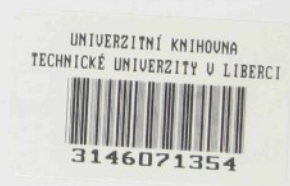


Technická univerzita v Liberci  
Fakulta strojní

Ing. Jiří V e j v o d a, CSc.

# Určení dynamické lomové houževnatosti PMMA metodou dynamické fotoelasticimetrie a metodou kaustik

Habilitační práce



Obor habilitace : Aplikovaná mechanika

Liberec 1997

V 314-S

KMP  
73 p.  
obr., tab  
do UK 14.1.98

# Obsah.

|                                                                                           | str.      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Úvod</b>                                                                            | <b>2</b>  |
| <b>2. Základy optických metod</b>                                                         | <b>4</b>  |
| <b>2.1 Základy fotoelasticimetrie</b>                                                     | <b>4</b>  |
| 2.1.1 Rovnice fázového posunutí paprsku světla procházejícího zatíženým modelem           | 5         |
| 2.1.2 Izochromáty a izoklíny                                                              | 7         |
| <b>2.2 Metoda kaustik</b>                                                                 | <b>12</b> |
| 2.2.1 Princip metody                                                                      | 12        |
| 2.2.2 Rovnice fázového posunutí čela vlny po průchodu zatíženým modelem                   | 13        |
| 2.2.3 Změna indexu lomu v závislosti na hlavních napětích                                 | 16        |
| <b>3. Pole napjatosti v okolí trhliny</b>                                                 | <b>18</b> |
| <b>3.1 Vyhodnocení pole napjatosti fotoelasticimetrickou metodou</b>                      | <b>21</b> |
| 3.1.1 Přeurčená pětiparametrická metoda                                                   | 23        |
| 3.1.2 Vliv přesnosti vstupních dat na hodnotu K-faktoru                                   | 25        |
| 3.1.3 Dílčí závěry                                                                        | 33        |
| <b>3.2 Vyhodnocení K-faktoru metodou kaustik</b>                                          | <b>34</b> |
| 3.2.1 Zobrazovací rovnice                                                                 | 34        |
| 3.2.2 Rovnice kaustiky (mód I)                                                            | 35        |
| <b>4. Provedené experimenty</b>                                                           | <b>37</b> |
| <b>4.1 Vyhodnocení experimentů provedených metodou dynamické fotoelasticimetrie</b>       | <b>37</b> |
| 4.1.1 Experimentální zařízení                                                             | 37        |
| 4.1.2 Tvar zkušebního vzorku                                                              | 42        |
| 4.1.3 Vyhodnocení fotoelasticimetrických záznamů                                          | 45        |
| 4.1.4 Vyhodnocená závislost $K_{Id}$ - v pro Akrylon z obrazů izochromát                  | 50        |
| <b>4.2 Vyhodnocení experimentů provedených metodou kaustik</b>                            | <b>54</b> |
| 4.2.1 Experimentální zařízení                                                             | 54        |
| 4.2.2 Tvar zkušebního vzorku                                                              | 59        |
| 4.2.3 Vyhodnocení záznamů kaustik                                                         | 59        |
| 4.2.4 Vyhodnocená závislost $K_{Id}$ - v pro Akrylon z obrazů kaustik                     | 65        |
| <b>5. Srovnání výsledků získaných prostřednictvím fotoelasticimetrie a metody kaustik</b> | <b>66</b> |
| <b>6. Závěr</b>                                                                           | <b>70</b> |

## Použitá literatura

## 1. Úvod

Mechanika iniciace a šíření trhliny za podmínek při nichž jsou důležité účinky setrvačnosti materiálu a to buď vlivem rychlého šíření trhliny nebo vlivem pulsního zatížení, jsou problémy dynamiky lomu.

Zatímco mikromechanické aspekty skutečného štěpení nebo koalescence poruch, což jsou podstatné části lomového procesu, jsou nepřístupné popisu mechaniky kontinua, teoretické základy dynamické lomové mechaniky jsou odvozeny na základě analýzy vycházející z mechaniky kontinua. Lomové kritérium dává do souvislosti parametr z řešení mechaniky kontinua s materiálovou specifickou vlastností. Korektnost a užitečnost takového lomového kritéria musí být potvrzena tím, že je ukázána jeho správnost při různých geometrických a zatěžovacích podmínkách. T. zn., že zatímco pole napětí může záviset na specifických geometrických a zatěžovacích podmínkách, kritická hodnota lomového parametru, při níž by mělo dojít k iniciaci a růstu trhliny danou rychlostí, musí být nezávislá na zmíněných parametrech.

Nejrozšířenější kritérium v dynamice lomu nominálně křehkého materiálu je založeno na faktoru intenzity napětí. Lomové kritérium lze tedy psát ve tvaru

$$K_I^d(t) = K_{ID} \quad (1.1)$$

V této rovnici je na levé straně faktor intenzity napětí, který je určen prostřednictvím analýzy napjatosti tělesa, ve kterém se šíří trhlina. Na pravé straně je veličina, která reprezentuje materiálovou veličinu označenou jako dynamická lomová houževnatost. Tuto veličinu lze určit pouze prostřednictvím experimentu.

Při šíření trhliny v daném tělese je faktor intenzity napětí  $K_I^d(t)$  určen jako funkce délky trhliny  $l(t)$ , rychlosti trhliny  $v(t)$  a aplikovaného zatížení  $F(t)$ . S uvažováním, že se odpor materiálu k šíření trhliny mění s rychlostí zatížení, měla by dynamická lomová houževnatost  $K_{ID}$  záviset na rychlosti trhliny. Lomové kritérium lze pak psát ve tvaru

$$K_I^d[l(t), v(t), F(t)] = K_{ID}(v) \quad (1.2)$$

Určením této závislosti se pro různé materiály zabývala řada autorů [1] až [9].

Cílem předložené práce je prostřednictvím vztahu (1.2) stanovit závislost  $K_{ID}(v)$  pro Akrylon (PMMA čs. provenience) jednak metodou dynamické fotoelasticimetrie a jednak metodou kaustik. Pořízené fotozáznamy porušení zkušebních vzorků jsou analyzovány tak, aby byly získány informace o rychlosti trhliny a dynamickém faktoru intenzity napětí. Současně je provedena analýza vlivu nepřesnosti vstupních údajů na výsledné hodnoty faktoru intenzity napětí při použití pětiparametrické metody navržené autorem pro stanovení tohoto faktoru ze záznamu dynamických izochromát. V závěru je provedeno porovnání závislostí  $K_{ID}(v)$  získaných metodou dynamické fotoelasticimetrie a metodou kaustik.

Je vhodné poznamenat, že uvedené experimentální práce byly provedeny jednak v laboratoři experimentální mechaniky (LEM) katedry mechaniky, pružnosti a pevnosti VŠST v Liberci v letech 1985-1990 a jednak v laboratoři Profesora Kalthoffa na Ruhr-Universität v Bochumi (NSR) v letech 1990 a 1994.

## 2. Základy optických metod

### 2.1 Základy fotoelasticimetrie

Objev fotoelasticimetrického jevu se připisuje Davidu Brewsterovi, který v roce 1816 uveřejnil zprávu o tom, že v zatíženém skle pozorovaném v polarizovaném světle vznikly barevné obrazce. Základní teorii rozvinulo více vědců, jako např. Neumann, Maxwell a Wertheim, kteří formulovali kolem roku 1853 teorii, že fázové posunutí paprsku světla je přímo úměrné rozdílu hlavních napětí. Index lomu se mění dle jejich zákona dle následujících rovnic [10] :

$$\begin{aligned}n_1 &= n_0 + A \cdot \sigma_1 + B \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \\n_2 &= n_0 + A \cdot \sigma_2 + B \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) \\n_3 &= n_0 + A \cdot \sigma_3 + B \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)\end{aligned}\quad ( 2.1 )$$

kde  $A, B$  jsou materiálové konstanty (fotoelasticimetrické koeficienty)

$n_0$  index lomu materiálu nezatíženého vzorku.

Ke kladnému dvojlomu dochází při  $c_1 > c_2 > c_3$  ,  $n_1 < n_2 < n_3$  , k zápornému dvojlomu dochází při  $c_1 > c_2 > c_3$  ,  $n_1 < n_2 < n_3$  . Veličiny  $c_1, c_2, c_3$  jsou rychlosti šíření světla ve směru příslušných hlavních napětí.

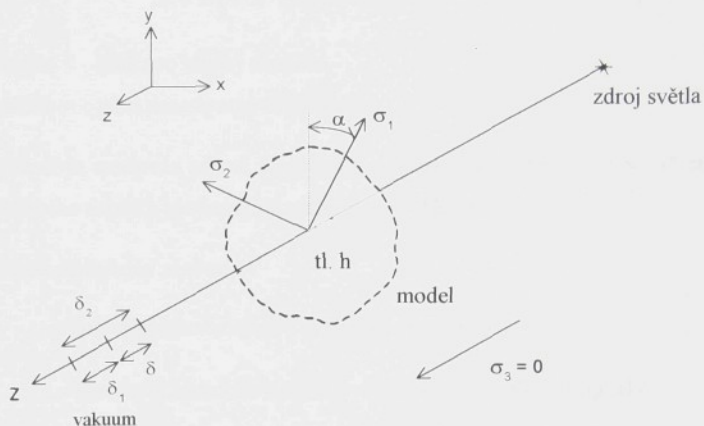
V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty konstant  $A, B$  pro nejčastěji používané modelové materiály.

|              | $A \cdot 10^{-12} \text{ [m}^2/\text{N]}$ | $B \cdot 10^{-12} \text{ [m}^2/\text{N]}$ |
|--------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Araldit B    | -5,6                                      | -62                                       |
| CR - 39      | -16                                       | -52                                       |
| Homalite 100 | -44,4                                     | -67,2                                     |
| Sklo         | 0,32                                      | -2,5                                      |
| PMMA         | -53                                       | -57                                       |

Tab. 2.1

Hodnoty v tabulce jsou uvedeny v jednotkách Brewster, přičemž  $1\text{Brewster} = 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$  .

### 2.1.1 Rovnice fázového posunutí paprsku světla procházejícího zatíženým modelem



Obr. 2.1 - Fázové posunutí paprsku světla

Fázová posunutí  $\delta_1$  a  $\delta_2$  světelného paprsku jsou popsány následujícími vztahy :

$$\begin{aligned}\delta_1 &= h \cdot (n_1 - 1) \\ \delta_2 &= h \cdot (n_2 - 1) ,\end{aligned}\quad (2.2)$$

a jejich rozdíl, čili absolutní fázové zpoždění  $\delta$  je určeno :

$$\begin{aligned}\delta &= \delta_2 - \delta_1 = h \cdot (n_2 - n_1) \\ \delta &= h \cdot [n_0 + A \cdot \sigma_2 + B \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) - n_0 - A \cdot \sigma_1 - B \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \delta &= h \cdot (B - A) \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) .\end{aligned}\quad (2.3)$$

Relativní fázové zpoždění  $\Delta$  je vztaženo k příslušné vlnové délce použitého světla pomocí rovnice

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot h \cdot (B - A) \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) .\quad (2.4)$$

Zavedením relativní fotoelasticimetrické konstanty  $C = |B - A|$  lze předchozí výraz zapsat ve tvaru

$$\Delta = \pm \frac{2\pi}{\lambda} \cdot h \cdot C \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) \quad , \quad (2.5)$$

kde      znaménko +    platí pro kladný dvojlom  
             znaménko -    platí pro záporný dvojlom.

V dalším odvození je uvažován případ kladného dvojlomu, při kterém je směr "1" směrem maximálního hlavního napětí a současně též směrem nejrychlejšího šíření.

V praxi se používá následující značení :

$\frac{\Delta}{2\pi} = N$  ..... zpoždění jako násobek  $2\pi$  (řád izochromáty)

$\frac{\lambda}{C} = k_\sigma$  ..... fotoelasticimetrická materiálová konstanta (koeficient optické citlivosti)

Základní rovnice fotoelasticimetrie má tedy podobu

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot k_\sigma}{h} \quad (2.6)$$

Hodnoty koeficientu optické citlivosti pro užívané experimentální materiály jsou pro zelené světlo ( $\lambda=546$  nm) uvedeny v následující tabulce

|              | $k_\sigma$ [kN/m] |
|--------------|-------------------|
| Araldit B    | 11                |
| CR-39        | 16                |
| Homalite 100 | 24                |
| Polykarbonát | 7                 |
| PMMA         | 140               |

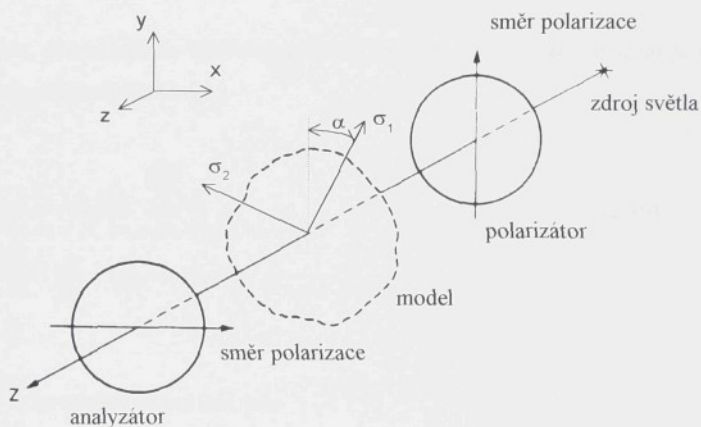
Tab. 2.2

přičemž  $k_\sigma=1$  je rozdíl hlavních napětí potřebný k tomu, aby ve vzorku tloušťky 1 m došlo k fázovému zpoždění 1  $\lambda$ .

### 2.1.2 Izochromáty a izokliny

Nejčastěji používaný přístroj pro získání polarizovaného světla a vytvoření fotoelasticimetrického obrazu pro určení napětí v modelu je lineární polariskop.

Skládá se ze světelného zdroje, polarizačního filtru - polarizátoru, fotoelasticimetrického transparentního modelu a druhého polarizačního filtru - analyzátoru. (viz obr. 2.2)



Obr. 2.2 - Lineární polariskop

Ze světelného zdroje vychází monochromatické světlo kmitající ve všech rovinách. Polarizátor propustí pouze kmit v jedné rovině (směr  $y$ ) a světelný vektor je proto dán vztahem

$$E_{py} = k \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (2.7)$$

Před vstupem do modelu se ale rovina kmitů světla obecně neztotožňuje s některou hlavní rovinou, ale svírá s ní např. úhel  $\alpha$ . Protože zatížený model propouští v důsledku dvojlomu světlo jen v hlavních rovinách, rozdělí se původní kmitání světla v modelu na dvě složky určené rovnicemi

$$E_1 = E_{py} \cdot \cos \alpha$$

$$E_2 = E_{py} \cdot \sin \alpha \quad , \quad (2.8)$$

kde  $\alpha$  je úhel mezi původní rovinou kmitů a první hlavní rovinou. (viz obr. 2.2)

Po průchodu analyzátozem ( při tmavém pozadí, t.j. rovinou kmitů kolmou na rovinu analyzátoru), je rovnice světelného vektoru dána vztahem

$$E_{Ax} = -E_1 \cdot \sin \alpha + E_2 \cdot \cos \alpha = k \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot [-\cos(\omega \cdot t) + \cos(\omega \cdot t - \Delta)] \quad (2.9)$$

Intenzita světla, procházejícího libovolným bodem fotoelasticimetrického modelu je úměrná druhé mocnině amplitudy kmitání, t.j.

$$I_{Ax} = E_{Ax}^2 = k^2 \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\Delta}{2} \quad , \quad (2.10)$$

kde  $\Delta = 2\pi \cdot \frac{h}{k_\sigma} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) \quad .$

Tmavá místa se na modelu objeví tam, kde

$$1) \quad \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = m \cdot \pi \Rightarrow \alpha = \frac{m \cdot \pi}{2} \quad ; \quad m = 0, 1, 2 \quad ,$$

t.j. tam, kde se shoduje směr hlavních napětí se směrem polarizace.

Čáry spojující tato místa se nazývají *izoklíny*, t.j. geometrická místa bodů konstantního směru hl. napětí.

$$2) \quad \sin \frac{\Delta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{2} = n \cdot \pi \Rightarrow \Delta = n \cdot 2\pi \quad ; \quad n = 0, 1, 2 \quad .$$

Jestliže  $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ , potom je fázové zpoždění  $= N \cdot 2\pi (\lambda)$ .

Spojnice těchto míst se nazývají *izochromáty*, t.j. geometrická místa bodů konstantního rozdílu hlavních napětí.

Izochromáty a izoklíny se vyskytují na obrazu modelu současně.

Pozn. 1) Monochromatické světlo - izochromáty - černé čáry  
- izoklíny - černé čáry

2) Bílé světlo

- izochromáty mají doplňkovou barvu k vlnové délce

- izoklíny - černé čáry.

V případě nastavení lineárního polariskopu se světlym pozadím, t.j. optická osa analyzátoru je rovnoběžná s osou polarizátoru, je světelný vektor dán vztahem

$$E_{Ay} = E_1 \cdot \cos \alpha + E_2 \cdot \sin \alpha = k \cdot [\cos^2 \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t) + \sin^2 \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t - \Delta)] \quad (2.11)$$

Intenzita bude v tomto případě popsána následující rovnicí

$$I_{Ay} = E_{Ay}^2 = k^2 \cdot \left(1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\Delta}{2}\right) \quad (2.12)$$

Tmavá místa se nyní na modelu objeví tam, kde

$$1) \sin^2 2\alpha = \sin^2 \frac{\Delta}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\Delta}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \Delta = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot 2\pi; n = 0, 1, 2,$$

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{h}{s} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) \Rightarrow \text{izochromáty polovičních řádů.}$$

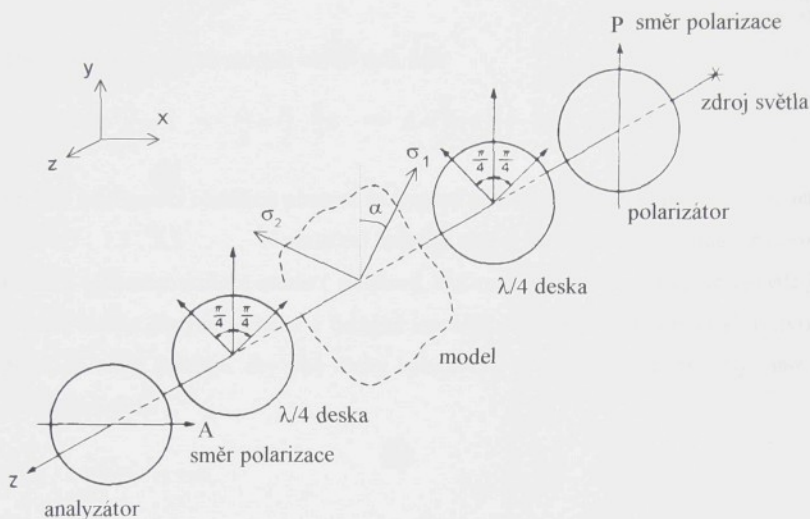
$$\sin^2 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \dots \Rightarrow \alpha = (2l + 1) \cdot \frac{\pi}{4}, l = 0, 1, 2 \dots$$

Izochromáty se zobrazí podél čar, pro které svírá směr hl. napětí úhel  $45^\circ$  se směrem polarizace. Je tedy k dispozici menší množství informací, než v případě tmavého pozadí.

- 2) Izoklíny, pro  $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi \Rightarrow \sin 2\alpha = 0$  se zobrazí jako světlé čáry, které jsou na obrazu modelu obtížněji rozeznatelné.

### Kruhový polariskop

Kruhový polariskop lze získat z lineárního polariskopu vložením čtvrtvlnných desek mezi polarizátor a model a mezi model a analyzátor (viz obr. 2.3).



Obr. 2.3 - Kruhový polariskop

Každá ze čtvrtvlnných desek je natočená o  $\pi/4$  oproti filtru u kterého je. Toto nastavení vyvolá kruhovou polarizaci, při které světelný vektor a tedy i směr polarizace rotuje.

Výsledná intenzita je proto pro tmavé pozadí (osa polarizátoru je kolmá na osu polarizátoru) dána vztahem

$$I_{Ax} = k^2 \cdot \sin^2 \frac{\Delta}{2} \quad (2.13)$$

Tmavá místa se nyní na modelu objeví tam, kde

$$\sin^2 \frac{\Delta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{2} = n \cdot \pi \Rightarrow \Delta = n \cdot 2\pi ; n = 0, 1, 2 \dots$$

V tomto případě vymizí z obrazu modelu izoklíny, neboť intenzita světla není závislá na směru hlavních napětí. Ve výsledném obrazu jsou pouze izochromáty představující rozdíl hlavních napětí.

