

# **TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI**

Fakulta strojní

## **Disertační práce**

k získání akademického titulu Ph.D.

ve studijním oboru

**Aplikovaná mechanika – Inženýrská mechanika**

Ing. Jiří Blekta

## **K problematice multibody simulací**

Školitel: doc. Ing. Josef Mevald, CSc.

Studijní program: P2302 Stroje a zařízení

Studijní obor: 3901V003 Aplikovaná mechanika

Zaměření: Inženýrská mechanika

Datum konání státní doktorské zkoušky: 30. listopadu 2005

## Poděkování

Na úvod své práce bych rád poděkoval všem, kteří se se mnou přímo či nepřímo podíleli na jejím vzniku.

Na prvním místě je to především můj školitel doc. Ing. Josefu Mevaldovi, CSc. Jeho praktické náměty a připomínky mi byly oporou během celého období, kdy práce vznikala. Obzvláště mu děkuji za jeho neúnavnou podporu kdykoliv bylo třeba.

Dále bych chtěl také co nejvíce poděkovat členům mé rodiny, zejména mamince za zvýšený nápor povinností, které musela díky mému časovému zatížení nést. Jejich trpělivým snášením mi poskytla potřebné podmínky pro psaní disertační práce.

V neposlední řadě bych rád poděkoval mým kolegům, pracovníkům Katedry mechaniky, pružnosti a pevnosti za zajištění podmínek k úspěšnému dokončení práce.

## Anotace

Tato práce se zabývá možnými problémy, které se mohou vyskytnout během simulací v multibody programech. Autor v ní uvádí své zkušenosti s tvorbou a následnou simulací multibody modelů. Cílem této práce je na dané problémy upozornit, analyzovat je a navrhnout možná řešení vedoucí k jejich minimalizaci či odstranění. Pozornost je věnována zejména programu MSC.ADAMS. Tato práce by měla poskytnout užitečné informace nejenom uživatelům tohoto programu.

## Klíčová slova

multibody, simulace, integrační metody, podmíněnost

## Anotation

The focus of this final project is to discuss possible problems which can occur during multibody simulations. The author of this dissertation thesis presents his experience gained during creating and simulating multibody models. The aim of the project is to refer to and analyze these problems and to suggest possible solutions leading to their minimalization. The attention is paid to MSC.ADAMS Software. This project should be able to provide useful information not only for the users of this software.

## Keywords

multibody, simulation, integrating methods, conditionality

## Seznam zkratek

V této práci jsou značeny matice a vektory tučnou kurzívou. Matice jsou psány velkými písmeny, vektory malými písmeny. Prvky matice a vektoru jsou psány kurzívou malými písmeny.

Je-li v textu odkazováno na označení určitých objektů (těles, bodů, atd.) je toto činěno kurzívou. Stejně je tomu při značení jednotek.

Všechny zkratky a označení jsou vysvětleny a specifikovány přímo v textu za jejich prvním použitím. Zde uveďme pouze ty nejdůležitější.

|                   |                                               |
|-------------------|-----------------------------------------------|
| GSS.....          | globální souřadný systém                      |
| LSS .....         | lokální souřadný systém                       |
| MBS.....          | multibody (model, simulace, prostředí)        |
| R .....           | označení rámu                                 |
| WM2D .....        | program Working Model 2D                      |
| $N$ .....         | počet těles v systému                         |
| $m$ .....         | počet vazebních rovnic                        |
| $T$ .....         | kinetická energie                             |
| $V$ .....         | potenciální energie                           |
| $l$ .....         | pořadí zobecněné souřadnice                   |
| $J$ .....         | Jacobiho matice                               |
| $p$ .....         | impulsmoment                                  |
| $xyz$ .....       | souřadný systém tvořený osami $x$ , $y$ a $z$ |
| $\psi$ .....      | úhel precese                                  |
| $\vartheta$ ..... | úhel nutace                                   |
| $\varphi$ .....   | úhel vlastní rotace                           |
| $S^{ij}$ .....    | transformační matice mezi systémem $i$ a $j$  |



|                                                        |                                                                                |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| ${}^j\omega^i$ .....                                   | úhlová rychlost členu $i$ v souřadném systému $j$                              |
| $\mathbf{n}_1^i, \mathbf{n}_2^i, \mathbf{n}_3^i$ ..... | jednotkové vektory ve směrech $x^i, y^i, z^i$ souřadného systému $x^i y^i z^i$ |
| $\mathbf{x}_i$ .....                                   | vektor zobecněných souřadnic                                                   |
| $[\boldsymbol{\omega}^k]$ .....                        | matice složek úhlových rychlostí                                               |
| $\mathbf{v}_i$ .....                                   | vektor rychlosti tělesa $i$                                                    |
| $\mathbf{a}_i$ .....                                   | vektor zrychlení tělesa $i$                                                    |
| $\{\mathbf{n}\}$ .....                                 | pole vektorů $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$                    |
| $\mathbf{f}$ .....                                     | zobecněné silové účinky                                                        |
| $\phi$ .....                                           | vazební rovnice                                                                |
| $\lambda$ .....                                        | Lagrangeovy multiplikátory                                                     |
| $\kappa$ .....                                         | kondiční číslo matice (číslo podmíněnosti)                                     |
| $I_{ixx}$ .....                                        | moment setrvačnosti tělesa $i$ k ose $x$                                       |

## Obsah

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Úvod .....                                                               | 4  |
| 2. Návaznost na podobné práce .....                                         | 5  |
| 3. Teoretická část .....                                                    | 6  |
| 3.1 Matematický popis mechanického systému .....                            | 6  |
| 3.1.1 Typy souřadných systémů .....                                         | 6  |
| 3.1.1.1 Globální souřadný systém .....                                      | 7  |
| 3.1.1.2 Lokální souřadný systém .....                                       | 7  |
| 3.1.1.3 Transformace .....                                                  | 8  |
| 3.1.2 Úhlová rychlost .....                                                 | 9  |
| 3.1.3 Zobecněné souřadnice .....                                            | 12 |
| 3.1.3.1 Transformační matice pro systémy s více tělesy .....                | 13 |
| 3.1.3.2 Časová derivace transformačních matic .....                         | 15 |
| 3.1.4 Úhlová rychlost a složky úhlové rychlosti .....                       | 15 |
| 3.1.5 Rychlost těžiště .....                                                | 17 |
| 3.1.5.1 Systém s kulovými vazbami .....                                     | 17 |
| 3.1.5.2 Systém s obecnými vazbami .....                                     | 21 |
| 3.1.6 Zrychlení těžiště tělesa .....                                        | 23 |
| 3.1.7 Zobecněné akční síly .....                                            | 23 |
| 3.1.8 Silové účinky tlumičů a pružin ve vazbách .....                       | 24 |
| 3.1.9 Kontaktní síly .....                                                  | 25 |
| 3.1.10 Gravitační síly .....                                                | 25 |
| 3.1.11 Pohybové rovnice .....                                               | 25 |
| 3.1.11.1 Kinetická energie .....                                            | 26 |
| 3.1.11.2 Potenciální energie .....                                          | 26 |
| 3.1.11.3 Lagrangeovy rovnice .....                                          | 27 |
| 3.1.12 Ukázkový příklad – shrnutí poznatků matematického popisu .....       | 28 |
| 3.2 Řešení matematického popisu mechanického systému .....                  | 29 |
| 3.2.1 Specifikace multibody modelů .....                                    | 29 |
| 3.2.2 Metody řešení diferenciálních rovnic .....                            | 30 |
| 4. Programové prostředí MSC.ADAMS .....                                     | 32 |
| 4.1 Popis modelu .....                                                      | 33 |
| 4.1.1 Tvorba modelu ve virtuálním prostředí .....                           | 33 |
| 4.1.2 Matematický přepis modelu .....                                       | 36 |
| 4.1.2.1 Tvorba pohybových rovnic .....                                      | 36 |
| 4.1.2.2 Matematický zápis příkladu v prostředí MSC.ADAMS/Solver .....       | 40 |
| 4.1.3 Shrnutí a charakteristika metod použitých v prostředí MSC.ADAMS ..... | 41 |
| 4.1.3.1 GSTIFF .....                                                        | 42 |
| 4.1.3.2 WSTIFF .....                                                        | 43 |

|         |                                                                    |     |
|---------|--------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1.3.3 | CONSTANT BDF .....                                                 | 43  |
| 4.1.3.4 | ABAM .....                                                         | 44  |
| 4.1.3.5 | RKF45 .....                                                        | 45  |
| 4.1.3.6 | Newmarkova, HHT metoda.....                                        | 45  |
| 4.2     | Algoritmus řešení matematického popisu modelu .....                | 45  |
| 4.2.1.  | Odhad přibližného řešení algebraicko-diferenciální soustavy .....  | 46  |
| 4.2.2.  | Zpřesnění odhadu .....                                             | 46  |
| 5.      | Problematika Jacobiho matice .....                                 | 51  |
| 5.1     | Podmíněnost Jacobiho matice .....                                  | 51  |
| 5.2     | Podoba Jacobiho matice .....                                       | 53  |
| 5.3     | Příklad tvorby Jacobiho matice .....                               | 53  |
| 5.4     | Analýza dat v Jacobiho matici.....                                 | 56  |
| 5.4.1   | Jacobiho matice – oblast pohybových rovnic.....                    | 57  |
| 5.4.2   | Vazební oblast Jacobiho matice – oblast algebraických rovnic ..... | 59  |
| 5.5.    | Příklady aplikace .....                                            | 60  |
| 5.5.1   | Rozdílná hmotnost, typ použité vazby .....                         | 60  |
| 5.5.2   | Správné pořadí tvorby modelu .....                                 | 71  |
| 5.3.3   | Automobil s přívěsem.....                                          | 79  |
| 5.3.3.1 | Stávající model .....                                              | 79  |
| 5.3.3.2 | Návrh úpravy .....                                                 | 87  |
| 5.3.3.3 | Working Model 2D.....                                              | 92  |
| 5.3.3.4 | Měření.....                                                        | 92  |
| 6.      | Shrnutí nejdůležitějších poznatků.....                             | 100 |
| 7.      | Závěr .....                                                        | 103 |
| 8.      | Literatura .....                                                   | 104 |
| 9.      | Seznam vlastních prací .....                                       | 106 |
| 10.     | Rejstřík .....                                                     | 108 |

## **Přílohy**

|         |                                                       |       |
|---------|-------------------------------------------------------|-------|
| P 1     | Příklad dvojitého kyvadla.....                        | P1-1  |
| P 1.1   | Matematický popis modelu .....                        | P1-2  |
| P 1.1.1 | Odvození rychlostí .....                              | P1-2  |
| P 1.1.2 | Kontrola správnosti odvozených rychlostí .....        | P1-5  |
| P 1.1.3 | Výpočet kinetické energie systému.....                | P1-6  |
| P 1.1.4 | Tvorba Lagrangeových rovnic .....                     | P1-7  |
| P 1.1.5 | Zobecněné silové účinky .....                         | P1-8  |
| P 1.1.6 | Sestavení Lagrangeových rovnic .....                  | P1-10 |
| P 1.2   | Řešení příkladu v programovém prostředí MathCAD ..... | P1-11 |

|                                                                                               |          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| P 2 Integrované metody použité v systému MSC.ADAMS .....                                      | P2-1     |
| P 2.1 Řešení obyčejné diferenciální rovnice .....                                             | P2-1     |
| P 2.1.1 Jednokrokové integrační metody .....                                                  | P2-1     |
| P 2.1.1.1 Rungovy-Kuttovy metody .....                                                        | P2-2     |
| P 2.1.2 Vícekrokové integrační metody .....                                                   | P2-4     |
| P 2.1.2.1 Adamsova-Bashforthova metoda .....                                                  | P2-5     |
| P 2.1.2.2 Adamsova-Moultonova metoda .....                                                    | P2-6     |
| P 2.1.2.3 Metody prediktor-korektor .....                                                     | P2-7     |
| P 2.1.2.4 Metody založené na zpětné derivaci (BDF metody) .....                               | P2-8     |
| P 2.2 Řešení soustav diferenciálních rovnic .....                                             | P2-8     |
| P 2.2.1. Stabilita metod .....                                                                | P2-9     |
| P 2.2.2 Newtonova metoda .....                                                                | P2-10    |
| P 2.3. Nové metody prostředí MSC.ADAMS - <i>Newmarkova HHT metoda</i> .....                   | P2-11    |
| <br>P 3 Ukázka matematického zápisu příkladu dvojitého kyvadla v prostředí<br>MSC.ADAMS ..... | <br>P3-1 |
| <br>P 4 Ukázka Jacobiho matice v prostředí MSC.ADAMS .....                                    | <br>P4-1 |
| <br>P 5 Výpis Jacobiho matice v prostředí MSC.ADAMS .....                                     | <br>P5-1 |
| <br>P 6 Model vozidla s přívěsem v prostředí Working Model 2D .....                           | <br>P6-1 |

## 1. Úvod

V dnešní době stále více proniká do různých oblastí lidského působení výpočetní technika. Cílem nasazování počítačů je snaha o zefektivnění a zkvalitnění různých činností, které by bez jejich využití vyžadovaly přílišné časové nároky, nebo by nebyly vůbec řešitelné. Tato skutečnost nabízí velké možnosti v aplikování nejrozličnějších matematických poznatků při řešení praktických problémů (např. metoda konečných prvků, metoda sítí, atd.). Bez použití výpočetní techniky by tyto rozsáhlé výpočty byly řešitelné jen s velkými obtížemi.

Na druhé straně se ovšem s příchodem počítačů mezi méně zkušenými uživateli rozšířil názor, že počítač zvládne vyřešit i ty nejnáročnější úlohy a že získaný výsledek je vždy správný a bezchybný. Trendem dnešní doby je vývoj rozsáhlých programů, které nabízejí uživateli komplexní řešení jeho problému. Zdánlivou předností těchto programů je možnost vytvořit libovolně složitý model bez ohledu na dodržování jakýchkoliv zásad. Takový model však může být zcela nevhodný pro matematické zpracování. Důsledkem toho bývá v lepším případě selhání požadované simulace. V horším případě však může nastat skutečnost, že se programu sice podaří výpočet provést, avšak za cenu nesprávných výsledků. Tato situace může mít v kombinaci s uživatelským přesvědčením o absolutní správnosti výpočtu velmi negativní dopad.

Podnětem pro sepsání této práce byla autorova zkušenost s problémy, které vznikají při simulačních výpočtech chování automobilu. V návaznosti na diplomovou práci [1] autor řešil model osobního vozidla s přívěsem, jehož účelem byla analýza dynamických účinků přenášených tažným zařízením do karoserie vozidla při přejezdu terénní nerovnosti. Vzhledem ke složitosti modelu docházelo k častým nestabilitám, které bylo třeba v co největší míře eliminovat.

**Cílem této práce** je sepsat získané zkušenosti s řešením složitého modelu, analyzovat problémy, které se během výpočtu vyskytly a navrhnout možné postupy vedoucí k minimalizaci nežádoucích jevů v průběhu výpočtu.

Pro tyto účely se plně zaměříme na programové prostředí MSC.ADAMS, které vyhovuje ze dvou důvodů – bylo již použito při formulaci modelu vozidla v diplomové práci [1] a poskytuje alespoň částečný náhled do matematické formulace modelu a průběhu simulačního výpočtu.

## 2. Návaznost na podobné práce

V souvislosti s modely mechanických systémů, které mohou být složeny z velkého množství vzájemně propojených těles, je zavedeno používání pojmu „multibody“. Hovoříme o multibody modelech, multibody simulacích, multibody programech. V dalším textu budeme pro tento pojem používat zkratku MBS.

Pohledem do historie (s využitím literatury [2]) zjistíme, že samotná dynamika multibody modelů má svůj počátek již v době formulace Newtonových zákonů či Lagrangeových principů. Dynamika multibody modelů se jako nová větev mechaniky vyčlenila v rámci IUTAM Symposium, které bylo pořádáno v roce 1977 v Mnichově. Problematika multibody výpočtů byla poprvé zvýrazněna v roce 1990 (2nd World Congress on Computational Mechanics, Stuttgart, Německo). Sedm let poté, v roce 1997, byl založen první časopis, který byl výhradně věnován dynamice multibody modelů. V dnešní době již existuje řada pravidelně pořádaných konferencí, které jsou zaměřeny výhradně na toto téma.

Od dob vzniku problematiky multibody modelů bylo provedeno mnoho pokusů, jak vhodně formulovat matematické vyjádření a následné řešení multibody modelů. V závislosti na výběru typu zobecněných souřadnic existují dva základní principy formulace pohybových rovnic – pomocí kartézských či relativních souřadnic. V programovém prostředí MSC.ADAMS je začleněna první z nich. Podstatou tohoto principu je popis polohy jednotlivých těles pomocí šesti souřadnic kartézského souřadného systému. Pohybové rovnice jsou sestaveny Lagrangeovým přístupem. Součástí popisu systému jsou i algebraické vazební rovnice jednotlivých sousedících těles. Tyto rovnice jsou připojeny k pohybovým rovnicím pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Jistou nevýhodou této formulace je skutečnost, že v jednom výpočetním kroku je řešeno velké množství neznámých (všechny souřadnice + multiplikátory). Mezi výhody však patří univerzálnost použití, a to jak u systémů s otevřenou smyčkou vazeb, tak s uzavřenou smyčkou vazeb.

V průběhu vývoje dynamiky multibody modelů bylo prezentováno již velké množství metod pro eliminaci nejružnějších problémů, které se během sestavování matematického popisu a následném výpočtu vyskytují. Viz např. [2], [3], [4], apod. V této práci se však budeme zaměřovat na předem daný postup, který je implementován v prostředí MSC.ADAMS. Cílem této práce není navrhnout jiný postup při tvorbě modelu nebo řešení matematických formulací, ale na základě zkušeností s předem danými algoritmy, implementovanými v konkrétním software (prostředí MSC.ADAMS) poskytnout uživateli postřehy, které povedou alespoň k částečné eliminaci vznikajících obtíží.

### 3. Teoretická část

Dříve, než přistoupíme ke specifikaci obtíží, které byly zmíněny v úvodu, musíme zavést základní pojmy a osvojit si postupy, které vedou k matematickému popisu daného modelu. Pozornost v této kapitole také věnujme metodám, které jsou využívány k řešení vzniklé soustavy rovnic.

Průběh každé multibody simulace daného mechanického systému lze rozdělit na tři základní části:

- a) tvorba modelu,
- b) matematický popis daného modelu,
- c) řešení vzniklé soustavy rovnic.

V této kapitole se věnujme především problematice pod písmeny b) a c). Předpokládejme, že existuje reálný mechanický systém a jeho model, který je zapotřebí nejprve popsat matematickými formulacemi a následně tento zápis vyřešit vhodnou integrační metodou. Uvedme v této kapitole teoretické poznatky, které budeme aplikovat v dalším textu.

#### **3.1 Matematický popis mechanického systému**

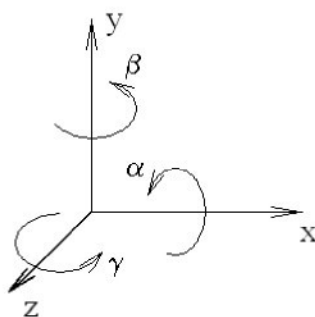
Převážná většina poznatků uvedená v této kapitole je čerpána z literatury [5].

Jak již plyne z výše uvedeného rozdělení multibody simulace do třech částí, je nezbytně nutné mít pro počítačovou analýzu mechanického systému k dispozici jeho velmi detailní matematický popis. Nároky na tento popis se stupňují se zvyšujícími se požadavky na přesnost řešení. V případě složitých modelů sestávajících se z mnoha částí může být matematický popis velmi složitý a komplikovaný. Proto je kladena velká pozornost na postupy modelování, popis modelu a vyjadřování vzájemných vazeb mezi jednotlivými částmi systému.

Popišme nyní jeden z možných postupů, který může být počítačovým programem použit pro matematické vyjádření daného modelu. Jak již bylo zmíněno v úvodu, budeme se soustředit na popis modelu pomocí kartézských souřadnic. Uvedení tohoto postupu je velmi důležité pro pochopení různých souvislostí, které bývají méně zkušenému uživateli zpravidla skryty. Začneme problematikou souřadných systémů.

##### **3.1.1 Typy souřadných systémů**

Volba souřadného systému může do značné míry ovlivnit složitost zápisu modelu. Existují různé druhy souřadných systémů. Nejzákladnější souřadný systém je kartézský (obr.3.1).



Obr. 3.1 Kartézský souřadný systém.

Tento souřadný systém je pro účely našeho popisu volen jako základní. Polohy všech členů modelu jsou vyjádřeny v tomto souřadném systému. Většina programových prostředí umožňuje při tvorbě modelu uživateli zvolit také jiný způsob zadávání souřadnic, např. ve válcovém souřadném systému. Tato možnost je ovšem zavedena pouze pro účely modelování. Při matematickém popisu modelu je tento druh zápisu převeden zpět na souřadnice základní, tj. kartézské.

#### **3.1.1.1 Globální souřadný systém**

Globální souřadný systém (dále jen GSS) je téměř výhradně spojen s částí modelu, která během simulace nemění svoji polohu, např. rám, zem (v prostředí MSC.ADAMS je toto těleso označeno pojmem GROUND). Svoji polohou určuje GSS tzv. absolutní bod modelu, který má nulové souřadnice. Jeho natočením jsou určeny směry jednotlivých os, na které je odkazováno při definování ostatních částí modelu.

#### **3.1.1.2 Lokální souřadný systém**

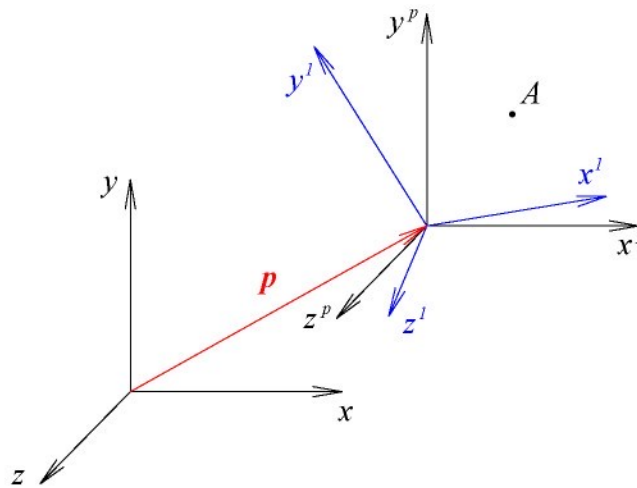
Lokální souřadný systém (dále jen LSS) je pevně spojen s konkrétním tělesem v modelu. Má dva významy. První spočívá v definování polohy a natočení těžiště tělesa (tzv. souřadný systém tělesa). Je dobré, je-li jeho poloha (a nejlépe i orientace) totožná s globálním souřadným systémem. Zamezí se tak přepočítávání souřadnic příslušného tělesa a tím se ušetří množství matematických operací. Tomuto požadavku však není možné v naprosté většině případů vzhledem k obecné orientaci těles vyhovět.

Ve svém druhém významu slouží lokální souřadný systém k určování polohy důležitých bodů (v prostředí MSC.ADAMS označovaných pojmem MARKER). Tyto body může uživatel libovolně zadávat a měnit. MARKER jsou součástí jednotlivých těles. Na rozdíl od těžiště může těleso obsahovat celé množství těchto bodů. Poloha a natočení lokálních systémů v bodech typu MARKER je udávána vzhledem k souřadnému systému tělesa (GSS).



### 3.1.1.3 Transformace

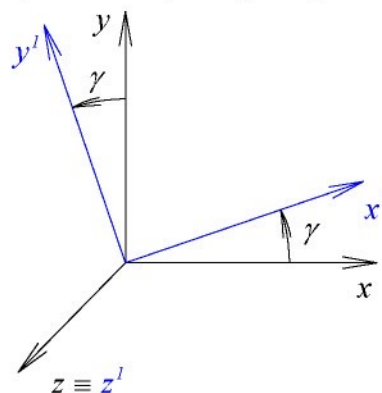
Během popisu modelu je nutné vycházet ze vzájemné provázanosti jednotlivých jeho částí. Při matematickém popisu modelu obecně platí, že poloha všech bodů tělesa je udávána vzhledem k jeho těžišti (lokálními souřadnicemi). Pro výpočet je však důležité znát globální souřadnice všech bodů na tělese. Známe-li proto globální souřadnice těžiště tělesa, je možné pomocí transformačních vztahů převést lokální souřadnice jednotlivých bodů do globálního souřadného systému.



Obr. 3.2 Transformace souřadných systémů.

Uvažujme dva souřadné systémy podle obrázku 3.2, globální  $xyz$  a lokální  $x^l y^l z^l$ . Oba systémy jsou vzájemně posunuty o vektor  $p$  a natočeny vůči sobě. Je zřejmé, že lokální souřadnice bodu  $A$  ( $x_A^l, y_A^l, z_A^l$ ) převedeme na globální souřadnice  $A$  ( $x_A, y_A, z_A$ ) tím způsobem, že je nejprve vyjádříme v posunutém souřadném systému  $x^p y^p z^p$  a posléze k těmto posunutým souřadnicím přičteme souřadnice vektoru  $p$  ( $x_p, y_p, z_p$ ). Zbývá proto vyjádřit transformaci souřadnic pootočením.

Je známo, že obecně natočený souřadný systém můžeme postupnou rotací kolem jeho os převést zpět do systému základního (globálního). Označme za tímto účelem úhly rotace kolem os lokálního souřadného systému  $x^l, y^l, z^l$  postupně  $\alpha, \beta, \gamma$ .



Obr. 3.3 Pootočení globálního souřadného systému.

Nejprve uveďme příklad pootočení globálního souřadného systému kolem osy  $z$  dle obr. 3.3.

$$\begin{aligned}x^{Iz} &= x \cos \gamma + y \sin \gamma \\y^{Iz} &= -x \sin \gamma + y \cos \gamma \\z^{Iz} &= z\end{aligned}\tag{3.1}$$

V maticovém zápisu budou mít transformační vztahy (3.1) následující formu:

$$\begin{pmatrix} x^{Iz} \\ y^{Iz} \\ z^{Iz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ zkráceně } \begin{pmatrix} x^{Iz} \\ y^{Iz} \\ z^{Iz} \end{pmatrix} = R_z \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\tag{3.2}$$

kde  $R_z$  je transformační matice mezi systémy  $x y z$  a  $x^{Iz} y^{Iz} z^{Iz}$ .

Podobné vztahy lze napsat také pro pootočení kolem osy  $y$ , resp.  $x$ :

$$\begin{pmatrix} x^{Iy} \\ y^{Iy} \\ z^{Iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{Iz} \\ y^{Iz} \\ z^{Iz} \end{pmatrix}, \text{ resp.}\tag{3.3}$$

$$\begin{pmatrix} x^{Ix} \\ y^{Ix} \\ z^{Ix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{Iy} \\ y^{Iy} \\ z^{Iy} \end{pmatrix},\tag{3.4}$$

kde příslušné transformační matice označíme  $R_y$  a  $R_x$ .

Z výše uvedeného je zřejmé, že matematický zápis transformace souřadnic, která vznikne postupně trojitou rotací kolem os  $z, y$  a  $x$  lze zapsat:

$$\begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix} = S^{I0} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\tag{3.5}$$

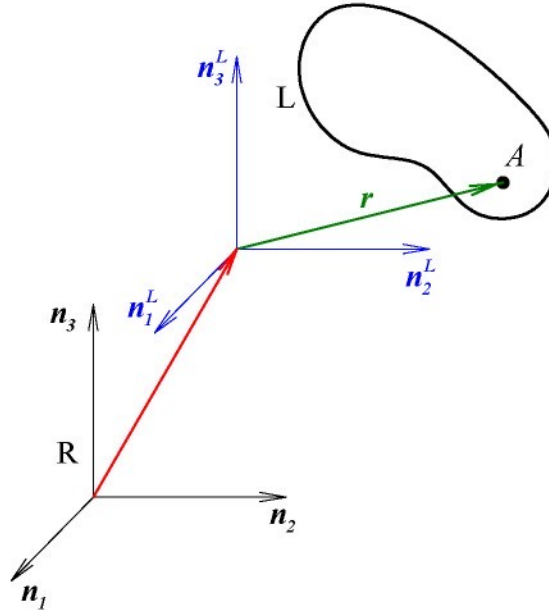
kde  $S^{I0} = R_x \cdot R_y \cdot R_z$ .

Matice  $S^{I0}$  je proto transformační maticí mezi lokálním souřadným systémem  $x^I y^I z^I$  a globálním souřadným systémem  $x y z$ .

### 3.1.2 Úhlová rychlost

Uvažujme dva souřadné systémy podle obrázku 3.4, které jsou dány příslušnými jednotkovými vektory  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  a  $\mathbf{n}_1^L, \mathbf{n}_2^L, \mathbf{n}_3^L$ . První, globální, je pevně spojen s rámem  $R$ , druhý, lokální, je spojen s tělesem  $L$ , které rotuje kolem rámu úhlovou rychlostí danou

vektorem  ${}^R\boldsymbol{\omega}^L$ . Vzájemná poloha obou souřadných systémů je dána transformační maticí  $\mathbf{S}$ . Její prvky jsou vzhledem k výše popsanému pohybu závislé na čase  $t$ .



Obr. 3.4 K odvození úhlové rychlosti.

Vyjádříme nyní obvodovou rychlost bodu  $A$ , jehož poloha vzhledem k počátku lokálního souřadného systému je dána vektorem  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{v} = {}^R\boldsymbol{\omega}^L \times \mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (3.6)$$

kde  ${}^R\boldsymbol{\omega}^L$  označíme úhlovou rychlost tělesa  $L$  v souřadnicích rámu  $R$ .

Rozepišme dále vektorový součin v předchozím vztahu:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= {}^R\boldsymbol{\omega}^L \times \mathbf{r} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T \times (r_1, r_2, r_3)^T = \begin{vmatrix} \mathbf{n}_1^L & \mathbf{n}_2^L & \mathbf{n}_3^L \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = \\ &= (\omega_2 r_3 - \omega_3 r_2) \mathbf{n}_1^L + (\omega_3 r_1 - \omega_1 r_3) \mathbf{n}_2^L + (\omega_1 r_2 - \omega_2 r_1) \mathbf{n}_3^L. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Upravme dále výraz  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  na levé straně vztahu (3.7). Vektor  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$  lze vyjádřit vztahem

$$\mathbf{r} = r_i \cdot \mathbf{n}_i^L, \text{ kde } i = 1, 2, 3.$$

Vzhledem k tomu, že jsou složky  $r_i$  konstantní, získáme po časové derivaci vektoru  $\mathbf{r}$  následující výraz

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(r_i \cdot \mathbf{n}_i^L)}{dt} = r_i \cdot \frac{d\mathbf{n}_i^L}{dt}. \quad (3.8)$$

Nyní budeme tento výraz upravovat dále. Vektor  $\mathbf{n}_i^L$  lze vyjádřit pomocí transformační matice vzhledem ke globálnímu souřadnému systému  $R$ :  $\mathbf{n}_i^L = S_{ij} \mathbf{n}_j$ . Po dosazení:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_i \cdot \frac{d(S_{ij} \mathbf{n}_j)}{dt} = \mathbf{r}_i \cdot \dot{S}_{ij} \mathbf{n}_j,$$

kde  $\dot{S}$  je časová derivace transformační matice  $S$ .

Vyjádříme nyní derivaci  $\dot{S}$  jako součin transformační matice  $S$  a matice  $\Omega$ . Následně zjednodušíme výraz převodem na souřadnice lokálního souřadného systému:

$$\dot{S} = \Omega \cdot S, \quad (3.9)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_i \cdot \Omega_{ij} \cdot S_{ij} \mathbf{n}_j = \mathbf{r}_i \cdot \Omega_{ij} \cdot \mathbf{n}_j^L.$$

Rozepsáním výše uvedeného součinu získáme následující výraz:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = & \mathbf{r}_1 \Omega_{11} \mathbf{n}_1^L + \mathbf{r}_1 \Omega_{12} \mathbf{n}_2^L + \mathbf{r}_1 \Omega_{13} \mathbf{n}_3^L + \mathbf{r}_2 \Omega_{21} \mathbf{n}_1^L + \mathbf{r}_2 \Omega_{22} \mathbf{n}_2^L + \mathbf{r}_2 \Omega_{23} \mathbf{n}_3^L + \dots \\ & \dots + \mathbf{r}_3 \Omega_{31} \mathbf{n}_1^L + \mathbf{r}_3 \Omega_{32} \mathbf{n}_2^L + \mathbf{r}_3 \Omega_{33} \mathbf{n}_3^L \end{aligned} \quad (3.10)$$

a po úpravě:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = & (\mathbf{r}_1 \Omega_{11} + \mathbf{r}_2 \Omega_{21} + \mathbf{r}_3 \Omega_{31}) \mathbf{n}_1^L + (\mathbf{r}_1 \Omega_{12} + \mathbf{r}_2 \Omega_{22} + \mathbf{r}_3 \Omega_{32}) \mathbf{n}_2^L + \dots \\ & \dots + (\mathbf{r}_1 \Omega_{13} + \mathbf{r}_2 \Omega_{23} + \mathbf{r}_3 \Omega_{33}) \mathbf{n}_3^L. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Porovnejme nyní výrazy (3.7) a (3.11). Mají-li být shodné, musí být totožné také členy násobící jednotlivé vektory lokálního souřadného systému  $\mathbf{n}_1^L, \mathbf{n}_2^L, \mathbf{n}_3^L$ . Z výše uvedeného vyplývá

$$\begin{aligned} \Omega_{11} = 0 \quad \Omega_{21} = -\omega_3 \quad \Omega_{31} = \omega_2 \\ \Omega_{12} = \omega_3 \quad \Omega_{22} = 0 \quad \Omega_{32} = -\omega_1, \text{ tzn., že } \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \\ \Omega_{13} = -\omega_2 \quad \Omega_{23} = \omega_1 \quad \Omega_{33} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Výhodou matice  $\Omega$  je její skladba. Jedná se o matici, která je tvořena výhradně úhlovými rychlostmi. Navíc je matice antisymetrická a na hlavní diagonále jsou nulové prvky. Znamená to, že je-li třeba vyjádřit vzájemnou úhlovou rychlost dvou vůči sobě pohybujících se systémů, můžeme tak učinit pouze na základě znalosti transformační matice a její časové derivace:

$$\Omega = \dot{S} \cdot S^{-1}. \quad (3.13)$$

Vzhledem k tomu, že transformační matice  $S$  je vždy ortogonální, platí, že její součin s transponovanou maticí je roven jednotkové matici  $S \cdot S^T = I$ . Proto po vynásobení této rovnosti zleva inverzní maticí  $S^{-1}$  plyne  $S^T = S^{-1}$  a po dosazení do (3.13):

$$\Omega = \dot{S} \cdot S^T.$$

### 3.1.3 Zobecněné souřadnice

Zobecněných souřadnic se s výhodou používá pro popsání polohy jednoho či více těles v prostoru. Uvažujme soustavu  $k$  těles a předpokládejme, že každému z nich umožníme pohyb v prostoru s maximálním počtem stupňů volnosti, tj. 6. Dále uvažujme, že  $k$ -té těleso bude spojeno vždy s předešlým  $k-1$  tělesem volnou vazbou. Rám označme indexem  $k=0$ , celkový počet těles bude  $N$ . Pohybuje-li se těleso v prostoru, jsme schopni každou jeho polohu popsat šesti vzájemně nezávislými souřadnicemi – třemi pro posuv a třemi pro rotaci. Přitom předpokládáme, že jakoukoliv libovolnou rotaci v prostoru můžeme vyjádřit postupnou rotací kolem tří vzájemně kolmých os (viz. kap. 3.1.1.3). Označíme-li lokální souřadné systémy pevně spojené s jednotlivými tělesy  $\mathbf{n}_1^k, \mathbf{n}_2^k, \mathbf{n}_3^k$ , potom posuv vazebních bodů ve směru jednotlivých os systému vzhledem k souřadnému systému tělesa  $k-1$  bude dán souřadnicemi  $\xi_{kx}, \xi_{ky}, \xi_{kz}$  a příslušné rotace kolem těchto os souřadnicemi  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ . Celkový počet všech souřadnic popisujících polohu a orientaci  $N$  těles vzájemně propojených volnými vazbami v prostoru proto bude  $l = 1 \dots 6N$ . Zobecněné souřadnice zkráceně zapisujeme vektorem zobecněných souřadnic

$$\mathbf{x} = \left( \begin{array}{c} \text{rotační souřadnice pro } l = 1, 2, \dots, 3N-1, 3N \\ \text{posuvné souřadnice pro } l = 3N+1, 3N+2, \dots, 6N-1, 6N \end{array} \right),$$

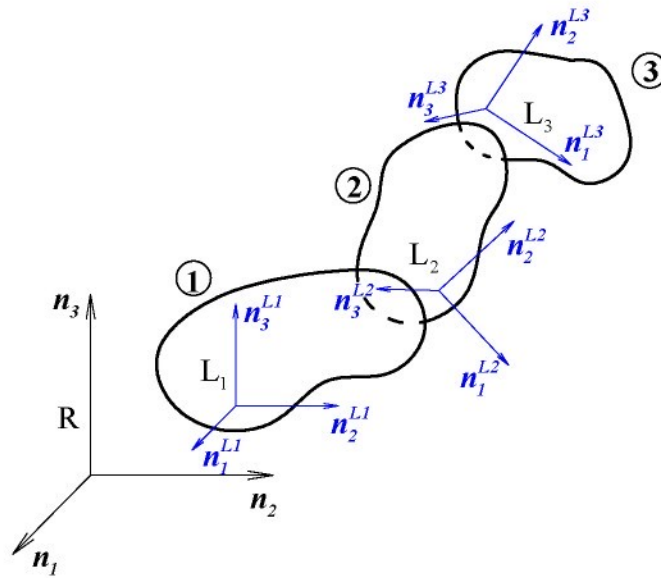
složky vektoru zobecněných souřadnic značíme  $x_l$ .

Po rozepsání pro jednotlivá tělesa nabývá vektor zobecněných souřadnic tvar

$$\mathbf{x} = \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{3N-2} \\ x_{3N-1} \\ x_{3N} \\ x_{3N+1} \\ x_{3N+2} \\ x_{3N+3} \\ \vdots \\ x_{6N-2} \\ x_{6N-1} \\ x_{6N} \end{array} \right) \begin{array}{l} \dots \text{orientace } 1. \text{ tělesa vůči rámu,} \\ \\ \\ \dots \text{orientace } N\text{-tého tělesa vůči } N-1 \text{ tělesu,} \\ \\ \dots \text{posuv } 1. \text{ tělesa vůči rámu,} \\ \\ \dots \text{posuv } N\text{-tého tělesa vůči } N-1 \text{ tělesu.} \end{array} \quad (3.14)$$

### 3.1.3.1 Transformační matice pro systémy s více tělesy

V praxi se velmi často vyskytují mechanismy, které jsou složeny ze dvou a více členů. Tyto členy mohou být navzájem propojeny různými typy vazeb. K tomu, abychom mohli popsat kinematické chování takového mechanismu (např. rychlost a směr pohybu určitého bodu systému, úhlovou rychlost těžiště konkrétního členu, atd.), potřebujeme znát vztahy, které určují a jednoznačně popisují vazbové závislosti mezi jednotlivými členy mechanismu. Tyto vztahy jsou opět definovány pomocí transformačních matic.



Obr. 3.5 Systém s více tělesy.

Uvažujme soustavu třech navzájem propojených těles dle obr. 3.5, každé z nich má šest stupňů volnosti. Tělesa označme čísly  $k = 1 \dots 3$ , rám označme indexem  $k = 0$ . Globální souřadný systém spojený s rámem je  $R$ , lokální souřadné systémy jednotlivých těles  $L_k$ . Vektor zobecněných souřadnic bude mít v tomto případě tvar

$$\mathbf{x} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \dots, \xi_{2z}, \xi_{3x}, \xi_{3y}, \xi_{3z})^T, \text{ pro } l = 1, \dots, 18.$$

Jak bylo uvedeno již dříve, souřadnice se mezi lokálními systémy jednotlivých členů převádí použitím transformačních matic dle následujících vztahů:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{n}^3\} &= \mathbf{S}^{32} \{\mathbf{n}^2\} \quad \dots \text{ souřadnice členu 3 v souřadném systému členu 2,} \\ \{\mathbf{n}^2\} &= \mathbf{S}^{21} \{\mathbf{n}^1\} \quad \dots \text{ souřadnice členu 2 v souřadném systému členu 1,} \\ \{\mathbf{n}^1\} &= \mathbf{S}^{10} \{\mathbf{n}\} \quad \dots \text{ souřadnice členu 1 v souřadném systému rámu } R, \end{aligned}$$

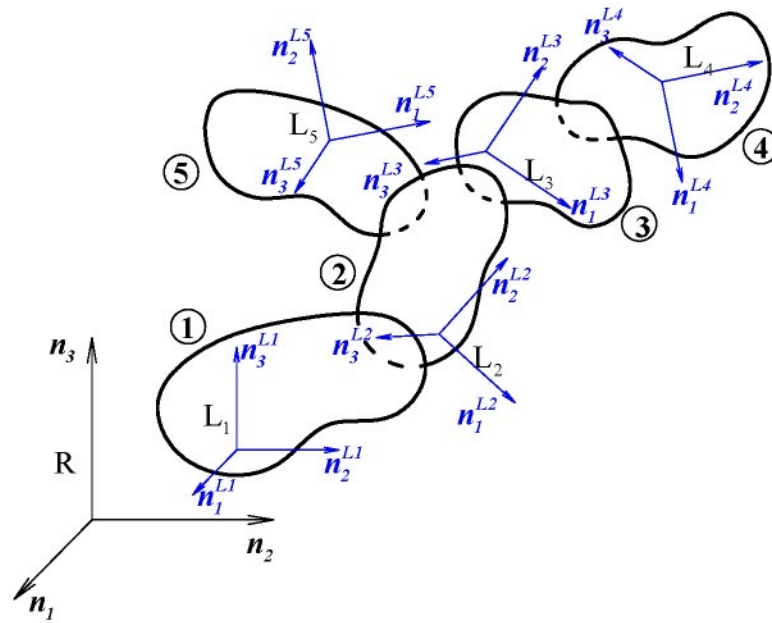
kde  $\{\mathbf{n}^k\}$  je kompaktní forma zápisu pole  $\{\mathbf{n}_1^k \quad \mathbf{n}_2^k \quad \mathbf{n}_3^k\}$ .

Budeme-li chtít vyjádřit souřadnice všech členů v souřadném systému  $R$ , potřebujeme zjistit celkovou transformační matici. Tu získáme postupným násobením transformačních matic mezi jednotlivými členy:

$$\begin{aligned}\{n^3\} &= S^{32} S^{21} S^{10} \{n\} = S^{30} \{n\}, \\ \{n^2\} &= S^{21} S^{10} \{n\} = S^{20} \{n\}, \\ \{n^1\} &= S^{10} \{n\}.\end{aligned}$$

Při sestavování transformačních vztahů musíme mít vždy na paměti, že je třeba dodržovat hierarchii stavby modelu.

Mějme např. systém těles znázorněný na obr. 3.6.



Obr. 3.6 Příklad transformace systému s  $N$  tělesy.

Vyjádřeme nyní souřadnice 4. a 5. členu v souřadném systému rámu  $R$ . Pro převod je nutné znát příslušné transformační matice  $S^{40}$  a  $S^{50}$ :

$$\begin{aligned}\{n^4\} &= S^{40} \{n\}, \text{ kde } S^{40} = S^{43} S^{32} S^{21} S^{10}, \\ \{n^5\} &= S^{50} \{n\}, \text{ kde } S^{50} = S^{52} S^{21} S^{10}.\end{aligned}$$

Pro opačný převod, tj. pro vyjádření souřadnic rámu v souřadném systému některého ze členů systému postupujeme podobně. Např. pro členy 4 a 5:

$$\begin{aligned}\{n\} &= S^{40} \{n^4\}, \text{ kde } S^{04} = S^{01} S^{12} S^{23} S^{34}, \\ \{n\} &= S^{50} \{n^5\}, \text{ kde } S^{05} = S^{01} S^{12} S^{25}.\end{aligned}$$



### 3.1.3.2 Časová derivace transformačních matic

Časová derivace transformačních matic hraje velkou roli při určení kinematických veličin, např. úhlové rychlosti, úhlového zrychlení, apod. Z kapitoly 3.1.2 víme, že časovou derivaci transformační matice lze vyjádřit násobením této matice maticí úhlových rychlostí  $\mathbf{Q}$ .

Mějme matici  $\mathbf{S}^{AB}$ , která udává transformační vztah mezi systémy  $\{n^A\}$  a  $\{n^B\}$ . Její časová derivace je dle vztahu (3.13) dána výrazem

$$\dot{\mathbf{S}}^{AB} = \mathbf{Q}^{AB} \mathbf{S}^{AB}.$$

Je-li matice  $\mathbf{S}^{AB}$  rovna součinu dílčích transformačních matic, postupujeme při její derivaci stejně, jako obecně při derivování součinu, tzn., je-li  $\mathbf{S}^{AB} = \mathbf{S}^{AC} \mathbf{S}^{CD} \mathbf{S}^{DB}$ , časová derivace  $\dot{\mathbf{S}}^{AB}$  dána vztahem

$$\dot{\mathbf{S}}^{AB} = \dot{\mathbf{S}}^{AC} \mathbf{S}^{CD} \mathbf{S}^{DB} + \mathbf{S}^{AC} \dot{\mathbf{S}}^{CD} \mathbf{S}^{DB} + \mathbf{S}^{AC} \mathbf{S}^{CD} \dot{\mathbf{S}}^{DB}.$$

### 3.1.4 Úhlová rychlost a složky úhlové rychlosti

Předpokládejme dvě tělesa, 1 a 2, která jsou vzájemně spojena volnou vazbou umožňující pohyb ve všech šesti stupních volnosti. Vyjádřeme nyní velikost úhlové rychlosti tělesa 2 v souřadném systému tělesa 1. Značení úhlové rychlosti budeme provádět v souladu se značením uvedeným v kapitole 3.1.2.

$${}^1\boldsymbol{\omega}^2 = \dot{\alpha}_2 \mathbf{n}_1^1 + \dot{\beta}_2 \mathbf{n}_2^1 + \dot{\gamma}_2 \mathbf{n}_3^1,$$

resp. v maticovém tvaru:

$${}^1\boldsymbol{\omega}^2 = \dot{\mathbf{x}}_2^T \cdot \{\mathbf{n}^1\},$$

kde  $\dot{\mathbf{x}}_2 = (\dot{\alpha}_2, \dot{\beta}_2, \dot{\gamma}_2)^T$  je vektor úhlových rychlostí tělesa 2 vzhledem k lokálnímu souřadnému systému tělesa 1,

$\{\mathbf{n}^1\} = \{\mathbf{n}_1^1 \quad \mathbf{n}_2^1 \quad \mathbf{n}_3^1\}^T$  je pole jednotkových vektorů.

Výše uvedený maticový zápis můžeme přepsat v souřadnicích rámu:

$${}^1\boldsymbol{\omega}^2 = \dot{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{S}^{10} \{\mathbf{n}\}.$$

Budeme-li dále uvažovat  $k$  těles vzájemně spojených v řadu, můžeme pro tuto mechanickou soustavu psát

$${}^R\boldsymbol{\omega}^k = {}^R\boldsymbol{\omega}^1 + {}^1\boldsymbol{\omega}^2 + {}^2\boldsymbol{\omega}^3 + \dots + {}^{k-1}\boldsymbol{\omega}^k = \sum_{i=1}^k {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}^i = \sum_{i=1}^k \dot{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{S}^{(i-1)0} \{\mathbf{n}\},$$

resp. v maticovém tvaru:

$${}^R\boldsymbol{\omega}^k = \dot{\mathbf{x}}^T [\boldsymbol{\omega}^k] \{\mathbf{n}\}, \quad (3.15)$$



kde  $\dot{x}^T$  je vektor zobecněných souřadnic. Jeho velikost je závislá na počtu uvažovaných stupňů volnosti jednotlivých členů soustavy, tzn. na počtu zobecněných souřadnic. Při uvažování pouhé rotace mezi tělesy je rozměr tohoto vektoru  $3k \times 1$ , uvažujeme-li i posuvy, bude rozměr vektoru  $6k \times 1$ ,

$\{n\}$  je vektor složený z jednotlivých vektorů souřadného systému, rozměr vektoru je shodný s rozměrem vektoru  $\dot{x}$ ,

$[\omega^k]$  je matice složek úhlových rychlostí a pro každé těleso nabývá specifického tvaru. Rozměr matice opět závisí na počtu zobecněných souřadnic a počtu těles. Při uvažování sférického spojení mezi tělesy je rozměr  $3k \times 3$ , při volné vazbě  $6k \times 6$ .

Skladba matice složek úhlových rychlostí při uvažování třech těles vzájemně propojených sférickými vazbami je následující:

$$[\omega^1] = \begin{pmatrix} E \\ \theta \\ \theta \end{pmatrix},$$

kde  $E$  je jednotková matice,  $\theta$  je nulová matice. Obě jsou rozměru  $3 \times 3$ ,

$$[\omega^2] = \begin{pmatrix} E \\ S^{1\theta} \\ \theta \end{pmatrix},$$

kde  $S^{1\theta}$  je transformační matice mezi souřadným systémem 1 a rámem  $R$ ,

$$[\omega^3] = \begin{pmatrix} E \\ S^{1\theta} \\ S^{2\theta} \end{pmatrix},$$

kde  $S^{2\theta}$  je transformační matice mezi souřadným systémem 2 a rámem  $R$ .

Celkový rozměr matice  $[\omega^k]$  je v případě třech těles  $9 \times 3$ . Po přepsání do pole složek úhlových rychlostí  $[\omega]$ , bude mít toto pole tvar

$$[\omega] = \left\{ \begin{array}{c|c|c} E & E & E \\ \theta & S^{1\theta} & S^{1\theta} \\ \theta & \theta & S^{2\theta} \end{array} \right\}.$$

**Příklad:**

Určeme velikosti úhlových rychlostí členů 4 a 5 vzhledem k rámu  $R$  podle obr. 3.6, budeme-li mezi jednotlivými členy systému uvažovat sférické vazby.

**Řešení:**

Při respektování sférických vazeb mezi jednotlivými tělesy bude mít každé z nich tři stupně volnosti, proto budeme pro všechna tělesa uvažovat časové derivace třech zobecněných souřadnic  $\dot{\alpha}_k, \dot{\beta}_k, \dot{\gamma}_k$ . Vzhledem k tomu, že celkový počet těles v systému je  $k = 5$ , bude mít časově derivovaný vektor zobecněných souřadnic  $\dot{x}$  rozměr  $3 \cdot 5 \times 1$ , pole vektorů  $\{n\}$  bude mít rozměr  $3 \times 1$  a matice  $[\omega^k]$  budou mít rozměr  $3 \cdot 5 \times 3$ :

$$\dot{x} = (\dot{\alpha}_1, \dot{\beta}_1, \dot{\gamma}_1, \dot{\alpha}_2, \dots, \dot{\alpha}_5, \dot{\beta}_5, \dot{\gamma}_5)^T,$$

$$\{n\} = \{n_1 \quad n_2 \quad n_3\},$$

$$[\omega^4] = \begin{pmatrix} E \\ S^{1\theta} \\ S^{2\theta} \\ S^{3\theta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\omega^5] = \begin{pmatrix} E \\ S^{1\theta} \\ 0 \\ 0 \\ S^{2\theta} \end{pmatrix}.$$

Pro velikosti úhlových rychlostí proto platí:

$${}^R\omega^4 = \dot{x}^T [\omega^4] \{n\},$$

$${}^R\omega^5 = \dot{x}^T [\omega^5] \{n\}.$$

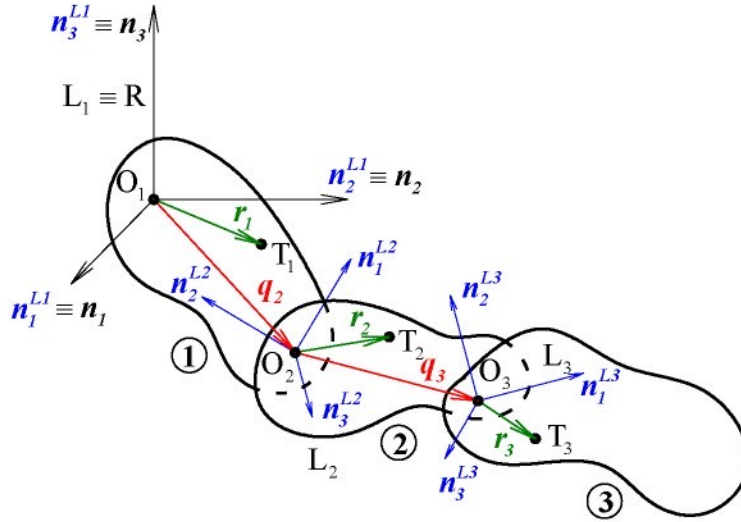
**3.1.5 Rychlost těžiště**

Rozdělme tuto kapitolu na dvě úlohy. Nejprve uvažujme soustavu těles, které jsou vzájemně propojeny pouze kulovými vazbami. Tyto vazby umožňují tělesu pohyb ve třech stupních volnosti. Zjištěné poznatky dále rozšíříme na soustavu těles s obecnými vazbami, které budou umožňovat pohyb těles ve všech šesti stupních volnosti. Dříve než přistoupíme k odvození výrazu pro rychlost těžiště tělesa, musíme však určit vzájemné polohové vektory jednotlivých těles systému.

