

Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství tělesné výchovy pro 2. stupeň ZŠ, Učitelství matematiky pro SŠ

Stereometrie podporovaná geometrickými programy
Stereometry supported by the geometric programs

Diplomová práce: 13-FP-KMD- 005

Autor:

Bc. Kateřina NOVÁKOVÁ

Podpis:



Vedoucí práce: Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.

Konzultant:

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
119	5	109	2	21	2 + CD

V Liberci dne: 25. 7. 2013

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Kateřina Nováková**
Osobní číslo: **P11000914**
Studijní program: **N7504 Učitelství pro střední školy**
Studijní obory: **Učitelství tělesné výchovy pro 2. stupeň základní školy**
Učitelství matematiky pro střední školy
Název tématu: **Stereometrie podporovaná geometrickými programy**
Zadávající katedra: **Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Sestavit krátký text pro téma stereometrie rozšířený o sbírku převážně řešených, ale i neřešených úloh ze stereometrie. Sbíрка řešených úloh by měla obsahovat úlohy doplněné statickými, ale i dynamickými obrázky zkonstruovanými ve vhodném, případně ve vhodných geometrických programech. Dynamické obrázky budou přiloženy na CD v elektronické podobě. U řešených úloh bude uveden postup řešení úlohy včetně ilustračních obrázků. Ve stručnosti popsat užité geometrické programy. K sepsání této diplomové práce se předpokládá znalost stereometrie, analytické geometrie, Mongeova promítání základů kinematické geometrie, dále schopnost vyhledání zdrojů (též cizojazyčných) věnovaných problematice stereometrie, schopnost práce s internetem a s dynamickými geometrickými programy. Z důvodů dostupnosti je plánováno užití převážně volně šiřitelných geometrických programů.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

de COTRET Sophie and Pierre René: Cabri 3D v.2.1 User Manual. Montréal, Québec, Canada, Cabrilog 2007.

KISELEV, A.P.: Kiselev's Geometry. Book II. STEREOOMETRY (adapted from Russian by Alexander Givental). Hardcover, Sumizdat 2008. ISBN 0-9779852-1-0. (180 pages)

McNEEL, R. and Associates: Rhinoceros Level 1 Training Manual v. 4.0. Seattle, USA, Publications, R. McNEEL and Associates, 2008. (256 pages)

McNEEL, R. and Associates: Rhinoceros Level 2 Training Manual v. 4.0. Seattle, USA, Publications, R. McNEEL and Associates, 2006. (238 pages)

PETÁKOVÁ, J.: Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na VŠ. Praha, Prometheus, 2000.

POMYKALOVÁ, E.: Matematika pro gymnázia - stereometrie. Praha, Prometheus, 1995.

URBAN, A.: Deskriptivní geometrie I, II. Praha, SNTL, 1967.

Vedoucí diplomové práce:

Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání diplomové práce: **27. dubna 2012**

Termín odevzdání diplomové práce: **26. dubna 2013**



doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.

děkan

L.S.



doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.

vedoucí katedry

dne

Čestné prohlášení

Název práce: Stereometrie podporovaná geometrickými programy
Jméno a příjmení autora: Kateřina Nováková
Osobní číslo: P11000914

Byl/a jsem seznámen/a s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména § 60 – školní dílo.

Prohlašuji, že má diplomová práce je ve smyslu autorského zákona výhradně mým autorským dílem.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval/a samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

Prohlašuji, že jsem do informačního systému STAG vložil/a elektronickou verzi mé diplomové práce, která je identická s tištěnou verzí předkládanou k obhajobě a uvedl/a jsem všechny systémem požadované informace pravdivě.

V Liberci dne: 25. 7. 2013



Kateřina Nováková

Poděkování

V první řadě bych ráda poděkovala vedoucí své diplomové práce Mgr. Daniele Bímové, Ph.D. za cenné rady a připomínky ohledně formy a obsahu práce a Mgr. Jiřině Jirsákové, která mi umožnila využít program Cabri 3D při výuce v rámci absolvování mé souvislé praxe.

Velký dík patří také mé rodině a přátelům, kteří mě podporovali během celého studia a psaní této diplomové práce.

Anotace:

Titul: *Stereometrie podporovaná geometrickými programy*

Hlavním cílem této diplomové práce je sestavit krátký text k tématu stereometrie doplněný o sbírku převážně řešených, ale i neřešených úloh. Úlohy zařazené do sbírky obsahují statické a dynamické obrázky zkonstruované v geometrických programech GeoGebra 5.0 a Cabri 3D, které byly vybrány s ohledem na vhodnost, dostupnost a možnosti využití ve výuce. Dynamické obrázky jsou přiloženy v elektronické podobě na CD. Sbíрка úloh, která tvoří hlavní část diplomové práce, je doplněna teoretickým textem k tématu stereometrie, průzkumem zabývajícím se výukou stereometrie na středních školách a vlastními poznatky ohledně používání geometrického softwaru při výuce stereometrie, které autorka získala v rámci své praxe na Střední průmyslové škole strojní a elektrotechnické v Liberci.

Klíčová slova: Geometrický software, GeoGebra, Cabri 3D, stereometrie, sbírka úloh.

Summary:

Title: *Stereometry supported by the geometric programs*

The main aim of this diploma thesis is to create a short text concerning stereometry supplemented with a set of exercises which are mostly solved and partly unsolved. The set is accompanied by static and dynamic images which were constructed in two geometric programs GeoGebra 5.0 and Cabri 3D which were chosen for their suitability, accessibility and facilities regarding educational purposes. The dynamic images are attached in an electronic form on a CD. The set of exercises, which constitutes the main part of the diploma thesis, is accompanied by theoretical text concerning stereometry, a survey of teaching stereometry at upper secondary schools and author's findings which she gained during her teaching practice at Secondary technical school in Liberec.

Key words: Geometric software, GeoGebra, Cabri 3D, stereometry, set of exercises.

Zusammenfassung:

Titel: *Raumgeometrie unterstützt mit den geometrischen Programmen*

Das Hauptziel dieser Diplomarbeit ist einen kurzen Text mit einem Set der Rechenübungen überwiegend mit und teilweise ohne Lösung zum Thema Raumgeometrie zu bilden. Die Rechenübungen enthalten statische und dynamische Bilder, die in zwei geometrischen Programmen - GeoGebra 5.0 und Cabri 3D - konstruiert wurden. Diese Programme wurden wegen ihrer Eignung, Zugänglichkeit und ihre Möglichkeiten bezüglich des Unterrichts ausgewählt. Die dynamischen Bilder sind beigelegt in der elektronischen Form auf der CD. Das Set der Rechenübungen, die den meisten Teil der Diplomarbeit bilden, ist ergänzt durch den theoretischen Text zum Thema Raumgeometrie, die Erforschung des Unterrichts der Raumgeometrie in den Mittelschulen und Autors Erkenntnisse, die sie während ihrer Praxis auf der Technischen Mittelschule in Liberec gewonnen hat.

Schlüsselwörter: Geometrie Software, GeoGebra, Cabri 3D, Raumgeometrie, Set der Rechenübungen.

Obsah

Obsah	8
Seznam obrázků	9
Seznam tabulek	14
Seznam grafů	15
Seznam použitých symbolů	17
1 Úvod	18
2 Prostorová představivost	20
2.1 Rozvíjení prostorové představivosti	20
2.2 Rozdíly mezi prostorovou představivostí mužů a žen	21
2.3 Pohled na prostorovou představivost jako jedno z hlavních kritérií úspěšnosti v životě	21
2.4 Vývoj úrovně prostorové představivosti	22
3 Stereometrie na střední škole	24
3.1 Zařazení tématu stereometrie v ŠVP středních škol	24
3.2 Využití vybraných geometrických softwarů při výuce stereometrie	25
3.2.1 Cabri 3D	26
3.2.2 GeoGebra 5.0	27
4 Teoretické základy stereometrie	29
4.1 Polohové vlastnosti	30
4.1.1 Základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami	30
4.1.2 Polohové konstrukční úlohy	35

4.2	Metrické vlastnosti	39
4.2.1	Odchylka	39
4.2.2	Kolmost	41
4.2.3	Vzdálenost	42
4.3	Zobrazení	44
4.3.1	Shodná zobrazení	44
4.3.2	Podobná zobrazení	47
4.4	Tělesa	48
4.4.1	Mnohostěny	48
4.4.2	Rotační tělesa	50
5	Sbírka příkladů	53
5.1	Úlohy na rozvoj obecné prostorové představivosti	53
5.2	Tradiční i netradiční příklady v hodinách stereometrie	65
5.2.1	Polohové úlohy	65
5.2.2	Polohové konstrukční úlohy	67
5.2.3	Množiny bodů daných vlastností	76
5.2.4	Zobrazení	87
5.2.5	Metrické úlohy	92
6	Vlastní zkušenost s využitím Cabri 3D při výuce	100
7	Průzkum v oblasti výuky stereometrie	103
7.1	Metodika	103
7.1.1	Dotazník	103
7.1.2	Výběr respondentů a sběr dat	104
7.2	Výsledky	104
7.3	Shrnutí	108
8	Závěr	109
A	Výsledky neřešených úloh	113
B	Dotazník	117
C	Příloha na CD	119

Seznam obrázků

2.1	Ukázka zadání úlohy č. 2 - test prostorové představivosti 2007/2008.	22
2.2	Ukázka zadání úlohy č. 3 - test prostorové představivosti 2007/2008	22
2.3	Ukázka zadání úlohy č. 4 - test prostorové představivosti 2007/2008.	23
3.1	Prostředí geometrického softwaru Cabri 3D.	26
3.2	Prostředí geometrického softwaru GeoGebra 5.0.	27
4.1	Krychle (a), kvádr (b) a jehlan (c) ve volném rovnoběžném promítání.	30
4.2	Přímky rovnoběžné různé (a, b), splývající (a, d), různoběžné (b, c), mimoběžné (a, c).	31
4.3	Přímka c různoběžná s rovinou ρ , přímka a rovnoběžná splývající s rovinou ρ , přímka b rovnoběžná různá s rovinou ρ	32
4.4	Rovnoběžnost přímky s průsečnicí dvou navzájem různoběžných rovin.	32
4.5	Roviny různoběžné ($\alpha, \gamma; \beta, \gamma; \delta, \gamma$), rovnoběžné různé ($\alpha, \beta; \alpha, \delta$), rovnoběžné splývající (β, δ).	33
4.6	Rovnoběžnost dvou rovin.	34
4.7	Tři navzájem rovnoběžné roviny (a), dvě rovnoběžné roviny a jedna rovina s nimi různoběžná (b).	34
4.8	Tři po dvou různoběžné roviny s třemi navzájem rovnoběžnými průsečnicemi (a), s jednou společnou průsečnicí (b), s třemi průsečnicemi protínajícími se v jednom bodě (c).	35
4.9	Průsečík přímky s rovinou.	35
4.10	Zobrazení bodů A, B v osové afinitě s osou o	36
4.11	Zobrazení bodů A, B ve středové kolineaci s osou o	37
4.12	Průnik přímky s tělesem.	38
4.13	Příčka mimoběžek daným bodem.	38
4.14	Dvojice hran na krychli: různoběžky a, b , rovnoběžky c, d , mimoběžky e, f . . .	39

4.15	Odchyłka přímky a roviny.	40
4.16	Odchyłka dvou rovin.	40
4.17	Kolmost přímky a roviny.	41
4.18	Kolmost dvou rovin.	41
4.19	Určení vzdálenosti bodu od přímky podle prvního způsobu (a) a podle druhého způsobu (b).	42
4.20	Vzdálenost bodu od roviny.	43
4.21	Vzdálenost dvou mimoběžek.	43
4.22	Zobrazení jehlanu $ABCDV$ v rovinné souměrnosti $S(\alpha)$	44
4.23	Zobrazení jehlanu $ABCDV$ ve středové souměrnosti $S(S)$, kde $S = V$	45
4.24	Zobrazení jehlanu $ABCDV$ v osově souměrnosti $S(o)$	46
4.25	Zobrazení jehlanu $ABCDV$ v otočení $R(o, \varphi)$	46
4.26	Zobrazení jehlanu $ABCDV$ v posunutí $T(KL)$	47
4.27	Zobrazení jehlanu $ABCDV$ ve stejnolehlosti $H(S, \kappa)$	48
4.28	Pravidelný pětiboký jehlan (a), kosý jehlan (b), pravidelný pětiboký komolý jehlan (c).	49
4.29	Rotační kužel vzniklý rotací pravoúhlého trojúhelníka kolem odvěsny.	50
5.1	Kótový zápis zadaných krychlových těles.	54
5.2	Kótový zápis složených krychlových těles.	54
5.3	Složená krychlová tělesa.	54
5.4	Krychlová tělesa.	55
5.5	Kótový zápis těles při pohledu zepředu (a) a shora (b).	55
5.6	Lomená čára na drátěném modelu krychle.	55
5.7	Orientace lomené čáry a její stopy po odvalení.	56
5.8	Odvalování krychle po vyznačené cestě.	56
5.9	Určení barevného políčka po dokončení odvalování.	57
5.10	Hledání nejkratší cesty odvalení krychle na dané políčko.	57
5.11	Znázornění nejkratších cest odvalení krychle na daná políčka.	58
5.12	Krychle a jejich sítě s vyznačenou spodní podstavou.	58
5.13	Krychle a jejich sítě s barevným vyznačením vybraných částí.	59
5.14	Osmistěn s dvanáctistěnem a jejich sítě.	59
5.15	Sítě osmistěnu a dvanáctistěnu s odpovídajícím barevným značením.	59
5.16	Otvory určené k protažení hledaného tělesa.	60

5.17 Hledané těleso.	60
5.18 Otvory a tělesa určená k protažení.	61
5.19 Pohled na krychli odpovídající pravidelnému šestiúhelníku.	61
5.20 Nárys, bokorys a půdorys drátu (a), model krychle (b).	62
5.21 Zobrazení namotání drátu na krychli ve volném rovnoběžném promítání.	62
5.22 Zobrazení namotání drátu na krychli ve volném rovnoběžném promítání.	62
5.23 Nárys, bokorys a půdorys drátu namotaného na krychli.	63
5.24 Těleso znázorněné ve volném rovnoběžném promítání.	63
5.25 Nárys, půdorys a bokorys hledaného tělesa.	64
5.26 Rovina určená dvěma pevně zvolenými body A , B v prostoru a bodem C pohybujícím se po kružnici.	66
5.27 Tři různoběžky protínající se navzájem ve dvou bodech (a), nebo v jednom bodě (b).	66
5.28 Různé podoby řezu krychle rovinou určenou body K , L , M	67
5.29 Jedenáctiúhelník vzniklý řezem pravidelného desetibokého jehlanu.	68
5.30 Řezy krychlí danou rovinou.	69
5.31 Znázornění řezů krychlí danou rovinou.	69
5.32 Řezy jehlanem rovinou určenou body K , L , M	70
5.33 Průsečnice dvou rovin - krychle.	71
5.34 Průsečnice dvou rovin - jehlan.	71
5.35 Průnik přímky s rovinou.	72
5.36 Průsečíky přímky p s krychlí $ABCDEFGH$	73
5.37 Průsečíky přímky p s jehlanem $ABCDV$	73
5.38 Příčky mimoběžek BC a EG	74
5.39 Tělesa - kolmý čtyřboký hranol (a), kosý pětiboký hranol (b) a pravidelný čtyřstěn (c).	75
5.40 Pravidelný šestiboký hranol s přímkou $p = \leftrightarrow MN$	76
5.41 Hledání příčky mimoběžek.	76
5.42 Thaletova kulová plocha nad úsečkou AB	77
5.43 Kulová plocha procházející body A , B , C	77
5.44 Množina středů spojníc dvou mimoběžek	78
5.45 Znázornění pat kolmic vedených z vrcholu D čtyřstěnu $ABCD$ na přímkou CX	78
5.46 Čtyřstěn s koulí pohybující se po dolní podstavě.	79
5.47 Nalezení středu kulové plochy pomocí planimetrizace úlohy.	80

5.48	Krychle se středem S a jednou hranou na přímce p .	81
5.49	Krychle $ABCDEFGH$ s vrcholy A, E na přímce p a vrcholem C v bodě C .	81
5.50	Krychle s jedním vrcholem v bodě A a dvěma hranami na dvou různých rovnoběžných přímkách u, v .	82
5.51	Pravidelný čtyřboký jehlan s vrcholem v bodě V , podstavou v rovině ρ a jednou podstavovou hranou na přímce p .	83
5.52	Hledaný čtyřstěn a jeho síť.	83
5.53	Šest shodných kružnic na kulové ploše.	84
5.54	Tři možnosti řešení úlohy č. 13.	85
5.55	Dvě kulové plochy se středy na přímce p , daným poloměrem r dotýkající se roviny ρ .	85
5.56	Útvary vzniklé rotací přímky AB okolo osy o .	87
5.57	Zobrazení převádějící jednu stranu pravidelného čtyřstěnu v druhou.	88
5.58	Složení dvou rovinných souměrností.	89
5.59	Krychle vepsaná jehlanu.	89
5.60	Barevné značení stěn krychle.	90
5.61	Barevné značení stěn krychle znázorněné v souměrnosti středové (a), osové (b) a rovinné (c).	90
5.62	Obraz a vzor čtyřstěnu v rovinné souměrnosti.	91
5.63	Průnik čtyřstěnu s rovinou ABC v posunutí $T(MN)$.	91
5.64	Dělení trojbokého hranolu na tři trojboké jehlany se shodným objemem.	93
5.65	Lichoběžník vzniklý řezem krychle $ABCDEFGH$ rovinou BEI .	94
5.66	Šestiúhelník vzniklý sjednocením středních příček lichoběžníků (a dvou daných trojúhelníků).	94
5.67	Rotace trojúhelníku postupně kolem všech jeho stran.	95
5.68	Rotační kužel opsaný kouli.	96
5.69	Znázornění odchylky roviny podstavy a boční stěny jehlanu	97
5.70	Vzdálenost přímky MN od roviny DEG .	98
6.1	Krokování konstrukce v programu Cabri 3D.	101
6.2	Ukázka rotace scény v programu Cabri 3D.	102
A.1	Nárys (a), půdorys (b) a bokorys (c) daného tělesa.	113
A.2	Hledané těleso znázorněné ve volném rovnoběžném promítání.	113
A.3	Řezy tělesem.	114

A.4	Průsečnice p neexistuje (a), průsečnice $p = \leftrightarrow S_{AB}S_{CD}$ (b).	114
A.5	Průsečnice rovin - jehlan.	114
A.6	Průsečíky přímky p s hranolem.	115
A.7	Příčka mimoběžek daným bodem (a), daným směrem (b).	115
A.8	Koule procházející vrcholy (a), středy hran (b) a středy stěn (c) krychle.	116

Seznam tabulek

4.1	Vzorce pro výpočty objemů a povrchů mnohostěnů.	49
4.2	Vzorce pro výpočty objemů a povrchů rotačních těles.	51

Seznam graf

7.1	Hodinová dotace stereometrie.	105
7.2	Obsah stereometrie na středních školách technického zaměření.	105
7.3	Obsah stereometrie na ostatních středních školách.	106
7.4	Zastoupení geometrických softwarů ve výuce.	107
7.5	Účely využití geometrických softwarů.	107

Seznam použitých symbolů

$A, B, \dots$	bod $A, B, \dots$
$a, b, \dots$	přímka $a, b, \dots$
$\alpha, \beta, \dots$	rovina $\alpha, \beta, \dots$
AB	úsečka AB
$\leftrightarrow AB$	přímka AB (přímka určená body A, B)
$ AB $	vzdálenost bodů A, B ; délka úsečky AB
$= (\neq)$	je (není) rovno
$\prec \succ$	větší, menší
$\wedge$	a současně
$\perp$	je kolmo
$\in (\notin)$	je (není) prvkem
Z	zobrazení
$Z : X \rightarrow X'$	bod X' je obrazem bodu X v zobrazení Z
$S(\rho)$	rovinná souměrnost podle roviny ρ
$S(S)$	středová souměrnost podle bodu S
$S(o)$	osová souměrnost podle osy o
$T(AB)$	posunutí o orientovanou úsečku AB
$R(S; \varphi)$	otočení se středem S a úhlem otočení φ
$H(S, \kappa)$	stejnolehlost se středem S a koeficientem κ
V	objem tělesa
S	povrch tělesa

Kapitola 1

Úvod

Pojem „matematika“ vyvolává v mnohých z nás představy související s čísly a různými početními operacemi. Matka věd, jak bývá matematika pro svůj esenciální význam pro ostatní exaktní vědy často nazývána, však v sobě ukrývá mnoho témat, která nemusejí mít nutně s počítáním mnoho společného. Jedním z takových je stereometrie, neboli prostorová geometrie, která se zabývá studiem prostorových vztahů. Nemůžeme však říci, že bychom se ve stereometrii bez čísel obešli úplně. Kromě zkoumání polohových vlastností se stereometrie zabývá také určováním odchylek, vzdáleností a výpočty obsahů a objemů těles, které jinak než počítáním obvykle zjistit nelze. Většinou se však jedná o nenáročné početní operace založené na správném vyhodnocení prostorové situace, jež bývá zpravidla složitější než samotný výpočet.

Nejdůležitějším předpokladem pro úspěšné řešení stereometrických úloh je dostatečně rozvinutá prostorová představivost. K jejímu utváření a osvojování ve školním prostředí můžeme použít celou řadu pomůcek. Mezi tradiční pomůcky pro znázornění vzájemných poloh přímek a rovin patří tužky, listy papíru, tabule nebo stěny třídy. Pro znázornění základních těles se používají papírové či drátěné modely a různé druhy stavebnic, ze kterých si žáci mohou požadované těleso sami sestavit. V poslední době se ve školách vedle těchto klasických pomůcek začínají objevovat také různé matematické softwary, které si kladou za cíl zvýšení efektivity výuky. V současné době existuje několik geometrických softwarů, které umožňují pracovat v trojrozměrném prostoru a mohou tedy být použity při výuce prostorové geometrie.

Téma stereometrie a její výuka na střední škole s využitím vybraných geometrických softwarů GeoGebra a Cabri 3D je základním kamenem této diplomové práce. První kapitolu tvoří úvod. Další kapitola je věnována prostorové představivosti, možnostem jejího rozvíjení a některým dalším charakteristikám, které s tímto tématem souvisí. Následující kapitola zprostředkovává pohled na výuku stereometrie na středních školách ve světle školské reformy a záro-

veň představuje základní informace o programech GeoGebra a Cabri 3D. Ve čtvrté kapitole jsou uvedeny teoretické základy stereometrie, jejichž obsah odpovídá přibližně obsahu stereometrie vyučovanému na gymnáziích. Kapitola pátá tvoří nejpodstatnější a nejrozsáhlejší část celé práce. Obsahuje sbírku řešených i neřešených úloh, která je rozdělena do dvou částí. V první části sbírky jsou uvedeny příklady na rozvoj obecné prostorové představivosti, druhá část je věnována tradičním i netradičním úlohám ve výuce středoškolské stereometrie. V následující kapitole autorka shrnuje své poznatky ohledně využívání programu Cabri 3D při výuce řezů během své dvoutýdenní praxe na Střední průmyslové škole strojní a elektrotechnické v Liberci. Předposlední kapitola celé práce poskytuje výsledky průzkumu, který byl zaměřen na současnou podobu výuky stereometrie na středních školách a na využívání geometrických softwarů pro školní účely. Závěr tvoří poslední kapitolu celé práce, tedy kapitolu osmou.

Kapitola 2

Prostorová představivost

Prostorová představivost a její rozvoj je nedílnou součástí výuky stereometrie. Umožňuje nám řešit úlohy týkající se znázorňování těles, vzájemné polohy geometrických útvarů, dále pak prostorové konstrukční úlohy atd. Co se však pod pojmem prostorová představivost vlastně skrývá?

Definicí tohoto pojmu se zabývalo mnoho autorů. Jak můžeme najít v [13], prostorová představivost je jakési vidění prostoru. Ten ale musí vidět každý, kdo vidí. Problém je v tom, že nestačí prostor vidět, ale je nutné si ho též uvědomovat. Jiná definice vysvětluje prostorovou představivost jako schopnost vytvářet, uchovávat, vybavovat si a přetvářet dobře strukturované vizuální obrazy. Nejedná se však o jednotnou koncepci. Ve skutečnosti existuje několik druhů prostorových schopností, z nichž každá zdůrazňuje jiné aspekty vytváření, uchovávání a transformace obrazu. (přeloženo z [9])

Ve výčtu definic by bylo možné pokračovat ještě dlouho, nicméně seznámit čtenáře s různými pohledy na prostorovou představivost není hlavním cílem této práce. Ráda bych zde však uvedla ještě jednu definici prostorové představivosti, která podle mého názoru nejvíce odpovídá stereometrickému pojetí. Prostorová představivost je chápána jako soubor schopností týkajících se reprodukčních i anticipačních, statických i dynamických představ o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru - [12, s. 33].

2.1 Rozvíjení prostorové představivosti

Prostorová představivost se rozvíjí na základě geneticky podmíněných a vrozených vloh. Tento vývoj se realizuje procesem zrání a učení, které je ovlivňováno vlastní činností jedince, prostředím a v neposlední řadě také výchovou. Podle Gergelitsové [2] se většina odborníků přiklání k názoru, že první věková etapa intenzivního rozvoje prostorové představivosti nastává již

v předškolním věku, zhruba okolo pěti let. Děti si v tomto věku vytvářejí základní geometrické představy, které rozvíjejí prostřednictvím různých her v podobě stavebnic a skládanek. K těmto druhům her inklinují zejména chlapci, což by mohlo vysvětlovat, proč muži obecně disponují lepší prostorovou představivostí než ženy. Dalším důležitým obdobím je mladší školní věk, kdy se na rozvoji dítěte podílí významným způsobem i škola. [20, s. 368]

Ačkoli lze prostorovou představivost rozvíjet po celý život a tedy i v dospělosti, její zanedbání ve věku 10-15 let může vést k nedostatečné úrovni prostorového chápání na vyšším vzdělávacím stupni. [2].

2.2 Rozdíly mezi prostorovou představivostí mužů a žen

Zajímavým tématem, nejen z hlediska matematiky, je srovnání mužů a žen, respektive jejich schopností v různých oblastech lidské činnosti. Mnohé výzkumy ukázaly, že mezi oběma skupinami existují statisticky významné rozdíly ve výkonech při řešení úloh týkajících se prostorové představivosti. Bylo zjištěno, že na rozdíl od žen mají muži silně rozvinuté centrum pro prostorové vnímání umístěné v přední části pravé hemisféry, která se navíc vyvíjí rychleji u chlapců než u dívek, a dosahují tedy lepších výsledků v testech prostorové představivosti než ženy. Určitý vliv se přičítá také mužskému pohlavnímu hormonu testosteronu. Ukazuje se, že určitá hladina testosteronu pozitivně ovlivňuje prostorové schopnosti, přičemž pro muže je výhodnější menší koncentrace tohoto hormonu a pro ženy zase naopak vyšší. [12].

Přestože jsou tyto rozdíly mezi oběma pohlavími vědecky potvrzené, učitel by měl přistupovat ke každému žákovi jako k jednotlivci a jeho schopnosti by měl hodnotit podle dosaženého výkonu a ne pouze na základě výsledků vědeckých výzkumů.

2.3 Pohled na prostorovou představivost jako jedno z hlavních kritérií úspěšnosti v životě

Ačkoli pojmy jako prostorová představivost a životní úspěšnost nemají na první pohled nic společného, výzkum pomocí subtestu SP z inteligenčního testu I-S-T Amthauera ukázal pravý opak. Prostorová orientace, jejíž úroveň byla tímto subtestem zjišťována, se ukázala být z hlediska uplatnění v životě mnohem důležitějším faktorem než například známky získané ve škole. Při analýze tohoto překvapivého zjištění byl vyvozen závěr, že nejde jen o prostorovou představivost v původním smyslu, ale o obecnou schopnost orientace ve světě, včetně orientace ve společnosti či na pracovišti. [16]

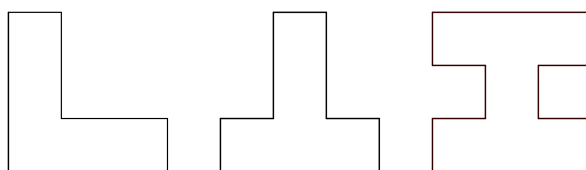
Z uvedeného výzkumu vyplývá, že rozvíjení prostorové představivosti je důležité nejen pro získání dobrých výsledků ve škole ale i pro náš vlastní život, což je dalším důvodem, proč by měli učitelé matematiky nejen na středních školách věnovat tomuto tématu zvýšenou pozornost.

2.4 Vývoj úrovně prostorové představivosti

Na závěr této kapitoly bych ráda zmínila výzkum, jehož cílem bylo porovnat výsledky testu prostorové představivosti, který byl proveden v letech 1984 až 1987 mezi 870 žáky základních a středních škol a studenty učitelství matematiky, a testem složeným z typově shodných úloh, kterého se ve školním roce 2007/2008 zúčastnilo 536 žáků ze sedmi středních škol.

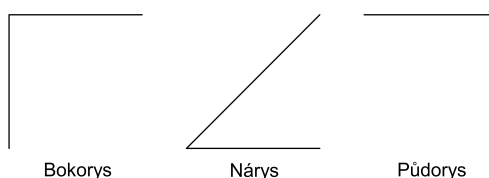
Oba testy se skládaly ze čtyř úloh, které byly obtížností přizpůsobeny danému typu školy. V první úloze měli žáci za úkol rozvinout plášť krychle všemi možnými způsoby, tedy nalézt všech jedenáct sítí krychle.

Druhou úlohou bylo načrtnout těleso, které bylo možno protáhnout bez mezer všemi vyznačenými otvory (obr. 2.1).



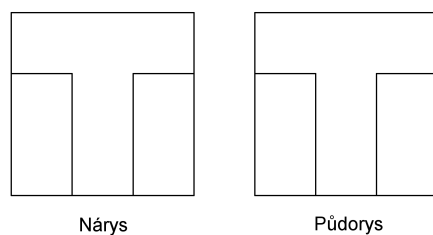
Obrázek 2.1: Ukázka zadání úlohy č. 2 - test prostorové představivosti 2007/2008.