Výsledná intenzita pro světlé pozadí (osa polarizátoru je rovnoběžná s osou polarizátoru) je dána vztahem

$$I_{Ay} = k^2 \cdot \left( 1 - \sin^2 \frac{\Delta}{2} \right) \quad (2.14)$$

Tmavá místa se nyní na modelu objeví tam, kde

$$\sin^2 \frac{\Delta}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\Delta}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \Delta = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot 2\pi \quad ; \quad n = 0, 1, 2 \quad .$$

Při této konfiguraci obdržíme přesnou interpolaci předchozích hodnot pro  $I_o$ , t.j. izochromáty řádu 0.5, 1.5, 2.5 ... . K potlačení barev, a tedy k lepší identifikaci řádu izochromáty, se používá monochromatické světlo (sodíkové, rtuťové). V případě sodíkového světla je obraz modelu tvořen žlutým pozadím a černými izochromatickými pruhy. Při výběru čtvrtvlnných desek je velmi důležité, aby obě desky vykazovaly přesně hodnotu čtvrtiny vlnové délky použitého světla.

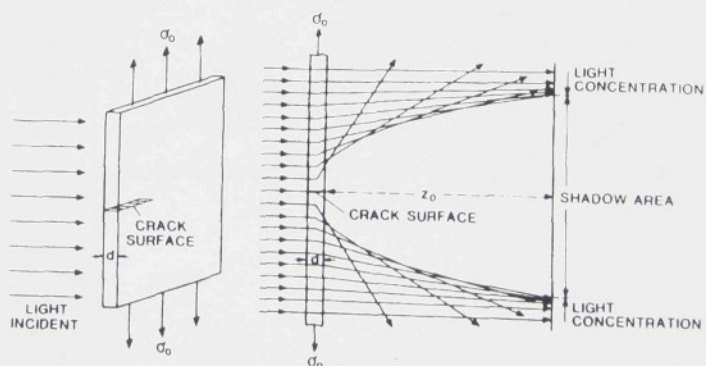
## 2.2 Metoda kaustik

Metoda kaustik je relativně nová experimentální metoda v experimentální analýze napětí. Byla zavedena Mannogem v roce 1964. Tato metoda je citlivá na gradient napětí a proto je určena na problémy koncentrace napětí. Mannog použil tuto metodu při výzkumu napjatosti v okolí kořene trhliny. Theocaris, Rosakis, Kalthoff a.j. rozšířili tuto metodu pro použití za různých podmínek, např. pro statické a dynamické zatížení, plasticitu a.p.. Od roku 1987 je metoda kaustik standartní metodou a od roku 1989 je součástí norem VDI. Následující popis metody vychází z prací Kathoffa [11] až [15].

### 2.2.1 Princip metody

Elastická napětí způsobují v transparentním materiálu změnu indexu lomu a tvaru povrchu materiálu. Tím dochází k odklonu paprsků světla procházejícího vzorkem, příp. odraženého od vzorku. Na obrazu těchto paprsků na matnici se objevují charakteristické tvary, stíny neboli kaustiky. Ze tvaru a velikosti kaustiky lze určit napěťové pole, především faktor intenzity napětí.

Princip vzniku kaustiky v okolí kořene trhliny je zobrazen na obr.2.4 . Vzorek obsahující trhlínu je zatížen tahovým napětím a je zleva osvětlen paralelním svazkem paprsků.



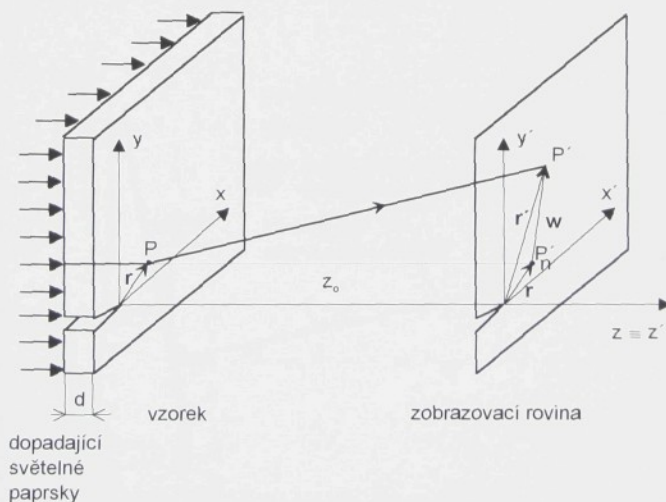
Obr. 2.4 - Princip vzniku kaustiky

Koncentrace napětí vznikající v okolí kořene trhliny způsobuje jednak zmenšení tloušťky desky, jednak změnu indexu lomu. Oblast v okolí kořene trhliny se chová podobně jako rozptylná čočka. Světelné paprsky jsou odklány směrem ven z okolí kořene trhliny. Na obraze v jisté vzdálenosti za deskou se objevuje v okolí kořene trhliny tmavá oblast, stín. Tento stín má světlý okraj - **kaustiku**. Ta vzniká tím, že paprsky světla, které jsou blíže kořeni trhliny, jsou více odklány ze svého původního směru než ty které dopadají na desku ve větší vzdálenosti od kořene trhliny.

Metoda není omezena pouze na transparentní materiály. V případě neprůhledných materiálů se k vyhodnocení používá obraz odražených paprsků od deformovaného povrchu vzorku. Referenční rovina je v tomto případě virtuální.

### 2.2.2 Zobrazovací rovnice fázového posunutí čela světelné vlny po průchodu zatíženým modelem.

Na obr. 2.5 je zkušební vzorek s příslušným souřadným systémem. Tloušťka vzorku je označena  $d$ .



Obr. 2.5 - Vzorek s příslušným souřadným systémem

Na obrázku je zobrazeno odklonění paprsku procházejícího vzorkem v bodě P, jehož poloha je

určena polohovým vektorem  $\vec{r}$  vůči počátku souřadného systému  $xy$ . U nezatíženého vzorku pokračuje paprsek bez vychýlení od svého původního směru a prochází bodem  $P_n'$  zobrazovací roviny. Dojde-li k zatížení vzorku a tedy i ke vzniku koncentrace napětí, je paprsek světla vychýlen ze svého původního směru a jeho poloha je vůči počátku souřadného systému  $x'y'$  v zobrazovací rovině určena polohovým vektorem

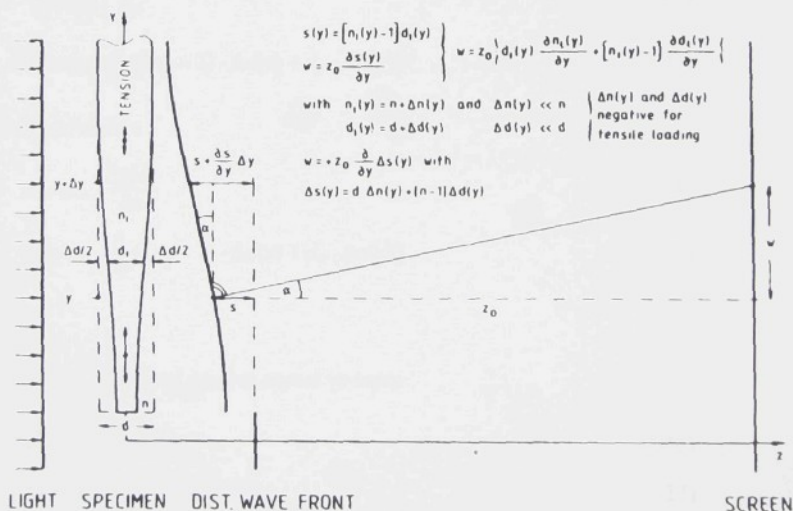
$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{w} \quad (2.15)$$

Směr a velikost vektoru posunutí  $\vec{w}$  je určena vychýlením světelného paprsku po průchodu zatíženým modelem. Při zatížení modelu se tloušťka vzorku a index lomu mění dle následujících rovnic :

$$\begin{aligned} d(y) &= d_o + \Delta d(y) \\ n(y) &= n_o + \Delta n(y) \end{aligned} \quad (2.16)$$

kde  $d(y)$  a  $n(y)$  je tloušťka vzorku a index lomu v případě zatíženého modelu a  $d_o$  a  $n_o$  je tloušťka vzorku a index lomu nezatíženého modelu.

Na následujícím obrázku je uvedeno zjednodušené zobrazení odklonu paprsku pouze ve směru souřadnice  $y$ .



Obr. 2.6 - Vychýlení světelného paprsku po průchodu zatíženým modelem

Fázové zpoždění čela vlny  $s(y)$  a jeho derivace dle  $y$  jsou dány vztahy :

$$s(y) = [n(y) - 1] \cdot d(y) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial s(y)}{\partial y} = [n(y) - 1] \cdot \frac{\partial d(y)}{\partial y} + d(y) \cdot \frac{\partial n(y)}{\partial y} \quad (2.18)$$

kde  $n(y) = n_o + \Delta n(y)$

$$d(y) = d_o + \Delta d(y)$$

V případě, že  $\Delta n(y) \ll n_o$  a  $\Delta d(y) \ll d_o$  obdržíme derivaci ve tvaru

$$\frac{\partial s(y)}{\partial y} = (n_o - 1) \cdot \frac{\partial \Delta d(y)}{\partial y} + d_o \cdot \frac{\partial \Delta n(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \{ (n_o - 1) \cdot \Delta d(y) + d_o \cdot \Delta n(y) \} \quad (2.19)$$

Odklon čela vlny je dán úhlem  $\alpha$  dle vztahu

$$\tan \alpha = \frac{\partial s(y)}{\partial y} \quad (2.20)$$

Současně platí ( viz obr. 2.6)

$$\tan \alpha = \frac{w_y}{z_o} \quad (2.21)$$

Srovnáním předchozích výrazů obdržíme vztah pro odklon paprsku ve směru  $y$  :

$$w_y = z_o \cdot \frac{\partial s(y)}{\partial y} \quad (2.22)$$

$$\text{t.j.} \quad w_y = z_o \cdot \frac{\partial}{\partial y} \{ (n_o - 1) \cdot \Delta d(y) + d_o \cdot \Delta n(y) \} \quad (2.23)$$

Obdobně pro směr  $x$  :

$$w_x = z_o \cdot \frac{\partial s(x)}{\partial x} \quad (2.24)$$

$$\text{t.j.} \quad w_x = z_o \cdot \frac{\partial}{\partial x} \{ (n_o - 1) \cdot \Delta d(x) + d_o \cdot \Delta n(x) \} \quad (2.25)$$

Vektorově lze předchozí rovnice zapsat ve tvaru :

$$\vec{w} = z_o \cdot \vec{\text{grad}} \Delta s, \quad (2.26)$$

$$\text{kde} \quad \Delta s = (n_o - 1) \cdot \Delta d + d_o \cdot \Delta n \quad (2.27)$$

Za příslušné veličiny v předchozích rovnicích se dosazují hodnoty podle toho, zda se jedná

o transparentní nebo netransparentní vzorky.

transparentní vzorky :  $d_o = d$  ( $d$  je tloušťka vzorku)

$n$  je index lomu materiálu vzorku

netransparentní vzorky :  $d_o = \frac{d}{2}$   
 $n = -1$

Současně je pro reálné obrazy v transmisní nebo reflektivní metodě  $z_o > 1$  a pro virtuální obrazy je pro obě metody  $z_o < 1$ .

### 2.2.3 Změna indexu lomu v závislosti na hlavních napětích.

Změny indexu lomu v závislosti na hlavních napětích  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  a  $\sigma_3$  jsou dány dle Maxwell - Neumannova zákona ve tvaru :

$$\begin{aligned}\Delta n_1 &= A \cdot \sigma_1 + B \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \\ \Delta n_2 &= A \cdot \sigma_2 + B \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) \end{aligned} \quad (2.28)$$

kde  $\Delta n_{1,2}$  jsou změny indexu lomu pro polarizované světlo ve směru 1 a 2 a  $A, B$  jsou materiálové konstanty.

Změna tloušťky vzorku je dána Hookeovým zákonem

$$\Delta d = \frac{d}{E} [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)] \quad (2.29)$$

V případě rovinné napjatosti je  $\sigma_3 = 0$  a v případě rovinné deformace je  $\Delta d = 0$ .

Dosadíme-li rovnice (2.28) a (2.29) do rovnice (2.27), obdržíme základní rovnici pro tvorbu kaustiky v zobrazovací rovině rovnoběžné se vzorkem ve vzdálenosti  $z_o$  ve tvaru

$$\Delta s_{1,2} = c \cdot d_{\text{eff}} \cdot [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \lambda \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)] \quad (2.30)$$

kde pro rovinnou napjatost jsou konstanty  $c$  a  $\lambda$  určeny vztahy

$$c = \frac{A+B}{2} - \frac{(n-1) \cdot \mu}{E}, \quad \lambda = \frac{A-B}{A+B-2(n-1) \cdot \mu/E} \quad (2.31)$$

V případě rovinné deformace

$$c = \frac{A+B}{2} + \mu \cdot B \quad , \quad \lambda = \frac{A-B}{A+B+2\mu \cdot B} \quad (2.32)$$

Konstanta  $c$  popisuje změnu délky optické dráhy závislou na modelovém materiálu a stavu napjatosti. Protože je tato konstanta kvantitativní veličinou mající vliv na výsledný efekt vzniku kaustiky, je nazývána "shadow optical constant". Vliv anizotropie materiálu ( $A \neq B$ ) na změnu délky optické dráhy je dán konstantou  $\lambda$ . V následující tabulce jsou uvedeny materiálové konstanty pro vyhodnocení kaustik nejčastěji používaných modelových materiálů.

| Materiál            | Elastické konstanty |       | Optické konstanty |                                              |                                              | Konstanty pro metodu Caustic                 |                                              |           |        | Efektivní tloušťka |
|---------------------|---------------------|-------|-------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------|--------|--------------------|
|                     | E [MPa]             | $\mu$ | Index lomu<br>n   | A [m <sup>2</sup> /N]<br>× 10 <sup>-10</sup> | B [m <sup>2</sup> /N]<br>× 10 <sup>-10</sup> | Rovinná napjatost                            | Rovinná deformace                            | $\lambda$ |        |                    |
|                     |                     |       |                   |                                              |                                              | c [m <sup>2</sup> /N]<br>× 10 <sup>-10</sup> | c [m <sup>2</sup> /N]<br>× 10 <sup>-10</sup> |           |        |                    |
| TRANSMISE           |                     |       |                   |                                              |                                              |                                              |                                              |           |        |                    |
| optický anizotropní |                     |       |                   |                                              |                                              |                                              |                                              |           |        |                    |
| Araldít B           | 3 660               | 0,392 | 1,592             | -0,056                                       | -0,62                                        | -0,97                                        | -0,288                                       | -0,58     | -0,482 | d                  |
| CR-39               | 2 580               | 0,443 | 1,504             | -0,16                                        | -0,52                                        | -1,2                                         | -0,148                                       | -0,56     | -0,317 | d                  |
| Sklo                | 73 900              | 0,231 | 1,517             | 0,0032                                       | -0,025                                       | -0,027                                       | -0,519                                       | -0,017    | -0,849 | d                  |
| Homalite 100        | 4 820               | 0,31  | 1,561             | -0,444                                       | -0,672                                       | -0,92                                        | -0,121                                       | -0,767    | -0,149 | d                  |
| optický izotropní   |                     |       |                   |                                              |                                              |                                              |                                              |           |        |                    |
| PMMA                | 3 240               | 0,35  | 1,491             | -0,53                                        | -0,57                                        | -1,08                                        | ~ 0                                          | -0,75     | ~ 0    | d                  |
| REFLEKCE            |                     |       |                   |                                              |                                              |                                              |                                              |           |        |                    |
| Všechny materiály   | E                   | $\mu$ | -1                | 0                                            | 0                                            | 2 $\mu$ /E                                   | 0                                            | -         | -      | d/2                |

Tab. 2.3

Všechny paprsky vychýlené ze svého původního směru podle rovnic (2.27) a (2.30) vytvářejí oblast stínu za vzorkem (viz obr. 2.4). Tato oblast vytváří v zobrazovací rovině jasné rozhraní mezi vnitřní tmavou oblastí, kam nedopadají žádné světelné paprsky, a mezi světlou vnější oblastí. (viz obr. 2.4) Tato oblast, kde je vyšší koncentrace dopadajících světelných paprsků, se nazývá **kaustika**. Podobu zobrazovací rovnice a tedy i tvar kaustiky pro konkrétní vyšetřovaný stav koncentrace napětí lze obdržet dosazením příslušných hlavních složek napětí do hlavní rovnice 2.30.

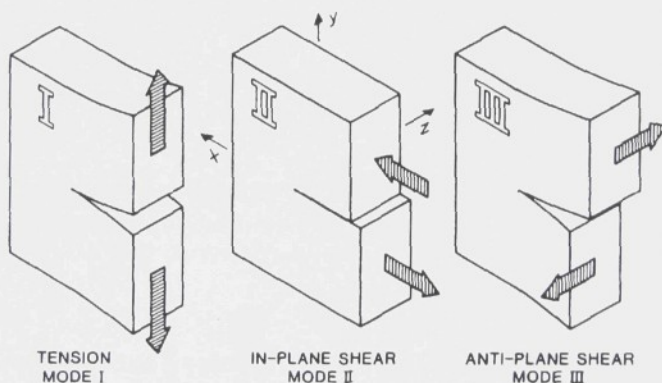
### 3. Pole napjatosti v okolí čela trhliny

Při zatížení tělesa s trhlinou vzniká v blízkém okolí čela trhliny pole napjatosti závislé mj. na způsobu zatížení tělesa.

Podle způsobu zatížení tělesa s trhlinou se rozlišují tři módy :

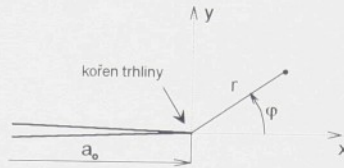
- tahové zatížení ( mód I )
- smykové zatížení ve směru růstu trhliny ( mód II )
- smykové zatížení v rovině kolmé ke směru růstu trhliny ( mód III ) .

Jednotlivé módy jsou zobrazeny na následujícím obr. 3.1 .



obr. 3.1 - Základní módy zatížení čela trhliny

Složky napětí a posuvů v okolí čela trhliny jsou pro jednotlivé módy popsány následujícími vztahy v polárním souřadném systému zobrazeném na obr. 3.2 [13] :



obr. 3.2 - Souřadný systém

**Mód I :**

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \left( 5 \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \\ \sigma_\varphi &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \left( 3 \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \left( \sin \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{3\varphi}{2} \right)\end{aligned}\quad (3.1)$$

$$\sigma_z = \mu \cdot (\sigma_r + \sigma_\varphi) \quad , \quad \tau_{rz} = \tau_{\varphi z} = 0$$

$$u = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left[ \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left( 1 - 2\mu + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

$$v = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left[ \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left( 2 - 2\mu - \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

$$w = 0$$

**Mód II :**

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \left( -5 \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \\ \sigma_\varphi &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \left( -3 \sin \frac{\varphi}{2} - 3 \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + 3 \cos \frac{3\varphi}{2} \right)\end{aligned}\quad (3.2)$$

$$\sigma_z = \mu \cdot (\sigma_r + \sigma_\varphi) \quad , \quad \tau_{rz} = \tau_{\varphi z} = 0$$

$$u = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left[ \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left( 2 - 2\mu + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

$$v = \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left[ \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left( -1 + 2\mu + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

$$w = 0$$

### Mód III :

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2} \quad , \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{yz} &= +\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \\ w &= \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \quad , \quad u = v = 0\end{aligned}\tag{3.3}$$

kde  $K_I$  je faktor intenzity napětí tahového módu I ,  
 $K_{II}$  je faktor intenzity napětí smykového módu II ,  
 $K_{III}$  je faktor intenzity napětí smykového módu III ,  
 $G$  je smykový modul použitého materiálu ,  
 $\mu$  Poissonova konstanta použitého materiálu .

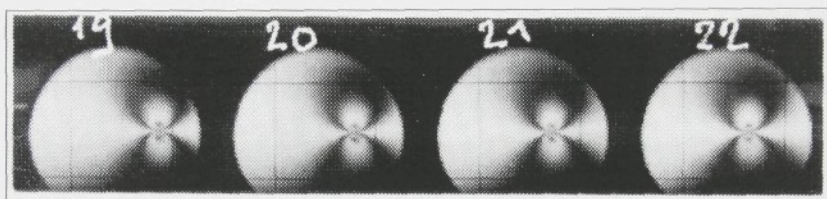
Poznamenejme, že smykový modul lze vypočítat dle následujícího vztahu :

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad .$$

Napětí  $\sigma_z$  a posuvy  $u$  a  $v$  v rovnicích pro mód I a II jsou platné pro případ rovinné deformace. Změnu pro případ rovinné napjatosti lze provést jednoduše položíme-li  $\sigma_z = 0$  a zaměníme-li  $\mu$  za  $\mu/(1 - \mu)$  v rovnicích pro posuvy  $u$  a  $v$  .

### 3.1 Vyhodnocení pole napjatosti fotoelasticimetrickou metodou.

Fotoelasticimetrický záznam šíření porušení rovinného tělesa zhotoveného z opticky citlivého materiálu poskytuje informaci o poloze trhliny a napjatosti v okolí kořene trhliny, resp. v celém zkušebním vzorku v závislosti na čase. Na obr. 3.3 je ukázána část fotozáznamu porušení desky z PMMA. Tento fotozáznam byl dosažen na pracovišti autora prostřednictvím zařízení, které je blíže popsáno v [16].



