanému napětí od volného krutu $\sigma_{red,o}$. V práci je použita pevnostní podmínka H-M-H, ale vztah je možno jednoduše upravit na libovolnou pevnostní podmínku podle chování materiálu. Výpočet

napětí τ_o od volného krutu je snadný.

Jednoduchost návrhu se projeví právě pro místa prutu, která nás při pevnostní kontrole zajímají, t.j. průřezy v uložení a ta místa v průřezech, které nesou největší namáhání. Pro tato exponovaná místa se výraz pro součinitel napjatosti

$$K_A = \frac{\sigma_A}{\sigma_{red,o}}$$

značně zjednoduší a stane se závislým pouze na geometrických rozměrech průřezu, materiálových konstantách, případně délce prutu.

Žádná z teorií, popisující stav při stísněném krutu není dostatečně přesná v celém rozsahu jeho délek. V literatuře se při odkazu na jednotlivé teorie uvažuje většinou pouze délka prutu. Ve skutečnousti však záleží na vzájemném vztahu délky a charakteristických veličin průřezu, tedy na rozměrech a tvaru průřezu. V práci jsou určeny t.zv. charakteristické délky prutu ℓ_s, ℓ_k, které jsou dány právě geometrií průřezu prutu a které rozdělují oblast výpočtu na oblast podle teorie smyku ($\ell \leq \ell_s$), podle teorie deplanace ($\ell \geq \ell_k$) a podle teorie smíšené ($\ell_s < \ell < \ell_k$). Přitom skutečná délka prutu se s délkou ℓ váže podle způsobu uložení prutu (obr. 1).

Podle jednotlivých teorií jsou pro exponované místo určeny vztahy pro součinitele napjatosti K_A. Vztah je universální pro pruty uložené v libovolné kombinaci

vetknutí, opření a volného konce. Omezení je dáno zatížením; zde byly uvažovány osamělé momenty. Vzorový nástin výpočtu je uveden v kap. 4.7.

Pro smíšenou teorii je navržen nový tvar funkce bimomentu B(x), který popisuje lépe průběh napjatosti v oblasti délek $\ell_s < \ell < \ell_k$, než řešení uvedené v literatuře (např. [3]), zvláště pro délky, pro než platí $\ell \rightarrow \ell_k$.

Pro jednotlivé teorie výpočtu a pro výpočet podle [7] bylo provedeno srovnání napjatosti v exponovaném okraji příruby po celé délce prutu. Toto bylo konfrontováno s průběhem napjatosti zjištěným na výpočtových modelech pomocí metody konečných prvků. Touto metodou byla dále zkoumána napjatost v okolí zpevněného vetknutí prutu a v okolí nedokonalého vetknutí, které umožňuje jistou deformaci místa uložení. V obou případech lze říci, že špičky napětí se u zpevněného i netuhého vetknutí poněkud posunou z místa vetknutí, ale jejich velikost se změní poměrně málo.

Ačkoli zde byla zjednodušena ta část výpočtu, která se týká řešení diferenciální rovnice, zůstává pracnost řešení průřezových veličin. V kap. 5 jsou uvedeny zásady k alespoň částečnému zjednodušení výpočtu některých průřezových veličin běžných průřezů. Pro průřezy U, I, Z jsou některé průřezové veličiny zpracovány graficky.

V závěru práce je provedena aplikace návrhu výpočtu na některé prvky rámu podvozku automobilu LIAZ 124.040.

Práce je doplněna grafickým zpracováním velikosti součinitelů napjatosti K_A a charakteristických délek v závislosti na rozměrech průřezu u běžných profilů I, Z, U.

Použitá literatura

[1] VLASOV, V.Z.: Tenkostěnné pružné pruty. Praha, SNTL 1962.

[2] JANATKA, J.: Přímé tenkostěnné nosníky. Praha, SNTL 1961.

[3] KLIMOV, V.I.: Rasčet otkrytych oboloček tipa aviakonstrukcij. Moskva, Gosudar. izd. oborovoj promyšlennosti 1957.

[4] ČALKOVSKÝ, A.: Tenkostěnné konstrukce IV. Praha, Dům techniky ČSVTS, 1983.

[5] ČALKOVSKÝ, A.: Kroucení tenkostěnných konstrukcí. Kandidátská disertační práce. Brno, VAAZ 1965.

[6] Navrhování ocelových konstrukcí. ČSN 73 1401. Praha, Vydavatelství Úřadu pro normalizaci a měření, 1984.

[7] CHALUPA, A. a kol.: Navrhování ocelových konstrukcí. Komentář k ČSN 73 1401. Praha, Vydavatelství Úřadu pro normalizaci a měření, 1982.

[8] MELCHER, J.: Modifikovaná analogie kroucení tenkostěnných prutů s ohybem. Inženýrské stavby, 1967, č.6, s. 269-273.

[9] MELCHER, J.: Přibližný výpočet kroucených tenkostěnných prutů. Inženýrské stavby, 1968, č.6,

s. 263-267.

[10] HÖSCHL, C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství. Praha, SNTL 1971.

[11] ODEN, J.T.: Mechanics of Elastic Structures. New York, Mc Graw-Hill Book Company, 1967.

[12] TIMOŠENKO, S.P.: Ob ustojčivosti ploskoj formy izgiba dvutavrovoj balki. Izvěstija S. Pb. Politechn. instituta 1905.

[13] WEBER, C.: Übertragung des Drehmoments in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt. Zeitv. für Angew. Math. und Mech. 1926.

[14] WAGNER, H. - PRETSCHNER, W.: Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. Luftfahrtforschung 1934, Bd.11, Nr 6.

[15] UMANSKIJ, A.A.: Kručenije i izgib tonkostěnnych aviakonstrukcij. Moskva, Oborongiz 1939.

[16] MEVALD, J. - JAGROVÁ, J.: Analýza vlivu parametrů uložení skříně na podvozku LIAZ 124.040. (Výzkumná zpráva). Liberec, 1989.

[17] ČALKOVSKÝ, A.: K výpočtu rozložení napětí v tenkostěnné konstrukci. Brno, Sborník VAAZ, ř. B, 1977.

[18] TIHOSHENKO, S. - GOODIER, J.N.: Theory of Elasticity. New York, Mc Graw-Hill B. Company, 1951.

[19] MRAZIK, A. - GRUSKA, J.: Výpočet tenkostenných prútov. Bratislava, Vydavatelstvo slovenskej akademie vied, 1965.

[20] COLLATZ, L.: Problémy charakteristických hodnot s technickými aplikacemi. Praha, SNTL 1965.

[21] KUZMIN, N.A. - LUKAŠ, P.A. - MILEJEVSKIJ, I.E.: Rasčet konstrukcij iz tonkostěnnych stěržnej i oboloček. Moskva, Gos. izd. liter. po strojitělstve, architekture i stroj. matěrialam, 1960.

[22] HYČA, M.: Výpočet polohy středu smyku otevřených průřezů tenkostěnných nosníků při uvažování vlivu smykových deformací střednicové plochy. Liberec, Čs. společnost pro mechaniku, pub. Liberec, 1987.

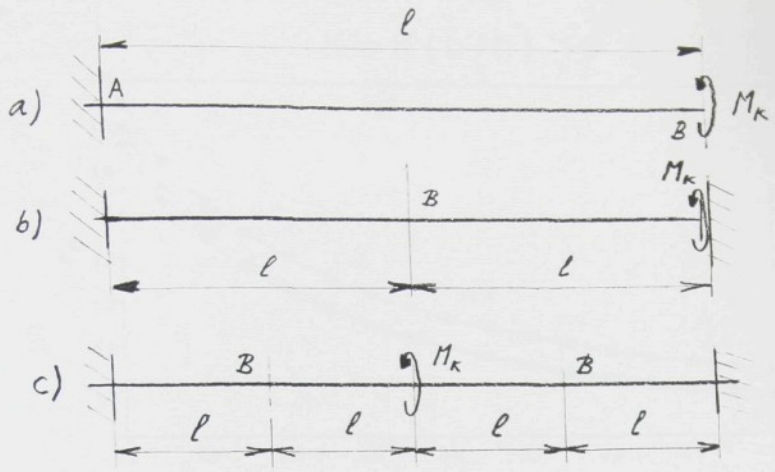
[23] HYČA, M.: Některé problémy optimalizace tenkostěnných nosníků a jejich řešení. Plzeň, Strojnická společnost ČSVTS, k.p. Škoda, 1987.

[24] GOLDŠTEJN, J.B. - SOLOMEŠČ, M.A.: Variacionnyje zadači statiky optimalnych stěržněvych sistem. Leningrad, Izd. leningrad. universiteta, 1980.