**3.1.5.1 Systém s kulovými vazbami**

Uvažujme mechanismus podle obr. 3.7. Jedná se o trojitě prostorové kyvadlo, jednotlivé členy jsou spojeny kulovými vazbami. Polohy vazeb mezi tělesy jsou dány vektory  $q_i$ , kde  $i$  značí číslo tělesa, jehož vazbu s  $i-1$  tělesem vektor popisuje. Vektory  $r_i$  určují polohu

těžiště tělesa vzhledem k vazbě s  $i-1$  tělesem. Nechť je dán globální souřadný systém  $R$  a lokální souřadné systémy jednotlivých těles  $L_i$ .



Obr. 3.7 Systém s kulovými vazbami (trojité prostorové kyvadlo).

Polohový vektor  $p_k$  těžiště tělesa  $k$  je dle obr. 3.7 pro jednotlivá tělesa 1, 2 a 3 dán následujícími vztahy:

$$p_1 = r_1,$$

$$p_2 = q_2 + r_2,$$

$$p_3 = q_2 + q_3 + r_3.$$

Zobecníme-li výše uvedený zápis pro kterékoliv těleso  $i$ , získáme vztah

$$p_i = \sum_{j=1}^i q_j + r_i, \quad (3.16)$$

kde  $q_1 = \theta$ .

V dalším textu budeme místo sumačního symbolu používat Einsteinovo sumační pravidlo dané vztahem

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = u_i v_i,$$

kde  $i = 1, 2, 3$ .

Pro další odvozování bude nezbytné vyjádřit polohové vektory  $q_j$  a  $r_i$  v jednotném souřadném systému, nejlépe globálním:

$$q_i = q_{im} n_m^{i-1} = q_{im} S_{nm}^{(i-1)0} n_m, \quad (3.17)$$

kde  $m$  značí číslo osy souřadného systému,  $m = 1, 2, 3$ .

$$\mathbf{r}_i = r_{im} \mathbf{n}_m^i = r_{im} S_{nm}^{i0} \mathbf{n}_m.$$

Dosazením do vztahu (3.16):

$$\mathbf{p}_i = \sum_{j=1}^i q_{jn} S_{nm}^{(j-1)0} \mathbf{n}_m + r_{im} S_{nm}^{i0} \mathbf{n}_m. \quad (3.18)$$

Proto, abychom mohli definovat rychlost těžiště, je třeba vyjádřit první časovou derivaci polohového vektoru  $\mathbf{p}_i$ . Tu získáme derivací vztahu (3.18):

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{j=1}^i q_{jn} \dot{S}_{nm}^{(j-1)0} \mathbf{n}_m + r_{im} \dot{S}_{nm}^{i0} \mathbf{n}_m. \quad (3.19)$$

Z dříve odvozeného vztahu (3.13) můžeme do rovnice (3.19) dosadit za derivaci transformační matice součin  $\Omega S$ :

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^i q_{jn} \Omega_{nt}^{(j-1)0} S_{tm}^{(j-1)0} \mathbf{n}_m + r_{im} \Omega_{nt}^{i0} S_{tm}^{i0} \mathbf{n}_m.$$

Zapišme nyní tento výraz do maticového tvaru:

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^i \mathbf{q}_j^T \Omega^{(j-1)0} \mathbf{S}^{(j-1)0} \{\mathbf{n}\} + r_i^T \Omega^{i0} \mathbf{S}^{i0} \{\mathbf{n}\}. \quad (3.20)$$

Povšimněme si nyní součinu  $\mathbf{q}_j^T \Omega^{(j-1)0}$ . Jedná se o součin vektoru  $\mathbf{q}$  a antisymetrické matice  $\Omega$ . Z kapitoly 3.1.2 víme, že lze tento součin zapsat také následovně:

$$\mathbf{q}_j^T \Omega^{(j-1)0} = -\left(\mathbf{y}^{(j-1)0}\right)^T \mathbf{S} \mathbf{q}_j^*, \quad (3.21)$$

kde  $\mathbf{y}^{(j-1)0}$  je vektor složek úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega}$  v globálním souřadném systému, které přísluší antisymetrické matici  $\Omega^{(j-1)0}$ , tj. vektor složek úhlové rychlosti  $j-1$  tělesa,

$\mathbf{S} \mathbf{q}_j^*$  je antisymetrická matice vytvořená ze složek vektoru  $\mathbf{q}_j$ :

$$\mathbf{S} \mathbf{q}_j^* = \begin{pmatrix} 0 & q_{j3} & -q_{j2} \\ -q_{j3} & 0 & q_{j1} \\ q_{j2} & -q_{j1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dosaďme vztah (3.21) do výrazu (3.20). Dříve ovšem, než tak učiníme, začleňme znaménko mínus ze vztahu (3.21) do antisymetrické matice  $\mathbf{S} \mathbf{q}_j^*$ . Vztah (3.20) bude mít následně tvar

$$\mathbf{q}_j^T \Omega^{(j-1)0} = \left(\mathbf{y}^{(j-1)0}\right)^T \mathbf{S} \mathbf{q}_j, \text{ kde } \mathbf{S} \mathbf{q}_j = \begin{pmatrix} 0 & -q_{j3} & q_{j2} \\ q_{j3} & 0 & -q_{j1} \\ -q_{j2} & q_{j1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Podobně upravíme i výraz  $\mathbf{r}_i^T \boldsymbol{\Omega}^{i0}$ :

$$\mathbf{r}_i^T \boldsymbol{\Omega}^{i0} = -(\mathbf{y}^{i0})^T \mathbf{S} \mathbf{r}_i^* = (\mathbf{y}^{i0})^T \mathbf{S} \mathbf{r}_i, \text{ kde } \mathbf{S} \mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} 0 & -r_{i3} & r_{i2} \\ r_{i3} & 0 & -r_{i1} \\ -r_{i2} & r_{i1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Po dosazení výrazů (3.22) a (3.23) do vztahu (3.20) získáme

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^i (\mathbf{y}^{(j-1)0})^T \mathbf{S} \mathbf{q}_j \mathbf{S}^{(j-1)0} \{\mathbf{n}\} + (\mathbf{y}^{i0})^T \mathbf{S} \mathbf{r}_i \mathbf{S}^{i0} \{\mathbf{n}\}. \quad (3.24)$$

Nyní přistoupíme k další redukci tohoto výrazu. Sumační znaménko v prvním členu předchozího výrazu můžeme nahradit součinem

$$(\mathbf{y}^{**})^T \mathbf{V}^{**i-1} \{\mathbf{n}\}, \text{ kde } \mathbf{y}^{**} \text{ je vektor složený z vektorů } \mathbf{y}^{00}, \mathbf{y}^{10}, \dots, \mathbf{y}^{(i-1)0},$$

$$\mathbf{V}^{**i-1} \text{ je matice složená z matic } \mathbf{S} \mathbf{q}_1 \mathbf{S}^{00}, \mathbf{S} \mathbf{q}_2 \mathbf{S}^{10}, \dots, \mathbf{S} \mathbf{q}_i \mathbf{S}^{(i-1)0}.$$

Vzhledem k tomu, že  $\mathbf{y}^{00}$  je nulový vektor ( $\omega_m^0 = 0$ , pro  $m = 1, 2, 3$ ), dále  $\mathbf{S} \mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$  ... viz vztah (3.22)) a  $\mathbf{S}^{00} = \mathbf{0}$  (transformuje sama do sebe), nepřispěje součin  $(\mathbf{y}^{00})^T \mathbf{S} \mathbf{q}_1 \mathbf{S}^{00}$  k celkovému součtu žádným dílem. Proto můžeme ve vektoru  $\mathbf{y}^{**}$  a matici  $\mathbf{V}^{**i-1}$  vynechat první tři řádky (pro  $m = 1, 2, 3$ ).

V zápětí ovšem musíme další tři řádky přidat. Stane se tak proto, že vektor  $\mathbf{y}^{**}$  doplníme o vektor  $\mathbf{y}^{i0}$  z posledního členu výrazu (3.24) a matici  $\mathbf{V}^{**i-1}$  doplníme o matici  $\mathbf{S} \mathbf{r}_i \mathbf{S}^{i0}$  z téhož místa výrazu (3.24). Po přepsání se zredukuje výraz (3.24) do podoby:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{y}^T \mathbf{V}^i \{\mathbf{n}\}, \quad (3.25)$$

kde  $\mathbf{y}$  je vektor úhlových rychlostí členů  $1, 2, \dots, i$  v souřadném systému  $R$  (číslem  $0$  je označen rám), tento vektor je také nazýván vektorem zobecněných rychlostí,

$\mathbf{V}^i$  je tzv. dílčí matice rychlostí  $\mathbf{v}_i$  spjata s vektorem  $\mathbf{y}$ , rozměr této matice je  $3N \times 3$ , kde  $N$  je celkový počet těles soustavy

$$\mathbf{V}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{S} \mathbf{q}_2 \mathbf{S}^{10} \\ \mathbf{S} \mathbf{q}_3 \mathbf{S}^{20} \\ \vdots \\ \mathbf{S} \mathbf{q}_i \mathbf{S}^{(i-1)0} \\ \mathbf{S} \mathbf{r}_i \mathbf{S}^{i0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

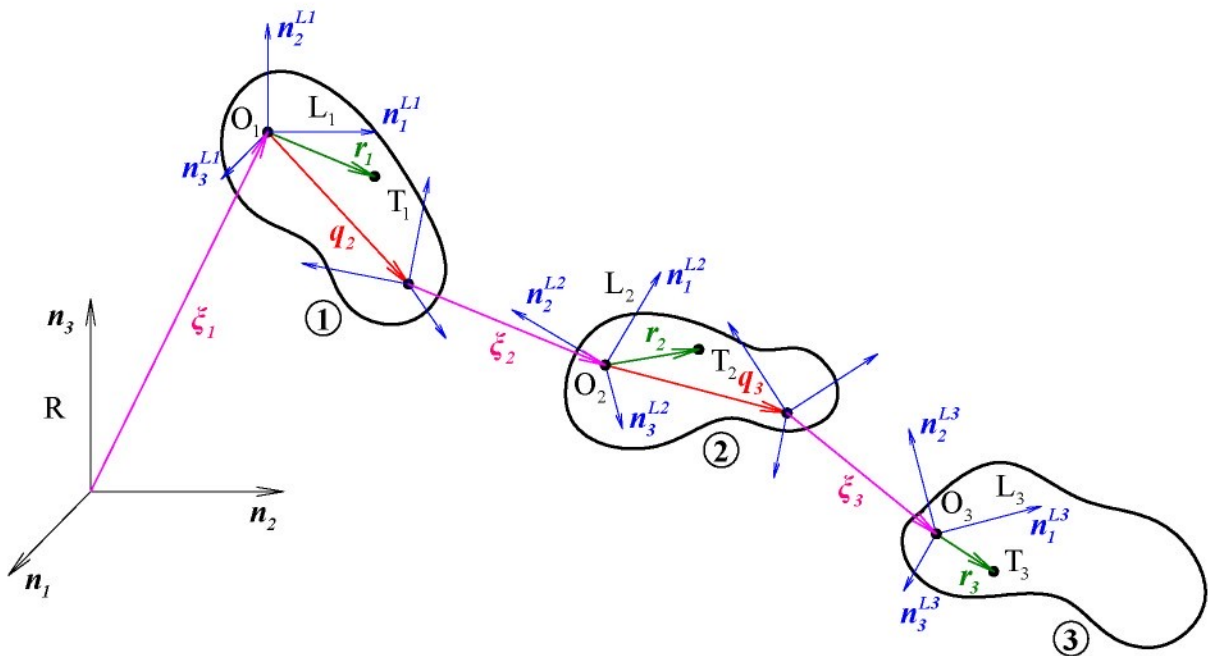
V některých případech je vhodnější použít zápis výrazu (3.25) ve tvaru:

$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{W} \mathbf{V}^i \{\mathbf{n}\}$ , kde  $\dot{\mathbf{x}}$  je časová derivace vektoru zobecněných souřadnic určeného vztahem (3.14) (viz kap. 3.1.3),

$\mathbf{W}$  je matice, která v tomto případě hraje roli transformační matice mezi vektorem úhlových rychlostí těles v globálním souřadném systému ( $\mathbf{y}$ ) a vektorem úhlových rychlostí jednotlivých těles  $j$  v lokálních souřadných systémech těles  $j-1$  ( $\dot{\mathbf{x}}$ ).

### 3.1.5.2 Systém s obecnými vazbami

Uvažujme nyní systém podle obr. 3.8.



Obr. 3.8 Obecný systém s více tělesy.

Vazby mezi jednotlivými tělesy jsou rotačního i posuvného charakteru, tzn., umožňují každému tělesu pohyb se 6-ti stupni volnosti. Při odvozování vektoru rychlosti těžiště  $i$ -tého tělesa vyjděme ze vztahu (3.16). Doplníme ho o vektor posunutí:

$$\mathbf{p}_i = \sum_{j=1}^i \boldsymbol{\xi}_j + \sum_{j=1}^i \mathbf{q}_j + \mathbf{r}_i,$$

kde opět  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$ . (3.26)

Vektor  $\boldsymbol{\xi}_j$  můžeme zapsat v globálních souřadnicích podobně, jako vektor  $\mathbf{q}_j$  podle vztahu (3.17):

$$\boldsymbol{\xi}_i = \xi_{im} \mathbf{n}_m^{i-1} = \xi_{im} S_{nm}^{(i-1)0} \mathbf{n}_m.$$

Po doplnění vztahu (3.18) získáme:

$$\mathbf{p}_i = \sum_{j=1}^i \xi_{jn} S_{nm}^{(j-1)\theta} \mathbf{n}_m + \sum_{j=1}^i q_{jn} S_{nm}^{(j-1)\theta} \mathbf{n}_m + r_{in} S_{nm}^{i\theta} \mathbf{n}_m.$$

Nyní, podobně jako v případě rotačních vazeb, přistoupíme k derivování. Zde je ovšem třeba si uvědomit, že souřadnice  $\xi_{jn}$  mohou být na rozdíl od souřadnic  $q_{jn}$  proměnné v čase. Proto:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{j=1}^i \dot{\xi}_{jn} S_{nm}^{(j-1)\theta} \mathbf{n}_m + \sum_{j=1}^i \xi_{jn} \dot{S}_{nm}^{(j-1)\theta} \mathbf{n}_m + \sum_{j=1}^i q_{jn} \dot{S}_{nm}^{(j-1)\theta} \mathbf{n}_m + r_{in} \dot{S}_{nm}^{i\theta} \mathbf{n}_m. \quad (3.27)$$

Po opětovném zavedení výrazu  $\dot{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{S}$  a přepsání do maticového tvaru bude mít výraz (3.27) tvar:

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^i \xi_j^T S^{(j-1)\theta} \{\mathbf{n}\} + \sum_{j=1}^i \xi_j^T \boldsymbol{\Omega}^{(j-1)\theta} S^{(j-1)\theta} \{\mathbf{n}\} + \sum_{j=1}^i q_j^T \boldsymbol{\Omega}^{(j-1)\theta} S^{(j-1)\theta} \{\mathbf{n}\} + \dots \quad (3.28)$$

$$\dots + r_i^T \boldsymbol{\Omega}^{i\theta} S^{i\theta} \{\mathbf{n}\}.$$

Nyní přistoupíme k přepisu výrazu za použití antisymetrických matic. Podobně jako u výrazu (3.19), píšeme i pro součin  $\xi_j^T \boldsymbol{\Omega}^{(j-1)\theta}$  následující vztah:

$$\xi_j^T \boldsymbol{\Omega}^{(j-1)\theta} = \left( y^{(j-1)\theta} \right)^T S \xi_j, \text{ kde } S \xi_j = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_{j3} & \xi_{j2} \\ \xi_{j3} & 0 & -\xi_{j1} \\ -\xi_{j2} & \xi_{j1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení do vztahu (3.28):

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^i \xi_j^T S^{(j-1)\theta} \{\mathbf{n}\} + \sum_{j=1}^i \left( y^{(j-1)\theta} \right)^T S \xi_j S^{(j-1)\theta} \{\mathbf{n}\} + \sum_{j=1}^i \left( y^{(j-1)\theta} \right)^T S q_j S^{(j-1)\theta} \{\mathbf{n}\} + \dots$$

$$\dots + y^T S r_i S^{i\theta} \{\mathbf{n}\}.$$

Po vytknutí vektoru  $\{\mathbf{n}\}$  a po úpravě ekvivalentní s úpravami v kap. 3.1.5.1 získá předchozí vztah podobu:

$$\mathbf{v}_i = \left( \xi^T V_S^i + y^T V^i \right) \{\mathbf{n}\}, \quad (3.29)$$

$$\text{kde } V_S^i = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ S^{1\theta} \\ S^{2\theta} \\ \vdots \\ S^{(j-1)\theta} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad V^i = \begin{pmatrix} (S \xi_2 + S q_2) S^{1\theta} \\ (S \xi_3 + S q_3) S^{2\theta} \\ \vdots \\ (S \xi_i + S q_i) S^{(j-1)\theta} \\ S r_j S^{j\theta} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Tento vztah nyní postihne všechny možné případy propojení těles v systému s obecnými vazbami. Stejně jako v kap. 3.1.5.1 můžeme použitím transformační matice  $W$  výraz 3.29 přepsat do tvaru:

$$v_i = (\dot{\xi}^T V_S^i + \dot{x}^T W V^i) \{n\}. \quad (3.30)$$

### 3.1.6 Zrychlení těžiště tělesa

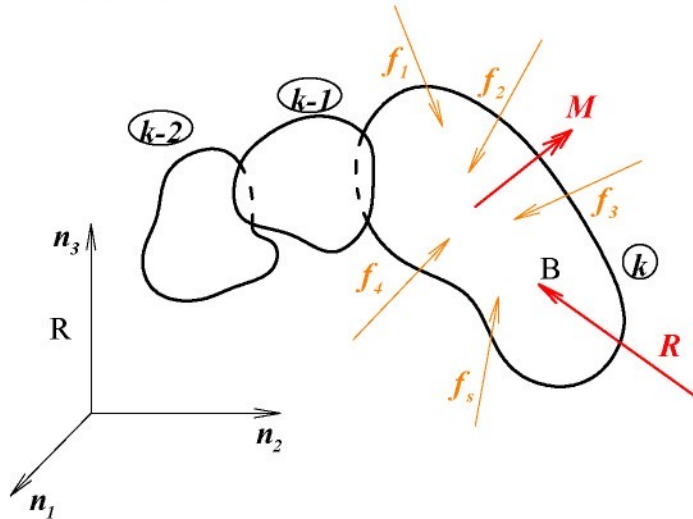
Při výpočtu zrychlení těžiště  $i$ -tého tělesa systému vycházíme z časové derivace rychlosti dle vztahu (3.29). Zrychlení je dáno vztahem:

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = (\ddot{\xi}^T V_S^i + \dot{\xi}^T \dot{V}_S^i + \dot{y}^T V^i + y^T \dot{V}^i) \{n\},$$

$$\text{kde } \dot{V}_S^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega^{10} S^{10} \\ \Omega^{20} S^{20} \\ \vdots \\ \Omega^{(j-1)0} S^{(j-1)0} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{V}^i = \begin{pmatrix} (\dot{S}\xi_2 S^{10} + (S\xi_2 + Sq_2) \Omega^{10} S^{10}) \\ (\dot{S}\xi_3 S^{20} + (S\xi_3 + Sq_3) \Omega^{20} S^{20}) \\ \vdots \\ (\dot{S}\xi_i S^{(i-1)0} + (S\xi_i + Sq_i) \Omega^{(i-1)0} S^{(i-1)0}) \\ Sr_j \Omega^{j0} S^{j0} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### 3.1.7 Zobecněné akční síly

Předpokládejme soustavu těles podle obr. 3.9, která jsou navzájem propojena „volnými“ vazbami, tj. vazbami, které umožňují vzájemný pohyb těles v šesti stupních volnosti. Necht' na těleso  $k$  působí silové účinky dle obrázku. Ty je možné ze zákona superpozice nahradit výsledným silovým vektorem  $R$  působícím v bodě  $B$  a vektorem silové dvojice  $M$ .



Obr. 3.9 Zobecněné akční síly.



Nyní budeme chtít tyto silové účinky ( $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{M}$ ) vyjádřit ve smyslu zobecněných souřadnic. Učiníme tak např. z principu virtuálních prací, resp. z jeho obecnější podoby – principu virtuálních výkonů. Získáme tak nový vektor zobecněných působících sil, který má rozměr  $l \times 1$ , kde  $l$  je počet zobecněných souřadnic popisujících systém. Tento vektor má následující tvar:

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{x}_l} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial^R \boldsymbol{\omega}^k}{\partial \dot{x}_l}, \text{ kde } l = 1, 2, \dots, n. \quad (3.31)$$

Dosazením výrazů (3.22) a (3.30) za vektory rychlostí a po časové derivaci plyne:

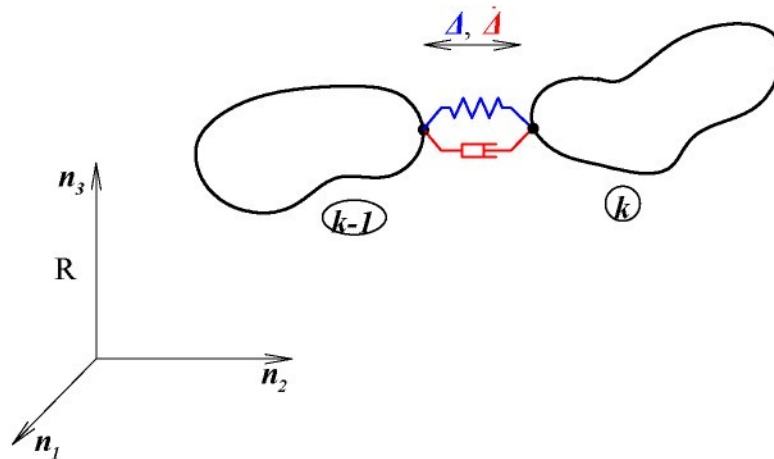
$$\mathbf{F}_l = \mathbf{R} \mathbf{W} \mathbf{V}^k \{n\} + \mathbf{M} [\boldsymbol{\omega}^k] \{n\}.$$

Tento vztah můžeme přepsat do maticovém tvaru následujícím způsobem:

$$\mathbf{f} = \sum_k \mathbf{V}_w^k \mathbf{F}_k + \sum_k [\boldsymbol{\omega}^k] \mathbf{M}_k,$$

kde  $\mathbf{V}_w^k$  je matice, která vznikla násobením transformační matice  $\mathbf{W}$  a matice  $\mathbf{V}^k$ ,  
 $\mathbf{F}_k$  je vektor výsledné síly působící na  $k$ -té těleso v globálním souřadném systému,  
 $\mathbf{M}_k$  je vektor výsledné silové dvojice působící na  $k$ -té těleso v globálním souřadném systému,  
 $[\boldsymbol{\omega}^k]$  je matice dílčích úhlových rychlostí.

### 3.1.8 Silové účinky tlumičů a pružin ve vazbách



Obr. 3.10 Silové účinky pružiny a tlumiče.

Vyjděme z obr. 3.10. Podle zákona akce a reakce působí na oba členy systému stejné síly opačného znaménka  $\mathbf{S}_1 = -\mathbf{S}_2 = f(\Delta, \dot{\Delta})$ . Reakční síly jsou závislé na vzdálenosti mezi tělesy (v případě pružin) a její časové derivaci (v případě tlumičů). Předpokládejme,

že vazební bod tělesa 1 se pohybuje rychlostí  $\mathbf{v}_1$  a vazební bod na tělese 2 rychlostí  $\mathbf{v}_2$ . Potom celkový příspěvek obou účinků do zobecněných sil bude dle vztahu (3.31):

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{S}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} + \mathbf{S}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} = \mathbf{S}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} - \mathbf{S}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} = \mathbf{S}_1 \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} - \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} \right].$$

V maticovém tvaru vypadá zápis takto:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{V}_w^1 - \mathbf{V}_w^2) \mathbf{S}.$$

Podobným způsobem lze postupovat v případě torzní pružiny a tlumiče:

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{M}_1 \cdot \frac{\partial^R \boldsymbol{\omega}^1}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} + \mathbf{M}_2 \cdot \frac{\partial^R \boldsymbol{\omega}^2}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} = \mathbf{M}_1 \cdot \frac{\partial^R \boldsymbol{\omega}^1}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} - \mathbf{M}_1 \cdot \frac{\partial^R \boldsymbol{\omega}^2}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} = \mathbf{M}_1 \cdot \left[ \frac{\partial^R \boldsymbol{\omega}^1}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} - \frac{\partial^R \boldsymbol{\omega}^2}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} \right],$$

resp. v maticovém tvaru:

$$\mathbf{F} = \left( [\boldsymbol{\omega}^1] - [\boldsymbol{\omega}^2] \right) \mathbf{M}.$$

### 3.1.9 Kontaktní síly

Princip výpočtu kontaktních sil je podobný jako u silových účinků z předchozí kapitoly. Rozdíl při odvozování je pouze v tom, že na rozdíl od pružiny či tlumiče působí kontaktní síly ve společném bodě obou těles, proto mají obě tělesa v tomto bodě stejnou rychlost:

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{C}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} + \mathbf{C}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} = \mathbf{C}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} - \mathbf{C}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l} = \mathbf{0}.$$

Z odvození plyne, že kontaktní síly nijak nepřispívají do zobecněných působících sil ( $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ).

### 3.1.10 Gravitační síly

Gravitační síla, která působí na  $i$ -té těleso v tíhovém poli Země je dána vztahem:

$$\mathbf{F}_i^G = m_i \mathbf{g}, \text{ kde } m_i \text{ je hmotnost } i\text{-tého tělesa,}$$

$$\mathbf{g} \text{ je vektor tíhového zrychlení.}$$

Do zobecněných působících sil přispěje gravitační síla následujícím účinkem:

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{F}_i^G \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{\mathbf{x}}_l}.$$

### 3.1.11 Pohybové rovnice

K sestavení pohybových rovnic budeme využívat Lagrangeův přístup. Dříve však, než přistoupíme k jeho definici, zavedeme pojem kinetické a potenciální energie tělesa.

### 3.1.11.1 Kinetická energie

Uvažujme  $i$ -té těleso soustavy o hmotnosti  $m_i$ , které se pohybuje v souřadném systému  $R$ . Rychlost pohybu tohoto tělesa je dána rychlostí pohybu jeho těžiště  $\mathbf{v}_i$ . Kinetická energie tohoto tělesa je dána vztahem:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2.$$

Rychlost  $\mathbf{v}_i$  je možné vyjádřit dle vztahu (3.25) nebo (3.29). Je ovšem možné vyjít i ze znalosti polohového vektoru těžiště tělesa  $\mathbf{r}_i$  a jeho časové derivace. Je-li počet zobecněných souřadnic  $n$ , bude polohový vektor  $\mathbf{r}_i$  závislý na  $n+1$  souřadnicích:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(x_l, t) = \mathbf{r}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \text{ pro } l = 1, 2, \dots, n.$$

Časová derivace tohoto vektoru potom bude nabývat tvaru totálního diferenciálu:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial x_n} \dot{x}_n + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}.$$

Vzhledem k tomu, že jakýkoliv prostorový pohyb tělesa lze rozložit na pohyb posuvný a rotační, je možné i celkovou kinetickou energii pohybujícího se tělesa rozložit do složky příslušné posuvnému pohybu a pohybu rotačnímu:

$$T = T_{trans} + T_{rot}.$$

Označíme-li rychlost posuvného pohybu tělesa  $\mathbf{v}$ , potom kinetická energie tohoto pohybu bude

$$T_{trans} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2.$$

V případě rotačního pohybu bude vztah obdobný:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega},$$

kde  $\mathbf{I}$  je matice setrvačnosti tělesa a  $\boldsymbol{\omega}$  je vektor jeho úhlové rychlosti.

### 3.1.11.2 Potenciální energie

Pojem potenciální energie vychází z definice tzv. potenciálních (konzervativních) sil. Jedná se o síly, které jsou pouze funkcí polohy. Práce této síly nezáleží na tvaru dráhy, kterou se pohybuje její působíště. Převédeme-li tyto síly do zobecněných souřadnic  $x_l$ , kde  $l = 1, 2, \dots, n$  a zavedeme-li pro ně označení  $f_l^k$ , můžeme psát:

$$f_l^k = - \frac{\partial V}{\partial x_l},$$

kde  $V$  je potenciální energie tělesa.

Dodejme, že mezi konzervativní síly patří např. síla gravitační, síla v pružině, atd. Ostatní silové účinky nelze pomocí derivace potenciální energie získat, přesto ale mohou přispívat do celkových zobecněných akčních sil. Jedná se např. o sílu třecí či sílu časově proměnnou. Označíme-li tuto skupinu sil  $f_i^n$ , můžeme psát:

$$f_i = f_i^k + f_i^n.$$

### 3.1.11.3 Lagrangeovy rovnice

Vyskytují-li se v systému pouze konzervativní síly, jsou Lagrangeovy pohybové rovnice definovány následujícím vztahem:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad (3.32)$$

kde  $L$  je tzv. Lagrangeova funkce, která je rovna rozdílu kinetické a potenciální energie  $L = T - V$ . Přitom platí, že  $V$  je potenciální energie všech konzervativních sil působících v systému.

V ostatních případech je nutné nekonzervativní silové účinky přepočítat na jednotlivé zobecněné souřadnice (dle kap. 3.1.7) a ty potom připočíst k pravé straně rovnice:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = f_i^n. \quad (3.33)$$

Tyto rovnice představují v obecném případě soustavu  $n$  nelineárních diferenciálních rovnic druhého řádu.

Jiná situace nastane, budeme-li se zajímat nejenom o kinematickou analýzu systému, ale také o velikosti silových účinků v jednotlivých vazbách. Poté by bylo řešení výše uvedenými rovnicemi (3.32) nebo (3.33) nevhodné, neboť bychom museli sestavit další pohybové rovnice, dosadit do nich získané kinematické veličiny a tyto rovnice následně znovu řešit pro neznámé velikosti reakčních účinků.

V případě výpočtu reakcí postupujeme tak, že tyto reakční účinky zahrneme přímo do Lagrangeových rovnic. Je obecně známo, že velikosti vazebních sil ve smyslu jednotlivých zobecněných souřadnic jsou přímo úměrné součtu velikostí derivací vazebních rovnic podle příslušných zobecněných souřadnic. Tuto závislost můžeme popsat vztahem (při respektování Einsteinova sumačního pravidla):

$$f_i^c = \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}, \text{ pro } i = 1 \dots m$$

kde  $\phi_j$  jsou jednotlivé vazební rovnice (jejich počet je roven  $m$ ),

$\lambda_j$  jsou konstanty úměrnosti, tzv. Lagrangeovy multiplikátory.

Lagrangeova rovnice (3.33) pro soustavu obsahující nekonzervativní síly (kromě vazebních) získá po implementaci vazebních účinků tvar

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} = f_i^n. \quad (3.34)$$

Z výše odvozeného ovšem plyne, že v soustavě  $l$  pohybových rovnic přibýlo dalších  $m$  neznámých (multiplikátory  $\lambda_j$ ). Proto musíme původní soustavu rovnic doplnit o  $m$  vazebních rovnic na soustavu  $l+m$  rovnic o  $l+m$  neznámých. Tento postup vede na algebraicko-diferenciální soustavu rovnic.

### 3.1.12 Ukázkový příklad – shrnutí poznatků matematického popisu

V kapitole 3.1.1 až 3.1.11 jsme uvedli možný postup při matematické formulaci mechanického problému. Tento postup je vhodný zejména pro využití ve spojitosti s výpočetní technikou, kdy je výsledná soustava rovnic vytvořena programem bez nutného zásahu uživatele. Není ovšem vyloučena ani možnost využití výše uvedeného postupu pro výpočet, který provádí sám uživatel. Druhá z těchto možností je prezentována na následujícím příkladu, který je z důvodu obsáhlosti uveden v příloze P1.

Při rozboru tohoto příkladu je vhodné si uvědomit, jak pracný je výpočet výše uvedenými postupy. Příčinou této náročnosti je mimo jiné způsob matematického popisu modelu, který umožňuje využití výpočetní techniky. To je dobře patrné zejména v první části příkladu, kde se provádí kinematický rozbor modelu. V příloze P1 je v inkrementovaných místech zdůrazněn rozdíl mezi počítačovým popisem daného problému a způsobem zápisu, který by mohl provést uživatel bez využití počítače.

Z uvedeného příkladu je ovšem zřejmé, že i jednodušší forma zápisu daného problému představuje poměrně náročný úkol. Další záležitostí je samotné řešení vzniklé soustavy rovnic. V praxi se navíc velice často vyskytují mnohem složitější mechanické systémy s daleko náročnějším matematickým popisem. Proto využití výpočetní techniky v této oblasti znamená nezanedbatelný přínos při analýze chování takového systému.

V příloze P1 je řešení popisovaného příkladu provedeno s využitím prostředí MathCAD 11. Pro řešení soustavy dvou diferenciálních rovnic druhého řádu by bylo zřejmě možné použít vhodnější matematický software (např. Maple, Matlab). Prostředí MathCAD bylo v tomto příkladu použito zejména kvůli názornosti. Příklad je řešen s použitím literatury [6].

Vzhledem ke zjednodušujícím předpokladům, které jsme uvedli na začátku výpočtu (viz P1) je výsledný matematický popis tvořen čtyřmi diferenciálními rovnicemi prvního řádu (pro každý stupeň volnosti jedna diferenciální rovnice druhého řádu). V případě potřeby výpočtu velikosti reakcí v jednotlivých vazbách bychom byli nuceni pro sestavení pohybových rovnic využít vztah (3.34). V tom případě by vektor zobecněných souřadnic

$x_i$  neobsahoval pouze hodnoty  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$ , ale musel by být tvořen souřadnicemi ve všech možných stupních volnosti tělesa, které není podrobena vazbám. V takovém případě bychom získali pro  $N$  těles v rovině  $3N$  pohybových rovnic 2. řádu (resp.  $6N$  pohybových rovnic v prostoru) +  $m$  vazebních rovnic (s přihlédnutím k rovinnosti, resp. k prostorovosti modelu). Např. pro popis modelu jednoduchého kyvadla zavěšeného rotační vazbou s jedním stupněm volnosti, bychom v případě rovinného posuzování získali  $3 + 2$  rovnice a v případě prostorového zápisu  $6 + 5$  rovnic.

Pro příklad dvojitého kyvadla z přílohy P1 bychom při jeho prostorovém vnímání a při potřebě znalosti všech vazebních sil získali  $6 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 22$  rovnice (bez uvažování silových účinků). Jedná se o algebraicko-diferenciální soustavu 2. řádu. Převodem na 1. řád stoupne počet rovnic na 34.

### **3.2 Řešení matematického popisu mechanického systému**

Seznamme se nyní s možnostmi, které je možné využít při řešení matematického zápisu z předchozí kapitoly. Jedná se o diferenciální nebo algebraicko-diferenciální soustavu rovnic 2. řádu. K formulaci této kapitoly bylo využito zejména zdroje [7].

Většina metod, které budou popsány v dalším textu, neumožňuje přímo řešit soustavy 2. řádu. V takovém případě je nutná formální úprava zápisu rovnic převodem na soustavu prvního řádu. Tato úprava je popsána a rozebrána na ukázce příkladu v příloze P1.

#### **3.2.1 Specifikace multibody modelů**

Pro účely řešení multibody systémů hrají důležitou roli zejména metody, které jsou vhodné pro řešení tzv. „stiff“ systémů. Jedná se o systémy vedoucí na soustavu rovnic s jistými specifickými vlastnostmi. V překladu můžeme tyto soustavy označit jako „tuhé“, častěji se však setkáváme s výstižnějším pojmem – soustavy diferenciálních rovnic se silným tlumením. S těmito typy úloh se v multibody prostředí setkáváme poměrně často.

Specifikujme nyní tento problém blíže. Zaměříme se nejprve na lineární soustavu typu

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(\mathbf{x}).$$

Tuto soustavu nazveme „tuhou“, resp. se silným tlumením tehdy, bude-li poměr reálných částí největšího a nejmenšího vlastního čísla matice  $\mathbf{A}$  dostatečně vysoký:

$$\frac{|Re \lambda_{max}|}{|Re \lambda_{min}|} = S, \quad (3.35)$$

kde  $S$  je tzv. „S-poměr“.

Pojem „dostatečně vysoké číslo“ je velmi obtížně definovatelný. S-poměr slouží spíše k určení míry tuhosti soustav. V literatuře jsou uváděna mnohá čísla. Zmiňme proto pro účely této práce číslo  $S = 200$ , které je uváděno v případě použití softwaru MSC.ADAMS.

V případě nelineární soustavy diferenciálních rovnic budou směřovat vlastní čísla Jacobiovy matice  $J^*$ , která je tvořena derivacemi pohybových rovnic podle příslušných neznámých

$$J^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial^1 f}{\partial^1 y} & \dots & \frac{\partial^1 f}{\partial^m y} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^m f}{\partial^1 y} & \dots & \frac{\partial^m f}{\partial^m y} \end{pmatrix}.$$

Tato vlastní čísla jsou závislá na proměnné  $y$ , a proto budeme v tomto případě tuhost soustavy vyšetřovat pouze na určitém intervalu této proměnné  $y$ .

Dopad vysokého S-poměru na řešení soustavy je následující. Obecně lze konstatovat, že čím je  $|Re \lambda_{max}|$  větší, tím menší integrační krok je nutné při výpočtu použít (souvisí se stabilitou použité metody). A naopak, čím menší je  $|Re \lambda_{min}|$ , tím delší dobu trvá odeznění přechodového děje a proto musíme soustavu řešit na delším intervalu. „Stiff“ systémy se tedy vyznačují tou nepříjemnou vlastností, že je nutné k jejich řešení použít malý integrační krok na dlouhém intervalu nezávisle proměnné. Tuto nepříjemnost lze však částečně potlačit volbou vhodné integrační metody. Specifikaci těchto metod provedeme spolu s ostatními metodami v následující kapitole.

### 3.2.2 Metody řešení diferenciálních rovnic

Dříve než přistoupíme ke specifikaci jednotlivých integračních metod, seznámme se s jejich základním rozdělením. Hledisek pro toto třídění je více. Zde uveďme ty nejzákladnější:

- a) podle využití informací z minulých kroků: jednokrokové x vícekrokové,
- b) podle využití informací ze současného kroku: explicitní x implicitní,
- c) podle velikosti integračního kroku: s pevným krokem x s proměnným krokem.

V praxi je dnes využívána celá řada integračních metod vhodných pro řešení nejrůznějších problémů. My se však v dalším popisu zaměříme pouze na ty, které jsou implementovány v prostředí MSC.ADAMS.

Teoretický popis principů jednotlivých metod je s ohledem na svoji obsáhlост uveden v příloze P2. Tento výpis je proveden převážně ze zdrojů [7], [8] a [9]. Pozornost je věnována Rungovým-Kuttovým metodám, Adamsovým metodám, metodám

predikce–korekce a zejména metodám založeným na zpětné derivaci (tzv. BDF metody), které se s výhodou používají k řešení silně tlumených systémů popsaných v předchozí kapitole. Pozornost je také věnována problémům stability a z nich plynoucímu použití Newtonovy metody pro řešení soustavy rovnic získané využitím implicitních metod.

Konkrétní specifikaci jednotlivých integračních metod v prostředí MSC.ADAMS uvedeme v návaznosti na tuto část práce v kapitole 4.1.3, která bude blíže charakterizovat výpočet v prostředí MSC.ADAMS.



## 4. Programové prostředí MSC.ADAMS

V dnešní době existuje celá řada programů, které nabízejí možnost simulace mechanických systémů ve virtuální prostředí. Jedno z předních míst v této oblasti zaujímá software ADAMS. Tento program byl původně vyvinut firmou Mechanical Dynamics, která byla v roce 2002 koupena společností MSC.Software. Program proto v současnosti vystupuje pod názvem MSC.ADAMS.

Základem tohoto programu je řešič (procesor), který je označován jako MSC.ADAMS/Solver. Tento modul může pracovat samostatně. S uživatelem komunikuje v textovém režimu. Pomocí souboru příkazů je tak možné definovat příslušný model a ten následně podrobit dynamické analýze. Výsledky lze uložit např. do textového souboru. Nutno však podotknout, že samostatný modul Solver se v praxi využívá jen velmi zřídka. Nejčastější je spojení modulu Solver s preprocesorem MSC.ADAMS/View. K zobrazení spočtených výsledků se využívá MSC.ADAMS/PostProcessor.

Modul View představuje grafický prostředek, který umožňuje tvorbu modelu ve virtuálním prostředí. Kvůli komunikaci s řešičem používá stejných příkazů jako modul Solver. Tyto příkazy jsou však uživateli přiblíženy v přehledném menu či ve formě ikon. Kromě snadného ovládání umožňuje také okamžitý náhled na podobu daného modelu.

Modul PostProcessor je běžně využíván pro zobrazení spočtených dat a jejich následnou analýzu. Obsahuje spoustu nástrojů pro práci s grafickými průběhy (sčítání křivek, jejich derivace, filtrování, převody na spline funkce, atd.). Na základě uživatelských potřeb nabízí široké možnosti při zobrazení nejen časových průběhů daných výsledků, ale i jejich průběhů v závislosti na jiných vypočtených datech.

Kromě výše zmíněných modulů je možné využít i jiné preprocesory, např. Car, Engine, Aircraft, atd. Na rozdíl od univerzálního zaměření modulu View byly tyto preprocesory zaměřeny do konkrétních oblastí možného použití. Obsahují mnoho funkcí, které v dané oblasti zjednodušují tvorbu modelu a jeho výpočet. Všechny jsou zaměřeny k modelování na základě tvorby šablon a jejich následném propojení v sestavu. Tu lze posléze podrobit různým typům simulací, které jsou v daném modulu předdefinovány s ohledem na jeho dané zaměření. V souvislosti těmito moduly je ovšem nutné zmínit autorovu zkušenost s velmi ztíženou možností odladění modelu. Ve vytvořené sestavě totiž nelze měnit konfigurace modelu. Jedinou možností je editace příslušné šablony, což znamená načíst celou sestavu znovu.

V této práci budeme využívat modulů View, Car, Solver a Postprocessor. V závěru práce shrneme nejen zkušenosti při simulacích daných problémů, ale také poznatky s používáním jednotlivých modulů.

V dalším textu se budeme soustředit na systém MSC.ADAMS (platí pro všechny moduly).

#### **4.1 Popis modelu**

Jak již bylo řečeno v úvodu této práce, virtuální prostředí umožňuje vytvořit model skládající se z velkého počtu těles. Tato tělesa mohou být vzájemně propojena vazbami, které spolu s tělesy vytvoří model skutečného mechanického systému. Tento model je poté možno doplnit různými typy silových účinků a podrobit statické, kinematické či dynamické analýze. Výsledkem této MBS simulace je celkové chování daného systému v určitém čase.

Obecně je možné celou multibody simulaci rozdělit do třech fází:

- a) tvorba modelu ve virtuálním prostředí,
- b) přepis modelu do matematické formulace,
- c) řešení matematického zápisu modelu.

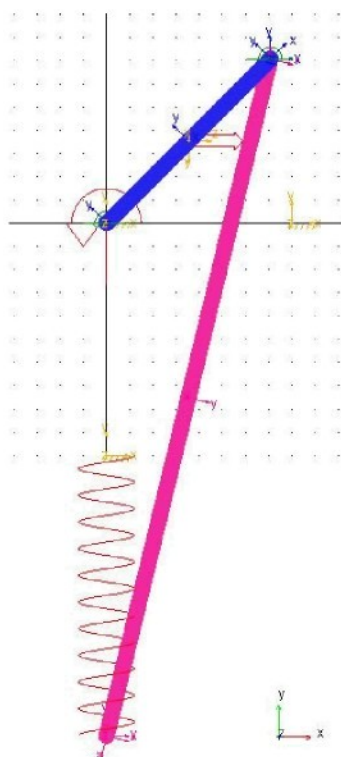
Na tomto místě je nutné zdůraznit, že uživatel může přímo ovlivnit pouze první fázi, tj. tvorbu vhodného modelu ve virtuálním prostředí. Druhá a třetí fáze (přepis modelu a matematické řešení) je již provedeno automaticky na základě uživatelské specifikace měnitelných parametrů (integrační metoda, krok výpočtu, maximální počet iterací v jednom kroku, atd.).

V dalším textu se budeme zabývat jednotlivými částmi simulace detailně.

##### **4.1.1 Tvorba modelu ve virtuálním prostředí**

Pro účely MBS simulací není třeba znát detailní geometrii jednotlivých částí systému (kromě ploch, které jsou ve vzájemném kontaktu). Z tohoto důvodu většina MBS programů obsahuje pouze jednoduchý modelář, jehož pomocí popíšeme model použitím základních geometrických těles. Těmto tělesům jsou přiřazeny hmotové vlastnosti jednotlivých částí skutečného systému (hmotnost, poloha těžiště, momenty setrvačnosti). Tím je dosaženo správné reprezentace analyzovaného systému po dynamické stránce.

Na následujícím obrázku 4.1 je uveden příklad multibody modelu v prostředí MSC.ADAMS. Jedná se o model uvedený v příloze P1.



Obr. 4.1 Příklad multibody modelu dvojitého kyvadla.

V následující tabulce 4.1 jsou uvedeny příklady nejčastěji používaných vazeb programu MSC.ADAMS. Tohoto popisu bude využito v následující kapitole při ukázce matematického popisu příkladu dvojitého kyvadla.

Tab. 4.1 Popis vazeb v prostředí MSC.ADAMS.

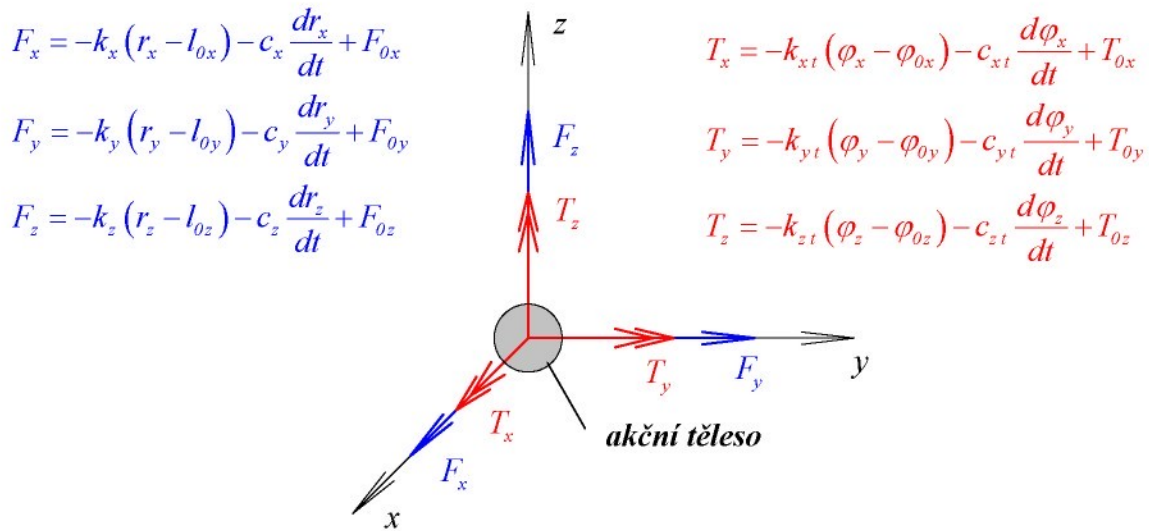
| název vazby   | počet odebraných stupňů volnosti |        |        | poznámka                        |
|---------------|----------------------------------|--------|--------|---------------------------------|
|               | posuv                            | rotace | celkem |                                 |
| REVOLUTE      | 3                                | 2      | 5      | rotace kolem jedné osy          |
| CYLINDRICAL   | 2                                | 2      | 4      | rotace + posuv kolem jedné osy  |
| SPHERICAL     | 3                                | 0      | 3      | rotace kolem tří os             |
| TRANSLATIONAL | 2                                | 3      | 5      | posuv podél jedné osy           |
| FIXED         | 3                                | 3      | 6      | vetknutí                        |
| PERPENDICULAR | 0                                | 1      | 1      | uzamčena rotace kolem jedné osy |
| PARALLEL AXIS | 0                                | 2      | 2      | uzamčena rotace kolem dvou os   |
| ORIENTATION   | 0                                | 3      | 3      | uzamčena veškerá rotace         |
| IN PLANE      | 1                                | 0      | 1      | uzamčen posuv podél jedné osy   |
| IN LINE       | 2                                | 0      | 2      | uzamčen posuv podél dvou os     |

Kromě fixace tělesa v daném směru umožňují vazby také předepsat průběh pohybu v určitém stupni volnosti (kinematické buzení). Příkladem definice pohybu může být závislost popsaná formou tabulky nebo zápis matematickou rovnicí.

Model bývá často doplněn silovými účinky. Ty mohou být definovány formou sil nebo silových dvojic (momentů). Jejich velikost se předepisuje stejně jako v případě kinematického buzení. S výhodou zde ovšem můžeme využít již předdefinovaných silových účinků ve formě pružných vazeb – pružina (SPRING) a tlumič (DAMPER).

V souvislosti s vazbami a silovými účinky se také zmiňme o důležitém vazebním prvku, kterým je tzv. BUSHING. Jedná se o pružné spojení mezi dvěma tělesy, kterým je pohybu tělesa v každém stupni volnosti předepsána uživatelem zadaná hodnota tuhosti a tlumení. BUSHING se proto chová jako soustava třech posuvných pružin / tlumičů a třech torzních pružin / tlumičů.

Při definování vazeb a silových účinků hraje velkou roli pořadí výběru jednotlivých členů modelu, které se vazby či silového působení účastní. První těleso ve výběru je považováno za těleso akční, druhé reakční. Možné důsledky ukažme na následujícím obrázku 4.2. Ten zachycuje silové účinky vazby typu BUSHING, které působí z reakčního tělesa na akční těleso.



Obr. 4.2 Vazba typu BUSHING.

V předchozích výrazech značí:

- $k_x, k_y, k_z$  posuvné tuhosti ve směrech  $x, y, z$ ,
- $k_{xt}, k_{yt}, k_{zt}$  rotační tuhosti kolem os  $x, y, z$ ,
- $c_x, c_y, c_z$  posuvná tlumení ve směrech  $x, y, z$ ,
- $c_{xt}, c_{yt}, c_{zt}$  rotační tlumení kolem os  $x, y, z$ ,
- $r_x, r_y, r_z$  vzdálenost mezi akčním a reakčním tělesem ve směru  $x, y, z$ ,

$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  natočení mezi akčním a reakčním tělesem kolem osy  $x, y, z$ ,

$l_{0x}, l_{0y}, l_{0z}$  klidovou délku pružiny ve směrech  $x, y, z$ ,

$\varphi_{0x}, \varphi_{0y}, \varphi_{0z}$  klidové natočení rotační pružiny kolem os  $x, y, z$ ,

$F_{0x}, F_{0y}, F_{0z}$  předpětí v pružině ve směru  $x, y, z$ ,

$T_{0x}, T_{0y}, T_{0z}$  předpětí v rotační pružině kolem osy  $x, y, z$ .

V prostředí MSC.ADAMS jsou silové účinky pružin a tlumičů definovány tak, že kladné znaménko má silový účinek s tendencí odtlačovat akční těleso od reakčního. Z tohoto důvodu je nutné dbát při definování vazby zvýšené opatrnosti.

#### 4.1.2 Matematický přepis modelu

Zkraje této kapitoly připomeňme, že do průběhu této fáze multibody simulace již nemůže uživatel nijak aktivně zasáhnout.

Matematický popis modelu je záležitostí modulu MSC.ADAMS/Solver. Vychází ze souboru, který je vytvořen modulem View a ve kterém je daný model dokonale popsán. Soubor obsahuje informace nejen o stavbě modelu, ale také o hmotových charakteristikách jednotlivých těles, jejich poloze, definicích pohybů, silových účinků, proměnných, atd. Tyto informace slouží jako vstupní data pro přepis modelu na soustavu rovnic.