Obr. 3.3 - Sekvence fotozáznamu porušení

Napjatost v okolí trhliny je zobrazena pomocí izochromát, což jsou geometrická místa konstantního relativního dvojlomu. Vazba mezi řádem izochromáty a maximálním smykovým napětím je dána Wertheimovým zákonem [10]

$$\tau_{\max} = \frac{N \cdot k_{\sigma}}{2 \cdot h} \quad (3.4)$$

kde  $N$  je řád izochromáty,  $k_{\sigma}$  je koeficient optické citlivosti,  $h$  je tloušťka modelu (zkušebního vzorku). Pro rovinné úlohy je rovnice izochromáty dána vztahem :

$$(2 \cdot \tau_{\max})^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2 \quad (3.5)$$

Okamžitá rychlost a zrychlení se obvykle určuje na základě měření okamžité polohy čela trhliny v čase, t.j. derivacemi experimentálně získané závislosti délky trhliny na čase. Je zřejmé, že tento postup v sobě skrývá četné zdroje chyb, a to nejen experimentálního původu, ale i chyby plynoucí z nutnosti derivovat závislost délky trhliny - čas prokládanou omezeným počtem bodů. V případě aplikace fotoelasticimetrie spojené s rychlostní fotografií je zřejmé, že přesnost určené závislosti délka trhliny - čas je dána především přesností lokalizace kořene trhliny na fotozáznamu.

Izochromatické smyčky obklopující rychle se pohybující trhlinu často vykazují slabou asymetrii. Tato asymetrie byla zpravidla považována za experimentální abnormalitu. Pečlivou prohlídkou lomových ploch se však ukázalo, že slabě nesymetrické izochromáty jsou spojeny s lehce zakřivenými lomovými plochami. Tento experimentální fakt ukazuje, že napětíové pole v okolí kořene trhliny je při dominantním I módu šíření trhliny ovlivněno i malou hodnotou faktoru intenzity napětí  $K_{II}$  II módu šíření. Triparametrické ( $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $\sigma_{ox}$ ) vyjádření maximálního smykového napětí  $\tau_m$  v případě smíšeného módu šíření trhliny konstantní rychlostí  $v$  bylo publikováno např. v [17] až [19]. V těchto pracích jsou uvedeny pouze výsledné vztahy bez jejich odvození. Odvození těchto vztahů lze nalézt např. v [20].

Vztahy popisující izochromatickou smyčku v okolí kořene trhliny šířící se konstantní rychlostí  $v$  lze podle [17] psát v následujícím tvaru

$$\left[ \frac{N \cdot K_{\sigma}}{2 \cdot h} \right]^2 = \frac{1}{4} \cdot \left[ H^2 \cdot \frac{1}{r} + 2 \cdot H \cdot \sigma_{ox} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} + \sigma_{ox}^2 \right] + J^2 \cdot \frac{1}{r} \quad (3.6)$$

Členy  $H$ ,  $J$  v předchozí rovnici jsou funkcemi rychlosti  $v$  a jsou definovány následujícími vztahy :

$$H = \frac{K_I}{\sqrt{\pi}} \cdot B_I(v) \cdot \left\{ \left( 1 + s_1^2 \right) \cdot [f(c_1) + g(c_1)]^{\frac{1}{2}} - \frac{4 \cdot s_1 \cdot s_2}{(1 + s_2)^2} \cdot [f(c_2) + g(c_2)]^{\frac{1}{2}} \right\} - \\ - \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi}} \cdot B_{II}(v) \cdot \left\{ \left( 1 + s_2^2 \right) \cdot [f(c_1) - g(c_1)]^{\frac{1}{2}} - \left( 1 + s_2^2 \right) \cdot [f(c_2) - g(c_2)]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.7)$$

$$J = \frac{K_I}{\sqrt{\pi}} \cdot B_I(v) \cdot s_1 \cdot \left\{ [f(c_1) - g(c_1)]^{\frac{1}{2}} - [f(c_2) - g(c_2)]^{\frac{1}{2}} \right\} + \\ + \frac{K_{II}}{4 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot B_{II}(v) \cdot \left\{ 4 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot [f(c_1) + g(c_1)]^{\frac{1}{2}} - \left( 1 + s_2^2 \right)^2 \cdot [f(c_2) + g(c_2)]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.8)$$

kde

$$B_I(v) = \frac{1 + s_2^2}{4 \cdot s_1 \cdot s_2 - (s_2^2 + 1)^2} \quad (3.9)$$

$$B_{II}(v) = \frac{2 \cdot s_2}{4 \cdot s_1 \cdot s_2 - (s_2^2 + 1)^2} \quad (3.10)$$

v rovnicích (3.7) a (3.8) značí

$$f(c_1) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_1^2} \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (3.11)$$

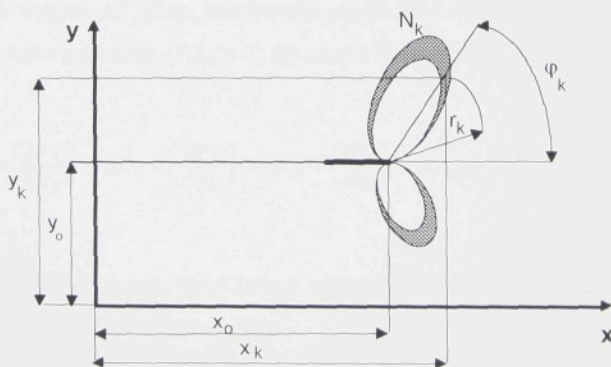
$$g(c_1) = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_1^2} \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (3.12)$$

kde  $s_i^2 = 1 - \frac{v^2}{c_i^2}$ ,  $i = 1, 2$ .

Poznamenejme, že pro  $i=1$  je  $c_1$  rychlost podélných vln a pro  $i=2$  je  $c_2$  rychlost smykových vln.

### 3.1.1 Přeúčřená pětiparametrická metoda.

Základem této metody umožňující vyhodnotit z pole izochromát parametry  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $\sigma_{ox}$  je tříparametrická přeúčřená metoda Sanforda a Dallyho [21]. Třemi počítanými parametry v této metodě jsou faktor intenzity napětí I módu  $K_I$ , II módu  $K_{II}$  a nesingulární člen  $\sigma_{ox}$ . V autorem navržené pětiparametrické metodě jsou dalšími parametry souřadnice kořene trhliny  $(x_0, y_0)$ , který je počátkem souřadného systému pro odečítání polárních souřadnic bodů ležících na izochromátě (viz obr. 3.4).



Obr. 3.4 Souřadný systém

Rovnice izochromatické smyčky (3.5), resp (3.6) jsou obecně platným vztahem rovinné úlohy. Vztah (3.6) lze přepsat do tvaru funkcionálu :

$$F(K_I, K_{II}, \sigma_{ox}, x_o, y_o) = 0 \quad (3.13)$$

Pro každý bod ležící na izochromátě řádu  $N$ , musí být vztah (3.13) splněn pro správné hodnoty parametrů  $K_I, K_{II}, \sigma_{ox}, x_o, y_o$ . Pro nesprávné hodnoty těchto parametrů je zřejmé  $F \neq 0$ . Přeuročená metoda využívá k vyhodnocení hodnot parametrů  $K_I, K_{II}, \sigma_{ox}, x_o, y_o$  většího počtu bodů ležících na izochromátě daného řádu. Metodou nejmenších čtverců jsou pak hodnoty parametrů  $K_I, K_{II}, \sigma_{ox}, x_o, y_o$  přizpůsobovány velkému počtu bodů na izochromátě. Pro  $k$ -tý bod na izochromátě řádu  $N_k$  jsou z fotozáznamu odečteny souřadnice  $\varphi_k$  a  $r_k$  v souřadném systému, který je uveden na obr. 3.4. Dosazením parametrů jednotlivých změřených bodů ( $\varphi_k, r_k, N_k$ ) do vztahu obdržíme soustavu  $n$  rovnic, kde  $n$  je počet odměřených bodů. Pro počáteční odhad hodnot parametrů ( $K_I, K_{II}, \sigma_{ox}, x_o, y_o$ ) není obecně rovnice (3.13) splněna. Prostřednictvím Taylorova rozvoje funkcionálu (3.13) podle  $K_I, K_{II}, \sigma_{ox}, x_o, y_o$  lze psát

$$\begin{aligned} (F_k)_{i+1} = (F_k)_i + \left( \frac{\partial F_k}{\partial K_I} \right)_i \cdot \Delta K_I + \left( \frac{\partial F_k}{\partial K_{II}} \right)_i \cdot \Delta K_{II} + \left( \frac{\partial F_k}{\partial \sigma_{ox}} \right)_i \cdot \Delta \sigma_{ox} + \\ + \left( \frac{\partial F_k}{\partial x_o} \right)_i \cdot \Delta x_o + \left( \frac{\partial F_k}{\partial y_o} \right)_i \cdot \Delta y_o \end{aligned} \quad (3.14)$$

kde index  $i$  se vztahuje k  $i$ -tému iteračnímu kroku, index  $k = 1$  až  $n$  přísluší  $k$ -tému bodu na izochromátě. Veličiny  $\Delta K_I$  až  $\Delta y_o$  jsou korekce předchozího odhadu. Jsou-li korekce určeny tak, aby byla splněna podmínka  $(F_k)_{i+1} = 0$ , lze rovnici (3.14) přepsat do tvaru

$$\left( \frac{\partial F_k}{\partial K_I} \right)_i \cdot \Delta K_I + \left( \frac{\partial F_k}{\partial K_{II}} \right)_i \cdot \Delta K_{II} + \left( \frac{\partial F_k}{\partial \sigma_{ox}} \right)_i \cdot \Delta \sigma_{ox} + \left( \frac{\partial F_k}{\partial x_o} \right)_i \cdot \Delta x_o + \left( \frac{\partial F_k}{\partial y_o} \right)_i \cdot \Delta y_o = -(F_k)_i \quad (3.15)$$

Pro  $n$  bodů obdržíme  $n$  rovnic, které řešíme vzhledem ke korekcím  $\Delta K_I$  až  $\Delta y_o$ . Maticové vyjádření předchozí rovnice lze psát ve tvaru

$$[a] \cdot \{ \Delta K \} = \{ f \} \quad (3.16)$$

kde jednotlivé matice jsou určeny následujícím způsobem.

$$[a] = - \begin{bmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta K_I} & \frac{\delta F_1}{\delta K_{II}} & \frac{\delta F_1}{\delta \sigma_{ox}} & \frac{\delta F_1}{\delta x_o} & \frac{\delta F_1}{\delta y_o} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\delta F_n}{\delta K_I} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\delta F_n}{\delta y_o} \end{bmatrix}, \quad \{\Delta K\} = \begin{Bmatrix} \Delta K_I \\ \Delta K_{II} \\ \Delta \sigma_{ox} \\ \Delta x_o \\ \Delta y_o \end{Bmatrix}, \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{Bmatrix}$$

Další postup spočívá v následujících úpravách :

$$[a]^T \cdot [a] \cdot \{\Delta K\} = [a]^T \cdot \{f\}$$

$$[c] \cdot \{\Delta K\} = \{d\}$$

$$[c] = [a]^T \cdot [a]$$

$$\{d\} = [a]^T \cdot \{f\}$$

$$\{\Delta K\} = [c]^{-1} \cdot \{d\}$$

Prostřednictvím takto spočtených korekcí se provede nový odhad parametrů  $K_I$  až  $y_o$ .

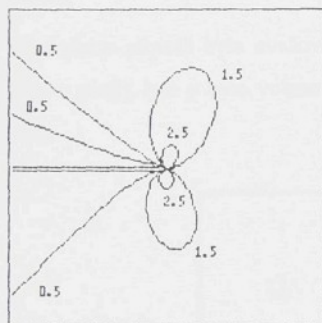
$$\begin{aligned} T.j. \quad (K_I)_{i+1} &= (K_I)_i + \Delta K_I \\ (K_{II})_{i+1} &= (K_{II})_i + \Delta K_{II} \\ (\sigma_{ox})_{i+1} &= (\sigma_{ox})_i + \Delta \sigma_{ox} \\ (x_o)_{i+1} &= (x_o)_i + \Delta x_o \\ (y_o)_{i+1} &= (y_o)_i + \Delta y_o \end{aligned} \quad (3.17)$$

Tyto nové hodnoty se použijí jako počáteční odhad v dalším iteračním kroku. Tento iterační postup se opakuje tak dlouho, dokud korekce předchozích hodnot nenabude předepsané malé hodnoty.

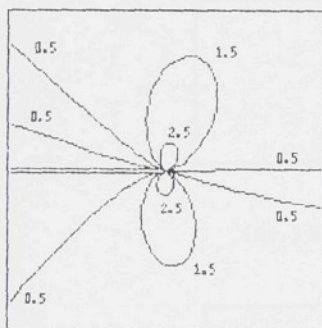
### 3.1.2 Vliv přesnosti vstupních dat pro výpočet $K_I$ , $K_{II}$ , $\sigma_{ox}$ přeúčtenou metodou

Při testování spolehlivosti dat získaných v této práci uvedenou pětiparametrickou metodou byl sledován vliv difuznosti izochromatických pruhů, nepřesného určení polohy kořene trhlíny na záznamu a rozptyl rychlosti šíření kořene dynamické trhlíny.

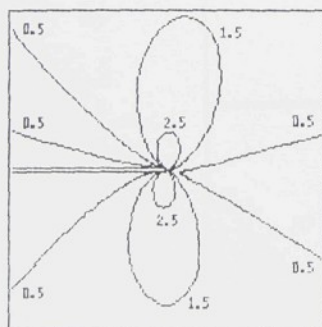
Pro tento účel byly nagenеровány 3 pole dynamických izochromát ( viz následující obr. 3.5÷3.7) pro rychlosti  $v = 0.2 c_2$ ,  $0.4 c_2$ ,  $0.6 c_2$  s parametry  $K_I = 1$ ,  $K_{II} = 0.1$  a  $\sigma_{ox} = -1$ . Poměr optické citlivosti ku tloušťce modelu byl zvolen 1.73. Z těchto polí izochromát bylo vybráno vždy 17 bodů jejichž souřadnice byly vstupními údaji tří i pětiparametrické přeurčené metody.



Obr. 3.5 - Dynamické izochromáty pro  $v = 0.2 c_2$



Obr. 3.6 - Dynamické izochromáty pro  $v = 0.4 c_2$

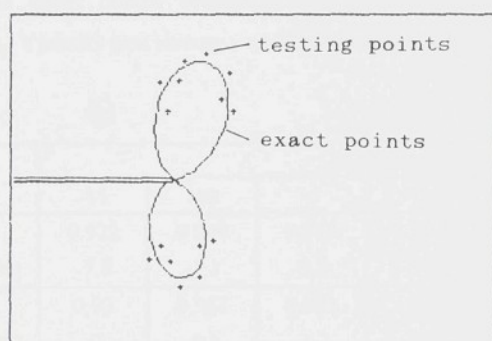


Obr. 3.7 - Dynamické izochromáty pro  $v = 0.6 c_2$

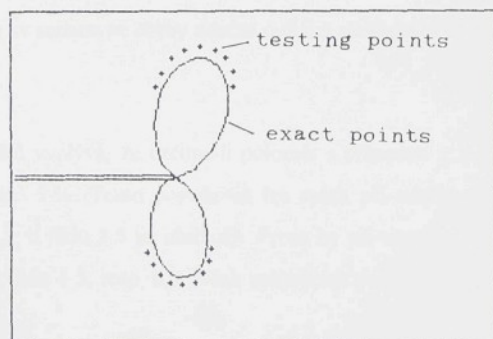
### ♦ Vliv difuznosti izochromatických pruhů

V tomto případě byly sledovány 3 vlivy. Vliv náhodné a soustavné chyby odečtu radiální souřadnice bodu izochromáty a vliv chyby v určení řádu izochromáty  $N$ . První dva vlivy jsou zobrazené na obr.3.8 a 3.9. Naměřené hodnoty souřadnic  $r(i)$  byly nejprve náhodně korigovány přičtením  $\Delta r(i) = n \cdot p \cdot r(i)$  kde  $n$  je náhodně generovaná hodnota z intervalu  $(-1, 1)$  a  $p$  je procentuelní velikost odchylky, která byla volena 5, 10 a 15 %, t.j.  $p = 0.05, 0.1$  a  $0.15$ .

Ve druhém případě byla uvažována soustavná chyba a odchylka byla počítána dle vztahu  $\Delta r(i) = p \cdot r(i)$ , kde  $p$  bylo voleno  $-0.15, -0.1, -0.05, 0.05, 0.1, 0.15$ , t.j.  $-15, -10, -5, 5, 10, 15$  %.



Obr. 3.8 - Náhodná chyba odečtu poloměru



Obr. 3.9 - Soustavná chyba odečtu poloměru

Výsledky simulace náhodné chyby odečtu jsou shrnuty v tabulce 3.1. Výpočet byl proveden pětiparametrickou metodou pro rychlost šíření trhliny  $v = 0.4 c_2$ .

| $p$ [%] | $K_1$ | $\Delta K_1$ [%] |
|---------|-------|------------------|
| 5       | 1.010 | 1                |
| 10      | 1.03  | 3,1              |
| 15      | 1.06  | 6,1              |

Tab. 3.1 - Vliv náhodné chyby odečtu radiální souřadnice bodu izochromáty

Simulace soustavné chyby odečtu byla provedena pro rychlosti šíření kořene trhliny  $v = 0.2, 0.4$  a  $0.6 c_2$ . Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce 3.2.

| $v$             |                  | $p$ [%] |       |       |       |       |       |
|-----------------|------------------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                 |                  | -15     | -10   | -5    | 5     | 10    | 15    |
| $0.2 \cdot c_2$ | $K_1$            | 0.922   | 0.949 | 0.975 | 1.025 | 1.049 | 1.073 |
|                 | $\Delta K_1$ [%] | -7,8    | -5,1  | -2,5  | 2,5   | 4,9   | 7,3   |
| $0.4 \cdot c_2$ | $K_1$            | 0.93    | 0.957 | 0.983 | 1.033 | 1.058 | 1.081 |
|                 | $\Delta K_1$ [%] | -7      | -4,3  | -1,7  | 3,3   | 5,8   | 8,1   |
| $0.6 \cdot c_2$ | $K_1$            | 0.922   | 0.949 | 0.975 | 1.025 | 1.049 | 1.072 |
|                 | $\Delta K_1$ [%] | -7,8    | -5,1  | -2,5  | 2,5   | 4,9   | 7,2   |

Tab. 3.2 - Vliv soustavné chyby odečtu radiální souřadnice bodu izochromáty

Z uvedených výsledků vyplývá, že určíme-li poloměr s přesností  $\pm 10\%$  neměla by chyba v určení  $K_1$  přesáhnout  $5\%$ . Tento požadavek lze splnit při odečtu bodů na experimentální izochromátě řádu 1.5, u řádu 2.5 již obtížněji. Proto by při výpočtu měla být použita většina bodů z izochromáty řádu 1.5, resp. 0.5 avšak splňujících podmínku, že jde o body z blízkého okolí kořene trhliny.

V případě analýzy chyby v určení řádu izochromáty  $N(i)$  byla uvažována soustavná chyba a

odchylka byla počítána dle vztahu  $\Delta N(i) = p \cdot N(i)$ , kde  $p$  bylo voleno -0.1, -0.05, 0.05, 0.1 t.j. -10%, -5%, 5%, 10%. Výpočet byl proveden pětiparametrickou metodou pro rychlosti šíření trhliny  $v = 0.2, 0.4, 0.6 \cdot c_2$ . Výsledky jsou v tabulce 3.3.

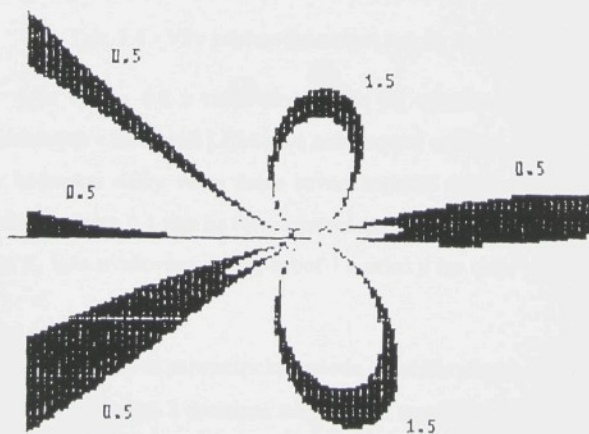
| $v$             | $p$ [%] |      |     |      |
|-----------------|---------|------|-----|------|
|                 | -10     | -5   | 5   | 10   |
| $0.2 \cdot c_2$ | -10     | -5   | 5   | 10   |
| $0.4 \cdot c_2$ | -9,2    | -4,2 | 5,9 | 10,9 |
| $0.6 \cdot c_2$ | -10     | -5   | 5   | 10   |

Tab. 3.3 - Vliv chyby určení řádu izochromáty

Pro ilustraci možného rozptylu určení řádu izochromáty je na obr. 3.10. zobrazen vypočtený tvar izochromatických smyček. Pruhy jsou tvořeny body, pro které platí, že

$$N - 0.05 < N(i) < N + 0.05$$

kde  $N$  je 0.5 příp. 1.5.