Třetí úloha obsahovala bokorys, nárys a půdorys krychle, na níž je navinut drát (obr. 2.2). Úkolem žáků bylo danou krychli zobrazit ve volném rovnoběžném promítání.



Obrázek 2.2: Ukázka zadání úlohy č. 3 - test prostorové představivosti 2007/2008 .

V poslední úloze byl znázorněn nárys a půdorys tělesa a úkolem bylo načrtnout jeho bokorys (obr. 2.3).



Obrázek 2.3: Ukázka zadání úlohy č. 4 - test prostorové představivosti 2007/2008.

Celkem mohli žáci v jednotlivých testech prostorové představivosti dosáhnout patnácti bodů.

Z porovnání výsledků obou testů vyplynulo, že první, druhou i třetí úlohu řešili významně lépe žáci testovaní v letech 1984/1987, zatímco v úloze čtvrté si nepatrně lépe vedli žáci testovaní v letech 2007/2008. Celkový průměr testu z let 1984 až 1987 dosáhl 6 bodů, zatímco průměr testu provedeného ve školním roce 2007/2008 byl pouze 3,75 bodu. Z dosažených výsledků lze konstatovat, že výkony žáků nejsou uspokojivé a potvrzují snižující se úroveň prostorové představivosti. [12]

Kapitola 3

Stereometrie na střední škole

S tématem stereometrie se ve větším či menším rozsahu setká každý student střední školy. Díky školské reformě, která představuje pro všechny školy přechod od jednotných osnov k vytváření rámcových vzdělávacích programů (RVP), podle nichž si školy tvoří své vlastní školní vzdělávací programy (ŠVP), se obsah a hodinová dotace stereometrie liší jak mezi jednotlivými typy středních škol tak i mezi středními školami, které poskytují vzdělání ve stejném oboru.

3.1 Zařazení tématu stereometrie v ŠVP středních škol

Povinnost zařadit téma stereometrie do ŠVP vychází z očekávaných výstupů definovaných v RVP příslušných oborů středního vzdělávání. V následujícím textu jsou pro ilustraci uvedeny očekávané výstupy pro oblast stereometrie zařazené v RVP pro gymnázia a odborné střední školy s maturitní zkouškou.

Očekávané výstupy - RVP pro gymnázia

Žák

- používá geometrické pojmy, zdůvodňuje a využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině a v prostoru, na základě vlastností třídí útvary;
- určuje vzájemnou polohu lineárních útvarů, vzdálenosti a odchylky;
- využívá náčrt při řešení rovinného nebo prostorového problému;
- v úlohách početní geometrie aplikuje funkční vztahy, trigonometrii a úpravy výrazů, pracuje s proměnnými a iracionálními čísly;

- řeší polohové a nepolohové konstrukční úlohy užitím všech bodů dané vlastnosti, pomocí shodných zobrazení a pomocí konstrukce na základě výpočtu;
- zobrazí ve volné rovnoběžné projekci hranol a jehlan, sestrojí a zobrazí rovinný řez těchto těles;
- řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí. (převzato z [10])

Očekávané výstupy - RVP pro odborné vzdělávání

Žák

- určuje vzájemnou polohu dvou přímek, přímkou a rovinou, dvou rovin, odchylku dvou přímek, přímkou a rovinou, dvou rovin, vzdálenost bodu od roviny.
- určuje povrch a objem základních těles s využitím funkčních vztahů a trigonometrie. (převzato z [11])

Stejně jako se liší očekávané výstupy různých středních škol, liší se i obsah stereometrie, který je těmito výstupům přizpůsoben. Na středních školách poskytujících odborné vzdělání se učivo stereometrie omezuje na základní polohové a metrické vlastnosti v prostoru a určování objemů a povrchů základních těles. Na školách gymnaziálního typu jsou uvedená témata probírána více do hloubky a obsah je dále rozšířen například o shodná a podobná zobrazení či o polohové konstrukční úlohy, které se však v některých případech objevují i na středních odborných školách technického zaměření. S obsahem je svázána i hodinová dotace stereometrie, která je opět individuální záležitostí jednotlivých škol. Bližšímu zkoumání výuky jednotlivých oblastí stereometrie a jejímu časovému rozvržení se věnuje kapitola č. 7, ve které jsou zpracována data z dotazníkového šetření provedeného na středních školách Libereckého kraje.

3.2 Využití vybraných geometrických softwarů při výuce stereometrie

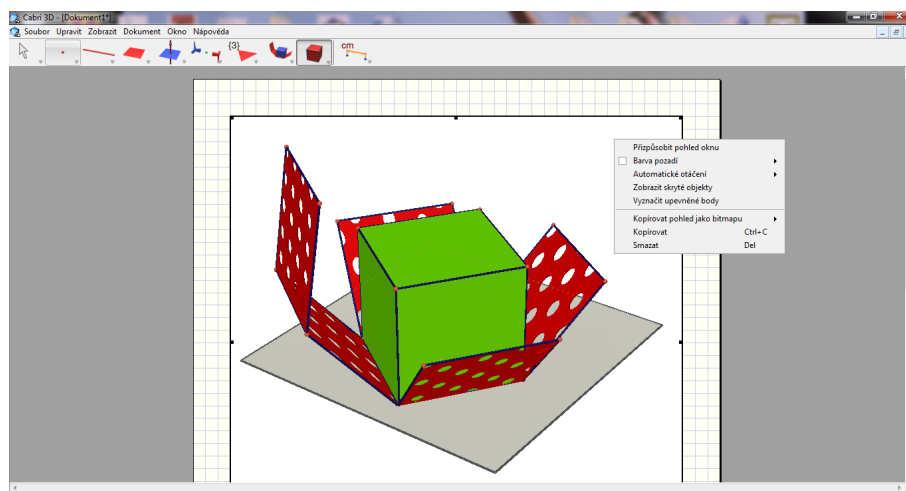
Při výuce stereometrie jsou na žáky kladeny vysoké požadavky z hlediska jejich prostorové představivosti. Velmi důležité je proto dodržet zásadu názornosti a podpořit výklad teorie různými pomůckami, které žákům usnadní pochopení probírané látky a budou vhodně přispívat k rozvoji jejich prostorové představivosti. Běžně používanými pomůckami jsou různé typy modelů těles (drátěné, dřevěné, skládací apod.), papírové sítě nebo běžné prostředky jako tužka,

pravítka či sešít využívané zejména k demonstraci polohových vlastností. Vedle těchto tradičních pomůcek se v posledních letech díky rozvoji počítačové techniky objevilo i množství geometrických softwarů umožňujících práci s dynamickými modely, se kterými lze různě pohybovat či měnit zadání. Mezi nejznámější geometrické softwary používané při výuce stereometrie patří programy Cabri a GeoGebra. Zmíněné softwary byly použity i pro účely vypracování této diplomové práce a jejich základní charakteristika je blíže popsána v následujícím textu.

3.2.1 Cabri 3D

Program Cabri 3D je trojrozměrným následovníkem rovinné verze Cabri II a stejně jako jeho předchůdce je vytvořen přímo pro výukové účely. Ačkoli je program licencovaný a jeho pořízení není levnou záležitostí, patří k současné špičce mezi geometrickými softwary vyvinutými pro školské potřeby. O jeho kvalitách svědčí mimo jiné i skutečnost, že v roce 2007 získal první místo v prestižní mezinárodní soutěži výukových digitálních produktů BETT Award, ve které jsou hodnocena kritéria jako přínos pro výuku, poměr cena - vlastnosti, design a podobně [21].

Prostředí programu je přehledné a uživatelsky nenáročné (obr. 3.1).



Obrázek 3.1: Prostředí geometrického softwaru Cabri 3D.

Cabri 3D lze díky širokému spektru nástrojů a funkcí využít téměř ve všech tématech školské stereometrie - od polohových a metrických úloh přes shodná zobrazení až po výpočty povrchů a objemů těles. U polohových úloh lze díky možnosti rotace a nastavení úhlu pohledu na scénu snadno demonstrovat vzájemné polohy přímek a rovin. Při řešení konstrukčních úloh je neocenitelnou funkcí přehrávání jednotlivých kroků konstrukce. Další zajímavou možností, kterou program nabízí, je vytvoření sítě mnohostěnu nebo příkaz „oříznout mnohostěn“. Oproti své první verzi disponuje druhá verze Cabri 3D metrickými nástroji i nástroji dynamickými jako

jsou stopa a animace pohybu bodu po objektu, které zvyšují využitelnost tohoto programu při výuce. Nicméně při použití metrických nástrojů je třeba upozornit na skutečnost, že v některých případech výsledky získané v programu Cabri 3D nedopovídají přesně výsledkům teoretickým. Důvodem je zaokrouhlování výsledků a způsob konstrukce tělesa.

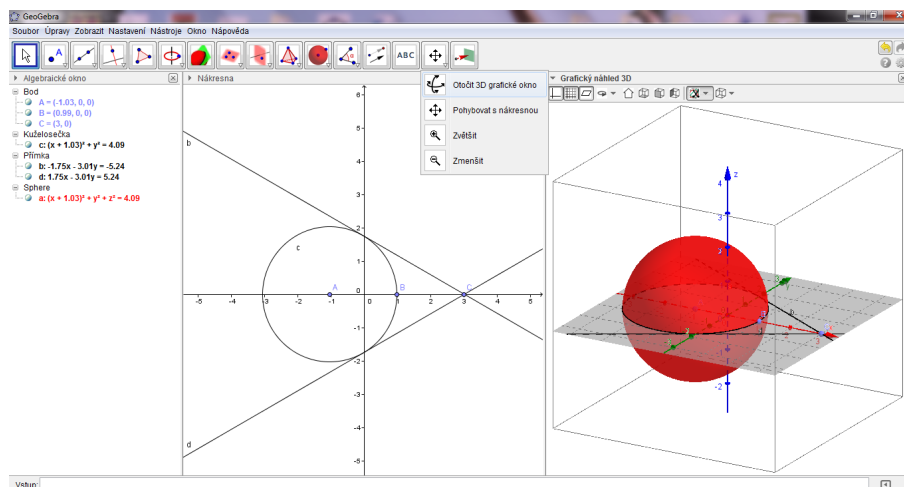
Určitým nedostatkem programu je také jeho využití, které sice vyhovuje oblasti stereometrie, kde je Cabri 3D ideálním prostředkem pro znázornění situace a kontrolu řešení, ale například pro účely analytické geometrie jsou jeho možnosti nedostačující. Ačkoli konstrukce vytvořené v daném prostředí vypadají díky široké paletě barev, variacím tloušťky a stylů čar přehledně, program postrádá možnost nastavení viditelnosti základních těles z nabídky a nelze zde ani nastavit průhlednost plochy. S tím souvisí problém se vzájemným zakrýváním zobrazených ploch a obtížnost výběru zakrytého objektu pro další manipulaci.

I přes zmíněné nedostatky přináší Cabri 3D do výuky rovinné i prostorové geometrie řadu pozitivních prvků. K těm nejdůležitějším patří aktivizace a pozitivní motivace studentů a v neposlední řadě také zvýšení názornosti výuky.

3.2.2 GeoGebra 5.0

GeoGebra je dynamický matematický software, který nachází při výuce matematiky široké uplatnění. Lze využít nejen pro potřeby geometrie, ale i pro výuku algebry a matematické analýzy. Díky rychlému vývoji, kterým tento program od svého vzniku neustále prochází, se v nedávné době objevilo i jeho trojrozměrné pokračování - GeoGebra 5.0 verze beta - která rozšiřuje možnosti jeho využití i na prostorovou geometrii.

Prostředí programu nabízí tři základní okna, ve kterých je možné pracovat (obr. 3.2).



Obrázek 3.2: Prostředí geometrického softwaru GeoGebra 5.0.

Algebraické okno zobrazuje vytvořené objekty prostřednictvím zápisu, nákresna (grafické okno) umožňuje konstrukci objektů v rovině a grafický náhled 3D poskytuje trojrozměrné zobrazení dané konstrukce. Všechna tři okna jsou navzájem propojena, respektive každý objekt nákresny je zobrazen i v grafickém 3D náhledu a jeho zápis je uveden v algebraickém okně. Nákresna i grafický náhled disponují vlastním panelem nástrojů, který umožňuje vytvářet nové objekty. Další způsob vytvoření nového objektu poskytuje vstupní pole s příkazovým řádkem umístěné v dolní části obrazovky, do něhož se zadává nový objekt pomocí algebraického zápisu.

Nabídka nástrojů a způsob ovládání grafického okna je velmi podobný jako v programu Cabri 3D. Stejně jako Cabri 3D nabízí i GeoGebra 5.0 funkci automatického otáčení a funkci animace, která se zde uskutečňuje pomocí nástroje „posuvník“. Navíc však disponuje nastavením průhlednosti ploch a možností dynamického zobrazení nárysu, bokorysu a půdorysu konstrukce.

Velkou výhodou GeoGebry obecně oproti licencovanému Cabri 3D je její volná stažitelnost a neustálý vývoj, který z ní činí stále silnějšího konkurenta placených matematických softwarů.

Kapitola 4

Teoretické základy stereometrie

Pro zpracování teoretických základů stereometrie bylo čerpáno z učebnice *Matematika pro gymnázia - Stereometrie* [19], která nabízí ucelený přehled této tematiky, a částečně z učebnice *Matematiky pro SOŠ a SOU* [15]. Dále byly použity zdroje [14] a [18], které představují vysokoškolské pojetí vybraných stereometrických témat. Vzhledem k tomu, že většina textu byla převzata či upravena podle [19], nachází se v kapitole přímé odkazy pouze na ostatní zdroje. Cílem této kapitoly není podat kompletní přehled teorie stereometrie ale pouze jejích některých částí vybraných s ohledem na sbírku příkladů, která se nachází v následující kapitole.

Stereometrie je část geometrie, která se zabývá vlastnostmi prostorových útvarů. Základními geometrickými útvary stereometrie jsou bod, přímka a rovina. O přímce i o rovině hovoříme jako o neomezených útvarech, neboť obsahují nekonečně mnoho bodů.

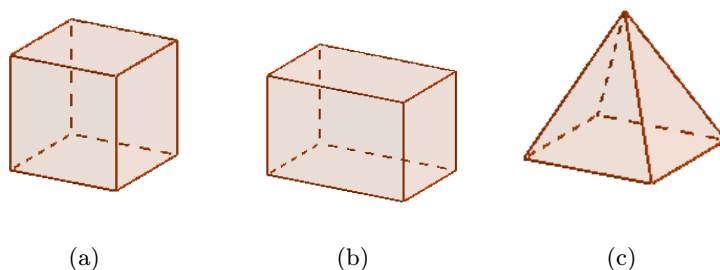
Označení útvarů:

- bod ... velká písmena latinské abecedy $A, B, C, \dots$
- přímka ... malá písmena latinské abecedy $a, b, c, \dots$
- rovina ... malá písmena řecké abecedy $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Volné rovnoběžné promítání

Volné rovnoběžné promítání je jednou z mnoha metod zobrazování prostorových útvarů do roviny (průmětny). Při zobrazování objektů ve volném rovnoběžném promítání (obr. 4.1) musíme zohlednit následující požadavky.

- Pokud rovinné útvary leží v rovinách rovnoběžných s průmětnou, zobrazí se ve skutečné velikosti.



Obrázek 4.1: Krychle (a), kvádr (b) a jehlan (c) ve volném rovnoběžném promítání.

- Shodné a navzájem rovnoběžné úsečky, které nejsou rovnoběžné se směrem promítání, se zobrazí jako úsečky shodné a navzájem rovnoběžné.
- Pokud shodné a navzájem rovnoběžné úsečky jsou rovnoběžné se směrem promítání, zobrazí se jako body.
- Při zobrazování těles svírají úsečky kolmé k průmětně s vodorovnými úsečkami, ležícími v rovinách rovnoběžných s průmětnou, úhel 45° a jejich délka odpovídá polovině jejich skutečné velikosti.

4.1 Polohové vlastnosti

V následujícím textu se budeme věnovat polohovým vlastnostem bodů, přímek a rovin a představíme si řešení některých polohových konstrukčních úloh.

4.1.1 Základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami

Bod, přímka a rovina jsou základními útvary prostorové geometrie. Znalost polohových vlastností těchto útvarů je nezbytným předpokladem pro úspěšné provádění výpočtů i řešení konstrukčních úloh.

Základní tvrzení

1. Dvěma různými body A, B je určena jediná přímka.
2. Leží-li dva různé body v rovině α , pak přímka p jimi určená leží také v rovině α .
3. Mají-li dvě různé roviny α, β společný bod A , pak mají společnou celou přímku, která tímto bodem prochází.

4. Rovina je jednoznačně určena:

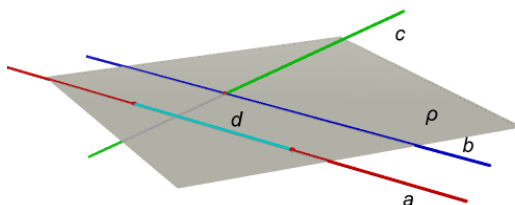
- a) bodem a přímkou, která daným bodem neprochází;
- b) dvěma různoběžnými přímkami;
- c) dvěma různými rovnoběžnými přímkami;
- d) třemi různými body neležícími v přímce.

Libovolná rovina rozděluje prostor na dva navzájem opačné poloprostory a je jejich společnou hraniční rovinou.

Vzájemná poloha dvou přímek

Přímky v trojrozměrném prostoru zaujímají navzájem tři základní polohy (obr. 4.2). Podle těchto poloh rozlišujeme přímky:

- rovnoběžné:
 - a) různé - žádný společný bod;
 - b) splývající - všechny body společné;
- různoběžné - právě jeden společný bod;
- mimoběžné - žádný společný bod.

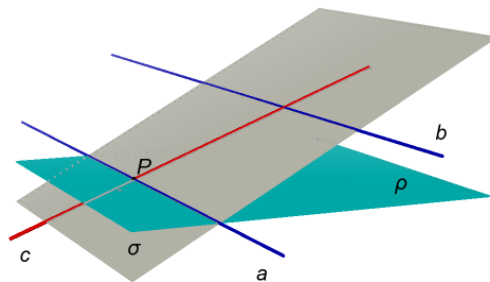


Obrázek 4.2: Přímky rovnoběžné různé (a , b), splývající (a , d), různoběžné (b , c), mimoběžné (a , c).

Vzájemná poloha přímky a roviny

Přímka a rovina mohou být navzájem různoběžné nebo rovnoběžné. Vzájemnou polohu přímky a roviny rozlišujeme podle toho, kolik mají společných bodů (obr. 4.3), tj. mají-li

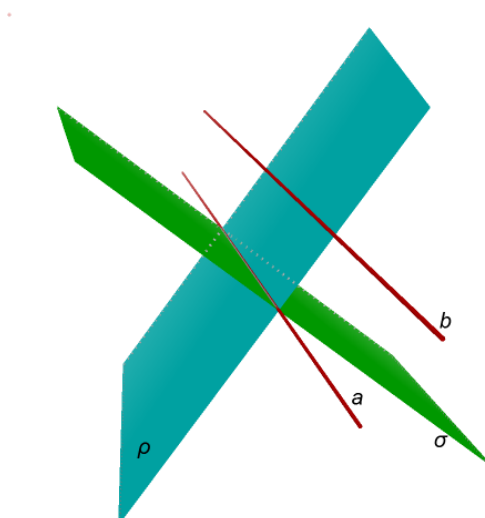
- právě jeden společný bod – přímka je různoběžná s rovinou;
- alespoň dva společné body – přímka je rovnoběžná s rovinou a je její součástí;
- žádný společný bod – přímka je rovnoběžná s rovinou, ale není její součástí.



Obrázek 4.3: Přímka c různoběžná s rovinou ρ , přímka a rovnoběžná splývající s rovinou ρ , přímka b rovnoběžná různá s rovinou ρ .

Rovnoběžnost přímek a rovin:

- Přímka je s rovinou rovnoběžná, jestliže je rovnoběžná alespoň s jednou přímkou roviny.
- Je-li přímka rovnoběžná s dvěma různoběžnými rovinami, je rovnoběžná i s jejich průsečnicí (obr. 4.4).

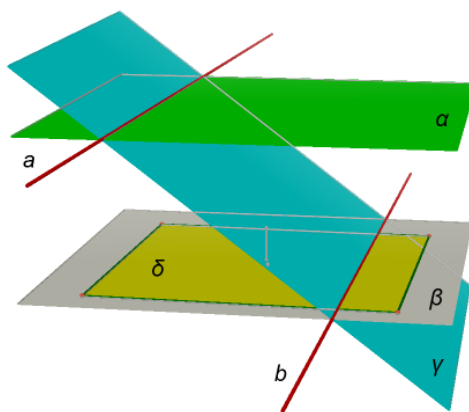


Obrázek 4.4: Rovnoběžnost přímky s průsečnicí dvou navzájem různoběžných rovin.

Vzájemná poloha dvou rovin

Dvě roviny v trojrozměrném prostoru (obr. 4.5) mohou být navzájem:

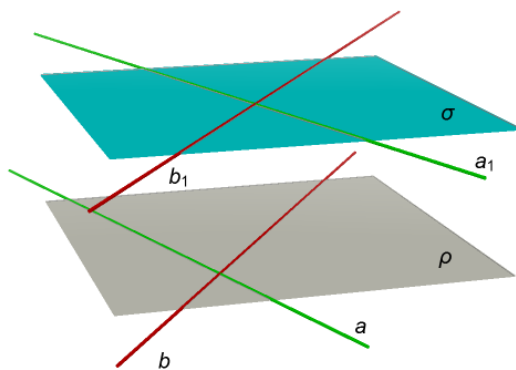
- různoběžné - společná přímka;
- rovnoběžné:
 - a) různé - žádný společný bod;
 - b) splývající - všechny body společné.



Obrázek 4.5: Roviny různoběžné (α, γ ; β, γ ; δ, γ), rovnoběžné různé (α, β ; α, δ), rovnoběžné splývající (β, δ).

Pro rovnoběžnost dvou rovin platí následující dvě tvrzení.

- Dvě roviny jsou rovnoběžné, jestliže v jedné z nich leží dvě různoběžné přímky, které jsou rovnoběžné s druhou rovinou (obr. 4.6).
- Jsou-li dvě rovnoběžné roviny prořaty třetí rovinou, pak jsou vzniklé dvě průsečnice také navzájem rovnoběžné - viz přímky a , b z obrázku 4.5 .

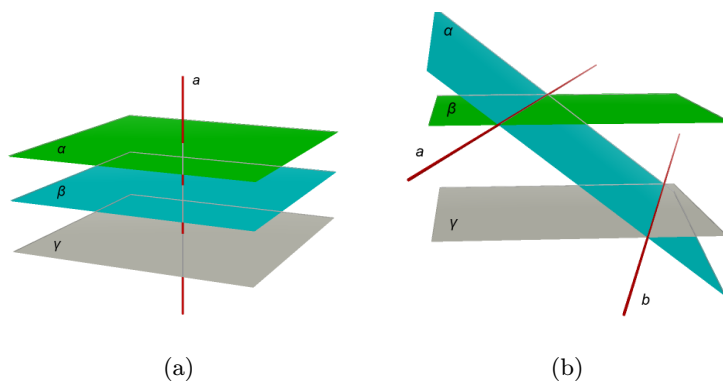


Obrázek 4.6: Rovnoběžnost dvou rovin.

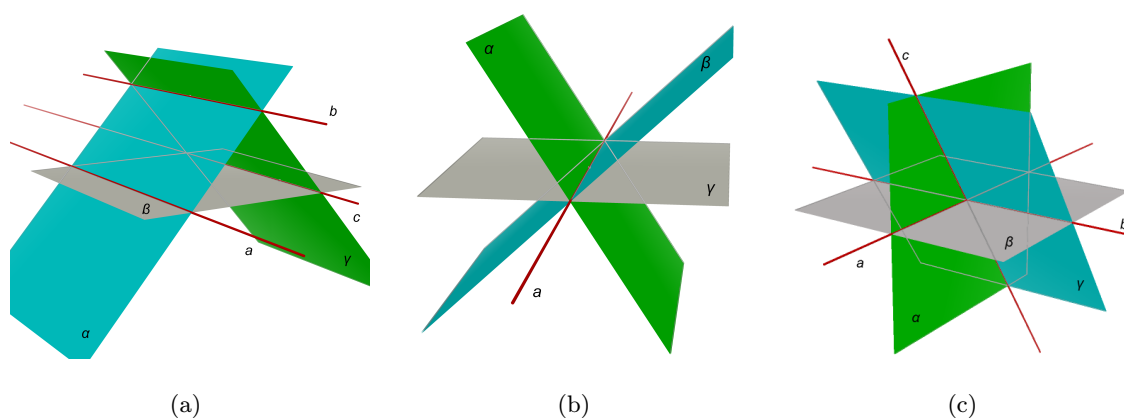
Vzájemná poloha tří rovin

Tři roviny v trojrozměrném prostoru mohou být

- všechny tři navzájem rovnoběžné - obr. 4.7(a);
- dvě rovnoběžné a třetí rovina protínající obě ve dvou navzájem rovnoběžných přímkách - obr. 4.7(b);
- tři po dvou různoběžné (obr. 4.8):
 - a) s jednou společnou průsečnicí;
 - b) s třemi navzájem rovnoběžnými průsečnicemi;
 - c) s třemi různoběžnými průsečnicemi protínajícími se v jediném společném bodě.



Obrázek 4.7: Tři navzájem rovnoběžné roviny (a), dvě rovnoběžné roviny a jedna rovina s nimi různoběžná (b).



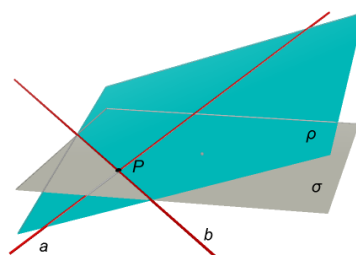
Obrázek 4.8: Tři po dvou různoběžné roviny s třemi navzájem rovnoběžnými průsečnicemi (a), s jednou společnou průsečnicí (b), s třemi průsečnicemi protínajícími se v jednom bodě (c).

4.1.2 Polohové konstrukční úlohy

Průsečík přímky a roviny

Průsečík přímky a , která je různoběžná s rovinou σ , (obr. 4.9) získáme následujícím způsobem:

1. Přímkou a proložíme vhodnou rovinu ρ , která je s rovinou σ různoběžná.
2. Určíme průsečnici b rovin ρ a σ .
3. Průsečík P přímek a a b je hledaným průsečíkem přímky a a roviny σ .



Obrázek 4.9: Průsečík přímky s rovinou.

Řez tělesa rovinou

Průnik tělesa s rovinou nazýváme řezem tělesa rovinou. Jedná se o rovinný útvar, jehož hranice tvoří průnik hranice tělesa a roviny řezu. Pro konstrukci řezů (viz sekce 5.2.2) jsou důležité následující věty a důsledky, které z těchto vět vyplývají.

Věty:

1. Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka, která je jimi určena, leží také v této rovině.
2. Dvě rovnoběžné roviny jsou prořaty třetí rovinou ve dvou rovnoběžných přímkách.
3. Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, potom procházejí tímto bodem všechny tři průsečnice.

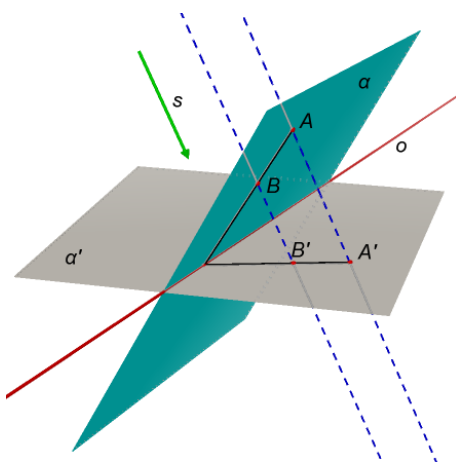
Důsledky:

1. Leží-li dva různé body roviny řezu v rovině některé stěny, leží v rovině stěny i jejich spojnice. Průnik spojnice a stěny je jednou stranou řezu.
2. Jsou-li roviny dvou stěn navzájem rovnoběžné a přitom různoběžné s rovinou řezu, jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn také navzájem rovnoběžné.
3. Průsečnice roviny řezu s rovinami dvou sousedních stěn se protínají v jednom bodě ležícím na přímce, která prochází hranou společnou oběma stěnám.

Osová afinita

Jsou dány dvě různoběžné roviny α a α' a směr s , který není rovnoběžný s žádnou z rovin α a α' . Osová afinita je geometrická příbuznost, kdy bodu jedné roviny odpovídá jeho rovnoběžný průmět ve směru s do druhé roviny.

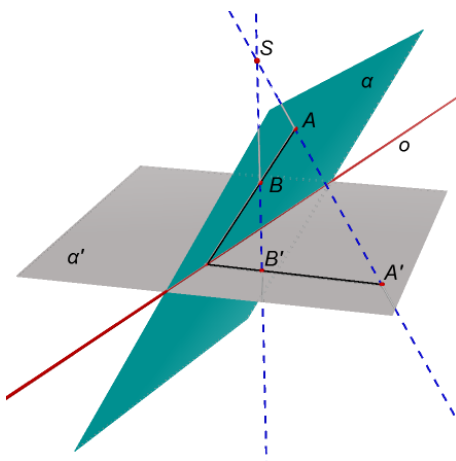
Průsečnice rovin α a α' se nazývá *osa afinity* (obr. 4.10).



Obrázek 4.10: Zobrazení bodů A , B v osově afinitě s osou o .

Středová kolineace

Jsou dány dvě různoběžné roviny α a α' a bod S , který neleží v žádné z rovin α a α' . Středová kolineace¹ je geometrická příbuznost, kdy bodu jedné roviny odpovídá jeho středový průmět z bodu S do druhé roviny. Průsečnice o rovin α a α' se nazývá **osa kolineace**, bod S se nazývá **střed kolineace** (obr. 4.11).



Obrázek 4.11: Zobrazení bodů A , B ve středové kolineaci s osou o .