##### 4.1.2.1 Tvorba pohybových rovnic

Během této fáze simulace je možné, aby modul Solver ukládal soubor, kde jsou uváděny průběžné výsledky matematického přepisu. Na následujícím obrázku 4.3 je ukázka prvních řádků takového souboru. Je na nich obsažena informace o poloze jednotlivých bodů (MARKERů) přepočtená do souřadnic příslušného souřadného systému.

| CONTENTS OF THE ARRAY MPT |     |     |            |             |             |             |             |             |             |
|---------------------------|-----|-----|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1,                        | 1:  | 4)  | 1          | 2           | 3           | 4           |             |             |             |
| 2,                        | 1:  | 4)  | 0          | 5           | 10          | 14          |             |             |             |
| 3,                        | 1:  | 4)  | 1          | 16          | 31          | 46          |             |             |             |
| 4,                        | 1:  | 4)  | 0          | 1           | 7           | 13          |             |             |             |
| 5,                        | 1:  | 4)  | 0          | 0           | 0           | 0           |             |             |             |
| 6,                        | 1:  | 4)  | -1         | 1           | 7           | 13          |             |             |             |
| 7,                        | 1:  | 4)  | 0          | 0           | 0           | 0           |             |             |             |
| CONTENTS OF THE ARRAY APT |     |     |            |             |             |             |             |             |             |
| 1,                        | 1:  | 4)  | 0.0000D+00 | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  |             |             |             |
| 2,                        | 1:  | 4)  | 0.0000D+00 | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  |             |             |             |
| 3,                        | 1:  | 4)  | 0.0000D+00 | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  |             |             |             |
| 4,                        | 1:  | 4)  | 0.0000D+00 | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  |             |             |             |
| 5,                        | 1:  | 4)  | 0.0000D+00 | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  |             |             |             |
| 6,                        | 1:  | 4)  | 0.0000D+00 | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  |             |             |             |
| 7,                        | 1:  | 4)  | 0.0000D+00 | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  |             |             |             |
| 8,                        | 1:  | 4)  | 0.0000D+00 | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  |             |             |             |
| 9,                        | 1:  | 4)  | 0.0000D+00 | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  |             |             |             |
| 10,                       | 1:  | 4)  | 0.0000D+00 | 7.5000D+01  | 4.2500D+02  | 7.5000D+02  |             |             |             |
| 11,                       | 1:  | 4)  | 0.0000D+00 | 1.2500D+02  | 1.2500D+02  | 0.0000D+00  |             |             |             |
| 12,                       | 1:  | 4)  | 0.0000D+00 | 5.3039D-17  | -7.6064D-17 | 0.0000D+00  |             |             |             |
| 13,                       | 1:  | 4)  | 0.0000D+00 | 2.6012D+00  | 4.2858D+00  | 1.5708D+00  |             |             |             |
| 14,                       | 1:  | 4)  | 0.0000D+00 | 1.5708D+00  | 1.5708D+00  | 0.0000D+00  |             |             |             |
| 15,                       | 1:  | 4)  | 0.0000D+00 | 1.5708D+00  | 1.5708D+00  | 1.5708D+00  |             |             |             |
| CONTENTS OF THE ARRAY MMR |     |     |            |             |             |             |             |             |             |
| 1,                        | 1:  | 10) | 6          | 13          | 1           | 2           | 14          | 5           | 8           |
| 1,                        | 11: | 20) | 7          | 11          | 9           | 16          | 10          | 12          | -1          |
| 1,                        | 21: | 24) | 80706050   | 80706051    | 80706052    | 80706053    |             |             |             |
| 2,                        | 1:  | 10) | 1          | 1           | 2           | 2           | 2           | 2           | 2           |
| 2,                        | 11: | 20) | 3          | 3           | 4           | 4           | 4           | 4           | 1           |
| 2,                        | 21: | 24) | 2          | 1           | 1           | 1           |             |             |             |
| 3,                        | 1:  | 10) | 0          | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           |
| 3,                        | 11: | 20) | 0          | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           |
| 3,                        | 21: | 24) | 0          | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           |
| 4,                        | 1:  | 10) | 0          | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           |
| 4,                        | 11: | 20) | 0          | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           |
| 4,                        | 21: | 24) | 0          | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           |
| CONTENTS OF THE ARRAY AMR |     |     |            |             |             |             |             |             |             |
| 1,                        | 1:  | 10) | 0.0000D+00 | 7.5000D+02  | 9.3715D-09  | -9.3715D-09 | 0.0000D+00  | 9.3715D-09  | -9.3715D-09 |
| 1,                        | 11: | 20) | 7.2714D-08 | -7.2714D-08 | -3.0615D-15 | 0.0000D+00  | -3.0615D-15 | -6.9611D-30 | 0.0000D+00  |
| 1,                        | 21: | 24) | 9.3715D-09 | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  |             |             |             |
| 2,                        | 1:  | 10) | 0.0000D+00 | 0.0000D+00  | 1.4211D-14  | -3.2476D-33 | 0.0000D+00  | 1.4211D-14  | -3.2476D-33 |
| 2,                        | 11: | 20) | 7.4054D-14 | 7.1054D-14  | 3.0615D-15  | 0.0000D+00  | 3.0615D-15  | 6.9611D-30  | 0.0000D+00  |
| 2,                        | 21: | 24) | 0.0000D+00 | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  |             |             |             |
|                           |     |     | 0.0000D+00 | 0.0000D+00  | 1.4577D+02  | 0.0000D+00  | -1.4577D+02 | 1.4577D+02  | 0.0000D+00  |
|                           |     |     | 0.0000D+00 | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  | 0.0000D+00  |

Obr. 4.3 Průběžné výsledky matematického přepisu multibody modelu.

Při matematickém popisu MBS modelu využívá program MSC.ADAMS/Solver poznatků, které jsme uvedli v kapitole 2. Vzhledem k tomu, že jsou vždy během výpočtu zjišťovány i velikosti reakčních účinků v jednotlivých vazbách, je pro tvorbu pohybových rovnic použit vztah (3.34):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} = f_i^n.$$

Vzhledem k tomu, že prostředí MSC.ADAMS vždy vnímá model jako prostorový, je počet složek  $l$  vektoru zobecněných souřadnic  $x_l$  dán hodnotou  $6N$ , kde  $N$  je počet těles v modelu. Dosazením vztahů pro kinetickou a potenciální energii systému do hodnoty Lagrangeovy funkce  $L$ , a derivací této funkce a vazebních rovnic  $\phi_i$  podle jednotlivých složek vektoru zobecněných souřadnic se proto získá  $l$  diferenciálních rovnic druhého řádu ve tvaru:

$$m_k \ddot{x}_l + m_k g + \sum_{i=1}^m R_{ix_l}^k = f_l^n, \text{ resp. } m_k \ddot{x}_l + \sum_{i=1}^m R_{ix_l}^k = f_l^n \quad (4.1), \text{ resp. } (4.2)$$

pro posuvnou souřadnici  $x_l$  ve směru gravitačního zrychlení  $g$ , resp. mimo tento směr.

V případě rotačních souřadnic  $x_i$  budou pohybové rovnice dány vztahem

$$I_k \ddot{x}_i + M_{ix_i}^k = f_i^n. \quad (4.3)$$

V obou předchozích vztazích značí:  $x_i$  danou zobecněnou souřadnici,

$k$  těleso, kterému daná zobecněná souřadnice náleží,

$R_{ix_i}^k$  silovou reakci v  $i$ -té vazbě, která leží ve směru zobecněné souřadnice  $x_i$  a působí na těleso  $k$ ,

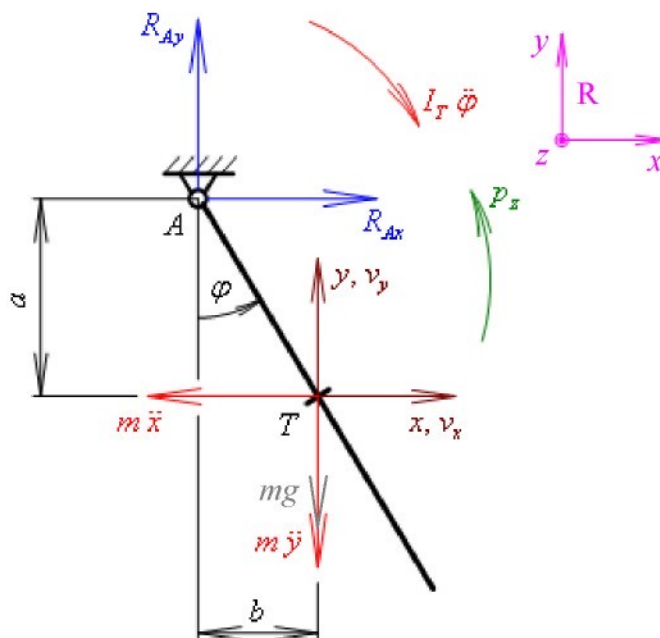
$M_{ix_i}^k$  momentovou reakci v  $i$ -té vazbě, která leží ve směru zobecněné souřadnice  $x_i$  a působí na těleso  $k$ .

Jak již bylo uvedeno v úvodu kap. 3.2, provádí se pro většinu integračních metod redukce druhého řádu na první. Také modul Solver provádí tuto redukci. V případě silových pohybových rovnic postupuje stejným postupem, který je popsán v příloze P1.

U momentových pohybových rovnic je ovšem situace poněkud jiná. Kromě zavedení dalších třech neznámých úhlových rychlostí kolem příslušných os souřadného systému je využito ještě přídavných veličin – impulsmomentů  $(p_x, p_y, p_z)$  kolem stejných os souřadného systému. Derivací impulsmomentu jsou nahrazeny všechny momentové účinky působící v daném směru. V následující rovnici je poté vyjádřena rovnováha mezi tímto impulsmomentem a impulsmomentem setrvačných účinků působících na těleso. Takto je nahrazena jedna momentová rovnice druhého řádu třemi rovnicemi prvního řádu.

Na následujícím obrázku je náhrada znázorněna. Obrázek zachycuje jednoduché kyvadlo, které je zavěšeno v bodě  $A$ . Bod  $T$  je těžištěm kyvadla. Zemské tíhové účinky zanedbáváme. Pro ilustraci redukce řádu rovnic v prostředí MSC.ADAMS uvedeme dvě pohybové rovnice, silovou v ose  $x$  a momentovou kolem osy  $z$ .





Obr. 4.4 Mechanismus kyvadla.

Tab. 4.2 Výpis pohybových rovnic a redukce jejich řádu pro mechanismus kyvadla.

| charakter rovnice            | původní rovnice 2. řádu                                    | soustava rovnic 1. řádu                                                                                          |
|------------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>silová podél osy x</b>    | $-m\ddot{x} + R_{Ax} = 0$                                  | $-m\dot{v}_x + R_{Ax} = 0$<br>$-v_x + \dot{x} = 0$                                                               |
| <b>momentová kolem osy z</b> | $-I_T\ddot{\varphi} - R_{Ax} \cdot a - R_{Ay} \cdot b = 0$ | $-I_T\omega_z + p_z = 0$<br>$\dot{p}_z + R_{Ax} \cdot a + R_{Ay} \cdot b = 0$<br>$-\omega_z + \dot{\varphi} = 0$ |

Z předchozích poznatků plyne skutečnost, že systém MSC.ADAMS získá pro každé těleso v modelu celkem 15 rovnic prvního řádu. Tato soustava diferenciálních rovnic je dále doplněna o algebraické rovnice vazeb. Jejich počet závisí na typu vazby a je roven počtu odebraných stupňů volnosti danou vazbou.

Při aplikaci tohoto postupu na příklad dvojitého kyvadla v příloze P1 získáme celkem  $2 \cdot 15 + 2 \cdot 5 = 40$  rovnic. To je o 6 více než v případě popisu uvedeném v příloze P1. Rozdíl je zdůvodněn zavedením impulsmomentů, neboť tím se zvýší počet rovnic pro každé těleso o 3.

Přidáme-li k této soustavě rovnice silových účinků, zvýší se celkový počet rovnic na 51. To je způsobeno tím, že silový účinek je v modulu Solver popsán 5 rovnicemi (např. u pružiny se jedná o klidovou délku pružiny, celkovou sílu v pružině ve směru její osy a tři průměty této síly do jednotlivých složek souřadného systému  $x, y, z$ ), momentový účinek je popsán 1 rovnicí.



Na následujícím obrázku 4.5 je v textovém tvaru uvedena schematická podoba soustavy rovnic z výstupního souboru modulu Solver pro mechanismus dvojitého kyvadla z přílohy P1.

| PART/2   |                |          |                | JOINT/1 TYPE=Revolute |                |          |          |
|----------|----------------|----------|----------------|-----------------------|----------------|----------|----------|
| EQUATION | FUNCTION       | VARIABLE | VARIABLE       | EQUATION              | FUNCTION       | VARIABLE | VARIABLE |
| 1        | X Force        | 1        | X Velocity     | 31                    | X Displacement | 31       | X Lambda |
| 2        | Y Force        | 2        | Y Velocity     | 32                    | Y Displacement | 32       | Y Lambda |
| 3        | Z Force        | 3        | Z Velocity     | 33                    | Z Displacement | 33       | Z Lambda |
| 4        | Psi Momentum   | 4        | Psi Velocity   | 34                    | Zi . Xi        | 34       | Lambda   |
| 5        | Phi Momentum   | 5        | Phi Velocity   | 35                    | Zi . Yi        | 35       | Lambda   |
| 6        | Theta Momentum | 6        | Theta Velocity | JOINT/2 TYPE=Revolute |                |          |          |
| 7        | Psi Torque     | 7        | Psi Momentum   | EQUATION              | FUNCTION       | VARIABLE | VARIABLE |
| 8        | Phi Torque     | 8        | Phi Momentum   | 36                    | X Displacement | 36       | X Lambda |
| 9        | Theta Torque   | 9        | Theta Momentum | 37                    | Y Displacement | 37       | Y Lambda |
| 10       | X Velocity     | 10       | X              | 38                    | Z Displacement | 38       | Z Lambda |
| 11       | Y Velocity     | 11       | Y              | 39                    | Zi . Xi        | 39       | Lambda   |
| 12       | Z Velocity     | 12       | Z              | 40                    | Zi . Yi        | 40       | Lambda   |
| 13       | Psi Velocity   | 13       | Psi            | SFORCE/2              |                |          |          |
| 14       | Phi Velocity   | 14       | Phi            | EQUATION              | FUNCTION       | VARIABLE | VARIABLE |
| 15       | Theta Velocity | 15       | Theta          | 41                    | Length         | 41       | Length   |
| PART/3   |                |          |                | 42                    | Force Mag      | 42       | Force.   |
| EQUATION | FUNCTION       | VARIABLE | VARIABLE       | 43                    | X Force        | 43       | X Force  |
| 16       | X Force        | 16       | X Velocity     | 44                    | Y Force        | 44       | Y Force  |
| 17       | Y Force        | 17       | Y Velocity     | 45                    | Z Force        | 45       | Z Force  |
| 18       | Z Force        | 18       | Z Velocity     | SFORCE/3              |                |          |          |
| 19       | Psi Momentum   | 19       | Psi Velocity   | EQUATION              | FUNCTION       | VARIABLE | VARIABLE |
| 20       | Phi Momentum   | 20       | Phi Velocity   | 46                    | Length         | 46       | Length   |
| 21       | Theta Momentum | 21       | Theta Velocity | 47                    | Force Mag      | 47       | Force.   |
| 22       | Psi Torque     | 22       | Psi Momentum   | 48                    | X Force        | 48       | X Force  |
| 23       | Phi Torque     | 23       | Phi Momentum   | 49                    | Y Force        | 49       | Y Force  |
| 24       | Theta Torque   | 24       | Theta Momentum | 50                    | Z Force        | 50       | Z Force  |
| 25       | X Velocity     | 25       | X              | SFORCE/1              |                |          |          |
| 26       | Y Velocity     | 26       | Y              | EQUATION              | FUNCTION       | VARIABLE | VARIABLE |
| 27       | Z Velocity     | 27       | Z              | 51                    | Torque         | 51       | Torque   |
| 28       | Psi Velocity   | 28       | Psi            |                       |                |          |          |
| 29       | Phi Velocity   | 29       | Phi            |                       |                |          |          |
| 30       | Theta Velocity | 30       | Theta          |                       |                |          |          |

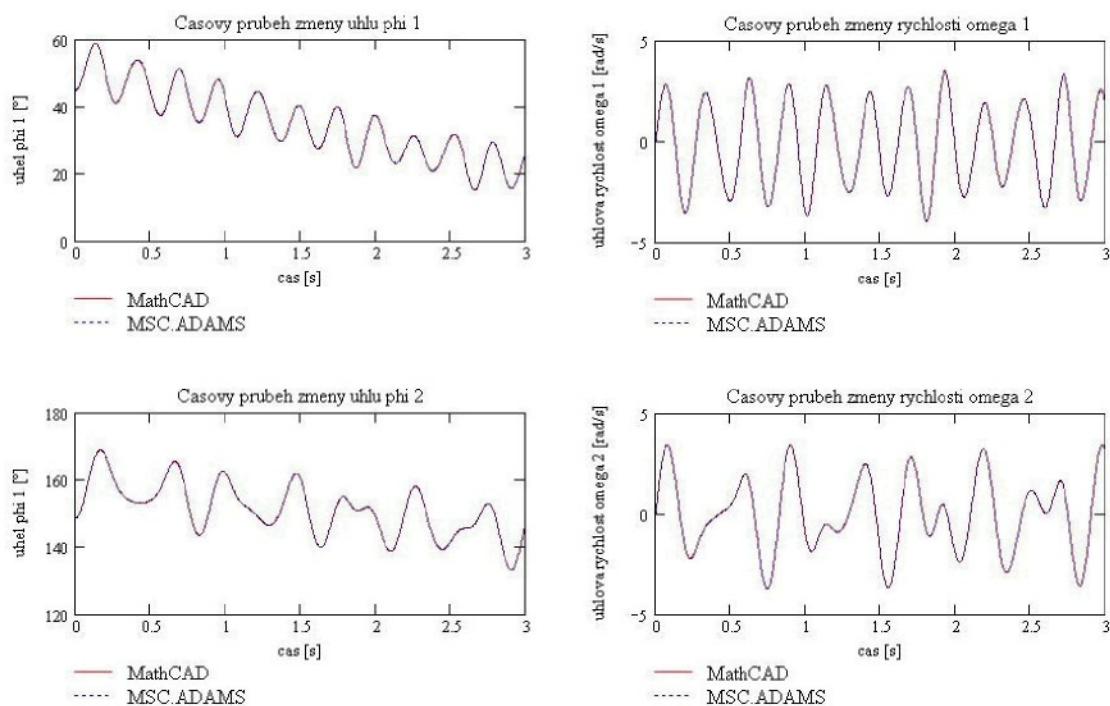
Obr. 4.5 Výpis rovnic a neznámých pro mechanismus dvojitého kyvadla.

V prvním sloupci je vždy uvedeno číslo příslušné rovnice a druhý sloupec informuje o charakteru této rovnice. Ve třetím a čtvrtém sloupci je číslo a název neznámé veličiny. Jejich počet musí vždy souhlasit s počtem rovnic. Je-li model vlivem neopatrného použití vazeb přeuren, jsou veškeré přebytečné reakce během výpočtu vynulovány (viz kap. 4).

#### 4.1.2.2 Matematický zápis příkladu v prostředí MSC.ADAMS/Solver

Uvedme nyní pro názornost příklad matematické formulace dvojitého kyvadla z přílohy P1 v prostředí MSC.ADAMS/Solver. Postup při popisu modelu je vzhledem ke své obsáhlosti uveden v příloze P3. Formulace pohybových rovnic je prováděna na základě vztahů (4.1) až (4.3).

Na následujícím obrázku 4.6 je uvedeno porovnání závislostí úhlů  $\varphi_1, \varphi_2$  a úhlových rychlostí  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$  na čase mezi způsobem popisu modelu z přílohy P1 a simulací v prostředí MSC.ADAMS (příloha P3). Podotkneme, že z důvodu porovnatelnosti výsledků není v prostředí MSC.ADAMS definován kontakt mezi pístem a podložkou (stejně jako při matematickém řešení daného příkladu v příloze P1).



Obr. 4.6 Porovnání výsledků popisu modelu dle přílohy P1 a simulací v prostředí MSC.ADAMS.

Závěrem této kapitoly zdůrazníme skutečnost, že popisem daného modelu metodou počítačového zápisu získáme i pro zdánlivě jednoduchý model poměrně rozměrnou soustavu algebraicko-diferenciálních rovnic. To je dáno zejména prostorovým vnímáním celé problematiky. Z tohoto závěru vyplývá, že budeme-li chtít analyzovat chování této soustavy rovnic během matematického řešení, bude to zejména díky jejím rozměrům poměrně nesnadná záležitost.

Dříve však, než budeme analýzu provádět, seznámme se se základními integračními metodami, které jsou k dispozici v modulu Solver.

#### 4.1.3. Shrnutí a charakteristika metod použitých v prostředí MSC.ADAMS

V této části práce popíšeme řešení soustavy rovnic, která byla vytvořena postupem dle předchozí kapitoly. Poznamenejme hned zkráj, stejně jako v kap. 4.1.2, že tato fáze simulace v prostředí MSC.ADAMS opět probíhá bez možnosti přímého zásahu uživatele či jeho kontroly nad průběhem výpočtu. Uživatel může ovlivnit vlastnosti řešení pouze volbou vhodných parametrů metody před vlastním výpočtem (minimální délka kroku, největší řád metody, atd.).

Vzhledem k tomu, že je prostředí MSC.ADAMS navrženo k řešení co nejširšího záběru úkolů technické praxe, je v modulu Solver implementováno několik metod. Jejich výběr provádí sám uživatel podle charakteru konkrétní úlohy.

Metody používané v prostředí MSC.ADAMS jsou uvedeny v následující tabulce.

Tab. 4.3 Přehled metod v prostředí MSC.ADAMS a jejich označení.

| označení            | popis                                    |
|---------------------|------------------------------------------|
| <b>GSTIFF</b>       | BDF metoda – Gear                        |
| <b>WSTIFF</b>       | BDF metoda – modifikovaná Gearova metoda |
| <b>CONSTANT BDF</b> | BDF metoda s pevným krokem               |
| <b>ABAM</b>         | Adams-Bashforth - Adams-Moulton          |
| <b>RKF45</b>        | Rungova-Kuttova-Fehlbergova metoda       |
| <b>Newmark</b>      | $\alpha$ -metoda                         |
| <b>HHT</b>          | $\alpha$ -metoda                         |

Před začátkem výpočtu umožňuje prostředí MSC.ADAMS volbu parametrů integrační metody. Nejčastěji se volí tyto základní parametry.

- Maximální chybu výpočtu – jedná se o maximální absolutní chybu během celého výpočtu. Velikost chyby je udávána v týž jednotkách, jako neznámá veličina. Chceme-li znát alespoň orientačně chybu, která je brána na jeden krok výpočtu, je třeba celkovou chybu dělit počtem kroků. To odpovídá nejhoršímu případu, kdy by všechny chyby v každém kroku měly aditivní ráz.
- Maximální délka integračního kroku.
- Minimální délka integračního kroku.
- Výchozí délka integračního kroku – udává délku integračního kroku na začátku výpočtu. Integrační metoda v dalším výpočtu tuto hodnotu modifikuje dle požadavků řešení.
- Maximální řád dané metody (pro metody s proměnným řádem).
- Maximální počet iterací v jednom integračním kroku.

Nyní uveďme podrobnější popis jednotlivých metod a jejich základní charakteristiky.

#### 4.1.3.1. GSTIFF

Jedná o tzv. Gearovu metodu. Tato metoda spadá do oblasti BDF metod (viz příloha P2, vztah (P2.6), event. literatura [10]). C. W. Gear první použil BDF metodu vyššího řádu než prvního. Jedná se o  $k$ -krokovou BDF metodu s proměnným řádem a proměnným integračním krokem. Maximální řád této metody je 6. Koeficienty  $\alpha_v$  a  $\beta_v$  jsou spočteny na počátku simulace z předpokladu, že se integrační krok během simulace nebude měnit.

BDF metody se obecně vyznačují dobrou použitelností u stiff systémů. Do řádu  $k = 2$  mají všechny implicitní BDF metody tu výbornou vlastnost, že jsou A-stabilní (dle [7]).

Se vzrůstajícím řádem se jejich stabilita zhoršuje, ale do řádu  $k = 6$  jsou stále  $A(\alpha)$ -stabilní. V následující tabulce jsou pro srovnání uvedeny úhly stability:

Tab. 4.4 Stabilita Gearových metod.

| řád BDF metody | úhel $\alpha$ |
|----------------|---------------|
| $k = 1$        | $90^\circ$    |
| $k = 2$        | $90^\circ$    |
| $k = 3$        | $86^\circ$    |
| $k = 4$        | $73^\circ$    |
| $k = 5$        | $51^\circ$    |

Poznamenejme, že pro řád  $k = 1$  se jedná o tzv. implicitní Eulerovu metodu (viz [7]). Tato metoda je dokonce L-stabilní. Její nevýhodou je malá přesnost. Během výpočtu může dojít k načítání chyb z jednotlivých kroků a tím může být výsledný průběh neznámé y značně zkreslen.

Z uvedeného plyne závěr, že pro komplikované stiff systémy s velkým číslem  $\text{Re } \lambda_{\max}$  jsou nejstabilnější BDF metody do řádu  $k = 2$ . Při použití řádu  $k = 1$  je ovšem třeba si dát pozor na nepřipustné nahromadění chyb a tím na zkreslení celkového výsledku.

Tato integrační metoda je považována v prostředí MSC.ADAMS jako metoda výchozí. To znamená, že není-li uživatelem vybrána jiná metoda pro výpočet modelu, použije MSC.ADAMS metodu GSTIFF. Mezi její podstatné výhody patří rychlá konvergence a schopnost efektivně řešit mnoho typů úloh.

#### 4.1.3.2 WSTIFF

Tato metoda je velmi podobná metodě GSTIFF. I zde se jedná o  $k$ -krokovou metodu s proměnným krokem i řádem (max. do řádu 6). Rozdíl mezi oběma metodami je v tom, že metoda GSTIFF používá konstantní koeficienty  $\alpha_v$  a  $\beta_v$  pro celou část výpočtu, zatímco u metody WSTIFF jsou tyto koeficienty v průběhu výpočtu přepočítávány v závislosti na integračním kroku metody. To se pozitivně odráží na její přesnosti.

Stabilita této metody je stejná jako u metody GSTIFF.

#### 4.1.3.3 CONSTANT BDF

Jedná se o poslední z integračních metod, která je založena na BDF formulaci. CONSTANT BDF je vícezkroková metoda proměnného řádu s převážně konstantním integračním krokem. To znamená, že metoda startuje se zadaným krokem a počítá s ním tak dlouho, dokud výsledek konverguje. Přestane-li být metoda v určitém čase

konvergující, dojde k redukci integračního kroku. K pokusu o obnovení integračního kroku na původní zadanou hodnotu dojde po 25 krocích výpočtu.

Algoritmus této metody je navržen tak, aby bylo pro daný integrační krok dosaženo co největšího řádu (max. 6). Díky tomu metoda dosahuje dobré přesnosti. V případě potřeby je možné snížit integrační krok a tím přesnost výpočtu ještě zvýšit. Zároveň s přesností výpočtu ovšem tento krok zvyšuje i náročnost výpočtu (zvyšuje výrazně počet operací).

Výhodou metody CONSTANT BDF je to, že v jistých případech dokáže lépe řešit situaci v modelu než např. metoda GSTIFF. Jedná se zejména o různé typy nespojitostí či značně se měnících veličin během výpočtu (kontaktní úlohy). Při stanovování délky integračního kroku je ovšem třeba dbát opatrnosti. Bude-li krok dosti velký, metoda bude nepřesná, zmenšíme-li naopak krok příliš, bude výpočet hodně časově náročný.

#### **4.1.3.4 ABAM**

Metoda ABAM vychází z kombinace dvou metod v režimu prediktor-korektor: Adams-Bashforthovy a Adams-Moultonovy. Adams-Bashforthova metoda je použita k odhadu neznámé hodnoty v dalším integračním kroku a pomocí Adams-Moultonovy metody dochází ke korekci tohoto odhadu. Kombinace těchto dvou metod je velice častá, neboť zaručuje vysokou stabilitu (viz [7]). Adams-Moultonova metoda je do 2. řádu dokonce A-stabilní.

Jedná se o vícekrokovou metodu s proměnným krokem i řádem. Maximální možný řád této metody v prostředí MSC.ADAMS je 12. Vzhledem k tomu, že tato metoda neumožňuje řešit soustavu algebraicko-diferenciálních rovnic, je třeba převést tuto soustavu na kondenzovaný systém obyčejných diferenciálních rovnic. Toho je dosaženo tzv. metodou redukce souřadnic.

Metoda ABAM není příliš vhodná pro řešení silně tlumených úloh („stiff“ úlohy), avšak v ostatních případech je výhodná především pro svoji vysokou stabilitu.

#### **Metoda redukce souřadnic**

Předpokládejme mechanický systém obsahující  $n$  nezávislých zobecněných souřadnic. Bude-li tento systém podroben  $m$  vazbám, bude počet stupňů volnosti tohoto systému roven číslu  $n-m$ . Budeme-li ovšem psát soustavu pohybových rovnic, budou v této soustavě obsaženy všechny neznámé parametry. Metoda redukce souřadnic vybere z neznámých veličin ty parametry, které se v průběhu simulace mění nejvíce (v daných stupních volnosti). Ty označí jako nezávislé a systém algebraicko-diferenciálních rovnic převede na systém obyčejných diferenciálních rovnic, který řeší pouze vybrané nezávislé veličiny. Ostatní závislé veličiny jsou vyjádřeny vazebními rovnicemi v závislosti na nezávislých parametrech. Tato soustava vazebních rovnic je řešena Newtonovou metodou v každém

integračním kroku pro spočtené nezávislé parametry (během iterování jsou považovány za konstantní).

#### 4.1.3.5 RKF45

Jedná se o jednokrokovou metodu Runge-Kutta-Fehlberg, která počítá řešení v dalším integračním kroku metodou čtvrtého a pátého řádu a výsledky obou výpočtů porovná (bližší viz [7]). Vzhledem k tomu, že RKF45 metodou lze řešit pouze soustav obyčejných diferenciálních rovnic, používá tato metoda (stejně jako ABAM) redukci souřadnic.

Obecně platí, že je tato metoda vhodná pro řešení nepřiliš tlumených systémů tam, kde není výpočet derivací příliš náročný. To v případě popisu modelu v MSC.ADAMS neplatí, proto je tato metoda ve většině případů několikrát pomalejší než metody ostatní. Jejím přínosem je ovšem to, že její podstata je zcela jiná než u jiných metod implementovaných do MSC.ADAMS. Proto poskytuje výpočtář určité rozšíření možností při simulacích.

#### 4.1.3.6 Newmarkova, HHT metoda

Jedná se o poměrně nové metody, které byly do prostředí MSC.ADAMS implementovány teprve od verze 2005. Vzhledem k tomu mám s těmito metodami zatím pouze minimální zkušenosti, a proto se nebudeme jejich popisem příliš zabývat. Jistě ovšem bude vhodné v návaznosti na tuto práci pokračovat v další identifikaci těchto metod.

Orientační popis obou metod je uveden v příloze P2 (kap. P2.3). Podrobněji je méžné získat informace např. v literatuře [11].

### 4.2 Algoritmus řešení matematického popisu modelu

V této kapitole se seznámíme s konkrétním postupem při výpočtu řešení soustavy rovnic popisující daný model. Mechanismus tohoto postupu je stejný s mechanismem metod prediktor-korektor. Popis postup výpočtu bude důležitý pro identifikaci různých nestabilit, které mohou během výpočtu vzniknout. Mimo jiné je využito zdroje [12].

Jak již bylo uvedeno výše, výsledkem matematického popisu mechanického modelu je soustava pohybových a vazebních rovnic. Jedná se o soustavu algebraicko-diferenciálních rovnic druhého řádu. Většina výše uvedených metod (např. GSTIFF, CONSTANT BDF) však řeší algebraicko-diferenciální soustavu rovnic, resp. diferenciální soustavu rovnic pouze prvního řádu. Redukcí druhého řádu pohybových diferenciálních rovnic na první řád proto získáme výslednou soustavu rovnic prvního řádu ve tvaru:

$$G(\dot{y}, y, t) = 0 \quad (4.4)$$

$$\text{pro počáteční podmínky } y(0) = y_0. \quad (4.5)$$

Tato soustava tvoří vstupní data pro následující matematický výpočet. Jeho postup je možné rozdělit do dvou fází:

- a) odhad přibližného řešení v čase  $t_{n+1}$ ,
- b) korekce tohoto řešení danou metodou.

#### 4.2.1. Odhad přibližného řešení algebraicko-diferenciální soustavy

V této fázi výpočtu je snahou odhadnout co nejpřesněji hodnotu neznámého parametru (parametrů) v dalším iteračním kroku ( $t_{n+1}$ ). Čím se podaří získat přesnější odhad, tím méně iterací bude potřeba v následujícím kroku k jeho zpřesnění a tím rychlejší bude výpočet.

K odhadu neznámého parametru v čase  $t_{n+1}$  se využívá znalosti vypočtených hodnot v předešlém integračním kroku. Způsob, jakým jsou jednotlivé body zahrnovány do odhadu se však s každou metodou liší.

V prostředí MSC.ADAMS je např. pro metodu GSTIFF použit odhad pomocí Taylorova rozvoje ve tvaru

$$y_{n+1}^p = \sum_{i=0}^k \frac{h^i}{i!} y_n^{(i)},$$

kde  $y_{n+1}^p$  je odhad neznámé veličiny v čase  $t_{n+1}$ ,

$h$  je krok výpočtu,

$k$  je řád použité metody,

$y_n^{(i)}$  je hodnota  $i$ -té iterace z předchozího kroku.

Podobně se např. v metodě ABAM používá pro odhad neznámé hodnoty v čase  $t_{n+1}$  explicitní Adams-Bashforthovy metody.

#### 4.2.2. Zpřesnění odhadu

V této fázi výpočtu dochází ke korekci hodnoty  $y_{n+1}^p$  získané z předchozího postupu. Z výše popsaných metod, které jsou použity v prostředí MSC.ADAMS, vyplývá, že drtivá většina z nich má implicitní charakter.

Příklad obecného zápisu takové metody pro řešení soustavy diferenciálních rovnic dané výrazem

$$y' = f(x, y)$$

představuje např. vztah

$$\sum_{v=0}^k \alpha_v y_{n+v} = h \sum_{v=0}^k \beta_v f_{n+v},$$

kde  $\alpha_v, \beta_v$  jsou konstantní hodnoty, předpokládáme, že  $\alpha_k = 1$ ,  $\beta_k \neq 0$  a  $\alpha_0$  a  $\beta_0$  nejsou zároveň rovny 0,

$f_{n+v}$  je funkční hodnota  $f(x_{n+v}, y_{n+v})$ ,  
 $h$  je integrační krok.

Jak je popsáno ve zdroji [7], platí tento vztah pro obecnou lineární  $k$  krokovou metodu a vede na problém řešit obecně nelineární soustavu typu

$$y_{n+k} + \sum_{v=0}^{k-1} \alpha_v y_{n+v} - h \sum_{v=0}^k \beta_v f_{n+v} = o,$$

kde  $o$  je nulový vektor. (4.6)

Vzhledem k tomu, že hodnoty v předchozích krocích jsou již známy, můžeme vztah (4.6) přepsat do tvaru

$$y_{n+k} + c - h \sum_{v=0}^k \beta_v f_{n+v} = o,$$

kde  $c$  je konstantní vektor.

Obecně lze výrazy na levé straně předchozího vztahu zapsat jako funkci neznámé  $y_{n+k}$ :

$$g(y_{n+k}) = o. \quad (4.7)$$

Jedná-li se o silně tlumenou soustavu, je použití klasických postupů metod prediktor-korektor (např.  $P(EC)^m E$ ) značně nevýhodné (viz [7]). Je to z toho důvodu, že tento způsob výpočtu značně mění oblast stability užitých metody a klade neúměrné nároky na velikost integračního kroku. Proto se pro řešení soustavy (4.7) používá Newtonova metoda, která je definována podle následujícího předpisu

$$y_{n+k}^{(i+1)} = y_{n+k}^{(i)} - \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial^1 g}{\partial^1 y_{n+k}}(y_{n+k}^{(i)}) & \dots & \frac{\partial^1 g}{\partial^m y_{n+k}}(y_{n+k}^{(i)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^m g}{\partial^1 y_{n+k}}(y_{n+k}^{(i)}) & \dots & \frac{\partial^m g}{\partial^m y_{n+k}}(y_{n+k}^{(i)}) \end{array} \right)^{-1} g(y_{n+k}^{(i)}). \quad (4.8)$$



Budeme-li chtít proto v případě implicitní metody vyjádřit hodnotu  $y_{n+k}$  pro nezávisle proměnnou  $x_{n+k}$ , je nutné postupovat dle principu Newtonovy metody:

$$J^1 \Delta y_{n+k} = -g(y_{n+k}^{(i)}, t_{n+k}), \quad (4.9)$$

$$\text{kde } J^1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^1 g}{\partial^1 y_{n+k}}(y_{n+k}^{(i)}) & \dots & \frac{\partial^1 g}{\partial^m y_{n+k}}(y_{n+k}^{(i)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^m g}{\partial^1 y_{n+k}}(y_{n+k}^{(i)}) & \dots & \frac{\partial^m g}{\partial^m y_{n+k}}(y_{n+k}^{(i)}) \end{pmatrix}, \quad \Delta y_{n+k} = y_{n+k}^{(i+1)} - y_{n+k}^{(i)}.$$

Přejděme nyní k řešení konkrétní soustavy (4.4) s počáteční podmínkou (4.5), která popisuje chování multibody modelu. Řešení této soustavy můžeme zapsat s přihlédnutím ke vztahu (4.9) ve tvaru

$$J^2 \Delta \dot{y}_{n+k} + J^1 \Delta y_{n+k} = -G(\dot{y}_{n+k}^{(i)}, y_{n+k}^{(i)}, t_{n+k}), \quad (4.10)$$

$$\text{kde } J^1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^1 G}{\partial^1 y_{n+k}} & \dots & \frac{\partial^1 G}{\partial^m y_{n+k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^m G}{\partial^1 y_{n+k}} & \dots & \frac{\partial^m G}{\partial^m y_{n+k}} \end{pmatrix} \bigg( \dot{y}_{n+k}^{(i)}, y_{n+k}^{(i)}, t_{n+k} \bigg),$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^1 G}{\partial^1 \dot{y}_{n+k}} & \dots & \frac{\partial^1 G}{\partial^m \dot{y}_{n+k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^m G}{\partial^1 \dot{y}_{n+k}} & \dots & \frac{\partial^m G}{\partial^m \dot{y}_{n+k}} \end{pmatrix} \bigg( \dot{y}_{n+k}^{(i)}, y_{n+k}^{(i)}, t_{n+k} \bigg),$$

$$\Delta y_{n+k} = y_{n+k}^{(i+1)} - y_{n+k}^{(i)},$$

$$\Delta \dot{y}_{n+k} = \dot{y}_{n+k}^{(i+1)} - \dot{y}_{n+k}^{(i)}.$$

V tomto vztahu jsou ovšem dvě neznámé  $\Delta y_{n+k}$  a  $\Delta \dot{y}_{n+k}$ . Připomeňme si ale, že zatím stále ještě vycházíme z obecného vztahu pro řešení implicitní metody. Použijeme-li nyní konkrétní integrační metodu, bude možné na základě matematického popisu metody získat vztah mezi oběma neznámými. Učinně tak např. pro BDF metody (GSTIFF, WSTIFF, CONSTANT BDF). Jejich matematický zápis je uveden v příloze P2:

$$y_{n+1} = \sum_{v=1}^k \alpha_v y_{n-v+1} + h \beta_0 \dot{y}_{n+1}. \quad (4.11)$$

Vyjádříme si nyní z tohoto vztahu rozdíl mezi hodnotami dvou po sobě jdoucích iterací

$$\mathbf{y}_{n+1}^{(i)} = \sum_{v=1}^k \alpha_v \mathbf{y}_{n-v+1} + h \beta_0 \dot{\mathbf{y}}_{n+1}^{(i-1)} \quad \text{a}$$

$$\mathbf{y}_{n+1}^{(i+1)} = \sum_{v=1}^k \alpha_v \mathbf{y}_{n-v+1} + h \beta_0 \dot{\mathbf{y}}_{n+1}^{(i)}.$$

Rozdílem iterací  $\mathbf{y}_{n+1}^{(i+1)}$  a  $\mathbf{y}_{n+1}^{(i)}$  dostaneme výraz:

$$\mathbf{y}_{n+1}^{(i+1)} - \mathbf{y}_{n+1}^{(i)} = h \beta_0 \left( \dot{\mathbf{y}}_{n+1}^{(i)} - \dot{\mathbf{y}}_{n+1}^{(i-1)} \right).$$

Označením  $\Delta \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_{n+1}^{(i+1)} - \mathbf{y}_{n+1}^{(i)}$  a  $\Delta \dot{\mathbf{y}}_{n+1} = \dot{\mathbf{y}}_{n+1}^{(i)} - \dot{\mathbf{y}}_{n+1}^{(i-1)}$  získáme po úpravě vztah

$$\Delta \dot{\mathbf{y}}_{n+1} = \frac{1}{h \beta_0} \Delta \mathbf{y}_{n+1}. \quad (4.12)$$

Tím jsme získali závislost jedné neznámé hodnoty  $\Delta \dot{\mathbf{y}}_{n+1}$  ze vztahu (4.10) na druhé neznámé  $\Delta \mathbf{y}_{n+1}$ . Dosazením do tohoto vztahu bude

$$\mathbf{J}^2 \frac{1}{h \beta_0} \Delta \mathbf{y}_{n+k} + \mathbf{J}^1 \Delta \mathbf{y}_{n+k} = -\mathbf{G} \left( \dot{\mathbf{y}}_{n+k}^{(i)}, \mathbf{y}_{n+k}^{(i)}, t_{n+k} \right)$$

a po úpravě:

$$\Delta \mathbf{y}_{n+k} = -\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{G}_{n+k}, \quad (4.13)$$

kde  $\mathbf{G}_{n+k} = \mathbf{G} \left( \dot{\mathbf{y}}_{n+k}^{(i)}, \mathbf{y}_{n+k}^{(i)}, t_{n+k} \right)$  a

$\mathbf{J} = \left( \frac{1}{h \beta_0} \mathbf{J}^2 + \mathbf{J}^1 \right)$  je Jacobiova matice ve tvaru

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h \beta_0} \frac{\partial^1 \mathbf{G}}{\partial^1 \dot{\mathbf{y}}_{n+k}} + \frac{\partial^1 \mathbf{G}}{\partial^1 \mathbf{y}_{n+k}} & \cdots & \frac{1}{h \beta_0} \frac{\partial^1 \mathbf{G}}{\partial^m \dot{\mathbf{y}}_{n+k}} + \frac{\partial^1 \mathbf{G}}{\partial^m \mathbf{y}_{n+k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{h \beta_0} \frac{\partial^m \mathbf{G}}{\partial^1 \dot{\mathbf{y}}_{n+k}} + \frac{\partial^m \mathbf{G}}{\partial^1 \mathbf{y}_{n+k}} & \cdots & \frac{1}{h \beta_0} \frac{\partial^m \mathbf{G}}{\partial^m \dot{\mathbf{y}}_{n+k}} + \frac{\partial^m \mathbf{G}}{\partial^m \mathbf{y}_{n+k}} \end{pmatrix} \left( \dot{\mathbf{y}}_{n+k}^{(i)}, \mathbf{y}_{n+k}^{(i)}, t_{n+k} \right) \quad (4.14)$$

Vzhledem k dalším výpočtům označme ve vztahu (4.13) změnu vektoru  $\Delta \mathbf{y}_{n+k}$  novou proměnnou  $\mathbf{z}_{n+k}$ . Touto úpravou nabude vztah (4.13) nového tvaru

$$\mathbf{z}_{n+k} = -\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{G}_{n+k}. \quad (4.15)$$

Podobná situace ve stavbě Jacobiho matice bude i v případě použití metod ABAM či RKFIXED.

Korekci  $i$ -té iterace  $y_{n+k}^{(i)}$  hodnotou  $\Delta y_{n+k}$  provádíme tak dlouho, dokud není splněna uživatel daná podmínka chybové tolerance korektoru

$$\|\Delta y_{n+k}\| \leq error .$$

Z výše uvedeného výpočtu vychází jistá nepříjemnost při použití Newtonovy metody – nutný výpočet Jacobiho matice  $J$  v každé iteraci. To značným způsobem prodlužuje dobu výpočtu, neboť tento výpočet je zvláště pro rozsáhlé soustavy rovnic velmi náročný. Proto se v praxi velmi často používá tzv. modifikovaná Newtonova metoda. Při použití této metody je Jacobiho matice počítána pouze v některých iteracích. Konvergence metody může být sice pomalejší, toto je ovšem zcela vyváženo rychlejším výpočtem. V prostředí MSC.ADAMS slouží k tomuto účelu parametr PATTERN, který specifikuje, ve kterých iteracích má dojít k výpočtu nové hodnoty Jacobiho matice. Tato skutečnost umožňuje další uživatelův zásah do výpočtu. Zabývejme se v následující kapitole řešitelností vztahu (4.15).

## 5. Problematika Jacobiho matice

V této kapitole se budeme zabývat podrobněji vlastnostmi Jacobiho matice a jejich možným ovlivněním během tvorby modelu. Uvedeme, jakým způsobem ovlivňují vlastnosti Jacobiho matice celkovou stabilitu výpočtu. Vzhledem k tomu, že kvůli rozměrům matice jsou obecné úvahy velmi náročné, zaměříme se na tři konkrétní příklady, které byly vybrány na základě skutečných úloh. Pokusíme se na daných příkladech ukázat, jak lze vhodnou formulací úlohy ovlivnit stabilitu výpočtu.

### 5.1 Podmíněnost Jacobiho matice

Dříve, než se začneme zabývat myšlenkou správné stavby Jacobiho matice, je nutné specifikovat velmi důležitou vlastnost matice – podmíněnost.

Pro naše další úvahy bude hrát nejdůležitější roli vztah (4.15). Jedná se o soustavu lineárních rovnic, která je řešena pro neznámou velikost korekce  $\Delta y_k$ . Z podmínky řešitelnosti této soustavy plyne, že matice  $J$  nesmí být singulární. Toto je do jisté míry limitující podmínka, neboť udává, že Jacobiho matice nemůže nabývat libovolné podoby.

Druhá limitující podmínka vychází z případu, kdy matice  $J$  nebude sice singulární, ale její vlastnosti se budou vlastnostem singulární matice velmi přibližovat. V této souvislosti mluvíme o tzv. podmíněnosti matice  $J$ . Ta závažným způsobem ovlivňuje kvalitu řešení soustavy (4.15). Specifikujme nyní tento pojem blíže.

Vyjděme z předpokladu, že určitá změna hodnoty vektoru pravé strany  $\Delta G_{n+k}$  vyvolá změnu  $\Delta z_{n+k}$  řešení soustavy (4.15). Tento předpoklad zapišme následovně:

$$J \cdot \Delta z_{n+k} = \Delta G_{n+k}, \text{ nebo-li } J \cdot (z_{n+k} + \Delta z_{n+k}) = G_{n+k} + \Delta G_{n+k}.$$

Zaměříme se nyní na normy matice  $J$  a jednotlivých vektorů. Jacobiho matici můžeme obecně zapsat ve tvaru  $J = (j_{ij})$ , kde  $j_{ij}$  jsou prvky matice  $J$ . Rozměr této matice je  $(s \times s)$ , kde  $s$  je počet rovnic pro danou úlohu. Pro účely této kapitoly zvolme pro vektory tzv. euklidovskou normu a pro matice spektrální normu. Obě jsou dle [9] definovány následovně:

- euklidovská norma vektoru  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  je dána:  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ,

- spektrální norma matice  $A$  s prvky  $a_{ij}$  je dána  $\|A\| = \sqrt{\rho(B)}$ , (5.1)

kde  $\rho(B)$  je spektrální poloměr matice  $B = A^T A$ , který je dán vztahem  $\rho(B) = \max |\lambda_i|$  pro  $i = 1, \dots, s$ , kde  $\lambda_i$  jsou vlastní čísla matice  $B$ .

Použitím pravidla trojúhelníkové nerovnosti musí jistě platit následující vztahy:

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta \mathbf{z}_{n+k} &= \mathbf{J}^{-1} \Delta \mathbf{G}_{n+k} \Rightarrow \|\Delta \mathbf{z}_{n+k}\| \leq \|\mathbf{J}^{-1}\| \cdot \|\Delta \mathbf{G}_{n+k}\|, \\ \text{b) } \mathbf{J} \cdot \mathbf{z}_{n+k} &= \mathbf{G}_{n+k} \Rightarrow \|\mathbf{J}\| \cdot \|\mathbf{z}_{n+k}\| \geq \|\mathbf{G}_{n+k}\|. \end{aligned}$$

Jejich úpravou docílíme nerovnosti

$$\frac{\|\Delta \mathbf{z}_{n+k}\|}{\|\mathbf{z}_{n+k}\|} \leq \kappa \cdot \frac{\|\Delta \mathbf{G}_{n+k}\|}{\|\mathbf{G}_{n+k}\|}, \quad (5.2)$$

$$\text{kde } \kappa = \|\mathbf{J}\| \cdot \|\mathbf{J}^{-1}\| \quad (\kappa \geq 1). \quad (5.3)$$

Vztah (5.3) udává vazbu mezi relativní změnou hodnoty pravé strany soustavy rovnic  $\frac{\|\Delta \mathbf{G}_{n+k}\|}{\|\mathbf{G}_{n+k}\|}$  a odpovídající relativní změnou výsledku řešení  $\frac{\|\Delta \mathbf{z}_{n+k}\|}{\|\mathbf{z}_{n+k}\|}$ . Číslo  $\kappa$  je tzv. číslem podmíněnosti matice  $\mathbf{J}$ . V literatuře se také používá pojem kondiční číslo. Toto číslo udává, jak citlivě bude reagovat řešení soustavy (4.15) na určitou změnu vektoru pravé strany. Čím větší číslo podmíněnosti matice  $\mathbf{J}$  bude, tím větší citlivost můžeme očekávat. V ideálním případě bude číslo  $\kappa = 1$ .

Zaměříme se dále na možnost ovlivnění kondičního čísla matice. Pro tyto úvahy se však musíme omezit pouze na případ diagonální matice  $\mathbf{J}$ .

Pro potřeby dalších úvah rozepíšeme výraz (5.3) použitím vztahu (5.1):

$$\kappa = \|\mathbf{J}\| \cdot \|\mathbf{J}^{-1}\| = \sqrt{\rho(\mathbf{J}^T \mathbf{J})} \cdot \sqrt{\rho((\mathbf{J}^{-1})^T \mathbf{J}^{-1})}.$$

V případě diagonální matice bude součin matic  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  roven matici  $\mathbf{K}$ , která bude opět diagonální a její prvky budou nabývat hodnot  $(j_{ii})^2$ . Dále vyjděme z poznatku, že vlastní čísla diagonální matice jsou rovna přímo jejím diagonálním prvkům. Proto můžeme pro spektrální poloměr matice  $\mathbf{K}$  psát:

$$\rho(\mathbf{K}) = \max (j_{ii})^2 \text{ pro } i = 1, \dots, s.$$

$$\text{Spektrální norma matice } \mathbf{J} \text{ je proto rovna } \|\mathbf{J}\| = \max j_{ii} \text{ pro } i = 1, \dots, s. \quad (5.4)$$

Podobně můžeme nalézt i spektrální normu matice  $\mathbf{J}^{-1}$ . Inverzní matice k matici  $\mathbf{J}$  musí být opět diagonální s prvky  $\frac{1}{j_{ii}}$  na hlavní diagonále. Proto platí:

$$\|\mathbf{J}^{-1}\| = \sqrt{\rho((\mathbf{J}^{-1})^T \mathbf{J}^{-1})} = \sqrt{\max \left( \frac{1}{j_{ii}} \right)^2} = \max \frac{1}{j_{ii}} = \frac{1}{\min j_{ii}} \text{ pro } i = 1, \dots, s. \quad (5.5)$$

Po dosazení vztahů (5.4) a (5.5) do (5.3) získáme důležitý vztah, který udává velikost kondičního čísla diagonální matice.

$$\kappa = \frac{\max j_{ii}}{\min j_{ii}} \text{ pro } i = 1, \dots, s. \quad (5.6)$$

Ze vztahu (5.6) plyne, že kondiční číslo diagonální matice  $J$  je dáno podílem největšího a nejmenšího čísla na hlavní diagonále matice. Tohoto závěru budeme užívat v dalším textu při posuzování vlastností Jacobiho matic pro konkrétní případy.

## 5.2 Podoba Jacobiho matice

Podívejme se nyní podrobněji na mechanismus tvorby Jacobiho matice  $J$ . Jak již bylo uvedeno, může její podmíněnost do značné míry ovlivnit průběh řešení a kvalitu výsledku. V kap. 4.2.2 jsme uvedli, že pro většinu použitých výpočetních metod je podoba matice dána pro  $i+1$  iteraci vztahem

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{h\beta_0} \frac{\partial^1 G}{\partial^1 \dot{y}_{n+k}} + \frac{\partial^1 G}{\partial^1 y_{n+k}} & \dots & \frac{1}{h\beta_0} \frac{\partial^1 G}{\partial^m \dot{y}_{n+k}} + \frac{\partial^1 G}{\partial^m y_{n+k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{h\beta_0} \frac{\partial^m G}{\partial^1 \dot{y}_{n+k}} + \frac{\partial^m G}{\partial^1 y_{n+k}} & \dots & \frac{1}{h\beta_0} \frac{\partial^m G}{\partial^m \dot{y}_{n+k}} + \frac{\partial^m G}{\partial^m y_{n+k}} \end{pmatrix} \left( \dot{y}_{n+k}^{(i)}, y_{n+k}^{(i)}, t_{n+k} \right)$$

Jedná se o čtvercovou matici, jejíž rozměr je dán počtem rovnic (počtem neznámých). Jednotlivé řádky matice reprezentují dané rovnice, ve sloupcích jsou zastoupeny příslušné neznámé veličiny. Hodnoty v jednotlivých řádcích a sloupcích jsou dány výrazem

$$\frac{1}{h\beta_0} \frac{\partial^u G}{\partial^v \dot{y}_{n+k}} + \frac{\partial^u G}{\partial^v y_{n+k}},$$

kde  $u$  je číslo řádku a  $v$  číslo sloupce.

Tento výraz znamená, že obsahuje-li  $u$ -tá rovnice ve své formulaci  $v$ -tou neznámou, bude se na  $u$ -tém řádku na pozici  $v$ -tého sloupce vyskytovat derivace této rovnice podle dané neznámé. V případě, že se v  $u$ -té rovnici bude vyskytovat  $v$ -tá neznámá v první derivaci, bude v  $u$ -tém řádku na pozici  $v$ -tého sloupce hodnota derivace dané rovnice podle derivované neznámé násobená převrácenou hodnotou součinu integračního kroku a konstanty  $\beta_0$ .