Obr. 3.10 - Generovaná difúznost izochromatických smyček

### ♦ Vliv nepřesného určení polohy kořene trhliny

Chyba v určení přesné polohy kořene trhliny je nejčastější chybou při odečtu bodů z experimentálních izochromát. O důvodech obtížnosti lokalizace kořene bylo pojednáno dříve. V autorem navržené pětiparametrické metodě se předpokládá, že poloha kořene není známa a tyto souřadnice kořene ( $x_o$ ,  $y_o$ ) jsou následně vypočítávány spolu s  $K_I$ ,  $K_{II}$  a  $\sigma_{ox}$ .

Pro ilustraci jak velký může být vliv této chyby, bylo simulováno nepřesné určení polohy kořene trhliny posunem skutečné polohy o  $x_o$  a  $y_o$  v případě dynamických izochromát ( $K_I = 1$ ,  $K_{II} = 0.1$ ,  $\sigma_{ox} = -1$ ) s rychlostí  $v = 0.6 \cdot c_2$ . Hodnoty  $x_o$  a  $y_o$  byly voleny dle tabulky 3.4. V této tabulce jsou také shrnuty výsledné hodnoty  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $\sigma_{ox}$  spočtené jednak tříparametrickou metodou a jednak pětiparametrickou metodou. Výsledné hodnoty byly zaokrouhlovány na 3 desetinná místa.

| $x_o$<br>[mm] | $y_o$<br>[mm] | 3 - param. metoda |          |               | 5-ti parametrická metoda |          |               |        |        |
|---------------|---------------|-------------------|----------|---------------|--------------------------|----------|---------------|--------|--------|
|               |               | $K_I$             | $K_{II}$ | $\sigma_{ox}$ | $K_I$                    | $K_{II}$ | $\sigma_{ox}$ | $x_o$  | $y_o$  |
| 0,8           | 0,1           | 0.966             | 0.097    | -1.146        | 1                        | 0,1      | -1            | 0.816  | 0.096  |
| 0,8           | -0,1          | 0.966             | 0.096    | -1.144        | 1                        | 0,1      | -1            | 0.816  | -0.104 |
| -0,8          | 0,1           | 1.031             | 0.101    | -0.858        | 1                        | 0,1      | -1            | -0.784 | 0.096  |
| -0,8          | -0,1          | 1.032             | 0.098    | -0.853        | 1                        | 0,1      | -1            | -0.784 | -0.104 |

Tab. 3.4 - Vliv nepřesného určení polohy kořene trhliny

Hodnota  $x_o$  byla volena 0.8 z toho důvodu, že při odečítání hodnot z experimentálních izochromát získaných v laboratoři LEM bývá zobrazovací měřítko, t.j. poměr mezi odečítanou a skutečnou hodnotou délky velmi často rovno hodnotě 8. Uvažuje-li se tedy nepřesnost odečtu skutečné hodnoty 0.1 mm na fotozáznamu, pak na zkušebním vzorku to činí právě 0.8 mm. Hodnota  $y_o$  byla uvažována menší, neboť i v praxi ji lze určit vzhledem k poloze trhliny přesněji.

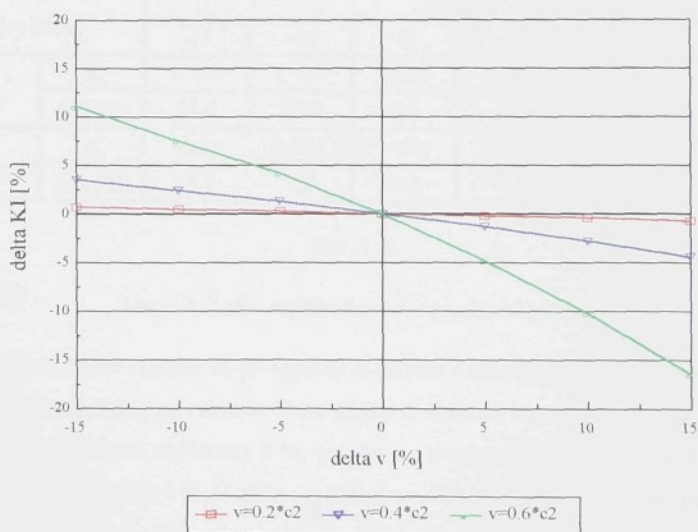
Z tabulky 3.4 vyplývá, že 5-ti parametrická metoda umožnila přesné stanovení hodnot  $K_I$ ,  $K_{II}$  a  $\sigma_{ox}$  (pozn. při zaokrouhlení na 3 desetinná místa, t.j. se zaručenou přesností větší než 0.01 % u  $K_I$  a  $\sigma_{ox}$  a 0.1 % u  $K_{II}$ ), zatímco při použití tříparametrické metody byla chyba i při malé simulované nepřesnosti (menší než 1% max. odečteného poloměru) větší než 3% při určení  $K_I$  a téměř 15% při určení  $\sigma_{ox}$ .

### ♦ Vliv nepřesného určení rychlosti šíření kořene dynamické trhliny

Při odvození rovnic popisujících pole napjatosti v blízkém okolí kořene dynamické trhliny je předpokládán ustálený stav šíření konstantní rychlostí  $v$ . Ve skutečnosti se rychlost šíření během růstu délky trhliny mění a při vyhodnocení záznamu je třeba nalézt oblast, v níž jsou tyto změny nejmenší.

Při zkoumání jednotlivých parametrů je nezbytné též zhodnotit vliv přesnosti určení okamžité rychlosti kořene trhliny  $v$ . Toto bylo provedeno pro rychlosti šíření  $v = 0,2, 0,4, 0,6 c_2$ . Ve všech případech byla rychlost zadávána dle vztahu  $v = p \cdot v$ , kde  $p$  bylo zadáváno v rozmezí od -0.85 do 1.15 po 0.05, t.j. odchylka byla uvažována v rozsahu od -15% do 15% po 5%.

Výsledné hodnoty K-faktoru jsou shrnuty v tabulkách 3.5a, 3.5b a 3.5c. V tabulkách jsou uvedeny výsledky získané tříparametrickou metodou (označ. 3p) a pětparametrickou metodou (označ. 5p). Na obrázku 3.11 je graficky znázorněn vliv nepřesnosti  $v$  na  $K_I$  pro výsledky získané pětparametrickou metodou.



Obr. 3.11 - Vliv nepřesnosti  $v$  na  $K_I$

| $v = 0.2 \cdot c_2$ |                  | $\Delta v$ [%] |       |       |       |       |       |
|---------------------|------------------|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                     |                  | -15            | -10   | -5    | 5     | 10    | 15    |
| 3 p                 | $K_I$            | 1.009          | 1.006 | 1.003 | 0.997 | 0.993 | 0.990 |
|                     | $\Delta K_I$ [%] | 0,9            | 0,6   | 0,3   | -0,3  | -0,7  | -1    |
| 5 p                 | $K_I$            | 1.007          | 1.005 | 1.003 | 0.998 | 0.996 | 0.993 |
|                     | $\Delta K_I$ [%] | 0,7            | 0,5   | 0,3   | -0,2  | -0,4  | -0,7  |

Tab. 3.5a

| $v = 0.4 \cdot c_2$ |                  | $\Delta v$ [%] |       |       |       |       |       |
|---------------------|------------------|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                     |                  | -15            | -10   | -5    | 5     | 10    | 15    |
| 3 p                 | $K_I$            | 1.047          | 1.033 | 1.017 | 0.982 | 0.963 | 0.942 |
|                     | $\Delta K_I$ [%] | 4,7            | 3,3   | 1,7   | -1,8  | -3,7  | -5,8  |
| 5 p                 | $K_I$            | 1.035          | 1.024 | 1.013 | 0.997 | 0.972 | 0.956 |
|                     | $\Delta K_I$ [%] | 3,5            | 2,4   | 1,3   | -1,3  | -2,8  | -4,4  |

Tab. 3.5b

| $v = 0.6 \cdot c_2$ |                  | $\Delta v$ [%] |       |       |       |       |       |
|---------------------|------------------|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                     |                  | -15            | -10   | -5    | 5     | 10    | 15    |
| 3 p                 | $K_I$            | 1.154          | 1.107 | 1.055 | 0.939 | 0.874 | 0.803 |
|                     | $\Delta K_I$ [%] | 15,4           | 10,7  | 5,5   | -6,1  | -12,6 | -19,7 |
| 5 p                 | $K_I$            | 1.111          | 1.075 | 1.042 | 0.952 | 0.898 | 0.836 |
|                     | $\Delta K_I$ [%] | 11,1           | 7,5   | 4,2   | -4,8  | -10,2 | -16,4 |

Tab. 3.5c

Tab. 3.5 - Vliv nepřesného určení rychlosti trhliny

Z uvedených výsledků vyplývá, že při výpočtu  $K$ -faktoru z obrazu dynamických izochromát je chyba  $K_I$  výrazně závislá na rychlosti šíření trhliny  $v$ . Celkově lze ale konstatovat, že pokud chyba  $v$  určení rychlosti nepřekročí 5 %, pak by ani u nejrychlejších trhlin neměla chyba  $v$  určení  $K$ -faktoru překročit 5 %. U trhlin s rychlosti  $v < 0.4 \cdot c_2$  je tato chyba menší než 1.5 %.

Srovnání výsledků tříparametrické metody s výsledky pětíparametrické metody vyznívá opět ve prospěch pětíparametrické metody.

### 3.1.3 Dílčí závěry

Z předchozí analýzy vlivu nepřesnosti vstupních údajů na výsledné hodnoty faktoru intenzity napětí plyne několik důležitých skutečností pro praktické určení této veličiny z obrazu izochromatických smyček :

- a) pětiparametrická metoda plně eliminuje chyby vyplývající z nepřesného určení polohy kořene trhliny;
- b) výrazně rychlostně závislá je chyba daná nepřesným určením rychlosti šíření kořene dynamické trhliny, zatímco chyby vzniklé nesprávným určením souřadnic bodů na izochromátách, příp. řádu izochromáty v těchto bodech jsou rychlostně prakticky nezávislé;
- c) procentuální velikost chyby v určení  $K_I$  se rovná procentuální nepřesnosti v určení řádu izochromáty  $N$  a poloviční procentuální nepřesnosti v určení poloměru bodu na izochromátě;
- d) nepřekročí-li nepřesnost některého ze vstupních údajů 5% bude výsledná hodnota  $K$ -faktoru určena se zaručenou přesností do 10%.

### 3.2 Vyhodnocení K-faktoru metodou kaustik

Složky napětí v okolí čela trhliny jsou popsány následujícími vztahy :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \left( 5 \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \\ \sigma_\varphi &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \left( 3 \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{3\varphi}{2} \right)\end{aligned}\quad (3.18)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \left( \sin \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{3\varphi}{2} \right)$$

kde  $K_I$  je faktor intenzity napětí tahového módu I.

#### 3.2.1 Zobrazovací rovnice

S tímto popisem napětového pole a s rovnicí (2.30) lze obdržet rovnice souřadnic bodů tvořících kaustiku ve tvaru [14]

$$\begin{aligned}x' &= r \cdot \cos \varphi - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \cdot z_0 \cdot c \cdot d_{eff} \cdot r^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos \frac{3\varphi}{2} \\ y' &= r \cdot \sin \varphi - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \cdot z_0 \cdot c \cdot d_{eff} \cdot r^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin \frac{3\varphi}{2}\end{aligned}\quad (3.19)$$

pro úhel  $\varphi$  v intervalu  $< -\pi, +\pi >$ .

Pro jednoduchost je zde uvažován pouze případ opticky izotropního materiálu ( $\lambda=0$ ).

Protože je kaustika singulárním řešením zobrazovacích rovnic, je nutnou a postačující podmínkou pro její existenci nulová hodnota Jakobiánu rovnic (2.15), (2.26) a (2.30) uvedených v kapitole 2.2, t.j.

$$\frac{\delta x'}{\delta r} \frac{\delta y'}{\delta \varphi} - \frac{\delta x'}{\delta \varphi} \frac{\delta y'}{\delta r} = 0 \quad (3.20)$$

Souřadnice  $r, \varphi$  bodů P, které vyhovují předchozí rovnici, tvoří tzv. iniciační křivku v rovině modelu. Zobrazením této iniciační křivky v obrazové rovině je kaustika.

### 3.2.2 Rovnice kaustiky

Dosažením rovnic souřadnic bodů tvořících kaustiku v případě napjatosti v okolí čela trhliny do této podmínky lze obdržet rovnicí iniciační křivky ve tvaru

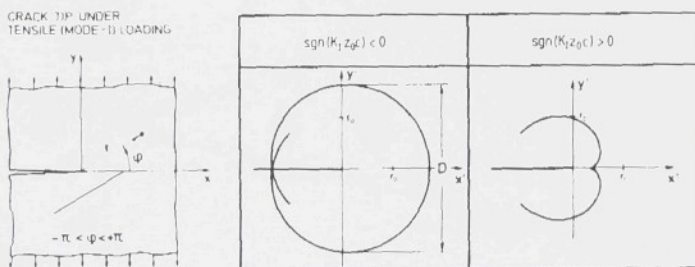
$$r = \left( \frac{3}{2} \frac{|K_I|}{\sqrt{2\pi}} \cdot |z_o| \cdot |c| \cdot d_{eff} \right)^{2/5} = r_o \quad (3.21)$$

Touto křivkou je kružnice kolem čela trhliny s poloměrem  $r_o$ . Kaustika je získána jako obraz iniciační křivky dané rovnicemi

$$x' = r_o \cdot \left( \cos \varphi - \operatorname{sgn}(K_I z_o c) \cdot \frac{2}{3} \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \quad (3.22)$$

$$y' = r_o \cdot \left( \sin \varphi - \operatorname{sgn}(K_I z_o c) \cdot \frac{2}{3} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \quad (3.23)$$

Rovnice kaustik se liší podle znaménka  $(K_I z_o c)$ . Z matematického hlediska jsou kaustiky obecné epicykloidy, které jsou pro různé zatěžovací podmínky, t.j.  $K_I > 0$  a  $K_I < 0$ , pro různá experimentální uspořádání, t.j. pro transmissi ( $c < 0$ ) a refleksi ( $c > 0$ ) a pro kladné, případně záporné referenční vzdálenosti  $z_o$ , zobrazené na následujícím obrázku 3.12.



Obr. 3.12 - Tvary kaustik pro různá experimentální uspořádání

Pro kvantitativní vyhodnocení obrazu kaustiky je definován délkový parametr mezi charakteristickými body na kaustické křivce, t.j. maximální průměr kaustiky ve směru kolmém na směr šíření trhliny, označený  $D$  (viz obr. 3.12). Mezi touto vzdáleností a poloměrem iniciační kružnice  $r_o$  platí následující vztah

$$D = 3.17 \cdot r_o \quad (3.24)$$

S použitím rovnic (3.21) a (3.24) lze obdržet výraz pro vyhodnocení K-faktoru z obrazu kaustiky ve tvaru

$$|K_I| = \frac{2 \cdot \sqrt{2\pi}}{3 \cdot (3.17)^{5/2} \cdot z_o \cdot c \cdot d_{eff}} \cdot D^{5/2} \quad (3.25)$$

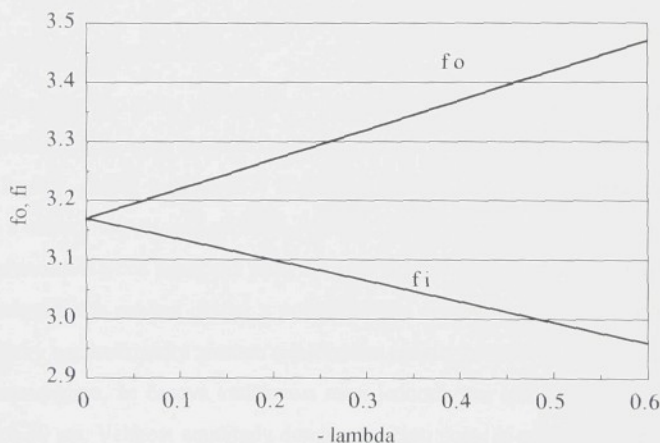
Pro opticky anizotropní materiály ( $\lambda \neq 0$ ) je analýza vzniku obrazu kaustiky složitější. V tomto případě dojde ke vzniku dvojice kaustik, z jejichž obrazů lze vyhodnotit K-faktor pomocí následující rovnice

$$K_I = \frac{2 \cdot \sqrt{2\pi}}{3 \cdot f_{o,i}^{5/2} \cdot |z_o| \cdot |c| \cdot d_{eff}} \cdot D_{o,i}^{5/2} \quad (3.26)$$

kde  $D_{o,i}$  je průměr vnější, resp. vnitřní kaustiky ,

$f_{o,i}$  je numerický faktor pro vyhodnocení vnější, resp. vnitřní kaustiky.

Závislost faktoru  $f_{o,i}$  na koeficientu anizotropie  $\lambda$  je zobrazena na následujícím grafu.



Obr. 3.13 - Závislost faktoru  $f_{o,i}$  na koeficientu anizotropie  $\lambda$

Poznamenejme, že koeficient anizotropie  $\lambda$  je závislý na stavu napjatosti. V případě rovinné deformace je  $|\lambda|$  větší než v případě rovinné napjatosti (viz tab. 2.3 v kapitole 2.2).

## 4. Provedené experimenty

### 4.1 Vyhodnocení experimentů provedených metodou dynamické fotoelasticimetrie

#### 4.1.1 Experimentální zařízení

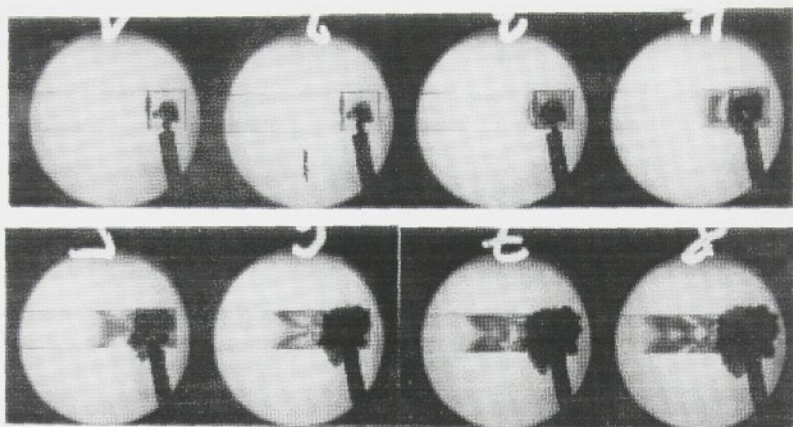
Použité experimentální zařízení vycházelo ze zařízení, které bylo v minulých letech vyvinuto v LEM [16]. Oproti zařízení popsanému ve zmíněné publikaci byl experiment doplněn o měření napětového pulsu v přenosové tyčce a ve zkušebním vzorku. Experimentální zařízení LEM užívané k výzkumu dynamiky lomu sestává ze tří částí.

- zařízení explozního drátku ;
- zařízení pro fotoelasticimetrický záznam pole napětí v okolí kořene trhliny ;
- zařízení pro tenzometrické měření napětového pulsu.

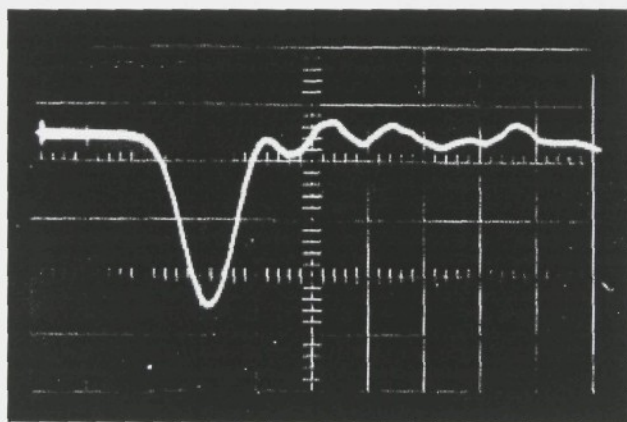
Přístupme nyní ke stručnému popisu výše zmíněných částí použitého experimentálního zařízení.

##### ♦ Zařízení explozního drátku.

K vyvolání napětového pulsu je v experimentálním zařízení užíváno silových projevů výbuchu tenkého drátku. Mžikovým vybitím kondenzátoru do tenkého drátku, umístěného v otvoru tvarovací kostky, drátek exploduje. V tvarovací kostce vzniká válcová tlaková vlna a jejím skládáním s odrazy od volných povrchů tvarovací kostky a počáteční části přenosové tyčky vzniká v přenosové tyčce napětový puls. Na obr. 4.1 je uvedena serie fotoelasticimetrických snímků zachycujících explozi drátku a počáteční část tvorby napětového pulsu v přenosové tyčce. Typický osciloskopický záznam napětového pulsu v přenosové tyčce je uveden na obr. 4.2 . Poznamenejme, že časová vzdálenost mezi jednotlivými snímky je cca 3.6 ms a délka pulsu je cca 30 ms. Velikost amplitudy dominantní části pulsu je v zařízení explozního drátku řízena velikostí nabíjecího napětí baterie kondenzátorů, která se vybíjí přes explozní drátek. V provedených experimentech bylo toto nabíjecí napětí konstantní a rovné 3.15 kV. Prostřednictvím optimalizace parametrů experimentálního uspořádání explozního drátku byla docílena velmi dobrá reprodukovatelnost jak velikosti, tak i trvání dominantní části pulsu. Podrobnosti o zmíněné optimalizaci lze nalézt v [22].



obr. 4.1 - Exploze drátku a počáteční část tvorby napěťového pulsu v přenosové tyčce



obr. 4.2 - Typický osciloskopický záznam napěťového pulsu v přenosové tyčce

- ♦ Zařízení pro fotoelasticimetrický záznam pole napětí v okolí kořene trhliny.