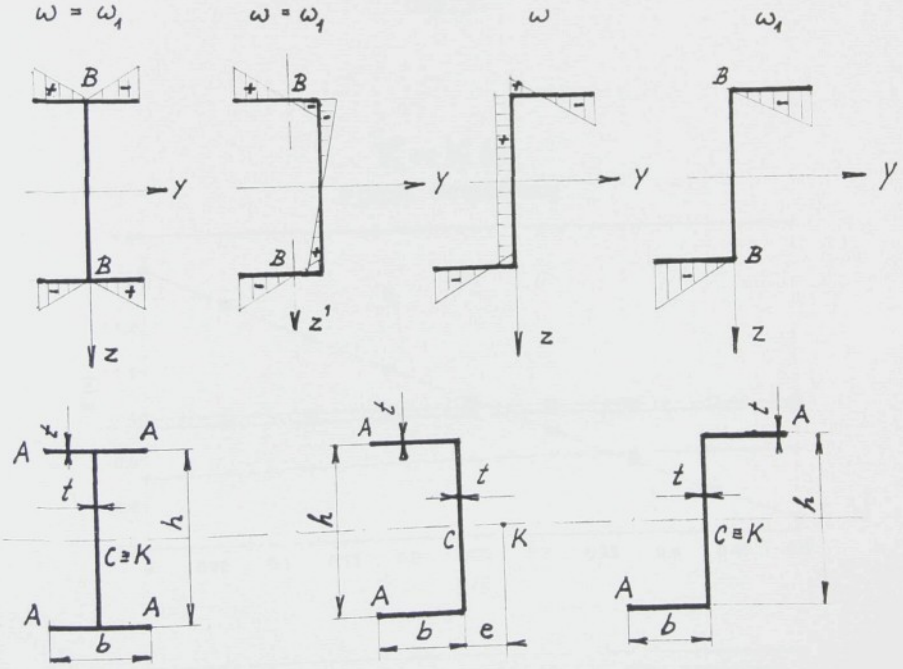
[25] MILEJEVSKIJ, I.E. - TRUŠIN, S.I.: Rasčet tonkostěnnych konstrukcij. Moskva, Strojizdat 1989.

[26] JÁGROVÁ, J.: Vliv délky tyče na tuhost a napětí při stísněném krutu. Liberec, Sborník prací VŠST, 1989.

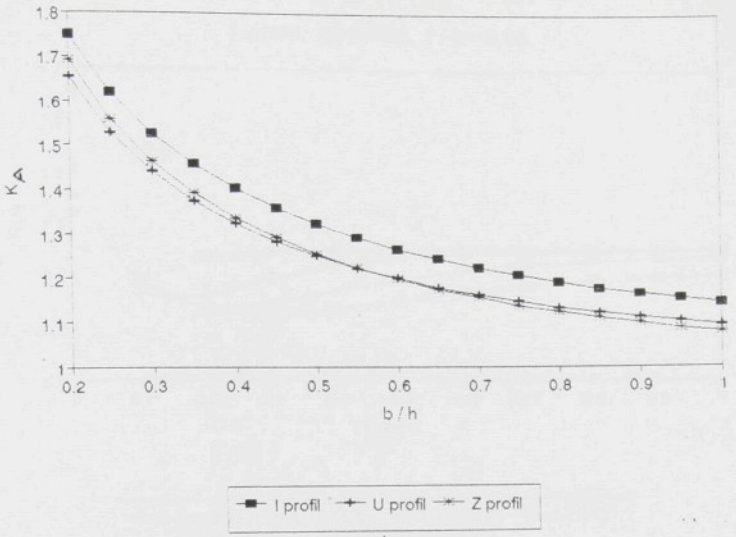
[27] JÁGROVÁ, J.: Návrh výpočtu napjatosti při stísněném krutu pomocí součinitele koncentrace napětí. Liberec, Sixth International Conference on the Theory of Machines and Mechanisms, 1992.


a)
b)
c)
A
B
M_K
ℓ

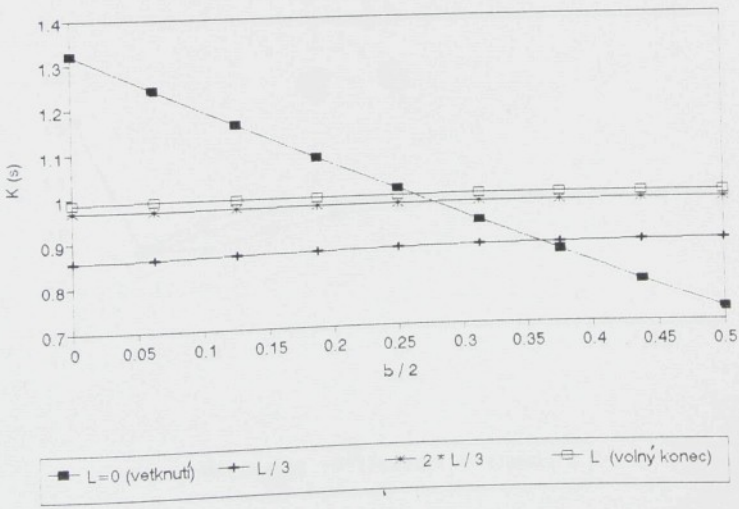
Obr. 1


$\omega = \omega_1$
$\omega = \omega_1$
ω
ω_1
B
y
z
z'
A
t
h
C≡K
K
b
e

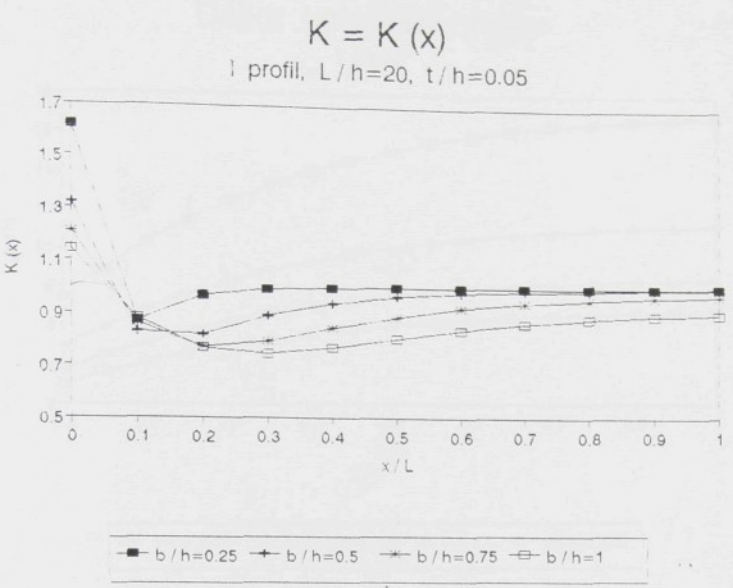
Obr. 2


K = K (b / h)
K A
b / h
I profil
U profil
Z profil

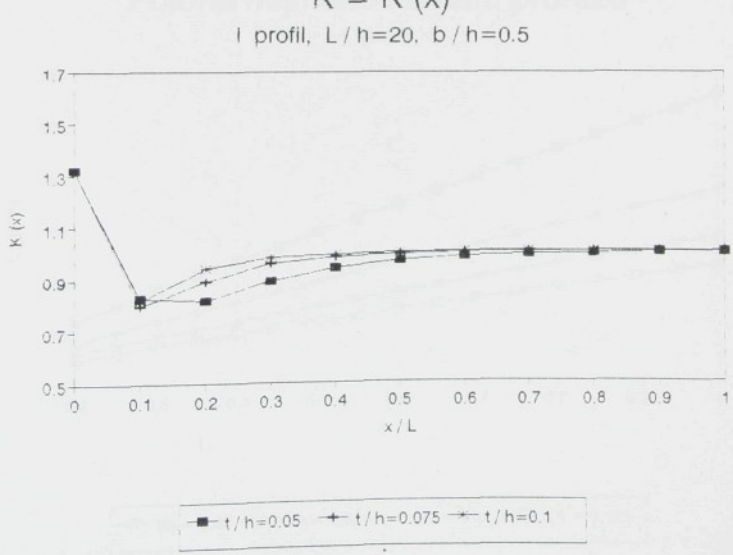
Obr.3


K = K (s)
I profil, okraj příruby
K (s)
b / 2
L=0 (vetknutí)
L / 3
2 * L / 3
L (volný konec)

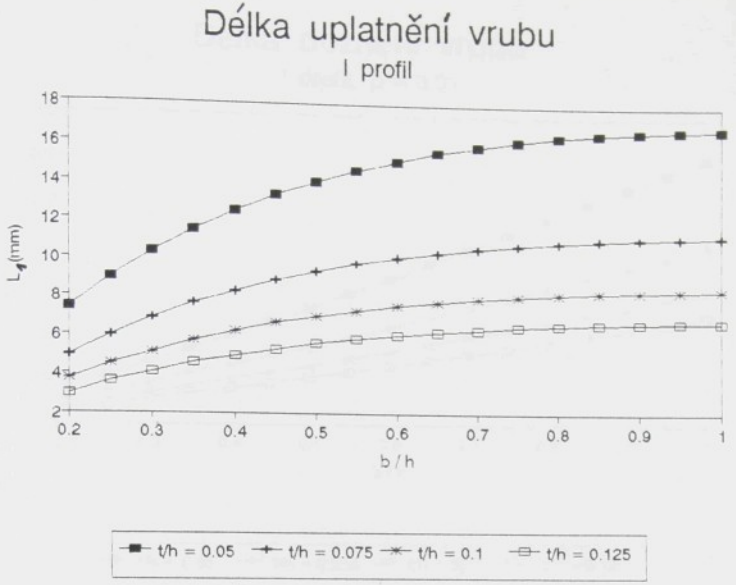
Obr.4


K = K (x)
I profil, L / h=20, t / h=0.05
K (x)
x / L
b / h=0.25
b / h=0.5
b / h=0.75
b / h=1