Průnik přímky s tělesem

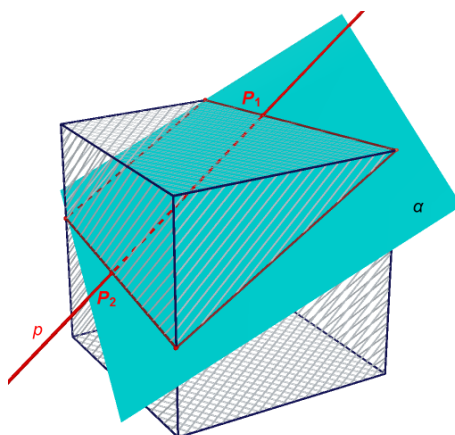
Určování průniku přímky s tělesem (viz sekce 5.2.2) provádíme následujícím způsobem (obr. 4.12):

1. Přímkou proložíme libovolnou rovinu.
2. Určíme řez tělesa touto rovinou.
3. Průnik přímky s řezem tělesa je zároveň průnik přímky s tělesem.

Pokud je tělesem hranol, je vhodné proložit přímkou rovinou rovnoběžnou s bočními hranami hranolu, tato rovina se nazývá **směrová rovina**.

Pokud je tělesem jehlan, vybereme rovinu, která prochází vrcholem jehlanu, tato rovina se nazývá **vrcholová rovina**.

¹Středová kolineace a osová afinita přesahují standardní látku střední školy a představují tak přechod mezi středoškolskou a vysokoškolskou matematikou. Z tohoto důvodu jsou zde zmíněny pouze stručné definice obou typů promítání podle [18] a v následujícím textu se již termíny „afinita“ a „kolineace“ nepoužívají.

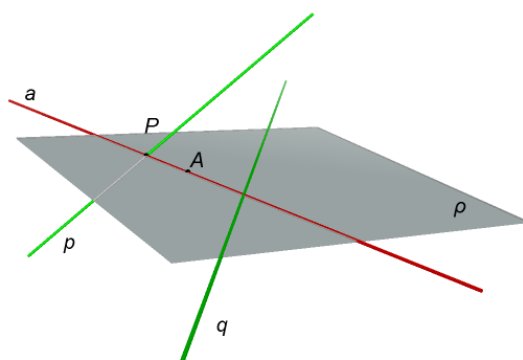


Obrázek 4.12: Průnik přímky s tělesem.

Příčka mimoběžek daným bodem, resp. daným směrem

Příčka mimoběžek je přímka protínající obě mimoběžky nebo úsečka s krajními body na daných mimoběžkách (obr. 4.13). Postup pro určení příčky mimoběžek procházející daným bodem je následující.

1. Jednou mimoběžkou a daným bodem proložíme rovinu.
2. Určíme průsečík roviny a druhé mimoběžky.
3. Spojnice daného bodu a průsečíku je hledanou příčkou.



Obrázek 4.13: Příčka mimoběžek daným bodem.

Úlohu vést příčku mimoběžek daným směrem řešíme obdobně jako úlohu předcházející pouze s tím rozdílem, že vybranou mimoběžkou vedeme rovinu, která je rovnoběžná s daným směrem - viz sekce 5.2.2.

4.2 Metrické vlastnosti

Mezi základní metrické vlastnosti patří určování odchylek, vzdáleností a určování kolmosti.

4.2.1 Odchylka

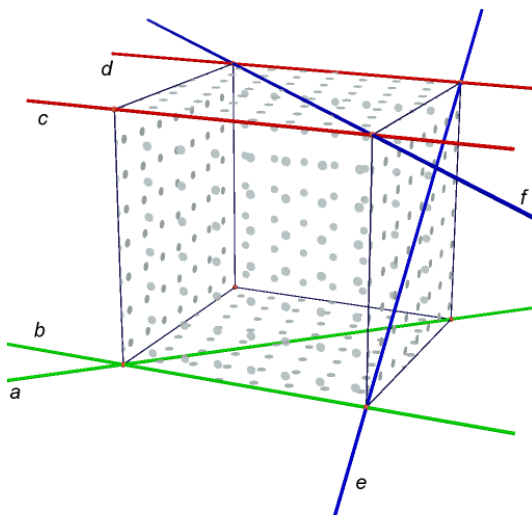
Odchylkou rozumíme úhel, který mezi sebou svírají přímky, roviny, resp. přímky a roviny.

Odchylka dvou přímek

Odchylka α dvou přímek a, b je velikost nulového, ostrého nebo pravého úhlu, který má libovolně zvolený vrchol V a ramena na přímkách a', b' , které procházejí bodem V a jsou rovnoběžné s danými přímkami a, b . [15, s. 161]

- Odchylka dvou rovnoběžných přímek je rovna nulovému úhlu.
- Odchylka dvou různoběžných přímek je velikostí každého z ostrých nebo pravých úhlů, které spolu přímky svírají.
- Odchylka dvou mimoběžných přímek je odchylkou dvou různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami.

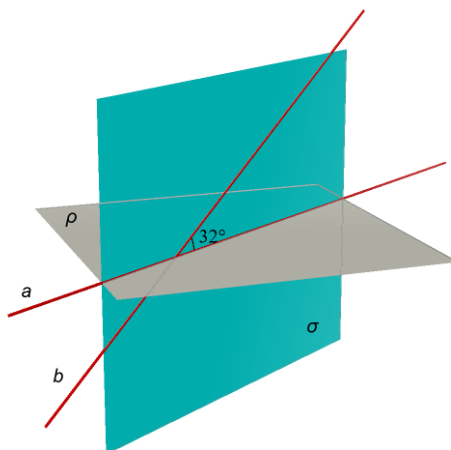
Odchylky můžeme například určovat u přímek procházejících hranami krychle (obr. 4.14).



Obrázek 4.14: Dvojice hran na krychli: různoběžky a, b , rovnoběžky c, d , mimoběžky e, f .

Odchylka přímky a roviny

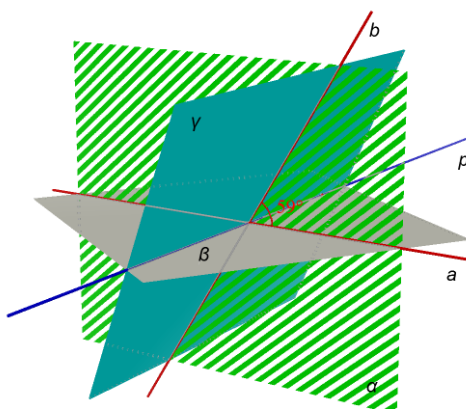
- Odchylka přímky b a roviny ρ , které nejsou navzájem kolmé, je rovna odchylce přímky b a jejího pravoúhlého průmětu a do dané roviny ρ (obr. 4.15).
- Odchylka přímky kolmé k rovině je 90° .



Obrázek 4.15: Odchylka přímky a roviny.

Odchylka dvou rovin

Odchylka dvou rovin β, γ je odchylka jejich průsečnic a, b s rovinou α , která je k oběma daným rovinám kolmá (obr. 4.16).



Obrázek 4.16: Odchylka dvou rovin.

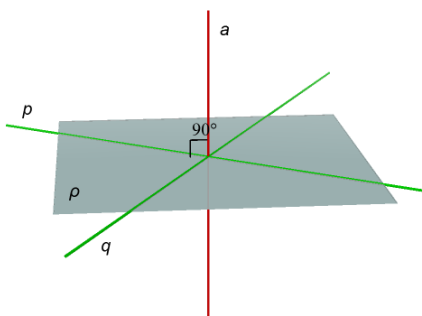
4.2.2 Kolmost

Kolmostí rozumíme odchylku o velikosti 90° mezi přímkami a rovinami.

Kolmost dvou přímek

- Dvě přímky jsou navzájem kolmé, pokud je jejich odchylka 90° .
- Dvě úsečky jsou navzájem kolmé, pokud leží na kolmých přímkách.

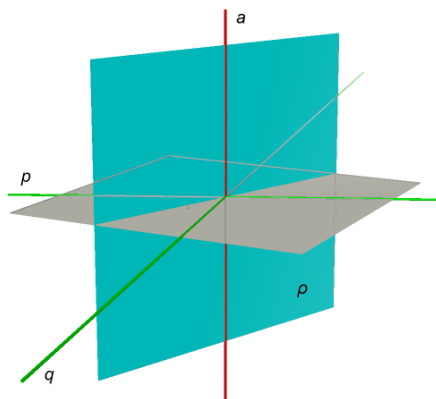
Kritérium kolmosti přímky a roviny: *Je-li přímka kolmá ke dvěma různoběžným přímkám roviny, pak je k rovině kolmá* (obr. 4.17).



Obrázek 4.17: Kolmost přímky a roviny.

Kolmost dvou rovin

Dvě roviny jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé rovině (obr. 4.18).



Obrázek 4.18: Kolmost dvou rovin.

4.2.3 Vzdálenost

Vzdáleností rozumíme nejkratší možnou spojnicí mezi danými geometrickými útvary.

Vzdálenost bodu od přímky

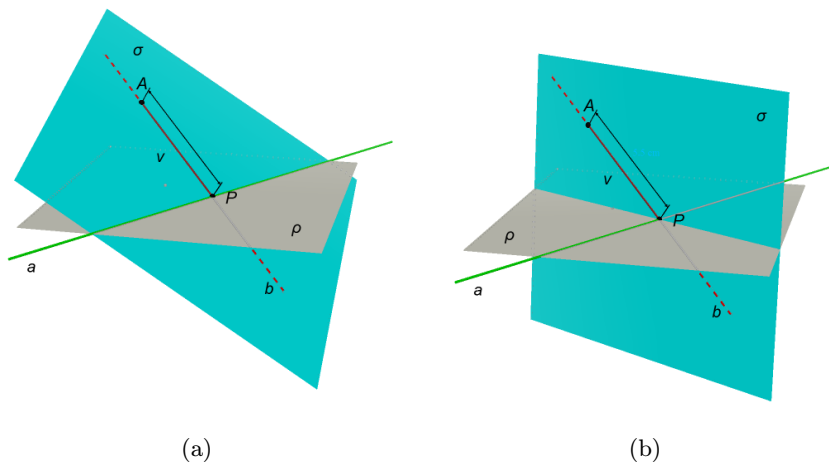
Pro zjištění vzdálenosti bodu A od přímky a můžeme použít následující dva postupy.

První postup - obr. 4.19(a):

1. Sestrojíme rovinu $\sigma = Aa$.
2. V této rovině z bodu A spustíme kolmici b k přímce a .
3. Vzdálenost bodu A od paty P kolmice b je hledaná vzdálenost $v = |AP| = |Aa|$.

Druhý postup - obr. 4.19(b):

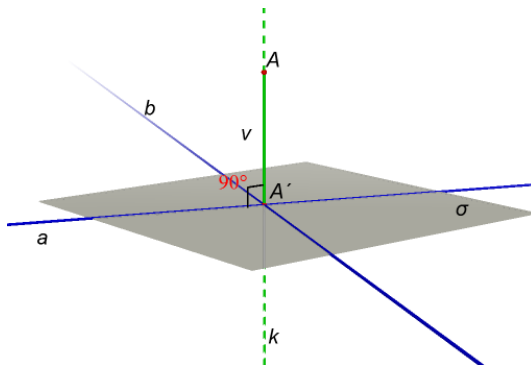
1. Sestrojíme rovinu σ , kde $A \in \sigma \wedge \sigma \perp a$.
2. Určíme průsečík P přímky a s rovinou σ .
3. V rovině σ určíme velikost úsečky AP , která odpovídá hledané vzdálenosti bodu A od přímky a .



Obrázek 4.19: Určení vzdálenosti bodu od přímky podle prvního způsobu (a) a podle druhého způsobu (b).

Vzdálenost bodu od roviny

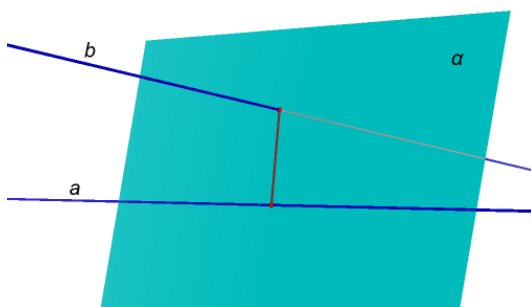
Vzdálenost bodu A od roviny σ je vzdálenost bodu A a jeho pravoúhlého průmětu A' do roviny σ (obr. 4.20).



Obrázek 4.20: Vzdálenost bodu od roviny.

Vzdálenost přímek a rovin

- Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek je vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky.
- Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny.
- Vzdálenost přímky a roviny s ní rovnoběžné je vzdálenost libovolného bodu přímky od této roviny.
- Vzdálenost dvou mimoběžných přímek je velikost takové příčky mimoběžek, která je k oběma z nich kolmá. Jde o nejmenší vzdálenost mimoběžek (obr. 4.21).



Obrázek 4.21: Vzdálenost dvou mimoběžek.

4.3 Zobrazení

Zobrazení Z v prostoru je předpis, kterým bodu X prostoru přiřazujeme právě jeden bod X' prostoru. Bod X se nazývá **vzor** a bod X' jeho **obraz**. Zápis uvedeného vztahu vypadá následujícím způsobem: $Z: X \rightarrow X'$. Množinu obrazů všech bodů útvaru U značíme U' a nazýváme **obraz útvaru U** .

Bod X , pro jehož obrazy platí $X' = X$, se nazývá **samodružný bod** zobrazení.

Útvar U , pro který platí $U' = U$, se nazývá **samodružný útvar** zobrazení.

Útvar, ve kterém je každý bod samodružný, se nazývá IDENTITA.

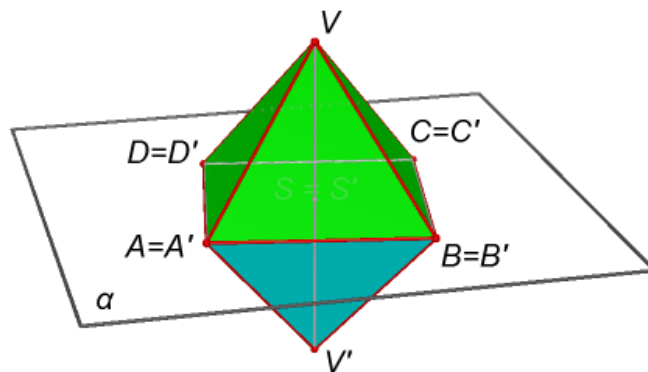
4.3.1 Shodná zobrazení

Rovinná souměrnost

Je dána rovina ρ . Souměrnost podle roviny ρ (rovinná souměrnost) v prostoru je shodné zobrazení $S(\rho)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \notin \rho$ bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k rovině ρ a střed úsečky XX' leží v rovině ρ ;
2. každému bodu $Y \in \rho$ bod $Y' = Y$.

Rovina ρ se nazývá **rovina souměrnosti**. Zobrazení pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ v rovinné souměrnosti $S(\alpha)$, jehož podstava leží v rovině α , ukazuje obrázek 4.22.



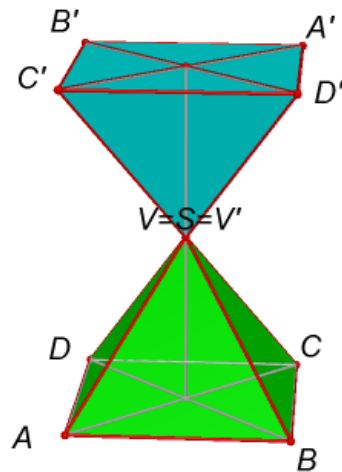
Obrázek 4.22: Zobrazení jehlanu $ABCDV$ v rovinné souměrnosti $S(\alpha)$.

Středová souměrnost

Je dán bod S . Souměrnost podle středu S (středová souměrnost se středem S) v prostoru je shodné zobrazení $S(S)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX' ;
2. bodu S bod $S' = S$.

Bod S se nazývá **střed souměrnosti**. Zobrazení pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ ve středové souměrnosti $S(S)$, kde $S = V$, ukazuje obrázek 4.23.



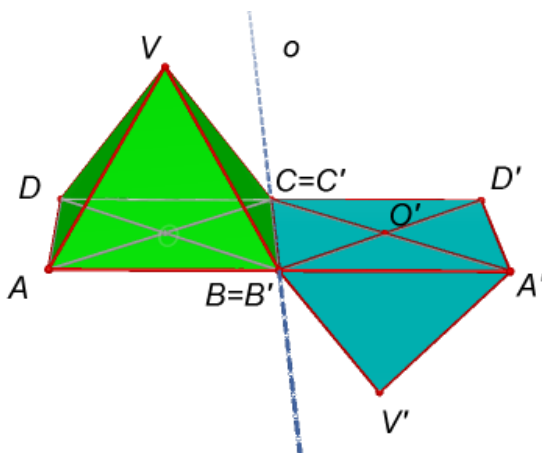
Obrázek 4.23: Zobrazení jehlanu $ABCDV$ ve středové souměrnosti $S(S)$, kde $S = V$.

Osová souměrnost

Je dána osa o . Souměrnost podle osy o (osová souměrnost s osou o) v prostoru je shodné zobrazení $S(o)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na přímce o ;
2. každému bodu $Y \in o$ bod $Y = Y'$.

Přímka o se nazývá **osa souměrnosti**. Na obrázku 4.24 je znázorněn pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ v osově souměrnosti $S(o)$ podle přímky $o = \leftrightarrow BC$.

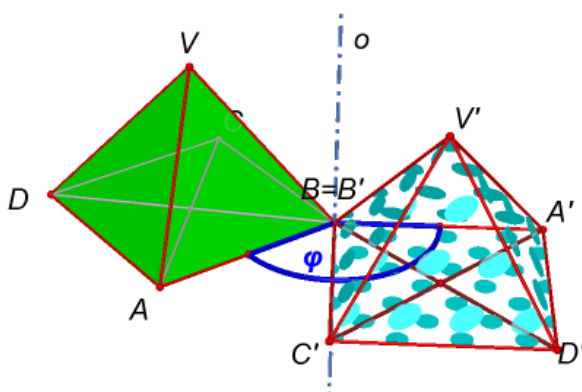
Obrázek 4.24: Zobrazení jehlanu $ABCDV$ v osové souměrnosti $S(o)$.

Otočení

Je dána přímka o a orientovaný úhel, jehož velikost je φ . Otočení kolem přímky neboli rotace v prostoru je shodné zobrazení $R(o, \varphi)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že paty kolmic z bodů X, X' k přímce o splývají v bodě S_x , rovina XS_xX' je kolmá k ose o , a orientovaný úhel XS_xX' má velikost φ ;
2. každému bodu $Y \in o$ bod $Y' = Y$.

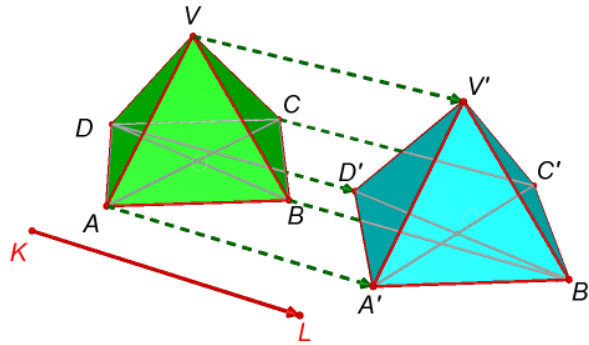
Přímka o se nazývá **osa otočení**, úhel φ se nazývá **úhel otočení**. Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ v rotaci $R(o, \varphi)$, kde $B \in o \wedge o \perp ABC$ znázorňuje obrázek 4.25.

Obrázek 4.25: Zobrazení jehlanu $ABCDV$ v otočení $R(o, \varphi)$.

Posunutí

Je dána nenulová orientovaná úsečka AB . Posunutí neboli translace v prostoru je shodné zobrazení $T(AB)$, které každému bodu X přiřazuje právě jeden bod X' tak, že orientované úsečky XX' a AB mají stejnou délku a stejný směr.

Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ znázorněný v posunutí $T(KL)$ - obr. 4.26.



Obrázek 4.26: Zobrazení jehlanu $ABCDV$ v posunutí $T(KL)$.

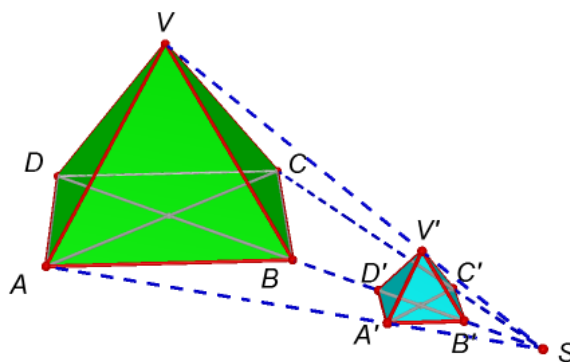
4.3.2 Podobná zobrazení

Stejnolehlost

Je dán bod S a reálné číslo κ ($\kappa \neq 0$). Stejnolehlost (homotetie) se středem S a koeficientem κ je zobrazení $H(S, \kappa)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že platí: $|SX'| = |\kappa| \cdot |SX|$; přitom pro $\kappa > 0$ leží bod X' na polopřímce SX , pro $\kappa < 0$ je bod X' bodem polopřímky opačné;
2. bodu S bod $S' = S$.

Číslo κ se nazývá **koeficient stejnoolehlosti**. Znázornění pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ ve stejnoolehlosti $H(S, \kappa)$, kde $0 < \kappa < 1$, ukazuje obrázek 4.27.

Obrázek 4.27: Zobrazení jehlanu $ABCDV$ ve stejnolehlosti $H(S, \kappa)$.

4.4 Tělesa

Tělesem se rozumí prostorově omezený souvislý geometrický útvar, jehož hranicí (nazývanou také povrchem) je uzavřená plocha. V následujícím textu budou s ohledy na účely této diplomové práce stručně zmíněny základní charakteristiky nejdůležitějších těles běžně probíraných ve stereometrii včetně těles rotačních.

4.4.1 Mnohostěny

Mnohostěnem se rozumí každé těleso, jehož hranice (povrch) je tvořen sjednocením n mnohoúhelníků (stěn) takových, že strana každého z nich je zároveň stranou sousedního mnohoúhelníku a žádné dva sousední mnohoúhelníky neleží v jedné rovině.

Mnohostěny můžeme rozdělit na tělesa hranolového typu (např. krychle, kvádr) a tělesa jehlanového typu (např. čtyřstěn).

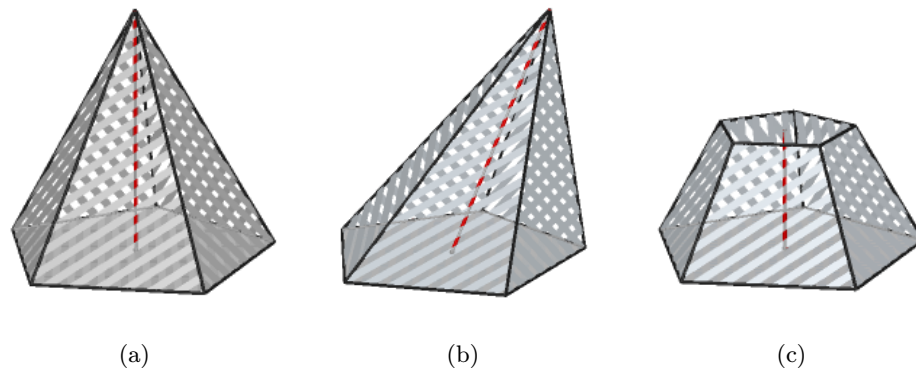
Dělení hranolů:

- **Kolmý hranol** - boční hrany hranolu jsou kolmé k rovině jeho podstavy.
- **Kosý hranol** - boční hrany hranolu nejsou kolmé k rovině jeho podstavy.

Dělení jehlanů:

- **Kolmý jehlan** - přímka procházející vrcholem jehlanu a středem souměrnosti podstavy (pokud existuje) je kolmá k rovině podstavy.
- **Kosý jehlan** - přímka procházející vrcholem jehlanu a středem souměrnosti podstavy (pokud existuje) není kolmá k rovině podstavy. (Obr. 4.28(b))

Kolmý hranol a kolmý jehlan, jejichž podstavami jsou pravidelné n -úhelníky, se nazývají **pravidelný n -boký hranol** a **pravidelný n -boký jehlan** - obr. 4.28(a). Pokud je jehlan rozdělen rovinou rovnoběžnou s podstavou na dvě tělesa, z nichž jedno je opět jehlan, nazývá se druhé těleso vzniklé řezem **komolý jehlan** - obr. 4.28(c).



Obrázek 4.28: Pravidelný pětiboký jehlan (a), kosý jehlan (b), pravidelný pětiboký komolý jehlan (c).

Objemy a povrchy mnohostěnů

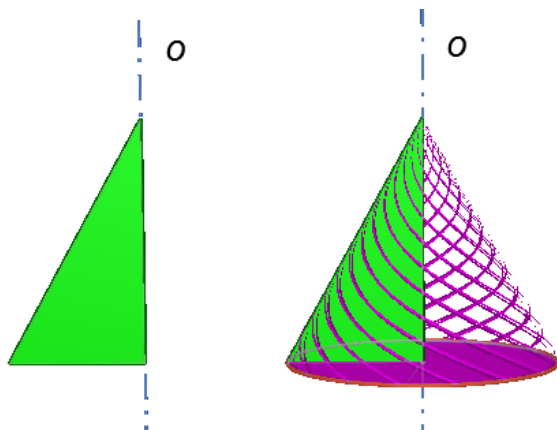
V následující tabulce 4.1 jsou uvedeny vzorce pro výpočet objemů a povrchů základních mnohostěnů.

Těleso	Objem	Povrch	Značení
Hranol	$V = S_p v$	$S = 2S_p + S_{pl}$	v ... výška S_p ... obsah podstavy S_{pl} ... obsah pláště
Jehlan	$V = \frac{1}{3} S_p v$	$S = S_p + S_{pl}$	v ... výška S_p ... obsah podstavy S_{pl} ... obsah pláště
Komolý jehlan	$V = \frac{1}{3} v (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$	$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$	v ... výška S_1 ... obsah dolní podstavy S_2 ... obsah horní podstavy S_{pl} ... obsah pláště

Tabulka 4.1: Vzorce pro výpočty objemů a povrchů mnohostěnů.

4.4.2 Rotační tělesa

Rotační těleso je těleso, které vzniklo rotací rovinného obrazce kolem dané přímky, tzv. osy rotačního tělesa.



Obrázek 4.29: Rotační kužel vzniklý rotací pravoúhlého trojúhelníka kolem odvěsny.

Nejčastěji vznikají rotační tělesa rotací rovinného útvaru kolem přímky obsahující jednu jeho stranu:

- **rotační válec** - čtverec nebo obdélník, rotace kolem libovolné strany;
- **rotační kužel** - pravoúhlý trojúhelník, rotace kolem jedné z odvěsen (obr. 4.29);
- **komolý rotační kužel** - pravoúhlý lichoběžník, rotace kolem kratšího ramene;
- **koule** - půlkruh.

Rotační těleso zvané **anuloid**, neboli torus, vzniká rotací kruhu kolem přímky, která není jeho součástí, ale leží ve stejné rovině jako daný kruh.

Objemy a povrchy rotačních těles

Vzorce pro výpočty objemů a povrchů základních těles znázorňuje tabulka 4.2. V případě koule existují vedle vzorců pro výpočet objemu a povrchu celého tělesa i vzorce pro výpočet částí koule:

- **Objem kulové úseče:** $V = \frac{v}{6}\pi(3r_1^2 + v^2)$, kde r_1 je poloměr podstavy úseče a v je výška úseče.
- **Objem kulové vrstvy:** $V = \frac{v}{6}\pi(3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2)$, kde r_1 a r_2 jsou poloměry podstav vrstvy a v výška vrstvy.

- **Objem kulové výseče:** $V = \frac{v}{6}\pi(3r_1^2 + v^2) + \frac{1}{3}\pi r_1^2(r - v)$, kde r_1 je poloměr kulové úseče, v výška kulové úseče a r poloměr koule.
- **Povrch kulového vrchlíku nebo pásu:** $S = 2\pi r v$, kde r je poloměr kulové plochy a v výška vrchlíku (pásu).

Rotační těleso	Objem	Povrch	Značení
Rotační válec	$V = \pi r^2 v$	$S = 2\pi r(r + v)$	$v \dots$ výška $r \dots$ poloměr podstavy
Rotační kužel	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$	$S = \pi r(r + s)$	$v \dots$ výška $r \dots$ poloměr podstavy $s \dots$ délka strany rozvinutého pláště
Komolý rotační kužel	$V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$	$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 +$ $+ \pi s(r_1 + r_2)$	$v \dots$ výška $r_1, r_2 \dots$ poloměry podstav $s \dots$ délka strany rozvinutého pláště
Koule	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$S = 4\pi r^2$	$r \dots$ poloměr
Anuloid	$V = 2\pi^2 r^2 R$	$S = 4\pi^2 r R$	$r \dots$ poloměr kruhu $R \dots$ vzdálenost středu kruhu od osy rotace

Tabulka 4.2: Vzorce pro výpočty objemů a povrchů rotačních těles.

Objem a obsah pláště rotačních těles je možné vypočítat také pomocí určitého integrálu. Vzhledem k tomu, že integrální počet je probírán pouze na některých typech středních škol a tvoří přechod mezi středoškolským a vysokoškolským učivem, jsou zde oba vzorce (převzaté z [14, str. 124]) pro úplnost uvedeny, ale v příkladech (viz sekce 5.2.5) se pro výpočet obsahů a objemů rotačních těles používají vzorce uvedené v tabulce 4.2.

Výpočet obsahu pláště rotačního tělesa: Obsah Q pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky, vytvořené jako graf spojitě nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ kolem osy x je dán vztahem

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Výpočet objemu rotačního tělesa: Objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky, vytvořené jako graf spojitě nezáporné funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, kolem osy x je dán vztahem

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Kapitola 5

Sbírka příkladů

Sbírka příkladů, které je věnován následující text, vychází z teoretického základu stereometrie uvedeného v předchozí kapitole. Text sbírky je rozdělen do dvou základních částí. První se zabývá obecnou prostorovou představivostí a druhá je věnována tématům stereometrie běžně probíraným na střední škole. Jednotlivá témata obsahují řešené úlohy doplněné o případný komentář i neřešené úlohy, jejichž výsledky jsou uvedeny v příloze.