Zmíněné zařízení sestává z mechanické, optické a elektronické části. Základním prvkem *mechanické části* je jednoosý zatěžovací rám konstrukce LEM. Jako zdroj zatěžovací síly je

v rámu užit 70kN automobilový hydraulický zvedák. Velikost statického předpětí ve vzorku je snímána tenzometrickým dynamometrem, jehož měrný člen má tvar tenkostěnného válce. Měrným válcem dynamometru prochází nosný šroub horní čelisti. Matice, která je našroubována na nosný šroub, dosedá na vrchní rovinu dynamometru. Spodní plocha dynamometru se opírá o horní příčník pohyblivé části rámu.

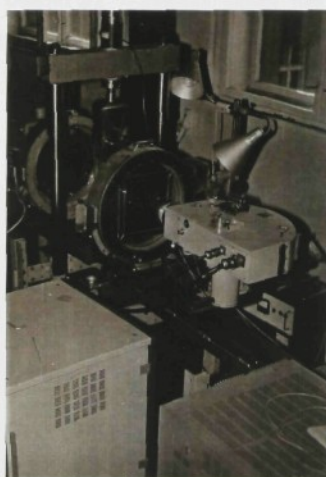
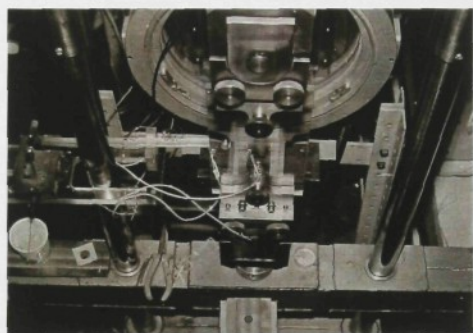
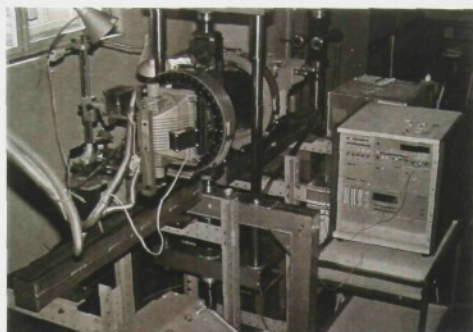
*Optická část* zařízení je tvořena rychlostní fotokamerou SFR2M, polariskopem a výbojkou XL 5000. Rychlostní fotokamera SFR2M je kamerou zrcátkového typu, která může pracovat jako časová lupa s následujícími daty :

- frekvence otáčení zrcátka je od 7 500 ot/min do 75 000 ot/min ;
- nastavení otáček zrcátka se děje porovnáním otáček s frekvencí krystalového oscilátoru, přesnost nastavení otáček je 0.1 % ;
- rozlišovací schopnost kamery není horší než 30 čar/mm ;
- fotozáznam kamery se skládá ze 30 dvojic snímků o  $\phi$  10 mm na 40 cm dlouhý kinofilm 36 mm ;
- doba expozice jednoho snímku je rovna přibližně 1/3 času mezi jednotlivými snímky.

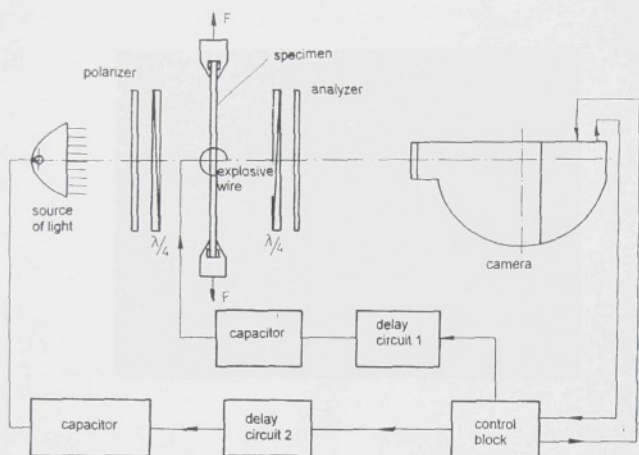
Optimální volba otáček zrcátka a zobrazovacího měřítka je dána předpokládanou rychlostí zobrazovaného děje při dané rozlišovací schopnosti kamery a použitého filmu.

Polariskop se skládá z polarizátoru, analyzátoru a čtvrtvlnných desek. Podle polohy natočení polarizátoru, analyzátoru a čtvrtvlnných desek obdržíme obraz izochromát celého nebo polovičního řádu. Celkový pohled na mechanickou a optickou část zařízení je na obr. 4.3.

*Elektronická část* zařízení sestává z ovládacího pultu rychlostní kamery a zpožďovacích obvodů. V bloku řídicího impulsu kamery je vytvářen impuls, který je užit jako synchronizační impuls zajišťující časovou synchronizaci celého experimentu. Od tohoto synchronizačního impulsu je přes impulzní zpožďovací obvody odvozeno spínání světelného záblesku, exploze drátku a spínání časových základů zařízení pro snímání mechanického pulsu v přenosové tyčce resp. v testovaném vzorku. Blokové uspořádání experimentálního zařízení je uvedeno na obr. 4.4.



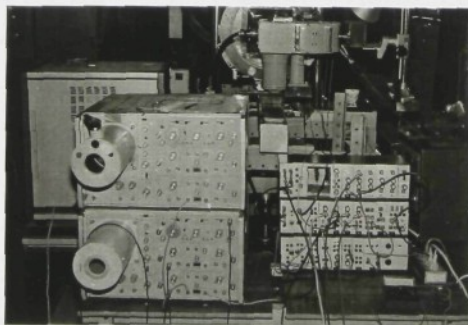
obr. 4.3 - Celkový pohled na mechanickou a optickou část zařízení



obr. 4.4 - Blokové schema experimentálního zařízení

♦ Zařízení pro tenzometrické měření napěťového pulsu.

V minulých letech bylo v LEM vyvinuto elektronické zařízení umožňující snímání napěťových pulsů prostřednictvím polovodičových tenzometrů délky cca 3 mm. Podrobný popis tohoto zařízení lze nalézt v [16]. Výstup ze zesilovače napětí byl původně přiveden na vstup paměťového osciloskopu C8-14 (obr.4.5). V současné době je používán analogo-digitální převodník spojený s počítačem typu PC (obr.4.6).



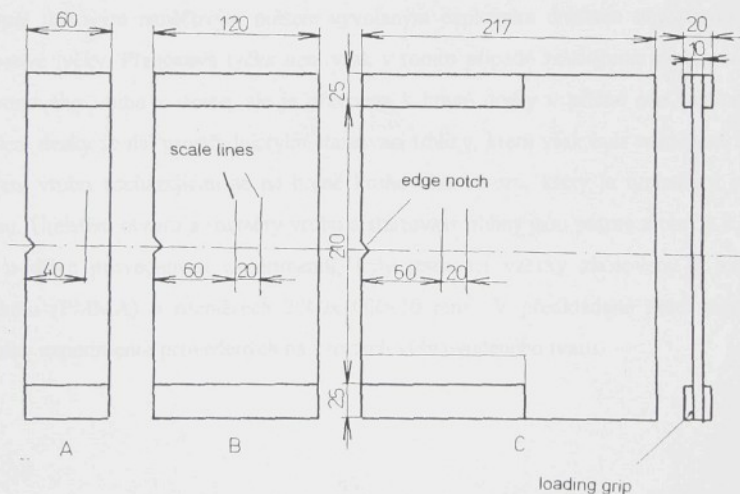
obr. 4.5 - paměťové osciloskopy C8-14



obr. 4.6 - A-D převodník spojený s počítačem typu PC

#### 4.1.2 Tvar zkušební vzorku.

V předchozích letech [16] byly v LEM KMP v rámci výzkumu dynamiky lomu testovány zkušební vzorky zhotovené z PMMA jejichž tvar je patrný z obr.4.7 .



obr. 4.7. - původní zkušební vzorky

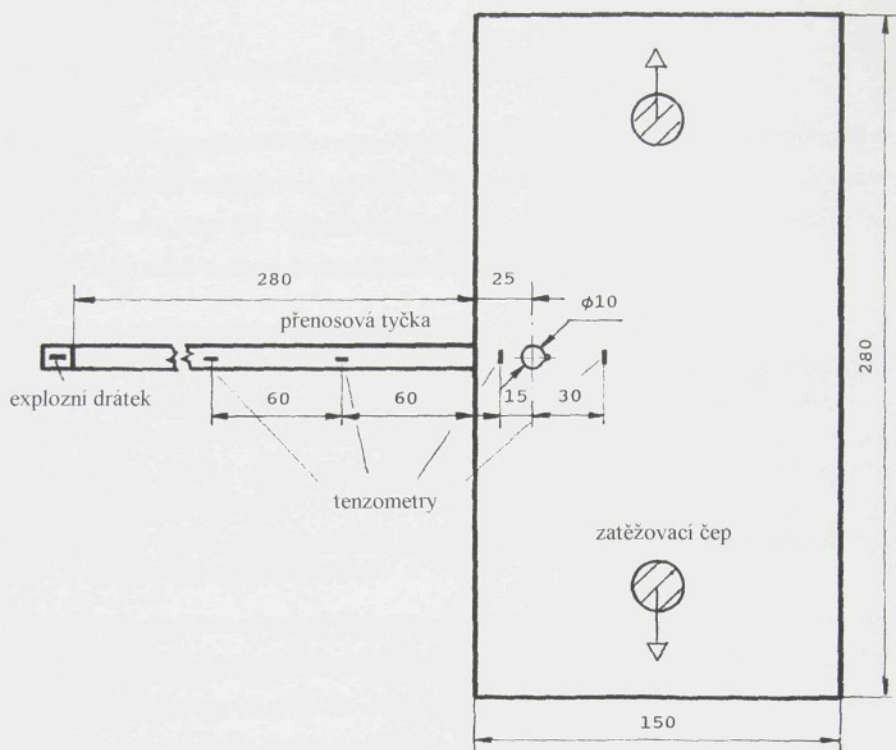
Základním nedostatkem tohoto tvaru zkušebního vzorku byla :

a) obtížná sledovatelnost a reprodukovatelnost rozběhové fáze šíření trhliny způsobená přenosem rozběhového pulsu prostřednictvím klínu přenosové tyčky zapadající do vrubu v hraně desky ;

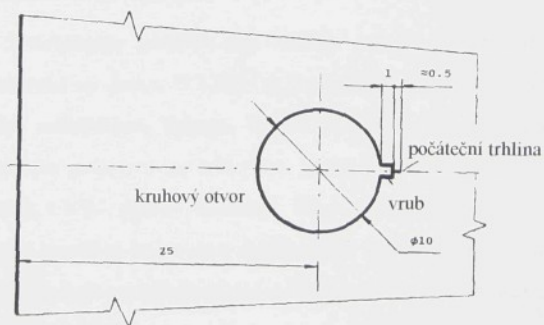
b) obtížná definovatelnost poklesu zátěžné síly v průběhu šíření trhliny deskou.

Z hlediska pouhého vyhodnocení obrazu izochromát v okolí kořene trhliny ve fázi ustáleného šíření tyto nedostatky zkušebního vzorku nebyly rozhodující. V případě modelování porušení zmíněného vzorku metodou konečných prvků se ukázalo, že tyto nedostatky jsou zásadní z hlediska okrajových a počátečních podmínek numerického experimentu. Vzhledem k tomu, že v LEM používané experimentální zařízení vychází z použití rychlostní kamery pracující v režimu, kdy sledovaný děj musí být spuštěn kamerou ve vhodném okamžiku, nelze užít ke startu trhliny režim postupného zvyšování zatížení zkušebního vzorku. Z těchto důvodů byl tedy navržen tvar zkušebního vzorku, který je uveden na obr. 4.8 .

V tomto případě bylo počáteční zatížení přenášeno do desky prostřednictvím zatěžovacích čepů umístěných v otvorech nacházejících se na podélné ose vzorku. Otvory v desce byly vyrobeny tak, aby zatěžovací čepy byly suvně uloženy v otvorech. Rozběh startovací trhliny se dál opět tlakovým napětiovým pulsem vyvolaným explozním drátkem umístěným na konci přenosové tyčky. Přenosová tyčka není však v tomto případě zakončena klínem zapadajícím do hranového vrubu v desce, ale je přilepena k hraně desky v příčné ose vzorku. Rozběh porušení desky se dál prostřednictvím startovací trhliny, která však byla náklepem zhotovena v kořeni vrubu nacházejícím se na hraně kruhového otvoru, který je umístěn v příčné ose vzorku. Umístění otvoru a rozměry vrubu a startovací trhliny jsou patrné z obr. 4.8. Obdobně jako u dříve provedených experimentů, byly testovací vzorky zhotoveny z jedné desky Akrylonu (PMMA) o rozměrech 2000x1000x10 mm<sup>3</sup>. V předkládané práci jsou uvedeny výsledky experimentů provedených na vzorcích výše uvedeného tvaru.



a) přenosová tyčka se vzorkem



b) detail kruhového otvoru s vrubem a počáteční trhlinou

Obr.4.8 - nový tvar zkušební vzorku

#### 4.1.3 Vyhodnocení fotoelasticimetrických záznamů

Prostřednictvím experimentálního zařízení bylo sledováno porušení 17-ti desek zhotovených z Akrylonu (PMMA) majících tvar, který byl uveden na obr 4.8. Zatížení testovaných desek bylo v rozmezí 0,7-0,9 kN. Typický fotozáznam porušení desky (deska G14) je uveden na obr. 4.9, kde časová vzdálenost mezi jednotlivými snímky je 16,6  $\mu$ s.

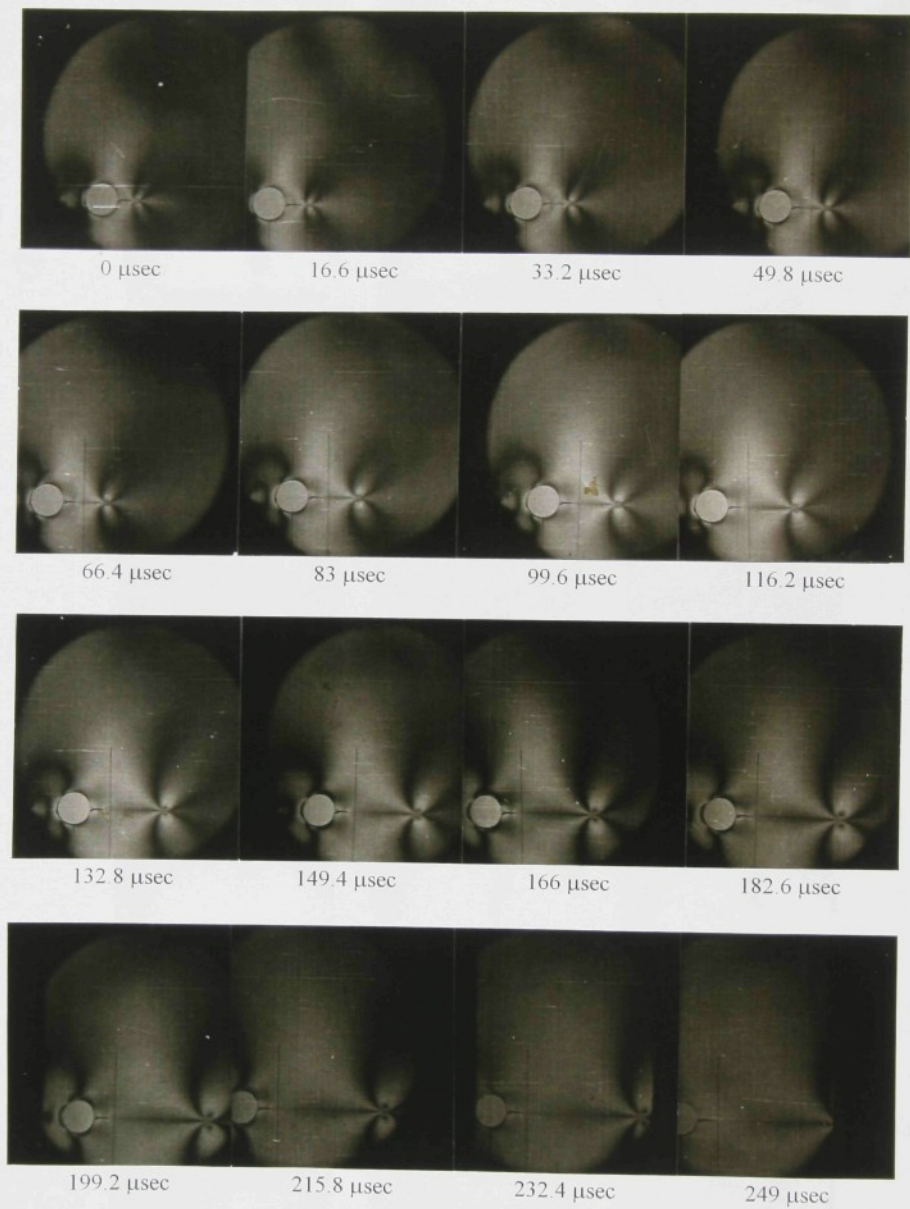
Děj porušení testované desky lze rozdělit do 3 fází.

- V 1. fázi dochází k interakci stacionární trhliny ve staticky předepjaté desce s vybuzeným napětovým pulsem. Na obr 4.10 je uveden fotozáznam zmíněné interakce. Časová vzdálenost mezi jednotlivými snímky je 3,7  $\mu$ s.
- Ve 2. fázi se trhlina šíří přibližně ustálenou rychlostí. Této fázi šíření byla věnována pozornost.
- Ve 3. fázi se trhlina zpomaluje resp. zastavuje. Tuto fázi porušení použitý typ vzorku neumožňuje sledovat.

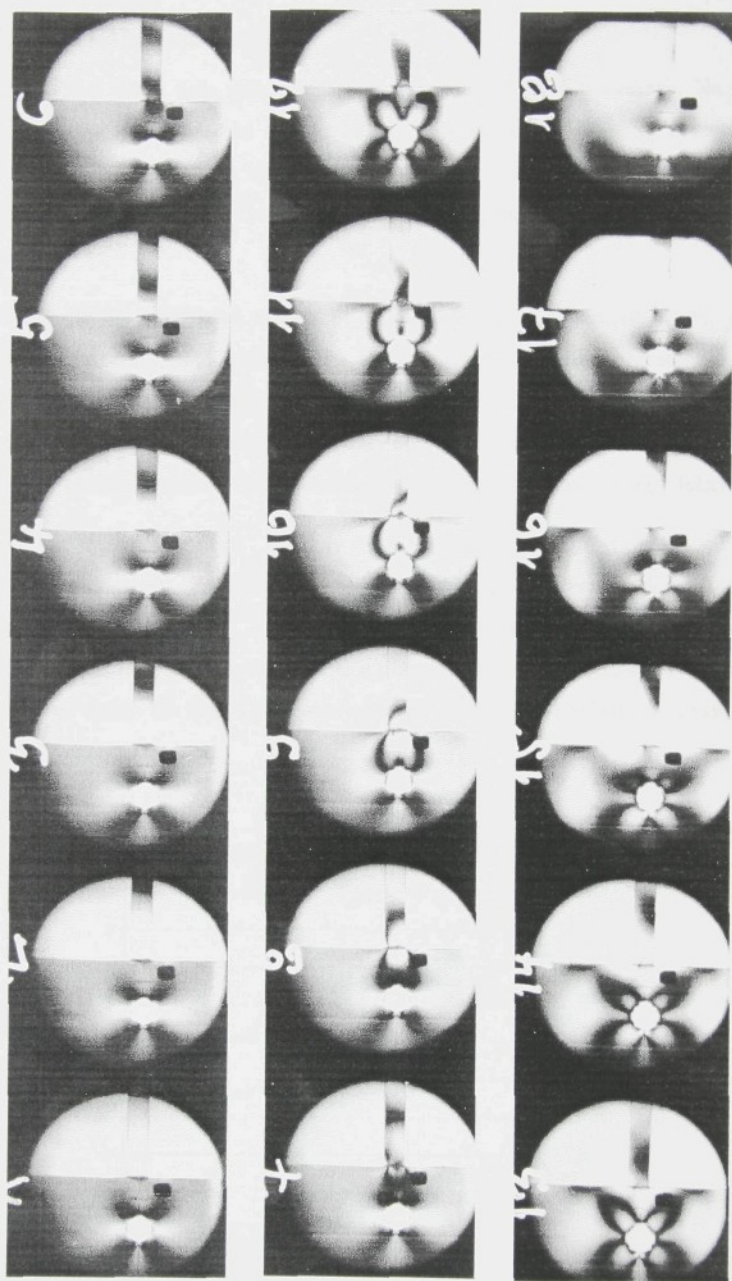
Z fotozáznamu porušení testované desky lze vyhodnotit jednak závislost délky trhliny na čase a jednak zobrazené pole napjatosti v okolí kořene trhliny prostřednictvím pole izochromát. Ze závislosti délky trhliny na čase lze určit rychlost šíření trhliny. Z pole izochromát pak prostřednictvím vhodného popisu napjatosti v okolí kořene rychlé trhliny lze určit lomové parametry jako je faktor intenzity napětí. Přistupme nyní k podrobnějšímu popisu výše zmíněných vyhodnocení fotozáznamu porušení.