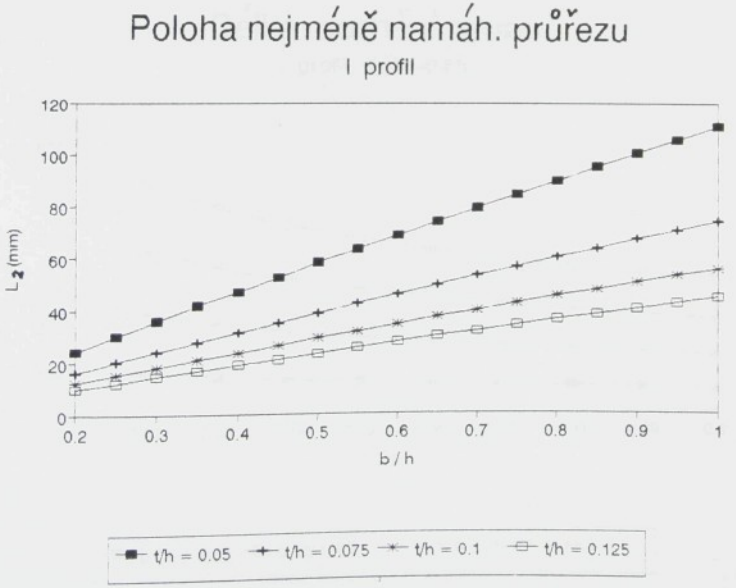
Obr.5


K = K (x)
I profil, L / h=20, b / h=0.5
K (x)
x / L
t / h=0.05
t / h=0.075
t / h=0.1

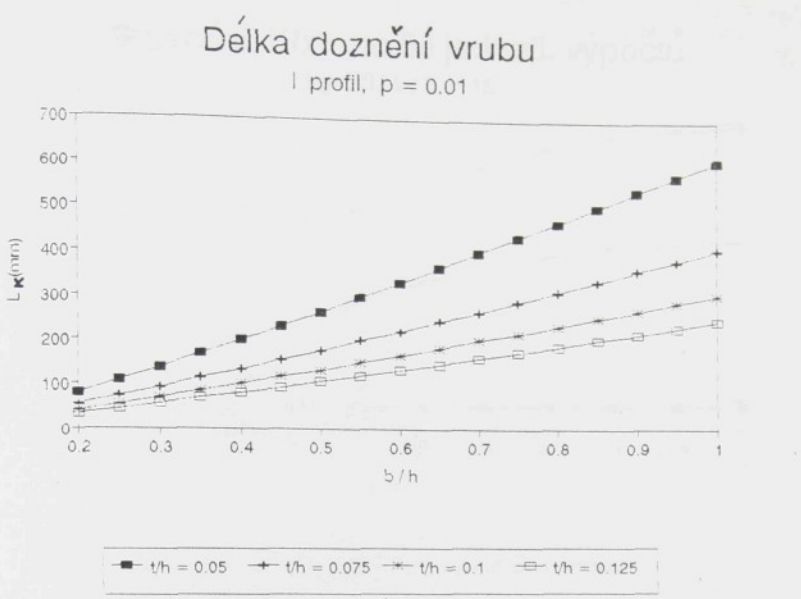
Obr.6


Délka uplatnění vrubu
I profil
L4 (mm)
b / h
t/h = 0.05
t/h = 0.075
t/h = 0.1
t/h = 0.125

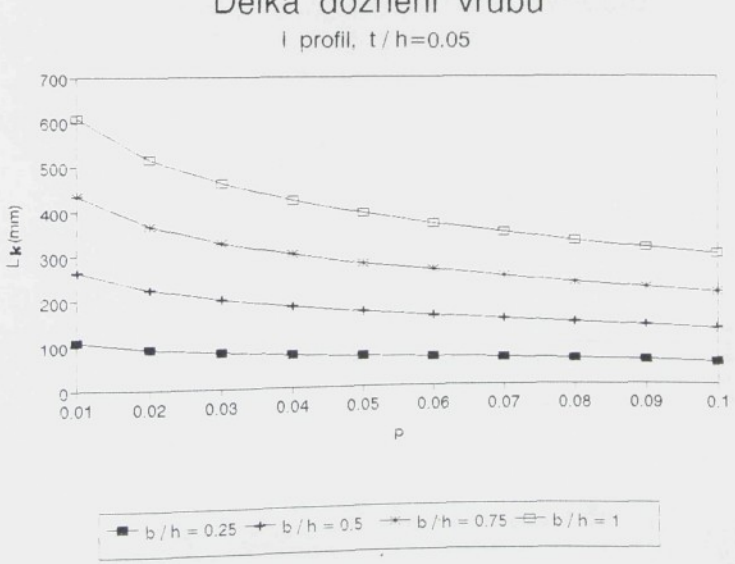
Obr. 7


Poloha nejméně namáh. průřezu
I profil
L2 (mm)
b / h
t/h = 0.05
t/h = 0.075
t/h = 0.1
t/h = 0.125

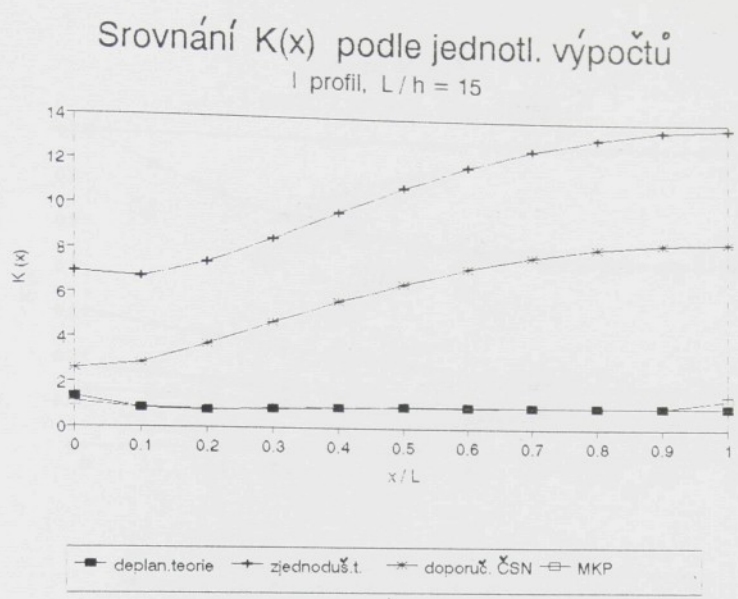
Obr. 8


Délka doznění vrubu
I profil, p = 0.01
Lk(mm)
b / h
t/h = 0.05
t/h = 0.075
t/h = 0.1
t/h = 0.125

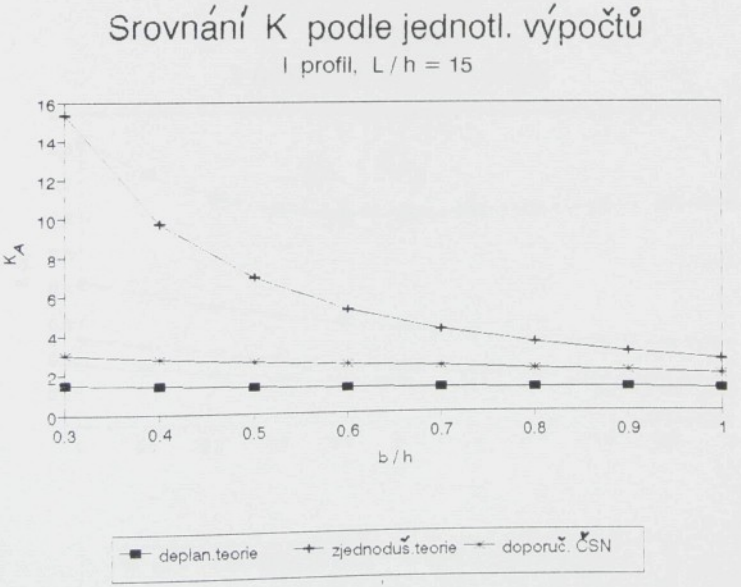
Obr.9


Délka doznění vrubu
I profil, t / h=0.05
Lk(mm)
p
b / h = 0.25
b / h = 0.5
b / h = 0.75
b / h = 1

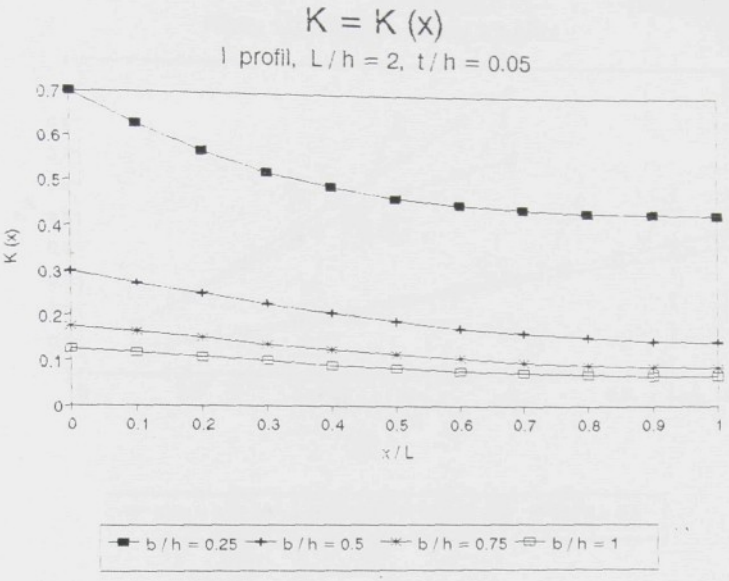
Obr.10


Srovnání K(x) podle jednotl. výpočtů
I profil, L / h = 15
K (x)
x / L
deplan.teorie
zjednoduš.t.
doporuč. ČSN
MKP