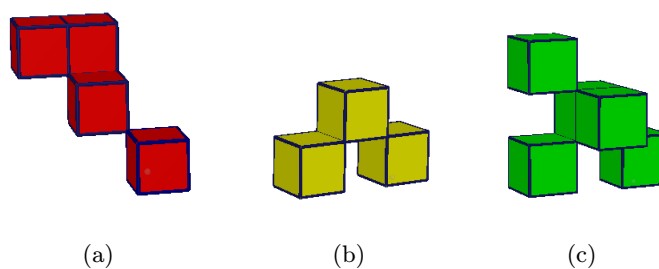
Příklady použité v této sbírce byly převzaty z různých zdrojů, podle těchto zdrojů upraveny, nebo samostatně vytvořeny. Úpravy se týkaly nejčastěji značení nebo rozsahu zadání, které bylo podle potřeby rozšířeno nebo zkráceno. Výběr příkladů byl přizpůsoben také možnostem geometrických softwarů, ve kterých byly k jednotlivým příkladům vytvořeny doprovodné obrázky. I přes určité nedostatky (např. chybějící viditelnost při konstrukci těles) byla díky snadnému ovládání a možnostem znázornění pohybu vytvořena většina obrázků v programu Cabri 3D.

5.1 Úlohy na rozvoj obecné prostorové představivosti

V první části zacílené na rozvoj obecné prostorové představivosti najdeme úlohy na odvalování krychle, určování nárysu, bokorysu a půdorysu těles zobrazených ve volném rovnoběžném promítání, úlohy využívající síti těles a další. Mezi hlavní zdroje, které byly využity pro výběr příkladů do této části sbírky, patřily publikace od J. Molnára [12], a V. Repáše [20], které zároveň sloužily jako cenná inspirace pro vlastní návrhy.

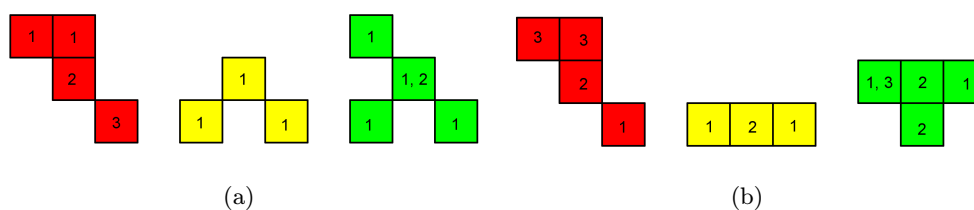
Úloha č. 1

Kótový zápis krychlového tělesa je způsob znázornění tělesa pomocí čísel symbolizujících přítomnost krychle v dané vrstvě. Na obrázku 5.1 jsou pomocí tohoto zápisu znázorněna tři krychlová tělesa.



Obrázek 5.4: Krychlová tělesa.

Řešení: Řešení úlohy ukazuje obrázek 5.5.

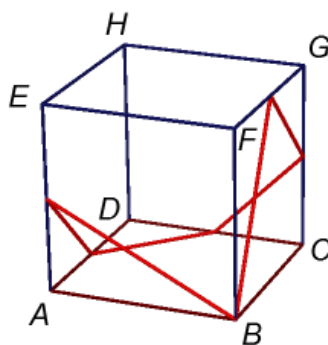


Obrázek 5.5: Kótový zápis těles při pohledu zepředu (a) a shora (b).

KOMENTÁŘ: Pro obměnu úlohy můžeme zvolit jiné druhy pohledů, např. z boku. Celou úlohu je také možno obměnit tak, že studenti určí krychlové těleso podle jeho kótového zápisu.

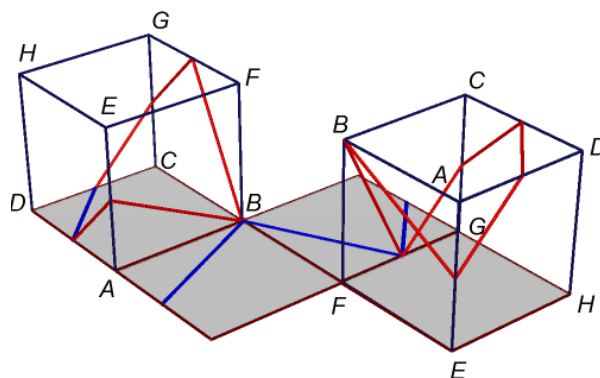
Úloha č. 3

Určete polohu lomené čáry znázorněné na drátěném modelu krychle (obr. 5.6) a její otisk po odvalení krychle jednou směrem k pozorovateli, jednou vpravo z pohledu pozorovatele a ještě jednou vpřed směrem k pozorovateli. (*vlastní návrh*)



Obrázek 5.6: Lomená čára na drátěném modelu krychle.

Řešení: Orientace lomené čáry drátěného modelu krychle po odvalení i její stopa (znázorněna modře) jsou uvedeny na obrázku 5.7.

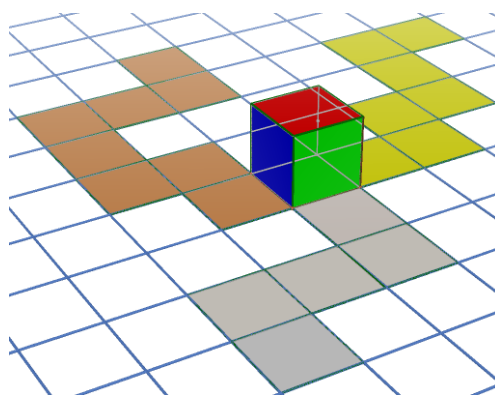


Obrázek 5.7: Orientace lomené čáry a její stopy po odvalení.

KOMENTÁŘ: Ke znázornění konečné podoby lomené čáry je zapotřebí určit výslednou orientaci krychle, respektive jejích vrcholů. Náročnost úlohy můžeme zvýšit nebo naopak snížit prostřednictvím instrukcí ohledně používání pomůcek. Modely krychlí a možnost využití náčrtku mohou řešení značně usnadnit.

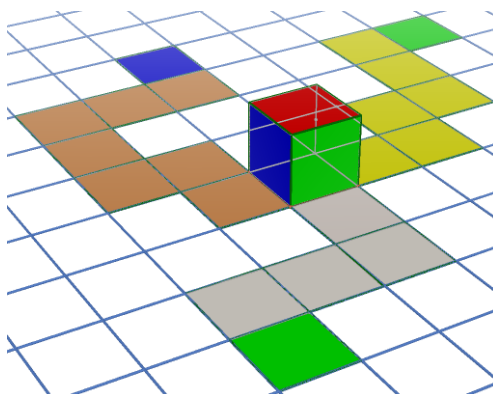
Úloha č. 4

Krychle na obrázku 5.8 má každé dvě protější stěny natřeny stejnou barvou. Urči barvu posledního políčka, která odpovídá barvě stěny, na které stojí krychle při dokončení odvalování po šedé, žluté a hnědé cestě. (*vlastní návrh*)



Obrázek 5.8: Odvalování krychle po vyznačené cestě.

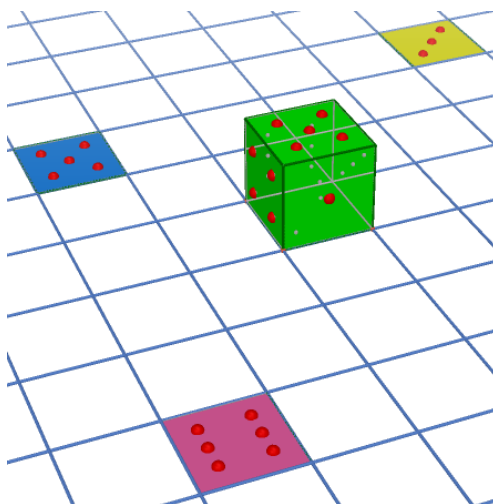
Řešení: Odvalováním po šedé a žluté cestě skončí krychle na posledním políčku zelenou stěnou. Při odvalování po hnědé cestě se pak krychle zastaví na modré stěně (obr. 5.9).



Obrázek 5.9: Určení barevného políčka po dokončení odvalování.

Úloha č. 5

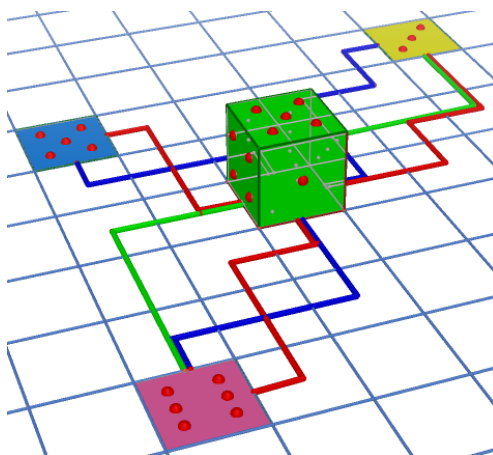
Hrací kostka má stěny označené od jedné do šesti, přičemž součet bodů protějších stěn je vždy sedm. Najděte nejkratší způsob odvalení krychle tak, aby se dostala správnou stěnou na žluté, modré a červené políčko (obr. 5.10). (*vlastní návrh*)



Obrázek 5.10: Hledání nejkratší cesty odvalení krychle na dané políčko.

Řešení: Možnosti nejkratšího způsobu odvalení znázorňuje obrázek 5.11.

KOMENTÁŘ: Ke každému z barevných políček se lze dostat nejkratším způsobem více cestami,

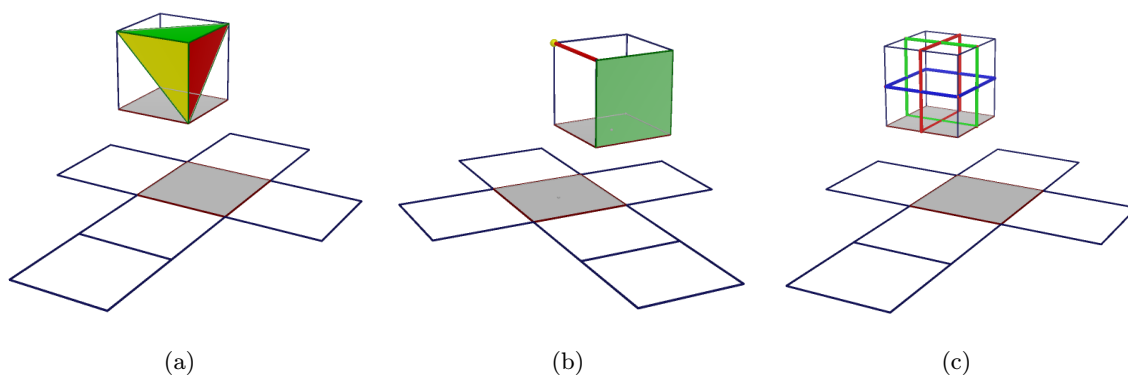


Obrázek 5.11: Znázornění nejkratších cest odvalení krychle na daná políčka.

které se však skládají ze shodného počtu políček. Úlohu můžeme obměnit například tak, že žáky necháme hledat cestu, která obsahuje oproti nejkratší cestě jedno políčko navíc.

Úloha č. 6

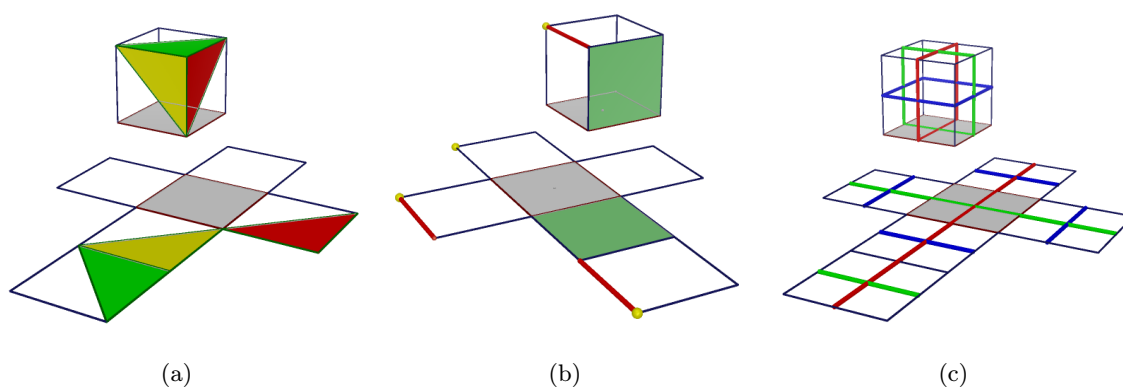
Na obrázku 5.12 jsou znázorněny tři krychle s různým barevným značením vybraných částí a jejich sítě, v nichž je však označena pouze dolní podstava krychle. Doplňte barevné značení krychlí do přiložených sítí. (*vlastní návrh*)



Obrázek 5.12: Krychle a jejich sítě s vyznačenou spodní podstavou.

Řešení: Řešení úlohy je znázorněno na obrázku 5.13.

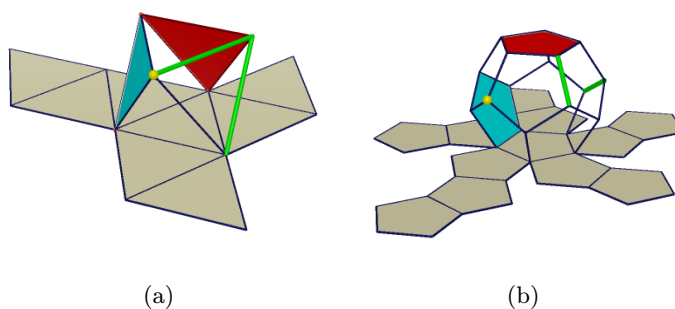
KOMENTÁŘ: V případě „b“ má krychle kromě jedné stěny označenou také jednu hranu a jeden vrchol. Vzhledem k tomu, že v krychli je každá hrana společná dvěma stěnám a každý vrchol přísluší třem hranám, musí být tato skutečnost znázorněna i v síti krychle.



Obrázek 5.13: Krychle a jejich sítě s barevným vyznačením vybraných částí.

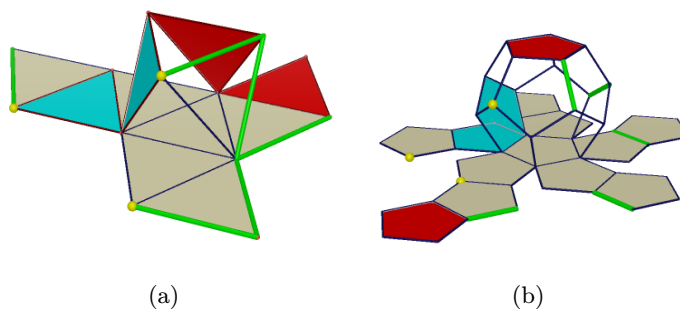
Úloha č. 7

Na obrázku 5.14 jsou znázorněny dva pravidelné mnohostěny - osmistěn a dvanáctistěn - s barevně vyznačenými prvky (2 stěny, 2 hrany a 1 vrchol). Vyznačte tyto prvky v síti uvedených těles. (*vlastní návrh*)



Obrázek 5.14: Osmistěn s dvanáctistěnem a jejich sítě.

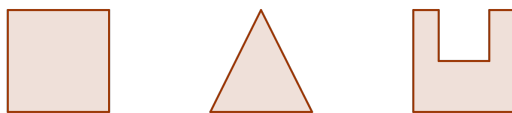
Řešení: Barevné značení sítí odpovídající značení obou mnohostěňů ukazuje obrázek 5.15.



Obrázek 5.15: Sítě osmistěnu a dvanáctistěnu s odpovídajícím barevným značením.

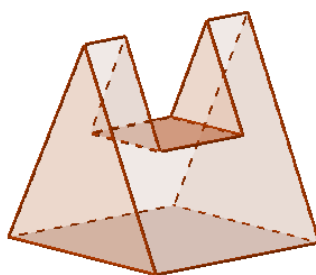
Úloha č. 8

Zobrazte ve volném rovnoběžném promítání těleso, které lze „natěsno“ bez mezer protáhnout otvory uvedenými na obrázku 5.16. (převzato z [12, s. 199])



Obrázek 5.16: Otvory určené k protažení hledaného tělesa.

Řešení: Těleso, které lze bez mezery protáhnout zadanými otvory je zobrazeno na obrázku 5.17.

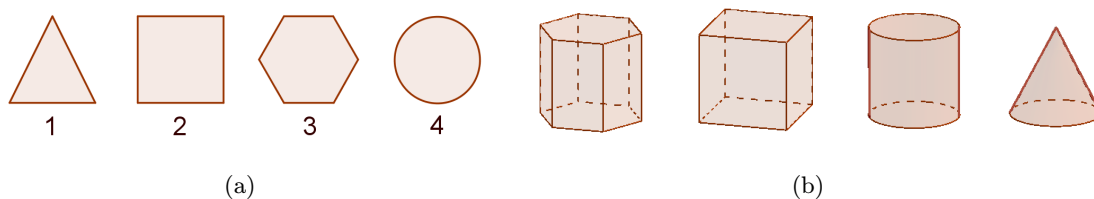


Obrázek 5.17: Hledané těleso.

KOMENTÁŘ: Tři otvory, kterými lze protáhnout „natěsno“ dané těleso tvoří ve skutečnosti nárys, bokorys a půdorys tohoto tělesa. V programu GeoGebra 5.0 je možné plynule přecházet mezi nárysem, bokorysem a půdorysem určeného tělesa (viz. příloha na CD).

Úloha č. 9

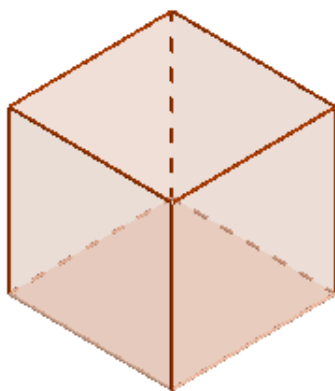
Na obrázku jsou znázorněna po řadě čtyři tělesa - hranol, krychle, kužel a válec - a čtyři otvory (obr. 5.18). Ke každému otvoru určete všechna tělesa, které je možné tímto otvorem bez mezery protáhnout z jedné strany na druhou. (upraveno podle [12, s. 118])



Obrázek 5.18: Otvory a tělesa určená k protažení.

Řešení: Prvním otvorem lze protáhnout pouze kužel. Druhým otvorem projde bez mezery krychle, hranol i válec. Do třetího otvoru lze vsunout „natěsno“ krychli a hranol a do posledního otvoru válec a kužel.

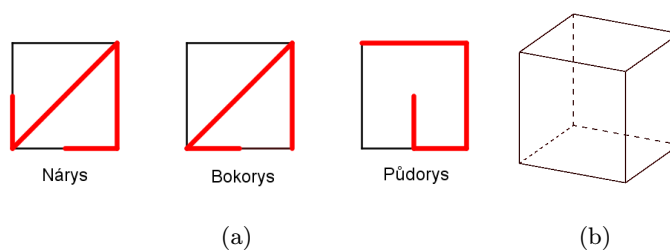
KOMENTÁŘ: Otvory určené k protažení jsou v podstatě různými pohledy na tělesa, respektive jejich obrys. K řešení úloh tohoto typu obvykle používáme základních pohledů na těleso - zepředu, shora a z boku. V určitých případech si však s těmito pohledy nevystačíme. V případě krychle a jejího protažení otvorem číslo 3 bylo nutné, aby se při pohledu překrývaly protějšší vrcholy (vrcholy spojené tělesovou úhlopříčkou), viz obr. 5.19.



Obrázek 5.19: Pohled na krychli odpovídající pravidelnému šestiúhelníku.

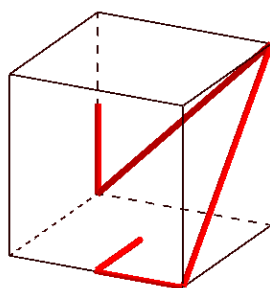
Úloha č. 10

Do připraveného modelu krychle znázorníte ve volném rovnoběžném promítání polohu jednoho kusu drátu, který je na krychli namotán, pokud znáte jeho nárys, bokorys a půdorys (obr. 5.20).
(převzato z [12, s. 120])



Obrázek 5.20: Nárys, bokorys a půdorys drátu (a), model krychle (b).

Řešení: Způsob namotání drátu na krychli znázorněné ve volném rovnoběžném promítání ukazuje obrázek 5.21.

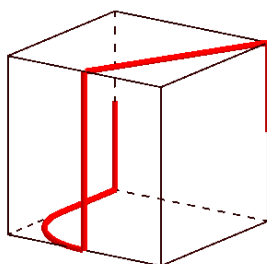


Obrázek 5.21: Zobrazení namotání drátu na krychli ve volném rovnoběžném promítání.

KOMENTÁŘ: Úlohu je možné obměnit tak, že zvolíme obrácený postup, kdy ze znázornění drátu na krychli ve volném rovnoběžném promítání budeme určovat nárys, bokorys a půdorys drátu - viz. následující úloha.

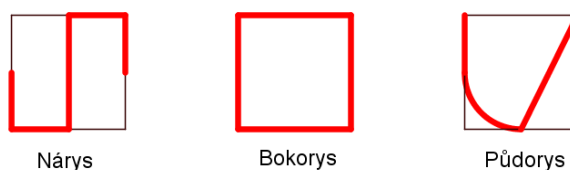
Úloha č. 11

Sestrojte nárys, bokorys a půdorys drátu, který je namotán na krychli znázorněné ve volném rovnoběžném promítání - obr. 5.22. (*vlastní návrh*)



Obrázek 5.22: Zobrazení namotání drátu na krychli ve volném rovnoběžném promítání.

Řešení: Nárys, bokorys a půdorys namotání drátu je znázorněn na obrázku 5.23.



Obrázek 5.23: Nárys, bokorys a půdorys drátu namotaného na krychli.

KOMENTÁŘ: Grafické znázornění úloh č. 10 a 11 bylo zpracováno v programu GeoGebra 5.0, který umožňuje dynamický přechod mezi nárysem, bokorysem a půdorysem tělesa a lze tak využít pro snadnou kontrolu obou úloh (viz. příloha na CD).

NEŘEŠENÉ ÚLOHY:

Úloha č. 12

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Narýsujte všechny polopřímky s počátkem v bodě H , které prochází všemi dalšími vrcholy krychle.

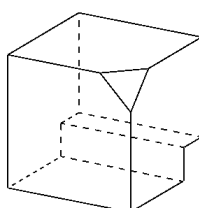
- Kolik úhlů tyto polopřímky určují?
- V kolika různých rovinách tyto úhly leží? (převzato z [20, s. 381])

Úloha č. 13

Na obrázku 5.24 je znázorněné těleso ve volném rovnoběžném promítání.

Sestrojte jeho:

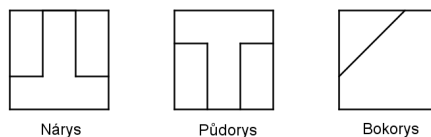
- nárys;
- půdorys;
- bokorys. (upraveno podle [12, s. 121])



Obrázek 5.24: Těleso znázorněné ve volném rovnoběžném promítání.

Úloha č. 14

Načrtněte volný rovnoběžný průmět tělesa podle jeho nárysu, půdorysu a bokorysu, obr. 5.25.
(upraveno podle [12, s. 121])



Obrázek 5.25: Nárys, půdorys a bokorys hledaného tělesa.

Úloha č. 15

Rubikova kostka se skládá z 27 krychlíček ($3 \times 3 \times 3$). Každá ze stěn Rubikovy kostky je natřena jinou barvou. Určete kolik krychlíček bude mít po rozložení kostky na jednotlivé dílky obarvené:

- a) tři stěny;
- b) dvě stěny;
- c) jednu stěnu;
- d) žádnou stěnu. (*vlastní návrh*)

Úloha č. 16

Stěny krychle můžeme vybarvit buď všechny bílou nebo všechny černou nebo některé černou a některé bílou barvou. Kolik různě vybarvených krychlí existuje? (*převzato z [12, s. 124]*)

Úloha č. 17

Kolik jednotkových krychlí protíná v kvádru o rozměrech $5 \times 4 \times 3$ tělesová úhlopříčka? (*převzato z [12, s. 124]*)

5.2 Tradiční i netradiční příklady v hodinách stereometrie

V této části se nachází příklady rozdělené podle témat - polohové úlohy, polohové konstrukční úlohy, množiny bodů v prostoru, zobrazení a metrické úlohy, ve kterých najdeme jak úlohy běžně probírané na středních školách, tak i úlohy netradiční, které se v současných středoškolských učebnicích obvykle nevyskytují.

Při výběru příkladů bylo čerpáno z publikací autorů: A. P. Kiselev [7], E. Pomykalová [19], J. Kubát[8], I. Bušek [1], F. Hradecký [5], J. Kadleček [6], J. Petáková [17], J. Holubář [4] a Z. Grundman [3].

5.2.1 Polohové úlohy

Úloha č. 1

Vysvětli, proč třínohý stůl stojící na rovné podlaze je vždy stabilní? Proč může být naproti tomu čtyřnohý stůl nestabilní a jak lze tuto nestabilitu odstranit? (*převzato z [7, s. 3]*)

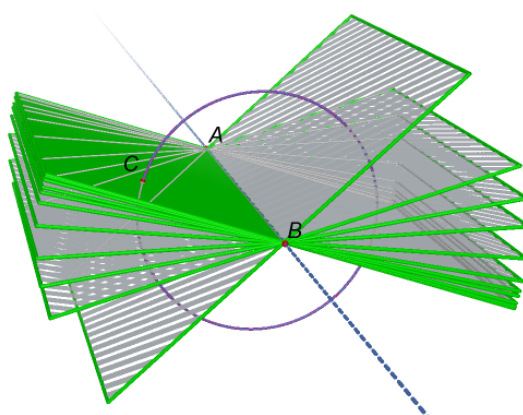
Řešení: Rovina je určena třemi body, proto je stůl o třech nohách, respektive o třech opěrných bodech, vždy stabilní. V případě čtyřnohého stolu, u kterého dochází ke kývání, stačí upravit vhodným způsobem pouze jednu nohu, aby se nestabilita odstranila.

Úloha č. 2

Vysvětlete, proč dvěma pevně určenými body v prostoru lze vést nekonečně mnoho rovin. (*převzato z [7, s. 3]*)

Řešení: Rovina je určena třemi nekolineárními body, tedy třemi body neležícími v jedné přímce. Pokud máme v prostoru dva pevně určené body, pak třetí bod určující rovinu, může ležet kdekoli. To znamená, že může vzniknout nekonečně mnoho rovin, které prochází dvěma danými body. Obrázek 5.26 ukazuje případ, kdy rovina je určena pevně zvolenými body A , B a bodem C , který se pohybuje po kružnici, jejíž osou je přímka určená body A , B .

KOMENTÁŘ: V programu Cabri 3D je možné nastavit pohyb bodu C po kružnici a pomocí nástroje „stopa“ znázornit jednotlivé roviny, které při pohybu bodu vznikají.

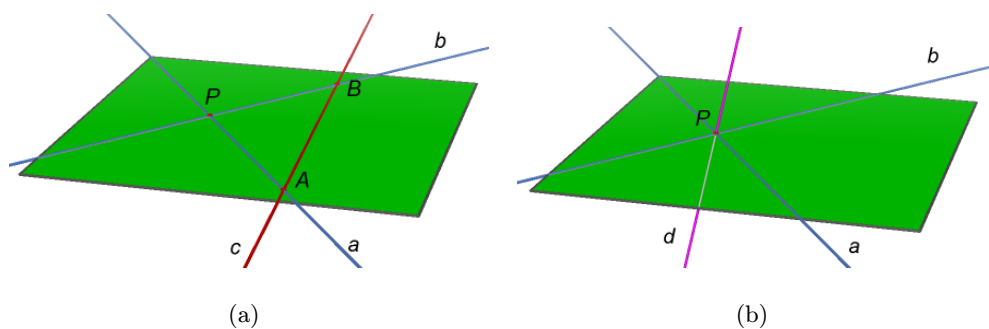


Obrázek 5.26: Rovina určená dvěma pevně zvolenými body A, B v prostoru a bodem C pohybujícím se po kružnici.

Úloha č. 3

Znáznorněte a popište polohu tří navzájem různoběžných přímek takových, že jedna protíná dvě další. (převzato z [7, s. 3])

Řešení: Řešení znázorňuje obrázek 5.27. a) Dvě různoběžky a, b určují rovinu. Pokud je třetí různoběžka c protíná ve dvou různých bodech A, B , leží tato různoběžka ve stejné rovině jako různoběžky a, b . b) Dvě různoběžky a, b určují rovinu. Pokud je třetí různoběžka d protne v jednom bodě P , tedy v jejich společném průsečíku, neleží tyto tři různoběžky v jedné rovině.



Obrázek 5.27: Tři různoběžky protínající se navzájem ve dvou bodech (a), nebo v jednom bodě (b).

5.2.2 Polohové konstrukční úlohy

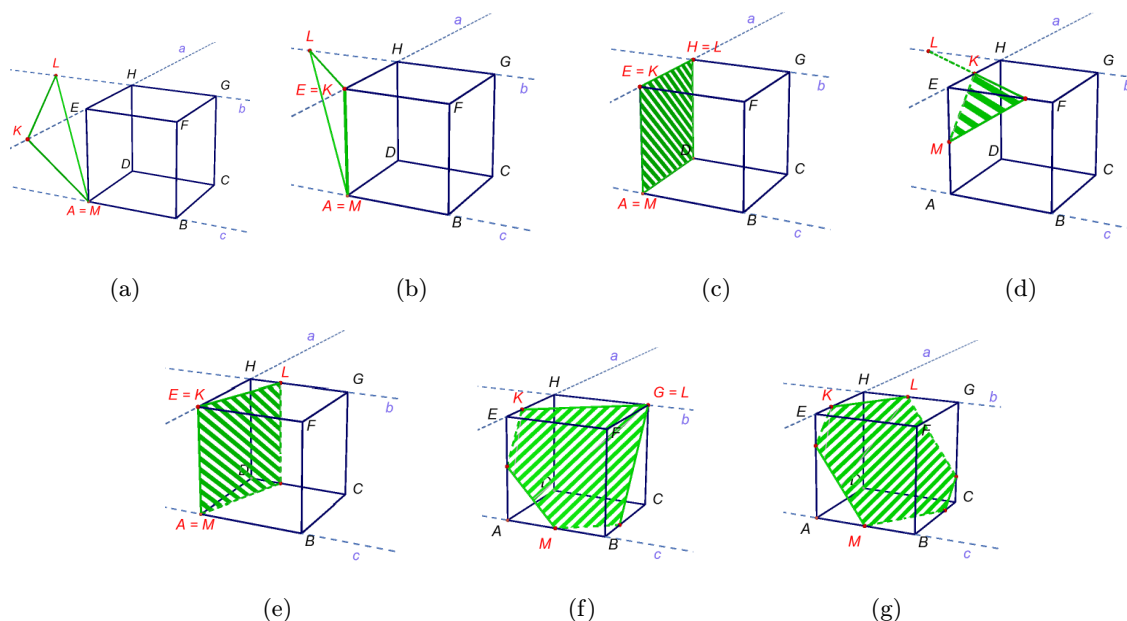
Úloha č. 1

Rovina je dána třemi volnými body. Umístěte tyto body na přímky procházející hranami krychle $ABCDEFGH$ tak, aby řezem dané krychle rovinou byl:

- vrchol;
- hrana;
- stěna;
- trojúhelník;
- čtyřúhelník;
- pětiúhelník;
- šestiúhelník;
- sedmiúhelník. (převzato z [2])

Řešení:

Kromě sedmiúhelníku lze zkonstruovat všechny zadané útvary. Příklady jednotlivých řešení, kdy je rovina řezu určena body K, L, M ležícími po řadě na přímkách $a = \leftrightarrow EH$, $b = \leftrightarrow GH$ a $c = \leftrightarrow AB$, jsou znázorněny na obrázku 5.28.