##### ♦ Vyhodnocení rychlosti šíření trhliny.

Z každého snímku fotozáznamu porušení lze odečíst polohu kořene trhliny vzhledem k referenční rýse zhotovené na desce. V LEM je k odečítání délky trhliny užíváno zařízení sestávající z optického mikroskopu Meopta DP714SR. Uvedený mikroskop je vybaven stolem s mikrometrickým posuvem se setimovou stupnicí. Stolek je doplněn odražečem laserového měřiče délek L1000 (Metra Blansko). Přesnost odečítání délek na upraveném optickém mikroskopu se použitím laserového měřiče délek zvýšila na hodnotu  $\pm 0,0005$  mm. Změřenými délkami trhliny byla proložena regresní křivka. Derivací této regresní křivky byla pak určena okamžitá rychlost trhliny.



Obr. 4.9 - typický fotozáznam porušení desky (G14)



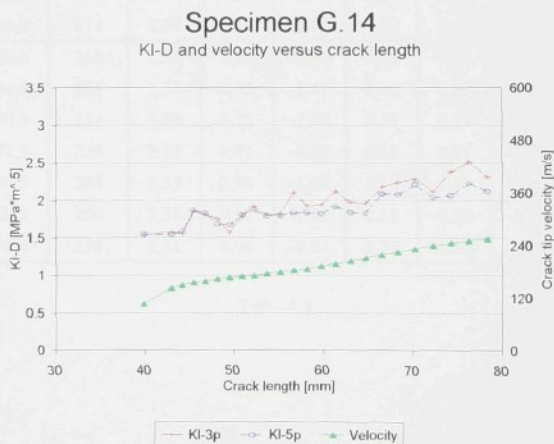
Obr. 4.10 - interakce stacionární trhliny s napěťovým pulsem.

♦ Vyhodnocení pole izochromát.

Z testovaných 17-ti desek bylo pole izochromát vyhodnoceno na 6-ti deskách. Na těchto deskách byla zachycena fáze šíření trhliny. Nebyly tedy vyhodnoceny desky u nichž byla zachycena fáze iniciace a rozběhu trhliny. Obraz izochromát na snímcích zachycujících fázi šíření trhliny byl vyhodnocen 3 a 5-ti parametrickou přeuročnou metodou popsanou v kapitole 3.1.

Základem této metody umožňující vyhodnotit z pole izochromát parametry  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $\sigma_{ox}$  je tříparametrická přeuročná metoda Sanforda a Dallyho. Třemi počítanými parametry v této metodě jsou faktor intenzity napětí I.módu  $K_I$ , II.módu  $K_{II}$  a nesingulární člen  $\sigma_{ox}$ . V pětparametrické metodě jsou dalšími parametry souřadnice kořene trhliny ( $x_0$ ,  $y_0$ ), který je počátkem souřadného systému pro odečítání polárních souřadnic bodů ležících na izochromátě.

Jako příklad vyhodnocení fotozáznamu porušení desky je uvedena deska G14, jejíž fotozáznam byl uveden na obr. 4.9. V tab. 4.1 jsou souhrnně uvedeny vyhodnocené veličiny v závislosti jak na čase, tak i na vyhodnocené délce trhliny. Poznamenejme, že délka trhliny byla vztažena k hraně desky. Na obr. 4.11 jsou vyneseny vyhodnocené veličiny v závislosti na délce trhliny.



obr. 4.11 Závislost K-faktoru na délce trhliny

Vzorek G14

| Čas<br>[μs] | Číslo<br>snímku | Délka<br>trhliny<br>[mm] | Rychlost<br>v<br>[m/s] | K <sub>I</sub> -3p | K <sub>II</sub> -3p | σ <sub>ox</sub> -3p | K <sub>I</sub> -5p | K <sub>II</sub> -5p | σ <sub>ox</sub> -5p | x <sub>0</sub><br>[mm] | y <sub>0</sub><br>[mm] |
|-------------|-----------------|--------------------------|------------------------|--------------------|---------------------|---------------------|--------------------|---------------------|---------------------|------------------------|------------------------|
| 0           | 1               | 39                       | 89                     | 0,09               | 1,07                | -1,33               | -                  | -                   | -                   | -                      | -                      |
| 8,3         | 2               | 39,9                     | 107                    | 1,54               | -0,01               | -0,41               | 1,54               | -0,01               | -0,37               | 0,01                   | 0,01                   |
| 16,6        | 3               | 40,8                     | 121                    | -0,03              | 1,11                | 0,17                | -0,03              | 1,12                | -0,66               | -0,05                  | -0,05                  |
| 24,9        | 4               | 41,9                     | 133                    | 0,07               | 1,16                | -0,65               | 0,03               | 1,17                | 0,69                | -0,04                  | 0,09                   |
| 33,2        | 5               | 43                       | 142                    | 1,57               | -0,03               | -0,55               | 1,54               | -0,02               | -1,09               | -0,05                  | 0,06                   |
| 41,5        | 6               | 44,2                     | 149                    | 1,55               | 0                   | -1,38               | 1,59               | -0,01               | -0,93               | 0                      | 0,08                   |
| 49,8        | 7               | 45,5                     | 155                    | 1,85               | -0,08               | -1,67               | 1,86               | -0,08               | -1,49               | 0,01                   | -0,03                  |
| 58,1        | 8               | 46,8                     | 159                    | 1,81               | -0,01               | -0,87               | 1,82               | -0,02               | -0,62               | 0,05                   | 0,07                   |
| 66,4        | 9               | 48,1                     | 163                    | 1,75               | 0                   | -0,25               | 1,68               | 0,01                | -1,37               | -0,1                   | 0                      |
| 74,7        | 10              | 49,5                     | 166                    | 1,56               | -0,02               | -3,32               | 1,67               | 0                   | -1,58               | 0,1                    | -0,04                  |
| 83          | 11              | 50,9                     | 169                    | 1,8                | 0,03                | -0,87               | 1,8                | 0,03                | -0,87               | -0,01                  | -0,04                  |
| 91,3        | 12              | 52,3                     | 172                    | 1,91               | -0,03               | -1,04               | 1,87               | -0,04               | -1,66               | -0,08                  | -0,06                  |
| 99,6        | 13              | 53,7                     | 175                    | 1,8                | -0,01               | -1,94               | 1,79               | -0,01               | -2,08               | -0,02                  | -0,03                  |
| 107,9       | 14              | 55,2                     | 179                    | 1,8                | -0,02               | -2,53               | 1,79               | -0,02               | -2,74               | -0,02                  | 0,04                   |
| 116,2       | 15              | 56,7                     | 183                    | 2,1                | 0,08                | 1,36                | 1,83               | 0,08                | -3,31               | -0,27                  | -0,01                  |
| 124,5       | 16              | 58,2                     | 187                    | 1,92               | 0,02                | -1,78               | 1,83               | 0,02                | -3,04               | -0,08                  | 0,03                   |
| 132,8       | 17              | 59,8                     | 192                    | 1,93               | 0,04                | -1,96               | 1,81               | 0,06                | -3,71               | -0,12                  | -0,03                  |
| 141,1       | 18              | 61,4                     | 198                    | 2,12               | -0,05               | -0,14               | 1,91               | -0,04               | -3,32               | -0,18                  | -0,01                  |
| 149,4       | 19              | 63,1                     | 204                    | 1,97               | -0,04               | -1,38               | 1,83               | -0,05               | -3,31               | -0,11                  | 0,05                   |
| 157,7       | 20              | 64,8                     | 211                    | 1,96               | 0                   | -1,43               | 1,82               | 0,03                | -3,37               | -0,13                  | 0,11                   |
| 166         | 21              | 66,6                     | 218                    | 2,18               | 0,02                | -0,88               | 2,08               | 0,03                | -2,13               | -0,08                  | 0,05                   |
| 174,3       | 22              | 68,4                     | 225                    | 2,24               | 0,05                | -1,41               | 2,08               | 0,09                | -3,62               | -0,23                  | -0,27                  |
| 182,6       | 23              | 70,3                     | 232                    | 2,29               | 0,15                | -2,89               | 2,21               | 0,14                | -3,96               | -0,07                  | -0,19                  |
| 190,9       | 24              | 72,3                     | 239                    | 2,12               | 0,01                | -4,58               | 2,03               | 0,01                | -5,39               | -0,05                  | -0,02                  |
| 199,2       | 25              | 74,3                     | 245                    | 2,39               | 0,03                | -1,62               | 2,06               | 0,01                | -5,42               | -0,21                  | -0,08                  |
| 207,5       | 26              | 76,3                     | 250                    | 2,51               | 0,07                | -1,48               | 2,23               | 0,09                | -4,36               | -0,25                  | 0,01                   |
| 215,8       | 27              | 78,4                     | 254                    | 2,31               | 0,04                | -2,57               | 2,12               | -0,02               | -4,79               | -0,19                  | 0,14                   |

Tab. 4.1

#### 4.1.4 Vyhodnocená závislost $K_{ID}$ - $v$ pro Akrylon z obrazů izochromát.

Ze všech vyhodnocených fotozáznamů porušení desek byla sestavena závislost faktoru intenzity napětí  $K_I^d(t)$  na rychlosti trhliny  $v$ . Uvážíme-li platnost podmínky (1.1) resp. (1.2) uvedených v kapitole 1, je možné stanovit závislost lomové houževnatosti  $K_{ID}$  na rychlosti šíření trhliny. V tab 4.2 jsou uvedeny vyhodnocené hodnoty faktoru intenzity napětí jak 3 tak i 5-ti parametrickou metodou pro interval rychlostí od 20 m/s do cca 400 m/s. Graficky jsou tyto závislosti uvedeny zvlášť pro 3.p metodu (obr. 4.12) a 5.p metodu (obr. 4.13). Pro obě metody jsou pak hodnoty  $K_{ID}$  uvedeny na obr 4.14.

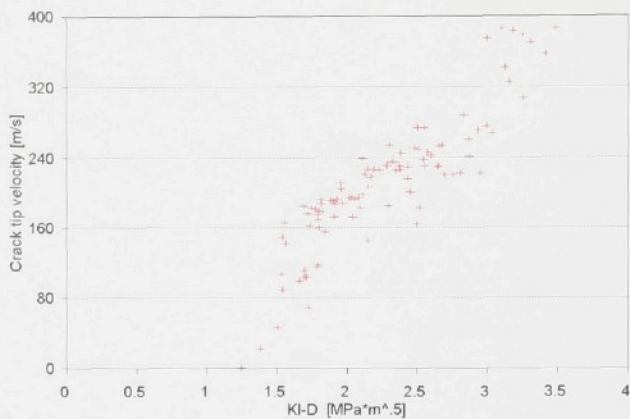
| Tab. 4.2 | 3.p metoda | 5.p metoda | 3.p metoda | 5.p metoda | 3.p metoda | 5.p metoda |
|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 20       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       |
| 50       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       |
| 100      | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       |
| 150      | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       |
| 200      | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       |
| 250      | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       |
| 300      | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       |
| 350      | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       |
| 400      | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       | 1.45       |

Tab. 4.2 Vyhodnocené hodnoty  $K_{ID}$  z izochromát

| Velocity<br>[m/s] | KI-3p<br>[MPa.m <sup>0.5</sup> ] | KI-5p<br>[MPa.m <sup>0.5</sup> ] | Velocity<br>[m/s] | KI-3p<br>[MPa.m <sup>0.5</sup> ] | KI-5p<br>[MPa.m <sup>0.5</sup> ] | Velocity<br>[m/s] | KI-3p<br>[MPa.m <sup>0.5</sup> ] | KI-5p<br>[MPa.m <sup>0.5</sup> ] |
|-------------------|----------------------------------|----------------------------------|-------------------|----------------------------------|----------------------------------|-------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1                 | 1,25                             | -                                | 187               | 1,82                             | 1,8                              | 231               | 2,38                             | 2,39                             |
| 22                | 1,39                             | -                                | 187               | 1,92                             | 1,83                             | 232               | 2,29                             | 2,21                             |
| 46                | 1,51                             | -                                | 188               | 1,98                             | 1,85                             | 235               | 2,33                             | 2,32                             |
| 69                | 1,73                             | 1,66                             | 190               | 1,91                             | 1,83                             | 238               | 2,55                             | 2,56                             |
| 89                | 1,55                             | 1,58                             | 191               | 1,89                             | 1,85                             | 239               | 2,12                             | 2,03                             |
| 99                | 1,67                             | 1,64                             | 192               | 1,82                             | 1,86                             | 241               | 2,88                             | 2,66                             |
| 104               | 1,72                             | 1,75                             | 192               | 1,93                             | 1,81                             | 242               | 2,6                              | 2,48                             |
| 104               | 1,7                              | 1,71                             | 193               | 2,05                             | 1,97                             | 245               | 2,39                             | 2,06                             |
| 107               | 1,54                             | 1,54                             | 194               | 2,02                             | 1,99                             | 246               | 2,58                             | 2,35                             |
| 111               | 1,7                              | 1,62                             | 194               | 2,08                             | 2,08                             | 250               | 2,51                             | 2,23                             |
| 115               | 1,79                             | 1,63                             | 195               | 2,04                             | 1,97                             | 251               | 2,48                             | 2,43                             |
| 117               | 1,8                              | 1,57                             | 198               | 2,12                             | 1,91                             | 252               | 2,66                             | 2,48                             |
| 142               | 1,57                             | 1,54                             | 201               | 2,46                             | 2,27                             | 254               | 2,31                             | 2,12                             |
| 145               | 2,16                             | 2,18                             | 204               | 1,97                             | 1,83                             | 254               | 2,68                             | 2,59                             |
| 149               | 1,55                             | 1,59                             | 207               | 2,15                             | 2,19                             | 260               | 2,87                             | 2,52                             |
| 155               | 1,85                             | 1,86                             | 211               | 1,96                             | 1,82                             | 267               | 3,04                             | 3,02                             |
| 159               | 1,81                             | 1,82                             | 216               | 2,44                             | 2,23                             | 271               | 2,94                             | 2,76                             |
| 163               | 1,75                             | 1,68                             | 218               | 2,18                             | 2,08                             | 274               | 2,56                             | 2,56                             |
| 164               | 2,5                              | 2,34                             | 220               | 2,7                              | 2,58                             | 274               | 2,51                             | 2,54                             |
| 166               | 1,56                             | 1,67                             | 220               | 2,76                             | 2,59                             | 275               | 3                                | 2,71                             |
| 169               | 1,8                              | 1,8                              | 221               | 2,13                             | 2,21                             | 288               | 2,84                             | 2,64                             |
| 172               | 2,05                             | 1,93                             | 222               | 2,96                             | 2,83                             | 307               | 3,26                             | 3,01                             |
| 172               | 1,91                             | 1,87                             | 222               | 2,82                             | 2,8                              | 325               | 3,16                             | 2,95                             |
| 175               | 1,8                              | 1,79                             | 225               | 2,35                             | 2,41                             | 342               | 3,13                             | 3,05                             |
| 176               | 1,73                             | 1,6                              | 225               | 2,24                             | 2,08                             | 357               | 3,42                             | 3,14                             |
| 178               | 1,83                             | 1,82                             | 226               | 2,2                              | 2,35                             | 370               | 3,31                             | 3,15                             |
| 179               | 1,8                              | 1,79                             | 226               | 2,38                             | 2,25                             | 374               | 3                                | 3,02                             |
| 181               | 1,78                             | 1,67                             | 227               | 2,15                             | 2,08                             | 379               | 3,26                             | 3,07                             |
| 183               | 2,53                             | 2,23                             | 229               | 2,65                             | 2,5                              | 383               | 3,19                             | 3,05                             |
| 183               | 2,1                              | 1,83                             | 229               | 2,44                             | 2,18                             | 385               | 3,11                             | 3,15                             |
| 183               | 1,75                             | 1,73                             | 230               | 2,29                             | 2,24                             | 386               | 3,49                             | 3,4                              |
| 185               | 1,7                              | 1,65                             | 230               | 2,66                             | 2,42                             |                   |                                  |                                  |
| 185               | 2,3                              | 2,26                             | 231               | 2,56                             | 2,45                             |                   |                                  |                                  |

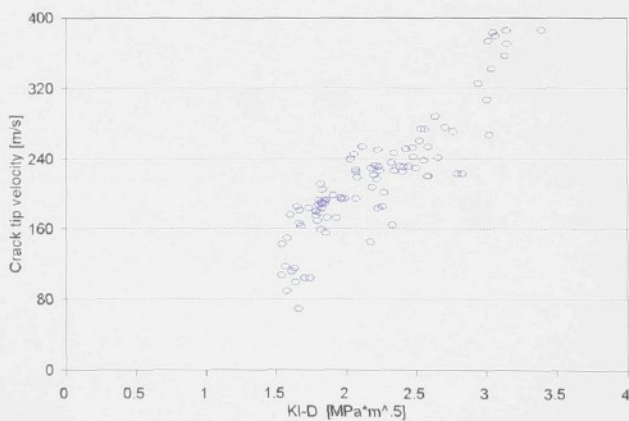
Tab. 4.2 - Vyhodnocené hodnoty faktoru intenzity napětí ze všech experimentů

KI-D versus crack tip velocity - 3p



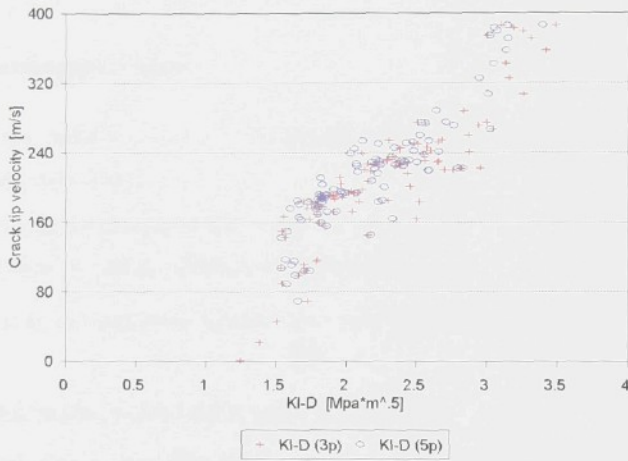
Obr. 4.12

KI-D versus crack tip velocity - 5p



Obr. 4.13

KI-D versus crack tip velocity



Obr. 4.14

## 4.2 Vyhodnocení experimentů provedených metodou kaustik.

### 4.2.1 Experimentální zařízení

Experimentální zařízení užívané k výzkumu dynamiky lomu v laboratoři Prof. Kalthoffa sestává z následujících částí.

- zařízení pro záznam kaustik v okolí kořene trhliny ;
- zařízení pro měření zatěžující síly statického předpětí.

Přistupme nyní ke stručnému popisu výše zmíněných částí použitého experimentálního zařízení.

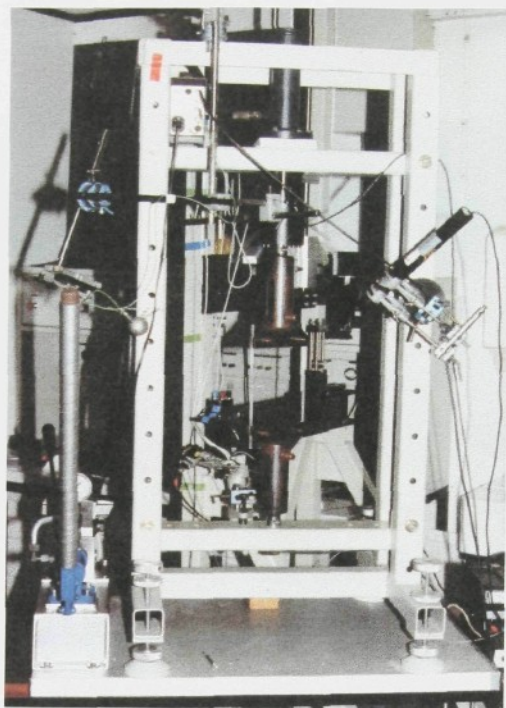
#### ♦ Zařízení pro záznam kaustik v okolí kořene trhliny.

Toto zařízení sestává opět z mechanické , optické a elektronické části. Základním prvkem *mechanické části* je jednoosý programovatelný zatěžovací rám INSTRON, případně jednodušší rám vlastní konstrukce, kde je jako zdroj zatěžovací síly v rámu užit manuálně ovládaný hydraulický systém (obr. 4.15). Velikost statického předpětí ve vzorku je snímána tenzometrickým dynamometrem.