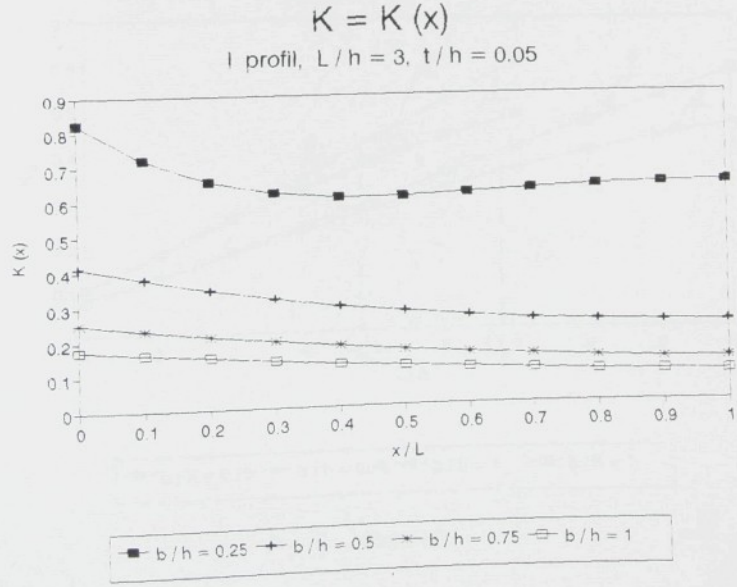
Obr.11


Srovnání K podle jednotl. výpočtů
I profil, L / h = 15
K_A
b / h
deplan.teorie
zjednoduš.teorie
doporuč. ČSN

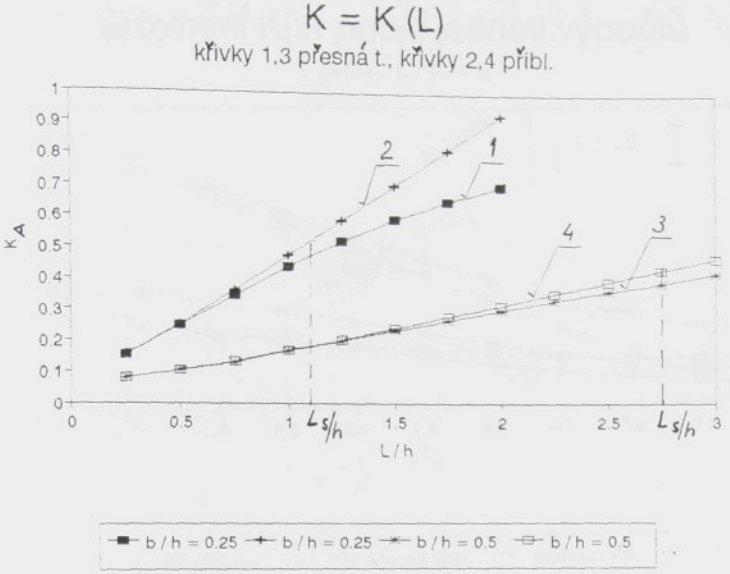
Obr.12

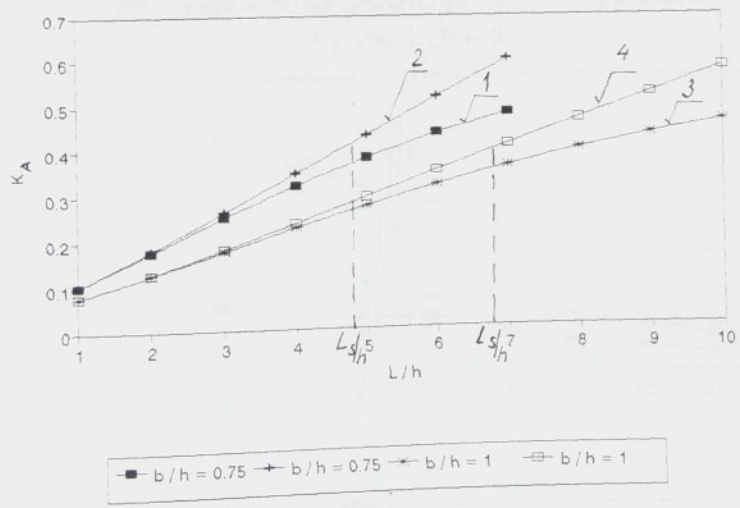

K = K (x)
I profil, L / h = 2, t / h = 0.05
K (x)
x / L
b / h = 0.25
b / h = 0.5
b / h = 0.75
b / h = 1

Obr.13

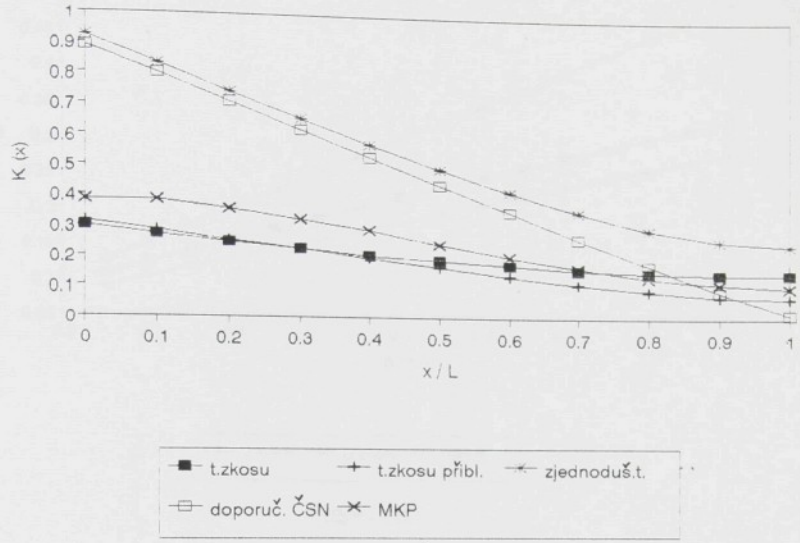

K = K (x)
I profil, L / h = 3, t / h = 0.05
K (x)
x / L
b / h = 0.25
b / h = 0.5
b / h = 0.75
b / h = 1

Obr.14

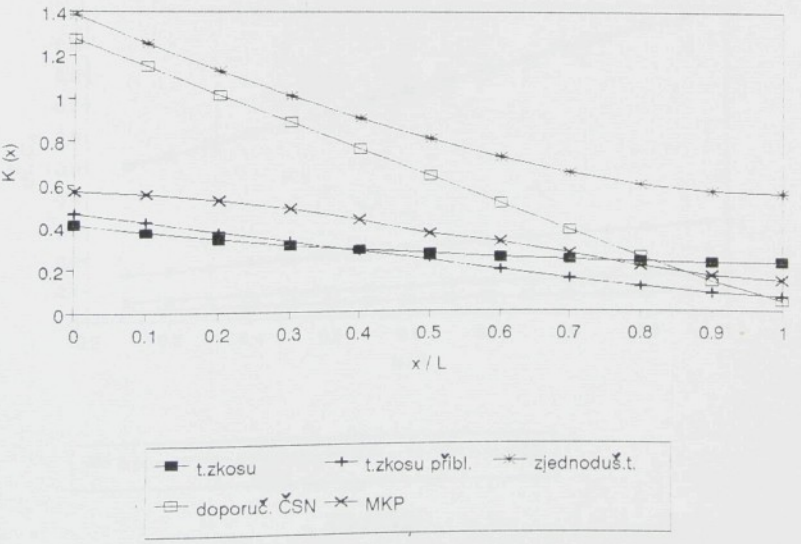

K = K (L)
křivky 1,3 přesná t., křivky 2,4 přibl.
K_A
L / h
L s/h
L s/h
1
2
3
4
b / h = 0.25
b / h = 0.25
b / h = 0.5
b / h = 0.5


K = K (L)
křivky 1,3 přesná t., křivky 2,4 přibl.
K_A
L / h
L s/h
L s/h
1
2
3
4
b / h = 0.75
b / h = 0.75
b / h = 1
b / h = 1

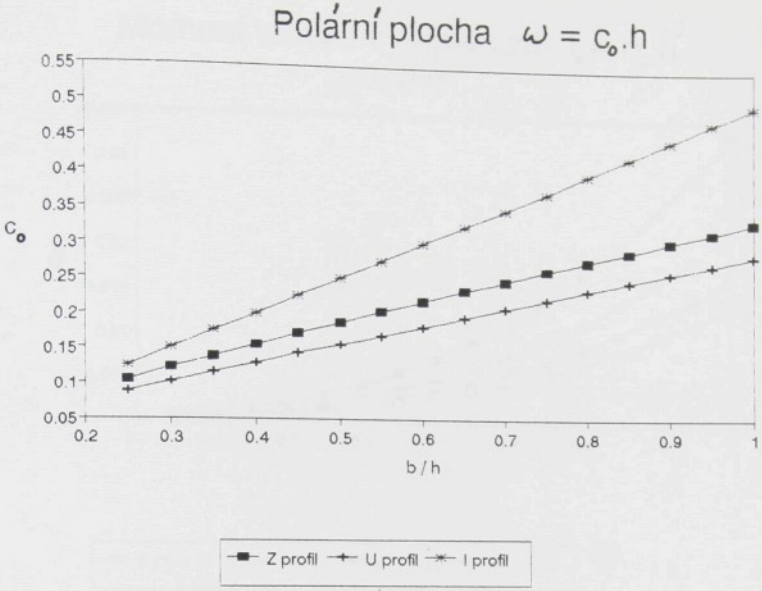
Obr. 15


Srovnání K(x) podle jednotl.výpočtů
I profil, L / h = 2
K (x)
x / L
t.zkosu
t.zkosu přibl.
zjednoduš.t.
doporuč. ČSN
MKP