Obrázek 5.28: Různé podoby řezu krychle rovinou určenou body K, L, M .

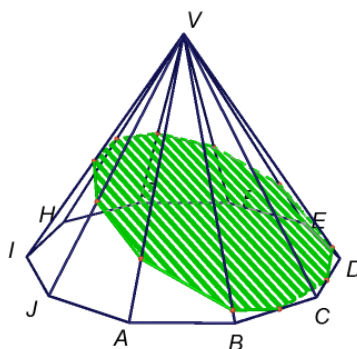
KOMENTÁŘ: Na začátku řešení úlohy je třeba si uvědomit, že každá rovina je určena třemi nekolineárními body, tzn. body neležícími v jedné přímce. Žáky můžeme nechat volit body li-

bovolně, nebo můžeme zadat přímky, na nichž se body volně pohybují. Účelem této úlohy je, aby si žáci uvědomili, jaké útvary mohou pomocí řezu krychle rovinou vzniknout a zároveň jaká omezení pro tyto útvary platí - krychle má šest stěn, a proto můžeme sestavit prostřednictvím řezu nanejvýš šestiúhelník.

Úloha č. 2

Jaký n -úhelník o maximálním možném n lze vytvořit řezem pravidelného desetibokého jehlanu $ABCDEFGHIJ$ vhodně zvolenou rovinou? (*vlastní návrh*)

Řešení: Pravidelný desetiboký jehlan se skládá z deseti bočních stěn a jedné podstavy. Celkem má tedy jedenáct stěn, které je možné proložit rovinou tak, že vznikne jedenáctiúhelník (obr. 5.29). Hledané n odpovídá číslu 11.



Obrázek 5.29: Jedenáctiúhelník vzniklý řezem pravidelného desetibokého jehlanu.

KOMENTÁŘ: Počet stěn libovolného jehlanu nebo hranolu (boční stěny + podstava/y) odpovídá maximálnímu n n -úhelníku vzniklého řezem daného tělesa vhodně zvolenou rovinou.

Úloha č. 3

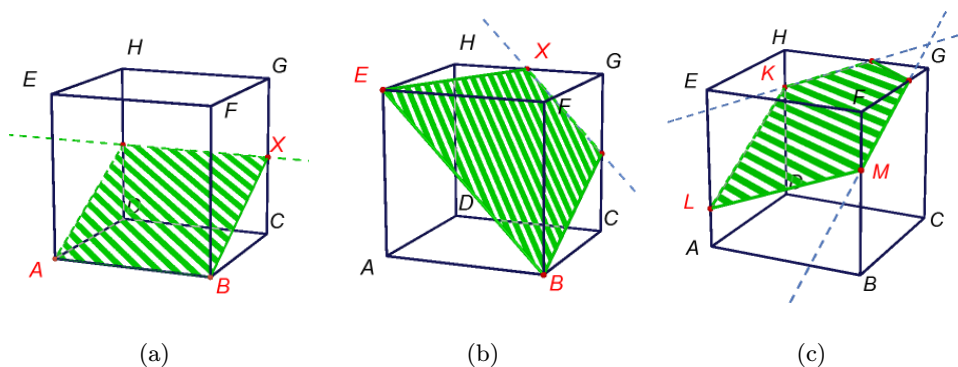
Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou určenou body:

a) A , B , X , kde $X = S_{CG}$;

b) E , B , X , kde $X = S_{GH}$;

c) K , L , M , kde K leží na hraně DH , $|HK| = \frac{1}{4}|HD|$, bod L leží na hraně AE , $|AL| = \frac{1}{4}|AE|$ a bod M leží na hraně BF , $|BM| = \frac{2}{3}|BF|$. (*upraveno podle [19, s. 40-41]*)

Řešení: Řešení úlohy ukazuje obrázek 5.30.



Obrázek 5.30: Řezy krychlí danou rovinou.

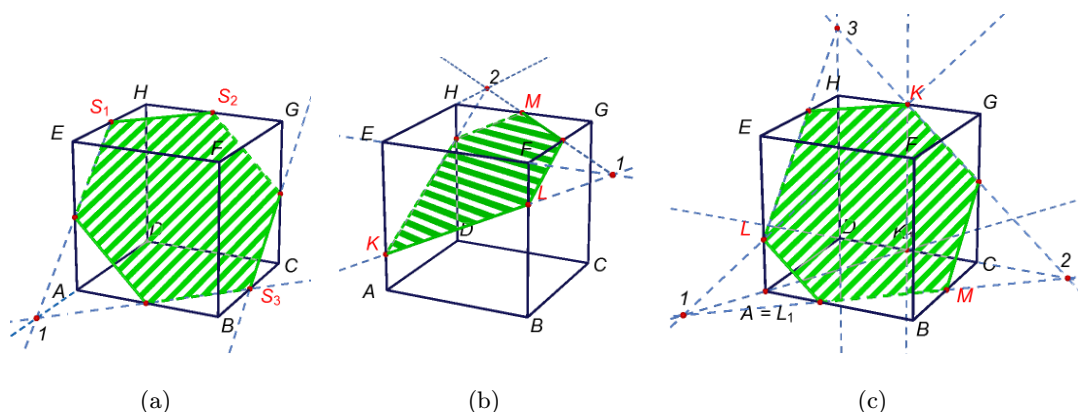
KOMENTÁŘ: Pro sestrojení řezů využijeme důsledky prvních dvou vět o konstrukci řezů - viz sekce 4.1.2.

Úloha č. 4

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou určenou body:

- a) S_1, S_2, S_3 , kde $S_1 = S_{EH}$, $S_2 = S_{GH}$, $S_3 = S_{BC}$;
- b) K, L, M , kde K leží na hraně AE , $|AK| = \frac{1}{4}|AE|$, L leží na hraně BF , $|BL| = \frac{3}{4}|BF|$ a $M = S_{GH}$;
- c) K, L, M , kde $K = S_{GH}$, L leží na hraně AE , $|AL| = \frac{1}{3}|AE|$, $M = S_{BC}$. (*vlastní návrh*)

Řešení: Jednotlivé řezy danou rovinou znázorňuje obrázek 5.31.



Obrázek 5.31: Znázornění řezů krychlí danou rovinou.

KOMENTÁŘ: Pro konstrukci určených řezů je nutné použít všech tří důsledků vět o konstrukce řezů - viz sekce 4.1.2. V případě „c“ neleží žádné dva ze zadaných bodů K, L, M v jedné

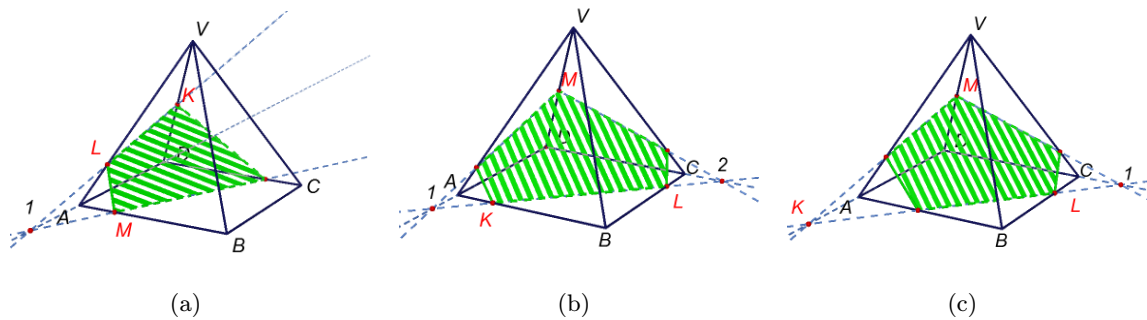
rovině a nemůžeme tedy najít žádnou průsečnici roviny řezu se stěnou krychle. Řez tohoto typu sestrojíme pomocí kolmého průmětu dvou vybraných bodů do zvolené roviny (v našem případě pomocí kolmých průmětů K_1 a L_1 bodů K a L do roviny podstavy). Vzniklé průměty proložíme přímkou a jinou přímkou proložíme taktéž oba vybrané body. Průsečíkem těchto přímek je nový bod roviny, ve které se již jeden ze zadaných bodů (v našem případě bod M) nachází. Nyní máme dva body v rovině dolní podstavy a můžeme postupovat jako v předchozích úlohách.

Úloha č. 5

Sestrojte řez jehlanu $ABDCV$ rovinou určenou body K , L , M :

- $K = S_{DV}$, L leží na hraně AV , $|AL| = \frac{1}{4}|AV|$ a M leží na hraně AB , $|AM| = \frac{1}{4}|AB|$;
 - K leží na hraně AB , $|AK| = \frac{1}{4}|AB|$, L leží na hraně BC , $|BL| = \frac{3}{4}|BC|$ a $M = S_{DV}$;
 - K leží na polopřímce DA , $|DK| = \frac{3}{2}|DA|$, L leží na hraně BC , $|BL| = \frac{2}{3}|BC|$ a $M = S_{DV}$.
- (vlastní návrh)

Řešení: Konstrukce řezů je znázorněna na obrázku 5.32.



Obrázek 5.32: Řezy jehlanem rovinou určenou body K , L , M .

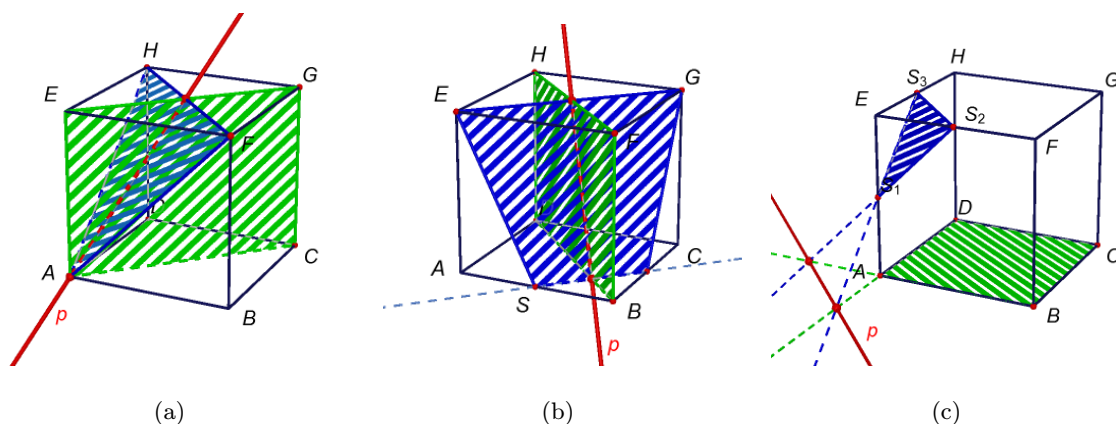
KOMENTÁŘ: Vzhledem k tomu, že boční stěny jehlanu nejsou navzájem rovnoběžné, není možné využít důsledek druhé věty o konstrukci řezů. Ke konstrukci řezu lze v případě jehlanu využít pouze důsledky první a třetí věty.

Úloha č. 6

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečnici rovin:

- ACG a AFH ;
- BFH a SEG , kde $S = S_{AB}$;
- ABC a $S_1S_2S_3$, kde $S_1 = S_{AE}$, $S_2 = S_{EF}$ a $S_3 = S_{HE}$. (upraveno podle [17, s. 91])

Řešení: Hledané průsečnice zadaných rovin jsou znázorněny na obrázku 5.33.



Obrázek 5.33: Průsečnice dvou rovin - krychle.

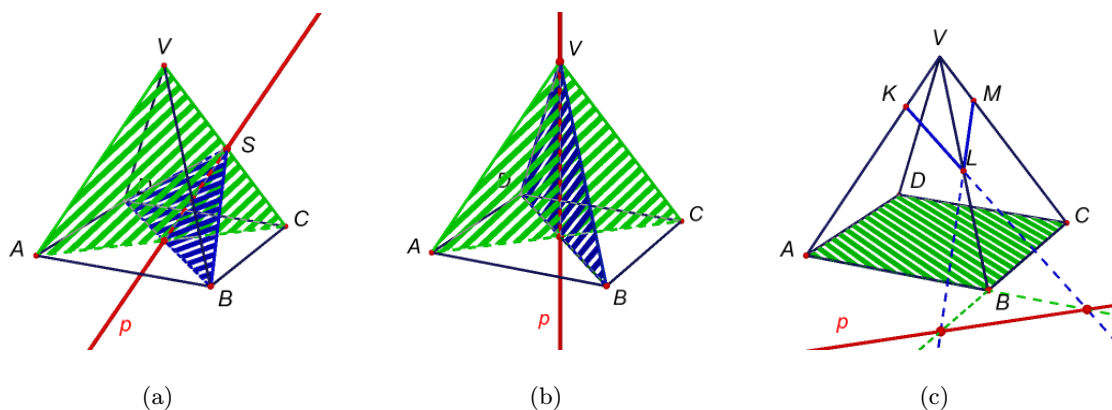
KOMENTÁŘ: Při hledání průsečnice dvou různoběžných rovin stačí najít dva body, které jsou společné oběma rovinám. Tyto body hledáme pomocí konstrukce řezů tělesa určenými rovinami.

Úloha č. 7

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Určete průsečnici rovin:

- ACV a BDS , kde $S = S_{CV}$;
- ACV a BDV ;
- ABC a KLM , kde K leží na hraně AV , $|AK| = \frac{3}{4}|AV|$, L je středem BV a M leží na hraně CV , $|CM| = \frac{3}{4}|CV|$. (upraveno podle [17, s. 91])

Řešení: Hledané průsečnice zadaných rovin jsou znázorněny na obrázku 5.34.



Obrázek 5.34: Průsečnice dvou rovin - jehlan.

KOMENTÁŘ: Dva body, které určují průsečnici zvolených rovin, hledáme stejným způsobem jako v předchozí úloze pomocí konstrukce řezů. V případě „c“ nemusíme řez ani dokončovat.

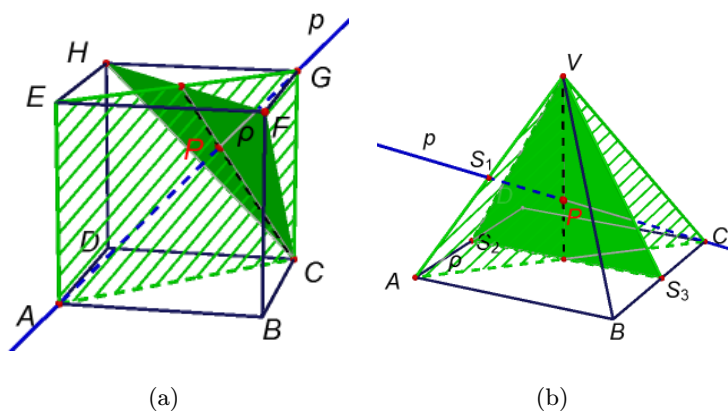
Úloha č. 8

Určete průnik přímky p s rovinou ρ :

a) $p = \leftrightarrow AG$, $\rho = HFC$ v krychli $ABCDEFGH$;

b) $p = CS_1$, kde $S_1 = S_{AV}$, $\rho = S_2S_3V$ kde $S_2 = S_{AD}$ a $S_3 = S_{BC}$ v pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$. (vlastní návrh)

Řešení: Průnik přímky s rovinou hledáme jako průnik přímky s průsečnicí dané roviny a roviny obsahující danou přímku - obr. 5.35.



Obrázek 5.35: Průnik přímky s rovinou.

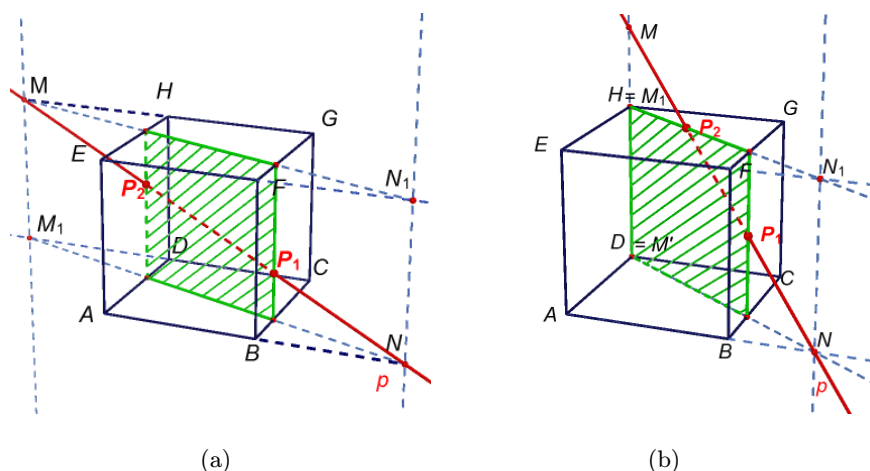
Úloha č. 9

Je dána krychle $ABCDEFGH$ a přímka $p = \leftrightarrow MN$. Najděte průsečík přímky p s povrchem krychle, pokud:

a) M leží na polopřímce GH tak, že H je středem úsečky GM , N leží na polopřímce AB a B je středem úsečky AN .

b) M leží na polopřímce DH tak, že $|DM| = \frac{3}{2}|DH|$, N leží na polopřímce AB a $|AN| = \frac{3}{2}|AB|$.
(upraveno podle [17, s. 92])

Řešení: Hledané průsečíky jsme získali jako průniky přímky p a řezu krychle rovinou, která obsahuje přímku p a je zároveň kolmá k rovině spodní podstavy krychle - obr 5.36.

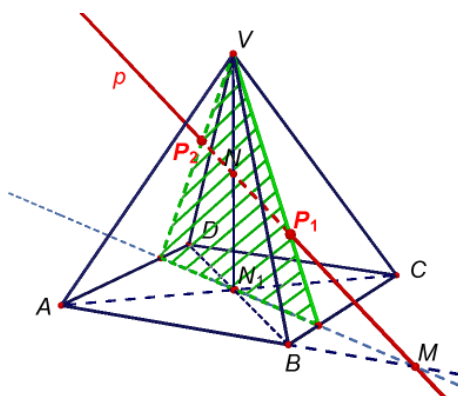
Obrázek 5.36: Průsečíky přímky p s krychlí $ABCDEFGH$.

KOMENTÁŘ: Při hledání průsečíků přímky s povrchem tělesa se využívá vhodně zvolená rovina obsahující danou přímku. Zpravidla se volí rovina kolmá k podstavě, kterou najdeme pomocí kolmého průmětu jednoho z bodů přímky do roviny podstavy. Průsečíky přímky s povrchem tělesa jsou body, průnik přímky s tělesem pak tvoří úsečka s průsečíky jako krajními body.

Úloha č. 10

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ a přímka $p = \leftrightarrow MN$. Bod M leží na polopřímce AB tak, že $|AM| = \frac{3}{2}|AB|$, bod N leží ve středu úsečky určující výšku jehlanu. (vlastní návrh)

Řešení: Průsečíky přímky s povrchem jehlanu jsme našli obdobným způsobem jako v předchozím příkladě. Výsledné řešení úlohy je na obrázku 5.37.

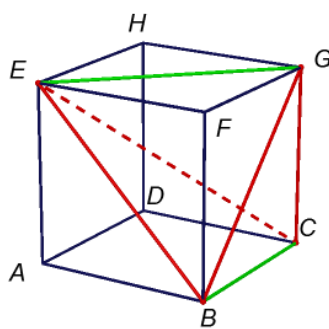
Obrázek 5.37: Průsečíky přímky p s jehlanem $ABCDV$.

KOMENTÁŘ: Při určování průsečíku přímky p s povrchem jehlanu jsme opět zvolily rovinu kolmou k podstavě, která obsahuje přímku p a zároveň prochází vrcholem jehlanu.

Úloha č. 11

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Najděte příčku mimoběžek BC a EG , která prochází vrcholy krychle. (převzato z [19, s. 48])

Řešení: Vrcholy krychle lze vést čtyři příčky zadaných mimoběžek - obr. 5.38.



Obrázek 5.38: Příčky mimoběžek BC a EG .

*KOMENTÁŘ: Úlohy zaměřené na hledání příček dvou mimoběžek mohou být zadány různě. Můžeme hledat **příčku dvou mimoběžek daným bodem**, kdy jednu mimoběžku a daný bod proložíme rovinou a určíme průsečík této roviny s druhou mimoběžkou. Spojnice průsečíku a daného bodu je hledanou příčkou (pokud není rovnoběžná s první mimoběžkou). Pokud máme vést **příčku dvou mimoběžek, která má daný směr**, proložíme jednu mimoběžku rovinou rovnoběžnou s daným směrem a určíme průsečík této roviny s druhou mimoběžkou. Příčka je určena tímto průsečíkem a daným směrem - viz sekce 4.1.2.*

NEŘEŠENÉ ÚLOHY:

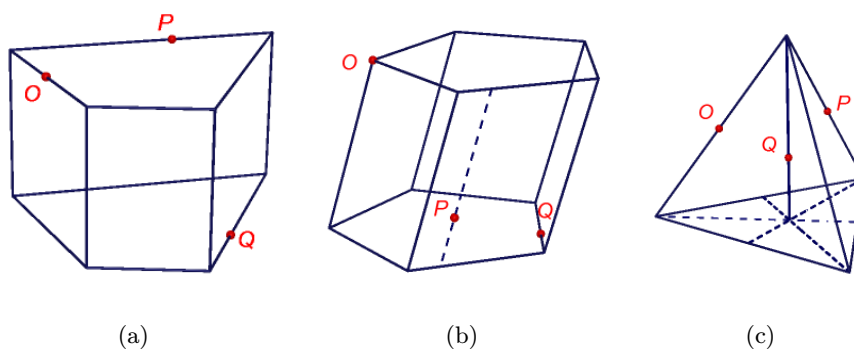
Úloha č. 12

Určete všechny útvary, jež mohou vzniknout řezem pravidelného pětibokého jehlanu $ABCDEV$ rovinou, která je určena body K, L, M . Bod K je totožný s vrcholem jehlanu V , bod L se volně pohybuje po přímce $l = \leftrightarrow EA$ a bod M se pohybuje po přímce $m = \leftrightarrow BC$. (vlastní

návrh)

Úloha č. 13

Na obrázku 5.39 jsou znázorněna tři tělesa. Sestrojte pro každé těleso jeho řez rovinou určenou body O , P , Q . (*vlastní návrh*)



Obrázek 5.39: Tělesa - kolmý čtyřboký hranol (a), kosý pětiboký hranol (b) a pravidelný čtyřstěn (c).

Úloha č. 14

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Najděte průsečnici p rovin:

- a) AFH a BGD ;
- b) EHS_{AC} a FGS_{AC} . (*vlastní návrh*)

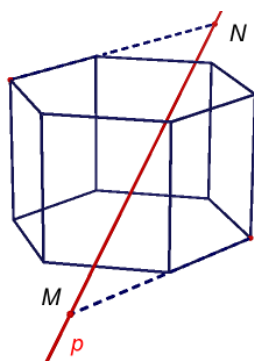
Úloha č. 15

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Najděte průsečnici rovin:

- a) ADV a BCV ;
- b) BCV a $S_{AV}S_{DV}S_{BC}$. (*upraveno podle [17, s. 91]*)

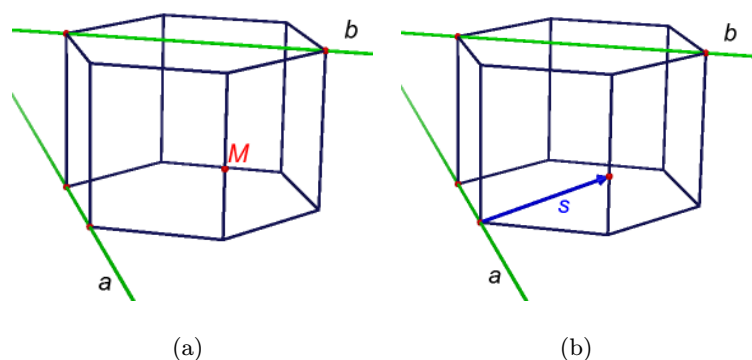
Úloha č. 16

Na obrázku 5.40 je znázorněn pravidelný šestiboký hranol a dva body M , N určující přímku p . Najděte průsečíky přímky p s povrchem hranolu. (*vlastní návrh*)

Obrázek 5.40: Pravidelný šestiboký hranol s přímkou $p = \leftrightarrow MN$.**Úloha č. 17**

Sestrojte příčku mimoběžek a , b v nichž leží hrany pravidelného šestibokého hranolu:

- a) bodem M - obr. 5.41(a);
- b) směrem s - obr. 5.41(b). (*vlastní návrh*)

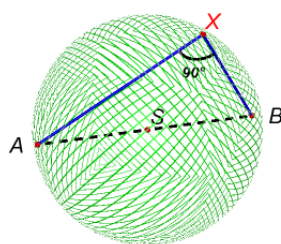


Obrázek 5.41: Hledání příčky mimoběžek.

5.2.3 Množiny bodů daných vlastností**Úloha č. 1**

Určete a sestrojte množinu všech bodů v prostoru, které jsou vrcholem pravého úhlu, jehož ramena procházejí dvěma danými body A , B . (*převzato z [2]*)

Řešení: Řešením úlohy je kulová plocha, jejíž střed odpovídá středu úsečky AB a poloměr je roven polovině délky úsečky AB , obr. 5.42.

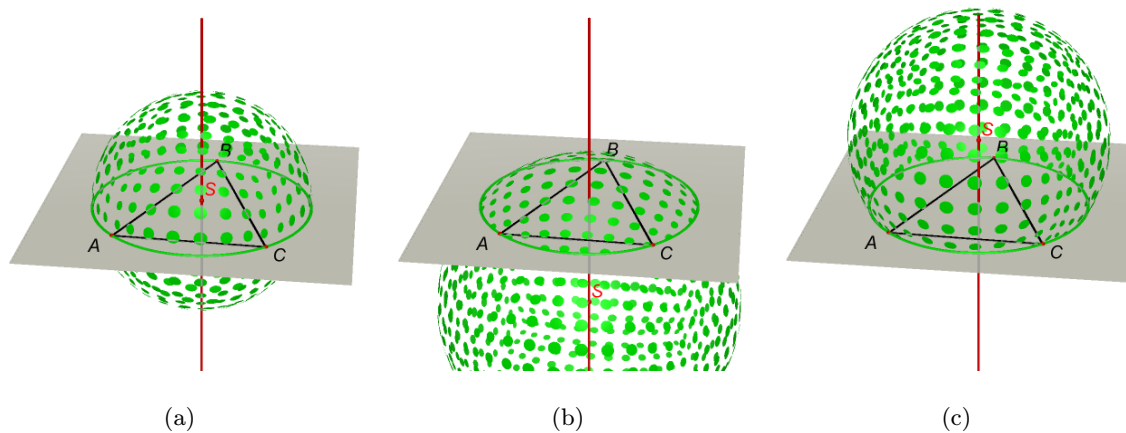
Obrázek 5.42: Thaletova kulová plocha nad úsečkou AB .

KOMENTÁŘ: Úloha je prostorovou variací na Thaletovu kružnici. Kulová plocha získaná tímto způsobem se nazývá Thaletova kulová plocha.

Úloha č. 2

Určete a sestrojte množinu všech bodů v prostoru, které mají stejnou vzdálenost od tří daných bodů A , B , C , které neleží v jedné přímce. (převzato z [4, s. 14])

Řešení: Hledanými body jsou středy kulových ploch, které procházejí body A , B , C . Na obrázku 5.43 je zachycena pohybující se kulová plocha v různých polohách.

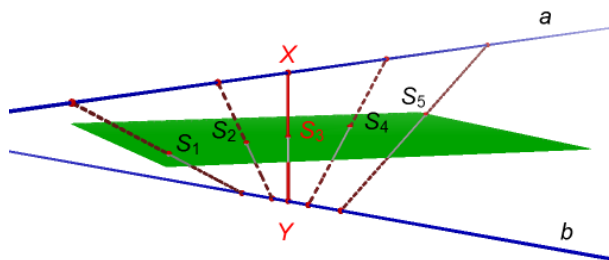
Obrázek 5.43: Kulová plocha procházející body A , B , C .

KOMENTÁŘ: Hledané body tvoří přímku, která je kolmá k rovině určené body A , B , C a prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ABC .

Úloha č. 3

Jsou dány mimoběžné přímky a , b . Určete množinu středů všech úseček, z nichž každá má jeden krajní bod na přímce a , druhý krajní bod na přímce b . (převzato z [4, s. 15])

Řešení: Řešením je rovina souměrnosti nejkratší příčky XY daných mimoběžek, tedy rovina kolmá na tuto příčku procházející jejím středem - obr. 5.44.