*Optická část* zařízení je tvořena Cranz-Schardinovou rychlostní fotokamerou a přesným konkávním zrcadlem. Nejčastěji používaným je právě experimentální uspořádání s konvergentním svazkem paprsků, které vyžaduje pouze jednu konkávní čočku, případně konkávní zrcadlo. Toto uspořádání umožňuje zachycení největší oblasti v okolí trhliny. V případě experimentů provedených v laboratoři prof. Kalthoffa bylo z prostorových důvodů použito uspořádání s konkávním zrcadlem. Toto přesné zrcadlo mělo průměr 30 cm a ohniskovou vzdálenost 2.5 m. Zdrojem světla u Cranz-Schardinovy kamery je soustava 24 jiskřišť, zobrazená na obr. 4.16. Světlo z každého tohoto zdroje je zaostřeno do jednoho ze 24 objektivů speciální kamery (viz obr. 4.17) umožňující záznam 24 obrazů kaustik. Celkový pohled na optickou část zařízení je na obr. 4.18.

*Elektronická část* zařízení sestává z ovládacího pultu rychlostní kamery (viz obr. 4.16 dole) , kterým je řízena časová synchronizace spouštění jednotlivých jiskřišťových zdrojů světla .

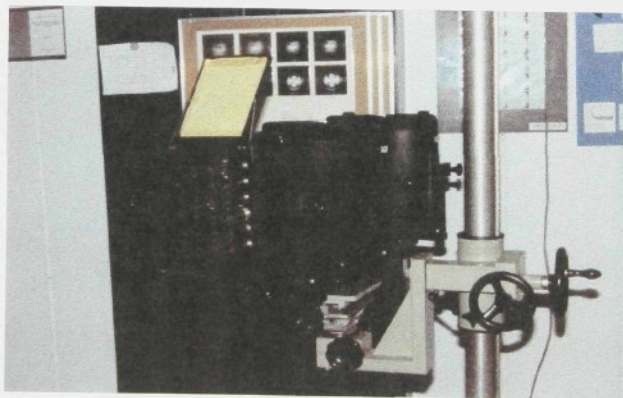
Uspořádání optické části experimentálního zařízení je uvedeno na obr. 4.20.



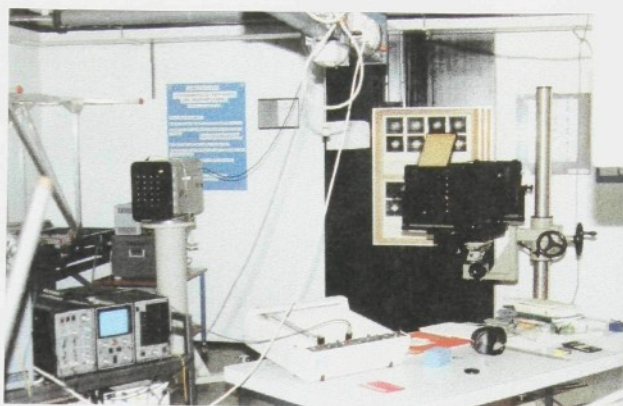
Obr. 4.15 - Zatěžovací rám se vzorkem upnutým v čelistech.



Obr. 4.16 - Zdroj světla



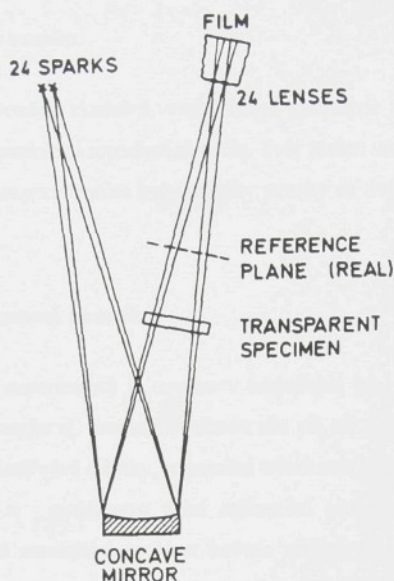
Obr. 4.17 - Kamera se 24 objektivy



Obr. 4.18 - Celkový pohled na optickou část



Obr. 4.19 - Paměťový osciloskop Nicolett s příslušnými zesilovači



Obr. 4.20 - Uspořádání optické části experimentálního zařízení

♦ Zařízení pro měření zatěžující síly statického předpětí

K měření statického předpětí byl použit tenzometrický dynamometr. Signál z tohoto dynamometru byl po příslušném zesílení přiveden jednak na souřadnicový zapisovač (viz obr.4.18), jednak do digitálního paměťového osciloskopu Nicolett (obr. 4.19). Záznam v tomto digitálním osciloskopu byl spuštěn současně se zdrojem světla v okamžiku, kdy došlo při pozvolném zvyšování statického předpětí k rozběhu trhliny. Toho bylo dosaženo tím, že před koncem iniciační trhliny procházel vzorkem laserový paprsek dopadající na fotočidlo na druhé straně vzorku. Při rozběhu trhliny byl tento paprsek odražen novým povrchem pohybující se trhlínou a přerušen signál z fotočidla. V paměťovém osciloskopu byl poté zaznamenán pokles zátěžné síly během růstu trhliny.

#### 4.2.2 Tvar zkušební vzorku.

Při experimentech byly použity zkušební vzorky stejné geometrie jako v případě experimentů provedených metodou dynamické fotoelasticimetrie. Tvar těchto vzorků je uveden v předchozí kapitole na obr. 4.8. K experimentům byly použity vzorky se dvěma tloušťkami, t.j. 5 a 10 mm.

#### 4.2.3 Vyhodnocení záznamů kaustik

Přehled vyhodnocených experimentů je uveden v následující tab. 4.3. V tabulce je uvedeno číslo vzorku, tloušťka vzorku  $d$ , maximální tahová síla při níž došlo k rozběhu trhliny  $F_{max}$ , časový interval mezi jednotlivými snímky, referenční vzdálenost (zkušební vzorek - referenční (zobrazovací) rovina)  $z_0$ , vzdálenost mezi referenční (zobrazovací) rovinou a rovinou objektivu kamery  $z_2$  a maximální rychlost kořene trhliny  $v_{max}$  vyhodnocená ze záznamu kaustik. Z 19 provedených experimentů bylo získáno 11 záznamů kaustik z okolí kořene dynamické trhliny a 2 záznamy kaustik v okolí stojící trhliny.

| Vzorek<br>č. | $d$<br>[mm] | $F_{max}$<br>[kN] | čas. krok<br>[μsec] | $z_0$<br>[m] | $z_2$<br>[m] | $v_{max}$<br>[m/sec] |
|--------------|-------------|-------------------|---------------------|--------------|--------------|----------------------|
| 1            | 5,1         | 5,7               | 80                  | 1,37         | 2,05         | 319                  |
| 4            | 5           | 5                 | 20                  | 1,37         | 2,05         | 296                  |
| 8            | 5,2         | 7,8               | 20                  | 1,37         | 2,05         | 474                  |
| 9            | 4,9         | 7,9               | 20                  | 1,37         | 2,05         | 564                  |
| 11           | 4,8         | 4,66              | 20                  | 1,37         | 2            | 391                  |
| 12           | 4,9         | 4,9               | 20                  | 1,37         | 2            | 358                  |
| 14           | 9,7         | 9,22              | 16                  | 1,35         | 2,02         | 326                  |
| 15           | 9,7         | 10,6              | 16                  | 1,35         | 2,02         | 412                  |
| 17           | 10,1        | 13,3              | 16                  | 1,35         | 2,02         | 503                  |
| 18           | 10,3        | 11,8              | 16                  | 1,35         | 2,02         | 411                  |
| 19           | 9,5         | 11,8              | 10                  | 1,35         | 2,02         | 474                  |

Tab. 4.3

Výpočet K-faktoru byl proveden dle následující rovnice (4.1).

$$K_I = \frac{1}{m^2} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}{3 \cdot (3.17)^{\frac{5}{2}} \cdot |z_o| \cdot |c| \cdot d} \cdot D^{\frac{5}{2}} \quad (4.1)$$

Jednotlivé veličiny v této rovnici jsou určeny následujícími vztahy :

$$D = m \cdot m_{neg} \cdot D_{neg} \quad (4.2)$$

$$m = \frac{z_2}{z_2 + |z_o|} \quad (4.3)$$

$$m_{neg} = \frac{L_{vz}}{L_{neg}} \quad (4.4)$$

Zde je

$K_I$  ... Faktor intenzity napětí módu I,

$D$  ... průměr kaustiky,

$D_{neg}$  ... průměr kaustiky na negativu,

$l_{vz}$  ... délka měřítka na zkušebním vzorku,

$l_{neg}$  ... délka měřítka na negativu,

$z_o$  ... referenční vzdálenost ( zkušební vzorek - referenční (zobrazovací) rovina ) ,

$z_2$  ... vzdálenost mezi referenční (zobrazovací) rovinou a rovinou objektivu kamery,

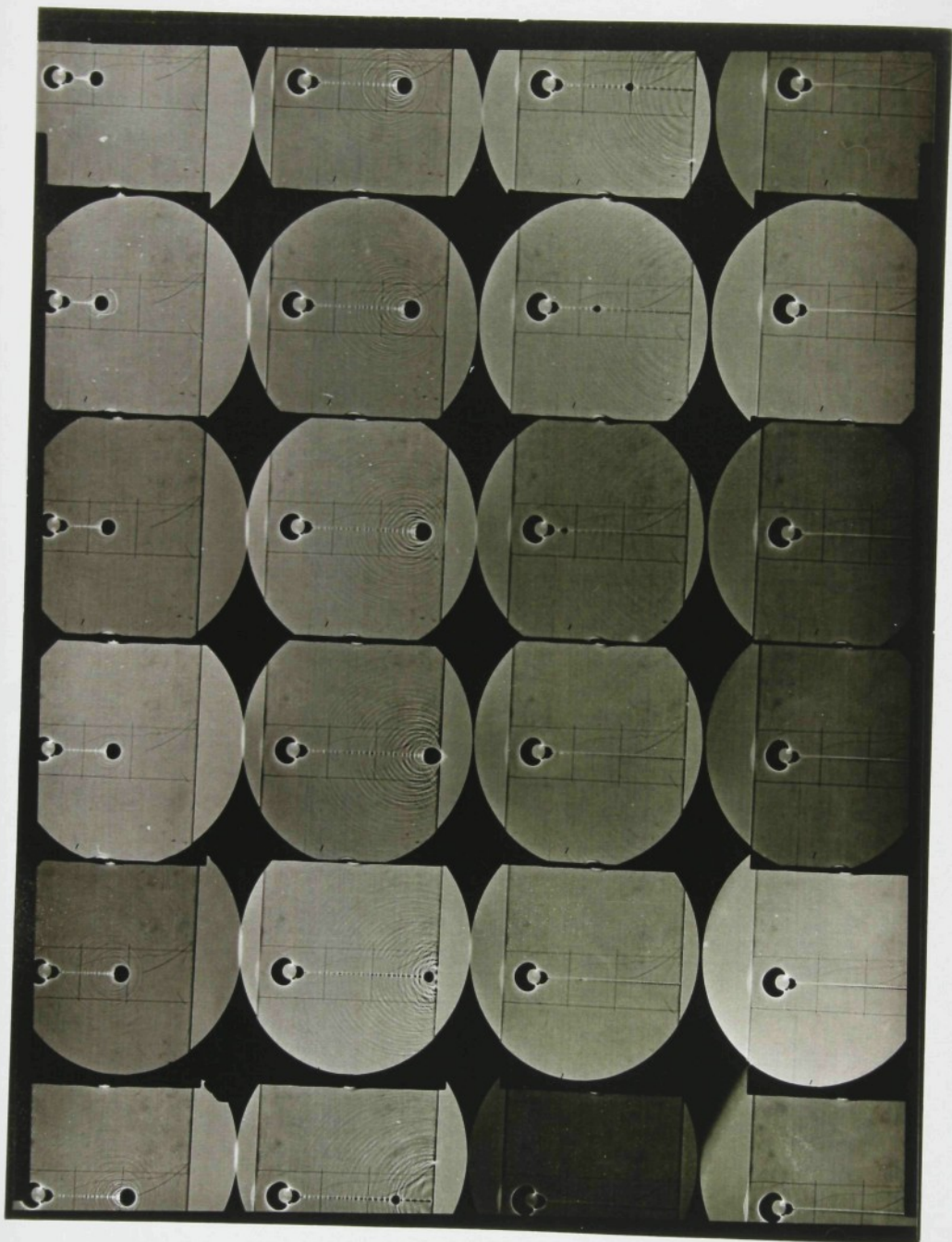
$d$  ... tloušťka vzorku,

$c$  ... elastooptická konstanta - pro PMMA vzorky :  $c = -9.17 \cdot 10^{-11} \text{ [m}^2/\text{N]}$

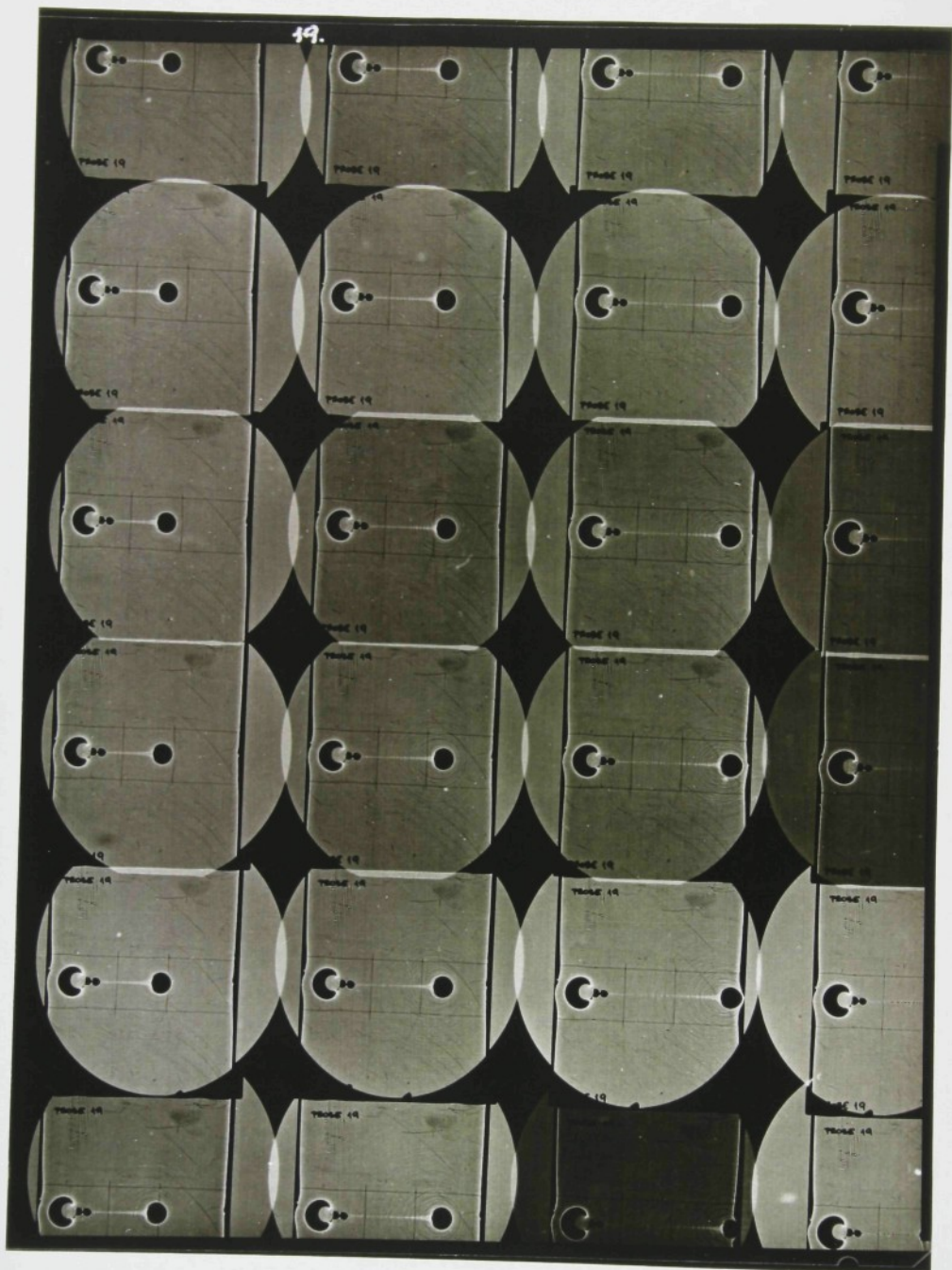
$m$  ... korekční faktor pro neparalelní (konvergentní) dopadající svazek paprsků,

$r_o$  ... poloměr iniciační křivky, z níž vzniká kaustika.

Na následujících obrázcích jsou uvedeny typické záznamy kaustik v okolí kořene šířící se trhliny. Na obr. 4.21 jsou uvedeny kaustiky ve zkušebním vzorku č.9 s tloušťkou 5 mm a na obr. 4.22 kaustiky ve zkušebním vzorku č. 19 s tloušťkou 10 mm. Numerické výsledky jsou uvedeny v tabulkách 4.4 a 4.5. Na obrázcích 4.23 a 4.24 jsou uvedeny vyhodnocené hodnoty K-faktoru a rychlosti trhliny.



Obr. 4.21 - Záznam kaustik ve vzorku č.9



Obr. 4.22 - Záznam kaustik ve vzorku č. 19

| i | Zeit<br>[us] | a<br>[mm] | v<br>[m/s] | D<br>[mm] | r <sub>o</sub><br>[mm] | K <sub>id</sub><br>[MPa.m <sup>^</sup> .5] |
|---|--------------|-----------|------------|-----------|------------------------|--------------------------------------------|
| 1 | 0            | 55,7      |            | 7,14      | 3,76                   | 1,33                                       |
| 2 | 20           | 62,6      | 361,4      | 7,3       | 3,84                   | 1,41                                       |
| 3 | 40           | 70,2      | 406,1      | 7,57      | 3,99                   | 1,54                                       |
| 4 | 60           | 78,8      | 452,9      | 7,82      | 4,12                   | 1,67                                       |
| 5 | 80           | 88,3      | 476,4      | 8,15      | 4,29                   | 1,86                                       |
| 6 | 100          | 97,9      | 504,1      | 8,66      | 4,56                   | 2,15                                       |
| 7 | 120          | 108,5     | 524,7      | 8,44      | 4,44                   | 2,02                                       |
| 8 | 140          | 118,8     | 541        | 8,82      | 4,64                   | 2,26                                       |
| 9 | 160          | 130,1     | 563,7      | 9,04      | 4,76                   | 2,4                                        |

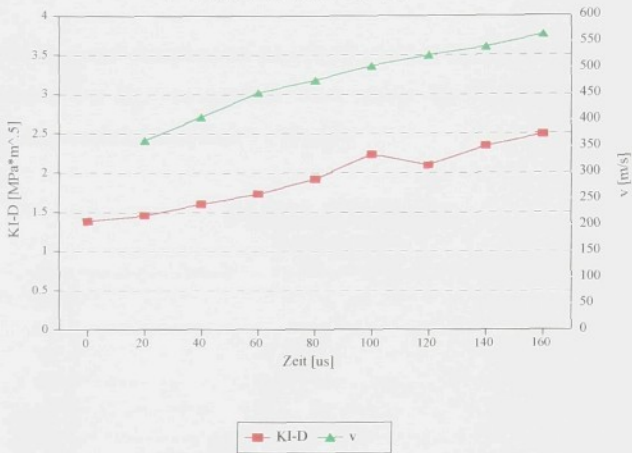
Tab. 4.4 - Výsledky vzorku č.9

| i  | Čas<br>[us] | a<br>[mm] | v<br>[m/s] | D<br>[mm] | r <sub>o</sub><br>[mm] | K <sub>id</sub><br>[MPa.m <sup>^</sup> .5] |
|----|-------------|-----------|------------|-----------|------------------------|--------------------------------------------|
| 1  | 0           | 75        |            | 9,34      | 4,91                   | 1,41                                       |
| 2  | 10          | 78,1      | 310        | 9,39      | 4,94                   | 1,43                                       |
| 3  | 20          | 81,2      | 320        | 9,5       | 5                      | 1,47                                       |
| 4  | 30          | 84,5      | 334        | 9,65      | 5,08                   | 1,53                                       |
| 5  | 40          | 87,9      | 333        | 9,97      | 5,25                   | 1,66                                       |
| 6  | 50          | 91,1      | 337        | 10,21     | 5,37                   | 1,76                                       |
| 7  | 60          | 94,7      | 369        | 9,8       | 5,16                   | 1,59                                       |
| 8  | 70          | 98,5      | 401        | 9,84      | 5,18                   | 1,61                                       |
| 9  | 80          | 102,7     | 387        | 9,84      | 5,18                   | 1,61                                       |
| 10 | 90          | 106,2     | 377        | 10,18     | 5,36                   | 1,75                                       |
| 11 | 100         | 110,2     | 414        | 10,1      | 5,32                   | 1,72                                       |
| 12 | 110         | 114,5     | 424        | 10,44     | 5,5                    | 1,87                                       |
| 13 | 120         | 118,7     | 421        | 10,27     | 5,41                   | 1,79                                       |
| 14 | 130         | 122,9     | 459        | 10,35     | 5,45                   | 1,83                                       |
| 15 | 140         | 127,9     | 474        | 10,55     | 5,55                   | 1,91                                       |
| 16 | 150         | 132,4     | 453        | 10,59     | 5,57                   | 1,93                                       |

Tab. 4.5 - Výsledky vzorku č.19

### PROBE 9

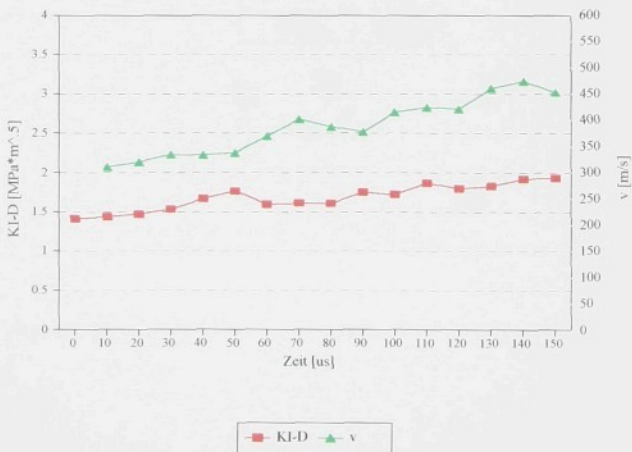
F=7.9 [kN],  $z_0=1.37$  [m],  $z_1=3.42$  [m]



Obr. 4.23

### PROBE 19

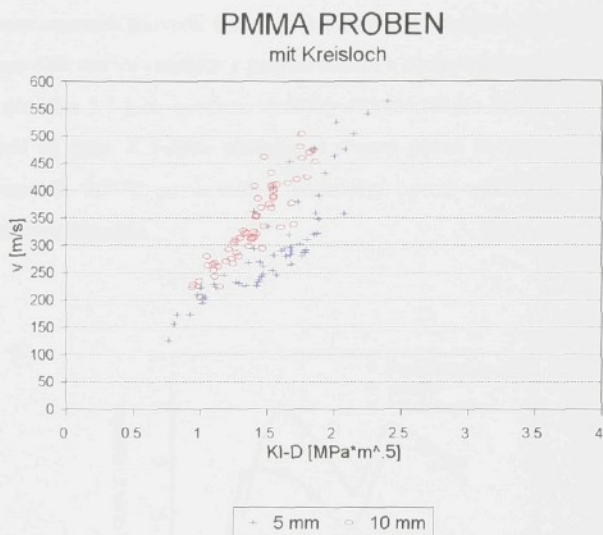
F=11.8 [kN],  $z_0=1.35$  [m],  $z_1=3.37$  [m]



Obr. 4.24

#### 4.2.4 Vyhodnocená závislost $K_{ID}$ - $v$ pro Akrylon z obrazů kaustik.

Ze všech vyhodnocených fotozáznamů kaustik při porušení desek opět byla sestavena závislost lomové houževnatosti  $K_{ID}$  na rychlosti šíření trhliny. Na následujícím obrázku 4.25 jsou uvedeny výsledky vzorků s tloušťkou 5 i 10 mm.