## 5.3 Příklad tvorby Jacobiho matice

Mechanismus tvorby Jacobiho matice ukažme na modelu dvojitého kyvadla z přílohy P1. Jak již bylo uvedeno v kap. 4.1.2.1, je v prostředí MSC.ADAMS daný příklad

mechanismu popsán 51 rovnicí, tzn., že rozměr Jacobiho matice je  $51 \times 51$ . Nyní pro informaci uveďme výpis neznámých s jejich příslušnými pořadovými čísly:

Tab. 5.1 Výpis neznámých veličin pro případ dvojitého kyvadla.

| č. | ozn.                  | popis                                                   | č. | ozn.                  | popis                                                   | č. | ozn.      | popis                                     |
|----|-----------------------|---------------------------------------------------------|----|-----------------------|---------------------------------------------------------|----|-----------|-------------------------------------------|
| 1  | $v_{2x}$              | rychlost tělesa 2 ve směru osy $x$ GSS                  | 18 | $v_{3z}$              | rychlost tělesa 3 ve směru osy $z$ GSS                  | 35 | $M_{R1x}$ | moment ve vazbě v bodě $A$ v daném směru  |
| 2  | $v_{2y}$              | rychlost tělesa 2 ve směru osy $y$ GSS                  | 19 | $\omega_{3\psi}$      | úhlová rychlost tělesa 3 ve směru vektoru $\psi_3$      | 36 | $R_{2x}$  | síla ve vazbě v bodě $B$ ve směru $x$ GSS |
| 3  | $v_{2z}$              | rychlost tělesa 2 ve směru osy $z$ GSS                  | 20 | $\omega_{3\varphi}$   | úhlová rychlost tělesa 3 ve směru vektoru $\varphi_3$   | 37 | $R_{2y}$  | síla ve vazbě v bodě $B$ ve směru $y$ GSS |
| 4  | $\omega_{2\psi}$      | úhlová rychlost tělesa 2 ve směru vektoru $\psi_2$      | 21 | $\omega_{3\vartheta}$ | úhlová rychlost tělesa 3 ve směru vektoru $\vartheta_3$ | 38 | $R_{2z}$  | síla ve vazbě v bodě $B$ ve směru $z$ GSS |
| 5  | $\omega_{2\varphi}$   | úhlová rychlost tělesa 2 ve směru vektoru $\varphi_2$   | 22 | $p_{3\psi}$           | impulsmoment tělesa 3 kolem vektoru $\psi_3$            | 39 | $M_{R2y}$ | moment ve vazbě v bodě $B$ v daném směru  |
| 6  | $\omega_{2\vartheta}$ | úhlová rychlost tělesa 2 ve směru vektoru $\vartheta_2$ | 23 | $p_{3\varphi}$        | impulsmoment tělesa 3 kolem vektoru $\varphi_3$         | 40 | $M_{R2x}$ | moment ve vazbě v bodě $B$ v daném směru  |
| 7  | $p_{2\psi}$           | impulsmoment tělesa 2 kolem vektoru $\psi_2$            | 24 | $p_{3\vartheta}$      | impulsmoment tělesa 3 kolem vektoru $\vartheta_3$       | 41 | $l_{20}$  | síla $F$ – „délka“                        |
| 8  | $p_{2\varphi}$        | impulsmoment tělesa 2 kolem vektoru $\varphi_2$         | 25 | $x_3$                 | poloha tělesa 3 ve směru osy $x$ GSS                    | 42 | $F$       | síla $F$ – velikost                       |
| 9  | $p_{2\vartheta}$      | impulsmoment tělesa 2 kolem vektoru $\vartheta_2$       | 26 | $y_3$                 | poloha tělesa 3 ve směru osy $y$ GSS                    | 43 | $F_x$     | síla $F$ ve směru osy $x$ GSS             |
| 10 | $x_2$                 | poloha tělesa 2 ve směru osy $x$ GSS                    | 27 | $z_3$                 | poloha tělesa 3 ve směru osy $z$ GSS                    | 44 | $F_y$     | síla $F$ ve směru osy $y$ GSS             |
| 11 | $y_2$                 | poloha tělesa 2 ve směru osy $y$ GSS                    | 28 | $\psi_3$              | natočení tělesa 3 kolem vektoru $\psi_3$                | 45 | $F_z$     | síla $F$ ve směru osy $z$ GSS             |
| 12 | $z_2$                 | poloha tělesa 2 ve směru osy $z$ GSS                    | 29 | $\varphi_3$           | natočení tělesa 3 kolem vektoru $\varphi_3$             | 46 | $l_{30}$  | síla $S$ – „délka“                        |
| 13 | $\psi_2$              | natočení tělesa 2 kolem vektoru $\psi_2$                | 30 | $\vartheta_3$         | natočení tělesa 3 kolem vektoru $\vartheta_3$           | 47 | $S$       | síla $S$ – velikost                       |
| 14 | $\varphi_2$           | natočení tělesa 2 kolem vektoru $\varphi_2$             | 31 | $R_{1x}$              | síla ve vazbě v $A$ ve směru $x$ GSS                    | 48 | $S_x$     | síla $S$ ve směru osy $x$ GSS             |
| 15 | $\vartheta_2$         | natočení tělesa 2 kolem vektoru $\vartheta_2$           | 32 | $R_{1y}$              | síla ve vazbě v $A$ ve směru $y$ GSS                    | 49 | $S_y$     | síla $S$ ve směru osy $y$ GSS             |
| 16 | $v_{3x}$              | rychlost tělesa 3 ve směru osy $x$ GSS                  | 33 | $R_{1z}$              | síla ve vazbě v $A$ ve směru $z$ GSS                    | 50 | $S_z$     | síla $S$ ve směru osy $z$ GSS             |
| 17 | $v_{3y}$              | rychlost tělesa 3 ve směru osy $y$ GSS                  | 34 | $M_{R1y}$             | moment v bodě $A$ v daném směru                         | 51 | $M$       | moment $M$ – velikost                     |

Důležitou informací je také pořadí, ve kterém MSC.ADAMS rovnice sestavuje. To má přímý důsledek na strukturu Jacobiho matice. Vzhledem k tomu, že pro názornost je v příloze P1 číslování rovnic odlišné od postupu jejich řazení v prostředí MSC.ADAMS, uveďme tento v následující tabulce.

Tab. 5.2 Výpis rovnic pro případ dvojitého kyvadla.

| nové č. | rovnice                                           | pův. č. | nové č. | rovnice                                           | pův. č. | nové č. | rovnice                                        | pův. č. |
|---------|---------------------------------------------------|---------|---------|---------------------------------------------------|---------|---------|------------------------------------------------|---------|
| 1       | silová – těleso 2<br>směr $x$ GSS                 | 1       | 18      | silová – těleso 3<br>směr $z$ GSS                 | 18      | 35      | kin. – těleso 2,<br>rot. kolem<br>daného směru | 35      |
| 2       | silová – těleso 2<br>směr $y$ GSS                 | 2       | 19      | momentová –<br>těleso 3, směr $\psi_3$            | 22      | 36      | kin. – těleso 3,<br>směr $x$ GSS               | 36      |
| 3       | silová – těleso 2<br>směr $z$ GSS                 | 3       | 20      | momentová –<br>těleso 3, směr $\varphi_3$         | 23      | 37      | kin. – těleso 3,<br>směr $y$ GSS               | 37      |
| 4       | momentová –<br>těleso 2, směr $\psi_2$            | 7       | 21      | momentová –<br>těleso 3, směr $\vartheta_3$       | 24      | 38      | kin. – těleso 3,<br>směr $y$ GSS               | 38      |
| 5       | momentová –<br>těleso 2, směr $\varphi_2$         | 8       | 22      | impulsmoment –<br>těleso 3, směr $\psi_3$         | 28      | 39      | kin. – těleso 3,<br>rot. kolem<br>daného směru | 39      |
| 6       | momentová –<br>těleso 2, směr $\vartheta_2$       | 9       | 23      | impulsmoment –<br>těleso 3, směr $\varphi_3$      | 29      | 40      | kin. – těleso 3,<br>rot. kolem<br>daného směru | 40      |
| 7       | impulsmoment –<br>těleso 2, směr $\psi_2$         | 13      | 24      | impulsmoment –<br>těleso 3, směr $\vartheta_3$    | 30      | 41      | síla $F$ - „délka“                             | 41      |
| 8       | impulsmoment –<br>těleso 2, směr $\varphi_2$      | 14      | 25      | rychlost tělesa 3 –<br>směr $x$ GSS               | 19      | 42      | síla $F$ - velikost                            | 42      |
| 9       | impulsmoment –<br>těleso 2, směr $\vartheta_2$    | 15      | 26      | rychlost tělesa 3 –<br>směr $y$ GSS               | 20      | 43      | síla $F$ - složka<br>$x$ GSS                   | 43      |
| 10      | rychlost tělesa 2 –<br>směr $x$ GSS               | 4       | 27      | rychlost tělesa 3 –<br>směr $z$ GSS               | 21      | 44      | síla $F$ - složka<br>$y$ GSS                   | 44      |
| 11      | rychlost tělesa 2 –<br>směr $y$ GSS               | 5       | 28      | úhlová rychlost –<br>těleso 3, směr $\psi_3$      | 25      | 45      | síla $F$ - složka<br>$z$ GSS                   | 45      |
| 12      | rychlost tělesa 2 –<br>směr $z$ GSS               | 6       | 29      | úhlová rychlost –<br>těleso 3, směr $\varphi_3$   | 26      | 46      | síla $S$ - vol.<br>délka pružiny               | 46      |
| 13      | úhlová rychlost –<br>těleso 2, směr $\psi_2$      | 10      | 30      | úhlová rychlost –<br>těleso 3, směr $\vartheta_3$ | 27      | 47      | síla $S$ - velikost                            | 47      |
| 14      | úhlová rychlost –<br>těleso 2, směr $\varphi_2$   | 11      | 31      | kin. – těleso 2,<br>směr $x$ GSS                  | 31      | 48      | síla $S$ - složka $x$<br>GSS                   | 48      |
| 15      | úhlová rychlost –<br>těleso 2, směr $\vartheta_2$ | 12      | 32      | kin. – těleso 2,<br>směr $y$ GSS                  | 32      | 49      | síla $S$ - složka $y$<br>GSS                   | 49      |
| 16      | silová – těleso 3<br>směr $x$ GSS                 | 16      | 33      | kin. – těleso 2,<br>směr $y$ GSS                  | 33      | 50      | síla $S$ - složka $z$<br>GSS                   | 50      |
| 17      | silová – těleso 3<br>směr $y$ GSS                 | 17      | 34      | kin. – těleso 2, rot.<br>kolem daného<br>směru    | 34      | 51      | moment $M$ -<br>velikost                       | 51      |



Pozn.: V tabulce 5.2 značí: nové č. = číslování použité programem MSC.ADAMS,  
pův. č. = číslování použité v příloze 1.

Nyní můžeme postupně přistoupit k samotnému výpočtu jednotlivých prvků matice  $J$ . Derivujeme příslušné rovnice podle jednotlivých neznámých. Vypisovat budeme jen nenulové prvky.

**- rovnice 1:**

$$1.a) j_{1,1} = \frac{1}{h\beta_0} m_2$$

$$1.b) j_{1,31} = I$$

$$1.c) j_{1,36} = -I$$

$$1.d) j_{1,43} = -I$$

**- rovnice 2:**

$$2.a) j_{2,2} = \frac{1}{h\beta_0} m_2$$

$$2.b) j_{2,32} = I$$

$$2.c) j_{2,37} = -I$$

$$2.d) j_{2,44} = -I$$

**- rovnice 3:**

$$3.a) j_{3,3} = \frac{1}{h\beta_0} m_2$$

$$3.b) j_{3,33} = I$$

$$3.c) j_{3,38} = -I$$

$$3.d) j_{3,45} = -I$$

**- rovnice 4:**

$$4.a) j_{4,4} = I_{2xx}$$

$$4.b) j_{4,7} = -I$$

**- rovnice 5:**

$$5.a) j_{5,5} = I_{2zz}$$

$$5.b) j_{5,8} = -I$$

**- rovnice 6:**

$$6.a) j_{6,6} = I_{2yy}$$

$$6.b) j_{6,9} = -I$$

Stejným způsobem bychom postupovali pro všechny rovnice. Dosadíme-li do jednotlivých prvků hodnoty neznámých veličin, které jsme získali v předchozí iteraci, dostaneme konkrétní číselnou podobu Jacobiho matice pro daný čas a danou iteraci.

Již jsme se ze zmínili o tom, že v rámci prostředí MSC.ADAMS je možné v modulu Solver nastavit ukládání výpisu o průběhu výpočtu do textového souboru. Velmi užitečnou funkcí v témže souboru je také ukládání výpisů Jacobiho matice pro daný čas a iteraci. Uživatel tak má jistou možnost zpětně zkontrolovat průběh výpočtu (pokud to rozměry Jacobiho matice budou umožňovat). Nevýhodou tohoto zápisu je jeho textová podoba. Ta je pro uživatele velmi nepříjemná, neboť není přehledná. V této formě jsou nejprve vypsány názvy řádků a sloupců matice a k nim jsou stanovena čísla jednotlivých prvků. V následujícím výpisu jsou poté těmto pořadovým číslům přiřazeny spočtené hodnoty.

Příklad Jacobiho matice dvojitého kyvadla z přílohy P1 je uveden v příloze P4. V příloze P5 je ukázka výpisu Jacobiho matice v textové formě pro týž příklad.

## **5.4 Analýza dat v Jacobiho matici**

Podívejme se nyní blíže na rozložení a velikosti jednotlivých prvků Jacobiho matice. Zaměřme přitom svoji pozornost na konkrétní příklad dvojitého kyvadla z přílohy P1.

Již bylo výše uvedeno, že matematickým popisem mechanického systému získáme v obecném případě soustavu diferenciálních (pohybových) a algebraických (vazebních) rovnic. Vzhledem k tomu, že Jacobiho matici spočteme derivacemi těchto rovnic dle

předpisu (4.14), rozdělme tuto matici na oblast pohybových rovnic a oblast vazebních rovnic. V dalším textu se věnujme oběma oblastem odděleně.

#### 5.4.1 Jacobiho matice – oblast pohybových rovnic

Z rozložení rovnic uvedeného v tab. 5.2 je zřejmé, že prvních 15. $N$  řádků Jacobiho matice ( $N$  je počet těles v systému) je tvořeno pohybovými rovnicemi. Zaměříme se nejprve na hlavní diagonálu této části matice příslušnou prvnímu tělesu. Částečný výpis prvků této oblasti je uveden v následující tabulce.

Tab 5.3 Podoba Jacobiho matice.

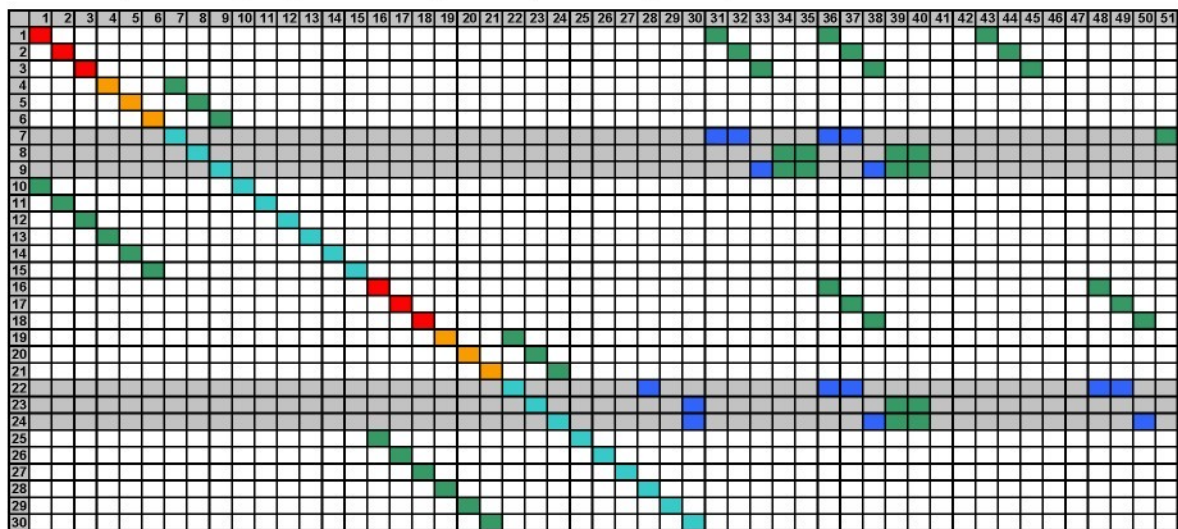
| č. rovnice \ č. neznámé | 1                       | 2                       | 3                       | 4         | 5         | 6         | 7                    | 8                    | 9                    | 10                   | ... |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------|-----------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----|
| 1                       | $\frac{I}{h\beta_0}m_2$ | 0                       | 0                       | 0         | 0         | 0         | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | ... |
| 2                       | 0                       | $\frac{I}{h\beta_0}m_2$ | 0                       | 0         | 0         | 0         | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | ... |
| 3                       | 0                       | 0                       | $\frac{I}{h\beta_0}m_2$ | 0         | 0         | 0         | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | ... |
| 4                       | 0                       | 0                       | 0                       | $I_{2xx}$ | 0         | 0         | -1                   | 0                    | 0                    | 0                    | ... |
| 5                       | 0                       | 0                       | 0                       | 0         | $I_{2zz}$ | 0         | 0                    | -1                   | 0                    | 0                    | ... |
| 6                       | 0                       | 0                       | 0                       | 0         | 0         | $I_{2zz}$ | 0                    | 0                    | -1                   | 0                    | ... |
| 7                       | 0                       | 0                       | 0                       | 0         | 0         | 0         | $\frac{I}{h\beta_0}$ | 0                    | 0                    | 0                    | ... |
| 8                       | 0                       | 0                       | 0                       | 0         | 0         | 0         | 0                    | $\frac{I}{h\beta_0}$ | 0                    | 0                    | ... |
| 9                       | 0                       | 0                       | 0                       | 0         | 0         | 0         | 0                    | 0                    | $\frac{I}{h\beta_0}$ | 0                    | ... |
| 10                      | -1                      | 0                       | 0                       | 0         | 0         | 0         | 0                    | 0                    | 0                    | $\frac{I}{h\beta_0}$ | ... |
| ⋮                       | ⋮                       | ⋮                       | ⋮                       | ⋮         | ⋮         | ⋮         | ⋮                    | ⋮                    | ⋮                    | ⋮                    |     |

Z definice Jacobiovy matice plyne, že jsou diagonální prvky pohybové části Jacobiho matice rovny buď zlomku  $\frac{I}{h\beta_0}$  (pro 7. až 15. rovnici), nebo jeho součinu s hmotností (pro 1. – 3. rovnici) a momenty setrvačnosti (pro 4. – 6. rovnici). Koeficient  $\beta_0$  závisí na řádu použité integrační metody. Pro první řád je  $\beta_0 = I$ . Vzhledem k tomu, že vůči integračnímu kroku je tento koeficient i pro vyšší řád mnohem větší, nebudeme jej ve

jmenovateli zlomku  $\frac{I}{h\beta_0}$  pro zjednodušení uvažovat. Z charakteru jednotlivých prvků diagonály vyplývá, že pro hmotnější a rozměrnější tělesa (velký moment setrvačnosti) je jejich hodnota o mnoho větší než 1. To je dáno tím, že integrační krok bývá metodou obvykle volen v řádu  $10^{-1}$  až  $10^{-3}$ .

Soustředíme se nyní na hodnoty mimodiagonálních prvků. Derivací daných rovnic dle příslušných proměnných budou v případě 1. až 6. rovnice vždy nabývat hodnoty 0 nebo 1 (event. -1). V případě impulsmomentových rovnic (rovnice 7, 8, 9) už bude situace jiná. Hodnoty nenulových derivací na daných řádcích budou v některých případech menší než 1 (velikosti goniometrických funkcí), zbylé hodnoty však budou mít velikost danou rozměry modelu. Např. derivace 9-té rovnice podle reakční síly  $R_{I_z}$  je  $\frac{I_2}{2}$ . Podobná situace je i v případě tělesa 3.

Na následujícím obrázku 5.1 je uvedena schématická mapa oblasti pohybových rovnic Jacobiovy matice pro příklad dvojitého kyvadla z přílohy P1.



Obr. 5.1 Schématická mapa oblasti pohybových rovnic Jacobiovy matice.

Označení: červená – prvky úměrné převrácené velikosti kroku a hmotnosti,  
 oranžová – prvky úměrné momentům setrvačnosti,  
 tyrkysová – prvky úměrné převrácené hodnotě kroku,  
 modrá – prvky úměrné rozměrům modelu,  
 zelená – prvky rovné 1 nebo -1.

V tabulce jsou zvýrazněny řádky, které mohou v závislosti na rozměrech modelu obsahovat mimodiagonální prvky vyššího řádu.

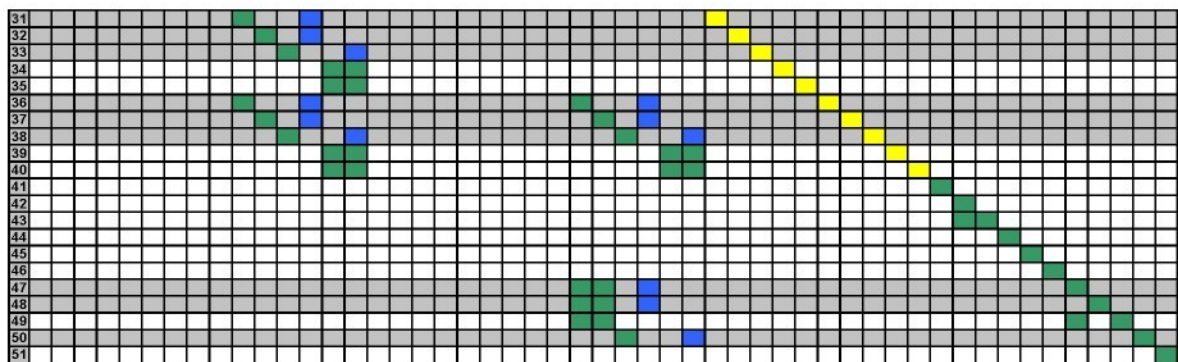
### 5.4.2 Vazební oblast Jacobiho matice – oblast algebraických rovnic

Vzhledem k tomu, že se zbylá oblast Jacobiho matice týká algebraických rovnic vazeb, silových účinků a uživatelských proměnných, bude situace s obsazením prvků v této části matice zcela odlišná. Zejména se tato skutečnost projeví na hlavní diagonále matice.

S tabulkami 5.1 a 5.2 pro příklad dvojitého kyvadla porovnejme, podle kterých neznámých derivujeme dané rovnice na hlavní diagonále. Např. rovnice 31, tj. kinematická rovnice pohybu tělesa 2 ve směru osy  $x$  globálního souřadného systému je ve sloupci 31 derivována podle neznámé reakce ve vazbě v bodu  $A$  ve směru  $x$  globálního souřadného systému. Jelikož se ovšem jedná o kinematickou rovnici, je derivace nulová. Podobná situace je i s ostatními kinematickými vazebními rovnicemi. Z tohoto poznatku plyne, že v případě rovnic kinematických vazeb (rce 31 až 40) bude hlavní diagonála vždy obsahovat nulové členy.

V případě rovnic definujících silové účinky (rce 41 až 51) bude situace jiná. Zde na pozicích hlavní diagonály dochází k derivacím podle proměnných, které se v rovnicích vyskytují (klidová délka, hodnoty sil). Proto budou na hlavní diagonále čísla 1. Následující obrázek schematicky ukazuje rozložení členů vazební části Jacobiho matice.

Na následujícím obrázku 5.2 je uvedena schematická mapa vazební části Jacobiho matice pro příklad dvojitého kyvadla.



Obr. 5.2 Schematická mapa oblasti vazebních rovnic Jacobiho matice.

Barevné značení: stejné jako výše, žlutá – nulové prvky na hlavní diagonále.

V tabulce jsou opět zvýrazněny řádky, které mohou pravděpodobně obsahovat hodnoty vyššího řádu (v závislosti na rozměrech modelu). Např. derivace rovnice 38 (tj. rovnice definující polohu tělesa 3 ve směru osy  $z$  globálního souřadného systému) podle proměnné 30 (tj. úhel natočení tělesa 3 kolem vektoru  $\mathcal{B}_3$ ) je rovna  $-\frac{I_3}{2}$ .

Stanovení podmíněnosti konkrétní matice na základě znalosti konfigurace modelu je velmi obtížná záležitost. Je nutné si uvědomit skutečnost (jak je vidět z předchozího příkladu), že Jacobiho matice může dosahovat značných rozměrů. V kapitole 4.1.2.1 jsme uvedli, že pohybové rovnice každého tělesa jsou po redukci na první řád tvořeny 15-ti

vztahy. K tomu je třeba připočítat rovnice vazební, dále rovnice silových účinků, popis uživatelsky definovaných proměnných, atd. Např. středně složitý systém s 25 tělesy je popsán cca 800 rovnicemi a Jacobiho matice obsahuje cca 7500 nenulových prvků.

Ukažme si proto v následující kapitole příklad tvorby Jacobiho matice pro konkrétní úlohy.

## **5.5. Příklady aplikace**

Cílem této kapitoly bude ukázat, jakým způsobem je možné ovlivnit podmíněnost Jacobiho matice pro konkrétní případy.

Již v úvodu bylo zmíněno, že podnětem pro sepsání této práce se stala zkušenost s velmi nestabilním chováním simulačních výpočtů během analýzy tažného zařízení osobního automobilu (viz [13] a [14]). Přirozenou snahou proto bylo tyto problémy analyzovat a pokusit se jejich příčiny co nejvíce potlačit.

V následujících kapitolách si autor klade za cíl upozornit na problémy, které během simulací musel řešit a na základě výše uvedených teoretických poznatků popsat možný způsob nápravy. V dalším textu proto nebude řešena problematika samotné analýzy tažného zařízení, která by přesáhla rámec této disertační práce.

### **5.5.1 Rozdílná hmotnost, typ použité vazby**

V této kapitole se zaměříme na jednoduchou úlohu, která by měla poskytnout názorný pohled na charakter Jacobiho matice. Tato úloha je odvozena z mnohem složitějšího modelu automobilu na vozovce v prostředí MSC.ADAMS/View. Vozovka byla modelována jako tuhé těleso (kvádr) o šířce 4 m, výšce 0.01 m a délce 200 m. Aby měla vozovka během simulačního výpočtu stále stejnou polohu, byla připevněna pevnou vazbou typu FIXED k rámu (GROUND).

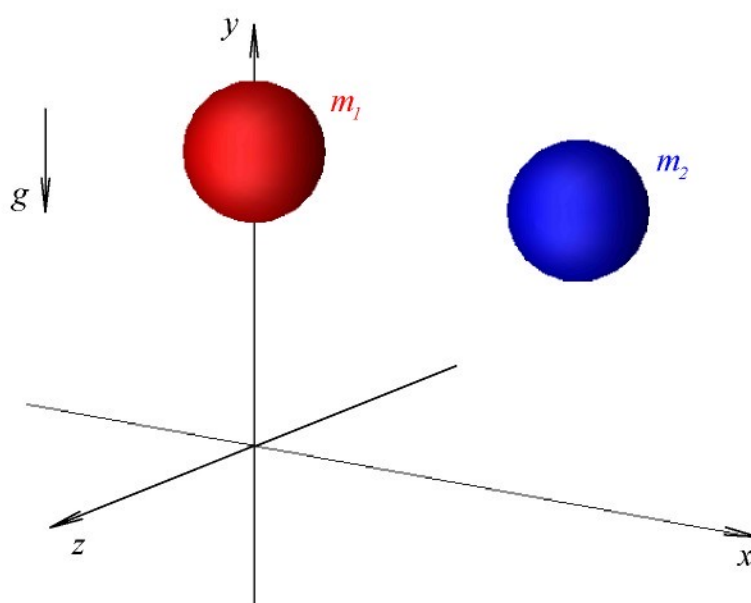
Toto řešení však může pro běžného uživatele představovat problém, který se projeví až při simulaci. Důvodem je skutečnost, že prostředí MSC.ADAMS automaticky při tvorbě tělesa předpokládá, že materiálem je ocel. Na základě její hustoty a objemu vytvořeného tělesa je bez nutného zásahu uživatele spočtena jeho hmotnost. To ovšem v případě kvádrů použitého pro definici vozovky představovalo velké obtíže, neboť jeho automaticky vypočtená hmotnost byla příliš velká vzhledem k ostatním částem automobilu. To způsobovalo během výpočtu značné problémy.

V případě zmíněného modelu vozovky je řešení tohoto snadné. Vzhledem k tomu, že vozovka má v modelu funkci pouze orientační (slouží k identifikaci polohy povrchu vozovky, která je ve skutečnosti zadána datovým souborem), může uživatel svým zásahem kdykoliv snížit její hmotnost.



Otázkou ovšem zůstává, jaký postup by měl uživatel zvolit v případě, že se bude jednat o těleso, pro které tento zásah nebude možné z hlediska principu úlohy provést. Na následujícím příkladě se pokusíme tyto problémy analyzovat. Při popisu úlohy využijeme poznatky, které jsme získali v předchozí kapitole.

Uvažujme dvě jednoduchá tělesa o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ . Tato tělesa jsou umístěna volně v prostoru ve stejné výšce  $H$  nad rovinou  $xz$  globálního souřadného systému a působí na ně gravitační zrychlení v záporném směru osy  $y$ . Předpokládejme, že těleso 1 je mnohem hmotnější než těleso 2. Situaci znázorňuje následující obrázek 5.3 z prostředí MSC.ADAMS/View.



Obr. 5.3 Dvě tělesa s mnohem rozdílnými hmotnostmi v prostředí MSC.ADAMS.

Budeme-li simulovat chování tohoto modelu, začnou se obě koule pohybovat proti směru osy  $y$  se zrychlením  $g$ .

Po matematické stránce je model v prostředí MSC.ADAMS popsán 30 rovnicemi (15 pro každé těleso). Princip tvorby těchto rovnic je podobný jako pro případ dvojitého kyvadla (příloha P1). Rozdíl je pouze v tom, že tento model bude obsahovat pouze pohybové rovnice (vazby ani jiné silové účinky či uživatelsky definované proměnné zde nejsou použity).

Dříve než přistoupíme k tvorbě Jacobiho matice, definujme opět jednotlivé rovnice a neznámé. Výpis je uveden v následujících tabulkách.

Tab 5.4 Výpis neznámých veličin pro případ dvou volně padajících těles.

| č.      | ozn.                                       | popis                                                  | č.       | ozn.                             | popis                                                  | č.       | ozn.                           | popis                                         |
|---------|--------------------------------------------|--------------------------------------------------------|----------|----------------------------------|--------------------------------------------------------|----------|--------------------------------|-----------------------------------------------|
| 1<br>16 | $v_{2x}$<br>$v_{3x}$                       | rychlost tělesa 2, resp. 3 ve směru osy $x$ GSS        | 6<br>21  | $\omega_{2g}$<br>$\omega_{3g}$   | úhlová rychlost tělesa 2, resp. 3 ve směru osy $y$ GSS | 11<br>26 | $y_2$<br>$y_3$                 | poloha tělesa 2, resp. 3 ve směru osy $y$ GSS |
| 2<br>17 | $v_{2y}$<br>$v_{3y}$                       | rychlost tělesa 2, resp. 3 ve směru osy $y$ GSS        | 7<br>22  | $p_{2\psi}$<br>$p_{3\psi}$       | impulsmoment tělesa 2, resp. 3 kolem osy $z$ GSS       | 12<br>27 | $z_2$<br>$z_3$                 | poloha tělesa 2, resp. 3 ve směru osy $z$ GSS |
| 3<br>18 | $v_{2z}$<br>$v_{3z}$                       | rychlost tělesa 2, resp. 3 ve směru osy $z$ GSS        | 8<br>23  | $p_{2\varphi}$<br>$p_{3\varphi}$ | impulsmoment tělesa 2, resp. 3 kolem osy $x$ GSS       | 13<br>28 | $\psi_2$<br>$\psi_3$           | natočení tělesa 2, rep. 3 kolem osy $z$ GSS   |
| 4<br>19 | $\omega_{2\psi}$<br>$\omega_{3\psi}$       | úhlová rychlost tělesa 2, resp. 3 ve směru osy $z$ GSS | 9<br>24  | $p_{2g}$<br>$p_{3g}$             | impulsmoment tělesa 2, resp. 3 kolem osy $y$ GSS       | 14<br>29 | $\varphi_2$<br>$\varphi_3$     | natočení tělesa 2, rep. 3 kolem osy $x$ GSS   |
| 5<br>20 | $\omega_{2\varphi}$<br>$\omega_{3\varphi}$ | úhlová rychlost tělesa 2, resp. 3 ve směru osy $x$ GSS | 10<br>25 | $x_2$<br>$x_3$                   | poloha tělesa 2, resp. 3 ve směru osy $x$ GSS          | 15<br>30 | $\vartheta_2$<br>$\vartheta_3$ | natočení tělesa 2, rep. 3 kolem osy $y$ GSS   |

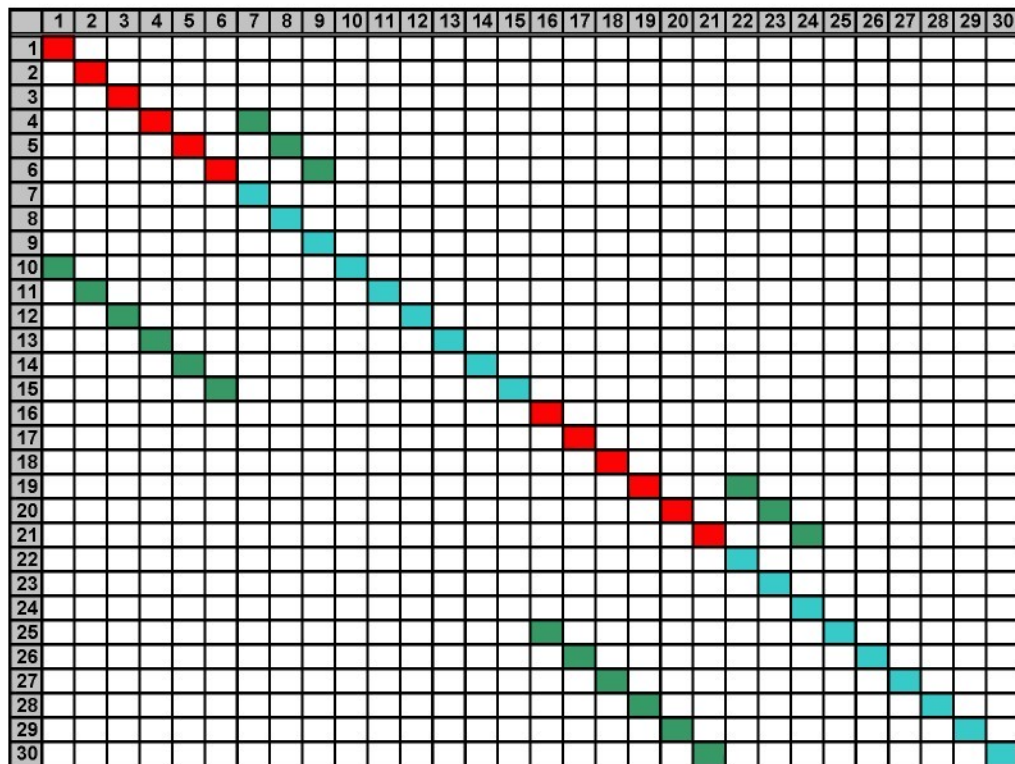
Tab 5.5 Výpis rovnic pro případ dvou volně padajících těles.

| číslo   | rovnice                                      | číslo    | rovnice                                            | číslo    | rovnice                                               |
|---------|----------------------------------------------|----------|----------------------------------------------------|----------|-------------------------------------------------------|
| 1<br>16 | silová – těleso 2, resp. 3 – směr $x$ GSS    | 6<br>21  | momentová – těleso 2, resp. 3 – směr $y$ GSS       | 11<br>26 | rychlost tělesa 2, resp. 3 – směr $y$ GSS             |
| 2<br>17 | silová – těleso 2, resp. 3 – směr $y$ GSS    | 7<br>22  | impulsmoment – těleso 2, resp. 3 kolem osy $z$ GSS | 12<br>27 | rychlost tělesa 2, resp. 3 – směr $z$ GSS             |
| 3<br>18 | silová – těleso 2, resp. 3 – směr $z$ GSS    | 8<br>23  | impulsmoment – těleso 2, resp. 3 kolem osy $x$ GSS | 13<br>28 | úhlová rychlost – těleso 2, resp. 3 kolem osy $z$ GSS |
| 4<br>19 | momentová – těleso 2, resp. 3 – směr $z$ GSS | 9<br>24  | impulsmoment – těleso 2, resp. 3 kolem osy $y$ GSS | 14<br>29 | úhlová rychlost – těleso 2, resp. 3 kolem osy $x$ GSS |
| 5<br>20 | momentová – těleso 2, resp. 3 – směr $x$ GSS | 10<br>25 | rychlost tělesa 2, resp. 3 – směr $x$ GSS          | 15<br>30 | úhlová rychlost – těleso 2, resp. 3 kolem osy $y$ GSS |

Nyní můžeme přistoupit k tvorbě Jacobiho matice. Dříve však, než uvedeme její podobu, zavedme pro tento příklad následující předpoklady:

- integrační krok  $h$  bude  $10^{-3} s$ ,
- těleso 2 bude velmi hmotné – hmotnost, resp. momenty setrvačnosti tohoto tělesa budou řádu  $10^{15} kg$ , resp.  $kg \cdot m^2$ ,
- těleso 3 bude mnohem lehčí než těleso 2 – hmotnost, resp. momenty setrvačnosti budou pro toto těleso řádu  $10^3 kg$ , resp.  $kg \cdot m^2$ .

Následující obrázek nyní zachycuje schematickou Jacobiho matice podobu:



Obr. 5.4 Schéma Jacobiho matice.

Při uvažování výše zavedených předpokladů budou mít diagonální prvky v Jacobiho matici hodnotu níže uvedeného řádu.

Tab 5.6 Hodnoty jednotlivých prvků z obrázku 5.4.

| řádek         | řád hodnoty                                    |
|---------------|------------------------------------------------|
| 1., 2., 3.    | $10^{15} \cdot 10^3 = 10^{18}$                 |
| 4., 5., 6.    | $10^{15}$                                      |
| 7. – 15.      | $10^3$ (převrácená hodnota integračního kroku) |
| 16., 17., 18. | $10^6$                                         |
| 19., 20., 21. | $10^6$                                         |
| 19. – 30.     | $10^3$                                         |
| mimo diag.    | 1, -1                                          |

Zavedme nyní pro účely odhadu kondičního čísla Jacobiho matice další zjednodušení. Vzhledem k tomu, že prvky v zelených polích mají v této konkrétní úloze hodnotu rovnou číslu 1 (event. -1), budeme tyto prvky vůči prvkům na hlavní diagonále zanedbávat. Tímto zjednodušením získáme diagonální matici. V kap. 4.1 bylo ukázáno, že číslo podmíněnosti diagonální matice je rovno podílu jejího největšího a nejmenšího prvku na hlavní diagonále. V našem případě budeme proto psát, že číslo podmíněnosti matice je řádu:

$$\kappa = \frac{\max j_{ii}}{\min j_{ii}} = \frac{10^{18}}{10^3} = 10^{15}.$$



Ačkoli je řád kondičního čísla matice poměrně vysoký, dokáží si výpočetní metody v prostředí MSC.ADAMS s touto úlohou vcelku dobře poradit.

Zcela jiných výsledků ovšem dosáhneme v případě, že tělesu 2 zabráníme v pohybu, tj. odebereme mu vazbou typu FIXED všech šest stupňů volnosti. V takovém případě musíme matematický popis dále doplnit o šest vazebních rovnic a šest neznámých reakcí v místě uložení dle následující tabulky:

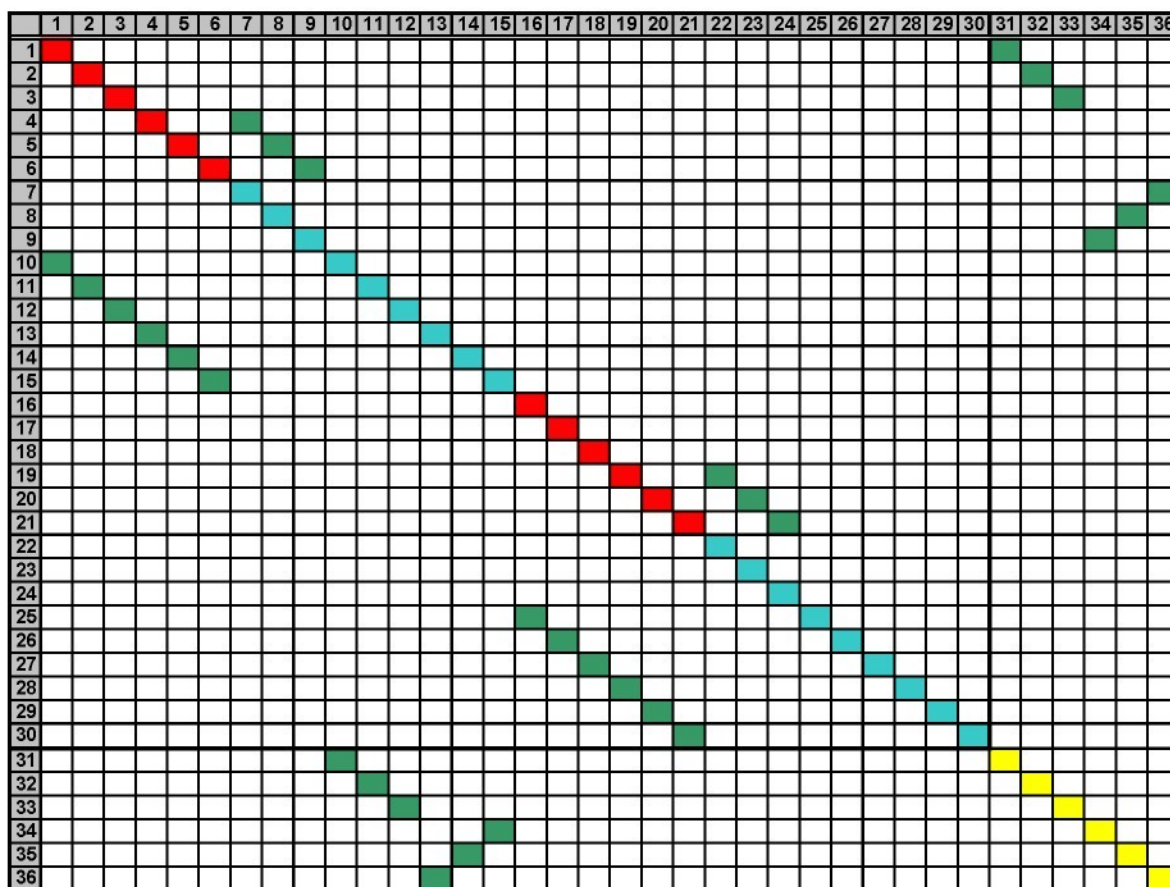
Tab 5.7 Výpis neznámých veličin ve vazbě pro případ dvou těles.

| č. | ozn.     | popis                          | č. | ozn.      | popis                                | č. | ozn.      | popis                                |
|----|----------|--------------------------------|----|-----------|--------------------------------------|----|-----------|--------------------------------------|
| 31 | $R_{Ix}$ | síla ve vazbě ve směru $x$ GSS | 33 | $R_{Iz}$  | síla ve vazbě ve směru $z$ GSS       | 35 | $M_{RIy}$ | moment ve vazbě ve směru osy $y$ GSS |
| 32 | $R_{Iy}$ | síla ve vazbě ve směru $y$ GSS | 34 | $M_{RIz}$ | moment ve vazbě ve směru osy $z$ GSS | 36 | $M_{RIx}$ | moment ve vazbě ve směru osy $x$ GSS |

Tab 5.8 Výpis vazebních rovnic pro případ dvou těles.

| číslo | rovnice                                  | číslo | rovnice                                        | číslo | rovnice                                        |
|-------|------------------------------------------|-------|------------------------------------------------|-------|------------------------------------------------|
| 31    | kinematická – těleso 2, směr osy $x$ GSS | 33    | kinematická – těleso 2, směr osy $z$ GSS       | 35    | kinematická – těleso 2, rot. kolem osy $y$ GSS |
| 32    | kinematická – těleso 2, směr osy $y$ GSS | 34    | kinematická – těleso 2, rot. kolem osy $z$ GSS | 36    | kinematická – těleso 2, rot. kolem osy $x$ GSS |

Jacobiho matice nabývá v tomto případě tvaru uvedeného na obrázku 5.5.



Obr. 5.5 Jacobiova matice po použití vazby typu FIXED.

Barevné značení a jemu odpovídající hodnoty prvků je stejné jako v předchozích případech.

Jak je patrné z předchozího obrázku, základní Jacobiho matice z předchozího příkladu zůstala nezměněna, byla doplněna pouze o dalších 6 řádků a 6 sloupců. Dále z předchozího obrázku plyne, že i nyní můžeme na prvních 30 řádků používat zjednodušení o zanedbání méně významných prvků vůči dominujícím prvkům diagonály tak, jak bylo zavedeno výše.

Všimněme si ovšem řádků 31 až 36. Na hlavní diagonále se zde objevují nulové prvky. To ovšem to v některých případech nemusí být na škodu. Tyto řádky však mají jinou velmi nepříjemnou vlastnost. V daném řádku s nulovou hodnotou na diagonále se vždy objevuje pouze jedno nenulové číslo. Z této skutečnosti plyne, že se tento řádek velmi snadno stane lineárně závislým na jiném řádku matice, na který jsme aplikovali výše zmíněné zjednodušení. V našem případě se jedná o lineární závislost mezi řádky  $31 - 10$ ,  $32 - 11$ ,  $33 - 12$ ,  $34 - 15$ ,  $35 - 14$  a  $36 - 13$ . Tím je pro náš případ dosaženo singulární matice. V případě, že upustíme od zanedbání nevýznamných členů matice, existuje zde velká pravděpodobnost, že v kombinaci s vysokými vlastními čísly se bude daná matice velmi přibližovat singulární matici, tj., že bude velmi špatně podmíněná.

Pozn.: při provedení výpočtu podmíněnosti matice z obr. 5.5 bylo spočteno v programu MathCAD kondiční číslo  $\kappa$  řádu  $10^{39}$ .

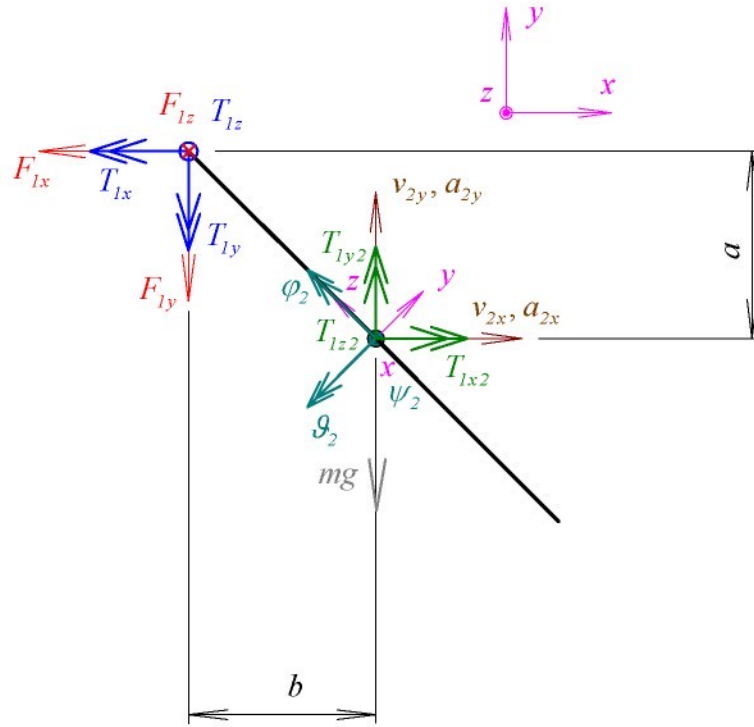
Vyvstává zde proto velmi zásadní otázka: je možné se v daném případě vyhnout špatně podmíněné matici?

Jak plyne z Jacobiho matice obr. 5.5, stačilo by, kdyby na hlavní diagonále nebyly nulové prvky. Potom by nemohlo dojít k situaci, že dva řádky této matice budou lineárně závislé. Vyjdeme-li z faktu, že příslušné nulové prvky Jacobiho matice byly získány derivací vazebních rovnic dle neznámých reakcí v místě uchycení tělesa, dospějeme k závěru, že v případě nenulových diagonálních prvků by dané rovnice musely obsahovat právě tyto neznámé reakce. Derivace by poté byly rovny 1. V algebraických rovnicích, které popisují kinematické vazby ovšem žádné silové reakce nemohou být zastoupeny. Je proto třeba hledat jiný druh vazby, který by měl ve výsledku podobné účinky na těleso, jako vazba pevná, ovšem byl by založen na rovnováze silových účinků. Pro tyto účely je možné v prostředí MSC.ADAMS využít prvku typu BUSHING.

Tento prvek byl již zmíněn v kap. 4.1.1 na obr. 4.2. Konstanty tuhosti, resp. tlumení lze pro každý směr nastavit nezávisle v libovolné hodnotě. Tato možnost výrazně rozšiřuje oblast jeho možného použití.

V našem případě je proto vhodné nahradit pevnou kinematickou vazbu použitím tohoto prvku. Toho docílíme tak, že v každém směru možného pohybu budeme definovat velké hodnoty tuhosti a tlumení. Tím dosáhneme efektu pevné kinematické vazby. Toto řešení má pro naši úlohu značný význam. Neznámé silové účinky budou v této vazbě stejné jako v pevné kinematické vazbě (tři reakce ve směrech os  $x$ ,  $y$  a  $z$  GSS a tři reakční momenty kolem stejných os). Polohové rovnice kinematické vazby jsou však v případě vazby typu BUSHING nahrazeny rovnicemi silovými a momentovými v jednotlivých směrech os GSS. Tím se výrazně změní podoba vazební části Jacobiho matice. Podívejme se nyní na tuto záležitost detailněji.

Abychom správně popsali charakter vazby typu BUSHING a její příspěvek do matematického popisu daného systému, ukažme si nejprve její účinky na příkladě jednoduchého kyvadla. Tento model je znázorněn na následujícím obrázku 5.6.



Obr. 5.6 Použití vazby typu BUSHING.

Při matematickém popisu vazeb nyní vycházíme z rovnosti silových účinků. Nejprve napíšeme rovnice nahrazení sil  $F_x, F_y, F_z$  v  $x, y$  a  $z$  ose GSS:

$$16) \quad -c_x v_{2x} + c_x a \omega_{2\psi} - k_x x_2 + k_x a \psi_2 + F_x = 0,$$

$$17) \quad -c_y v_{2y} + c_y b \omega_{2\psi} - k_y y_2 + k_y b \psi_2 + F_y = 0,$$

$$18) \quad -c_z v_{2z} + c_z \frac{l_2}{2} \omega_{2\vartheta} - k_z z_2 + k_z \frac{l_2}{2} \vartheta_2 + F_z = 0,$$

kde  $c_x, c_y$  a  $c_z$  je konstanta tlumení BUSHINGU ve směru osy  $x, y$  a  $z$  GSS

$k_x, k_y$  a  $k_z$  je konstanta tuhosti BUSHINGU ve směru osy  $x, y$  a  $z$  GSS.

Nyní přistupme k definici momentových účinků. Mechanismus tvorby rovnic je poněkud odlišný od principu tvorby algebraických rovnic v případě kinematické vazby. Momentové reakční účinky jsou v případě vazby typu BUSHING definovány dvojnásobným počtem rovnic. Nejprve jsou psány rovnice nahrazení pružících a tlumících účinků prvku v místě vazby momenty  $T_{lx}, T_{ly}$ , resp.  $T_{lz}$ , dále jsou formulovány rovnice nahrazení momentových účinků k osám GSS v těžišti momenty  $T_{lx2}, T_{ly2}$  a  $T_{lz2}$ . V pohybových rovnicích jsou poté dány do rovnováhy výsledné síly  $F_x, F_y, F_z$ , resp. momenty  $T_{lx2}, T_{ly2}, T_{lz2}$  a setrvačné účinky působící v daném směru na těleso.

Pro zápis momentových účinků k osám GSS je nejprve třeba transformovat vektory úhlových rychlostí tělesa ze směrů  $\psi_2, \vartheta_2, \varphi_2$  do směrů  $x, y, z$  GSS. K této operaci využijeme transformační matici  $T_{2 \rightarrow G}$  dle vztahu P3.2 v příloze P3. Pro zjednodušení

budeme opět uvažovat pohyb tělesa pouze v rovině. Proto budou mít úhly  $\varphi_2$  a  $\vartheta_2$  během simulace stálou velikost  $-\frac{\pi}{2}$  (viz transformace v příloze P3, obr. P3.4).

$$\mathbf{T}_{2 \rightarrow G} \begin{pmatrix} \omega_{2\psi} \\ -\omega_{2\vartheta} \\ \omega_{2\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{2\vartheta} \cos \psi_2 - \omega_{2\varphi} \sin \psi_2 \\ -\omega_{2\vartheta} \sin \psi_2 - \omega_{2\varphi} \cos \psi_2 \\ \omega_{2\psi} \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

S přihlédnutím k vztahu (5.7) nabývají rovnice nahrazení tvaru:

- 19)  $c_{lrx}\omega_{2\varphi} \sin \psi_2 - c_{lrx}\omega_{2\vartheta} \cos \psi_2 + k_{lrx}\varphi_2 \sin \psi_2 - k_{lrx}\vartheta_2 \cos \psi_2 + T_{lx} = 0,$
- 20)  $c_{lry}\omega_{2\varphi} \cos \psi_2 + c_{lry}\omega_{2\vartheta} \sin \psi_2 - k_{lry}\varphi_2 \cos \psi_2 + k_{lry}\vartheta_2 \sin \psi_2 + T_{ly} = 0,$
- 21)  $-c_{l rz}\omega_{2\psi} - k_{l rz}\psi_2 + T_{lz} = 0,$
- 22)  $F_{lz}a + T_{lx} + T_{lx2} = 0,$
- 23)  $F_{lz} \frac{l_2}{2} + T_{ly} + T_{ly2} = 0,$
- 24)  $-F_{lx}a - F_{ly}b + T_{lz} + T_{lz2} = 0.$

Nyní ještě pro úplnost uvedme rovnice pohybové. Jejich formulace je podobná jako v příkladu dvojitého kyvadla v příloze P1. Vypustíme jen reakční účinky v druhé vazbě, dále vnější zatížení  $F$  a  $M$ , silové účinky ve vazbě označíme  $F_x, F_y, F_z$  a momentové účinky sil a momentů ve vazbě k těžišti tělesa nahradíme v jednotlivých směrech os GSS momenty  $T_{lx2}, T_{ly2}, T_{lz2}$ .