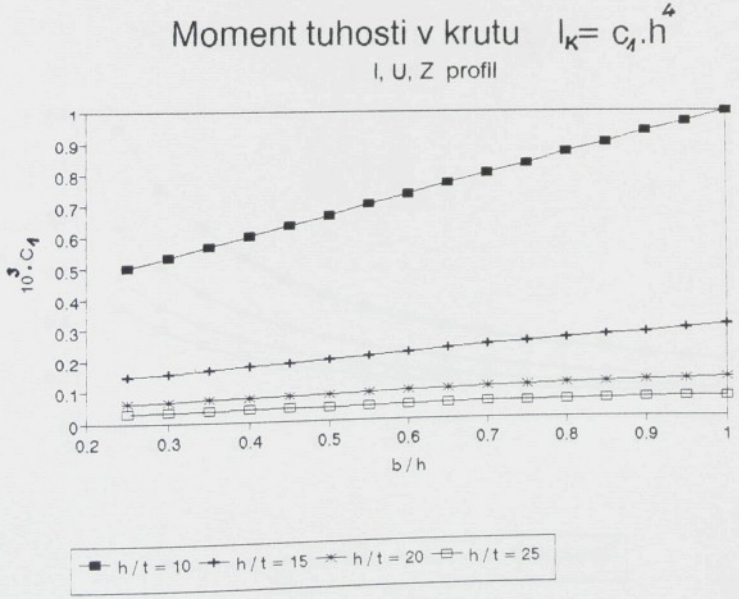
Obr.16


Srovnání K(x) podle jednotl. výpočtů
I profil, L / h = 3
K (x)
x / L
t.zkosu
t.zkosu přibl.
zjednoduš.t.
doporuč. ČSN
MKP

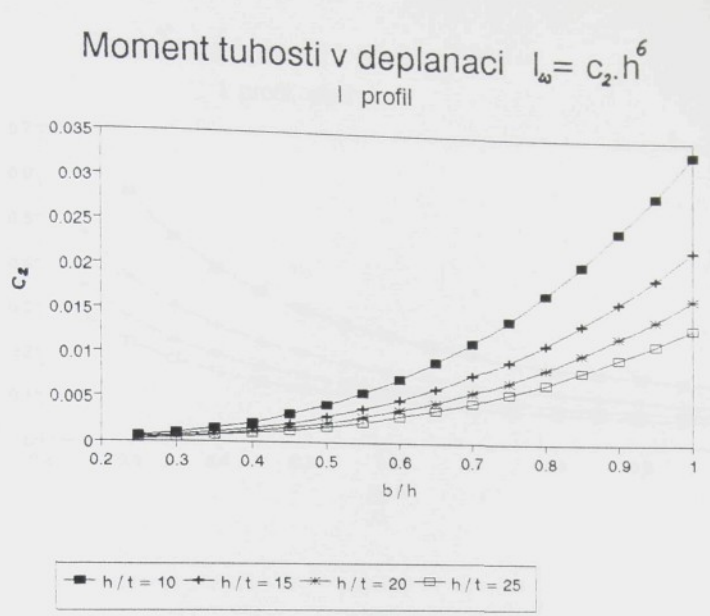
Obr.17


Polární plocha ω = c₀.h
c₀
0.55
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
b / h
Z profil
U profil
I profil

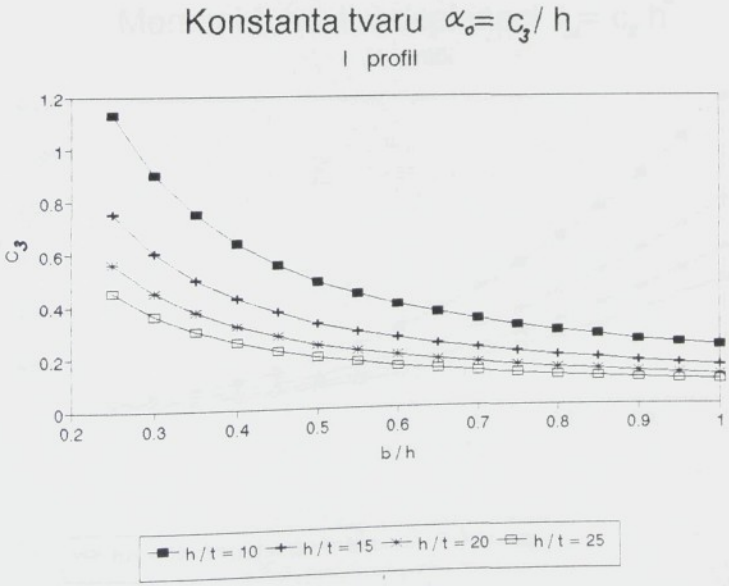
Obr. 18


Moment tuhosti v krutu I_K = c₁.h⁴
I, U, Z profil
10³.c₁
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
b / h
h / t = 10
h / t = 15
h / t = 20
h / t = 25

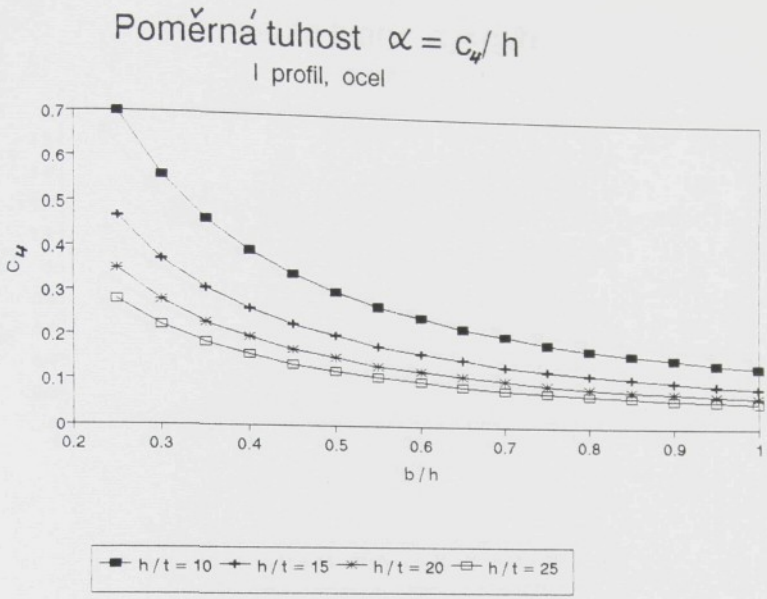
Obr. 19


Moment tuhosti v deplanaci $I_\omega = c_2 . h^6$
I profil
0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
c_2
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
b / h
h / t = 10
h / t = 15
h / t = 20
h / t = 25

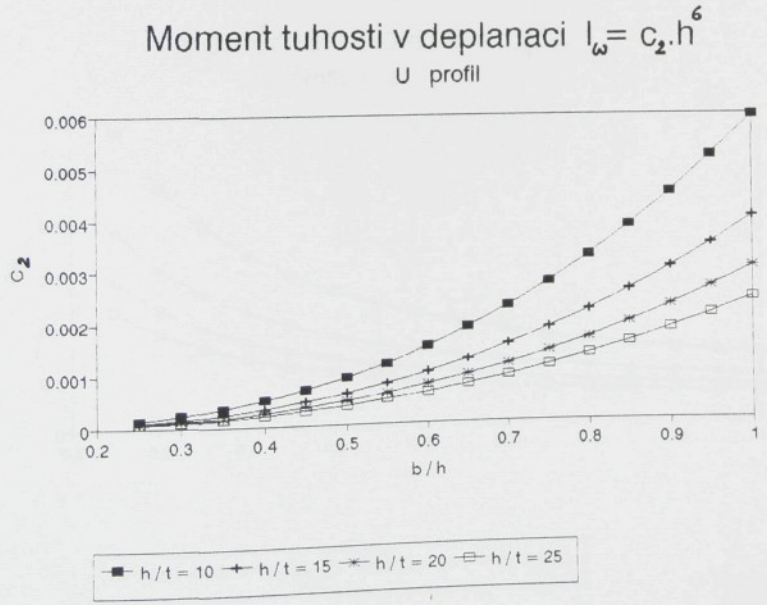
Obr.20


Konstanta tvaru $\alpha_o = c_3 / h$
I profil
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
c_3
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
b / h
h / t = 10
h / t = 15
h / t = 20
h / t = 25

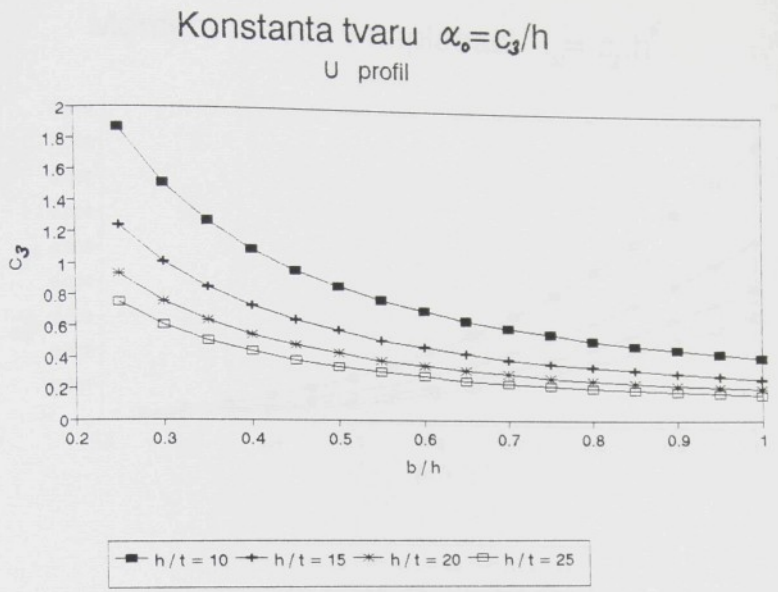
Obr.21


Poměrná tuhost $\alpha = c_4 / h$
I profil, ocel
c_4
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
b / h
h / t = 10
h / t = 15
h / t = 20
h / t = 25