Obr. 4.25

## 5. Srovnání výsledků získaných prostřednictvím fotoelasticimetrie a metody kaustik

Experimentální práce zabývající se srovnáním výsledků získaných prostřednictvím fotoelasticimetrie a metody kaustik byly v nedávné době provedeny i jinými autory [23],[24],[25]. Např. C.Tadou a K.Ravi-Chandar [24] provedli srovnání obou výše uvedených metod. Při experimentech provedli záznamy izochromát a kaustik v okolí kořene trhliny šířící se rychlostí cca 470 m/s ve vzorcích z polykarbonátu s obchodním označením GE Lexan. Na následujícím obrázku 5.1 jsou uvedeny výsledky získané těmito autory, t.j. závislost faktoru intenzity napětí na čase. Z tohoto obrázku je zřejmý posun K-faktoru určeného metodou Caustic v intervalu 20÷70  $\mu\text{s}$  k nižším hodnotám oproti výsledkům určeným metodou dynamické fotoelasticimetrie.

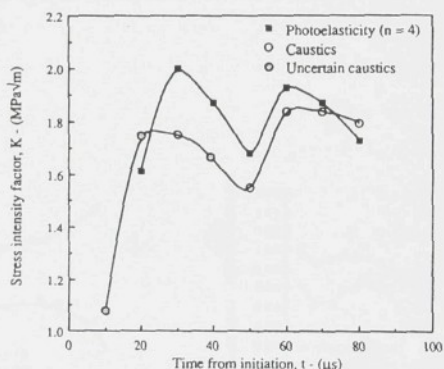


Fig. 10—Comparison of the stress-intensity-factor histories using the methods of caustics and photoelasticity

Obr. 5.1 - Porovnání výsledků fotoelasticimetrie a metody kaustik v dynamickém případě

Dalšími autory zabývajícími se touto problematikou jsou např. H.Nigam a A.Shukla [25], kteří provedli statické a dynamické experimenty s použitím obou výše uvedených metod na tělesech stejné geometrie a při stejných podmínkách zatěžování. Z jejich výsledků je zřejmá

dobrá shoda při statických podmínkách (viz obr. 5.2), ale velké rozdíly byly získány v případě dynamické trhliny. Na obr. 5.3 jsou uvedeny výsledky srovnání obou metod pro vzorky typu SEN a DCB. I v tomto případě jsou hodnoty získané z kaustik výrazně nižší než hodnoty z obrazu izochromát.

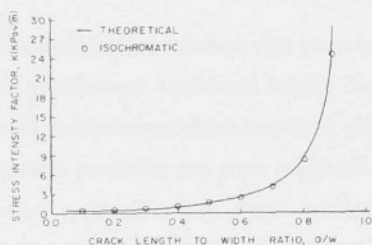


Fig. 5—Variation of photoelastic and handbook values of  $K$  with  $a/w$  for a normalized load of 1 N

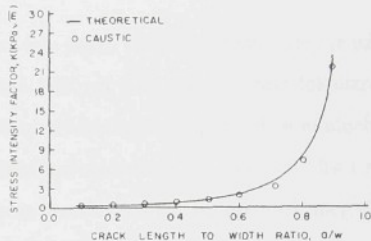


Fig. 7—Variation of caustic and handbook value of  $K$  with  $a/w$  for a normalized load of 1 N

Obr. 5.2 - Porovnání výsledků fotoelasticimetrie a metody kaustik ve statickém případě

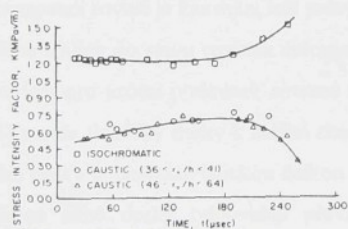


Fig. 10—Variation of the stress-intensity factor with time for the SEN-1 experiment

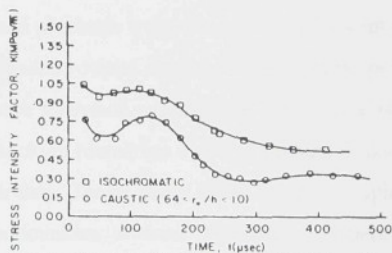


Fig. 14—Variation of the stress-intensity factor with time for the DCB-1 experiment

Obr. 5.3 - Porovnání výsledků fotoelasticimetrie a metody kaustik v dynamickém případě

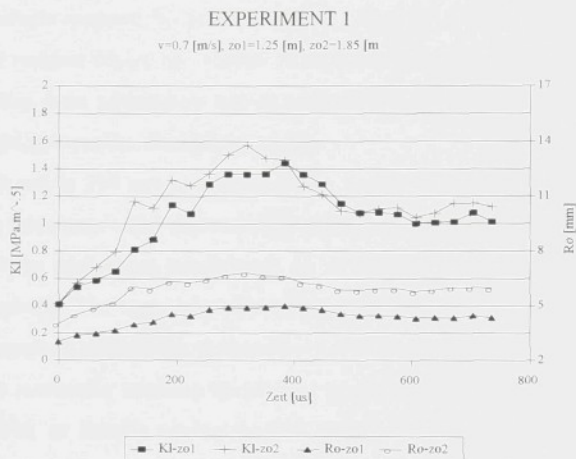
Při porovnání výsledných závislostí  $K_{ID}$  v z experimentů provedených v LEM metodou dynamické fotoelasticimetrie a z experimentů provedených autorem v laboratoři

Prof. Kalthoffa metodou kaustik je patrný posun K-faktorů určených metodou kaustik k nižším hodnotám (viz obr. 4.27) oproti výsledkům určeným metodou dynamické fotoelasticimetrie (obrázky 4.15). Tato tendence je v souladu s výše uvedenými výsledky ostatních autorů. Při hledání příčin těchto rozdílů je dle diskuse provedené Theocarisem v [14] nutno nejprve ověřit, zda experimentální podmínky splňují předpoklady, za kterých jsou tyto metody definovány.

Fotoelasticimetrie vyžaduje větší pozornost a výzkum vlivu počtu členů v rozvoji, který je užit při vyhodnocení koeficientů napětí. Zároveň je nutné věnovat pozornost přesné lokalizaci bodů na izochromatických smyčkách vůči kořenu trhliny představujícímu počátek souřadného systému použitého pro popis napjatosti. Přesné určení kořene trhliny má zároveň vliv i na určení rychlosti trhliny. Tento problém řeší autorem navržená pětiparametrická metoda. Dalším faktorem ovlivňujícím výrazně hodnoty K-faktoru je koeficient optické citlivosti použitého materiálu experimentálních vzorků. V LEM byla experimentálně určena jeho jak statická tak i dynamická hodnota.

Při použití metody kaustik je nutné přesné určení napětově optického koeficientu  $c$  a Poissonovy konstanty  $\mu$ , jejichž hodnoty se v případě statického a dynamického experimentu rovněž liší. Napětově optický koeficient  $c$  se zároveň výrazně liší v případě stavu rovinné deformace a rovinné napjatosti. Iniciační kružnice v okolí kořene trhliny, jejímž obrazem v zobrazovací rovině je kaustika, leží právě v oblasti přechodu trojosé napjatosti v blízkém okolí kořene trhliny do stavu rovinné deformace, případně rovinné napjatosti. Jediným bezpečným kritériem pro určení podmínek rovinné deformace a rovinné napjatosti je dle teorie elasticity [25] poměr tloušťky desky k dalším charakteristickým rozměrům v rovině zatížení desky. Pro velké desky je charakteristickou délkou délka trhliny. Tenké desky dávají rovinnou napjatost, zatímco silné desky odpovídají převážně podmínkám rovinné deformace. Experimenty provedené autorem v laboratoři Prof. Kalthoffa v roce 1990 byly zaměřené právě na sledování vlivu poloměru iniciační kružnice na hodnoty K-faktoru. Pro tento účel bylo upraveno experimentální uspořádání tak, aby byly získány obrazy kaustik pro tentýž vzorek pro dvě různé referenční vzdálenosti. Jedna odpovídala iniciační kružnici o poloměru menším než polovina tloušťky desky a druhá měla poloměr větší než polovina tloušťky desky. Experimenty prokázaly rozdíl mezi hodnotami K-faktoru vyhodnoceného z kaustik s iniciačními kružnicemi o poloměru menším příp. větším než polovina tloušťky desky. Jako příklad je použito

vyhodnocení ze vzorku č.1 (obr. 5.4). Jednalo se o třibodový ohyb desky s tloušťkou 10 mm, zatížené dopadem kladiva podkritickou rychlostí, t.j. byly pořízeny záznamy kaustik z okolí kořene dynamicky zatížené stacionární trhliny.



Obr. 5.4 - Vliv poloměru iniciační kružnice na hodnotu K-faktoru

## 6 Závěr.

Vyhodnocené závislosti  $K_{ID}$ -v pro Akrylon metodou dynamické fotoelasticimetrie a metodou kaustik vykazují typické znaky závislosti lomové houževnatosti  $K_{ID}$  na rychlosti šíření kořene dynamické trhliny.

Hodnoty  $K_{ID}$  v intervalu rychlosti 50÷200 m/s tvoří tzv. vertikální větev závislosti. V této větvi prakticky nezávisí rychlost trhliny na velikosti okamžitého faktoru intenzity napětí. Rychlost trhliny je tedy dána jinou podmínkou než je podmínka (1.1). Je patrně určena celkovou energetickou bilancí testovaného zkušebního vzorku.

Pro rychlosti vyšší než je 200 m/s je rychlost trhliny výrazně závislá na hodnotě K-faktoru. Přestože vybavení laboratoře LEM neumožňuje exaktní posouzení lomových ploch, je možné na základě vizuálního pozorování konstatovat, že ve zmíněném intervalu rychlosti narůstá zdrsnění lomové plochy. Pro tento interval rychlosti trhliny se tedy výrazněji projevuje vliv koalescence mikroporuch vznikajících před kořenem magistralní trhliny. Jak již bylo řečeno v úvodu, prostředky mechaniky kontinua neumožňují postihnout mikromechanismy porušení a tedy popis napjatosti, ze kterého vychází použité metody, je pouze aproximací skutečného stavu napjatosti v okolí kořene rychlé trhliny. Jestliže s růstem rychlosti trhliny se zvětšuje oblast mikroporuch (zdrsnění lomové plochy), pak též použitý popis napjatosti hůře odráží skutečný stav napjatosti v okolí kořene rychlé trhliny a tedy kritérium (1.1) pouze aproximativně stanovuje podmínky růstu trhliny.

Na základě provedených experimentů lze konstatovat, že hodnoty dynamické lomové houževnatosti  $K_{ID}(v)$  stanovené prostřednictvím dynamické fotoelasticimetrie jsou vždy vyšší než hodnoty  $K_{ID}(v)$  stanovené metodou kaustik. Je vhodné zdůraznit, že uvedené experimentální zjištění je v souladu s experimentálními zjištěními uvedenými v [24], [25]. V souladu s rozsáhlou diskusí oprávněnosti  $K_{ID}(v)$  jako materiálové charakteristiky [26] až [34], lze tedy závěrem vyslovit tvrzení, že  $K_{ID}(v)$  není materiálovou charakteristikou.

## Použitá literatura

- [1] HUMEN,V. : Současné tendence experimentálního výzkumu dynamiky křehkého porušení modelových materiálů.  
Strojírenství 33, 1983, 5, s. 299.
- [2] BÍLEK,Z. : Dynamika křehkého lomu kovových materiálů.  
Výzkumná zpráva VZ 482/587, SPZV A III-1-3/2, ÚFM ČSAV, Brno 1981
- [3] GREEN,A.K.-PRATT,P.L. : Measurement of the dynamic fracture toughness of PMMA by high-speed photography.  
Eng. Fract. Mechanics, 6, 1974, No 1, pp. 71-80.
- [4] IRWIN,G.R.-DALLY,J.W.-KOBAYASHI,T.-FOURNEY,W.L.-ETHERIDGE,M.J.-ROSSMANITH,H.P. : On the determination of the a-K relationship for birefringent polymers.  
Exp. Mechanics, 19, 1979, No 4, pp. 121-128.
- [5] THEOCARIS,P.S.-KATSAMANIS,P. : Response of cracks to impact by caustics.  
Eng. Fract. Mechanics, 10, 1978, No 2, pp. 197-210.
- [6] IRWIN,G.R.-DALLY,J.W.-KOBAYASHI,T.-FOURNEY,W.L.-ETHERIDGE,M.J. : A photoelastic characterization of the dynamic fracture.  
Report NUREG - 0072, NRC-5. University of Maryland, Dec. 1976.
- [7] SHOCKEY,D.A.-KALTHOFF,J.F.-KLEMM,W.-WINKLER,S. : Simultaneous measurement of stress intensity and toughness for fast-running cracks in steel.  
Exp. Mechanics, 1983, No 6, pp. 140-145.
- [8] KANAZAWA,T.-MACHIDA,S.-TERAMOTO,T. : Preliminary approaches to experimental and numerical study on fast crack propagation and crack arrest.  
ASTM STP 627, 1977, pp. 40-57.
- [9] CONGLETON,J.-DENTON,B.K. : Measurement of fast crack growth in metals and non metals.  
ASTM STP 627, 1977, pp. 336-358.
- [10] HETENYI,M. : Průručka experimentálnej pružnosti.  
SVTL, Bratislava, 1960.
- [11] BEINERT,J. - KALTHOFF,J.F. - MAIER,M. : Neuere Ergebnisse zur Anwendung des Schattenfleckenverfahrens auf stehende und schnell-laufende Brüche.  
VDI Berichte, Nr. 313, 1978.
- [12] BEINERT,J. - KALTHOFF,J.F. - SEIDELMANN,U. - SOLTESZ,U. : Das schattenoptische Verfahren und seine Anwendung in der Bruchmechanik.  
VDI Berichte, Nr. 297, 1977.
- [13] KALTHOFF,J.F. : Shadow Optical Method of Caustics.  
Handbook on Experimental Mechanics, Chapter 9, 1993, p. 407-476

- [14] KALTHOFF, J.F.: Caustic analysis of fracture phenomena.  
European Journal of Mechanics, A/Solids, 13, No 4 - suppl., 1994, pp.61-78.
- [15] Beinert J.-Kalthoff J.F.-Seidelmann U.-Soltész U.: Das schattenoptische Verfahren und seine Anwendung in der Bruchmechanik.  
VDI-Berichte Nr.297, 1977.
- [16] HUMEN, VI. - STRÍŽ, B. - VEJVODA, J.: Experimentální zařízení pro modelový výzkum dynamiky křehkého porušení.  
Strojírenství 31, 1981, č.9, 521 - 524.
- [17] KOBAYASHI, A.S.; RAMULU, M.: Dynamic stress - intensity factors for unsymmetric dynamic isochromatics.  
Exp. Mechanics 21, 1981, No 1, p. 41 - 48
- [18] WELLS, A.; POST, D.: The dynamic stress distribution surrounding a running crack a photoelastic analysis.  
Proc. of SESA, Vol. 16, No 1; (1958), p. 69 - 92.
- [19] BRADLEY, W.B. - KOBAYASHI, A.S.: An investigation of propagating cracks by dynamic photoelasticity.  
Exp. Mechanics, Vol. 10, No 3, 1970, p. 106 -113.
- [20] VEJVODA, J.: Metody vyhodnocení obrazu izochromát v okolí kořene rychle se šířící trhliny.  
Kandidátská disertační práce; ČVUT-fak. strojní, Praha 1989.
- [21] SANFORD, R.J. - DALLY, J.W.: A general method for determining mixed - mode stress intensity factors from isochromatic fringe patterns.  
Eng. Fract. Mech. 11, 1979, No 4, p. 621.
- [22] VEJVODA, J.: Optimalizace napěťového pulsu v dlouhé tyči z PMMA.  
Diplomová práce, VŠST Liberec, Liberec 1981.
- [23] MAHAJAN, R.V. - RAVI-CHANDAR, K.: Experimental Determination of Stress-intensity Factors Using Caustics and Photoelasticity.  
Experimental Mechanics, March 1989, p.6-11.
- [24] TADOU, C. - RAVI-CHANDAR, K.: Experimental Determination of the Dynamic Stress-intensity Factor Using Caustics and Photoelasticity.  
Experimental Mechanics, Sept. 1992, p.203-210.
- [25] NIGAM, H. - SHUKLA, A.: Comparison of the Techniques of Transmitted Caustics and Photoelasticity as Applied to Fracture.  
Experimental Mechanics, June 1988, p.123-135
- [26] KOBAYASHI, A.S. - MALL, S.: Dynamic Fracture Toughness of Homalite 100.  
Experimental Mechanics, 18, 1978, p.11-18.
- [27] KALTHOFF, J.F.: On Some Current Problems in Experimental Fracture Dynamics.  
Workshop on dynamic fracture, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1983, p.11-35.

- [28] KALTHOFF, J.F.: On the measurement of dynamic fracture toughness - a review of recent work.  
Int. Journ. of Fracture, 27, 1985, p.277-298.
- [29] HUDAK, S.J. - DEXTER, R.J. - FITZGERALD, J.H. - KANNINEN, M.F. : The Influence of Specimen Boundary Conditions on the Fracture Toughness of Running Cracks.  
Eng. Fract. Mechanics, Vol. 23, 1, 1986, p.201-213.
- [30] KOBAYASHI, A.S. - RAMULU, M. - DADKHAH, M.S. - YANG, K.H. - KANG, B.S.J. :  
Dynamic fracture toughness.  
Int. Journ. of Fracture, 30, 1986, p.275-285.
- [31] TAKAHASHI, K. - ARAKAWA, K. : Dependence of Crack Acceleration on the Dynamic Stress-Intensity Factor in Polymers.  
Experimental Mechanics, Vol.27,2, 1987, p.195-200.
- [32] ARAKAWA, K. - TAKAHASHI, K. : Relationship between fracture parameters and fracture surface roughness of brittle polymers.  
Int. Journ. of Fracture, 48, 1991, p.103-114.
- [33] MASAOKI WATANABE : Qualitative analysis of the fast brittle fracture.  
Int. Journ. of Fracture, 49, 1991, p.69-77.
- [34] ZEMÁNKOVÁ, J. : Výzkum dynamiky křehkého porušení.  
Strojirenství 34, 1984, 1, s. 47-50.