Pro úplnost tyto pohybové rovnice uvedme:

- 1)  $m_2 \dot{v}_{2x} + F_{lx} = 0,$
- 2)  $m_2 \dot{v}_{2y} + F_{ly} = 0,$
- 3)  $m_2 \dot{v}_{2z} + F_{lz} = 0,$
- 4)  $-v_{2x} + \dot{x}_2 = 0,$
- 5)  $-v_{2y} + \dot{y}_2 = 0,$
- 6)  $-v_{2z} + \dot{z}_2 = 0,$
- 7)  $I_{2xx}\omega_{2\psi} - p_{2\psi} = 0,$
- 8)  $I_{2xz}\omega_{2\varphi} - p_{2\varphi} = 0,$
- 9)  $I_{2yz}\omega_{2\vartheta} - p_{2\vartheta} = 0,$

$$10) \quad -\omega_{2\psi} + \dot{\psi}_2 = 0,$$

$$11) \quad -\omega_{2\varphi} + \dot{\varphi}_2 = 0,$$

$$12) \quad -\omega_{2\vartheta} + \dot{\vartheta}_2 = 0,$$

$$13) \quad \dot{p}_{2\psi} + T_{1z2} = 0,$$

$$14) \quad \dot{p}_{2\varphi} + T_{1x2} \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 - T_{1y2} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 + T_{1z2} \cos \vartheta_2 = 0,$$

$$15) \quad \dot{p}_{2\vartheta} + T_{1x2} \cos \psi_2 + T_{1y2} \sin \psi_2 = 0.$$

Vraťme se nyní na začátek této kapitoly k příkladu dvou těles s velkou hmotností, z nichž jedno je připevněno k rámu a druhé padá. Místo pevné vazby tělesa 2 však použijme vazbu typu BUSHING, které budeme definovat ve smyslu všech stupňů volnosti značnou tuhost a malé hodnoty tlumení. Výpis soustavy rovnic zde již nebudeme uvádět, princip sestavení je stejný jako v případě jednoduchého kyvadla. Jelikož soustava obsahuje dvě tělesa a jednu vazbu typu BUSHING, bude celkový počet rovnic 39 (15+15+9).

Dříve, než uvedeme schematický obrázek Jacobiho matice, je opět třeba specifikovat neznámé. Proměnné s čísly 1 až 30 jsou stejné jako v případě použití pevné kinematické vazby. Následujících devět neznámých je uvedeno v tab. 5.9.

Tab 5.9 Výpis neznámých veličin ve vazby typu BUSHING.

| č. | ozn.     | popis                          | č. | ozn.     | popis                                | č. | ozn.      | popis                                         |
|----|----------|--------------------------------|----|----------|--------------------------------------|----|-----------|-----------------------------------------------|
| 31 | $F_{1x}$ | síla ve vazbě ve směru $x$ GSS | 34 | $T_{1x}$ | moment ve vazbě ve směru osy $x$ GSS | 37 | $T_{1x2}$ | výsledný moment vazby k ose $x$ GSS v těžišti |
| 32 | $F_{1y}$ | síla ve vazbě ve směru $y$ GSS | 35 | $T_{1y}$ | moment ve vazbě ve směru osy $y$ GSS | 38 | $T_{1y2}$ | výsledný moment vazby k ose $y$ GSS v těžišti |
| 33 | $F_{1z}$ | síla ve vazbě ve směru $z$ GSS | 36 | $T_{1z}$ | moment ve vazbě ve směru osy $z$ GSS | 39 | $T_{1z2}$ | výsledný moment vazby k ose $z$ GSS v těžišti |

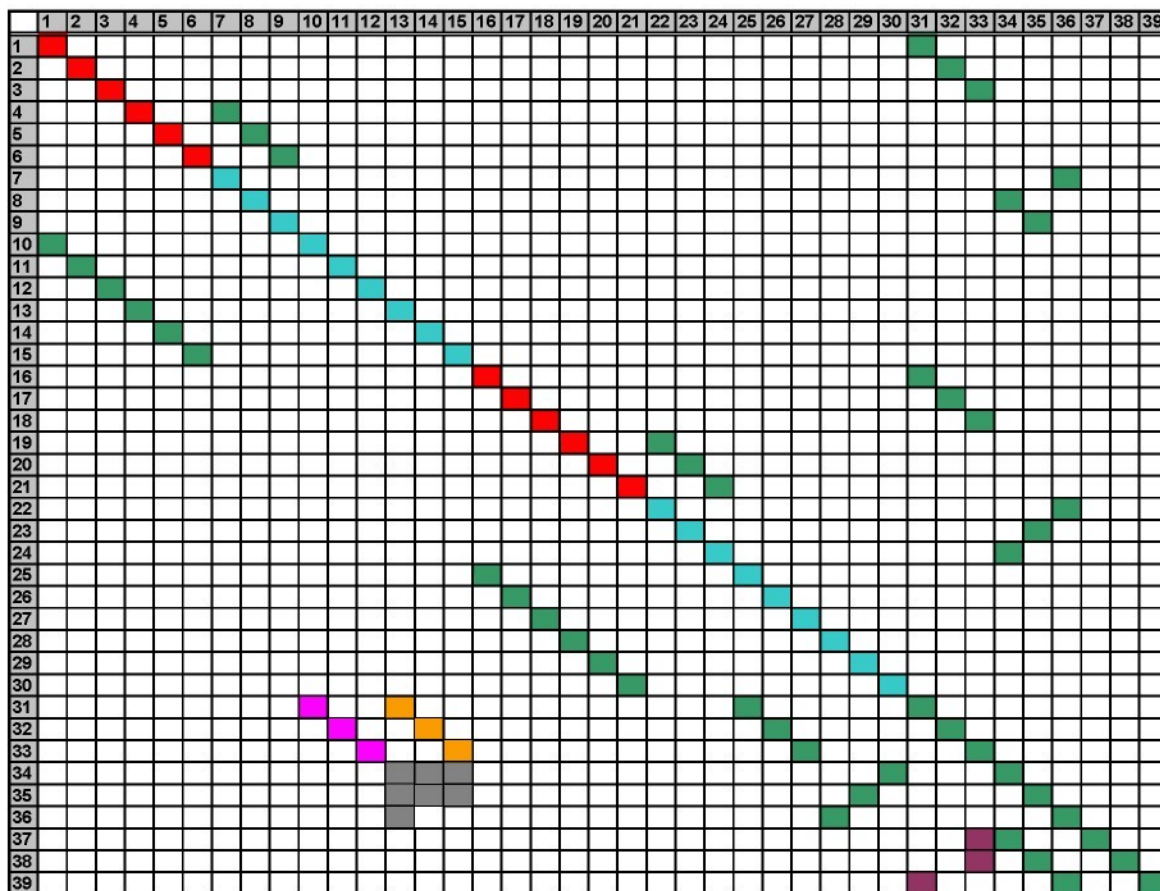
Pro úplnost ještě v tab. 5.10 dodejme označení devíti vazebních rovnic.

Tab 5.10 Výpis rovnic přidanych vazbou typu BUSHING.

| číslo | rovnice                                                 | číslo | rovnice                                                     | číslo | rovnice                                                               |
|-------|---------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------|-------|-----------------------------------------------------------------------|
| 31    | rce nahrazení silových účinků BUSHINGu ve směru $x$ GSS | 34    | rovnice nahrazení momentových účinků BUSHINGu kolem $x$ GSS | 37    | rce nahrazení momentového účinku BUSHINGu kolem osy $x$ GSS v těžišti |
| 32    | rce nahrazení silových účinků BUSHINGu ve směru $y$ GSS | 35    | rovnice nahrazení momentových účinků BUSHINGu kolem $y$ GSS | 38    | rce nahrazení momentového účinku BUSHINGu kolem osy $y$ GSS v těžišti |
| 33    | rce nahrazení silových účinků BUSHINGu ve směru $z$ GSS | 36    | rce nahrazení momentových účinků BUSHINGu kolem $z$ GSS     | 39    | rce nahrazení momentového účinku BUSHINGu kolem osy $z$ GSS v těžišti |



Na následujícím obrázku 5.7 je znázorněno schéma Jacobiho matice pro takovou soustavu.



Obr. 5.7 Schéma Jacobiho matice po použití vazby typu BUSHING.

Barevné značení v části pohybových rovnic je stejné jako v případě pevné vazby.

V oblasti vazební je barevné značení následující (za předpokladu malých tlumení):

- světle fialová – velikost prvku úměrná tuhostem v posuvném směru,
- oranžová – velikost prvku úměrná tuhostem v posuvném směru a rozměrům,
- šedá – velikost prvku úměrná rotačním tuhostem a velikosti úhlů natočení,
- tmavě fialová – velikost prvku úměrná rozměrům.

Oproti Jacobiho matici na obr. 5.5 je zde patrné, že hlavní diagonála je již celá tvořena nenulovými prvky. Z této skutečnosti plyne, že zde nastane případ dvou lineárně závislých řádků velmi obtížně. Proto je zde mnohem větší šance, že matice bude lépe podmíněna než v případě použití pevné kinematické vazby.

Při zadávání hodnot tuhostí v jednotlivých směrech vazby typu BUSHING je však nutné tato čísla definovat opatrně. V případě, že použijeme malou hodnotu tuhosti, nebude tato vazba dostatečně přesně nahrazovat pevnou kinematickou vazbu. Mohlo by se proto zdát, že čím větší hodnotu zadáme, tím docílíme větší shody. Ani tento přístup však není vhodný. Je třeba si uvědomit, že také příliš velká čísla v Jacobiho matici mohou způsobit její špatnou podmíněnost. Ta je dána velkým poměrem největšího a nejmenšího vlastního čísla. V kap. 3.2.1 jsme uvedli, že s tímto vysokým poměrem (tzv. S-poměrem) také

souvisí, zda-li je soustava považována za „tuhou“ (resp. silně tlumenou). Vždy je proto třeba hodnotu tuhosti volit rozvážně.

Podobné je to i v případě konstant tlumení. Vzhledem k tomu, že tlumení není pro realizaci pevné kinematické vazby vazbou typu BUSHING přímo potřebné, volíme tyto hodnoty zpravidla malé. Není ovšem dobré volit nulové tlumení, neboť se může stát, že zhoršíme stabilitu celého systému.

Závěrem této kapitoly ještě dodejme, že vazbou typu BUSHING je možné nahradit i jiné kinematické vazby. Velmi často se využívá náhrada rotační, sférické či posuvné vazby (viz tab. 4.1). V takovýchto případech je ve směru stupně volnosti dané vazby předepsána nulová hodnota tuhosti vazby typu BUSHING.

### **5.5.2 Správné pořadí tvorby modelu**

V této kapitole budeme dále pokračovat ve snaze zjistit, jakým způsobem je možné ovlivnit podmíněnost Jacobiho matice. V předchozí kapitole jsme se zabývali vlivem velikosti některých prvků této matice na její podmíněnost. Zde se zaměříme na další vlastnost matice, kterou můžeme cíleně ovlivnit již při tvorbě modelu – rozložení prvků napříč maticí. Při této analýze budeme opět vycházet z modelu automobilu v prostředí MSC.ADAMS/View.

Vraťme se opět k rozdělení Jacobiho matice na oblast pohybových a vazebních rovnic. Všimněme si nyní pořadí, ve kterém jsou jednotlivé rovnice v matici uloženy. Platí, že bez ohledu na složitost modelu je vždy do Jacobiho matice nejprve implementována oblast pohybových rovnic, teprve poté jsou doplněny rovnice vazební.

Během tvorby modelu je každému tělesu přiřazeno identifikační číslo, tzv. ID. Číslo 1 patří vždy rámu (GROUND). Další čísla jsou udělována v pořadí, ve kterém jsou jednotlivá tělesa modelována. Skladba pohybové části Jacobiho matice zachovává hierarchii číslování jednotlivých těles, tzn., že prvních 15 řádků Jacobiho matice náleží k tělesu s ID = 2, další řádky náleží tělesu s ID = 3, dále ID = 4, atd. Stejně je tomu i s neznámými proměnnými, jen řádky vystřídají sloupce.

Podobná situace je i ve vazební části Jacobiho matice. Jednotlivé vazby jsou během svého vytváření číslovány počínaje hodnotou 1. Při tvorbě vazební části matice jsou rovnice implementovány v pořadí jejich tvorby a podle typu příslušné vazby (např. kulové vazby jsou umístěny před rotačními). Stejně je tomu i se silovými účinky a s uživatelskými proměnnými.

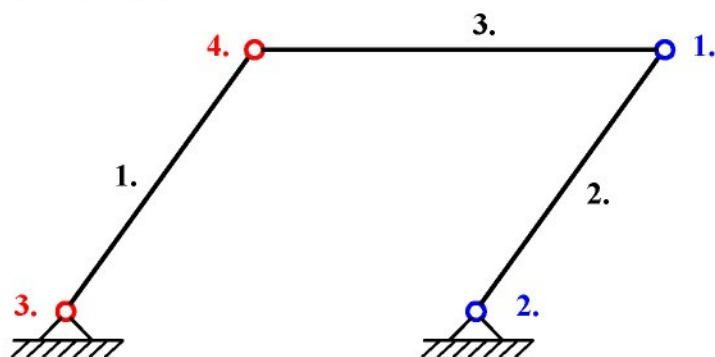
Neznámé reakce, resp. hodnoty silových účinků jsou umístěny do sloupců ve stejném pořadí, jako příslušné rovnice do jednotlivých řádků Jacobiho matice. Z tohoto uskupení matice vyplývá přímá souvislost mezi časovou posloupností modelování jednotlivých částí systému a rozmístěním prvků v matici.



Je velmi obtížné pro tak rozměrné matice stanovit obecná pravidla o umístění jednotlivých prvků a jejich velikostech tak, aby byla matice dobře podmíněná. Ukazuje se však, že je dosahováno lepších výsledků tehdy, nemá-li matice příliš široký pás. Snažme se proto určit takové pořadí při modelování, aby byly všechny prvky matice co nejbližejí její hlavní diagonále.

Na následujícím příkladě ukážeme dva rozdílné způsoby vytváření modelu. Jedná se o paralelogram podle obrázku 5.8. Nejprve tento systém namodelujeme v náhodném pořadí vytváření jednotlivých prvků. Parametry modelu jsou:

- a) 1. a 2. těleso: hmotnost = 1 kg, délka = 280 mm, moment setrvačnosti k ose tělesa = 100 kg mm<sup>2</sup>, momenty setrvačnosti k ostatním osám = 8500 kg mm<sup>2</sup>,
- b) 3. těleso: hmotnost = 2 kg, délka = 600 mm, moment setrvačnosti k ose tělesa = 200 kg mm<sup>2</sup>, momenty setrvačnosti k ostatním osám = 70000 kg mm<sup>2</sup>,
- c) krok výpočtu:  $h = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ .



Obr. 5.8 Náhodný postup při modelování paralelogramu.

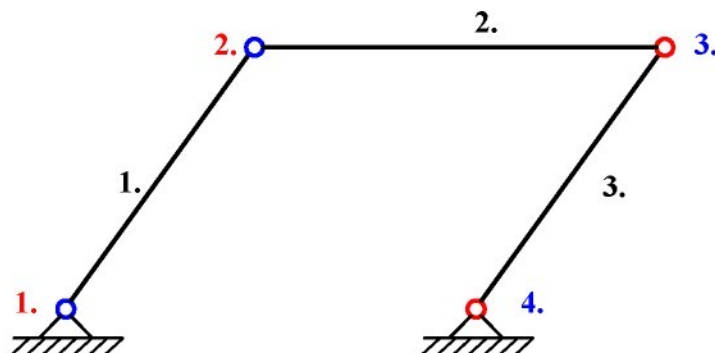
Na obr. 5.8 je černými čísly znázorněno pořadí při vytváření jednotlivých těles a barevnými čísly postup při definování vazeb. Vazby jsou použity dvojího typu – červená barva znázorňuje vazby typu REVOLUTE, modrá barva značí vazby typu SPHERE. Použití těchto vazeb je z toho důvodu, aby nebyl model staticky přeurlčen, neboť při této konfiguraci má 2 stupně volnosti (méně důležitou rotaci prvku 2 kolem vlastní osy a natočení např. prvku 1 kolem osy kolmé k rovině mechanismu).

Nyní sestavme pro tento mechanismus Jacobiho matici. Jednotlivé rovnice nebudeme v této práci vzhledem k jejich obsažnosti rozepisovat, princip jejich sestavení je stejný jako v předešlých případech. Na obrázku 5.9 je Jacobiho matice pro tento příklad schematicky zachycena. Číslo podmíněnosti je pro dané parametry, řád metody 1 a první iteraci

$$\kappa = 1.82 \cdot 10^{13}.$$

Nyní vytvořme model na základě poznatků o tvorbě matice z úvodu této kapitoly. Snažme se přitom, aby Jacobiho matice tohoto modelu měla všechny nenulové hodnoty

co nejblíže hlavní diagonále. Jedno z možných řešení je naznačeno na následujícím obrázku.



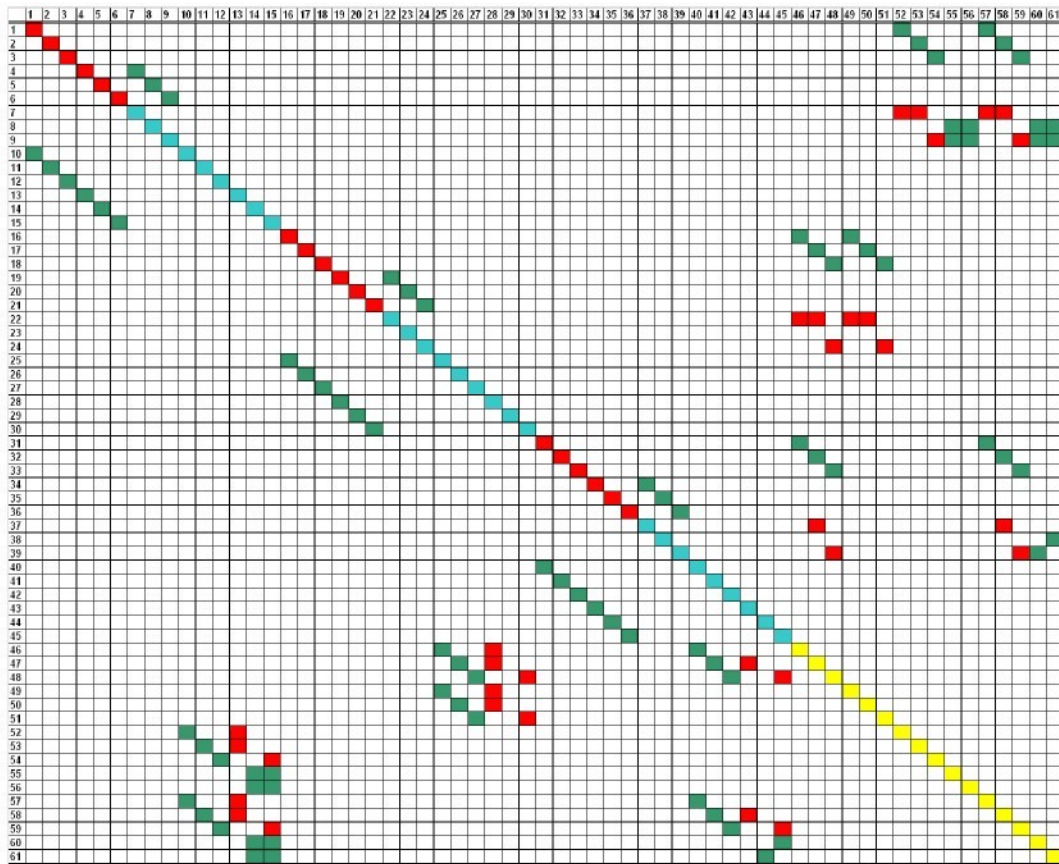
Obr. 5.10 Lepší postup při tvorbě paralelogramu.

Zdůvodnění postupu: Při tvorbě modelu je s ohledem na tvar Jacobiho matice vhodné dodržovat dvě zásady:

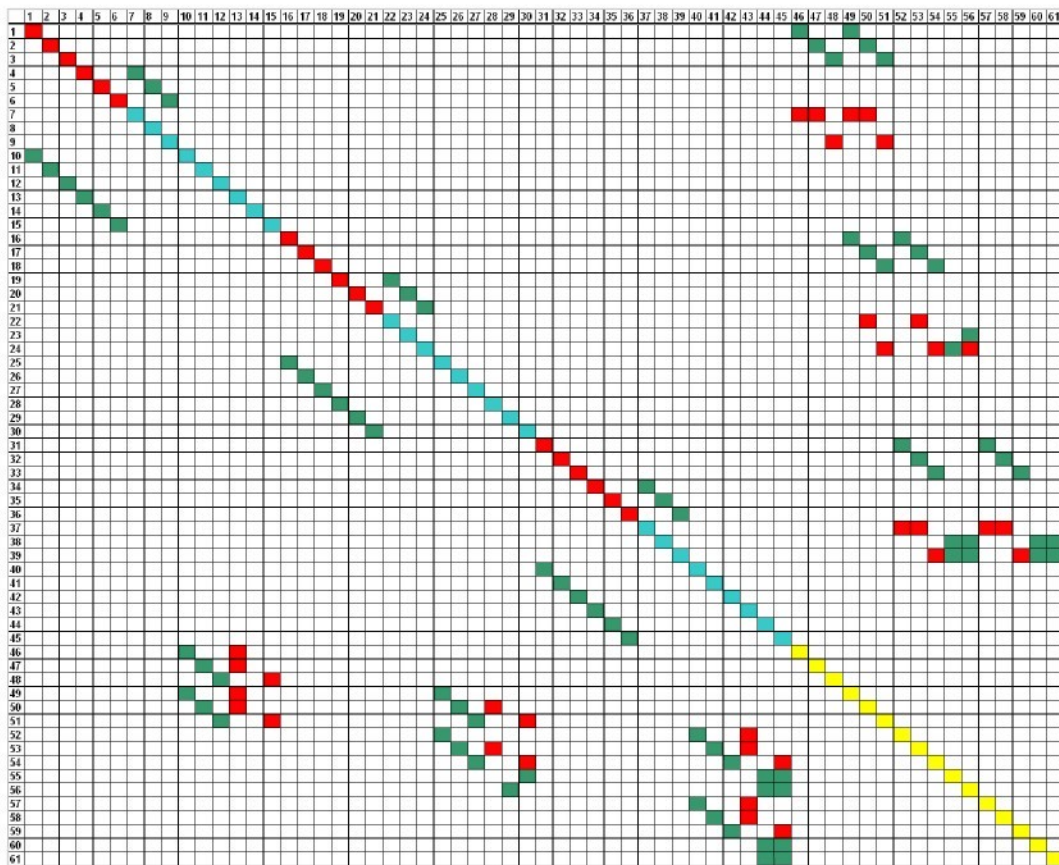
- vazbou propojit prvky s co nejblížejšími čísly,
- při definici vazeb postupovat od prvku s nejmenším pořadovým číslem v tom sledu, ve kterém jsou jednotlivé vazby implementovány do Jacobiho matice.

Z těchto důvodů bylo kulovými vazbami připojeno těleso 1, neboť rovnice kulových vazeb jsou v zápisu Jacobiho matice dříve než rovnice rotačních vazeb. Náhled na tvar Jacobiho matice je na obr. 5.11. Číslo podmíněnosti je v tomto případě pro výše uvedené parametry a první iteraci výpočtu

$$\kappa = 6.56 \cdot 10^{12}.$$



Obr. 5.9 Schéma Jacobiho matice při náhodné tvorbě paralelogramu.

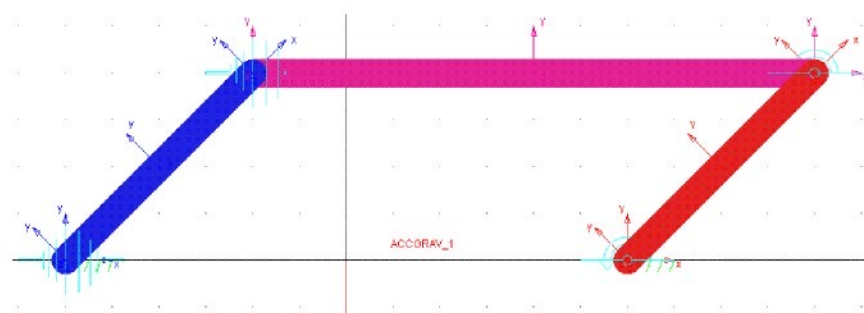


Obr. 5.11 Schéma Jacobiho matice při lepším postupu paralelogramu.



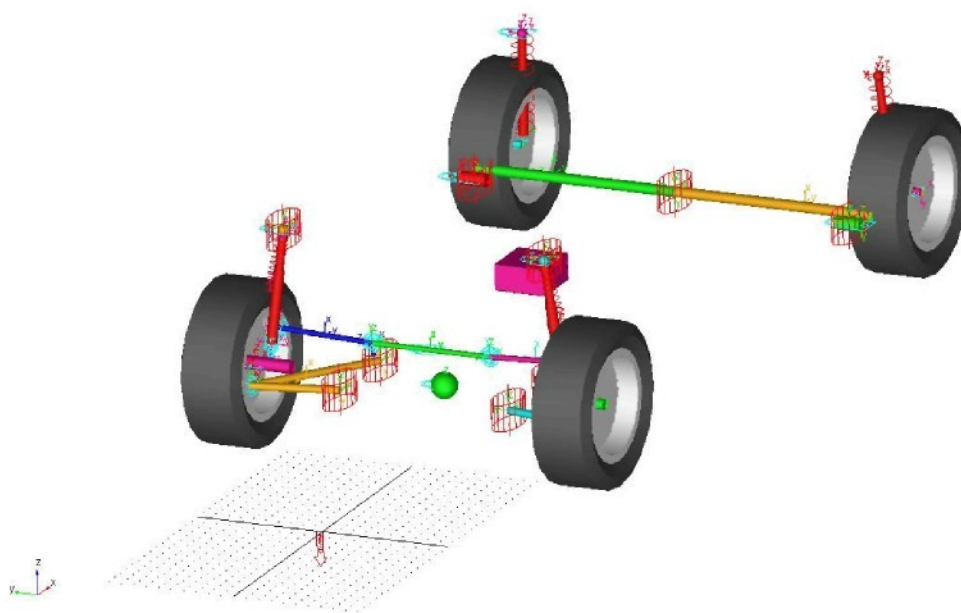
Z porovnání kondičních čísel Jacobiho matice pro oba případy vyplývá, že dodržením výše uvedeného postupu při tvorbě modelu se podařilo podmíněnost matice dvakrát zlepšit. Toto zlepšení je patrné i ze schémat obou matic. V druhém případě se podařilo pás Jacobiho matice mírně zúžit.

Zmíňme se ještě o další výhodě dodržování uvedeného postupu při tvorbě modelu – zkrácení výpočetního času. Prostředí MSC.ADAMS počítá inverzní Jacobiho matici pomocí LU rozkladu. Vzhledem k tomu, že se jedná v podstatě o princip Gaussovy eliminace, je nutné během výpočtu provádět pivotaci. V případě, že jsou prvky matice s velkou hodnotou daleko od hlavní diagonály, je pivotace náročnější než u matice s užším pásem. V příkladu paralelogramu, který jsme díky jeho jednoduchosti vybrali pro názornost ukázky uvedeného postupu, se tato časová úspora příliš neprojeví.



Obr. 5.12 Příklad paralelogramu v prostředí MSC.ADAMS.

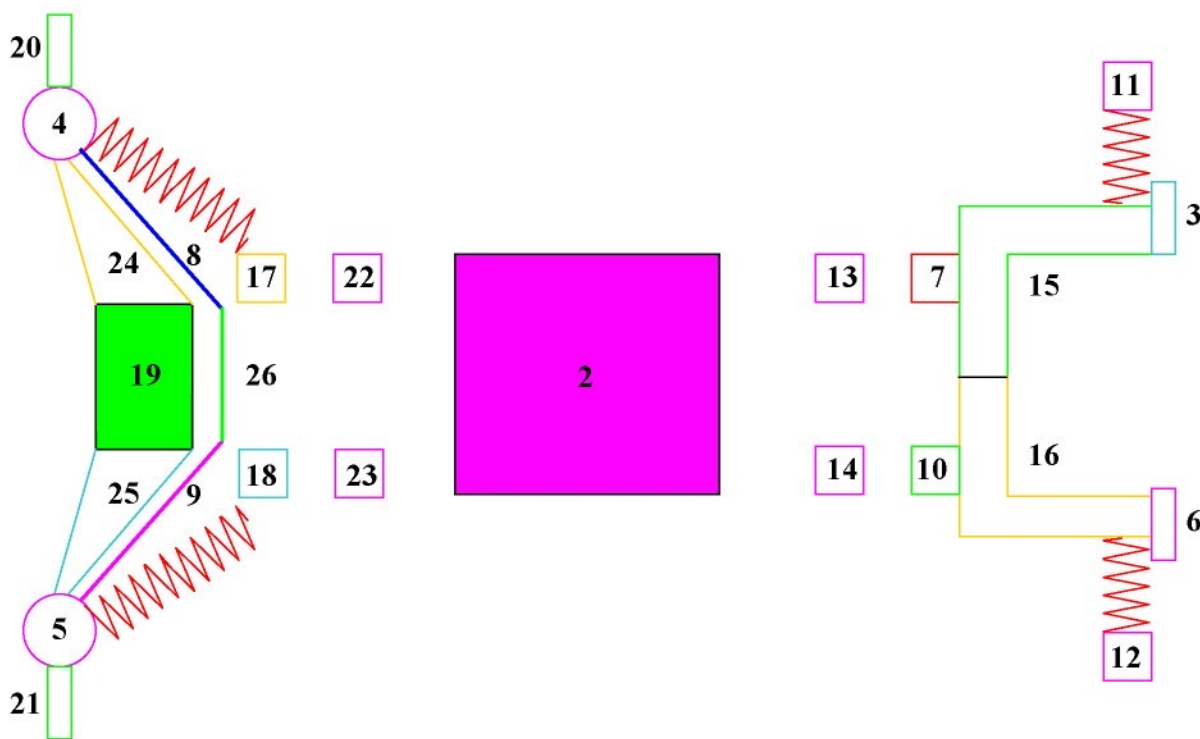
Zaměřme se nyní na příklad složitějšího charakteru. Vytvořme model osobního automobilu s předním zavěšením kol typu Mc Paerson se spodními trojúhelníkovými rameny a zadní nápravou klikovou vlečnou. Příklad takového automobilu je např. Škoda Fabia. 3D model automobilu v prostředí MSC.ADAMS je zobrazen na následujícím obrázku 5.13.



Obr. 5.13 Model osobního automobilu v prostředí MSC.ADAMS/View.

Hmotnost a momenty setrvačnosti odpružených hmot jsou soustředěny do kvádry (na obrázku fialové), jehož těžiště je shodné s těžištěm karoserie. Torzní účinky zadní nápravy jsou realizovány vazbou typu BUSHING mezi dvěma tuhými celky. Stejným typem vazby jsou vytvořeny všechny silentbloky ve vazbách mezi nápravou, event. pružícími jednotkami a karoserií. Hmotnost a momenty setrvačnosti přední nápravy jsou soustředěny do jednoho tělesa (zelená koule na obrázku). Pro definici pneumatik je použit model Swift-Tyre implementovaný v MSC.ADAMS. Hodnoty parametrů jsou pro tento model převzaty buď ze statického měření pneumatiky, nebo byly odhadnuty. Charakteristiky pružin a tlumičů jsou nelineární a byly převzaty z měření na skutečných výrobcích.

Nyní si popíšeme daný model schematicky. Na následujícím obrázku je znázorněn jeden z možných postupů při tvorbě modelu (pořadí tvorby vazeb není pro přehlednost číslováno). Barevné označení jednotlivých těles je stejné jako ve skutečném modelu na obr. 5.14.



Obr. 5.14 Horší postup při tvorbě multibody modelu osobního automobilu.

V následujících tabulkách model popíšme:

Tab 5.11 Označení těles v modelu automobilu.

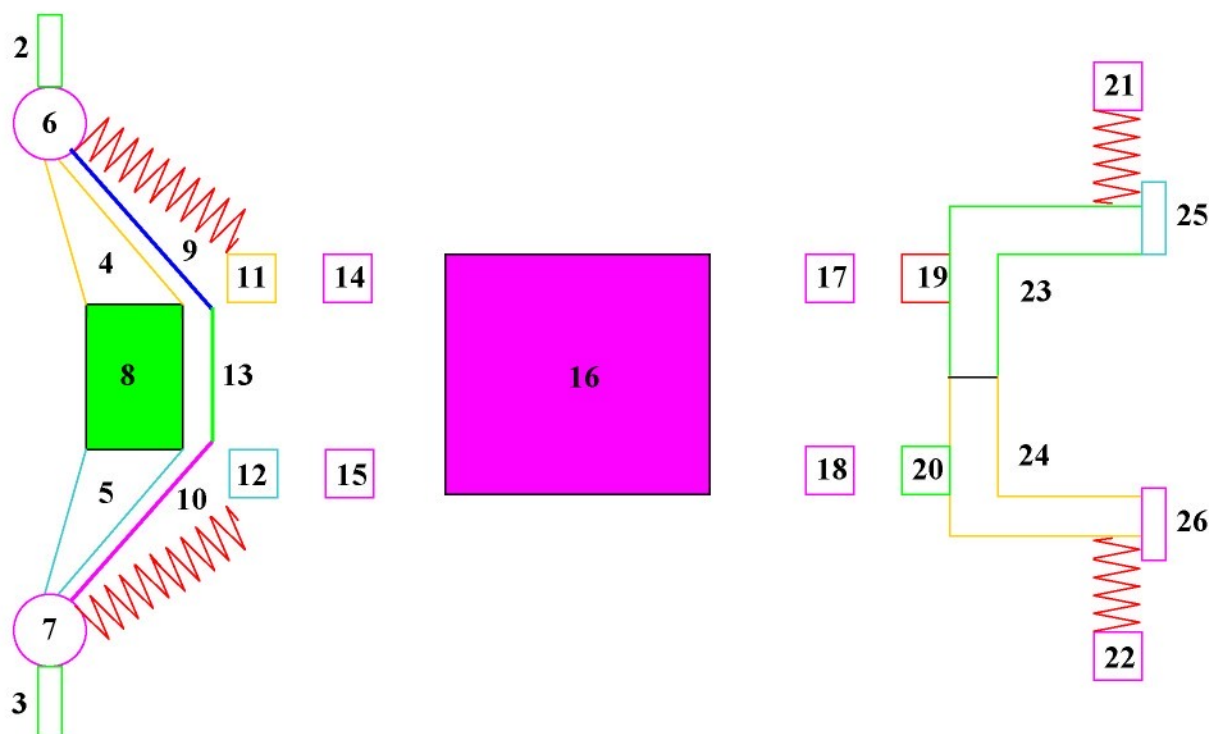
| ID | těleso            | ID | těleso                    | ID | těleso              | ID | těleso                    | ID | těleso               |
|----|-------------------|----|---------------------------|----|---------------------|----|---------------------------|----|----------------------|
| 2  | karoserie         | 7  | úchyt nápravy zadní levý  | 12 | část karoserie      | 17 | horní úchyt tlumiče pravý | 22 | část karoserie       |
| 3  | náboj pravý zadní | 8  | táhlo řízení pravé        | 13 | část karoserie      | 18 | horní úchyt tlumiče levý  | 23 | část karoserie       |
| 4  | disk pravý přední | 9  | táhlo řízení levé         | 14 | část karoserie      | 19 | přední náprava            | 24 | rameno nápravy pravé |
| 5  | disk levý přední  | 10 | úchyt nápravy zadní pravý | 15 | náprava zadní pravá | 20 | náboj pravý přední        | 25 | rameno nápravy levé  |
| 6  | náboj levý zadní  | 11 | část karoserie            | 16 | náprava zadní levá  | 21 | náboj levý přední         | 26 | tyč řízení           |

Tab 5.12 Označení vazeb v modelu automobilu.

| mezi | vazba | mezi   | vazba         | mezi   | vazba         | mezi  | vazba         | mezi    | vazba     |
|------|-------|--------|---------------|--------|---------------|-------|---------------|---------|-----------|
| 2–11 | FIXED | 3–15   | REVOLUTE      | 5–9    | SPHERE        | 7–13  | BUSHING       | 17–22   | BUSHING   |
| 2–12 | FIXED | 3–pneu | FIXED         | 5–18   | TRANSLATE     | 8–26  | SPHERE        | 18–23   | BUSHING   |
| 2–13 | FIXED | 4–8    | SPHERE        | 5–18   | SPRING/DAMPER | 9–26  | SPHERE        | 19–24   | REVOLUTE  |
| 2–14 | FIXED | 4–17   | TRANSLATE     | 5–21   | REVOLUTE      | 10–14 | BUSHING       | 19–25   | REVOLUTE  |
| 2–19 | FIXED | 4–17   | SPRING/DAMPER | 5–25   | SPHERE        | 11–15 | SPRING/DAMPER | 19–26   | TRANSLATE |
| 2–22 | FIXED | 4–20   | REVOLUTE      | 6–16   | REVOLUTE      | 12–16 | SPRING/DAMPER | 20–pneu | FIXED     |
| 2–23 | FIXED | 4–24   | SPHERE        | 6–pneu | FIXED         | 15–16 | BUSHING       | 21–pneu | FIXED     |

Z tabulky přehledu vazeb přímo vyplývá nevhodnost navrženého postupu tvorby modelu. Je patrné, že vazba, která váže tělesa s největším rozdílem ID čísel je pevná vazba mezi karoserií 2 a částí karoserie nad pravým předním tlumičem. Tento velký rozdíl (= 21) způsobí, že členy derivací rovnice příslušející této vazbě budou umístěny daleko od hlavní diagonály. To je v rozporu s výše uvedenými doporučeními.

Pokusme se proto formulovat model jiným způsobem. Zaměříme se zejména na to, aby největší rozdíl ID dvou navzájem spojených těles byl co nejmenší. Jeden z možným postupů při modelování zachycuje následující obrázek 5.15.



Obr. 5.15 Lepší postup při tvorbě multibody modelu osobního automobilu.

Z obrázku je patrné, že se podařilo snížit maximální rozdíl ID vazbou spojených těles z 21 na 5. To se samozřejmě projeví i ve stavbě Jacobiho matice. Díky této úpravě bude mít užší pás než v případě modelu na obrázku 5.14.

Kondiční čísla Jacobiho matic pro oba postupy nebudeme vzhledem k rozměrům matic uvádět. Jacobiho matice mají v obou případech 773 řádky a obsahují 7304 prvky. O výhodách tvorby modelu podle obrázku 5.14 svědčí průběh samotného výpočtu v prostředí MSC.ADAMS. Zatímco v případě tohoto modelu si program vystačí s max. deseti iteracemi v každém kroku, v druhém případě (obr. 5.14) je nutné nastavit maximální počet iterací během jednoho kroku na hodnotu 100. Nesplníme-li tento požadavek, výpočet je předčasně ukončen chybovým sdělením, že dále nelze pokračovat. Čím více se blížíme s hodnotou tohoto parametru číslu 100, tím výpočet proběhne dál. Touto skutečností je také přímo ovlivněn čas výpočtu. Při postupu dle obr. 5.14 je výpočet přibližně 5× pomalejší než při postupu dle obr. 5.15 (z 30 s na 150 s). Výsledky obou výpočtů jsou shodné.

Z uvedených poznatků je zřejmé, že řešitelnost druhého modelu je lepší. Tyto závěry plynou z autorových zkušeností při simulacích konkrétních modelů. Jejich zobecnění za účelem dokázat pro daný postup lepší či horší podmíněnost matice by bylo velmi náročné a složité.

Je zřejmé, že ne vždy je možné dodržet zásady tvorby modelu dle této kapitoly. Někdy nelze model koncipovat tak, aby byly vazbou propojeny jen prvky s blízkými pořadovými čísly, jindy zase není možné vyhovět požadavku na pořadí tvorby vazeb. Je však vhodné



vést tyto zkušenosti při modelování v patrnosti a tím mít zároveň alespoň hrubou představu o podobě matematického zápisu.

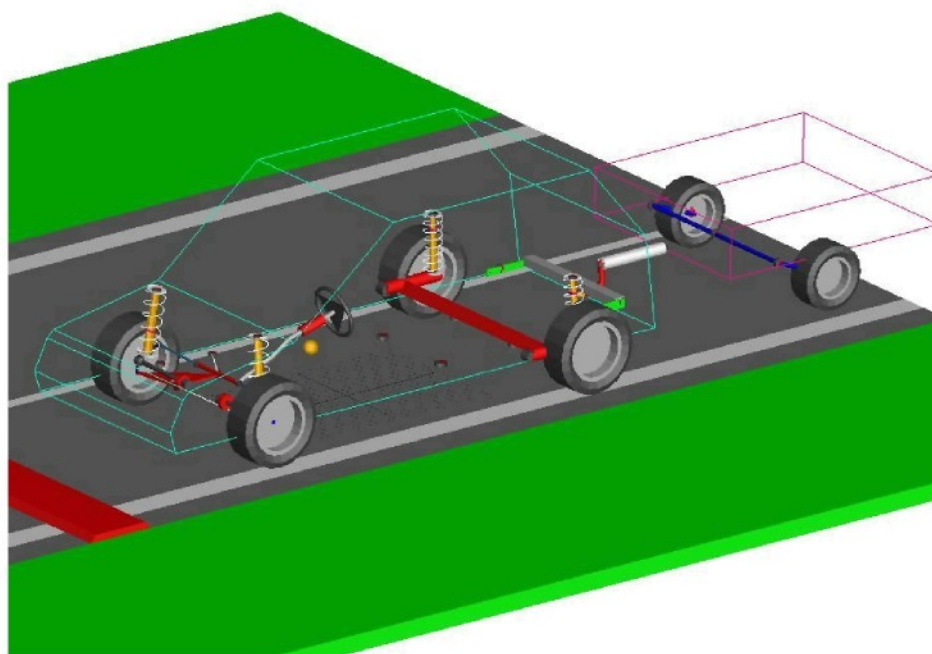
Na závěr této kapitoly bychom měli zmínit ještě jedno doporučení, které přímo plyne z výše uvedených poznatků. Je zřejmé, že během vytváření či odlaďování modelu je občas nutné určité těleso odstranit a nahradit jiným. Samotné vymazání tělesa není ve správné struktuře modelu na závalu. Problém by ovšem mohl nastat, pokud bychom dokončili model systému a rozhodli se jedno či více těles odstranit a nahradit je jinými. Poté by na místo odstraněných těles byla vložena nová tělesa, která by mohla mít ID příliš odlišné od svého okolí. Proto je doporučeno, pokud je to možné, vytvořená tělesa při jakýchkoliv změnách neodstraňovat, ale vymazat pouze jejich geometrii. Tím dosáhneme toho, že i když bude mít nová část systému jiný tvar a vlastnosti, bude mít pořád stejné ID jako těleso původní.

### 5.3.3 Automobil s přívěsem

Nyní se dostáváme k příkladu samotného automobilu s přívěsem. Tento model byl vytvořen v prostředí MSC.ADAMS/Car. Obtíže při výpočtu, které budeme v této kapitole uvádět, jsou způsobeny implementací poddajného MKP modelu tažného zařízení.

#### 5.3.3.1 Stávající model

Věnujme se nyní modelu podrobněji. Jedná se o model vytvořený z jedenácti šablon. Jsou jimi – přední náprava, zadní náprava, řízení, přední pneumatiky automobilu, zadní pneumatiky automobilu, karoserie, motor, náprava přívěsu, korba přívěsu, pneumatiky přívěsu a vozovka. Model je zobrazen na následujícím obrázku 5.16.



Obr. 5.16 Prostorový model automobilu s přívěsem v prostředí MSC.ADAMS/Car.



Rozměrově i hmotově tento model odpovídá osobnímu vozu Škoda Fabia. Hmotnost a setrvačné účinky karoserie jsou opět soustředěny do jednoho tělesa (žlutá koule na obrázku), jehož těžiště odpovídá těžišti karoserie. Zadní náprava je modelována jako poddajné těleso. Charakteristiky pružin a tlumičů byly, stejně jako v předchozí kapitole, doplněny z měření. Model pneumatiky byl opět zvolen typu Swift-Tyre. Vybrán byl zejména proto, že je vhodný k simulacím přejezdů různých překážek. Parametry pneumatik byly doplněny stejně jako v modulu View pro předchozí příklad.

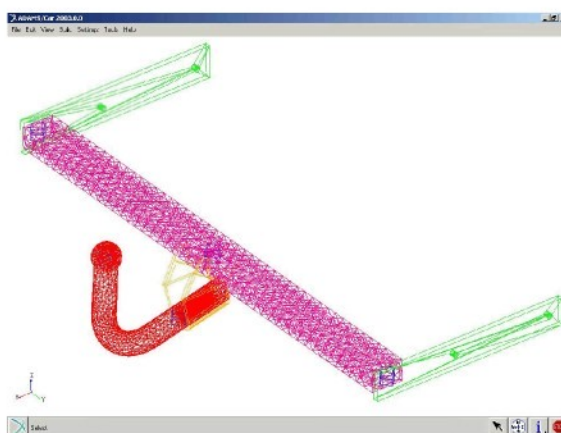
Model přívěsu je vytvořen dle skutečného provedení jednoho z typu přívěsných vozíků. Náprava je modelována pomocí dvou tuhých částí, které jsou v ose přívěsu spojeny vazbou typu BUSHING. Ta umožňuje realizaci jejích torzních vlastností. Další dvě vazby typu BUSHING jsou použity pro spojení nápravy a korby přívěsu. Definováním tuhostních a tlumících vlastností těmto prvkům je dosaženo pružení a tlumení pohybů korby vůči nápravě. Hodnoty jednotlivých konstant byly odhadnuty.

Dále model obsahuje tažné zařízení, pomocí něhož je přívěs připojen k vozidlu. Tažné zařízení osobního automobilu se skládá z několika částí. Základem je příčný nosník, který je tvořen uzavřeným dutým profilem obdélníkového tvaru. Na obou koncích nosníku jsou přivařeny ploché držáky pro přišroubování tažného zařízení ke karoserii automobilu. V ose vozidla je k příčnému nosníku připevněn hák. V modelu tažného zařízení jsou příčný nosník, hák i oj přívěsu modelovány jako pružné prvky. Konečněprvková síť byla vytvořena taktéž v prostředí MSC.ADAMS/Car, a to pomocí modulu AutoFlex. Připevnění příčného nosníku ke karoserii není provedeno pevnými vazbami (FIXED), ale vazbami typu BUSHING. Tento postup je zdůvodněn v dalším textu. Pomocí poddajného konečněprvkového tělesa je vytvořena i zadní náprava automobilu.

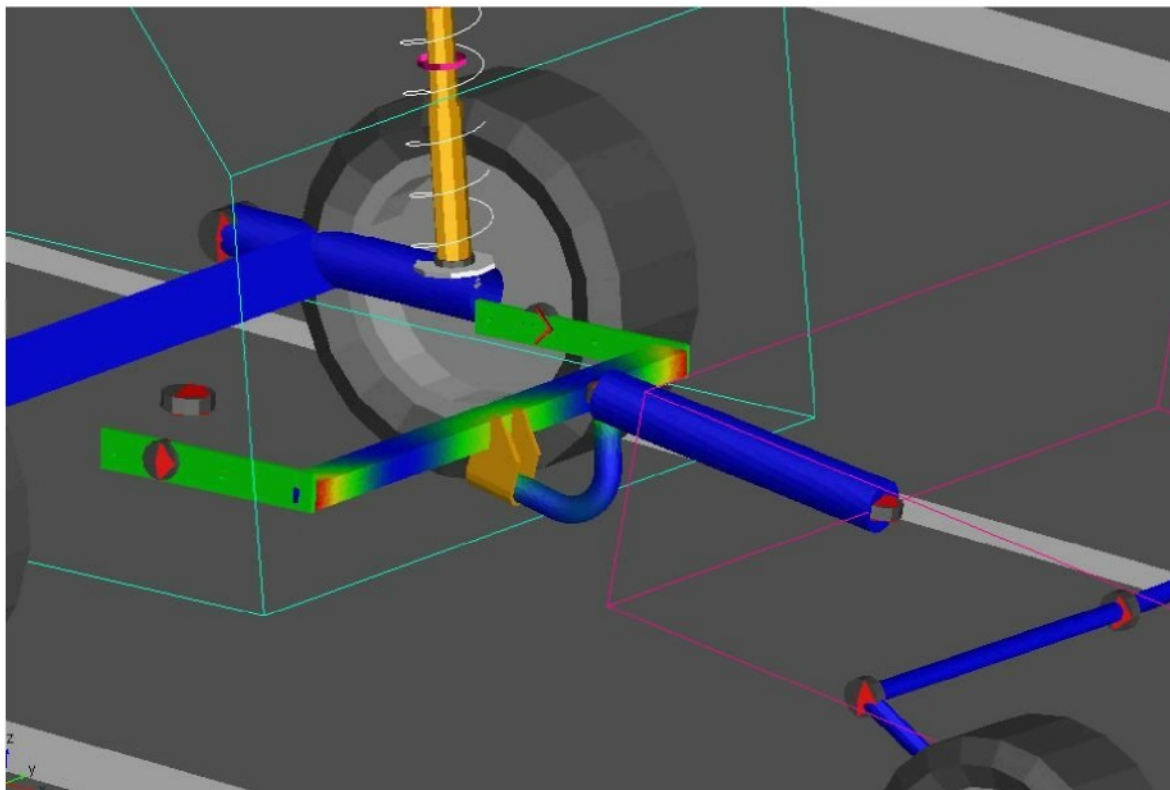
Model tažného zařízení je uveden na následujícím obrázku 5.18.



Obr. 5.17 Tažné zařízení vozu Fabia.



Obr. 5.18 Model tažného zařízení v prostředí MSC.ADAMS.



Obr. 5.19 Tažné zařízení v modelu automobilu s přívěsem (MSC.ADAMS/Car).

Přibližme si nyní interpretaci poddajných těles v prostředí MSC.ADAMS. Základním a velmi důležitým předpokladem při výpočtu poddajných těles pomocí modulu AutoFlex je to, že bereme v úvahu pouze malé lineární deformace tělesa vzhledem k jeho lokálnímu souřadnému systému, zatímco celé těleso může konat obecný nelineární pohyb. Vyjdeme-li z této skutečnosti, můžeme všechny deformace uzlových bodů poddajného tělesa aproximovat lineární kombinací konečného množství vlastních tvarů kmitů. Pro výběr těch vlastních tvarů, kterými je možné popsat nejdůležitější deformace tělesa, je v prostředí MSC.ADAMS použita Craig-Bamptonova metoda.

Výsledkem konečněprvkové analýzy je tzv. mnf soubor (modal neutral file), který obsahuje informace o konečném množství vlastních frekvencí a k nim příslušejících vlastních tvarech kmitů daného tělesa. Uživateli je nabídnuta možnost vstoupit tabulky, která obsahuje vlastní frekvence a vlastní tvary kmitů vybrané Craig-Bamptonovou metodou. Záleží na uživateli, aby vybral konkrétní tvary kmitů, které se budou účastnit výpočtu. Příklad této tabulky je uveden na následujícím obrázku 5.20.

|    | Nat. Freq          | Enabled | Displacement IC | Disp Exact | Velocity IC | Preloads |
|----|--------------------|---------|-----------------|------------|-------------|----------|
| 1  | -1.4075725491E-002 |         |                 |            |             |          |
| 2  | -1.1558701767E-002 |         |                 |            |             |          |
| 3  | -1.0007804522E-002 |         |                 |            |             |          |
| 4  | -8.490142838E-003  |         |                 |            |             |          |
| 5  | -6.4919144798E-003 |         |                 |            |             |          |
| 6  | 4.0545242636E-003  |         |                 |            |             |          |
| 7  | 317.0159848356     | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 8  | 436.0792455297     | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 9  | 837.7515728311     | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 10 | 1155.5658883712    | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 11 | 1598.0760282019    | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 12 | 1630.9353849884    | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 13 | 2184.0594957965    | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 14 | 2474.3087499696    | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 15 | 3016.4458906942    | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 16 | 3320.26813887      | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 17 | 3724.1741278021    | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 18 | 5587.6056007012    | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 19 | 6125.6129762443    | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 20 | 8097.9043838412    | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 21 | 9078.8512763415    | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 22 | 1.1224889663E+004  | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 23 | 1.21186383E+004    | *       | (none)          |            | (none)      |          |
| 24 | 1.4973146466E+004  | *       | (none)          |            | (none)      |          |

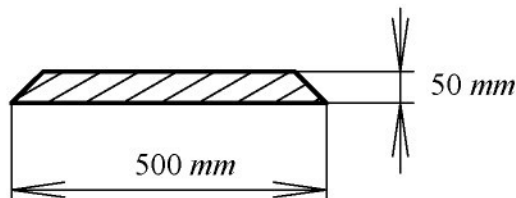
Buttons: Disable Highlighted Modes, Enable Highlighted Modes, Apply Displacement IC, Set Exact, Clear Exact, Apply Velocity IC, Refresh Table, Close

Obr. 5.20 Tabulka vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitů.