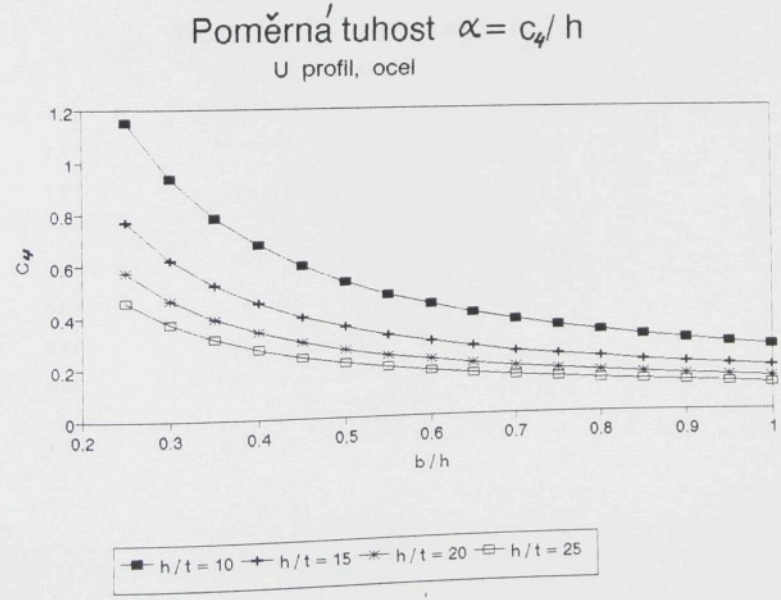
Obr.22


Moment tuhosti v deplanaci $I_\omega = c_2 . h^6$
U profil
c_2
0.006
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
b / h
h / t = 10
h / t = 15
h / t = 20
h / t = 25

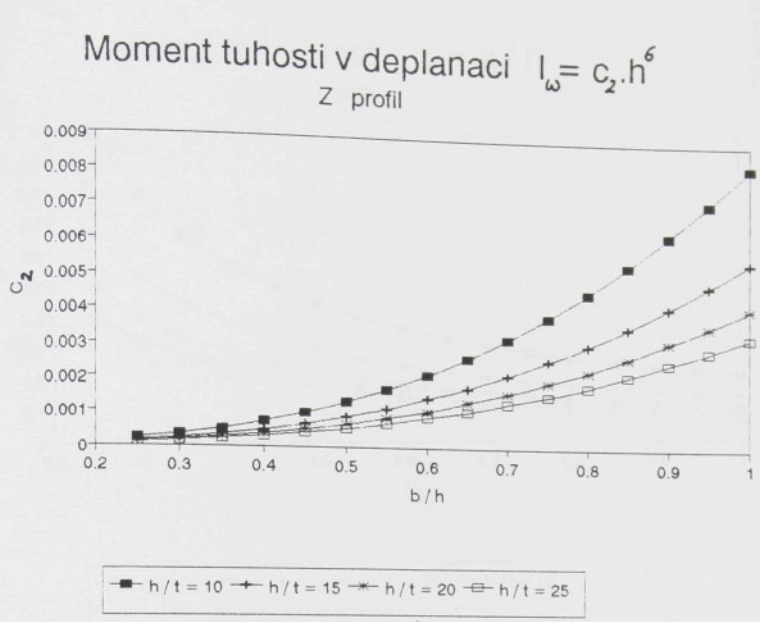
Obr.23


Konstanta tvaru $\alpha_o = c_3/h$
U profil
c_3
b / h
h / t = 10
h / t = 15
h / t = 20
h / t = 25

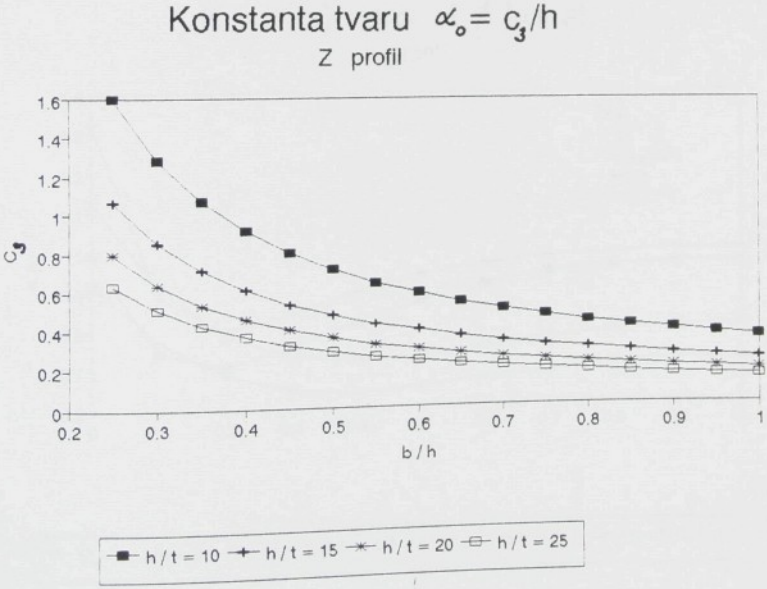
Obr.24


Poměrná tuhost $\alpha = c_4 / h$
U profil, ocel
c_4
b / h
h / t = 10
h / t = 15
h / t = 20
h / t = 25

Obr.25


Moment tuhosti v deplanaci $I_\omega = c_2 . h^6$
Z profil
c_2
0.009
0.008
0.007
0.006
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
b / h
h / t = 10
h / t = 15
h / t = 20
h / t = 25

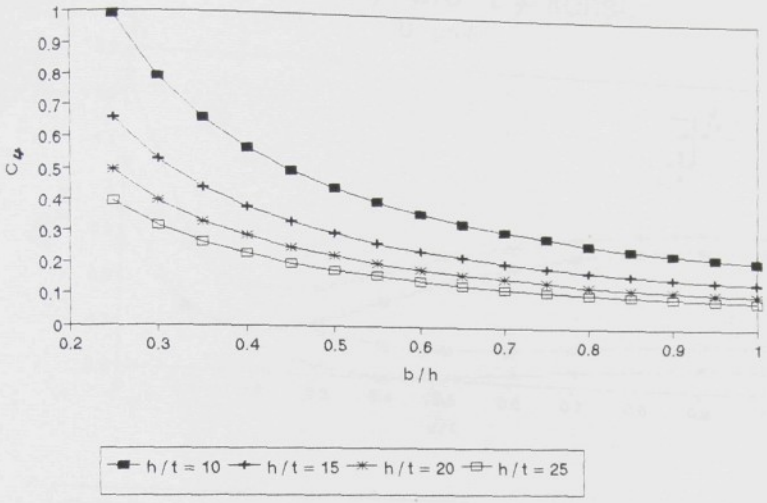
Obr.26


Konstanta tvaru $\alpha_o = c_3 / h$
Z profil
c_3
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
b / h
h / t = 10
h / t = 15
h / t = 20
h / t = 25

Obr.27

Poměrná tuhost $\alpha = c_\varphi / h$

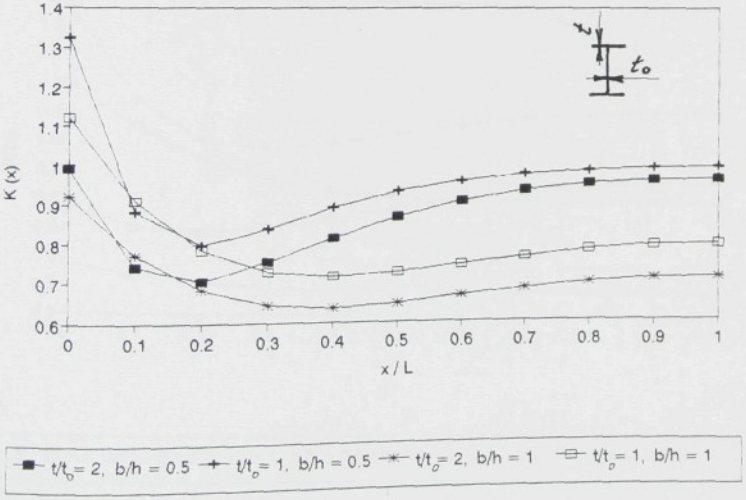
Z profil, ocel



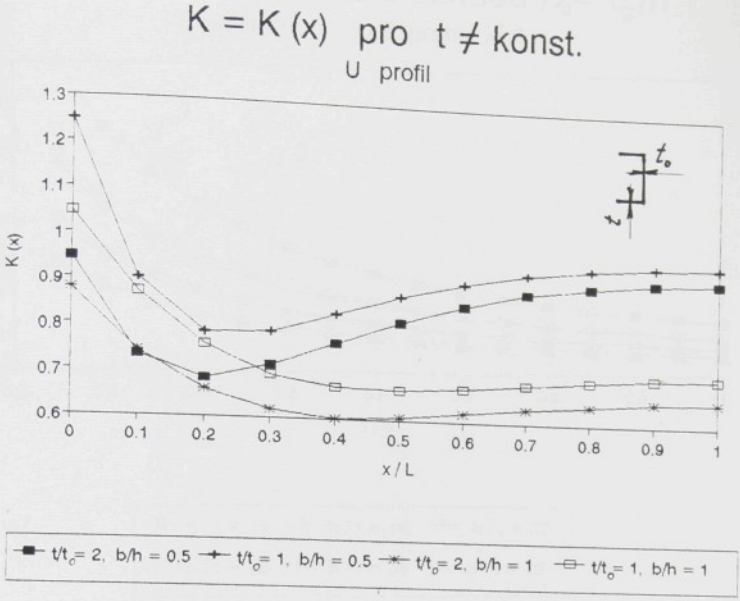
Obr.28

$K = K(x)$ pro $t \neq$ konst.