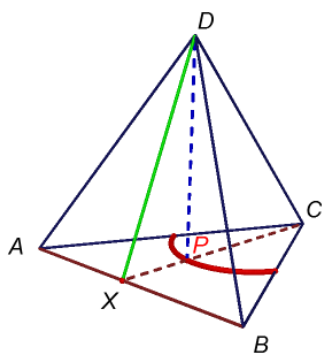


Obrázek 5.44: Množina středů spojníc dvou mimoběžek

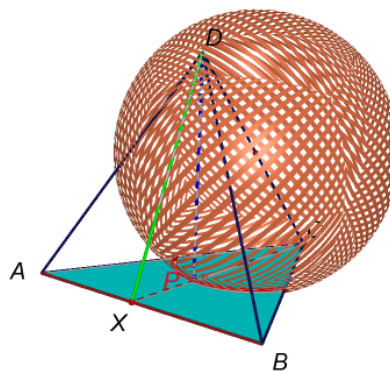
Úloha č. 4

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Bod X probíhá hranu AB . Máme vyšetřit geometrické místo pat P kolmic vedených z vrcholu D na přímky CX . (převzato z [5, s. 80])

Řešení: Řešením je průnik Thaletovy kulové plochy nad průměrem CD a roviny úhlu ACB - obr. 5.45.



(a)



(b)

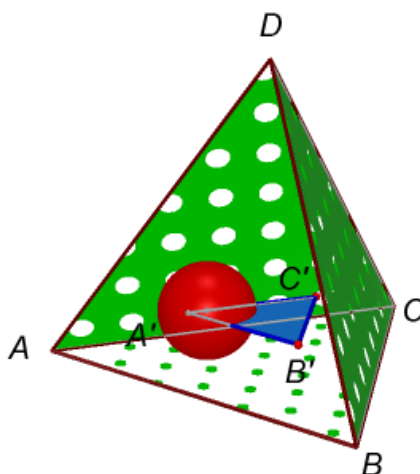
Obrázek 5.45: Znázornění pat kolmic vedených z vrcholu D čtyřstěnu $ABCD$ na přímku CX .

KOMENTÁŘ: Program Cabri 3D umožňuje znázornit skutečný pohyb bodu X po úsečce AB . Úsečka CX se tak pohybuje a paty kolmic vedené bodem D na tuto úsečku vytvářejí pomocí příkazu „stopa“ množinu hledaných bodů.

Úloha č. 5

Je dán pravidelný dutý čtyřstěn $ABCD$ o hraně délky a . Uvnitř čtyřstěnu se po jedné jeho stěně (podstavě) pohybuje koule o poloměru menším než má koule vepsaná čtyřstěnu. Vyšetřete množinu všech bodů, které může zaujmout střed koule. (převzato z [5, s. 86])

Řešení: Řešením je plocha ohraničená trojúhelníkem $A'B'C'$, který je podobný trojúhelníku ABC a který tvoří podstavnu stěnu čtyřstěnu $ABCD$. Strany trojúhelníku $A'B'C'$ jsou vzdáleny od stěn čtyřstěnu o velikost poloměru koule (obr. 5.46).



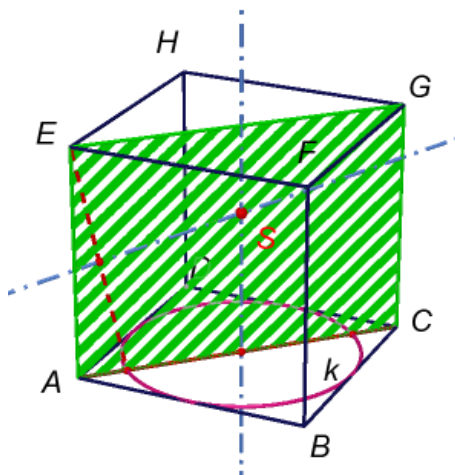
Obrázek 5.46: Čtyřstěn s koulí pohybující se po dolní podstavě.

KOMENTÁŘ: Při grafickém zpracování této úlohy byly opět využity dynamické možnosti programu Cabri 3D. Vzhledem k omezeným možnostem pohybu se však koule uvnitř čtyřstěnu pohybuje jen po straně $A'C'$ trojúhelníku $A'B'C'$.

Úloha č. 6

Je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně d . Označme k kružnici vepsanou čtverci $ABCD$. Máme určit konstruktivně poloměr kulové plochy r , která obsahuje kružnici k a vrchol E . (upraveno podle [5, s. 75])

Řešení: Pomocí planimetrizace (převedení úlohy do roviny) určíme střed kružnice jako průsečík osy souměrnosti tří bodů na kružnici. Tyto tři body jsou bod E , a dva body vzniklé průnikem kružnice k a úhlopříčky AC . V rovině ACE najdeme střed hledané kružnice jako průsečík os úseček určených danými body, který je zároveň středem kulové plochy (obr. 5.47).



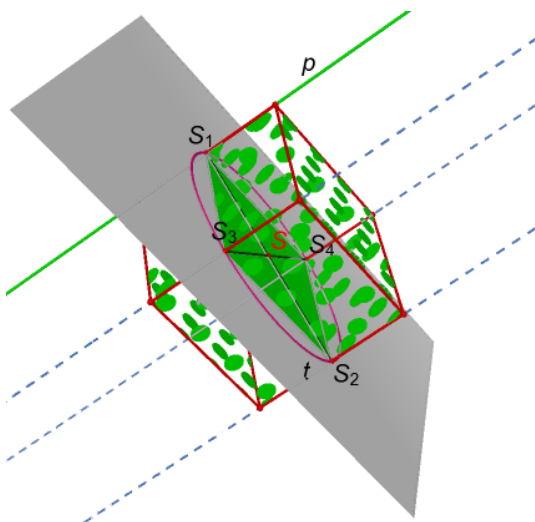
Obrázek 5.47: Nalezení středu kulové plochy pomocí planimetrizace úlohy.

KOMENTÁŘ: Úlohu jsme pro přehlednost grafického znázornění řešili převedením do roviny. Střed dané kulové plochy bychom dostali i při výběru libovolných dvou bodů na kružnici k , místo průsečíku os souměrnosti bychom však určovali průsečík rovin souměrnosti určených bodů.

Úloha č. 7

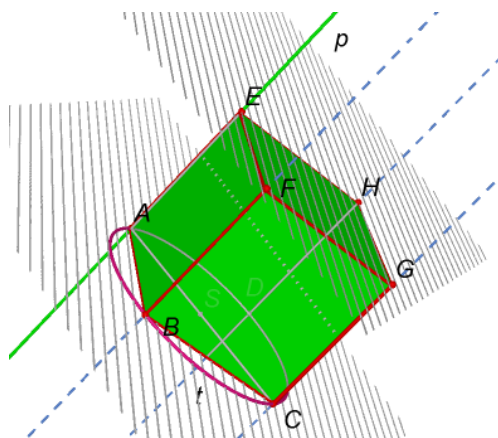
Je dána přímka p a bod S , který na ní neleží. Sestrojte všechny krychle se středem v daném bodě S , jejichž hrana leží na přímce p . (převzato z [2])

Řešení: Bodem S proložíme rovinu kolmou k přímce p . Průsečík přímky a roviny je středem S_1 hrany krychle. Pomocí Thaletovy kružnice t ležící v dané rovině se středem v bodě S a poloměrem rovným vzdálenosti bodu S a vzniklého průsečíku najdeme středy S_2 , S_3 a S_4 dalších tří hran krychle, které proložíme přímkami rovnoběžnými s přímkou p . Vrcholy krychle leží na těchto přímkách ve vzdálenosti $|S_1S_3|$ (obr. 5.48).

Obrázek 5.48: Krychle se středem S a jednou hranou na přímce p .**Úloha č. 8**

Je dána přímka p a mimo ni bod C . Sestrojte krychli $ABCDEFGH$, která má vrcholy A a E na přímce p a vrchol C v daném stejnojmenném bodě C . (převzato z [6, s. 246])

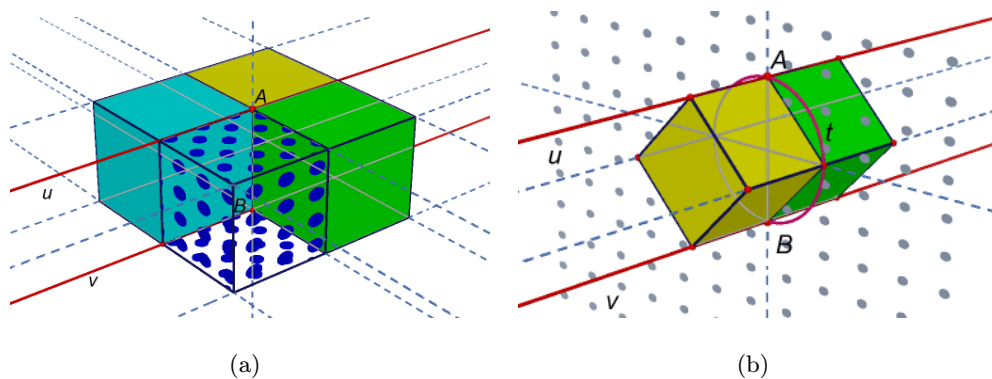
Řešení: Sestrojíme rovinu kolmou k přímce p procházející bodem C . Průsečíkem této roviny a přímky p je bod A , body B a D leží na ose úsečky AC a na Thaletově kružnici t nad průměrem AC . V bodech B , C a D vztýčíme kolmice k rovině těmito body určené a nakonec vytvoříme novou rovinu rovnoběžnou s rovinou původní ve vzdálenosti $|AB|$. Body $EFGH$ vzniknou jako průsečíky nové roviny s vytvořenými kolmicemi, obr. 5.49.

Obrázek 5.49: Krychle $ABCDEFGH$ s vrcholy A , E na přímce p a vrcholem C v bodě C .

Úloha č. 9

V prostoru jsou dány dvě navzájem různé rovnoběžné přímky u, v a bod A ležící na u . Sestrojte krychli, která bude mít vrchol A v bodě A a dvě hrany budou ležet na daných přímkách. (převzato z [6, s. 248])

Řešení: Pokud u, v leží v rovině téže stěny, pak se jejich vzdálenost d rovná velikosti hrany krychle ($d = |AB|$) a výsledkem jsou čtyři řešení - obr. 5.50(a). Pokud u, v neleží v rovině stejné stěny, pak vzdálenost D je velikostí stěnové úhlopříčky a příslušnou velikost hrany krychle sestrojíme pomocí Thaletovy kružnice a osy dané úhlopříčky. V tomto případě vzniknou dvě řešení - obr. 5.50(b).

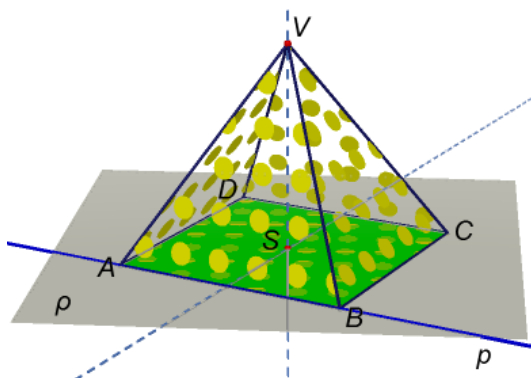


Obrázek 5.50: Krychle s jedním vrcholem v bodě A a dvěma hranami na dvou různých rovnoběžných přímkách u, v .

Úloha č. 10

Je dána rovina ρ , v ní přímka p a mimo rovinu ρ bod V . Sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan s hlavním vrcholem V , podstavou ρ a s jednou podstavnou hranou na přímce p . (převzato z [6, s. 248])

Řešení: Z bodu V vedeme kolmici k rovině ρ a její patu označíme jako bod S . Tento bod je středem podstavy jehlanu. Vzdálenost bodu S od přímky p je polovinou podstavné hrany jehlanu (obr. 5.51). Pokud bod S leží na přímce p , úloha nemá řešení.



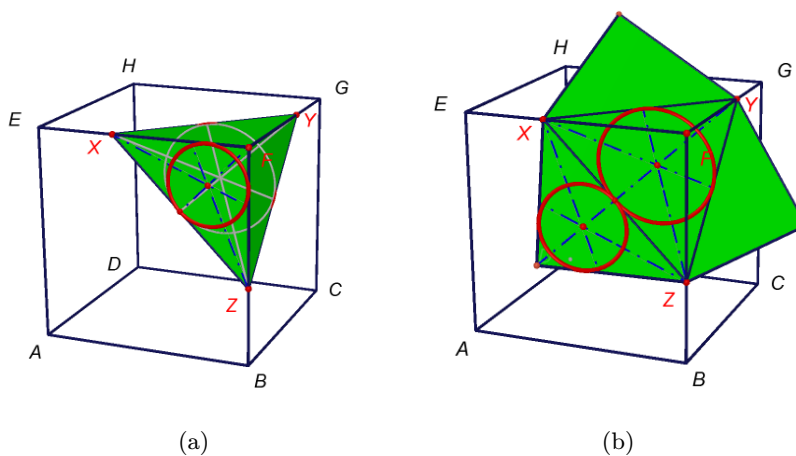
Obrázek 5.51: Pravidelný čtyřboký jehlan s vrcholem v bodě V , podstavou v rovině ρ a jednou podstavnou hranou na přímce p .

KOMENTÁŘ: Pokud úloha nemá řešení, bod S leží na přímce p . V programu Cabri 3D lze tuto situaci znázornit pomocí příkazu „předefinovat“ bod V , kterým pohybujeme tak, aby se bod S dostal na přímku p . Pokud bod S neleží na přímce p , vznikne vždy jen jeden jehlan.

Úloha č. 11

Je dána krychle $ABCDEFGH$ a body X , Y , Z , které leží po řadě na hranách EF , FG a BF . Oddělte od této krychle rovinným řezem čtyřstěn $FXYZ$ tak, aby kružnice vepsané trojúhelníkům XZF a XZY se navzájem dotýkaly. (upraveno podle [5, s. 100])

Řešení: Body X a Z musí být umístěny tak, že $|FX| = |FZ|$ a zároveň bod Y musí být umístěn tak, že $|YZ| = |XY|$ (obr. 5.52).



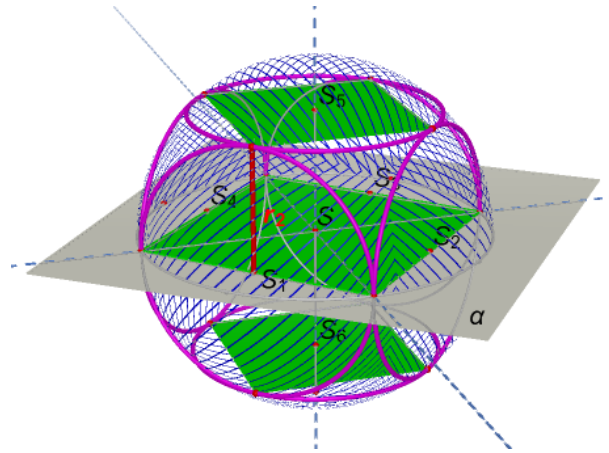
Obrázek 5.52: Hledaný čtyřstěn a jeho síť.

KOMENTÁŘ: Oba trojúhelníky XZF a XZY jsou rovnoramenné (v případě trojúhelníku XZY může vzniknout i rovnostranný trojúhelník) se společnou základnou XZ .

Úloha č. 12

Sestrojte šest shodných kružnic na kulové ploše o poloměru r_1 takových, že každá se dotýká čtyř ostatních. Určete konstrukčně poloměr r_2 těchto kružnic. (převzato z [5, s. 103])

Řešení: Střed S kulové plochy proložíme rovinou α . Průnik této roviny s kulovou plochou je kružnice, na které leží body dotyků čtyř kružnic. Tyto body získáme jako průsečíky vzniklé kružnice a dvou navzájem kolmých přímek procházejících středem kulové plochy ležících v rovině α . Spojením vzniklých bodů získáme v rovině α čtyřúhelník, jehož středy stran tvoří středy S_1, S_2, S_3 a S_4 čtyř hledaných kružnic. Středy zbývajících dvou kružnic S_5 a S_6 leží na kolmici k rovině α procházející středem kulové plochy S ve vzdálenosti $|SS_1|$ od bodu S (obr. 5.53).

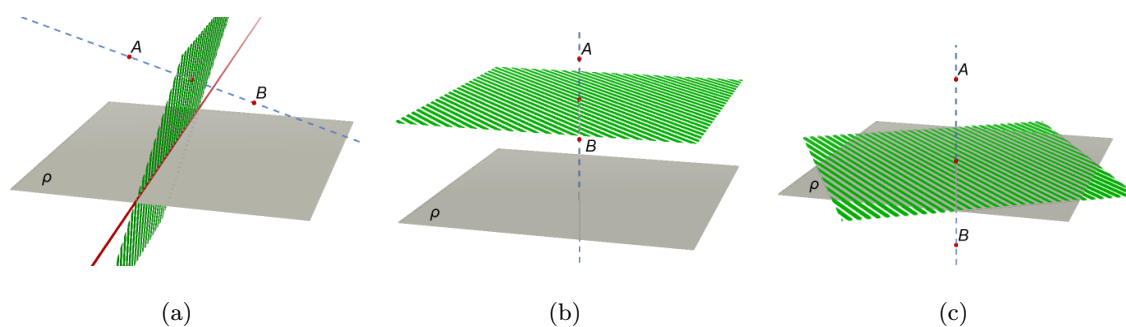


Obrázek 5.53: Šest shodných kružnic na kulové ploše.

Úloha č. 13

Je dána rovina ρ a mimo ni dva různé body A, B . Nalezněte v rovině ρ všechny body X takové, že vzdálenost $|AX| = |BX|$. (převzato z [6, s. 248])

Řešení: Řešením je průnik roviny souměrnosti přímky AB s rovinou ρ : Řešením může být a) přímka - obr. 5.54(a), pokud ρ není kolmá na AB ; b) prázdná množina - obr. 5.54(b), pokud ρ je kolmá na AB a není rovinou souměrnosti AB ; c) rovina - obr. 5.54(c), pokud ρ je kolmá na AB a je rovinou souměrnosti AB .

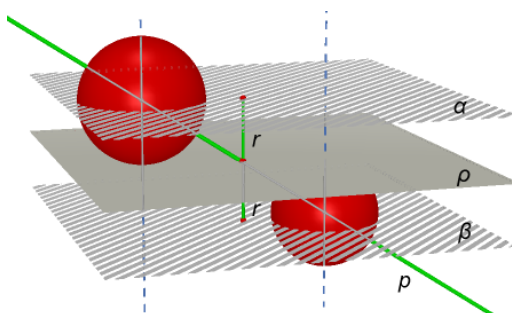


Obrázek 5.54: Tři možnosti řešení úlohy č. 13.

Úloha č. 14

Je dána rovina ρ , přímka p různoběžná s ρ a kladné číslo r . Sestrojte kulovou plochu o poloměru r , která má střed na přímce p a dotýká se roviny ρ . (převzato z [6, s. 249])

Řešení: Aby se kulová plocha dotýkala roviny ρ , musí od ní být vzdálena o poloměr r . Množina bodů jejichž vzdálenost od roviny ρ je právě r vytvoří dvě roviny α, β rovnoběžné s ρ . Průsečíky těchto rovin s přímkou p jsou hledanými středy kulových ploch - obr. 5.55.

Obrázek 5.55: Dvě kulové plochy se středy na přímce p , daným poloměrem r dotýkající se roviny ρ .**NEŘEŠENÉ ÚLOHY:****Úloha č. 15**

Je dána rovina ρ , s ní různoběžná přímka p a číslo $m > 0$. Nalezněte na přímce p všechny body, jejichž vzdálenost od roviny ρ je přesně m . (převzato z [6, s. 248])

Úloha č. 16

V rovině platí, že množinou všech bodů, které mají od dvou daných různoběžných přímk a , b sobě rovné vzdálenosti, jsou dvě přímky navzájem kolmé, které představují osy souměrnosti přímk a , b . Převedte úlohu do prostoru (najděte množinu všech bodů, které mají od dvou různoběžných přímk a , b rovné vzdálenosti). (*převzato z [4, s. 9]*)

Úloha č. 17

Určete množinu všech bodů, které mají stejné vzdálenosti od dvou daných rovnoběžných různých rovin. (*převzato z [4, s. 11]*)

Úloha č. 18

Jak sestrojíte kouli procházející:

- a) všemi vrcholy dané krychle;
- b) všemi středy hran dané krychle;
- c) všemi středy stěn krychle? (*upraveno podle [5, s. 102]*)

Úloha č. 19

Na povrchu krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a určete všechny body, které mají stejné vzdálenosti od vrcholů A , B a bodu M , který je středem hrany FG . (*upraveno podle [5, s. 66]*)

Úloha č. 20

Jsou dány tři body A , B , C neležící na téže přímce a kladné číslo v . Nalezněte rotační válec o výšce v tak, aby body A , B , C ležely na jedné z jeho podstavních hran. (*převzato z [6, s. 249]*)

Úloha č. 21

Určete množinu všech bodů v prostoru, které mají od dané roviny ρ a daného bodu A , který neleží v rovině ρ , stejně velké vzdálenosti. (*převzato z [4, s. 9]*)

5.2.4 Zobrazení

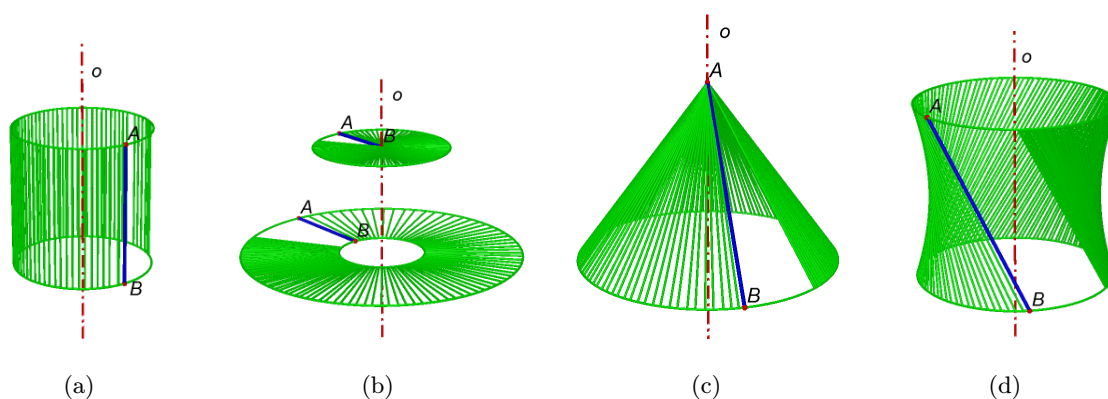
Úloha č. 1

Je dána osa o a úsečka AB neležící na ose o . Rozhodněte, co vytvoří množina obrazů úsečky AB ve všech otočeních okolo osy o , je-li

- AB rovnoběžná s osou o a zároveň různá od osy o ;
- AB kolmá k ose o ;
- AB je různoběžná s osou o a zároveň není kolmá k ose o , bod A je bodem osy o ;
- AB mimoběžná s osou o , ale není kolmá k ose o . (převzato z [6, s. 253])

Řešení: (Obr. 5.56)

- plášť rotačního válce s osou o ;
- mezikruží nebo kruh se středem na ose o a ležící v rovině kolmé na osu o ;
- plášť rotačního kužele s vrcholem A a površkou AB ;
- rotační hyperboloid.



Obrázek 5.56: Útvary vzniklé rotací přímky AB okolo osy o .

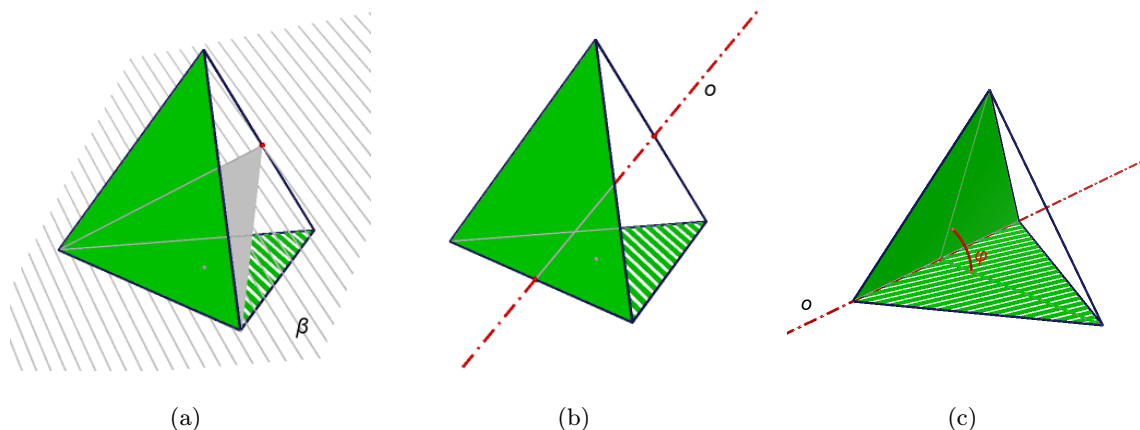
KOMENTÁŘ: V programu *Cabri 3D* lze pomocí příkazů „pohyb“ a „stopa“ znázornit rotační pohyb úsečky AB okolo osy o .

Úloha č. 2

Najděte nějaké (všechna) zobrazení, které převádí jednu stěnu pravidelného čtyřstěnu v druhou. (vlastní návrh)

Řešení: Zobrazení, která převádí jednu stěnu pravidelného čtyřstěnu ve stěnu druhou jsou:

- a) rovinná souměrnost - rovina souměrnosti β dvou sousedních stěn procházející jejich společnou hranou a středem protější hrany - obr. 5.57(a)
- b) osová souměrnost - osou souměrnosti o je přímka, která prochází středem hrany společné oběma stěnám a středem protější hrany - obr. 5.57(b)
- c) otočení - osou otáčení je přímka procházející společnou hranou obou stěn a orientovaným úhlem otáčení je velikost odchylky obou stěn - obr. 5.57(c).



Obrázek 5.57: Zobrazení převádějící jednu stranu pravidelného čtyřstěnu v druhou.

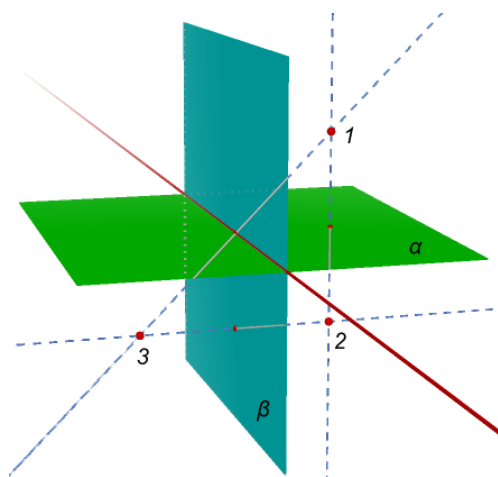
KOMENTÁŘ: Hledání zobrazení, která převádí jednu stěnu daného tělesa na jinou můžeme aplikovat i na jiné mnohostěny - viz. úloha č. 3 v neřešené části.

Úloha č. 3

V prostoru jsou dány body 1, 2, 3. První a druhý bod jsou symetrické podle roviny α , druhý a třetí bod podle roviny β kolmé na α . Určete jaký vztah platí mezi prvním a třetím bodem. (převzato z [7])

Řešení: První a třetí bod jsou symetrické podle průsečnice rovin α a β (obr. 5.58).

KOMENTÁŘ: Uvedená symetrie platí pro jakékoli objekty.

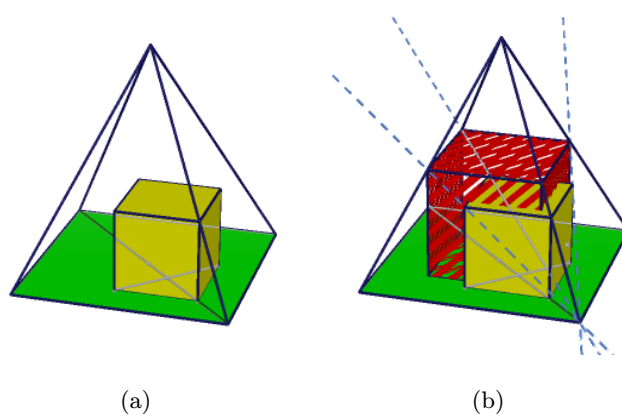


Obrázek 5.58: Složení dvou rovinných souměrností.

Úloha č. 4

Pravidelnému čtyřbokému jehlanu vepište krychli, jejíž jedna stěna leží v podstavě jehlanu a vrcholy protilehlé horní stěny na bočních hranách jehlanu. (převzato z [2])

Řešení: Úlohu řešíme pomocí stejnolehlosti. Do jehlanu vepíšeme krychli tak, aby její dolní podstava ležela v rovině podstavy jehlanu, hrany dolní podstavy krychle byly rovnoběžné s podstavními hranami jehlanu a aby jeden z vrcholů horní podstavy krychle ležel na jedné boční hraně jehlanu. Pomocí stejnolehlosti se středem ve vrcholu jehlanu, z něž vychází hrana dotýkající se vrcholu krychle, vytvoříme obraz krychle tak, že vrcholy horní podstavy krychle se promítnou do bočních hran jehlanu (obr. 5.59).

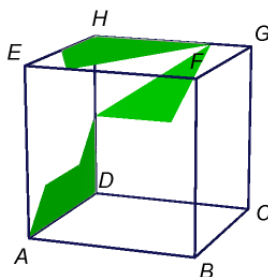


Obrázek 5.59: Krychle vepsaná jehlanu.

Úloha č. 5

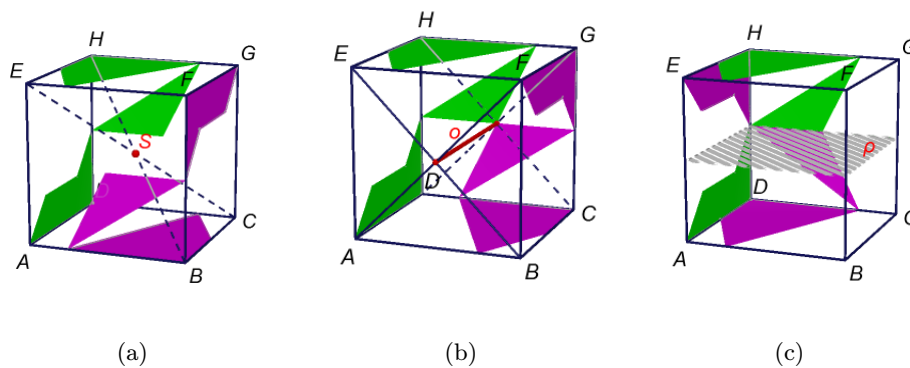
Na obrázku 5.60 je zobrazena krychle $ABCDEFGH$ s barevným značením na stěnách $ADEH$, $EFGH$ a $CDHG$. Vyznač toto barevné značení:

- ve středové souměrnosti podle bodu S , který je průsečíkem tělesových úhlopříček krychle.
- v osové souměrnosti podle osy o , která prochází středy stěn $ABFE$ a $CDHG$.
- v rovinné souměrnosti podle roviny ρ procházející středy bočních hran krychle. (*vlastní návrh*)



Obrázek 5.60: Barevné značení stěn krychle.