Dodejme, že prvních šest vlastních tvarů kmitů odpovídá tuhému tělesu (jeho šesti stupňům volnosti v prostoru).

Pro účely analýzy přenosu dynamických účinků z přívěsu do karoserie automobilu bylo vytvořeno deset modelů příčných nosníků o různé tuhosti. V prostředí MSC.ADAMS jsou tyto modely svázány s uživatelsky definovaným parametrem. Výběrem jeho hodnoty (čísla 1 – 10) je do modelu automobilu implementován odpovídající příčný nosník.

Na vozovce je ve vzdálenosti 1 m od předních kol automobilu umístěna překážka typu „rampa“. Výška překážky je 50 mm, délka 500 mm, náběžné hrany jsou skloněny pod úhlem 45°. Tvar překážky je na následujícím obrázku 5.21



Obr. 5.21 Překážka typu „rampa“.

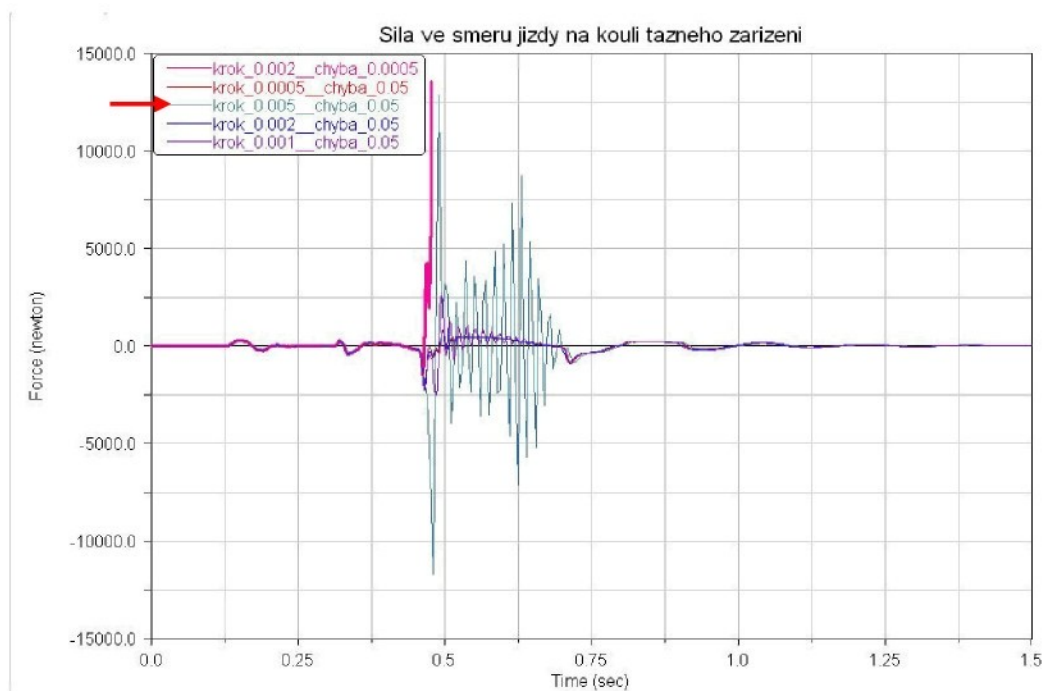


Všechny dále popsané simulace byly provedeny pro přímočarý pohyb automobilu kolmo k překážce při rychlosti vozidla  $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Tato rychlost byla vybrána na základě předchozího měření na skutečném automobilu (viz kap. 4.3.3.1) a také proto, že odpovídá maximální dovolené rychlosti v obci. Simulační výpočet začíná určením statické rovnováhy automobilu, tzn., že výsledky nejsou ovlivněny přechodovým dějem spojeným s dosednutím automobilu na vozovku. V okamžiku začátku výpočtu je automobilu udělena počáteční rychlost odpovídající rychlosti jízdy.

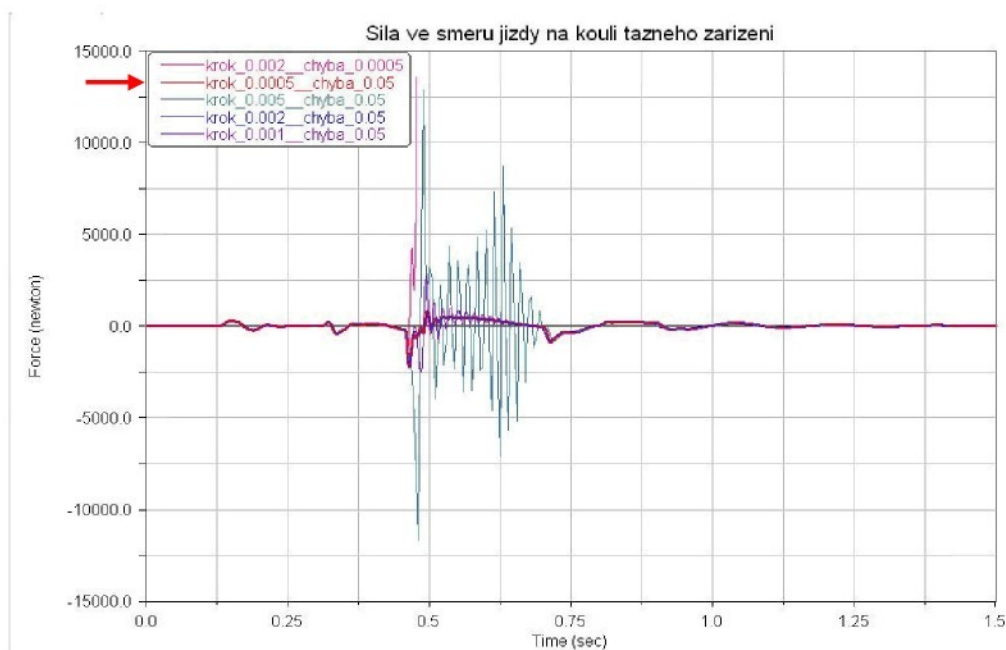
Během provedení prvních simulací (cca 50) bylo zjištěno hned několik problémů při výpočtu.

- a) I bez omezení maximálního počtu iterací na jeden integrační krok nebylo dosaženo už zkraye výpočtu konvergence. Početní algoritmus neustále oznamoval, že Jacobiho matice je blízko singularitě a stále se pokoušel provádět pivotaci tak, aby byla soustava rovnic řešitelná. Po několika pokusech výpočet spadl.
- b) Výpočet se rozeběhl, ovšem při jakékoliv větší změně v modelu (např. nájezd kol přívěsu na překážku) vykazoval stejné komplikace, jako v bodě a). Po několika pokusech o dosažení konvergence výpočet opět padá.
- c) Výpočet proběhl do konce, ovšem v jeho průběhu bylo zřetelné, že vlastnosti soustavy rovnic nejsou pro účel výpočtu příliš vhodné. Modul Solver byl nucen opět provádět složitou pivotaci v mnoha krocích, ale nakonec bylo konvergence dosaženo. Ovšem při porovnání výsledků několika simulací, pro které byly jen nepatrně změněny parametry integrační metody (např. maximální počet iterací na jeden krok, max. chyba výpočtu, atd.) bylo zjištěno, že vypočtené průběhy se zásadním způsobem odlišují.

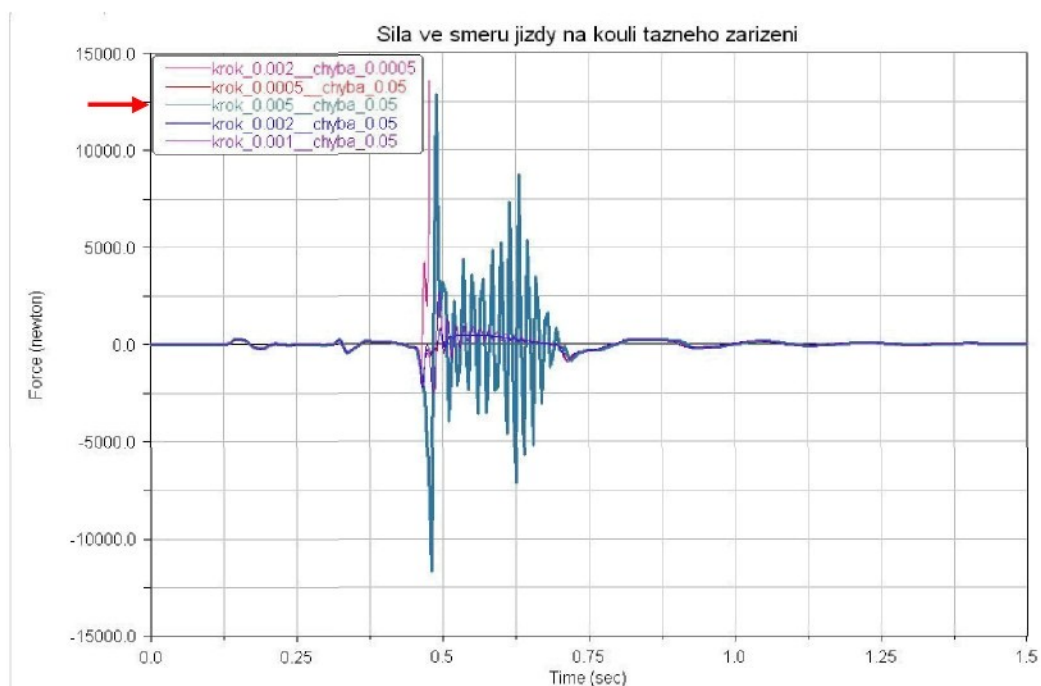
Příklady těchto výpočtů jsou uvedeny na následujících obrázcích 5.22 až 5.27. Všechny zobrazené křivky odpovídají průběhům složky síly ve směru jízdy, která je při průjezdu danou tratí měřena na kouli tažného zařízení (jedná se o sílu mezi ojí přívěsu a hákem tažného zařízení). Dodejme, že všechny simulace proběhly pro stejnou rychlost přejezdu automobilu, stejnou překážku i příčný nosník. Jediné, co se během simulace měnilo, bylo nastavení dvou parametrů použité integrační metody GSTIFF – výchozího a zároveň maximálního integračního kroku a maximální dovolené chyby výpočtu. Hodnoty těchto parametrů jsou pro jednotlivé simulace zvýrazněny v legendě grafu šipkou. Hodnota kroku je uváděna v s. Zopakujme z kap. 4.1.3, že velikost chyby je udávána v týž jednotkách, jako výsledek. „chyba = 1“ proto znamená maximální chybu během celého výpočtu  $1 \text{ N}$ , „chyba =  $1\text{E-}002$ “ udává maximální chybu  $0.01 \text{ N}$ , atd.



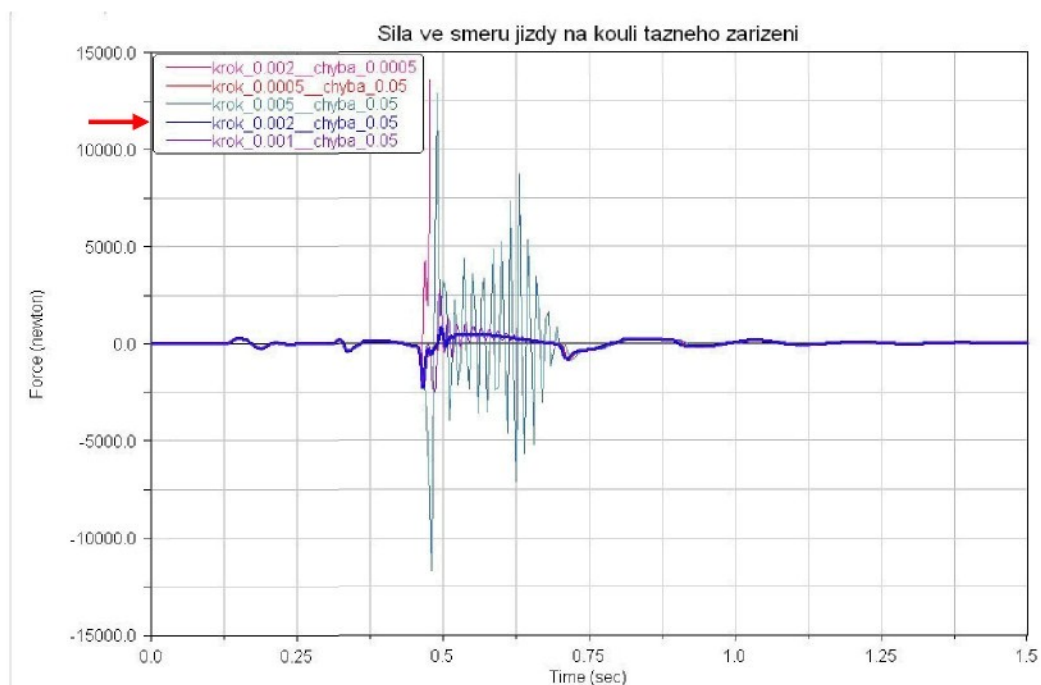
Obr. 5.22 Průběh složky síly ve směru jízdy mezi ojí přívěsu a hákem tažného zařízení pro integrační krok  $2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  a celkovou chybu výpočtu  $5 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ .



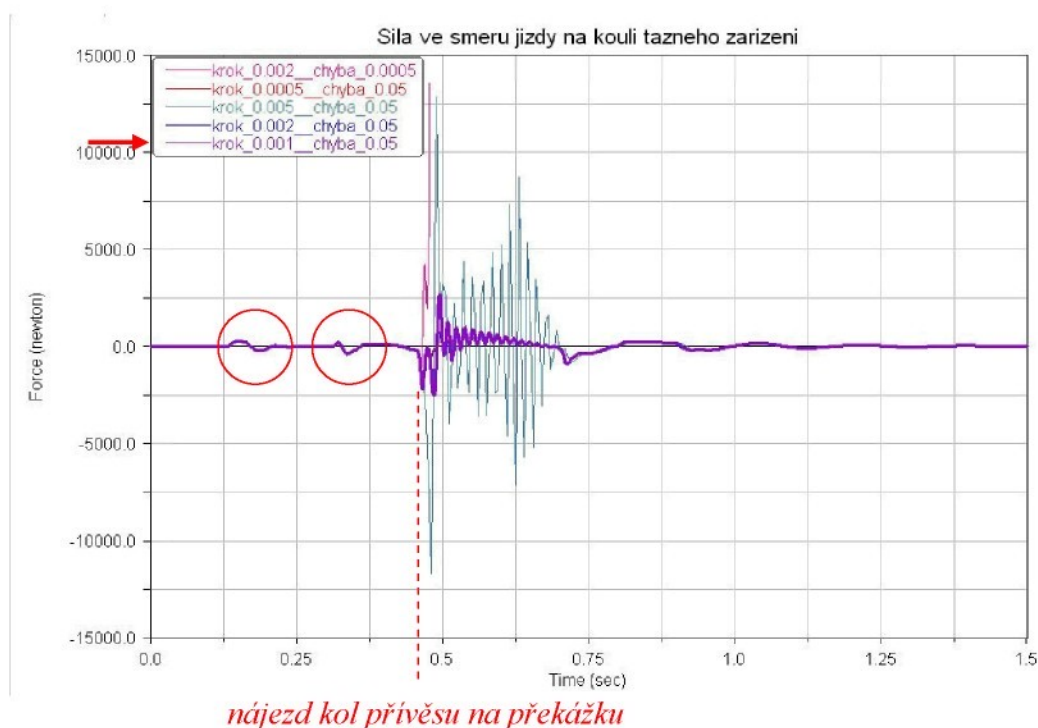
Obr. 5.23 Průběh složky síly ve směru jízdy mezi ojí přívěsu a hákem tažného zařízení pro integrační krok  $5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$  a celkovou chybu výpočtu  $5 \cdot 10^{-2} \text{ N}$ .



Obr. 5.24 Průběh složky síly ve směru jízdy mezi ojí přívěsu a hákem tažného zařízení pro integrační krok  $5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  a celkovou chybu výpočtu  $5 \cdot 10^{-2} \text{ N}$ .



Obr. 5.25 Průběh složky síly ve směru jízdy mezi ojí přívěsu a hákem tažného zařízení pro integrační krok  $2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  a celkovou chybu výpočtu  $5 \cdot 10^{-2} \text{ N}$ .



Obr. 5.26 Průběh složky síly ve směru jízdy mezi ojí přívěsu a hákem tažného zařízení pro integrační krok  $10^{-3}$  s a celkovou chybu výpočtu  $5 \cdot 10^{-2}$  N.

Na posledním obrázku je červenými kroužky označena odezva na přejetí předních, resp. zadních kol automobilu přes překážku. Kola přívěsu najíždí na překážku přibližně v čase 0.5 s.

Z porovnání uvedených průběhů plynou velké rozdíly ve výsledcích během jednotlivých simulací.

V případě simulace z obrázku 5.22 je patrné, že nastala situace podle výše uvedeného písmene b). Výpočet sice po určitou dobu probíhal, ovšem je zřejmé, že nájezdem kol přívěsu na překážku nebylo dosaženo konvergence.

Na obrázku 5.24 je patrná situace, kdy výpočet sice proběhl do konce (dle písmene c)), avšak je zřejmé nežádoucí rozkmitání daného průběhu. To může mít primární příčinu ve špatně podmíněné matici.

Situace z obrázku 5.26 je podobná. Zde už ovšem nastavení integrační metody pomohlo zmírnit vliv nesprávně formulovaného modelu. Výsledek se ale stále zdá mírně rozkmitaný.

Obrázky 5.23 a 5.25 představují řešení, které je zřejmě nejbližší skutečnosti. Usuzovat o správnosti tohoto řešení lze jednak ze získané hodnoty síly, dále pak z průběhu dané závislosti na čase. (Pozn.: Vlivem nedostatečně přesné definice pneumatik a poddajných těles (viz dále) se v modelu stávalo, že kola přívěsu na okamžik (asi 0.2 s) ztratila kontakt s vozovkou. Tím jsou vysvětleny kladné hodnoty síly v čase přibližně od 0.5 s do 0.7 s, které odpovídají brzdění pohybu přívěsu automobilem. To lze vysvětlit tak, že automobil



se snaží během celé jízdy udržet stálou rychlost  $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Nájezdem kol přívěsu na překážku však dojde ke zbrzdění automobilu. Proto je na okamžik zvýšen krouticí moment motoru, aby se pokles rychlosti vyrovnal. Během toho však vozík ztratí kontakt s vozovkou, tím je automobil odlehčen a krouticí moment je nutné opět snížit a tím automobil zbrzdit. Proto dochází ke zbrzdění přívěsu. (viz. např. [15], [16])

### 5.5.3.2 Návrh úpravy

V předchozím odstavci jsme se již mírně dotkli problému špatné definice poddajných těles. Zde se budeme této oblasti věnovat detailněji. Jak jsme již uvedli v kap. 3.2.1, je pro naše úvahy v oblasti řešitelnosti soustav rovnic důležitá hodnota poměru reálné části maximálního a minimálního vlastního čísla Jacobiho matice, tj. matice linearizovaného systému. Velikosti vlastních čísel však mají přímou souvislost s vlastními frekvencemi systému. V prostředí MSC.ADAMS je možné využít modul ADAMS/Linear, který v definovaném čase simulace provede modální analýzu celého systému. Z výsledků této modální analýzy je možné na základě velikosti vlastních frekvencí určit, zda-li je systém více či méně vhodný pro matematické řešení (zda vykazuje „stiff“ vlastnosti). Nevhodnou implementací poddajných těles do systému můžeme příznivé poměry vlastních frekvencí systému výrazně změnit (viz. např. [17]).

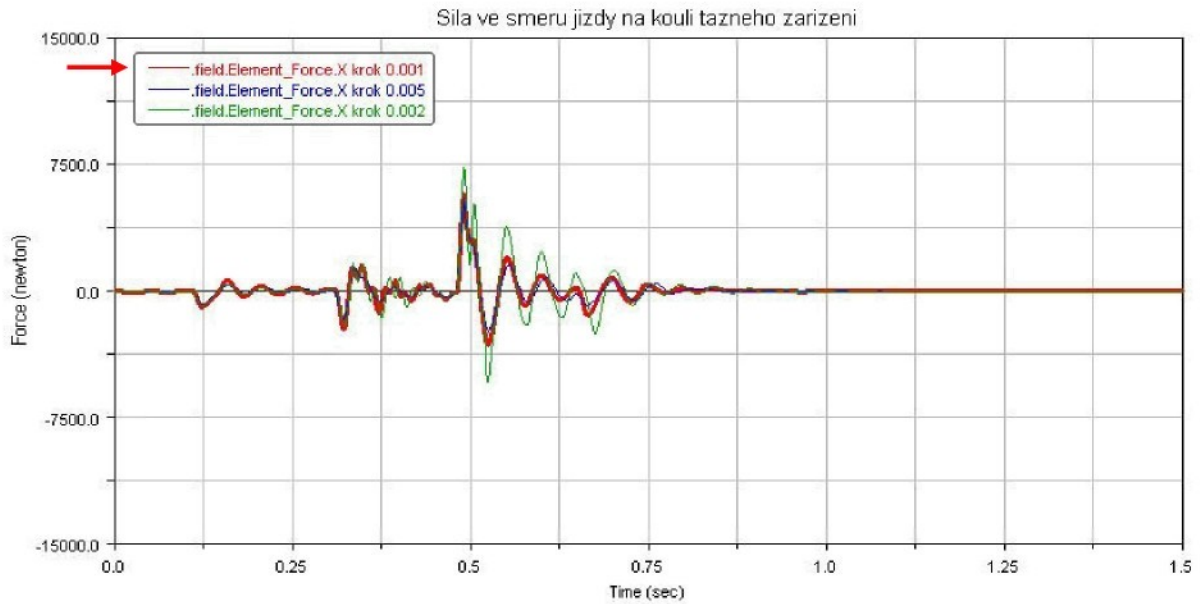
Prostředí MSC.ADAMS při vytvoření pružného tělesa automaticky zahrne do výpočtu všechny vlastní tvary kmitů a jim příslušné frekvence z definičního „mnf“ souboru. Tím může nastat situace, že se začnou v modelu projevovat poměrně vysoké vlastní frekvence módů s největšími pořadovými čísly. Na obrázku 5.20 mají tyto vlastní frekvence řád  $10^4 \text{ Hz}$ . Pečlivým výběrem módů účastnících se simulace proto můžeme toto riziko výrazně eliminovat, neboť si lze většinou vystačit s nižšími vlastními tvary kmitů o menších frekvencích.

Nutně musíme zmínit také to, že v prostředí MSC.ADAMS je za účelem redukce počtu vlastních tvarů kmitu k dispozici užitečný nástroj. Ten na základě předchozí simulace provede automatický výběr těch módů, které se účastní více jak určitou hodnotou procent na celkové deformační energii poddajného tělesa. Tuto procentuální hodnotu může uživatel měnit. Použití tohoto nástroje má své výhody i nevýhody. Výhody spočívají v možnosti snížit složitost modelu a tím i výpočetní čas potřebný k jeho simulaci. Nutným předpokladem je ovšem to, že minimálně jedna simulace již musí proběhnout. To nelze uskutečnit v případě, že výpočet pro špatně definovaný model kolabuje. Nevýhodou tohoto nástroje je také to, že simulace nemusí proběhnout správně a tehdy mohou mít výsledky výběru pro uživatele pouze informační charakter. Mnohdy se ovšem stává, že na základě výběru touto energetickou cestou vysoké módy s velkými vlastními frekvencemi přesto v simulaci zůstávají. Ovšem jako jednu z možností úpravy modelu nelze jinak, než tento nástroj doporučit.

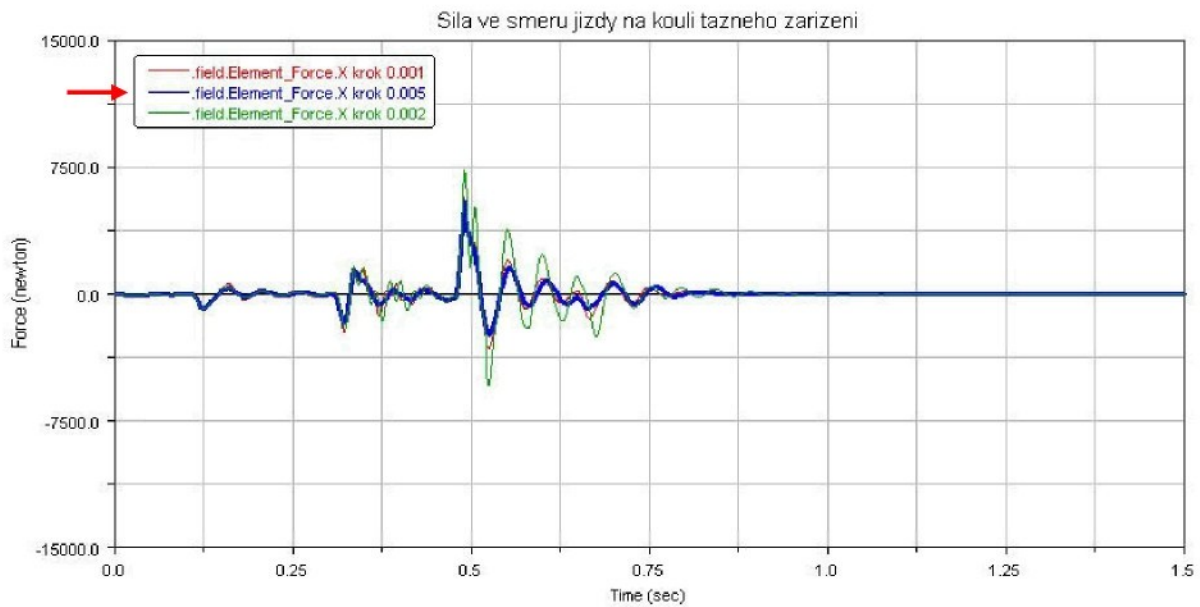
V souvislosti s výběrem vlastních tvarů kmitů vyvstává také jiný problém, který se v případě tažného zařízení zřetelně projevuje. Již zkrájí této kapitoly jsme se zmiňovali o vazbách typu BUSHING v místech uchycení příčného nosníku (konkrétně bočních držáků) ke karoserii. V případě účasti všech vlastních módů v simulaci je možné tyto vazby nahradit pevnými (FIXED). Důvodem je to, že se příčný nosník může deformovat ve všech šesti stupních volnosti. Nás ovšem v konkrétním případě analýzy přenosu silových účinků z přívěsu do karoserie zajímají zejména tři vlastní tvary – ohyb nosníku ve směru jízdy, ohyb ve směru svislém a krut. Tím zjednodušíme danou úlohu tak, že v jiných směrech, než ve kterých se deformují vybrané módy, se bude příčný nosník chovat jako tuhý člen. V tom případě se použitím pevných vazeb v místě úchyty nosníku ke karoserii stane, že jedna vazba bude v určitých směrech model přeurčovat. Prostředí MSC.ADAMS proto ve snaze zabránit lineárně závislým řádkům v Jacobiho matici a tím i její hroziící singularitě bude považovat přebytečné reakce v daných směrech jako nulové. Tím může v jistých případech problém vyřešit, ovšem ne vždy (zejména u více přebytečných vazeb) musí být tato metoda úspěšná. Použitím vazeb typu BUSHING podobným situacím předejdeme, neboť tato vazba neodebírá žádný stupeň volnosti. Pouze je třeba nastavit hodnoty tuhostí a tlumení v jednotlivých směrech podle pravidel z kap. 5.5.1 (tzn., malou hodnotu tlumení a přiměřeně vysokou hodnotu tuhostí).

V souvislosti s návrhy na možné úpravy modelu zmiňme také následující skutečnost. Simulace na obr. 5.21 až 5.25 byly provedeny pro prázdný přívěsný vozík. To se ovšem také může nepříznivě projevit na výsledcích. Bude-li úroveň zatížení tažného zařízení příliš malá, vzniká zde nebezpečí, že se toto zatížení pohltí v numerických nestabilitách chování příčného nosníku a háku. Proto kromě výběru správných tvarů vlastních kmitů zvýšme hodnotu hmotnosti přívěsného vozíku.

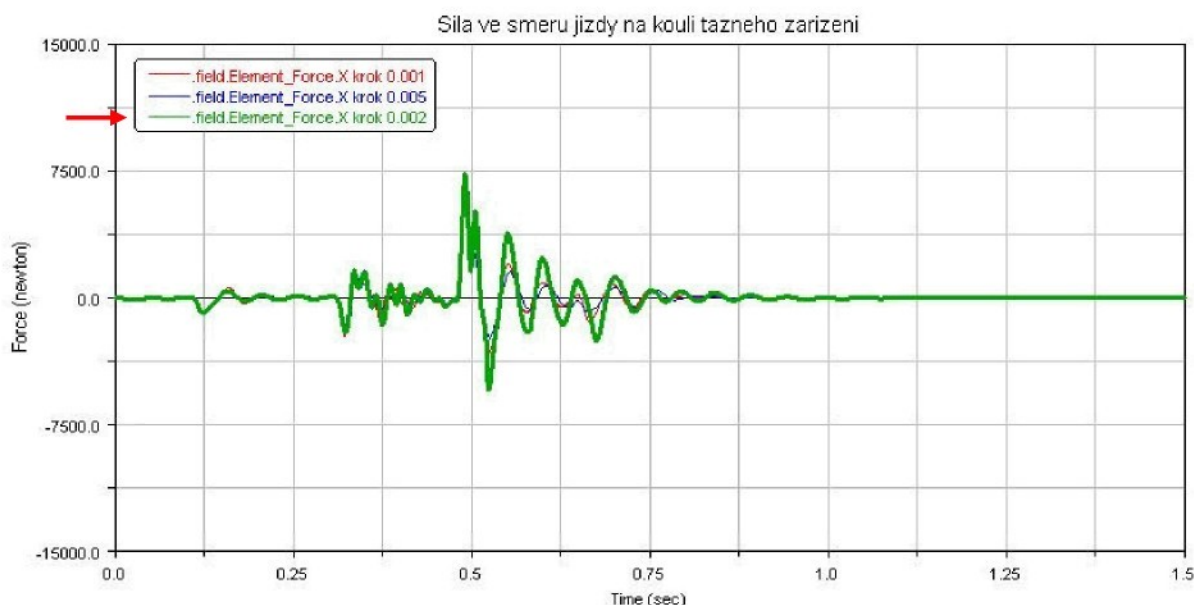
Na následujících obrázcích 5.27 až 5.29 je graficky znázorněn průběh síly mezi ojí přívěsu a koulí tažného zařízení po odstranění přebytečných módů. Výpočet byl pro možnost porovnání stability proveden pro tři hodnoty nastavení integračního kroku výpočtu.



Obr. 5.27 Průběh složky síly ve směru jízdy mezi ojí přívěsu a hákem tažného zařízení po odstranění přebytečných módů pro integrační krok  $10^{-3} s$ .



Obr. 5.28 Průběh složky síly ve směru jízdy mezi ojí přívěsu a hákem tažného zařízení po odstranění přebytečných módů pro integrační krok  $5 \cdot 10^{-3} s$ .



Obr. 5.29 Průběh složky síly ve směru jízdy mezi ojí přívěsu a hákem tažného zařízení po odstranění přebytečných módů pro integrační krok  $2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ .

Z obrázků je zřejmé, že vlivem provedených úprav došlo k určitému ustálení výpočtu. Jestliže bychom potřebovali znát přesnou hodnotu síly v daném okamžiku, museli bychom daný model dále ladit (např. pro výběr jiných vlastních tvarů kmitů, atd.). To je poměrně náročná záležitost.

Ukažme však na tomto příkladě jinou možnost ověření správnosti výsledků. Hodnoty zjištěného silového účinku lze orientačně ověřit na základě výpočtu setrvačných účinků přívěsu, který je brzděn nájezdem svých kol na překážku. Tyto účinky jsou úměrné zrychlení vozíku podle známého Newtonova zákona

$$F = ma,$$

kde  $F$  je setrvačná síla (působící na hák tažného zařízení),

$m$  je hmotnost přívěsu,

$a$  je zrychlení vozíku.

Průběh zrychlení vozíku vypočtený v prostředí MSC.ADAMS v závislosti na čase je vykreslen na následujícím obrázku 5.30.

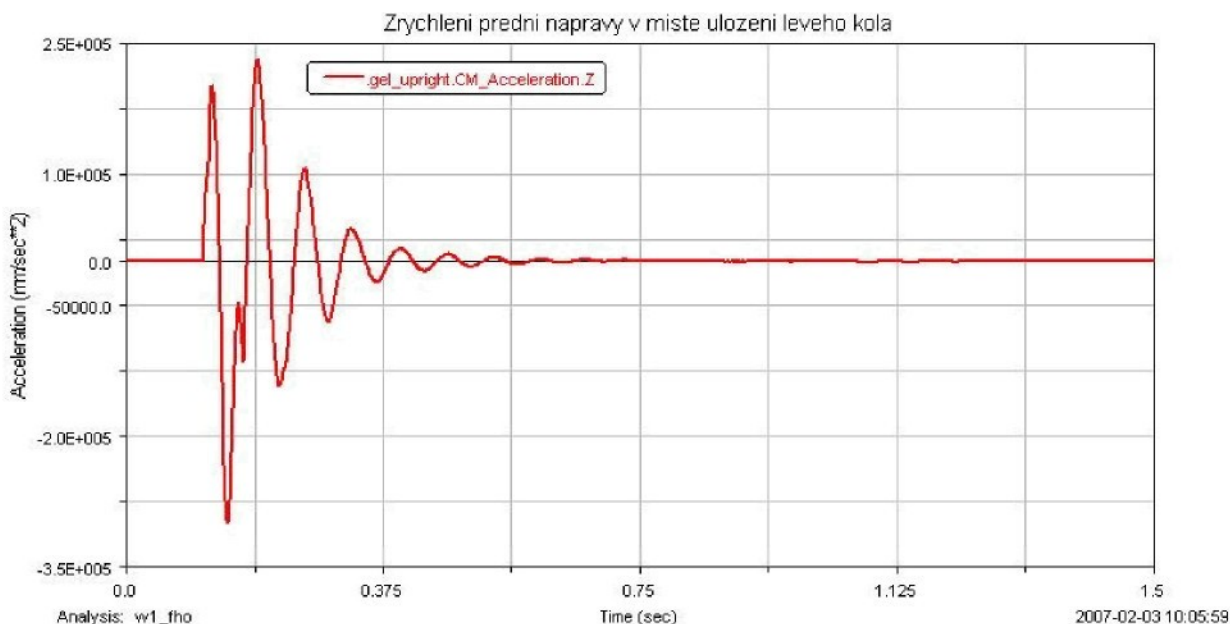


Obr. 5.30 Průběh složky zrychlení korby přívěsu ve směru jízdy.

Z velikosti maximálního zrychlení při nájezdu kol přívěsu na překážku (cca  $75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) plyne, že vynásobením této hodnoty hmotností vozíku ( $100 \text{ kg}$ ) získáme přibližnou velikost síly mezi přívěsem a automobilem při nájezdu kol vozíku na překážku. Tato hodnota je cca  $7500 \text{ N}$ . Z toho plyne, že hodnoty v grafickém průběhu síly na obr. 5.27 až 5.29 byly spočteny správně.

Ovšem ne zcela vždy navržené úpravy tak výrazně pomohou jako v případě grafických průběhů na obr. 5.27 až 5.29. V takových případech může být příčinou problémů např. nesprávná volba integrační metody. Její změna je v mnoha případech zřejmě to nejjednodušší, co může uživatel použít.

Většinou jsou však tyto obtíže způsobeny samotným modelem. A to buď jeho samotnou fyzikální podstatou, nebo, jak bylo již výše zmíněno, nevhodnou formulací. Ovšem nevhodně zformulovaný model zřejmě ani jiná metoda nevyřeší správně. V tomto případě je vhodné kontrolovat dané výsledky simulace s průběhy získanými jinou metodou (např. použitím odlišného softwaru) nebo z měření. V následujícím textu uveďme příklad tvorby srovnávacího modelu v prostředí MSC.ADAMS/View a Working Model 2D. Dále ukažme příklad postupu při porovnávání simulačních výsledků s měřenými daty na skutečném automobilu. Jako porovnávanou veličinu si zvolme zrychlení, které se během jízdy automobilu přenáší z vozovky do levé přední nápravy. Na obrázku 5.31 je zachycen výsledek simulace v prostředí Car.



Obr. 5.31 Průběh zrychlení přenášený ve svislém směru z vozovky do přední nápravy v místě uložení levého kola.

Je zřejmé, že pro ověření správnosti simulačního modelu je nutné porovnat více průběhů. Tím bychom se ovšem dostali mimo rámec této disertační práce, neboť jejím cílem je ukázat možné postupy při odladění simulace multibody modelů.

### **5.5.3.3 Working Model 2D**

Jak již název napovídá, Working Model 2D (dále jen WM2D) je program určený pouze pro rovinnou analýzu mechanismů. Vzhledem k tomu, že automobil s přívěsem jede stále stejným směrem a navíc se ve zjednodušení jedná o symetrickou úlohu podle podélné roviny symetrie automobilu, můžeme tento program využít pro porovnávací simulace. Ovšem vzhledem k úrovni zjednodušení daného modelu je nutné ke zjištěným výsledkům přistupovat jen s velkou opatrností. Dokážeme-li však odhadnout dopad jednotlivých zjednodušení na průběhy simulace, můžou nám její výsledky přinést uspokojivé informace.

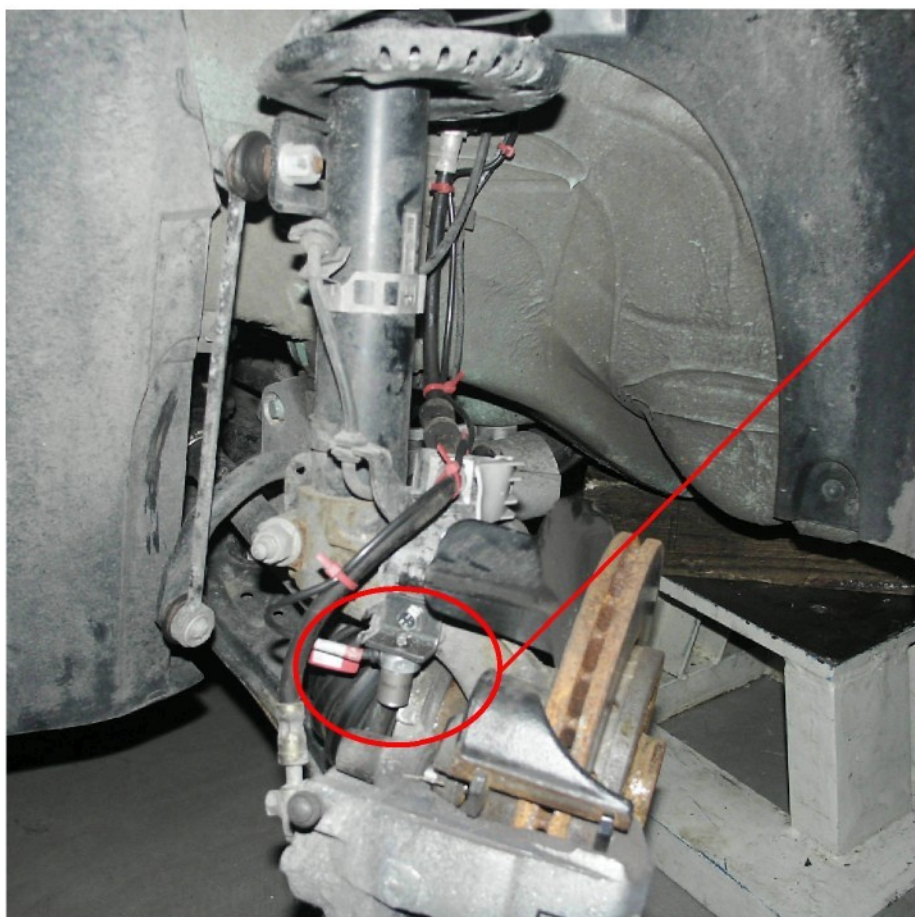
Z důvodu odlišného pojetí modelu od prostředí MSC.ADAMS i od následného měření uvedeme příklad modelu v prostředí WM2D v příloze P6.

### **5.5.3.4 Měření**

Měření potřebných dat bylo provedeno na skutečném zeleném automobilu Škoda Fabia (motorizace 1.4 MPI) s přívěsem v rámci Hydrodynamické laboratoře v Liberci – Doubí. Automobil i vozíkem byly osazeny snímači – akcelerometry. Jiné snímače vhodné pro použití na automobilu nebyly k dispozici (např. snímače polohy). To s sebou přináší jistou nevýhodu, neboť porovnávání zrychlení je daleko obtížnější a má menší vypovídací hodnotu než porovnání polohy (zrychlení je druhou derivací polohy, a proto je mnohem citlivější).

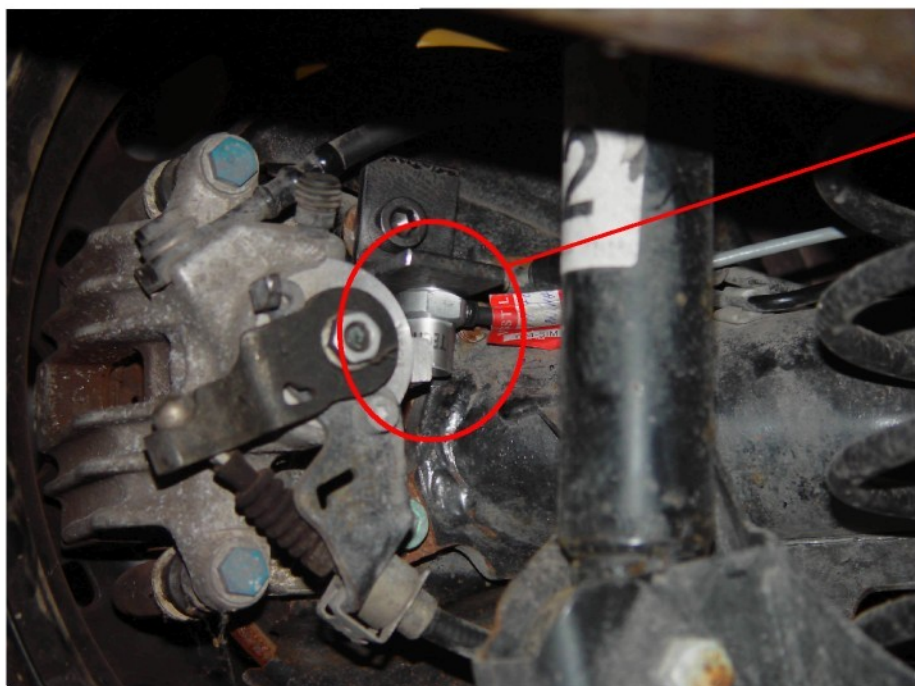
Na automobilu bylo rozmístěno celkem devět akcelerometrů, na přívěsu jeden. Každému kolu automobilu byl přiřazen jeden akcelerometr s rozsahem do 50g. Tyto snímače byly umístěny co nejbližně středům jednotlivých kol. Jejich připevnění vyžadovalo výrobu speciálních držáků. Na ně byly kladeny nároky co největší tuhosti. Následující obrázky 5.32 a 5.33 zachycují připevnění snímačů na levém předním a levém zadním kole.





držák  
snímače je  
umístěn pod  
šroub úchyty  
brzdové  
hadičky

Obr. 5.32 Uchycení akcelometru k přední nápravě.



držák snímače  
umístěn pod  
šroub třmenu  
zadní kotoučové  
brzdy

Obr. 5.33 Uchycení akcelometru k zadní nápravě.



Další čtyři akcelerometry byly umístěny co nejblíže místům ukotvení předních a zadních pružicích a tlumících jednotek ke karoserii automobilu. Jejich připevnění bylo vyřešeno magnetickým držákem. Rozsah těchto akcelerometrů byl 5g.

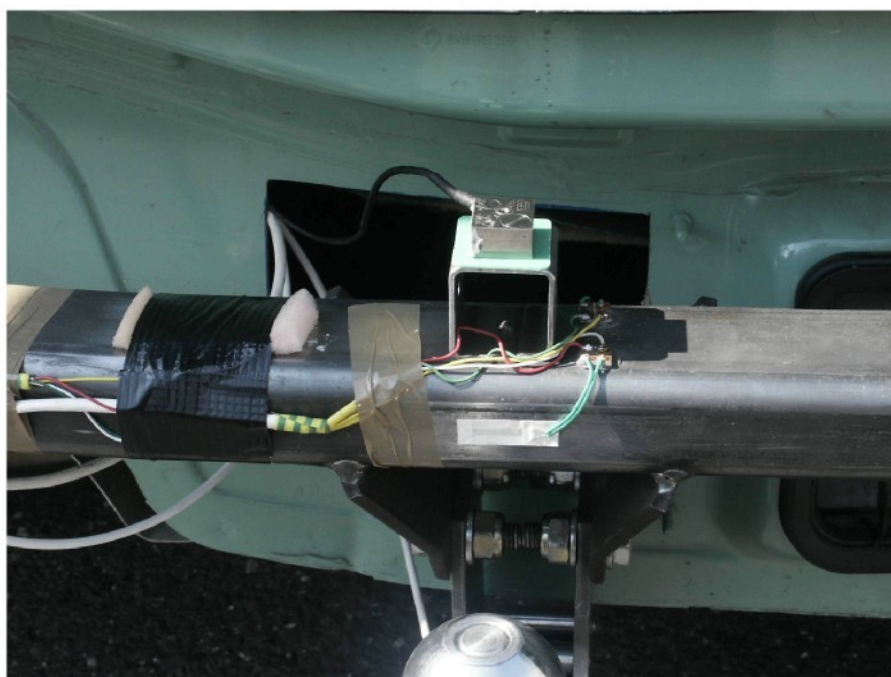


Obr. 5.34 Uchycení akcelerometru ke karoserii vpředu.



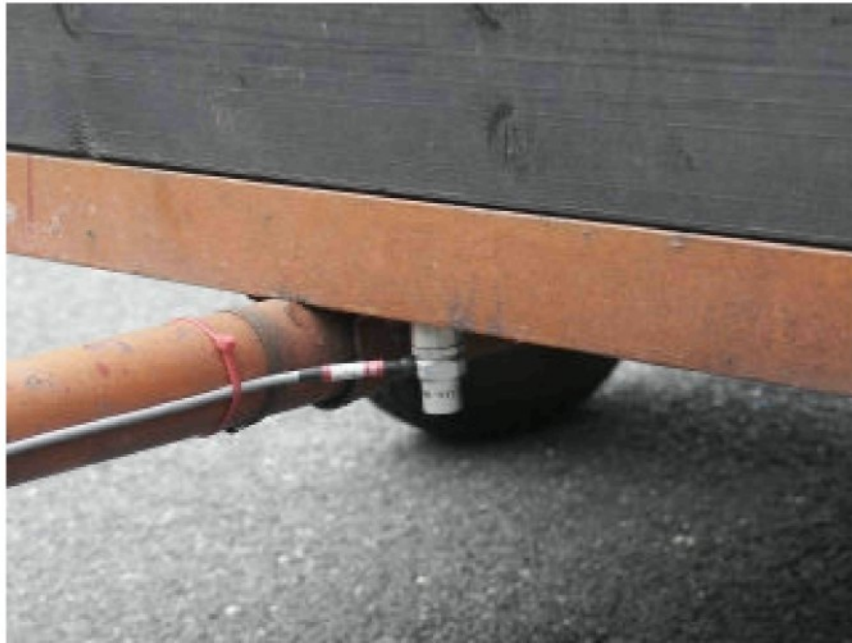
Obr. 5.35 Uchycení akcelerometru ke karoserii vzadu.

Uchycení třísosého akcelerometru s rozsahem 5g k příčnému nosníku automobilu bylo řešeno pomocí „O“ profilu. Ten byl epoxidovým lepidlem připevněn k nosníku a posléze byl k němu akcelerometr přišroubován.



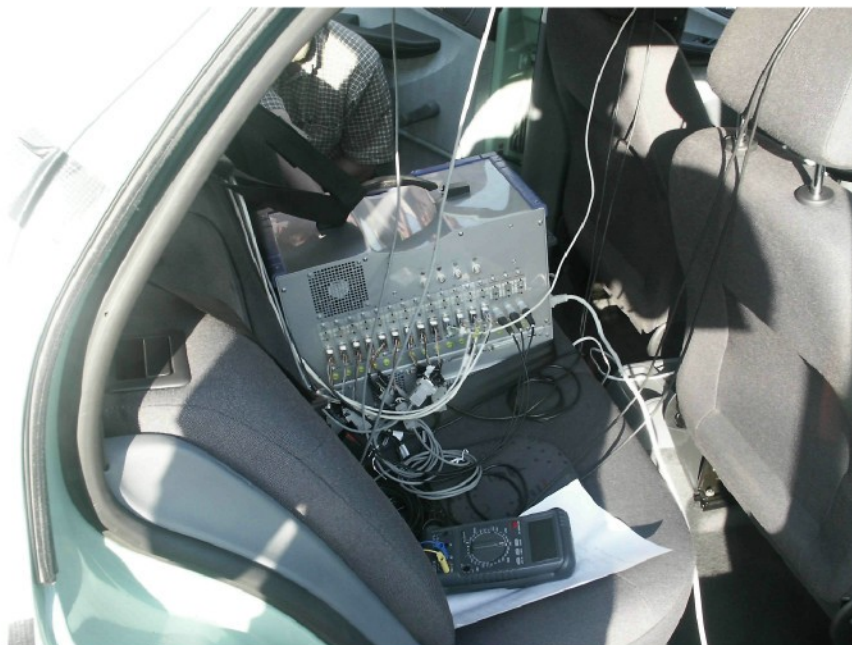
Obr. 5.36 Upevnění třísosého akcelerometru k příčnému nosníku tažného zařízení.

Poslední akcelerometr byl umístěn na oji přivěsného vozíku v místě spojení s korbou. Jeho rozsah byl 5g. Na následujícím obrázku je situace zachycena:



Obr. 5.37 Upevnění akcelerometru ke korbě přívěsného vozíku.

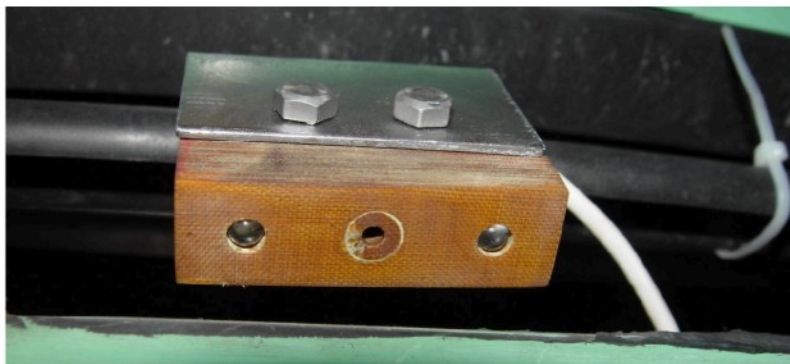
Všechny uvedené snímače byly propojeny s průmyslovým počítačem, který zapůjčila firma DEWETRON. Vstupy od všech snímačů byly před samotným zpracováním zesíleny stejnosměrným zesilovačem a signál byl ošetřen frekvenčním filtrem, který ze vstupních dat odstranil frekvence vyšší než 100 Hz. Počítač byl připevněn pomocí bezpečnostních pásů na zadním sedadle automobilu.



Obr. 5.38 Měřicí PC.



Vzhledem k množství měřených dat bylo žádoucí, aby se záznam spouštěl automaticky těsně před příjezdem automobilu k překážce. Pro tento účel byl vyroben snímač ze dvou infračervených diod a fototranzistoru. Tento snímač byl připojen k jednomu z volných měřicích kanálů PC. Na vozovce v místě před překážkou byla položena lesklá fólie. Přejezdem automobilu přes toto místo se paprsky z diod odrazily od fólie a dopadly na fototranzistor. Tím se objevil na vstupu PC impuls, který měření spustil.



Obr. 5.39 Snímač spouštění záznamu měření.

Aby bylo možné zjistit přesnou rychlost automobilu při nájezdu na překážku, byly na projížděnou dráhu umístěny za první fólii ještě další dvě lesklé fólie v definovaných vzdálenostech od sebe i od překážek. Ze dvou po sobě jdoucích pulsů od fototranzistoru je proto možné zjistit přesnou rychlost automobilu a není nutné se spoléhat na tachometr, který nemusí být zcela přesný.