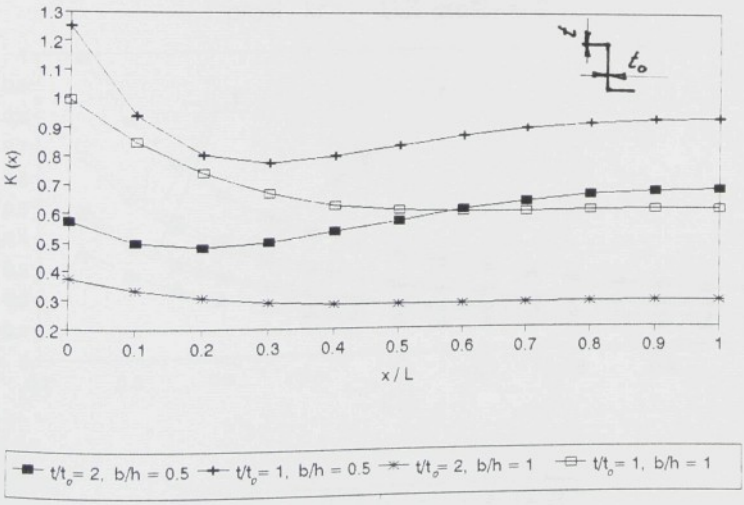
I profil



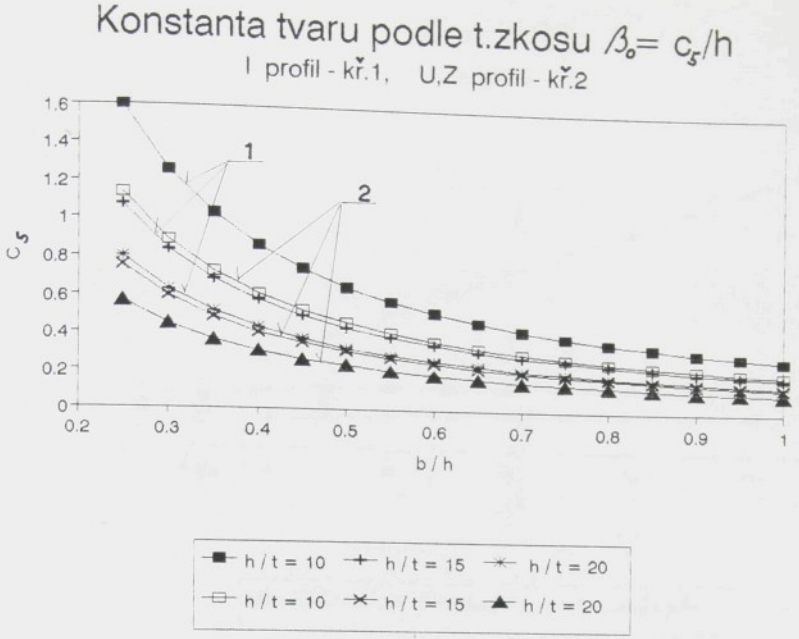
Obr.29


K = K (x) pro t ≠ konst.
U profil
K (x)
x / L
t/t$_o$= 2, b/h = 0.5
t/t$_o$= 1, b/h = 0.5
t/t$_o$= 2, b/h = 1
t/t$_o$= 1, b/h = 1

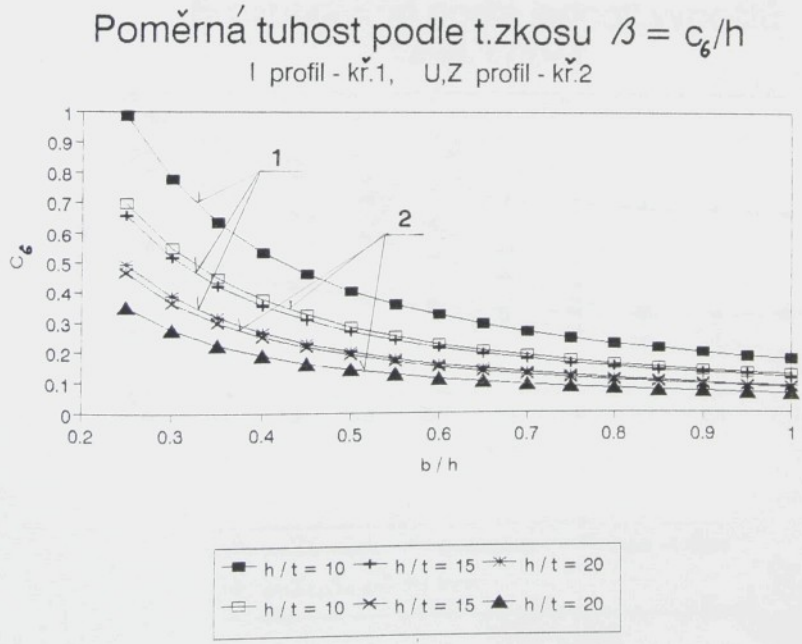
Obr.30


K = K (x) pro t ≠ konst.
Z profil
K (x)
x / L
t/t$_o$= 2, b/h = 0.5
t/t$_o$= 1, b/h = 0.5
t/t$_o$= 2, b/h = 1
t/t$_o$= 1, b/h = 1

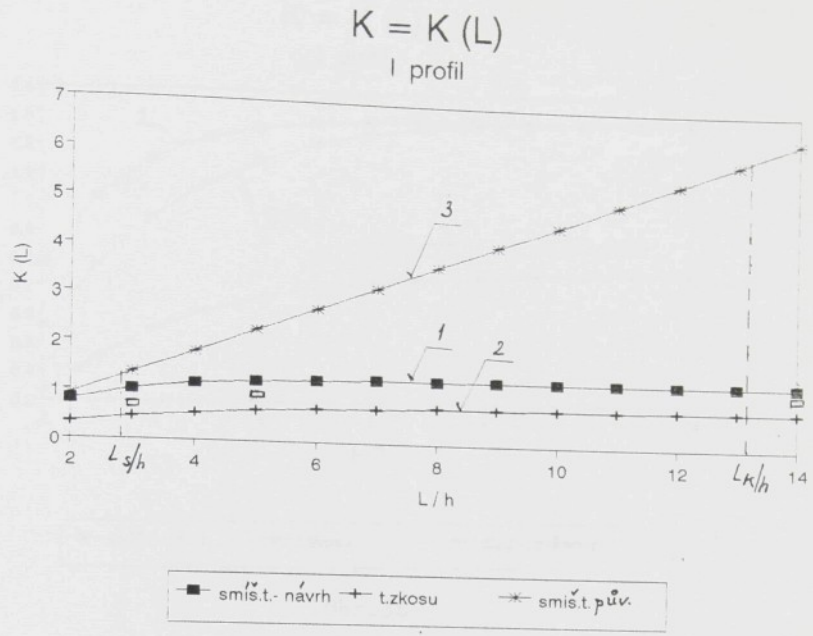
Obr.31


Konstanta tvaru podle t.zkosu $\beta_o = c_5/h$
I profil - kř.1, U,Z profil - kř.2
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
c_5
1
2
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
b / h
h / t = 10
h / t = 15
h / t = 20
h / t = 10
h / t = 15
h / t = 20

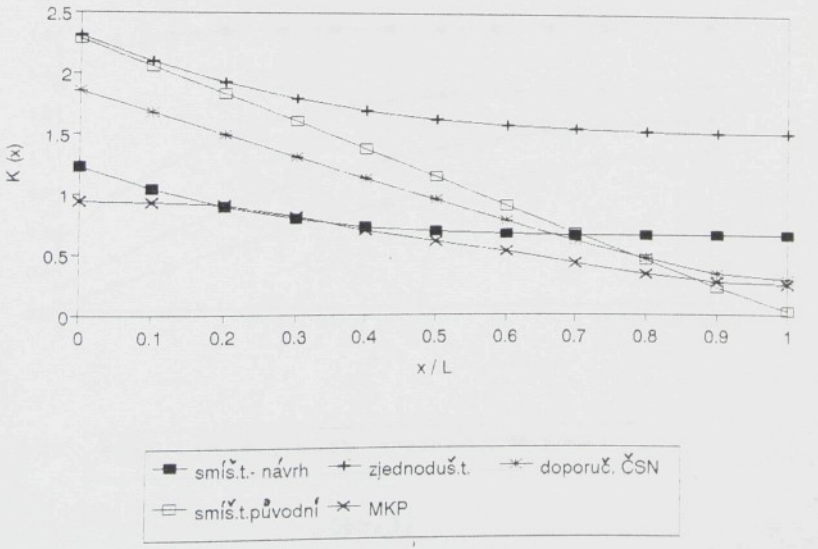
Obr. 32


Poměrná tuhost podle t.zkosu $\beta = c_6/h$
I profil - kř.1, U,Z profil - kř.2
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
c_6
1
2
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
b / h
h / t = 10
h / t = 15
h / t = 20
h / t = 10
h / t = 15
h / t = 20

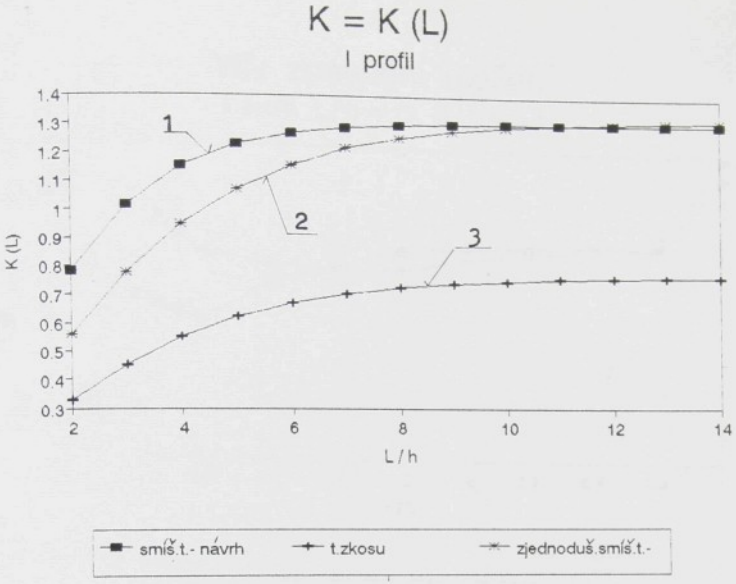
Obr. 33


K = K (L)
I profil
K (L)
L / h
1
2
3
smíš.t.- návrh
t.zkosu
smíš.t.pův.