Řešení: Na obrázku 5.61 jsou fialovou barvou znázorněny obrazy vzorů v dané souměrnosti.

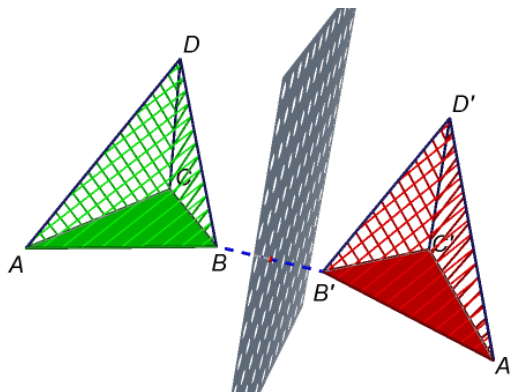


Obrázek 5.61: Barevné značení stěn krychle znázorněné v souměrnosti středové (a), osové (b) a rovinné (c).

Úloha č. 6

Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$ a bod $B' \neq B$. Určete rovinnou souměrnost, která zobrazí daný čtyřstěn na shodný čtyřstěn $A'B'C'D'$. (*vlastní návrh*)

Řešení: Rovina souměrnosti prochází středem úsečky BB' a je na ni kolmá (obr. 5.62).



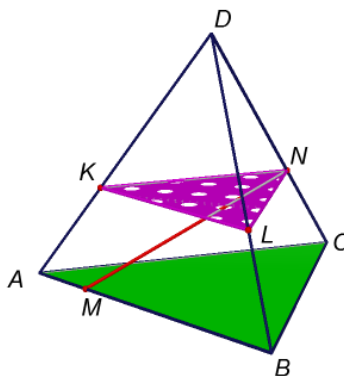
Obrázek 5.62: Obraz a vzor čtyřstěnu v rovinné souměrnosti.

KOMENTÁŘ: Úlohu můžeme pozměnit tak, že necháme žáky hledat další druhy zobrazení, která převádí daný čtyřstěn na čtyřstěn s ním shodný.

Úloha č. 7

Bod M je vnitřním bodem hrany AB a bod N je vnitřním bodem hrany CD čtyřstěnu $ABCD$. Sestrojte průnik čtyřstěnu s rovinou, která je obrazem roviny ABC v posunutí $T(MN)$. (převzato z [19, s. 116])

Řešení: Řezem je trojúhelník KLN , kde $K \in AD, L \in BD$, úsečka KN je rovnoběžná s AC a úsečka LN je rovnoběžná BC (obr. 5.63).



Obrázek 5.63: Průnik čtyřstěnu s rovinou ABC v posunutí $T(MN)$.

KOMENTÁŘ: Dynamický obrázek vytvořený v programu Cabri 3D ukazuje změnu polohy trojúhelníku KLN v závislosti na pohybujících se bodech M a N . (převzato z [19, s. 116])

NEŘEŠENÉ ÚLOHY:

Úloha č. 8

Urči počet rovin symetrie v pravidelném jehlanu s n -bočními hranami. (převzato z [7, s. 65])

Úloha č. 9

Urči počet rovin symetrie pravidelného hranolu s n -bočními hranami. (převzato z [7, s. 65])

Úloha č. 10

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechna zobrazení, která převádí stěnu dolní podstavu $ABCD$ na stěnu horní podstavu $EFGH$. (vlastní návrh)

Úloha č. 11

Je dán kvádr $ABCDEFGH$, $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AE| = c$. Kdy existuje podobnost, ve které jsou body B , C , G po řadě obrazy bodů A , B , C ? (převzato z [19, s. 121])

Úloha č. 12

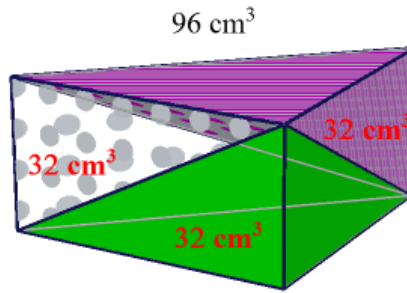
Na povrchu krychle $ABCDEFGH$ najděte body, které mají stejnou vzdálenost od vrcholů A , B , G . (převzato z [19, s. 121])

5.2.5 Metrické úlohy

Úloha č. 1

Rozděl trojboký hranol na tři trojboké jehlany (čtyřstěny), které mají stejný objem. (převzato z [20, s. 364])

Řešení: Hledané jehlany se vždy po dvou shodují v obsahu základny a výšce, tedy ve svém objemu. Pokud se objem jednoho jehlanu shoduje s objemem druhého a objem druhého s objemem třetího, musí se objem prvního jehlanu rovnat objemu třetího jehlanu. Objem všech tří jehlanů je tedy stejný. Rozdělení trojbokého hranolu na požadované jehlany znázorňuje obrázek 5.64.



Obrázek 5.64: Dělení trojbokého hranolu na tři trojboké jehlany se shodným objemem.

KOMENTÁŘ: Podobnou úlohou je dělení krychle na tři shodné čtyřboké jehlany.

Úloha č. 2

Krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a je přetnuta rovinou BEI ($G = S_{FI}$). Řezem je rovnoramenný lichoběžník $EBJK$ (J leží na úsečce CG a K na úsečce GH).

Vypočítejte obsah tohoto lichoběžníku. (převzato z [20, s. 355])

Řešení: Prvním krokem je nalezení řezu - obr. 5.65.

Obsah rovnoramenného lichoběžníku $EBJK$ můžeme vypočítat dvojím způsobem:

1) Podle znalosti vlastností střední příčky trojúhelníka víme, že $J = S_{CG}$ a $K = S_{GH}$.

Pomocí délky hrany krychle a vyjádříme podle Pythagorovy věty velikosti stran lichoběžníku:

$$\begin{aligned} |EB| &= \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}, \\ |JK| &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ |EK| &= \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = a\frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Díky vlastnostem rovnoramenného lichoběžníku můžeme pomocí Pythagorovy věty vypočítat také jeho výšku:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{|EK|^2 + \left(\frac{|EB| - |JK|}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(a\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2} - a\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{2a^2 - 2a^2 + \frac{2}{4}a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{a^2}{4}} = \\ &= \sqrt{\frac{4}{8}a^2} = a\frac{3}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

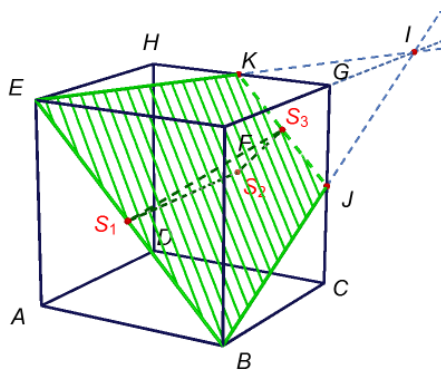
$$\begin{aligned} \text{Obsah rovnoramenného lichoběžníka vypočítáme podle vzorce } S &= \frac{v(a+c)}{2} = \frac{a\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2} + a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \\ &= \frac{a\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3\sqrt{2}a}{2}}{2} = \frac{9}{8}a^2. \end{aligned}$$

2) Uvažujme pravoúhlý trojúhelník $S_1S_2S_3$, kde $S_1 = S_{EB}$, $S_2 = S_{CH}$ a $S_3 = S_{JK}$.

$$\text{Potom } |S_1S_2| = |AD| = a, |S_2S_3| = \frac{1}{2}|S_2G| = \frac{1}{4}|DG| = a\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Pomocí Pythagorovy věty dopočítáme } |S_1S_3| = \sqrt{a^2 + \left(a\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dots = a\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

KOMENTÁŘ: První způsob řešení využívá metody planimetrizace, kdy se výška a následně



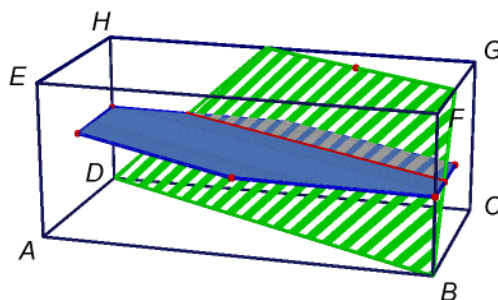
Obrázek 5.65: Lichoběžník vzniklý řezem krychle $ABCDEFGH$ rovinou BEI .

i obsah lichoběžníka vypočítá pomocí znalosti délky stran. Druhý způsob je více zaměřen na hledání prostorových vztahů a jeho řešení je početně méně náročné.

Úloha č. 3

Je dán kvádr $ABCDEFGH$, určete jaký útvar vyplní střední příčky všech lichoběžníků (a dvou trojúhelníků DBG a DBE , do kterých se změní lichoběžník v krajní poloze), v nichž protíná kvádr roviny procházející přímkou BD . Vypočítejte jeho obsah, pokud víte, že $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 5$ cm a $|BF| = 4$ cm. (upraveno podle [5, s. 101])

Řešení: Střední příčky všech lichoběžníků (a uvedených trojúhelníků) vyplní šestiúhelník jehož čtyři vrcholy tvoří středy bočních stěn a zbývající dva vrcholy leží ve středech hran DH a BF , obr. 5.66.



Obrázek 5.66: Šestiúhelník vzniklý sjednocením středních příček lichoběžníků (a dvou daných trojúhelníků).

Obsah šestiúhelníku vypočítáme následujícím způsobem: $S = ab - 2 \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}}{2} = ab - \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} =$
 $= ab - \frac{1}{4}ab = \frac{3}{4}ab = \frac{3}{4} \cdot 10 \cdot 5 = \frac{150}{4} = \frac{75}{2} = 37,5 \text{ cm}^2.$

KOMENTÁŘ: Dynamická verze obrázku 5.66 umožňuje znázornit měnící se podobu lichoběžníku a pohyb jeho střední příčky, jejíž stopa vytváří plochu hledaného útvaru. Obsah plochy je možné určit i v programu Cabri 3D, vzhledem k omezeným možnostem konstrukce těles daných rozměrů, je však tento výsledek pouze přibližný.

Úloha č. 4

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C . Vypočítejte poměr objemů tří těles, která vzniknou rotací tohoto trojúhelníka kolem každé z jeho stran. (převzato z [1, s. 344])

Řešení:

a) Rotací trojúhelníka kolem strany BC vznikne rotační kužel o výšce $v = a$ a poloměru $r = b$.

Objem tohoto kužele je $V_a = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi b^2 a$.

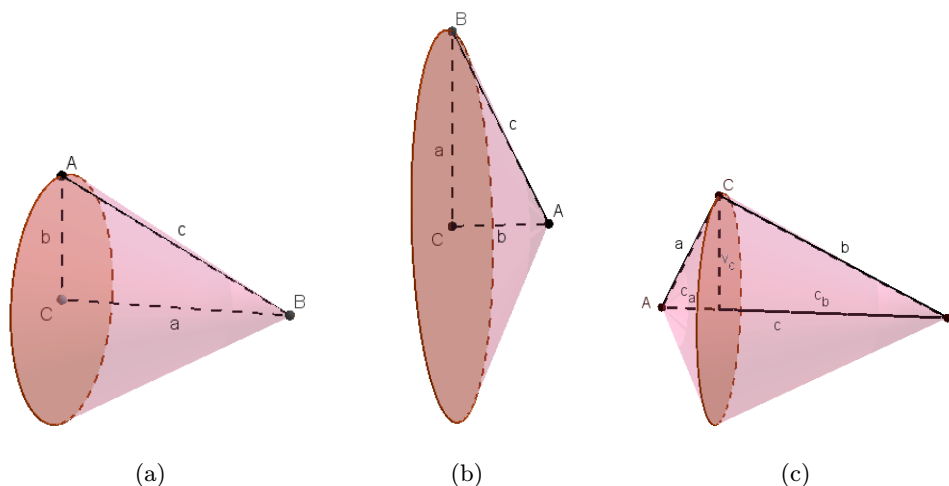
b) Rotací trojúhelníka kolem strany AC vznikne rotační kužel o výšce $v = b$ a poloměru $r = a$.

Objem toho kužele je $V_b = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi a^2 b$.

c) Rotací trojúhelníka kolem strany AB vznikne těleso složené ze dvou rotačních kuželů.

Objem tohoto tělesa se vypočítá $V_c = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi v_c^2 c_a + \frac{1}{3}\pi v_c^2 c_b = \frac{1}{3}\pi v_c^2 (c_a + c_b) = \frac{1}{3}\pi v_c^2 c$

Poměr objemů $V_a : V_b : V_c = \frac{1}{3}\pi b^2 a : \frac{1}{3}\pi a^2 b : \frac{1}{3}\pi v_c^2 c$, protože $v_c = \frac{ab}{c}$, jsou objemy daných těles V_a, V_b, V_c v poměru $bc : ac : ab$ (obr. 5.67).



Obrázek 5.67: Rotace trojúhelníku postupně kolem všech jeho stran.

Úloha č. 5

Kouli je opsán rotační kužel, jehož výška se rovná šestinásobku poloměru koule r . V jakém poměru jsou povrchy obou těles? (převzato z [8, s. 232])

Řešení: Z podobnosti trojúhelníků VPB a VTS , můžeme určit poloměr podstavy kužele, který jsme označili písmenem z (obr. 5.68):

$$\frac{6r}{z} = \frac{n}{r}, \text{ kde } n = |TV| = \sqrt{5r^2 - r^2} = 2\sqrt{6}r.$$

$$\frac{6r}{z} = \frac{2\sqrt{6}r}{r} \dots z = \frac{6r}{2\sqrt{6}} = \frac{r\sqrt{6}}{2}$$

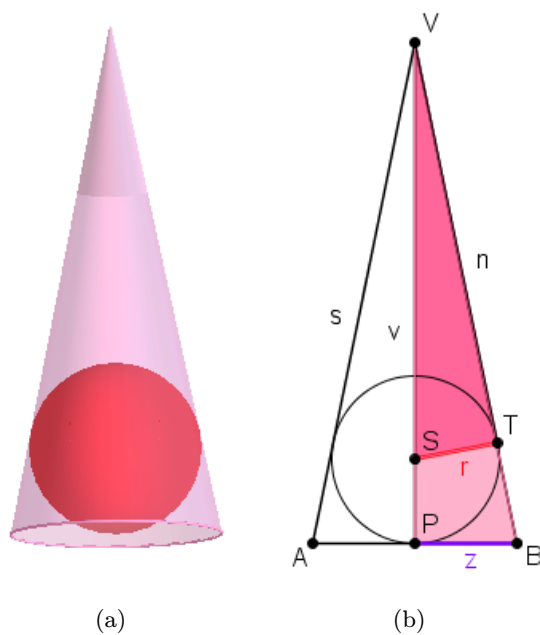
$$\text{Povrch koule } \dots S_1 = 4\pi r^2$$

$$\text{Povrch rotačního kužele } \dots S_2 = \pi z(z + s), \text{ kde } s = \frac{r\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6}r = \frac{5r\sqrt{6}}{2},$$

$$S_2 = \pi \frac{r\sqrt{6}}{2} \left(\frac{r\sqrt{6}}{2} + \frac{5r\sqrt{6}}{2} \right) = \pi \frac{36r^2}{4} = 9\pi r^2$$

$$S_1 : S_2 = 4\pi r^2 : 9\pi r^2 = 4 : 9$$

Povrchy koule a rotačního kuželu S_1 a S_2 jsou v poměru 4 : 9.



Obrázek 5.68: Rotační kužel opsaný kouli.

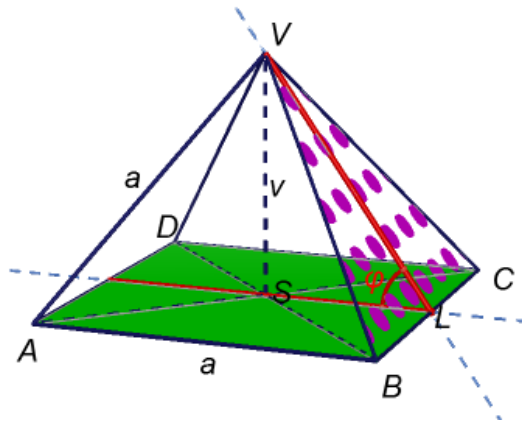
Úloha č. 6

V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ je dáno $|AB| = a$, $|AV| = a$. Určete odchylku roviny podstavy a roviny boční stěny jehlanu. (převzato z [1, s. 337])

Řešení: Zvolíme rovinu kolmou k přímce procházející určenou hranou podstavy, například BC . Ideální je zvolit rovinu tak, aby procházela bodem V . Rovina splňující dané podmínky je rovina VLS , kde S je střed AC , a L je střed hrany BC . Odchylka rovin je úhlem VLS - obr. 5.69.

Velikost odchylky můžeme vyjádřit jako $\tan \varphi = \frac{v}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{2a^2 - a^2}{2}}}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
 $\tan \varphi = \sqrt{2} \dots \varphi = 54^\circ 44'$

Odchylka roviny podstavy a roviny boční stěny pravidelného čtyřbokého jehlanu je $54^\circ 44'$.



Obrázek 5.69: Znázornění odchylky roviny podstavy a boční stěny jehlanu

KOMENTÁŘ: V programu *Cabri 3D* lze rovinu kolmou na průsečnici daných rovin znázornit. Pro lepší přehlednost je však tato rovina v obrázku 5.69 skryta.

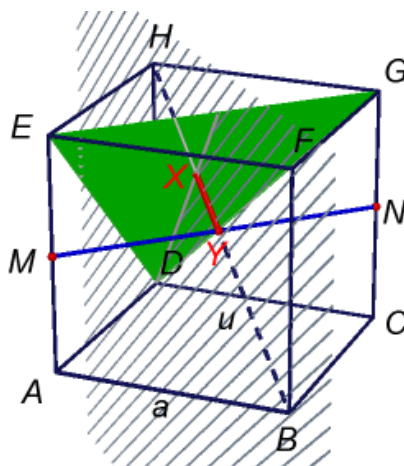
Úloha č. 7

V krychli $ABCDEFGH$ s hranou délky a je bod M středem hrany AE a bod N středem hrany CG . Vypočítejte vzdálenost přímky MN od roviny DEG , pokud $a = 5\text{cm}$. (převzato z [19, s. 99])

Řešení: Grafické řešení úlohy, kde vzdálenost úsečky MN od roviny DEG odpovídá délce úsečky XY , je znázorněno na obrázku 5.70.

Protože rovina DEG protíná tělesovou úhlopříčku BH v jedné třetině blíže vrcholu H a bod Y leží ve středu této úhlopříčky, můžeme snadno dopočítat, že $|XY| = \frac{1}{2}|BH| - \frac{1}{3}|BH| = \frac{1}{6}|BH|$. Protože délka úhlopříčky $|BH| = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$, potom velikost úsečky $|XY| = a\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Vzdálenost úsečky MN od roviny DEG je po dosazení $a = 5\text{cm}$ asi 1,44 cm.

Obrázek 5.70: Vzdálenost přímky MN od roviny DEG .

NEŘEŠENÉ ÚLOHY:

Úloha č. 8

Hrany kvádru jsou v poměru $a : b : c = 3 : 2 : 1$ a tělesová úhlopříčka $u_t = \sqrt{56}$. Určete objem a povrch kvádru. (převzato z [3, s. 150])

Úloha č. 9

Vypočítej poloměr r_2 šesti shodných kružnic, které jsou umístěny na kulové ploše o poloměru r_1 tak, že každá kružnice se dotýká čtyř ostatních (grafické řešení - viz úloha č. 12 na straně 83). (převzato z [5, s. 103])

Úloha č. 10

Vypočítej poloměr r kulové plochy opsané pravidelnému čtyřstěnu s hranou délky a . (převzato z [20, s. 356])

Úloha č. 11

V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ je dáno $|AB| = a$, $|AV| = a$. Určete odchylku dvou sousedních bočních stěn jehlanu. (převzato z [8, s. 338])

Úloha č. 12

Body M , N , P jsou po řadě středy hran EF , FG , GH krychle $ABCDEFGH$ o hraně $a = 4$ cm. Určete vzdálenost:

- a) bodu M od roviny ABG ;
- b) bodu C od roviny ANP . (*převzato z [19, s. 90]*)

Kapitola 6

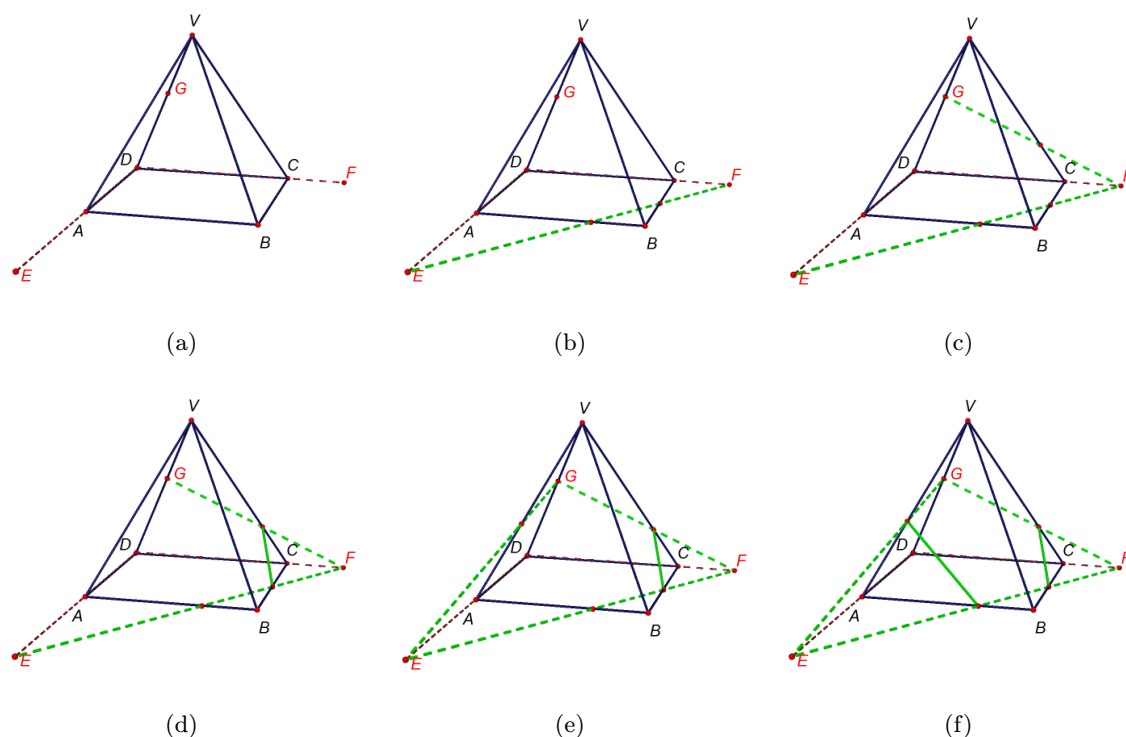
Vlastní zkušenost s využitím Cabri 3D při výuce

V rámci své souvislé praxe, kterou jsem absolvovala v zimním semestru druhého ročníku navazujícího magisterského studia na Střední průmyslové škole strojní a elektrotechnické v Liberci, jsem měla možnost vyzkoušet si práci s geometrickým softwarem Cabri 3D ve výuce. Během dvou týdnů, kdy jsem na Střední průmyslovou školu strojní a elektrotechnickou docházela, mi byly přiděleny dva první ročníky, ve kterých jsem probírala téma funkce, a jeden druhý ročník, kde jsem vyučovala prostřednictvím Cabri 3D část stereometrie zabývající se řezy těles. Ve druhém ročníku jsem strávila výukou řezů celkem pět hodin. Díky bezproblémové spolupráci s vedením školy a ochotě Mgr. Jiřiny Jirsákové, která byla po dobu praxe mou cvičnou učitelkou, jsem měla na každou hodinu k dispozici třídu s dataprojektorem a mohla jsem tak k výkladu a procvičení látky plně využít možností programu Cabri 3D.

Jak bylo řečeno, tématu řezů bylo ve druhém ročníku věnováno celkem pět hodin. První hodina patřila seznámení s třemi základními větami a jejich důsledky (*viz sekce 4.1.2*), poté následovaly tři hodiny procvičovací, ve kterých si žáci vyzkoušeli jak určení řezu pomocí tří zadaných bodů tak hledání průsečnice dvou různoběžných rovin nebo průniku přímky s tělesem. Poslední hodina byla věnována písemnému opakování. Vzhledem k tomu, že časové ani materiální podmínky neumožňovaly samostatnou práci žáků s programem Cabri 3D, jeho využití sloužilo výhradně k výkladu látky a kontrole postupu a výsledku řešení samostatné práce žáků prostřednictvím promítání dané konstrukce přes dataprojektor. Pro zjednodušení práce byly žákům na začátku každé hodiny rozdány pracovní listy s předtištěnými tělesy, aby nedocházelo ke zbytečnému zdržování rýsováním těles.

Při výkladu a kontrole postupu řešení jsem velmi ocenila funkci postupného přehrávání

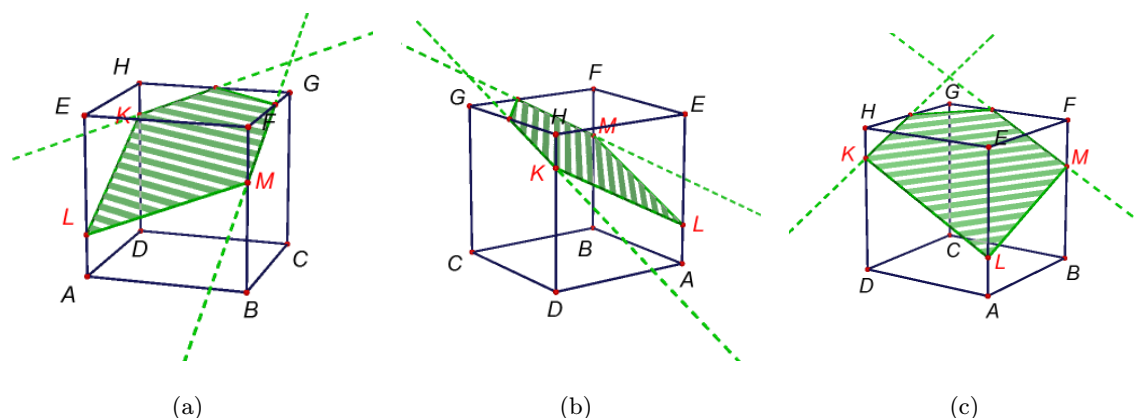
konstrukce (obr. 6.1), kterou program Cabri 3D nabízí. Jedná se o možnost postupného zobrazování jednotlivých kroků konstrukce prostřednictvím automatického nebo manuálního pohybu směrem vpřed i vzad. Žáci si tak mohou prohlédnout správný postup řešení a díky zpětnému krokování se mohou vrátit k místu, kde udělali chybu, aniž by museli tuto chybu hledat na tabuli či na papíře, kde bývá konstrukce kvůli velkému množství čar často nepřehledná. Kontrola správného postupu při řešení řezů těles pomocí funkce krokování se mi velmi osvědčila také při aktivizaci třídy, kdy žáci sami navrhovali další krok konstrukce a díky okamžité zpětné vazbě si tak mohli potvrdit či vyvrátit svůj odhad.



Obrázek 6.1: Krokování konstrukce v programu Cabri 3D.

Dalším cenným pomocníkem při výuce stereometrie pomocí Cabri 3D pro mě byla funkce automatického otáčení scény, která je nadstavbou oproti dvojrozměrné verzi toho programu. Při pohledu na papír, tabuli nebo na obrazovku monitoru je pro žáky často složité představit si, že dvě zdánlivě se protínající čary mohou být ve skutečnosti mimoběžky a ne různoběžky, jak by se na první pohled mohlo zdát. Díky rotaci tělesa, kdy se žáci dívají na těleso z různých úhlů pohledu, je však možné správné vztahy mezi jednotlivými prvky konstrukce snadno odhalit. Program Cabri 3D umožňuje rotaci scény kolem osy kolmé k základně procházející středem této základny (obr. 6.2) nebo libovolně zvoleným bodem.

Určitým úskalím při promítání výukového materiálu pomocí dataprojektoru obecně je



Obrázek 6.2: Ukázka rotace scény v programu Cabri 3D.

vhodné zvolení barev a fontu písma. Cabri 3D nabízí širokou paletu barev i druhů písma a uživatel si tak při dodržení kritérií čitelnosti a viditelnosti může vybrat dle svého uvážení. Já jsem ve svých příkladech použitých během praxe využívala nejvíce barvu modrou (tělesa), červenou (body řezu) a světle zelenou (řez) a písmo o velikosti „20“. Úroveň technického vybavení se však může na různých školách lišit, proto doporučuji vždy kvalitu promítání dopředu ověřit a výběr barev či fontu podle potřeby upravit. Podmínkou pro využívání programu Cabri 3D je instalace programu Java, který je volně stažitelný a je také součástí přílohy této práce.

Na závěr této kapitoly bych ráda poznamenala, že použití programu Cabri 3D při výuce řezů těles se mi velmi osvědčilo. Ačkoli příprava jednotlivých konstrukcí byla časově náročná, přesnost, názornost a funkce krokování a rotace objektů včetně možnosti pobyhovat zadanými body a měnit tak celou konstrukci považuji za výrazná pozitiva, která zkvalitňují výukový proces a usnadňují práci jak žákům, tak učitelům.

Kapitola 7

Průzkum v oblasti výuky stereometrie

Díky školské reformě probíhající v posledních letech získaly školy značnou autonomii, která se projevila jak v obsahu a časové dotaci, tak i v rozvržení učiva do jednotlivých ročníků. Pro účely této diplomové práce byl proveden průzkum, který si klade za cíl přiblížit výuku stereometrie na středních školách Libereckého kraje s důrazem na uvedené aspekty a využití geometrických softwarů jako moderních prostředků výuky.