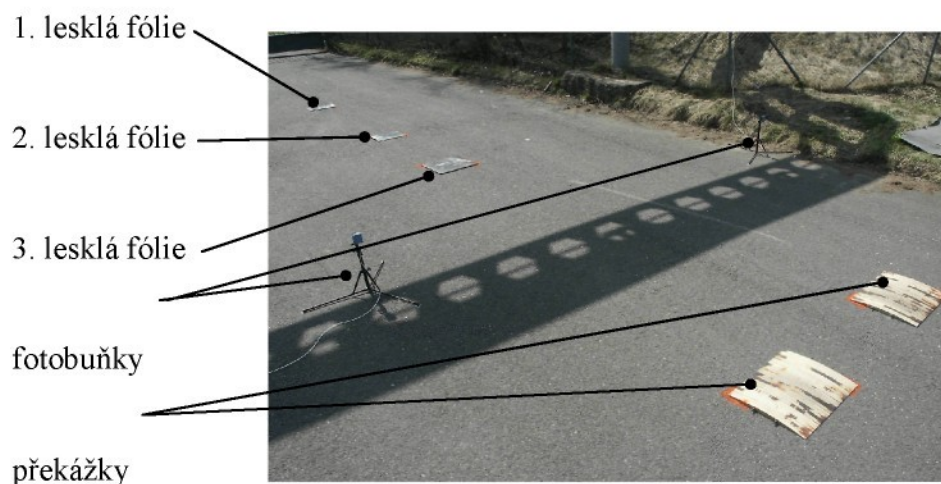
Průběh celého přejezdu přes překážku byl zaznamenáván rychloběžnou kamerou. Bylo to zejména z toho důvodu, aby bylo možné porovnat naměřená data v určitém okamžiku s aktuální polohou automobilu v téže chvíli. Jelikož kamera díky svému velmi rychlému snímkování neumožňovala příliš dlouhý záznam dat, bylo třeba tuto kameru spouštět těsně před najetím předních kol automobilu na překážku. K tomuto účelu byly po obou stranách dráhy postaveny v dané vzdálenosti od překážek fotobuňky, které v okamžiku, kdy automobil přerušil paprsek mezi nimi, sepnuly kameru. Na automobilu ovšem nebyla na předním nárazníku žádná plocha, která by zajišťovala sepnutí kamery vždy ve stejném okamžiku, nezávislém na způsobu najetí automobilu na překážky. Proto byl na přední nárazník v místě pro SPZ připevněn kartonový kvádr, který přerušil paprsek vždy ve stejném okamžiku.

Tento kvádr měl však ještě jednu roli. Na jeho přední části byl pruh žluté lepenky. V místě zadní hrany překážek stála svislá tyč, která měla známou vzdálenost od fotobuněk. Z těchto poznatků lze zkontrolovat čas událostí zaznamenaných na kameře. Od okamžiku spuštění kamery do okamžiku, kdy je v záběru kamery vidět překrytí pruhu lepenky na kvádru a svislé tyče, musí uplynout doba, která je přímo úměrná vzdálenosti tyče od fotobuněk a nepřímo úměrná rychlosti automobilu. Existuje však i druhý způsob zjištění času na záznamu z kamery. Z předem daného snímkování a z pořadového čísla daného

snímku lze dopočítat čas, který uplynul od počátku spuštění kamery. Počet snímků za vteřinu se lišil podle rychlosti jízdy automobilu. Pro rychlosti  $10 \text{ km.h}^{-1}$  a  $20 \text{ km.h}^{-1}$  byla zvolena frekvence 60 snímků za sekundu, pro ostatní rychlosti byla frekvence 120 snímků za sekundu. Na následujících obrázcích je znázorněn kvádr na předním nárazníku a dráha, kterou automobil projížděl.



Obr. 5.40 Kartonový kvádr pro sepnutí záznamu rychloběžné kamery.



Obr. 5.41 Měřicí trať.



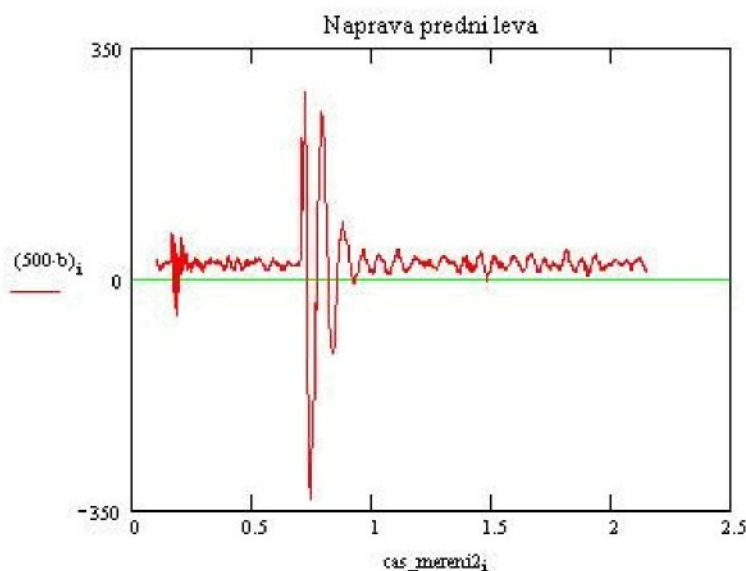
## Sled měření

Zároveň s měřením dynamického působení přívěsu na automobil během jízdy probíhalo i měření jízdních vlastností samotného automobilu. Toto měření zde nebudeme popisovat. Jeho výsledky jsou uvedeny v práci [1]. Zde se zaměříme pouze na jízdu automobilu s přívěsem.

Přejezdy vozidla s přívěsem byly uskutečněny pro tři typy překážek (kruhovou úseč výšky 25 mm, kruhovou úseč výšky 50 mm a rampu výšky 50 mm popsanou obr. 5.20). Přes každý typ překážky bylo provedeno pro 6 rychlostí a 4 způsoby zatížení přívěsu 24 přejezdů. Rychlosti přejezdu byly: 10  $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ , 20  $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ , 30  $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ , 40  $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ , 50  $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$  a 60  $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Pro první sérii přejezdů byl přívěs odlehčen, při dalších přejezdech byl zatížen hmotností 200 kg postupně nad nápravou, před nápravou a za nápravou ve směru jízdy automobilu.

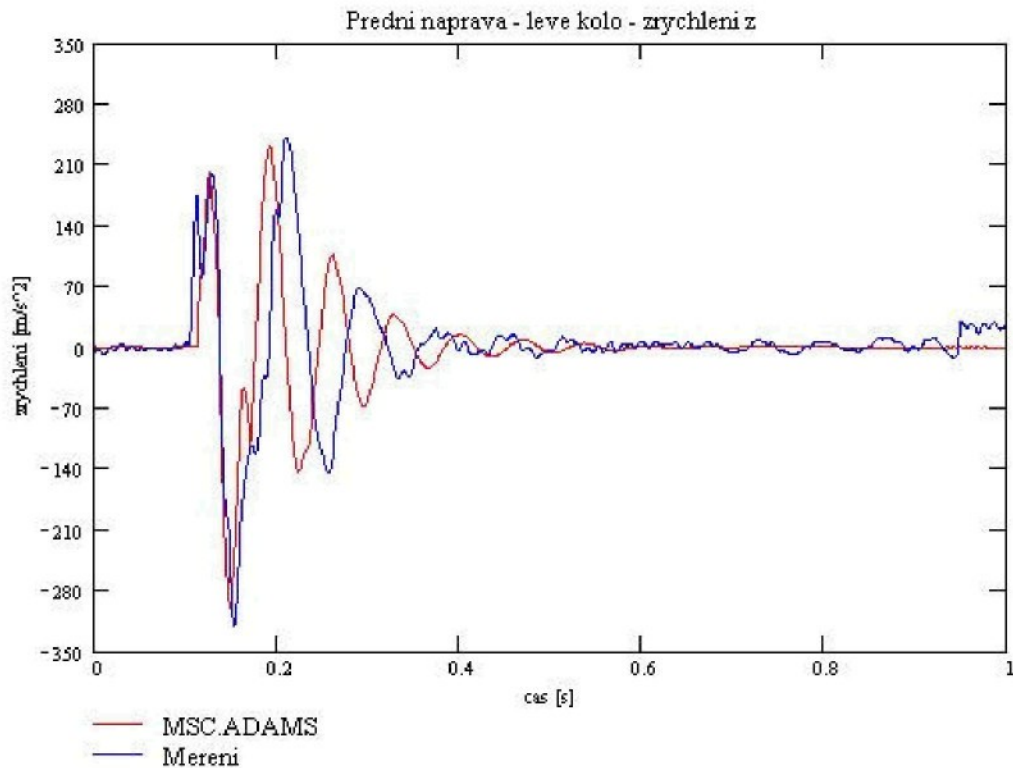
## Výsledek měření

Na následujícím grafu je pro ukázkou zachycen průběh zrychlení levé přední nápravy v místě uchycení. Průběh je vynásoben převodními konstantami, které byly získány během kalibrace akcelerometrů. Proto je velikost zrychlení na svislé ose udána v  $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Na vodorovné ose je uveden čas v s.



Obr. 5.42. Změřený průběh zrychlení na levé přední nápravě automobilu.

Uvedme na závěr pro informaci porovnání výsledků průběhu zrychlení na přední nápravě v místě uložení levého kola získaných v prostředí MSC.ADAMS/Car a měřením.



Obr. 5.43 Ukázka porovnání naměřených dat s výsledky simulace v prostředí MSC.ADAMS/Car.

Z grafu je zřejmé, že jsou průběhy velmi podobné. Rozdíl je patrný zejména v měřítku v časové ose. To je však způsobeno nestejnými rychlostmi přejezdu překážky automobilem. Nejenom že kolísala rychlost automobilu v prostředí MSC.ADAMS, ale z dodatečných výpočtů ze signálu fotobuněk bylo zjištěno, že tachometr automobilu ukazoval větší hodnotu, než byla skutečná rychlost vozidla.

## 6. Shrnutí nejdůležitějších poznatků

V průběhu této práce bylo v předchozích kapitolách podrobně popsáno několik poznatků a z nich plynoucích doporučení. Shrňme proto v této kapitole všechny významné informace, které by mohly být uživateli prospěšné při tvorbě multibody modelů a jejich následné simulaci. Jedná se zejména o poznatky zaměřené na programové prostředí MSC.ADAMS.

Již z úvodních odstavců bylo zřejmé, že multibody simulace představují v dnešní době poměrně silný nástroj pro analýzu chování mechanických systémů. V porovnání s analyticko-numerickými výpočty (popis matematického modelu soustavou rovnic uživatelem a jejich následném numerickém řešení – viz příklad v příloze P1) umožňují rychlejší a pružnější simulaci chování daného mechanismu v čase. Tato výhoda je dána skutečností, že uživatel pouze sestaví model ve virtuální prostředí, přičemž matematický popis a jeho řešení již program provádí automaticky podle definovaných algoritmů (viz. kap. 4.1 a příloha P3). Možnost tvorby libovolného modelu ve virtuálním prostředí však současně přináší určité riziko – méně zkušený uživatel může úlohu nevhodně formulovat. To mívá za následek negativní ovlivnění přesnosti simulací a v mnoha případech i neřešitelnost některých modelů.

Výsledky, které jsou získány simulací nevhodně formulovaného problému, mohou vykazovat velkou citlivost na změnu parametrů modelu nebo integrační metody. Závislost průběhu výsledků na těchto změnách přitom bývá zcela náhodná. Při odstraňování zmíněných potíží se nelze ani příliš spoléhat na kontrolu průběhu řešení, neboť postup výpočtu bývá uživateli obvykle skrytý.

Podíváme-li se podrobněji na matematický popis modelu a jeho řešení (viz kap.3.1 a 4.2), můžeme usuzovat, že při nevhodně formulovaném problému vykazuje Jacobiho matice špatnou podmíněnost. Řešení dané úlohy je přímo závislé na inverzi této matice. Proto byla v této práci věnována pozornost možnostem vhodného ovlivnění její skladby. Pokusme se formulovat zjištěné poznatky do několika hlavních bodů:

a) **Integrační krok výpočtu** - jeho velikost je nepřímo úměrná některým prvkům na hlavní diagonále Jacobiho matice (viz kap. 5.4.1, tab. 5.3). Z kap. 4.1.3 vyplývá, že všechny metody implementované do prostředí MSC.ADAMS jsou definovány s proměnným integračním krokem (včetně metody CONSTANT BDF – viz kap. 4.1.3.3). Vyskytne-li se proto v modelu v průběhu řešení náhlá změna určité veličiny (zatěžující síly, skoková změna polohy, atd.), dojde k výraznému snížení hodnoty integračního kroku. Tím významně vzrostou hodnoty některých prvků na hlavní diagonále a také hodnoty vlastních čísel Jacobiho matice. Tato skutečnost může nepříznivě ovlivnit její podmíněnost, která bezprostředně souvisí s přesností, popř. s úspěšností celé simulace.



Nutno ovšem v této souvislosti připomenout, že v prostředí MSC.ADAMS existuje jistý postup, jak těmto komplikacím předejít. Při sestavování rovnic je možné zadat do programu požadavek na tzv. SI2 formulaci modelu (Stabilized Index 2). Tato metoda snižuje index algebraicko-diferenciální soustavy rovnic ze 3 na 2. To má za následek skutečnost, že ty prvky hlavní diagonály Jacobiho matice, které byly nepřímo úměrné velikosti kroku, budou nyní hodnotou integračního kroku násobeny. Tato formulace však významně zpomaluje výpočet a je dostupná pouze pro BDF metody. Dalším omezením je skutečnost, že při popisu funkce posuvného nebo rotačního pohybu nelze užít jinou závislost než časovou. Ta musí být navíc zadána hladkou křivkou, která má spojitou derivaci alespoň do druhého řádu (spojitá zrychlení). Pro některé typy úloh je ovšem SI2 formulace jistou možností, jak zlepšit průběh výpočtu, který by byl díky malému integračnímu kroku jinak komplikovaný.

**b) Velké rozdíly v hmotových charakteristikách a použití nevhodného typu vazby** – tato vlastnost modelu má podobné účinky jako velikost integračního kroku. Hmotnosti či momenty setrvačnosti přímo ovlivňují velikost prvků hlavní diagonály. To v kombinaci s použitím kinematického typu vazby vede k nárůstu kondičního čísla matice a ke ztrátě numerické stability simulace.

Možným řešením tohoto problému je buď snížení rozdílu v hmotnostech některých těles v systému (pokud to charakter úlohy umožňuje), popř. použití jiného typu vazby. Zejména druhou možnost lze doporučit ve většině případů. Použití kinematické vazby v modelu totiž znamená doplnit soustavu diferenciálních rovnic o rovnice s odlišnou strukturou. Zatímco pohybové rovnice vážou silové účinky, kinematické udávají závislost mezi kinematickými charakteristikami modelu. V této souvislosti se nabízí využití takových typů vazeb, které neodebírají zadanou podmínkou žádný stupeň volnosti, ale působí v daném směru na těleso pružně-elastickou silou. Správnou definicí parametrů těchto sil dosáhneme stejného efektu na těleso jako v případě použití kinematické vazby. Rovnice popisující tento děj však budou podobného charakteru jako rovnice pohybové.

**c) Volba pořadí kroků při tvorbě modelu** – v kap. 5.5.2 bylo ukázáno, jakým způsobem může nesprávné pořadí při vytváření multibody modelů ovlivnit strukturu Jacobiho matice. Polohy prvků této matice jsou přímo dány pořadím při vzniku jednotlivých těles modelu a definicí vzájemných vazeb. Tím můžeme ovlivnit šířku pásu Jacobiho matice. Při výpočtech se ve většině multibody simulacích ukazuje, že čím je šířka pásu této matice větší, tím je dosaženo její horší podmíněnosti. Velikosti šířky Jacobiho matice je také přímo úměrná době výpočtu. Vzhledem k tomu, že v prostředí MSC.ADAMS je pro tvorbu inverzní Jacobiho matice použito LU rozkladu (princip Gaussovy eliminace), je nutné během této operace provádět tzv. pivotaci (přesunutí řádků a sloupců matice tak, aby bylo na diagonále co největší číslo). Tato operace je tím náročnější, čím větší je šířka pásu matice.

Lze proto doporučit postupnou návaznost v pořadí při vytváření jednotlivých prvků modelu a jejich vzájemných vazeb. Výhodné se jeví spojování těles s co nejbližšími pořadovými čísly (podobně jako u sítí v MKP). Také vazby je vhodné vytvářet v pořadí, v jakém je program ukládá do Jacobiho matice (viz kap. 5.5.2) s ohledem na pořadí tvorby jednotlivých těles. Jsou ovšem případy, kdy model nelze v celém rozsahu podle těchto pravidel koncipovat. Je však vždy výhodné výše uvedená doporučení pokud možno dodržovat.

**d) Citlivá implementace poddajných těles** – tato problematika představuje jednu z největších obtíží, která může způsobovat závažné problémy při simulacích. Multibody programy jsou v převážné míře stavěny na práci s velkým počtem tuhých těles, které jsou vzájemně propojeny vazbami s podobnými parametry. Existují však určité typy úloh, které mohou tuto strukturu narušovat. Některé typické problémy (např. kontakty) bývají zpravidla v programu dobře ošetřeny. V mnoha případech však úspěšnost řešení závisí na zkušenostech uživatele. To se děje zejména při implementaci poddajných těles, která byla vytvořena v MKP. V takovém případě totiž mohou v modelu vystupovat členy s velmi odlišnou dynamickou poddajností. To vede k velkému rozptylu hodnot vlastních čísel Jacobiho matice a posléze k ztížené řešitelnosti celé úlohy.

Východiskem z této situace je citlivý výběr jednotlivých vlastních tvarů kmitů všech poddajných těles tak, aby jejich implementací do multibody systému nedošlo k nevhodnému ovlivnění numerické stability výsledného modelu (vlivem nadměrného rozšíření pásma vlastních frekvencí) - viz kap. 5.5.3.

Jsou ovšem případy, kdy nelze z principu úlohy v definici MKP tělesa opomenout žádný z vlastních tvarů, nebo jsou vlastní frekvence nejnižších tvarů kmitů mnohem vyšší než vlastní frekvence zastoupené v modelu. To je např. situace modelu osobního automobilu s přívěsem z kap. 5.5.3. Zatímco je automobil definovaný tuhými tělesy s pružně-elastickými prvky v relativně nízkém pásmu vlastních frekvencí (např. pružně uložená náprava má vlastní frekvenci cca 10 Hz, vlastní frekvence pohybu karoserie automobilu bývají v řádu 1 Hz), poddajný model tažného zařízení je v porovnání s modelem automobilu příliš tuhý (nejnižší vlastní frekvence jsou v řádu kHz). V takových případech je vhodné řešit multibody model a MKP model odděleně. Za tímto účelem existuje v dnešní době již dosti propracované propojení mezi některými multibody programy a MKP softwary (např. MSC.ADAMS – MSC.Marc, atd.).

**e) Model prochází nevhodnou polohou** – během simulace může dojít k situaci, kdy se model dostane do polohy, kdy některá z vazeb bude přebytečná. Potom se mohou stát řádky Jacobiho matice příslušné dané vazbě lineárně závislé na jiných. To může způsobit komplikace při výpočtu a jeho následné selhání (viz. kap. 5.5.1).

Řešením může být v tomto případě přehodnocení konfigurace modelu či použití poddajných vazeb typu BUSHING (podobně jako v odst. b) ).

## 7. Závěr

V dnešní době dochází v oblastech komplexního dynamického vyšetřování mechanických systémů k významným změnám a pokroku v implementaci výpočetní techniky. To přináší dříve nebývalé možnosti modelovat ve virtuálním prostředí poměrně složité mechanické systémy, které se mohou skládat z mnoha těles (multibody systémy). V souvislosti s tím však dochází často k situaci, že ne všechny takto vytvořené modely jsou vhodné pro úspěšnou simulaci. Ukazuje se, že některé problémy jsou v daném programovém prostředí snadno řešitelné, jiné úlohy naopak vyžadují hlubší znalosti programového prostředí, bez kterých je řešení problému buď nesprávné, popř. se vůbec nezdaří.

Cílem této práce bylo popsat autorovy zkušenosti s řešením multibody systémů, analyzovat některé problémy a navrhnout vhodné postupy při tvorbě modelů zajišťujících úspěšné simulační řešení. Podrobnější informace k těmto tématům jsou podány v kapitolách 4 a 5. Shrnutí nejdůležitějších poznatků je přehledně zpracováno v kapitole 6. Přestože se tato práce převážně zaměřuje na programové prostředí, které je v dnešní době jedním z nejčastěji využívaných v oblasti multibody simulací – MSC.ADAMS společnosti MSC Software Inc., jsou mnohé prezentované poznatky obecnějšího charakteru a mohou se uplatnit i v jiných multibody programech.

Kromě výše uvedených poznatků a doporučení při tvorbě modelů ve virtuálním multibody prostředí byl také navržen způsob, jakým postupovat při ověřování výsledků simulací. Byla naznačena kontrola na základě porovnání vypočtených výsledků pro různé modální vlastnosti pružného členu (kap. 5.5.3.2), nebo pomocí simulace zjednodušeného rovinného modelu v jiném programovém prostředí (Working Model 2D od stejné společnosti) - příloha P6. Při ověřování výsledků simulací mají nezastupitelnou úlohu experimenty a měření na reálném objektu (kap. 5.5.3.4), neboť poskytují velmi cenné informace o skutečných poměrech daného systému.

Autor se snažil v této práci ukázat, co je běžnému uživateli multibody programů skryto. Informace zde uvedené se obvykle nevyskytují ani v manuálech, ani v uživatelských příručkách. Z textu této práce a z uvedených příkladů se ukazuje nesporná důležitost těchto informací a poznatků při stavbě multibody modelů ve virtuálním prostředí a pro jejich úspěšnou simulaci. Lze konstatovat, že cíle vytyčené v úvodu této práce byly ve vymezeném rozsahu splněny.

## 8. Literatura

- [1] BLEKTA, J. *Simulace dynamických účinků nelineárních modelů podvozkových systémů vozidla*. Liberec: Technická univerzita. Fakulta strojní. Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti, 2003. 73 s., 11 s. příloh. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Josef Mevald, CSc.
- [2] REUNGWETWATTANA, A. – TOYAMA, S. An Efficient Dynamic Formulation for Multibody Systems. *Multibody System Dynamics*, October 2001, vol. 6, no. 3, s. 267-289. ISSN 1384-5640
- [3] NEGRUT, Dan – Ortiz, Jose L. On An Approach For The Linearization of The Differential Algebraic Equations of Multibody Dynamics. In *Proceedings of International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications*. Long Beach, September 24.-28., 2005
- [4] BLAJER, W. A Geometrical Interpretation and Uniform Matrix Formulation of Multibody System Dynamics. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 2001, vol. 81, no. 4, s. 247-259. ISSN 0044-2267
- [5] AMIROUCHE, Farid. M. L. *Computational Methods In Multibody Dynamics*. 1st printing, 1992. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. ISBN 0-13-158916-4.
- [6] *MathCAD 2000 User's Guide*. Cambridge: MathSoft, Inc. 1999. ISBN 1-57682-103-X.
- [7] VITÁSEK, Emil. *Numerické metody*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1987. 512 s.
- [8] PŘIKRYL, P. *Numerické metody matematické analýzy*. 2. vyd. Praha: SNTL, 1988.
- [9] REKTORYS, K. a spol. *Přehled užité matematiky II*. Praha, 1995. ISBN 80-85849-62-3
- [10] WANG, Y. X. – WEN, J. M. Gear Method for Solving Differential Equations of Gear Systems. *Journal of Physics: Conference series* 48. 2006. s. 143-148.
- [11] NEGRUT, Dan – RAMPALLI, Rajiv – SAJDAK, Tony. *On the implementation of the  $\alpha$ -method in MSC.ADAMS*. MSC. Software corp., 2004
- [12] *MSC Software Corporation* [online]. <<http://www.mscsoftware.com>>.
- [13] BLEKTA, Jiří – MEVALD, Josef. Some problems with multibody simulations. In *Proceedings of Dynamics of machines 2007*. Praha: Ústav termomechaniky AV ČR, 6.-7.2.2007. s. 9-13. ISBN 978-80-87012-03-01.
- [14] BLEKTA, Jiří – MEVALD, Josef. The multibody simulation of dynamic effects in passenger car trailer. In *Book of extended abstracts. Engineering Mechanics 2006*. Svratka: Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV ČR, 15.-18.5.2006. s. 28-29, ISBN 80-86246-27-2.

- [15] VLK, F. *Koncepce motorových vozidel*. Brno: VLK, 2001. ISBN 80-238-5276-0
- [16] VLK, F. *Dynamika motorových vozidel*. Brno: VLK, 2000. ISBN 80-238-5273-6
- [17] BREPTA R. – PŮST, L. – TUREK F. *Mechanické kmitání. Technický průvodce 71*. 1. vyd. Praha: Sobotáles, 1994. 592 s. ISBN 80-901684-8-5

## 9. Seznam vlastních prací

1. BLEKTA, Jiří. Simulace dynamického chování podvozku osobního automobilu. In *CD z 3. setkání uživatelů softwaru ADAMS*. Špindlerův Mlýn. 2002.
2. ŠKLÍBA, Jan – MEVALD, Josef – BLEKTA, Jiří. Interakce vibroizolačního systému s okolním prostředím, Liberec: *Výzkumný záměr MSM 242100001 Optimalizace vlastností strojů a pracovních procesů*. KMP, FS TU v Liberci, 2002.
3. MEVALD, Josef – BARBORA, Jaromír – BLEKTA, Jiří – KRUTSKÝ, Tomáš. Vybrané problémy ze simulace podvozkových systémů osobních automobilů. In *Book of extended abstracts. Engineering Mechanics 2003*. Svratka. 2003.
4. BLEKTA, J. *Simulace dynamických účinků nelineárních modelů podvozkových systémů vozidla*. Liberec: Technická univerzita. Fakulta strojní. Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti, 2003. 73 s., 11 s. příloh. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Josef Mevald, CSc.
5. BLEKTA, Jiří – MEVALD, Josef – ŠKLÍBA, Jan. Simulace dynamických účinků podvozku osobního automobilu. *Konference Výpočtová mechanika 2003*. Nečtiny. 2003.
6. BLEKTA, Jiří – MEVALD, Josef. Dynamic effects analysis of tire models simulations, In *Book of extended abstracts. Engineering Mechanics 2004*. Svratka. 2004.
7. BLEKTA, Jiří. Simulace dynamických účinků v modelu tažného zařízení osobního automobilu, In *CD ze setkání uživatelů softwaru MSC.ADAMS*. Brno. 2004.
8. ŠKLÍBA, Jan – MEVALD, Josef – BLEKTA, Jiří. Vibroizolace dynamického objektu s minimalizací nepříznivého účinku na obsluhu a okolní prostředí, *Výzkumný záměr MSM 242100001 Optimalizace vlastností strojů a pracovních procesů*. KMP, FS TU v Liberci. Liberec. 2004.
9. BLEKTA, Jiří. Model tažného zařízení osobního automobilu, In *CD ze setkání uživatelů softwaru MSC.ADAMS*. Brno. 2005.
10. ČAPEK, Lukáš – BLEKTA, Jiří – HÁJEK, Petr. Hyperflexe krční páteře – počáteční studie, In *CD ze setkání uživatelů softwaru MSC.ADAMS*. Brno. 2005.
11. BLEKTA, Jiří – MEVALD, Josef – ČAPEK, Lukáš. Model tažného zařízení osobního automobilu. *Konference Výpočtová mechanika 2005*. Nečtiny. 2005.
12. BLEKTA, Jiří – MEVALD, Josef. The Multibody Simulation Of Dynamic Effects In Passenger Car Trailer. In: *Engineering Mechanics 2006: Book of extended abstracts*, Svratka. May 15.-18. 2006, p. 28-29. ISBN 80-86246-27-2.



13. BLEKTA, Jiří – MEVALD, Josef. Některé problémy při tvorbě multibody modelů. In: *Computational Mechanics 2006: Volume II*. Nečtiny, November 6.-8. 2006, p. 71-76. ISBN 80-7043-477-5.
14. BLEKTA, Jiří – MEVALD, Josef. Some problems with multibody simulations. In: *Colloquium Dynamics of Machines 2007*. Praha, February 6.-7. 2007, p. 9-13. ISBN 978-80-87012-03-01.

## 10. Rejstřík

- absolutní bod modelu, 7
- číslo
  - kondiční, 52
  - kondiční, podmíněnosti matice, 52
  - podmíněnosti, 52
- Einsteinovo sumační pravidlo, 18
- energie
  - kinetická, 26
  - potenciální, 26
- funkce
  - Lagrangeova, 27
- matice
  - antisymetrická, 11
  - složek úhlových rychlostí, 16
  - dílčí, rychlosti, 20
  - Jacobiho, 30
  - Jacobiho, rozložení prvků, 57, 58, 59, 63, 65
  - oblast algebraických rovnic, 59
  - oblast pohybových rovnic, 57
  - transformační, 9, 13
- metoda
  - Newtonova, 47
  - redukce souřadnic, 44
- metody
  - Adamsovy, 30
  - BDF, 31
  - predikce-korekce, 31
  - Rungovy-Kuttovy, 30
- metody prostředí MSC.ADAMS
  - ABAM, 44
  - CONSTANT BDF, 43
  - GSTIFF, 42
  - Newmarkova, HHT, 45
  - RKF45, 45
  - WSTIFF, 43
- multibody, 5
- princip
  - virtuálních výkonů, 24
- pružina, 24

rovnice

Lagrangeovy, 27

rychlení

těžiště tělesa, 23

rychlost

úhlová - složky, 15

těžiště, 17

úhlová, 9, 15

silně tlumené systémy, 29

síly

gravitační, 25

kontaktní, 25

zobecněné akční, 23

software

MathCAD, 28

souřadný systém

globální, 7

kartézský, 7

lokální, 7

transformace, 8

stiff systémy, 29

tlumič, 24

vektor

úhlových rychlostí, 20

zobecněných souřadnic, 12

zobecněné souřadnice, 12

vektor, 12



# Přílohy

## P 1 Příklad dvojitého kyvadla

Shrňme v tomto příkladu všechny teoretické poznatky, které byly popsány v kapitole 3.

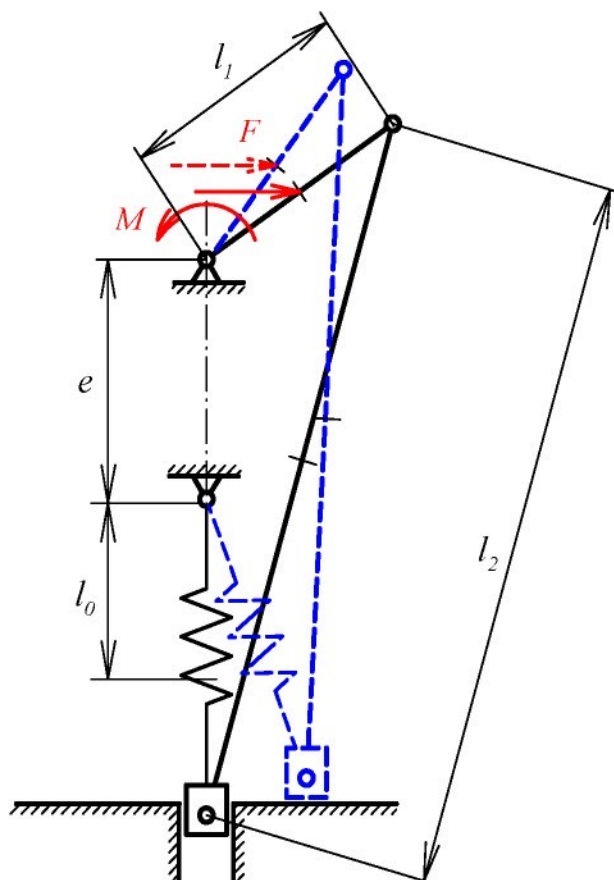
Je dán klikový mechanismus dvojitého kyvadla podle obr. P.1. Kliky 1 je poháněna elektromotorem, jehož silový účinek je střídavě přepínán tak, aby se píst 3 pohyboval v dané dráze. Kromě silového účinku elektromotoru působí na mechanismus také odporová síla  $F$ , která má konstantní velikost i směr (vodorovný). Mechanismus je též zatížen deformační silou pružiny  $F_p$ . Ta vymezuje nežádoucí vůle v čepech.

Vypočtěme chování mechanismu v případě, kdy dojde k poruše přepínání elektromotoru a ten bude působit na kliku pouze momentem ve směru otáčení kliky (píst opustí svoji dráhu). Chování sledujme v čase 3 s. To odpovídá času doběhu motoru od okamžiku, kdy čidlo zjistí poruchu. Hnací moment dobíhajícího motoru je dán funkcí

$$M(t) = M_0 - \frac{I}{3} M_0 \cdot t.$$

Dále spočtěme čas, ve kterém dojde k nárazu pístu na podložku. Dány jsou následující údaje:

$$\begin{aligned} l_1 &= 0.5 \text{ m}, \\ l_2 &= 1.5 \text{ m}, \\ e &= 0.5 \text{ m}, \\ l_0 &= 0.25 \text{ m}, \\ m_1 &= 0.4 \text{ kg}, \\ m_2 &= 1.2 \text{ kg}, \\ k &= 2000 \text{ N m}^{-1}, \\ F &= 500 \text{ N}, \\ M_0 &= 100 \text{ N m}. \end{aligned}$$

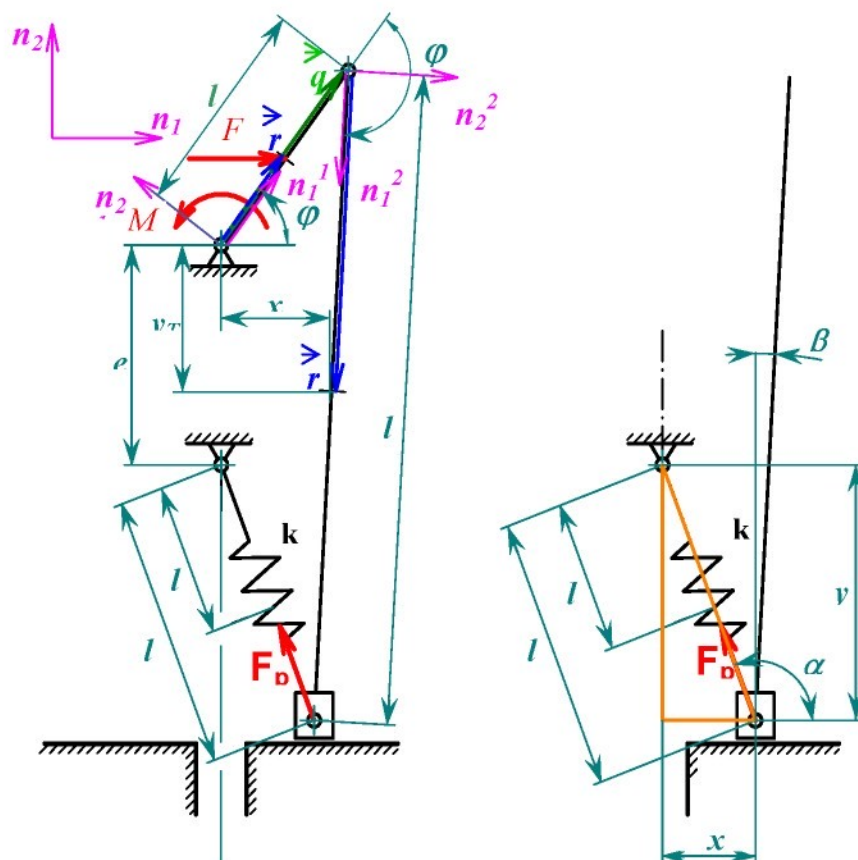


Obr. P.1 Příklad dvojitého kyvadla.



Vzhledem ke složitosti výpočtu zvolme následující zjednodušení:

- uvažujeme pouze rovinný pohyb mechanismu (tzn. 3 st. volnosti pro těleso bez vazeb),
- mechanismus má 2 st. volnosti (úhel  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$ ) – vyjádříme všechny rovnice pouze v závislosti na těchto dvou neznámých,
- sestavujeme pouze pohybové rovnice (tj. bez výpočtu reakčních sil).



Obr. P.2 Rozbor příkladu.

## P 1.1 Matematický popis modelu

Příklad řešíme pomocí Lagrangeových rovnic I. řádu. Začneme s řešením kinematických veličin. Ty jsou potřebné pro tvorbu pohybových rovnic.

### P 1.1.1 Odvození rychlostí

Definujme nejprve antisymetrické matice  $Sr_1$ ,  $Sr_2$ ,  $Sq_2$ , k nim potřebné vektory  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $q_2$  a transformační matice mezi jednotlivými souřadnými systémy  $S^{10}$ ,  $S^{20}$ .

Polohový vektor těžiště členu 1 má souřadnice:  $\mathbf{r}_1 = \left(\frac{l_1}{2}, 0, 0\right)^T \mathbf{n}^1$ ,

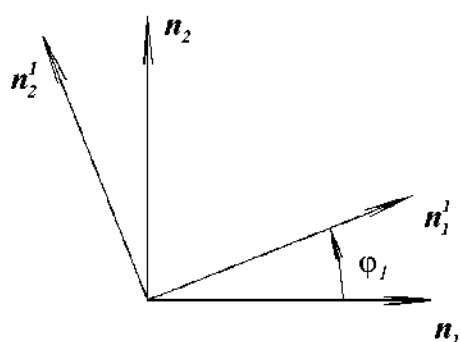
členu 2:  $\mathbf{r}_2 = \left(\frac{l_2}{2}, 0, 0\right)^T \mathbf{n}^2$ .

Polohový vektor vazby členu 2 vůči vazbě členu 1 má souřadnice:  $\mathbf{q}_1 = (l_1, 0, 0)^T \mathbf{n}^1$ .

Príslušné antisymetrické matice mají dle kap. 3.1.5.1 tvar:

$$\mathbf{S}\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} \\ 0 & \frac{l_1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l_2}{2} \\ 0 & \frac{l_2}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{S}\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_1 \\ 0 & l_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Transformační matice  $\mathbf{S}^{10}$  je odvozena z následujícího obrázku:



$$\mathbf{n}_1^1 = \mathbf{n}_1 \cos(90^\circ - \varphi_1) - \mathbf{n}_2 \sin(90^\circ - \varphi_1),$$

$$\mathbf{n}_2^1 = \mathbf{n}_1 \sin(90^\circ - \varphi_1) + \mathbf{n}_2 \cos(90^\circ - \varphi_1).$$

Zjednodušením:

$$\mathbf{n}_1^1 = \mathbf{n}_1 \sin \varphi_1 - \mathbf{n}_2 \cos \varphi_1,$$

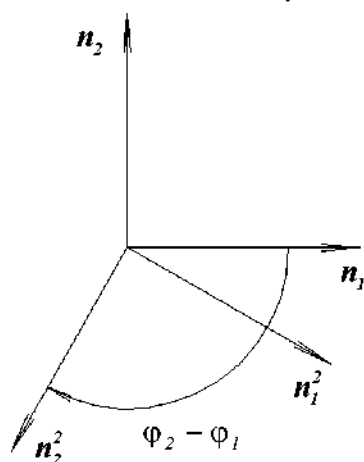
$$\mathbf{n}_2^1 = \mathbf{n}_1 \cos \varphi_1 + \mathbf{n}_2 \sin \varphi_1.$$

Z tohoto zápisu plyne transformační matice:

Obr. P.3 Transformace LSS 1. členu do GSS.

$$\mathbf{S}^{10} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 & 0 \\ \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Transformační matice  $\mathbf{S}^{20}$  vychází z následujícího obrázku:



Obdobným způsobem získáme i matici  $\mathbf{S}^{20}$ :

$$\mathbf{S}^{20} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & -\sin(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obr. P.4 Transformace LSS 1. členu do GSS.

Rychlost pohybu těžiště tělesa 1 je dána vztahem (3.25):

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{y}^T \mathbf{V}^1 \{\mathbf{n}\}. \quad (\text{P.1})$$

Vektor složek  $\mathbf{y}$  úhlové rychlosti členů mechanismu v globálním souřadném systému je

$$\mathbf{y}^T = (0, 0, \dot{\varphi}_1, 0, 0, \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^T.$$

Matice  $\mathbf{V}^1$  má dle kapitoly 3.1.5.1 tvar:

$$\mathbf{V}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{r1} \mathbf{S}^{10} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \text{ kde } \mathbf{0} \text{ je nulová matice rozměru } 3 \times 3.$$

Po dosazení nabude matice  $\mathbf{V}^1$  tvar:

$$\mathbf{V}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}l_1 \\ -\frac{1}{2}l_1 \sin \varphi_1 & \frac{1}{2}l_1 \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a vztah (P.1) pro rychlost  $\mathbf{v}_1$  bude mít hodnotu:

$$\mathbf{v}_1 = (0, 0, \dot{\varphi}_1, 0, 0, \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^T \cdot \mathbf{V}^1 \{\mathbf{n}\} = \left( -\frac{1}{2}l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1, \frac{1}{2}l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1, 0 \right)^T \{\mathbf{n}\}.$$

Podobným způsobem budeme postupovat i při výpočtu rychlosti  $\mathbf{v}_2$ . I v tomto případě použijeme vztah

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{y}^T \mathbf{V}^2 \{\mathbf{n}\}. \quad (\text{P.2})$$

Matice  $\mathbf{V}^2$  má dle kapitoly 3.1.5.1 následující tvar:

$$\mathbf{V}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{S} \mathbf{q}_2 \mathbf{S}^{10} \\ \mathbf{S} \mathbf{r}_2 \mathbf{S}^{20} \end{pmatrix}.$$

Po dosazení do matice  $V^2$  získáme:

$$V^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_1 \\ -l_1 \sin \varphi_1 & l_1 \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l_2}{2} \\ \frac{l_2}{2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & \frac{l_2}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho plyne vztah pro rychlost  $v_2$ :

$$v_2 = (0, 0, \dot{\varphi}_1, 0, 0, \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)^T \cdot V^2 \{n\} = \begin{pmatrix} -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - \frac{l_2}{2} (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - \frac{l_2}{2} (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \{n\}.$$

### P 1.1.2 Kontrola správnosti odvozených rychlostí

Rychlosti těžišť jednotlivých těles můžeme získat také časovou derivací jejich polohových vektorů. Dle výše uvedeného obrázku lze psát:

$$r_1 = \left( \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1, \frac{l_1}{2} \sin \varphi_1, 0 \right)^T \text{ pro polohový vektor těžiště tělesa 1 a}$$

$$r_2 = \left( l_1 \cos \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1), l_1 \sin \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), 0 \right)^T \text{ pro polohový vektor}$$

těžiště tělesa 2.

Po časové derivaci těchto vztahů získáme hledané vektory rychlostí těžišť:

$$v_1 = \left( -\frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1, \frac{l_1}{2} \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1, 0 \right)^T \text{ pro těleso 1 a}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -l_1 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 - \frac{I}{2} l_2 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \sin(\phi_2 - \phi_1) \\ l_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 - \frac{I}{2} l_2 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \cos(\phi_2 - \phi_1) \\ 0 \end{pmatrix}^T \text{ pro těleso 2.}$$

Po porovnání s výsledky předchozího postupu je zřejmé, že výpočet proběhl správně. V této souvislosti je vhodné také upozornit na náročnost jednotlivých postupů. V prvním případě je výpočet rychlosti poměrně složitou záležitostí. Je to ovšem daň obecnosti počítačového postupu. S podobnými případy se budeme setkávat i dále.

### P 1.1.3 Výpočet kinetické energie systému

Dle obrázku P.2 a vztahů v kapitole 3.1.11.1 je kinetická energie dvojitého kyvadla dána následujícím předpisem:

$$T = \frac{I}{2} \left[ \left( {}^R \boldsymbol{\omega}^1 \right)^T \mathbf{I}_o^1 {}^R \bar{\boldsymbol{\omega}}^1 + m_2 (\mathbf{v}_2)^2 + \left( {}^R \bar{\boldsymbol{\omega}}^2 \right)^T \mathbf{I}_T^2 {}^R \bar{\boldsymbol{\omega}}^2 \right], \quad (\text{P.3})$$

kde  $\mathbf{I}_o^1$  je matice setrvačnosti kliky 1 k ose otáčení,

$\mathbf{I}_T^2$  je matice setrvačnosti ojnice 2 ke svému těžišti.

Úhlové rychlosti  ${}^R \boldsymbol{\omega}^1$ , resp.  ${}^R \boldsymbol{\omega}^2$  jsou dány dle vztahu (3.15):

$${}^R \boldsymbol{\omega}^1 = \dot{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\omega}^1 \{ \mathbf{n} \}, \text{ resp. } {}^R \boldsymbol{\omega}^2 = \dot{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\omega}^2 \{ \mathbf{n} \}.$$

Vektor zobecněných souřadnic  $\dot{\mathbf{x}}^T$  je dán

$$\dot{\mathbf{x}}^T = (0, 0, \dot{\phi}_1, 0, 0, -\dot{\phi}_2)^T.$$

Záporné znaménko u úhlové rychlosti  $\dot{\phi}_2$  je dáno tím, že jsme v obrázku zavedli kladný směr rotace ojnice 2 ve směru hodinových ručiček.

Po sestavení matice složek úhlových rychlostí získáme:

$${}^R \boldsymbol{\omega}^1 = (0, 0, \dot{\phi}_1, 0, 0, -\dot{\phi}_2)^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \{ \mathbf{n} \} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_1 \end{pmatrix} \{ \mathbf{n} \},$$

$${}^R\omega^2 = (0, 0, \dot{\varphi}_1, 0, 0, -\dot{\varphi}_2)^T \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \{n\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} \{n\}.$$

I zde si můžeme povšimnout složitějšího počítačového zápisu.

Dále je nutné definovat matice setrvačnosti. Ta má v obecné podobě pro  $i$ -tý člen mechanismu následující tvar (vztahena k ose otáčení  $o$ ):

$${}^oI^i = \begin{bmatrix} I_{11}^i & I_{12}^i & I_{13}^i \\ I_{21}^i & I_{22}^i & I_{23}^i \\ I_{31}^i & I_{32}^i & I_{33}^i \end{bmatrix},$$

kde diagonální členy  $I_{11}^i, I_{22}^i, I_{33}^i$  jsou momenty setrvačnosti členů  $i$  k osám  $n_1^i, n_2^i, n_3^i$ , a mimodiagonální prvky mají význam záporně vzatých deviačních momentů k příslušným osám.

Po dosazení do vztahu (P.3) a částečné úpravě získáme výraz:

$$T = \frac{I}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} {}^oI_{13}^1 \dot{\varphi}_1 \\ {}^oI_{23}^1 \dot{\varphi}_1 \\ {}^oI_{33}^1 \dot{\varphi}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} {}^oI_{13}^1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \\ {}^oI_{23}^1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \\ {}^oI_{33}^1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + m_2 \cdot \left[ \left( -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - \frac{l_2}{2} (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \right)^2 + \left( l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - \frac{l_2}{2} (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right)^2 \right] \right].$$

Po konečné úpravě nabývá výraz pro potenciální energii následující tvar:

$$T = \frac{I}{2} {}^oI_{33}^1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{I}{2} {}^oI_{33}^2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2 + \dots \\ \dots + \frac{I}{2} m_2 \left[ l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{l_2^2}{4} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2 + l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \cos \varphi_2 \right]. \quad (P.4)$$

#### P 1.1.4 Tvorba Lagrangeových rovnic

Při sestavování Lagrangeových rovnic bychom měli vycházet z definice konkrétního systému. V našem případě se jedná o mechanismus se dvěma stupni volnosti, proto získáme dvě pohybové rovnice (pro každou nenulovou zobecněnou souřadnici jednu). Dále je vhodné zvážit všechny vnější silové účinky, které na mechanismus působí a které konají během pohybu mechanismu práci. V našem případě se jedná o sílu pružiny  $F_p$ , vnější sílu  $F_o$  a hnací moment  $M$ . Kromě toho je mechanismu zatížen i gravitačními silami kliky a

ojnice. V případě gravitačních a pružných sil se jedná o síly konzervativní. Proto je možné zahrnout oba tyto silové účinky do potenciální energie.

My však zvolíme postup jiný. S výhodou využijeme snadnost sestavení vztahu pro potenciální energii danou gravitačními silami. Všechny ostatní silové účinky, tj. včetně konzervativní síly od pružiny, převedeme do jednotlivých zobecněných souřadnic a umístíme je na pravou stranu Lagrangeových rovnic.

Potenciální energie zahrnující působení pouze gravitačních sil je dána následujícím vztahem:

$$V = \sum_{i=1}^n m_i g^2 z_i, \text{ kde } ^2 z_i \text{ je vertikální rozdíl polohy těžiště } i\text{-tého členu a polohy}$$

těžiště téhož členu v rovnovážné poloze mechanismu, na který nepůsobí vnější síly.

V našem případě můžeme psát:

$$V = m_1 g \left( \frac{l}{2} l_1 + \frac{l}{2} l_1 \sin \varphi_1 \right) + m_2 g \left( \frac{l}{2} l_2 + l_1 + l_1 \sin \varphi_1 - \frac{l}{2} l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - 90^\circ) \right)$$

a po úpravě:

$$V = \frac{l}{2} l_1 m_1 g (1 + \sin \varphi_1) + l_1 m_2 g (1 + \sin \varphi_1) + \frac{l}{2} l_2 m_2 g [1 - \sin(\varphi_2 - \varphi_1)]. \quad (\text{P.5})$$

### P 1.1.5 Zobecněné silové účinky

Při tvorbě zobecněných silových účinků budeme postupovat podle principu virtuálních výkonů, resp. jeho konkrétnější podobou – principem virtuálních prací. Zobecněný silový účinek působící ve směru první, resp. druhé nenulové zobecněné souřadnice  $\varphi_1$ , resp.  $\varphi_2$  od síly pružiny  $F_p$ , odporové síly  $F_o$  a hnacího momentu  $M(t)$  budeme značit  $Q_1$ , resp.  $Q_2$ .

Pro  $Q_1$  platí:

$$Q_1 \cdot \delta \varphi_1 = F_{p1} \cdot \delta x_p + F_{p2} \cdot \delta y_p + F_o \cdot \delta x_{T1} + M(t) \cdot \delta \varphi_1, \quad (\text{P.6})$$

kde  $F_{p1}$ , resp.  $F_{p2}$  je průmět síly  $F_p$  do souřadné osy  $n_1$ , resp.  $n_2$ ,

$x_{T1}$  je průmět polohového vektoru těžiště kliky do souřadné osy  $n_1$ ,

$\delta$  označuje variaci příslušné proměnné.

Po úpravě získáme pro  $Q_1$  následující vztah:

$$Q_1 = F_{p1} \cdot \frac{\delta x_p}{\delta \varphi_1} + F_{p2} \cdot \frac{\delta y_p}{\delta \varphi_1} + F_o \cdot \frac{\delta x_{T1}}{\delta \varphi_1} + M(t). \quad (\text{P.7})$$



Dle obrázku P.2 platí:

a) souřadnice bodů

$$x_p = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad \frac{\delta x_p}{\delta \varphi_1} = -l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$y_p = e + l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad \frac{\delta y_p}{\delta \varphi_1} = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$x_{T1} = \frac{l}{2} l_1 \cos \varphi_1, \quad \frac{\delta x_{T1}}{\delta \varphi_1} = -\frac{l}{2} l_1 \sin \varphi_1,$$

b) průměty sil

$$F_{p1} = k(l_p - l_0) \cdot \cos \alpha,$$

$$F_{p2} = k(l_p - l_0) \cdot \sin \alpha.$$

Po dosazení do (P.7) získáme:

$$\begin{aligned} Q_1 = & -k(l_p - l_0) \cdot l_1 \cos \alpha \sin \varphi_1 + k(l_p - l_0) \cdot l_2 \cos \alpha \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \dots \\ & \dots + k(l_p - l_0) \cdot l_1 \sin \alpha \cos \varphi_1 + k(l_p - l_0) \cdot l_2 \sin \alpha \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{l}{2} F_o l_1 \sin \varphi_1 + M(t). \end{aligned}$$

Podobně platí i pro  $Q_2$ :

$$Q_2 \cdot \delta \varphi_2 = F_{p1} \cdot \delta x_p + F_{p2} \cdot \delta y_p + F_o \cdot \delta x_{T1} + M(t) \cdot \delta \varphi_1$$

a po úpravě:

$$Q_2 = F_{p1} \cdot \frac{\delta x_p}{\delta \varphi_2} + F_{p2} \cdot \frac{\delta y_p}{\delta \varphi_2} + F_o \cdot \frac{\delta x_{T1}}{\delta \varphi_2}.$$

Po dosazení výše odvozených vztahů a provedení derivace platí:

$$Q_2 = -k(l_p - l_0) \cdot l_2 \cos \alpha \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - k(l_p - l_0) \cdot l_2 \sin \alpha \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Na závěr je ještě nutné definovat geometrické vazby:

$$l_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \text{ a po dosazení a úpravě:}$$

$$l_p = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \varphi_2 + e^2 + 2el_1 \sin \varphi_1 - 2el_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

$$\alpha = \pi + \text{sign}(y_p) \cdot \arccos \frac{x_p}{l_p} \text{ a po dosazení a úpravě:}$$

$$\alpha = \pi + \text{sign}(y_p) \cdot \arccos \frac{l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \varphi_2 + e^2 + 2el_1 \sin \varphi_1 - 2el_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}}.$$

### P 1.1.6 Sestavení Lagrangeových rovnic

Nyní můžeme přistoupit k výpočtu levé strany Lagrangeových rovnic- Dle kap. 3.1.11.3 definujeme Lagrangeovu funkci

$$L = T - V.$$

Nejprve sestavíme pohybovou rovnici pro zobecněnou souřadnici  $\varphi_1$ . Příslušné derivace Lagrangeovy funkce pro tuto souřadnici jsou:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = I_{33}^1 \dot{\varphi}_1 + I_{33}^2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + m_2 l_1^2 \dot{\varphi}_1 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \cos \varphi_2 + \\ + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = I_{33}^1 \ddot{\varphi}_1 + I_{33}^2 (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + m_2 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) \cos \varphi_2 - \\ - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \sin \varphi_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -\frac{1}{2} m_1 g l_1 \cos \varphi_1 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - m_2 g l_1 \cos \varphi_1.$$

Po dosazení do vztahu (3.33) nabude pohybová rovnice následujícího tvaru:

$$\underbrace{\ddot{\varphi}_1 \left( I_{33}^1 + I_{33}^2 + m_2 l_1^2 + \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \varphi_2 \right)}_{A(\varphi_2)} + \underbrace{\ddot{\varphi}_2 \left( -I_{33}^2 - \frac{1}{4} m_2 l_2^2 - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \cos \varphi_2 \right)}_{B(\varphi_2)} + \dots \\ \underbrace{\dots + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \frac{1}{2} m_1 g l_1 \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + m_2 g l_1 \cos \varphi_1}_{C(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)} = Q_1.$$

Po zjednodušení zápisu:

$$A(\varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + B(\varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + C(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = Q_1(\varphi_1, \varphi_2). \quad (\text{P.8})$$

Nyní sestavíme podobným způsobem pohybovou rovnici pro zobecněnou souřadnici  $\varphi_2$ . Nejprve vyjádříme příslušné derivace:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = -I_{33}^2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \frac{1}{4} m_2 l_2^2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = -I_{33}^2 (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) - \frac{1}{4} m_2 l_2^2 (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -\frac{I}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \sin \varphi_2 + \frac{I}{2} m_2 g l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Po dosazení:

$$\ddot{\varphi}_1 \underbrace{\left( -I_{33}^2 - \frac{I}{4} m_2 l_2^2 - \frac{I}{2} m_2 l_1 l_2 \cos \varphi_2 \right)}_{D(\varphi_2)} + \ddot{\varphi}_2 \underbrace{\left( I_{33}^2 + \frac{I}{4} m_2 l_2^2 \right)}_E + \frac{I}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_2 - \underbrace{\left( -\frac{I}{2} m_2 g l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right)}_{F(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1)} = Q_2.$$

Zjednodušením:

$$D(\varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + E \ddot{\varphi}_2 + F(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1) = Q_2(\varphi_1, \varphi_2) \quad (\text{P.9})$$

Vztahy (P.8) a (P.9) tvoří soustavu dvou diferenciálních rovnic druhého řádu pro dvě neznámé.