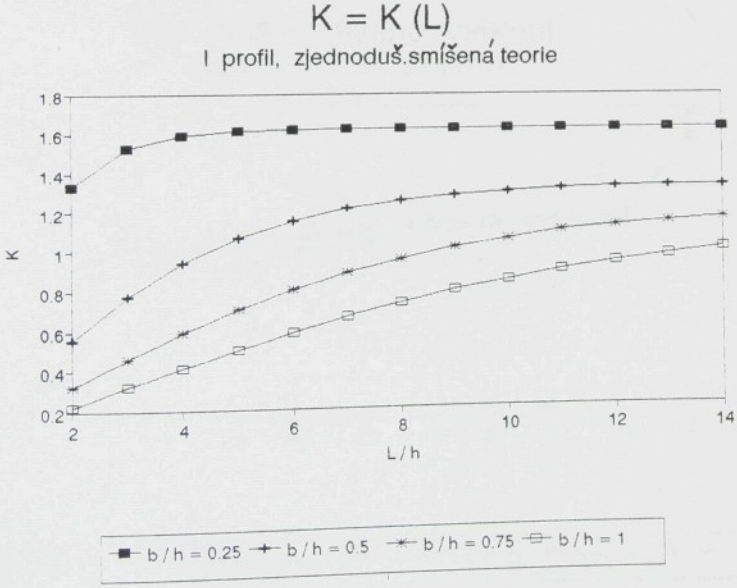
Obr.34


Srovnání K(x) podle jednotl.výpočtů
I profil, L / h = 5
K (x)
x / L
smíš.t.- návrh
zjednoduš.t.
doporuč. ČSN
smíš.t.původní
MKP

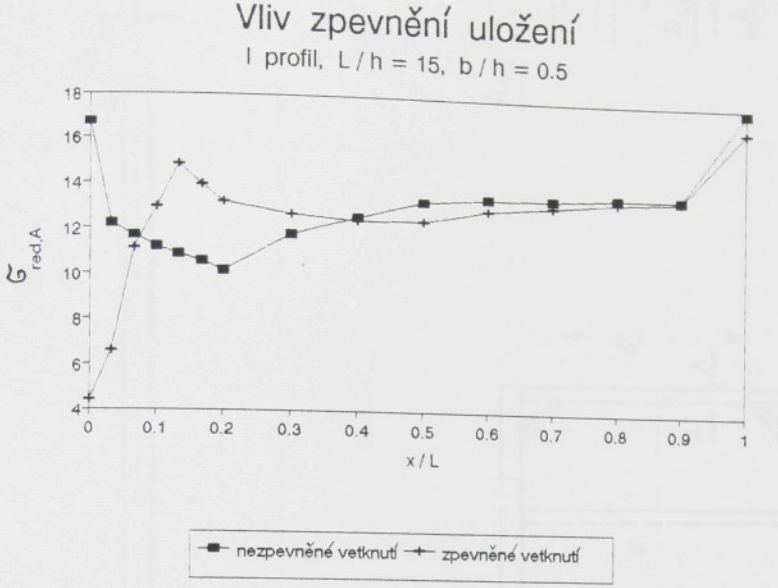
Obr.35


K = K (L)
I profil
K (L)
L / h
1
2
3
smíš.t.- návrh
t.zkosu
zjednoduš.smíš.t.-

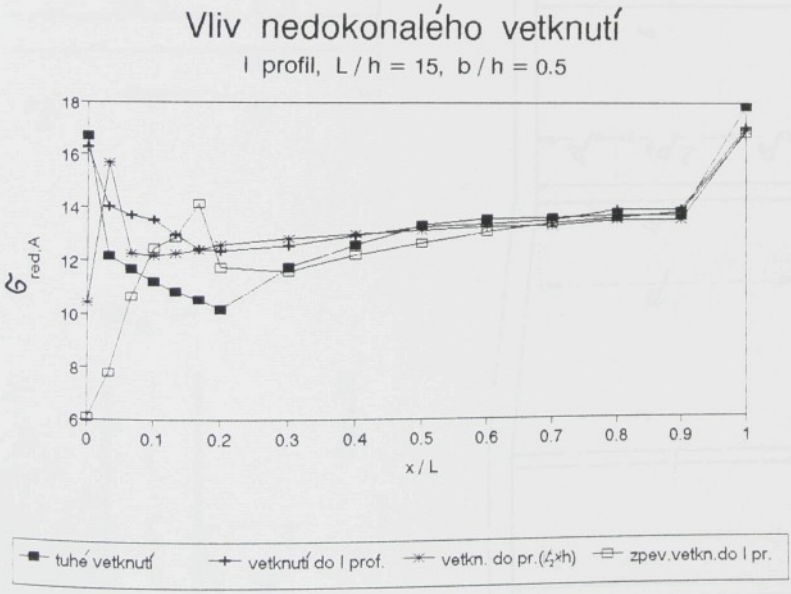
Obr.36


K = K (L)
I profil, zjednoduš.smíšená teorie
K
L / h
b / h = 0.25
b / h = 0.5
b / h = 0.75
b / h = 1

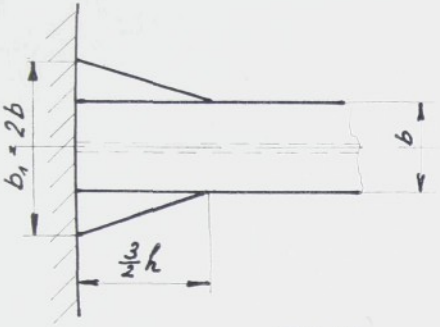
Obr.37


Vliv zpevnění uložení
I profil, L / h = 15, b / h = 0.5
σ red.A
x / L
nezpevněné vetknutí
zpevněné vetknutí

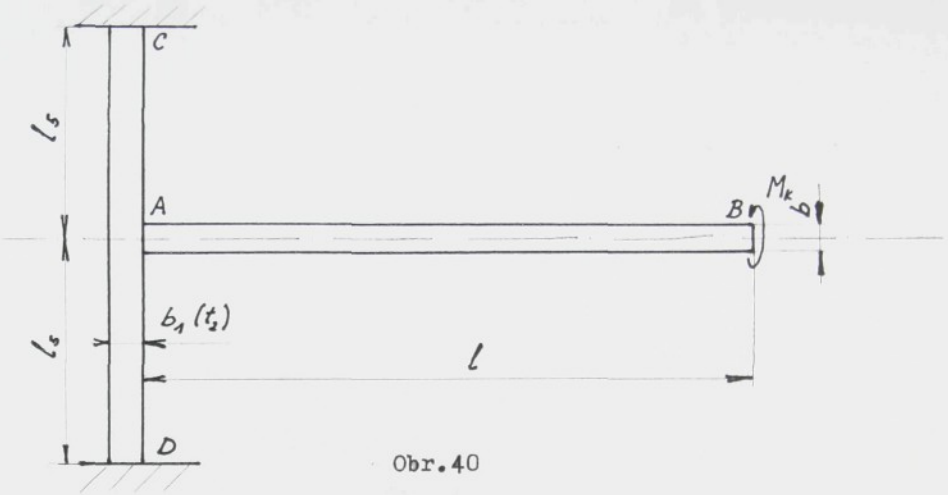
Obr.39


Vliv nedokonalého vetknutí
I profil, L / h = 15, b / h = 0.5
σ red.A
x / L
tuhé vetknutí
vetknutí do I prof.
vetkn. do pr.(½h)
zpev.vetkn.do I pr.

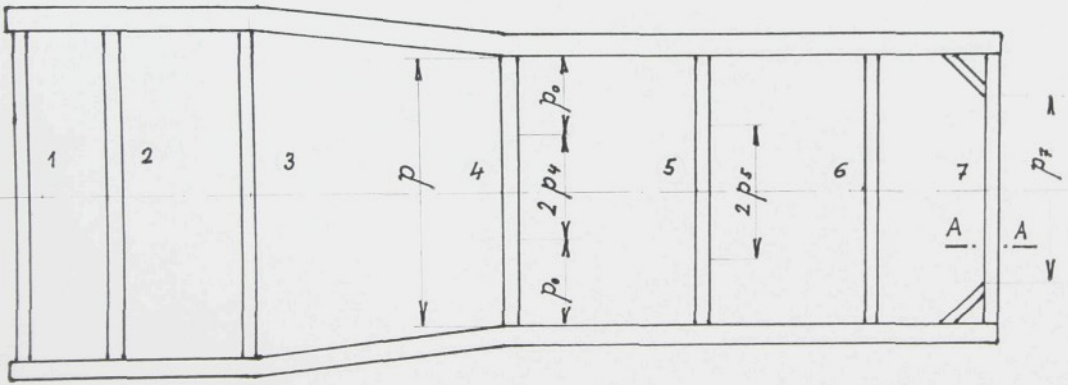
Obr.41



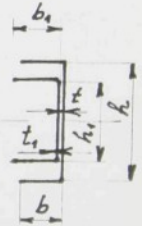
Obr.38



Obr.40



ŘEZ A-A:



Obr.42