7.1 Metodika

Průzkum byl realizován formou elektronického dotazníku, který byl společně s průvodním dopisem zaslán učitelům středních škol Libereckého kraje.

7.1.1 Dotazník

Struktura dotazníku byla vypracována následujícím způsobem. V úvodu byly uvedeny stručné instrukce k jeho vyplnění včetně e-mailové adresy pro zpětné zaslání a dále již následovaly jednotlivé otázky. Dotazník se skládal z otázek polouzavřených obsahujících výběr z nabídky konkrétních položek s možností doplnění informací v rámci položky „jiné“, a otevřených, ve kterých se mohli učitelé volně vyjádřit k danému tématu.

V dotazníku bylo použito celkem sedm otázek. V první byli učitelé požádáni, aby uvedli název školy, na které působí. Další dvě se týkaly časové dotace, rozvržení a obsahu stereometrie. Poslední čtyři otázky zjišťovaly využití geometrického softwaru středoškolskými učiteli při výuce matematiky.

7.1.2 Výběr respondentů a sběr dat

Distribuce dotazníku byla realizována třemi základními způsoby. V případě uvedené kontaktní e-mailové adresy na webových stránkách školy byl dotazník zaslán učitelům přímo. Pokud tato informace chyběla, bylo osloveno vedení školy s žádostí o rozeslání dotazníku příslušným zaměstnancům. Vzhledem k nízké návratnosti elektronických dotazníků byla část dotazníků předána osobně v tištěné verzi.

7.2 Výsledky

Elektronický dotazník nebo jeho tištěnou verzi vyplnilo celkem 32 učitelů ze 17 středních škol Libereckého kraje.

Otázka č. 1

V první otázce učitelé vyplňovali název střední školy svého působiště. Účelem bylo rozřadit jednotlivé školy do tří zvolených kategorií - gymnázia, střední odborné školy technického zaměření a ostatní střední školy - u kterých byla následně zjišťována hodinová dotace, ročník a obsah výuky stereometrie.

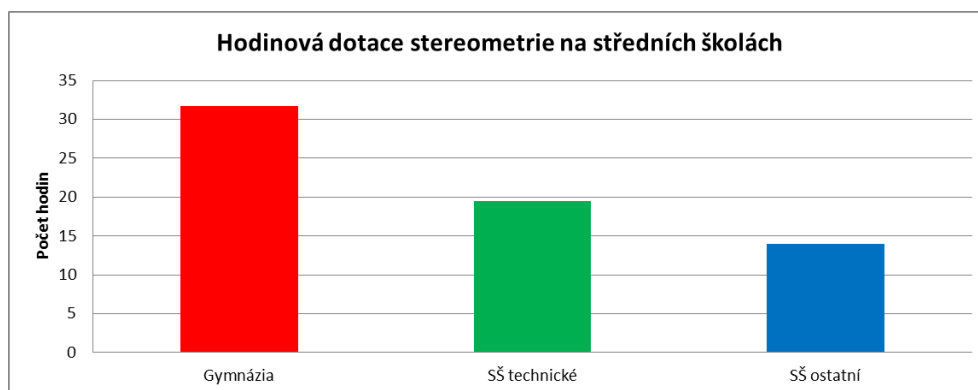
Z celkového počtu sedmnácti škol se dotazníkového šetření zúčastnila tři gymnázia, čtyři střední odborné školy technického zaměření a deset škol patřících do kategorie „ostatní střední školy“.

Otázka č. 2

Další otázka se týkala hodinové dotace a ročníku, ve kterém se stereometrie na středních školách vyučuje. Školy byly opět rozřazeny do tří kategorií (viz otázka č. 1), v rámci kterých byla zjištěná data analyzována.

Dvě gymnázia uvedla, že výuka stereometrie u nich probíhá ve třetím ročníku, jedno gymnázium mělo stereometrii zařazenou v kvintě odpovídající prvnímu ročníku. Tři střední školy technického zaměření uvedly, že stereometrii vyučují ve druhém ročníku a jedna škola v ročníku třetím. Na ostatních středních školách se rozvržení pohybovalo různě, kromě prvního ročníku se stereometrie objevila ve druhém, třetím i ve čtvrtém ročníku.

Stejně jako se v rámci škol lišilo ročníkové zařazení stereometrie, lišil se i počet hodin věnovaných tomuto tématu. Průměrná hodinová dotace stereometrie pro zvolené kategorie škol je znázorněna v následujícím grafu (graf 7.1).



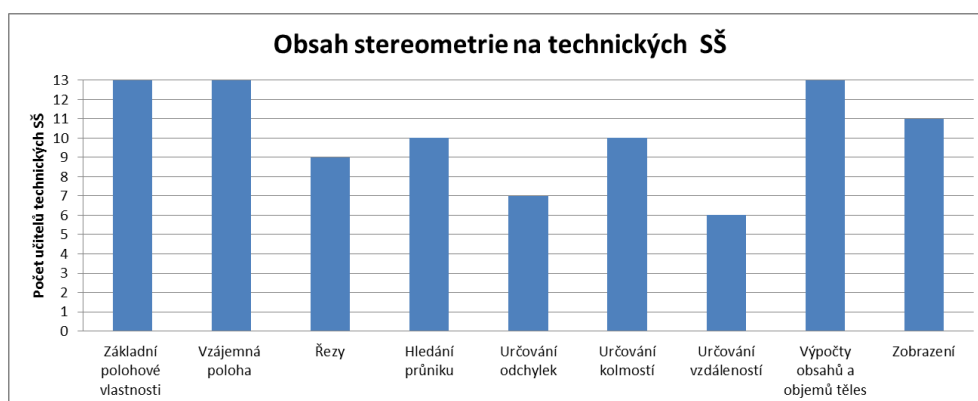
Graf 7.1: Hodinová dotace stereometrie.

Otázka č. 3

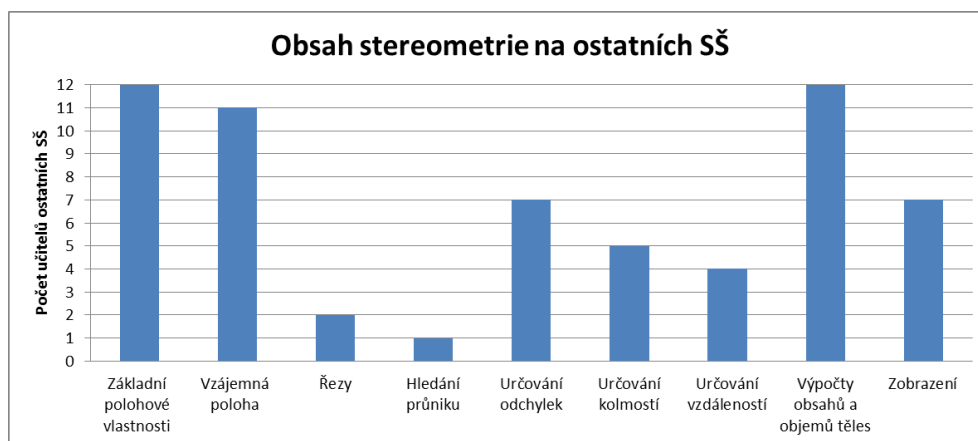
V této otázce byli učitelé požádáni, aby vybrali z předložené nabídky témata, která v rámci stereometrie vyučují.

Všechna témata obsáhla podle očekávání gymnázia, respektive všichni učitelé gymnázií. Obsah stereometrie se na středních odborných školách technického zaměření (graf 7.2) a ostatních středních školách (graf 7.3) lišil jak mezi školami, tak díky vytváření individuálních tematických plánů i mezi učiteli v rámci jedné školy.

Mezi témata, která zaškrtnli všichni učitelé a která se tedy učí na všech středních školách účastnících se průzkumu, patřily „Základní polohové vlastnosti“, „Vzájemná poloha“ a „Výpočty obsahů a objemů těles“.



Graf 7.2: Obsah stereometrie na středních školách technického zaměření.



Graf 7.3: Obsah stereometrie na ostatních středních školách.

Otázka č. 4

Otázkou číslo čtyři začínala část dotazníku týkající se geometrického softwaru. V této otázce měli učitelé uvést, zda geometrický software ve výuce využívají. Pokud zaškrtnli položku „ANO“, byli požádáni o doplnění názvu používaného geometrického softwaru. Pokud byla jejich odpověď záporná, měli doplnit důvody, proč geometrický software nevyužívají. V dalších otázkách dotazníku již v tomto případě nemuseli pokračovat.

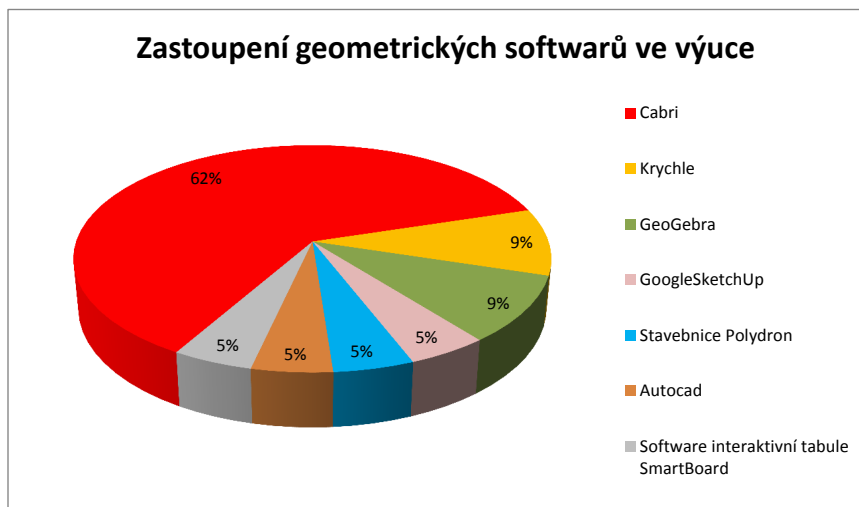
Použití geometrického softwaru ve výuce matematiky potvrdilo 16 z 32 dotázaných, tedy přesně polovina. V rámci geometrických softwarů používaných při výuce obsadil první místo s velkým náskokem program Cabri. Následovaly programy GeoGebra, Krynchle a okrajově bylo zmíněno i použití některých dalších geometrických softwarů. Míru zastoupení geometrických softwarů ve výuce znázorňuje graf 7.4.

Mezi hlavní důvody, které učitelé uvedli jako překážku pro použití geometrických softwarů při výuce, patřilo zejména nedostatečné vybavení (9x), nedostatek času (3x) a ve třech případech byla zmíněna také zbytečnost používání těchto softwarů.

Otázka č. 5

Úkolem páté otázky bylo zjistit, pro jaká výuková témata matematiky učitelé geometrické softwaru používají.

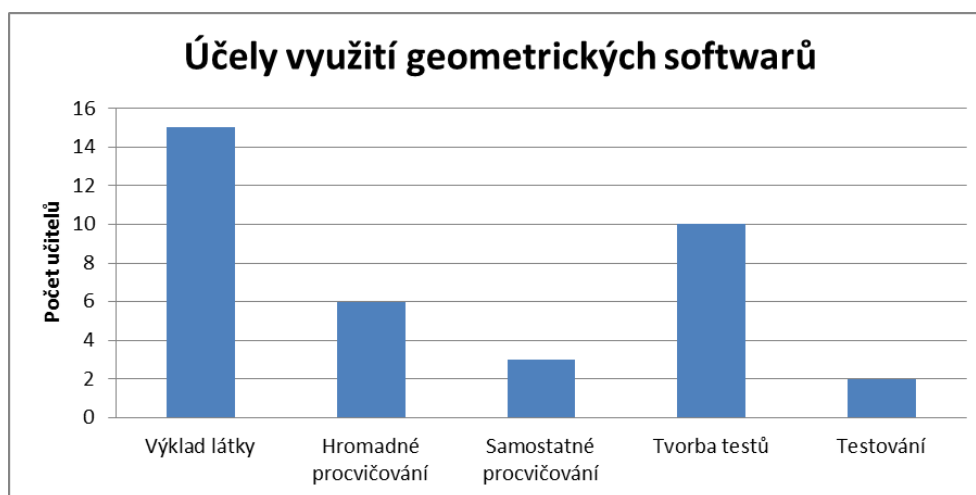
Na prvním místě se umístila planimetrie, která byla uvedena ve čtrnácti případech, následovala stereometrie (11x), analytická geometrie (4x), algebra (3x) a funkce (3x).



Graf 7.4: Zastoupení geometrických softwarů ve výuce.

Otázka č. 6

V této otázce byli učitelé požádáni, aby označili způsob, jakým geometrický software ve výuce používají. Výsledky jsou znázorněny v grafu 7.5.



Graf 7.5: Účely využití geometrických softwarů.

Otázka č. 7

Poslední otázka dotazníku zjišťovala výhody a nevýhody geometrických softwarů z pohledu učitelů.

Mezi hlavní výhody, které učitelé v dotazníku uvedli, patřila názornost, přesnost a úspora času v hodině. Velmi pozitivně byla hodnocena také možnost krokování konstrukce a změny zadání. Naproti tomu, za největší nevýhodu byla považována časová náročnost přípravy. Na školách, kde žáci pracují s geometrickým softwarem samostatně, zmiňovali učitelé také zhoršenou kvalitu rýsování na papír a špatné rozvržení konstrukce.

7.3 Shrnutí

Cílem tohoto průzkumu bylo poskytnout informace o současné podobě výuky stereometrie a využití geometrických softwarů v hodinách matematiky na středních školách. Vzhledem k nízkému počtu respondentů slouží uvedené výsledky průzkumu především jako hrubý odhad skutečné situace, která na středních školách v současné době panuje. Z celkového hodnocení je však zřejmé, že geometrické softwary jako moderní prostředky výuky mají dnes ve výuce matematiky své nezastupitelné místo a díky jejich neustálému vývoji a zdokonalování lze očekávat, že jejich využívání pro školní potřeby bude mít nadále vzrůstající tendenci.

Kapitola 8

Závěr

Stereometrie je pro své vysoké nároky kladené na prostorovou představivost žáků považována za jednu z nejobtížnějších částí školské matematiky. Z výsledků srovnávacích testů prostorové představivosti zveřejněných v této práci je zřejmé, že schopnosti žáků v této oblasti jsou nedostatečné a je tedy nutné hledat způsoby pro zvýšení efektivity výuky stereometrie všemi dostupnými prostředky. Jeden ze způsobů vedoucích ke zlepšení kvality výuky představují geometrické softwary, jejichž využitím ve výuce stereometrie se zabývá tato diplomová práce.

Hlavním cílem této práce bylo sestavit krátký text týkající se výuky stereometrie na střední škole doplněný o sbírku řešených a částečně neřešených úloh. Sbíрка i teoretický text obsahují doprovodné statické a dynamické obrázky zkonstruované v programech GeoGebra 5.0 a Cabri 3D, které byly vybrány s ohledem na školské potřeby. Obrázky jsou spolu se svými zdrojovými soubory, programem GeoGebra 5.0 a softwarem Java nezbytným pro práci jak s programem Cabri 3D tak GeoGebra 5.0 přiloženy na CD. Cabri 3D nebylo možné z důvodu licence do přílohy zařadit.

Sbíрка úloh tvořící hlavní část práce obsahuje celkem 82 úloh. Z toho je 53 úloh řešených a 29 neřešených, jejichž výsledky jsou uvedeny v příloze. Vzhledem ke skutečnosti, že učebnic stereometrie existuje na trhu několik, bylo záměrem této práce zařadit do sbírky vedle tradičních příkladů i příklady méně tradiční s cílem poukázat na rozmanitost tohoto tématu. Obsah sbírky byl přizpůsoben také možnostem vybraných geometrických softwarů, které jsou díky dynamickým funkcím velmi vhodné k zjišťování polohových vlastností a vytváření prostorových konstrukcí, zatímco při určování metrických vlastností včetně počítání objemů a obsahů těles plní spíše jen kontrolní funkci.

Nedílnou součástí práce představuje průzkum v oblasti výuky stereometrie realizovaný pomocí elektronického dotazníku, který byl zaslán učitelům středních škol Libereckého kraje a je-

hož výsledky poukazují na pozitivní trend v používání geometrických softwarů ve výuce matematiky. Z výsledků průzkumu jsou také patrné změny, které přinesla školská reforma v podobě větší volnosti ve výběru obsahu učiva jak z hlediska škol tak samotných učitelů.

Na závěr bych ráda poznamenala, že díky vytváření statických a dynamických obrázků, které tvoří podstatnou část této diplomové práce, jsem se naučila pracovat ve dvou v současnosti nepoužívanějších geometrických softwarech, což považuji za nesmírné pozitivum pro svou budoucí učitelskou praxi. Zároveň doufám, že tato práce bude sloužit jako hodnotný zdroj pro výuku stereometrie nejen mně, ale i dalším studentům či učitelům matematiky.

Literatura

- [1] BUŠEK, I.: *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, první vydání, 1985, ISBN 14-639-85.
- [2] GERGELITSOVÁ, S.: *Výuka stereometrie a podpora prostorové představivosti s využitím počítače* [online]. [cit. 2013-03-05].
URL <<http://geometry.cz/Sarka/>>
- [3] GRUNDMAN, Z.: *Řešené příklady z matematiky pro střední průmyslové školy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, první vydání, 1967, ISBN 16-001-68.
- [4] HOLUBÁŘ, J.: *Množiny bodů v prostoru*. Praha: ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá Fronta, první vydání, 1983, ISBN 23-083-83.
- [5] HRADECKÝ, F.; KOMAN, M.; VYŠÍN, J.: *Několik úloh z geometrie jednoduchých těles*. Praha: ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá Fronta, třetí vydání, 1977, ISBN 23-112-77.
- [6] KADLEČEK, J.: *Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy*. Praha: Prometheus, první vydání, 1996, ISBN 80-7196-017-9.
- [7] KISELEV, A. P.: *Kiselev's Geometry/Book II. Stereometry*. USA: Sumizdat, první vydání, 2008, ISBN 978-0-9779852-1-0.
- [8] KUBÁT, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na VŠ*. Praha: Victoria Publishing, první vydání, 1993, ISBN 80-85605-27-9.
- [9] LOHMAN, D. F.: *Spatial Ability and G* [online]. 1993, [cit. 2013-03-04].
URL <https://www.e-education.psu.edu/drupal6/files/sgam/Spatial_Ability_and_G.pdf>

- [10] MŠMT: *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* [online]. 2007, [cit. 2013-12-05].
URL <http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPG-2007-07_final.pdf>
- [11] MŠMT: *Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělávání elektrotechnika* [online]. 2007, [cit. 2013-12-05].
URL <<http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP202641M0120Elektrotechnika.pdf>>
- [12] MOLNÁR, J.: *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. Olomouc: Státní pedagogické nakladatelství, první vydání, 2004, ISBN 80-7066-358-8.
- [13] MOLNÁR, J.: *Prostorová představivost nejen v matematice* [online]. 2012, [cit. 2013-4-03].
URL <<http://www.phil.muni.cz/linguistica/art/molnar-tlaskal/mot-001.pdf>>
- [14] NAGY, J.; NAVRÁTIL, O.: *Matematická analýza*. Praha: Nakladatelství ČVUT, první vydání, 2007, ISBN 978-80-01-03725-6.
- [15] ODVÁRKO, O.; ŘEPOVÁ, J.: *Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU 3. část*. Praha: Prometheus, páté vydání, 1985, ISBN 80-7196-039-X.
- [16] PELIKÁN, J.: *Hledání těžiště výchovy*. Praha: Nakladatelství Karolinum, první vydání, 2011, ISBN 978-80-246-1265-2.
- [17] PETÁKOVÁ, J.: *Matematika - příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha: Prometheus, první vydání, 2008, ISBN 978-80-7196-099-7.
- [18] PIRKLOVÁ, P.: *Osová afinita a kolineace v prostoru* [online]. [cit. 2013-01-02].
URL <http://kmd.fp.tul.cz/lide/pirklova/GE2/afinita_a_kolineace%20v%20prostoru_web.pdf>
- [19] POMYKALOVÁ, E.: *Matematika pro gymnázia - Stereometrie*. Praha: Prometheus, třetí vydání, 2002, ISBN 80-7196-178-7.
- [20] REPÁŠ, V.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, první vydání, 1989, ISBN 80-08-00014-7.
- [21] ROBOVÁ, J.: *Cabri 3D ve výuce geometrie*. České Budějovice: University of South Bohemia Department of Mathematics Report Series, 2007, ISSN 1214-4681.

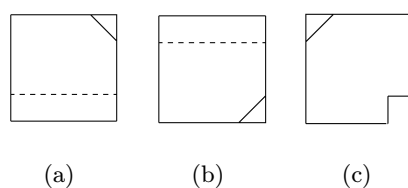
Příloha A

Výsledky neřešených úloh

5.1 Úlohy na rozvoj obecné prostorové představivosti

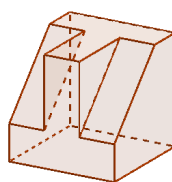
12. a) 21, b) 9.

13. Řešení úlohy - obr. A.1.



Obrázek A.1: Nárys (a), půdorys (b) a bokorys (c) daného tělesa.

14. Řešení úlohy - obr. A.2.



Obrázek A.2: Hledané těleso znázorněné ve volném rovnoběžném promítání.

15. a) 8, b) 12, c) 6, d) 1.

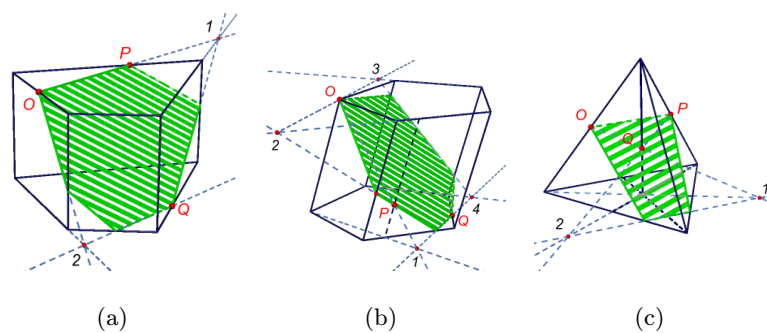
16. 10.

17. 10.

5.2.2 Polohové konstrukční úlohy

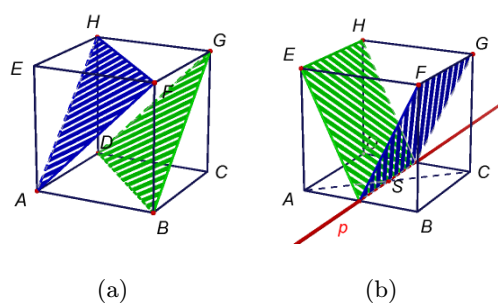
12. Bod, hrana, trojúhelník (včetně stěny jehlanu).

13. Řešení úlohy - obr. A.3.



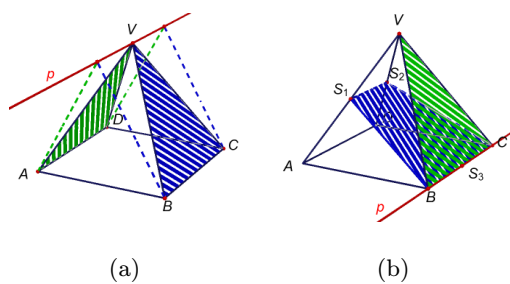
Obrázek A.3: Řezy tělesem.

14. Řešení úlohy - obr. A.4.



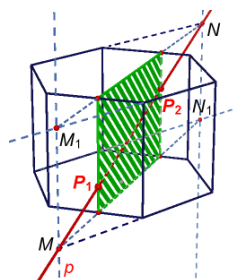
Obrázek A.4: Průsečnice p neexistuje (a), průsečnice $p = \leftrightarrow S_{AB}S_{CD}$ (b).

15. Řešení úlohy - obr. A.5.



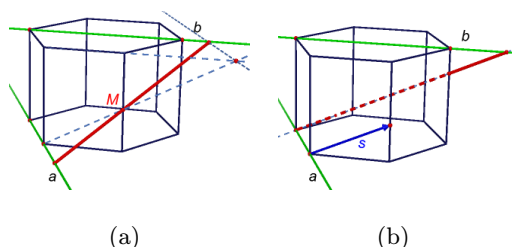
Obrázek A.5: Průsečnice rovin - jehlan.

16. Řešení úlohy - obr. A.6.



Obrázek A.6: Průsečíky přímky p s hranolem.

17. Řešení úlohy - obr. A.7.



Obrázek A.7: Příčka mimoběžek daným bodem (a), daným směrem (b).

5.2.3 Množiny bodů daných vlastností

15. Hledanými body jsou průsečíky přímky p s dvěma rovinami rovnoběžnými s rovinou ρ , která je od nich vzdálena o m .

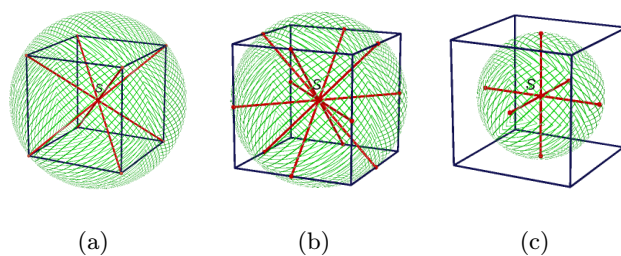
16. Roviny souměrnosti přímk a , b .

17. Rovina souměrnosti daných rovin.

18. a) Střed S koule leží v průsečíku tělesových úhlopříček krychle, poloměr r je vzdálenost bodu S od libovolného vrcholu krychle - obr. A.8(a);

b) střed S koule leží v průsečíku spojnic středů protějších hran krychle, poloměr r je vzdálenost bodu S od libovolného středu hrany krychle - obr. A.8(b);

c) střed S koule leží v průsečíku spojnic středů protějších stěn krychle, poloměr r je vzdálenost bodu S od libovolného středu stěny krychle - obr. A.8(c).



Obrázek A.8: Koule procházející vrcholy (a), středy hran (b) a středy stěn (c) krychle.

19. Průsečnice rovin souměrnosti úseček AB a BM .

20. Podstavou válce je kružnice opsaná trojúhelníku ABC . Výšky válce leží na kolmicích k rovine ABC a mají velikost v . Řešením jsou dva válce.

21. Rotační paraboloid s ohniskem v bodě A a s řídící rovinou ρ .

5.2.4 Zobrazení

8. n .

9. $n + 1$.

10. Řešením úlohy jsou zobrazení:

- *rovinná souměrnost* podle roviny souměrnosti horní a dolní podstavy krychle;
- *středová souměrnost*, kde bod S je průsečíkem tělesových úhlopříček;
- *osová souměrnost*, kde osa může procházet spojnicí středů protilehlých bočních stěn krychle;
- *otočení* s osou shodnou jako v předchozím případě a úhlem otočení $\varphi = 180^\circ$;
- *posunutí* o orientovanou úsečku AE ;
- *stejnolehlost* se středem S v průsečíku tělesových úhlopříček krychle a koeficientem stejnoolehlosti $\kappa = -1$.

11. $b : a = c : b$.

12. Středy hran EF a CD .

5.2.5 Metrické úlohy

8. $V = 48, S = 88$.

9. $r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} r_1$.

10. $r = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

11. $109^\circ 28'$

12. a) $2\sqrt{2}$ cm, b) $\frac{16}{\sqrt{17}}$ cm.

Příloha B

Dotazník

Dotazník použitý pro účely průzkumu výuky stereometrie a využití geometrických softwarů pro školní potřeby se z důvodu velikosti svého formátu nachází až na následující stránce.

Dotazník

Výuka stereometrie a geometrický software v hodinách matematiky na SŠ

Instrukce: Správnou odpověď zaškrtněte (v programu MS Office dvojklikem), případně doplňte slovním komentářem. Pokud u čtvrté otázky odpovíte NE, nepokračujte v dalších otázkách a celý dotazník odešlete zpět na adresu novakova.k@gmail.com.

1. Uveďte název školy, na které vyučujete.....
2. Uveďte hodinovou dotaci výuky stereometrie na Vaší škole..... a ročník, ve kterém se stereometrie vyučuje.....
3. Vyberte z nabídky témata, která jsou na Vaší SŠ v rámci stereometrie vyučována:
 - ☐ Základní polohové vlastnosti – vztahy mezi body, přímkami, rovinami;
 - ☐ Vzájemná poloha – přímek, přímky a roviny, rovin;
 - ☐ Řezy těles;
 - ☐ Průnik přímky s rovinou / tělesem;
 - ☐ Odchylka přímek, přímek a rovin, rovin;
 - ☐ Kolmost přímek a rovin;
 - ☐ Vzdálenost bodu od přímky / roviny, vzdálenost přímky a roviny, vzdálenost dvou mimoběžek;
 - ☐ Výpočty objemů a povrchů těles.
 - ☐ Zobrazení (doplňte jaká.....)
4. Používáte při výuce matematiky geometrický software?
 - ☐ ANO (doplňte jaký.....)
 - ☐ NE (uveďte důvod proč.....)
(např. chybějící finanční prostředky, nedostatečné vybavení učeben, apod.)
5. Pro jaká témata (např. planimetrie) geometrický software používáte?
Doplňte.....
6. Jakým způsobem geometrický software používáte?
 - ☐ K výkladu látky (promítání řešených příkladů);
 - ☐ K hromadnému procvičování (žáci navrhnou postup řešení a učitel postupně odhaluje jednotlivé kroky správného řešení);
 - ☐ K samostatnému procvičování – žáci řeší samostatně úlohy pomocí geometrického softwaru na PC;
 - ☐ K tvorbě předtištěných formulářů testu;
 - ☐ K testování žáků – žáci řeší pomocí geometrického softwaru testové úlohy na PC;
 - ☐ Jiný.....
7. Vypište, jaké jsou z Vašeho osobního hlediska klady a zápory daného geometrického softwaru?

+	-
.....	
.....	

Příloha C

Příloha na CD

Přiložené CD má následující strukturu:

Obrázky

Teoretické základy stereometrie

Sbírka příkladů

GeoGebra 5.0 JOGL1 Beta

Java 7

DiplomováPráce.pdf