## P 1.2 Řešení příkladu v programovém prostředí MathCAD

Toto prostředí bylo pro naše potřeby vybráno z důvodu jeho přehlednosti a názornosti (viz vysvětlení v kapitole 3.1.12).

V prostředí MathCAD je pro řešení soustavy diferenciálních rovnic implementována mimo jiné Runge-Kuttova metoda čtvrtého řádu (viz příloha P2). Tuto metodu je možné použít buď s pevným nebo proměnným krokem výpočtu. My se přidržíme kroku pevného, neboť pro naše účely je to dostačující. V MathCADu je tato metoda pod příkazem *rkfixed*.

Dále Runge-Kuttova metoda předpokládá diferenciální rovnice pouze prvního řádu. Proto je třeba nyní převést výše uvedenou soustavu dvou diferenciálních rovnic druhého řádu na soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu. Ze dvou neznámých  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  proto získáme neznámé čtyři. Označíme je  $x_i$ , kde  $i = 0 \dots 3$ . Tyto neznámé budeme zapisovat zjednodušeně jako složky vektoru  $x$ .

$$x = \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \quad \text{kde} \quad \begin{aligned} x_0 &= \varphi_1, \\ x_1 &= \dot{\varphi}_1, \\ x_2 &= \varphi_2, \\ x_3 &= \dot{\varphi}_2. \end{aligned} \quad (\text{P.10})$$

Po přepsání soustavy (P.10) na soustavu prvního řádu získáme:

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{\varphi}_1 \\ A(x) \cdot \dot{x}_1 + B(x) \cdot \dot{x}_3 + C(x) &= Q_1(x) \\ x_3 &= \dot{\varphi}_2 \\ D(x) \cdot \dot{x}_1 + E \cdot \dot{x}_3 + F(x) &= Q_2(x). \end{aligned} \quad (\text{P.11})$$

Vzhledem k tomu, že při zápisu příkazu *rkfixed* je vyžadován vektor prvních derivací neznámých, je třeba tyto derivace z výše uvedených vztahů vyjádřit. V případě derivací neznámých  $x_0$  a  $x_2$  takto učiníme z první a třetí rovnice soustavy (P.11):  $\dot{x}_0 = x_1$  a  $\dot{x}_2 = x_3$ . Derivace zbývajících neznámých  $x_1$  a  $x_3$  je nutné spočítat z druhé a čtvrté rovnice soustavy (P.11):

$$A(x) \cdot \dot{x}_1 + B(x) \cdot \dot{x}_3 + C(x) = Q_1(x)$$

$$D(x) \cdot \dot{x}_1 + E \cdot \dot{x}_3 + F(x) = Q_2(x)$$


---

$$\dot{x}_1 = \frac{Q_1(x)}{A(x)} - \frac{C(x)}{A(x)} - \frac{Q_2(x) - F(x) - \frac{D(x)}{A(x)}[Q_1(x) - C(x)]}{E - \frac{D(x)}{A(x)}B(x)} \frac{B(x)}{A(x)}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{Q_2(x) - F(x) - \frac{D(x)}{A(x)}[Q_1(x) - C(x)]}{E - \frac{D(x)}{A(x)}B(x)} \frac{B(x)}{A(x)}$$

Nyní už můžeme přistoupit k samotnému výpočtu. Výpis programu je uveden na další straně.

**Zadání vstupních parametrů:**

$$\begin{aligned}l_1 &:= 0.5 \cdot \text{m} & l_0 &:= 0.25 \cdot \text{m} & g &:= 9.80665 \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \\l_2 &:= 1.5 \cdot \text{m} & k &:= 250 \cdot \text{N} \cdot \text{m}^{-1} \\m_1 &:= 0.4 \cdot \text{kg} & F_o &:= 300 \cdot \text{N} \\m_2 &:= 1.2 \cdot \text{kg} & M_0 &:= 50 \cdot \text{N} \cdot \text{m} \\e &:= 0.5 \cdot \text{m} & M(t) &:= M_0 - \frac{1}{3} \cdot M_0 \cdot t\end{aligned}$$

**Definice geometrických vazeb:**

$$\begin{aligned}l_p(x) &:= \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(x_2) + e^2 + 2 \cdot e \cdot l_1 \cdot \sin(x_0) - 2 \cdot e \cdot l_2 \cdot \sin(x_2 - x_0)} \\ \alpha(x) &:= \pi + \text{sign}(e + l_1 \cdot \sin(x_0) - l_2 \cdot \sin(x_2 - x_0)) \cdot \arccos\left(\frac{l_1 \cdot \cos(x_0) + l_2 \cdot \cos(x_2 - x_0)}{l_p(x)}\right)\end{aligned}$$

**Výpočet hmotnostních charakteristik:**

a) moment setrvačnosti členu 1 k ose  $n_3^1$ :

$$I_{331} := \frac{1}{12} \cdot m_1 \cdot l_1^2 + m_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_1\right)^2 \qquad I_{331} = 3.33 \times 10^{-2} \text{kgm}^2$$

b) moment setrvačnosti členu 2 k ose  $n_3^2$ :

$$I_{332} := \frac{1}{12} \cdot m_2 \cdot l_2^2 \qquad I_{332} = 2.25 \times 10^{-1} \text{kgm}^2$$

---

**Definice substitučních členů:**

$$\begin{aligned}A(x) &:= I_{331} + I_{332} + m_2 \cdot l_1^2 + \frac{1}{4} \cdot m_2 \cdot l_2^2 + m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(x_2) \\ B(x) &:= -I_{332} - \frac{1}{4} \cdot m_2 \cdot l_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(x_2) \\ C(x) &:= -m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot \sin(x_2) + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot (x_3)^2 \cdot \sin(x_2) + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot g \cdot l_1 \cdot \cos(x_0) + \\ &\qquad + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot \cos(x_2 - x_0) + m_2 \cdot g \cdot l_1 \cdot \cos(x_0)\end{aligned}$$

$$D(x) := -I_{332} - \frac{1}{4} \cdot m_2 \cdot l_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(x_2)$$

$$E := I_{332} + \frac{1}{4} \cdot m_2 \cdot l_2^2$$

$$F(x) := \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot (x_1)^2 \cdot \sin(x_2) - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot \cos(x_2 - x_0) \quad +$$

**Definice zobecněných silových účinků:**

$$Q_1(x) := -k \cdot (l_p(x) - l_0) \cdot \cos(\alpha(x)) \cdot l_1 \cdot \sin(x_0) + k \cdot (l_p(x) - l_0) \cdot \cos(\alpha(x)) \cdot l_2 \cdot \sin(x_2 - x_0) +$$

$$+ k \cdot (l_p(x) - l_0) \cdot \sin(\alpha(x)) \cdot l_1 \cdot \cos(x_0) + k \cdot (l_p(x) - l_0) \cdot \sin(\alpha(x)) \cdot l_2 \cdot \cos(x_2 - x_0) - \frac{1}{2} \cdot F_0 \cdot l_1 \cdot \sin(x_0) + M(t)$$

$$Q_2(x) := -k \cdot (l_p(x) - l_0) \cdot \cos(\alpha(x)) \cdot l_2 \cdot \sin(x_2 - x_0) - k \cdot (l_p(x) - l_0) \cdot \sin(\alpha(x)) \cdot l_2 \cdot \cos(x_2 - x_0)$$

**Výpočet soustavy čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu:**

a) definice počátečních podmínek:

$$PP := \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \\ 2.594 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) definice vektoru prvních derivací:

$$PD(t, x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{Q_1(x)}{A(x)} - \frac{C(x)}{A(x)} - \frac{Q_2(x) - F(x) - \frac{D(x)}{A(x)} \cdot (Q_1(x) - C(x))}{E - \frac{D(x)}{A(x)} \cdot B(x)} \cdot \frac{B(x)}{A(x)} \\ x_3 \\ \frac{Q_2(x) - F(x) - \frac{D(x)}{A(x)} \cdot (Q_1(x) - C(x))}{E - \frac{D(x)}{A(x)} \cdot B(x)} \end{bmatrix}$$

c) vlastní výpočet Runge-Kuttovou metodou čtvrtého řádu:

```
Z := rkfixed(PP,0,3,1000,PD)
```

d) výpis výsledků a převod úhlů na stupně:

```
cas := Z <0>
```

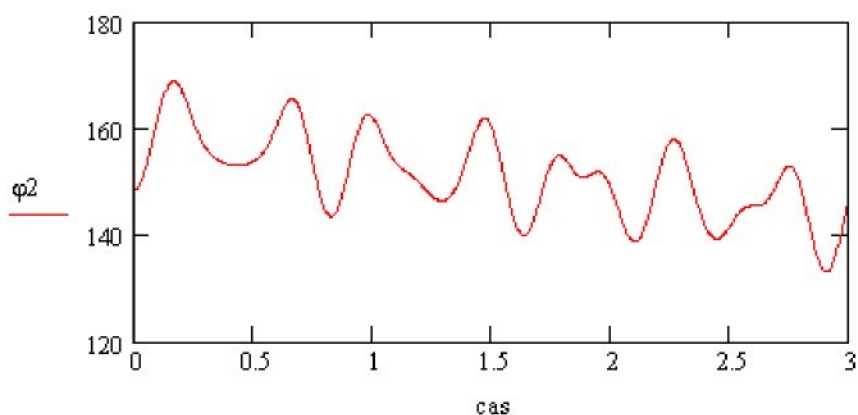
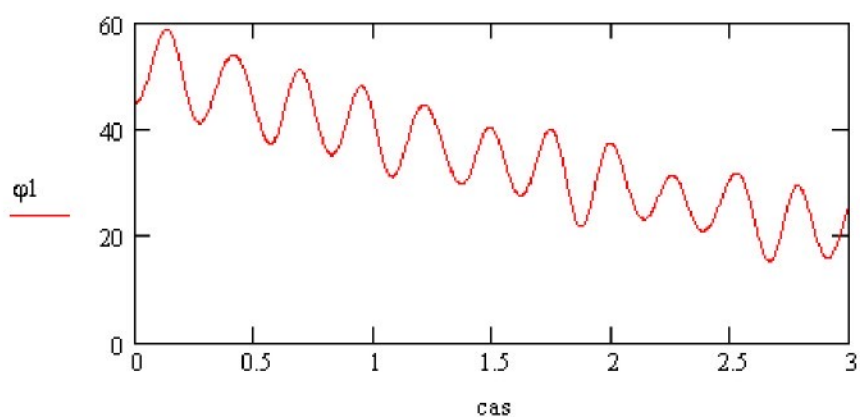
```
φ1 := Z <1> .  $\frac{180}{\pi}$ 
```

```
ω1 := Z <2>
```

```
φ2 := Z <3> .  $\frac{180}{\pi}$ 
```

```
ω2 := Z <4>
```

Nyní pro názornost uveďme grafické znázornění výsledků výpočtu. Na následujících grafech je zachycen průběh změny úhlů  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  v závislosti na čase.



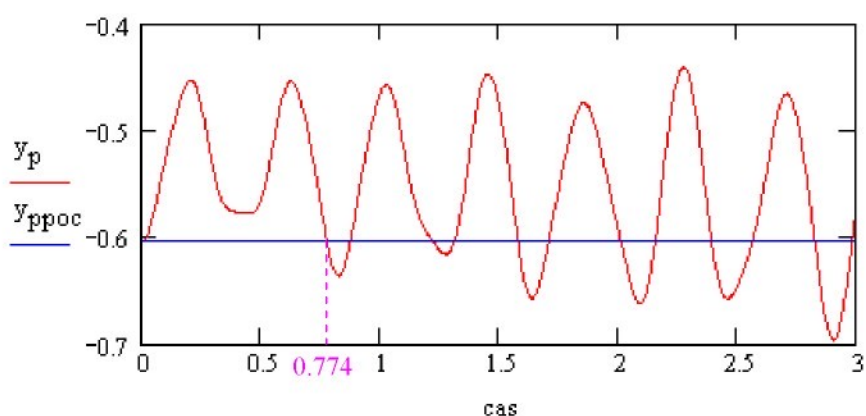


Abychom mohli odpovědět na otázku, kdy dojde k nárazu pístu na okolní podložku, musíme vykreslit také průběh souřadnice  $y_p$  v závislosti na čase:

$$i := 0..999$$

$$y_{ppoc_i} := e + l_1 \cdot \sin(PP_0) - l_2 \cdot \sin(PP_2 - PP_0)$$

$$y_p := e + l_1 \cdot \sin(Z \langle 1 \rangle) - l_2 \cdot \sin(Z \langle 3 \rangle - Z \langle 1 \rangle)$$



Z grafu plyne, že píst na podložku narazí v čase 0.774 s, neboť tehdy bude jeho vypočtená poloha níže, než je umístění podložky (modrý průběh v grafu). Je zřejmé, že od této doby již grafické průběhy nebudou platit, neboť ve výpočtu není zahrnut žádný kontakt mezi pístem a podložkou.

Tento příklad má ukázat možné použití teoretického aparátu uvedeného v kapitole 2. Nutno poznamenat, že uvedené výpočty probíhají v převážné části softwarů skrytě, aniž by do nich mohl uživatel jakkoliv zasáhnout.

## P 2 Integrační metody použité v systému MSC.ADAMS

V dalším textu si budeme všimát zejm. těch metod, které jsou používány při řešení mechanických systému v prostředí MSC.ADAMS. Výpis integračních metod a jejich vlastností je ve většině případů proveden s využitím zdrojů [7], [8] a [9].

### **P 2.1 Řešení obyčejné diferenciální rovnice**

Dříve než přistoupíme k soustavám diferenciálních rovnic, vysvětlíme si základní používané metody na jednoduché diferenciální rovnici prvního řádu.

#### **P 2.1.1 Jednokrokové integrační metody**

V tomto odstavci se budeme zabývat pouze metodami explicitními. Jednokrokové implicitní metody disponují sice určitými výhodami, ale vzhledem k jejich pracnosti se používají jen velmi zřídka.

Mějme diferenciální rovnici tvaru

$$y' = f(x, y) \quad (\text{P2.1a})$$

s počáteční podmínkou

$$y(x_0) = \eta, \text{ kde } x_0 \text{ je krajní bod intervalu řešení } \langle a, b \rangle, \text{ tj. } x_0 = a. \quad (\text{P2.1b})$$

Obecná jednokroková metoda pro řešení této rovnice lze nejjednodušeji vyjádřit vztahem

$$y_{n+1} = y_n + h \phi(x_n, y_n, h), \quad (\text{P2.2})$$

kde  $y_{n+1}$  je přibližné řešení dané diferenciální rovnice v bodě  $x_{n+1}$ ,

$y_n$  a  $x_n$  jsou veličiny známé z předchozího kroku,

$h$  je integrační krok,

$\phi(x_n, y_n, h)$  je funkce závislá na pravé straně rovnice (P2.1).

Je-li  $y_{n+1}$  pouze přibližným řešením rovnice, můžeme vyjádřit míru jeho přiblížení k přesnému řešení v daném bodě. Definujme tzv. lokální diskretizační chybu, která bude dána výrazem

$$L(y(x), h) = y(x + h) - y(x) - h f(x, y(x)),$$

kde  $y(x)$  značí přesné řešení problému (P2.1) v bodě  $x$ .

Lokální diskretizační chyba je tedy na základě výše uvedeného vztahu rovna chybě, kterou se dopustíme v jednom kroku řešení rovnice (P2.1) při použití přibližného předpisu (P2.2).

Na základě znalosti lokální diskretizační chyby můžeme definovat také celkovou chybu řešení, která je rovna součtu lokálních diskretizačních chyb.

Nyní můžeme definovat další důležitý parametr – řád metody. Řádem metody nazveme přirozené číslo  $p$ , které splňuje podmínku:

$$L(y(x), h) \leq K h^{p+1},$$

kde  $K$  je libovolná konstanta.

Z předchozího vztahu plyne, že řád metody přímo závisí na dané diferenciální rovnici, resp. na hladkosti jejího řešení. Není-li řešení dostatečně hladké (tzn., je-li např. již druhá derivace nespojitá), nemusí mít použitá metoda řád ani 1, zatímco v případě hladkého řešení může být řád několikanásobně vyšší.

Lze dokázat, že každá metoda řádu  $p \geq 1$  je pro dostatečně malý integrační krok  $h$  konvergentní. V praxi je však snaha vyhnout se používání příliš malého kroku, neboť takovýto krok velmi zhoršuje ekonomii výpočtu. Proto v souvislosti s jednokrokovými metodami hovoříme také o intervalu absolutní stability. Jedná se o interval, ve kterém by měl ležet součin  $h\lambda$ , kde  $\lambda$  je odhad pro derivaci  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Tím je zaručeno, že během výpočtu nedojde k přílišnému nasčítání lokálních diskretizačních chyb.

#### ***P 2.1.1.1 Rungovy-Kuttovy metody***

Jedná se jedny z nejpoužívanějších jednokrokových metod. Funkce  $\phi(x, y, h)$  se bere ve tvaru

$$\phi(x, y, h) = w_1 k_1 + w_2 k_2 + \dots + w_s k_s,$$

kde  $k_i = f(x, y)$

$$k_i = f\left(x + \alpha_i h, y + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j\right), \quad i = 2, 3, \dots, s.$$

$\alpha_i, \beta_{ij}$  jsou volené koeficienty.

Výhodou této metody je fakt, že k výpočtu hodnoty funkce  $\phi$  není třeba počítat žádnou derivaci. Stačí určit hodnoty pravé strany diferenciální rovnice v  $s$  bodech.

V závislosti na čísle  $s$  určujeme řád metody  $p$ . Obecně platí, že čím více hodnot pravé strany rovnice počítáme (tj. čím větší je  $s$ ), tím většího řádu dosáhneme. Tato závislost je však lineární s konstantou úměrnosti 1 pouze do čísla  $s = 4$ . Pro  $s = 5$  až 7 je řád  $p = s - 1$  a pro  $s > 7$  je  $p = s - 2$ . Z této skutečnosti vyplývá, že v podstatě nejpoužívanější Rungovy-Kuttovy metody jsou řádu prvního až čtvrtého, neboť dále již roste řád metody pomaleji, než je potřebný počet funkčních hodnot.

Volba koeficientů  $\alpha_i, \beta_{ij}$  se volí tak, aby měla metoda požadovaný řád  $p$ . Dalším požadavkem na volbu těchto koeficientů je skutečnost, aby měla metoda pro daný řád maximální interval absolutní stability. Tato skutečnost se však uplatní pouze u metod řádu  $p \geq 5$ , neboť interval stability metod nižšího řádu není závislý na volbě koeficientů  $\alpha_i, \beta_{ij}$ .

Tab. P2.1 Interval stability Rungových-Kuttových metod.

| řád     | interval stability |
|---------|--------------------|
| $p = 1$ | $(-2, 0)$          |
| $p = 2$ | $(-2, 0)$          |
| $p = 3$ | $(-2.51, 0)$       |
| $p = 4$ | $(-2.78, 0)$       |

Z nejznámějších Rungových-Kuttových metod uvedme metodu čtvrtého řádu dle vzahu (P2.3):

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
 k_1 &= f(x_n, y_n), \\
 k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right), \\
 k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right), \\
 k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3).
 \end{aligned}$$

V prostředí MSC.ADAMS není implementována přímo Rungova-Kuttova metoda ve výše uvedeném smyslu, nýbrž tzv. Rungova-Kuttova-Fehlbergova metoda, která určitým způsobem Rungovy-Kuttovy metody rozšiřuje. Toto rozšíření spočívá v tom, že během jednoho kroku jsou počítány dvě hodnoty funkce  $\phi(x, y, h)$ , a to použitím stejných  $k_i$ , kde  $i = 1$  až 6. Jejich vhodnou kombinací dostaneme jak metodu čtvrtého řádu, tak metodu pátého řádu. Z nich plynoucí odhady řešení diferenciální rovnice  $y_{n+1}$  pro čtvrtý řád a  $y_{n+1}^*$  pro pátý řád jsou porovnány a na základě zjištěné shody je zvolen integrační krok pro další výpočet. Mohou nastat tři případy:

- hodnoty jsou příliš rozdílné (více, než je stanovená chybová tolerance)*  
 $\Rightarrow$  integrační krok je zmenšen a hodnoty  $y_{n+1}$  a  $y_{n+1}^*$  jsou vypočteny znovu,
- rozdil je blízko stanovené chybové toleranci a vyhovuje*  
 $\Rightarrow$  integrační krok se nemění, výpočet pokračuje dalším krokem,
- rozdil je hluboko pod stanovenou chybovou toleranci*  
 $\Rightarrow$  integrační krok se zvýší, výpočet pokračuje dalším krokem.

Následuje příklad algoritmu Rungovy-Kuttovy-Fehlbergovy metody:

$$4. \text{ řád: } y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{25}{216} k_1 + \frac{1408}{2565} k_3 + \frac{2197}{4104} k_4 - \frac{1}{5} k_5 \right),$$

$$5. \text{ řád: } y_{n+1}^* = y_n + h \left( \frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right),$$

kde  $k_1 = f(x_n, y_n)$ ,

$$k_2 = f \left( x_n + \frac{1}{4} h, y_n + \frac{1}{4} k_1 \right),$$

$$k_3 = f \left( x_n + \frac{3}{8} h, y_n + \frac{3}{32} k_1 + \frac{9}{32} k_2 \right),$$

$$k_4 = f \left( x_n + \frac{12}{13} h, y_n + \frac{1932}{2197} k_1 - \frac{7200}{2197} k_2 + \frac{7296}{2197} k_3 \right),$$

$$k_5 = f \left( x_n + h, y_n + \frac{439}{216} k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513} k_3 - \frac{845}{4104} k_4 \right),$$

$$k_6 = f \left( x_n + \frac{1}{2} h, y_n - \frac{8}{27} k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565} k_3 + \frac{1859}{4104} k_4 - \frac{11}{40} k_5 \right).$$

Porovnáním obou odhadů dle následujícího vztahu vypočteme číslo  $s$ . Nový integrační krok bude potom roven stávajícímu kroku vynásobenému konstantou  $s$ :

$$h_{nový} = h_{starý} \cdot s = h_{starý} \cdot \sqrt[4]{\frac{\varepsilon h_{starý}}{2|y_{n+1}^* - y_{n+1}|}},$$

kde  $\varepsilon$  je zadaná chybová tolerance.

Upozorníme však, že se jedná o metodu explicitní, tzn., že vzhledem ke konečné velikosti integračního kroku je interval absolutní stability této metody omezen. Může se proto stát, že v závislosti na čísle  $\lambda$  (odhadu  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ) bude součin  $h\lambda$  mimo oblast absolutní stability a řešení nebude nekonvergovat k cíli.

Metoda Rungova-Kutta-Fehlbergova není příliš vhodná pro „stiff“ systémy (viz kap. 3.2.1). Její výhodou je to, že není třeba během řešení počítat žádné derivace. Určuje se pouze hodnota pravé strany v několika bodech (v závislosti na řádu metody – viz tab. P2.1). Zejm. z tohoto hlediska je metoda Runge-Kutta-Fehlberg pro většinu úloh pomalejší.

### P 2.1.2 Vícekrokové integrační metody

Jak již plyne z názvu, jedná se o metody, které pro stanovení neznámé hodnoty  $y_{n+1}$  v čase  $t+h$  využívají nejen hodnot  $y_n$  z předchozího kroku, ale také z kroků

$y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-k}$ . To má svoji výhodu zejm. při odhadu přibližného řešení  $y_{n+1}$ , protože je tento odhad založen na více informacích o předchozím chování funkce.

Obecný vztah pro  $k$ -krokovou metodu je dán vzorcem:

$$\sum_{v=0}^k \alpha_v y_{n+v} = h \sum_{v=0}^k \beta_v f_{n+v}, \quad (\text{P2.3})$$

kde  $\alpha_v, \beta_v$  jsou konstantní hodnoty, přičemž předpokládáme, že  $\alpha_k = 1$  a  $\alpha_0$  a  $\beta_0$  nejsou zároveň rovny 0,  
 $f_{n+v}$  je funkční hodnota  $f(x_{n+v}, y_{n+v})$ ,  
 $h$  je integrační krok.

V závislosti na hodnotě  $\beta_k$  rozlišujeme, zda se jedná o metodu explicitní nebo implicitní. Je-li  $\beta_k = 0$ , je hodnota  $y_{n+k}$  ve vztahu (P2.3) jednoznačně určena pouze na základě znalosti čísel  $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}$ . V takovémto případě se jedná o metodu explicitní. V opačném případě je nutné hodnotu  $y_{n+k}$  určit ze vztahu (P2.3) iterativně a metoda je implicitní. I přes skutečnost, že implicitní metody jsou náročnější na počet provedených výpočetních operací můžeme konstatovat, že mají často daleko příznivější vlastnosti než metody explicitní (přesnost, stabilita, atd.). Z tohoto důvodu je např. v softwaru MSC.ADAMS integrována pouze jedna explicitní metoda vzhledem k šesti metodám implicitním.

Vzhledem k tomu, že se jedná o metody vícekrokové, je zřejmé, že před započítím výpočtu je třeba znát nejen hodnotu počáteční podmínky v předešlém bodě, ale v předešlých několika bodech výpočtu. K tomuto účelu se převážně používají jednokrokové explicitní metody. Nyní uvedeme příklady implicitních metod.

#### P 2.1.2.1 Adamsova-Bashforthova metoda

Adamsova-Bashforthova metoda je dána vztahem

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{m=0}^{k-1} \gamma_m \nabla^m f_{n+k-1}, \quad (\text{P2.4})$$

kde koeficienty  $\gamma_m$  jsou dány rekurentním vztahem  $\sum_{v=0}^m \frac{1}{v+1} \gamma_{m-v} = 1$  pro  $m = 0, 1, \dots$ , např.

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{5}{12}, \quad \gamma_3 = \frac{3}{8}, \quad \gamma_4 = \frac{251}{720}, \text{ atd.,}$$

operátor  $\nabla$  je operátorem difference zpět a je dán  $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$ ,

$k$ -tá difference zpět je dána  $\nabla^k f(x) = \nabla^{k-1} f(x) - \nabla^{k-1} f(x-h)$ .

Jak je patrné ze vztahu (P2.4), jedná se o metodu explicitní. Zajímejme se nyní o její interval absolutní stability. Označme jej  $(\alpha, 0)$ , kde hodnota krajního bodu intervalu  $\alpha$  je pro Adamsovu-Bashforthovu metodu dána následující tabulkou

Tab. P2.2 Interval absolutní stability Adams-Bashforthovy metody

| řád     | $\alpha$        |
|---------|-----------------|
| $p = 2$ | -1              |
| $p = 3$ | $-\frac{6}{11}$ |
| $p = 4$ | $-\frac{3}{10}$ |

Z tabulky P2.2 je patrné, že interval absolutní stability této metody není nikterak velký. Tato nepříjemná vlastnost je plně v souladu s výše uvedeným tvrzením, že explicitní metody se jako samostatné v praxi používají jen zřídka. I v prostředí MSC.ADAMS slouží tato metoda pouze k odhadu přibližného řešení v metodách prediktor-korektor (viz dále). Adams-Bashforthova metoda je řádu  $k$ .

#### P 2.1.2.2 Adamsova-Moultonova metoda

Tato metoda je založena na podobném vztahu jako metoda Adamsova-Bashforthova:

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{m=0}^k \gamma_m^* \nabla^m f_{n+k}, \quad (\text{P2.5})$$

kde koeficienty  $\gamma_m^*$  jsou definovány následovně:

$$\gamma_0^* = 1, \quad \sum_{v=0}^m \frac{1}{v+1} \gamma_{m-v}^* = 0 \quad \text{pro } m = 1, 2, \dots, \text{ např.}$$

$$\gamma_1^* = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_2^* = -\frac{1}{12}, \quad \gamma_3^* = -\frac{1}{24}, \quad \gamma_4^* = -\frac{19}{720}, \text{ atd.}$$

Ze vztahu (P2.5) je zřejmé, že Adamsova-Moultonova metoda má implicitní charakter. Věnujme se nyní opět intervalu absolutní stability této metody. V následující tabulce jsou uvedeny krajní hodnoty  $\alpha$  tohoto intervalu v závislosti na řádu metody  $p$ .

Tab. P2.3 Interval absolutní stability Adams-Moultonovy metody.

| řád     | $\alpha$  |
|---------|-----------|
| $p = 2$ | $-\infty$ |
| $p = 3$ | -6        |
| $p = 4$ | -3        |



Jak je patrné z předchozí tabulky, tato metoda má mnohem větší absolutní interval stability než metoda Adamsova-Bashforthova. Při řádu metody  $p = 2$  mohou dokonce hodnoty součinu  $h \cdot \lambda$  ležet na celé záporné poloose, tzn., že ať zvolíme jakýkoliv krok, či ať je zdrojová diferenciální rovnice reprezentována jakýmkoliv vlastním číslem  $\lambda$ , bude řešení vždy stabilní a tedy konvergovat ke konečné hodnotě. Kromě toho mají Adamsovy-Moultonovy metody řád  $p = k + 1$ , tedy o jedničku vyšší, než Adamsovy-Bashforthovy metody. Tyto výhody jsou ovšem do jisté míry vykoupeny implicitností této metody.

### ***P 2.1.2.3 Metody prediktor-korektor***

Snahou těchto metod je do jisté míry snížit hlavní nevýhody implicitní metody (tj. zejména pracnost výpočtu) při zachování všech jejich výše uvedených výhod. Každý krok implicitní  $k$  krokové metody vyžaduje iterativní řešení hodnoty  $y_{n+k}$ . Počet potřebných iterací je silně závislý na přesnosti odhadu počáteční hodnoty  $y_{n+k}^{(0)}$ . K jeho zvýšení, a tedy ke snížení počtu iterací dospějeme tak, že pro stanovení počátečního odhadu  $y_{n+k}^{(0)}$  použijeme vhodnou explicitní metodu.

Téměř ve všech světových literaturách se v souvislosti s metodami prediktor-korektor používá stejné označení jednotlivých fází výpočtu písmeny  $P$  (prediction),  $E$  (evaluation) a  $C$  (correction). Tyto fáze znamenají po řadě odhad hodnoty  $y_{n+k}^{(0)}$ , výpočet pravé strany diferenciální rovnice pro  $s$ -tou iteraci  $f_{n+k}^{(s)}$  a korekci odhadu  $y_{n+k}^{(s)}$ , tj. výpočet hodnoty  $y_{n+k}^{(s+1)}$  (nová iterace).

Způsob výpočtu odhadu přibližného řešení  $y_{n+k}^{(m)}$  lze schematicky zapsat jako  $P(EC)^m E$ , kde  $m$  je počet iterací potřebný ke splnění podmínky dané maximální přípustnou chybou  $\varepsilon$ , tj.  $|y_{n+k}^m - y_{n+k}^{m-1}| < \varepsilon$ . Nevýhodou tohoto způsobu výpočtu je fakt, že předem nevíme, kolik iterací bude třeba k dosažení výše uvedené podmínky. Ovšem naopak nespornou výhodou tohoto postupu je nezávislost hodnoty přibližného řešení  $y_{n+k}^{(m)}$  na počáteční aproximaci, tzn., že lokální chyba i charakter stability jsou určeny pouze korektorem.

Tato skutečnost je s výhodou využita v prostředí MSC.ADAMS. Zde dvojici prediktor-korektor tvoří Adams-Bashforthova a Adams-Moultonova metodou téhož řádu. Lokální chyba a charakter stability jsou proto určeny Adams-Moultonovou metodou. To je pro nás významnou výhodou, neboť v kap. P 2.1.2.2 jsme uvedli, že stabilita Adamsových-Moultonových metod je poměrně vysoká a pro druhý řád dokonce oblast stability obsahuje celou zápornou poloosu.

#### **P 2.1.2.4 Metody založené na zpětné derivaci (BDF metody)**

Tyto metody jsou obzvláště vhodné pro silně tlumené („stiff“) systémy. Jedná se o vícezkrokové metody. Obecně lze shrnout ve vztahu

$$y_{n+1} = \sum_{v=1}^k \alpha_v y_{n-v+1} + h \beta_0 f_{n+1}. \quad (\text{P2.6})$$

Tento vztah lze vyjádřit i způsobem použitým v kap. P 2.1.2.1 (pomocí difference zpět) následovně:

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \nabla^i y_{n+1} = h \beta_0 f_{n+1}.$$

Oba vztahy jsou vyjádřením pro implicitní BDF metodu. Každá implicitní BDF metoda je pro  $k \leq 6$  řád stabilní. Explicitní BDF metody se v podstatě nepoužívají. Jejich stabilita je zaručena pouze do řádu  $k=2$ .

Uveďme nyní příklad zápisu BDF metody 1. a 2. řádu:

$k=1$  :  $y_{n+1} = y_n + h f_{n+1}$  ... tzv. implicitní Eulerova metoda,

$k=2$  :  $y_{n+1} = \frac{4}{3}y_n - \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}h f_{n+1}.$

Výhodou BDF metod je skutečnost, že nepoužívají derivaci z minulých kroků. BDF metody se většinou používají s proměnným řádem. Typickou aplikací BDF jsou metody s tzv. kvazi-konstantní délkou integračního kroku. V takových případech je po stanovení délky kroku tato hodnota co nejdéle brána jako konstantní, dokud nedojde k nutnosti tuto hodnotu měnit.

### **P 2.2 Řešení soustav diferenciálních rovnic**

Všechny doposud zmíněné metody byly popsány pro jednu diferenciální rovnici prvního řádu (P2.1a) a počáteční podmínku (P2.1b). Při výpočtu multibody simulací se ale především setkáváme se soustavou diferenciálních rovnic 2. řádu (pohybové rovnice) doplněnou o rovnice algebraické (rovnice vazeb). Při řešení soustavy diferenciálních rovnic předešlými metodami je nezbytně nutné tuto soustavu převést na soustavu 1. řádu. Toho docílíme zavedením dalších proměnných, které jsou rovny prvním derivacím neznámé hodnoty (viz příklad v příloze P1). Tato soustava potom nabývá tvaru

$$y' = f(x, y) \quad (\text{P2.7})$$

Postup při řešení soustavy prvního řádu je potom podobný postupu řešení diferenciální rovnice prvního řádu. U výše uvedených metod stačí většinou jen předpokládat, že  $y_n$  a  $f_n$  jsou  $m$ -dimenzionální vektory.

### P 2.2.1. Stabilita metod

Rozdílnosti však přichází při posuzování problematiky stability metody. Součin  $h \cdot \lambda$  zde již není možné dále akceptovat. Je to z toho důvodu, že  $\lambda$  byl odhad derivace  $\frac{\partial f}{\partial y}$  pravé strany diferenciální rovnice. Zde je rovnic více, proto roli čísla  $\lambda$  převzímou vlastní čísla Jacobiovy matice  $J$ , kterou jsme zmínili již v kapitole 3.2.1.

Vzhledem k tomu, že Jacobiova matice obsahuje  $m$  vlastních čísel, nebudeme již mluvit o intervalu stability, ale o oblasti stability. Pro definici oblasti stability je nezbytné zavést následující:

- uvažujme lineární  $k$ -krokovou metodu

$$\sum_{v=0}^k \alpha_v y_{n+v} = h \sum_{v=0}^k \beta_v f_{n+v}, \quad (\text{P 2.8})$$

- definujme po řadě tzv. první, druhý a třetí charakteristický polynom vztahy

$$\rho(\zeta) = \sum_{v=0}^k \alpha_v \zeta^v, \quad \sigma(\nu) = \sum_{v=0}^k \beta_v \zeta^v \quad \text{a} \quad \pi(\nu) = \rho(\nu) - z \sigma(\nu),$$

kde  $z$  je komplexní číslo. Oblast absolutní stability konkrétní metody je potom definována jako množina všech komplexních čísel  $z$ , pro které platí, že všechny kořeny polynomu  $\pi(\nu)$  splňují podmínku  $|\zeta_i| < 1$ . Oblast stability je tedy ohraničená plocha v levé polorovině komplexní roviny. Má-li být použita metoda pro řešení dané soustavy diferenciálních rovnic stabilní, je proto třeba, aby všechny součiny  $h \cdot \lambda_i$  (pro  $i = 1 \dots m$ ) ležely v oblasti stability.

V souvislosti se stabilitou definujeme další, často používané pojmy. Prvním z nich je tzv. A-stabilita. A-stabilní metoda je taková, jejíž oblast stability obsahuje celou levou polorovinu komplexní roviny. Proto je-li metoda A-stabilní, znamená to, že její stabilita nikterak nezávisí na velikosti integračního kroku, neboť součiny  $h \cdot \lambda_i$  budou vždy ležet ve stabilní oblasti. A to i v případě silně tlumených systémů, kde je maximální vlastní číslo velmi vysoké.

A-stabilita však klade na integrační metodu značně vysoké nároky. Proto byl zaveden jiný pojem, a to  $A(\alpha)$ -stabilita. Tuto podmínku splňují všechny metody, které jsou stabilní alespoň ve výšce levé poloroviny komplexní roviny se středem v počátku. Přesněji je  $A(\alpha)$ -stabilní metoda definována tak, že její oblast stability obsahuje nekonečný úhel  $U_\alpha = \{z; -\alpha < \pi - \arg z < \alpha\}$ .  $A(\alpha)$ -stabilní metoda je i A-stabilní metodou pro úhel  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Zůstaňme ještě chvíli u A-stabilní metody. Jak jsme již výše uvedli, je u této metody zaručena konvergence bez ohledu na velikost integračního kroku i pro silně tlumené soustavy. Ještě jsme však nic neřekli o rychlosti této konvergence. Může se stát, že metoda sice bude konvergovat, ale požadovaného přiblížení k přesnému řešení dosáhne až

po velmi dlouhém čase. Abychom rozlišili mezi takovými metodami a metodami rychle konvergujícími, zavedeme ještě jeden zpřísnující pojem tzv. L.stability.

Předpokládejme modelovou diferenciální rovnici  $y' = \lambda y$ , kde  $\lambda$  je komplexní číslo splňující podmínku  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  (leží v intervalu absolutní stability). Přibližné řešení této diferenciální rovnice lze obecně zapsat

$$y_n = R^n(z) y(a), \quad (\text{P2.9})$$

kde  $R$  je racionální funkce aproximující funkci  $e^z$  a  $z = h \cdot \lambda$ .

Požadavek A-stability v tomto případě znamená, že  $|R(z)| < 1$ . U pomalu konvergujících funkcí se může stát, že pro nepříznivé podmínky typu  $\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty$  může dojít k situaci, v níž  $R(z) \rightarrow 1$ . To je velmi nepříznivé pro rychlost konvergence. Proto zavádíme pojem tzv. L-stability. Příslušnou metodu nazveme L-stabilní, je-li A-stabilní a zároveň splňuje podmínku, že pro  $\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty$  je  $R(z) \rightarrow 0$ .

### P 2.2.2 Newtonova metoda

Při řešení soustavy diferenciálních rovnic  $k$ -krokovou metodou narazíme dříve či později na problém řešit obecně nelineární soustavu typu

$$y_{n+k} + \sum_{v=0}^{k-1} \alpha_v y_{n+v} - h \sum_{v=0}^k \beta_v f_{n+v} = o, \text{ kde } o \text{ je nulový vektor.} \quad (\text{P2.10})$$

Vzhledem k tomu, že hodnoty v předchozích krocích jsou již známy, můžeme vztah X103 přepsat do tvaru

$$y_{n+k} + c - h \sum_{v=0}^k \beta_v f_{n+v} = o, \text{ kde } c \text{ je konstantní vektor.}$$

Obecně lze výrazy na levé straně předchozího vztahu zapsat jako funkci neznámé  $y_{n+k}$ :

$$g(y_{n+k}) = o. \quad (\text{P2.11})$$

Jedná-li se o silně tlumenou soustavu, je použití klasických postupů metod prediktor-korektor (např.  $P(EC)^m E$ ) značně nevýhodné. Je to z toho důvodu, že takovýto způsob výpočtu značně mění oblast stability užitých metody a klade neúměrné nároky na velikost integračního kroku. Proto se pro řešení soustavy (P2.11) používá Newtonova metoda, která je definována podle následujícího předpisu

$$y_{n+h}^{(i+1)} = y_{n+k}^{(i)} - \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial^1 g}{\partial^1 y_{n+k}}(y_{n+k}^{(i)}) & \cdots & \frac{\partial^1 g}{\partial^m y_{n+k}}(y_{n+k}^{(i)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^m g}{\partial^1 y_{n+k}}(y_{n+k}^{(i)}) & \cdots & \frac{\partial^m g}{\partial^m y_{n+k}}(y_{n+k}^{(i)}) \end{array} \right)^{-1} g(y_{n+k}^{(i)}). \quad (\text{P2.12})$$

Newtonova metoda je výhodná tím, že ve většině případů konverguje k cíli, aniž by bylo třeba výrazně omezovat velikost integračního kroku. Ovšem jistou nevýhodou této metody je značný počet výpočetních, které způsobuje výpočet Jakobiánu a jeho inverze v každé iteraci. Tento problém lze částečně řešit tzv. quasi Newtonovou metodou, která nepočítá hodnotu Jakobiánu a jeho inverze v každé iteraci.

### **P 2.3. Nové metody prostředí MSC.ADAMS - Newmarkova HHT metoda**

Doposud jsme se seznámili s metodami, které dokáží řešit diferenciální rovnice prvního řádu. Jestliže bychom chtěli výše uvedenými metodami řešit problém druhého a vyššího řádu, bylo by nutné nejprve tento problém popsat soustavou rovnic prvního řádu.

Newmarkova a HHT metoda jsou odlišné. Jejich hlavní výhoda spočívá v možnosti řešit diferenciální úlohy druhého řádu přímo, tj. bez nutnosti transformace rovnic na soustavy prvního řádu.

Vzhledem k velkému objemu informací zde nebudeme rozepisovat principy řešení diferenciálních rovnic těmito metodami. Pro účely této práce se spokojíme se shrnutím základních charakteristik obou metod.

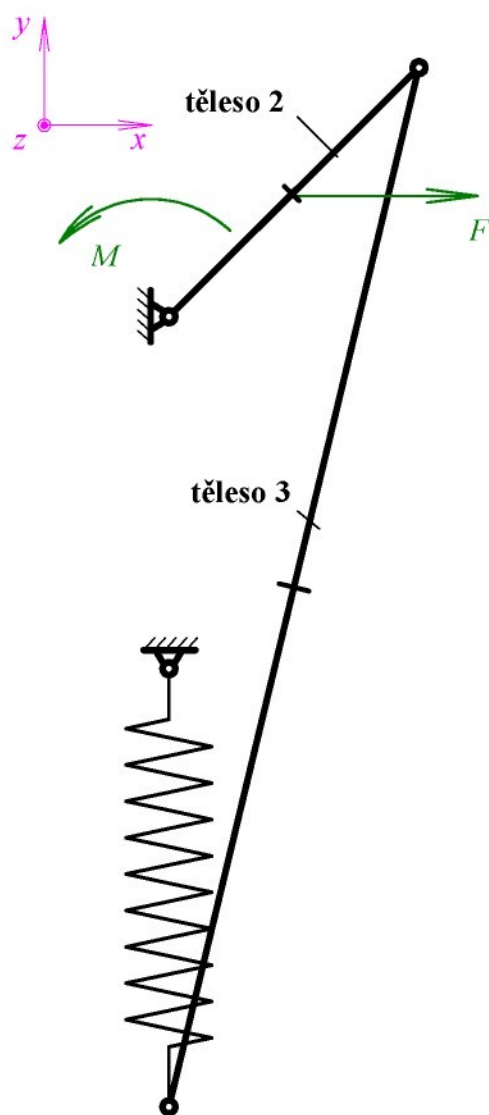
Newmarkova a HHT metoda používají odlišný způsob výpočtu Jakobiánu než výše zmíněné metody v kap. P 2.1 a P 2.2. Důsledkem toho jsou Jakobiány Newmarkovy a HHT metody nejen počítány méně často, což výrazně snižuje výpočetní čas, ale navíc jsou i lépe podmíněny, což snižuje počet potřebných iterací. Navíc lepší podmíněností Jakobiánu se dosáhne toho, že drobné numerické odchylky při výpočtu parciálních derivací mají nepatrný vliv na přesnost výpočtu. Také stabilita těchto metod je větší, neboť již při malém řádu (tj. větší oblasti stability) jsou schopny dosáhnout poměrně dobré přesnosti.

Výsadou obou metod je jejich vysoká rychlost výpočtu (méně výpočtů Jacobiho matice) a také stabilita i při malém integračním kroku (v Jacobiho matici se nevyskytují převrácené hodnoty integračního kroku). Mezi další výhody těchto metod můžeme řadit i skutečnost, že se chovají jako dolní propust, tzn., že během výpočtu odříznou rušivé kmity o vysokých frekvencích, zatímco přesně zachovají kmitavý pohyb o nízkých frekvencích. Hodnota propusti je nastavitelná. Nevýhodou může být např. zbytečně malá délka kroku oproti BDF metodám, které pro danou úlohu dokáží být řádu čtvrtého a vyššího.

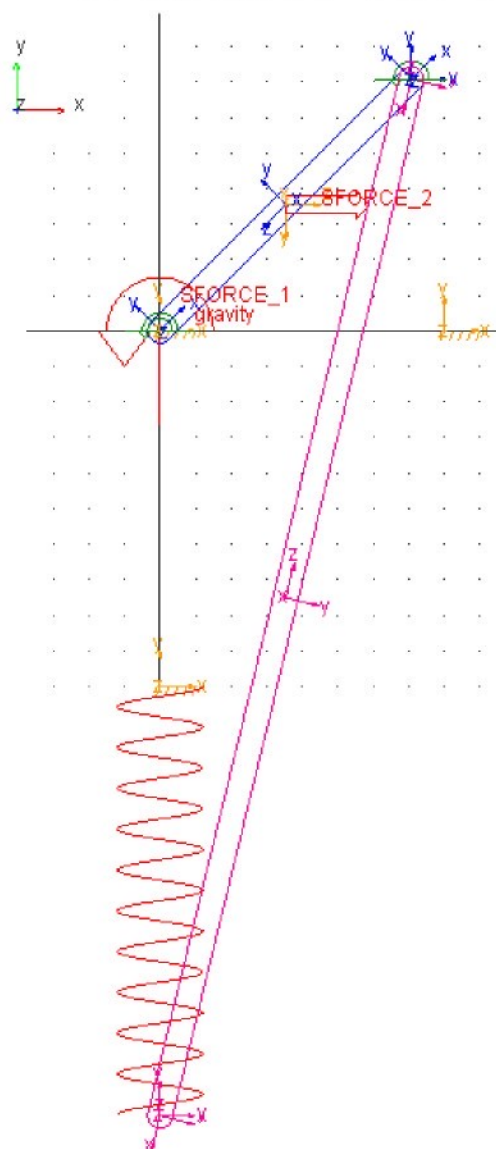
Podrobnější informace o těchto metodách může čtenář najít v publikaci [18].

### P 3. Ukázka matematického zápisu příkladu dvojitého kyvadla v prostředí MSC.ADAMS

V prostředí MSC.ADAMS/View vytvoříme model dle obr. P3.1. Při jeho tvorbě použijme dva prvky typu LINK pro vytvoření kliky a ojnice (tělesa 2 a 3), dále dvě vazby typu REVOLUTE pro rotační spojení rámu s tělesem 2 a tělesa 2 s tělesem 3. Pružinu budeme definovat pomocí silového účinku SPRING. Pro vytvoření hnacího momentu  $M$  použijeme silový účinek TORQUE. Ten je definován jako silový moment působící na těleso 2 kolem osy  $z$ . Jeho velikost je dána časově proměnnou funkcí dle přílohy P1. Nakonec definujeme i odporovou sílu  $F$  elementem FORCE, který zavádí silový účinek do těžiště tělesa 2 ve směru osy  $x$  GSS. Velikost tohoto silového účinku je dle zadání konstantní. Celkový model v prostředí MSC.ADAMS/View je vyobrazen na obr. P3.2.

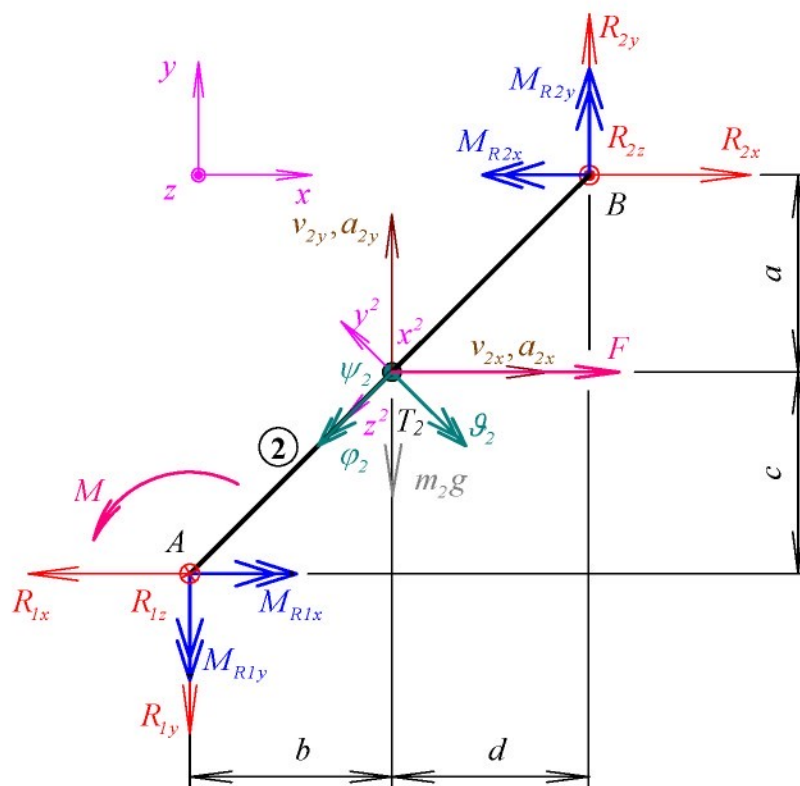


Obr. P3.1 Schéma dvojitého kyvadla.



Obr. P3.2 Model dvojitého kyvadla v prostředí MSC.ADAMS/View.

Při sestavování pohybových rovnic rozdělme mechanismus na dvě tělesa. Následující obrázek P3.3 zachycuje uvolnění tělesa 2.



Obr. P3.3 Uvolnění tělesa 2.

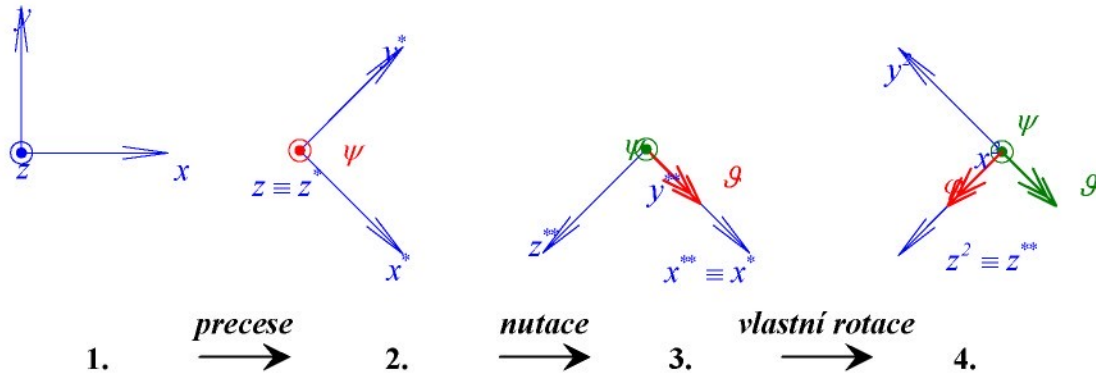
Smysly všech reakcí jsou zakresleny tak, jak je volí systém MSC.ADAMS. V bodě  $B$  směřují předpokládané silové reakce rotační vazby ve směru os globálního souřadného systému, v bodě  $A$  mají směr opačný. Při sestavování rovnic je velmi důležitá skutečnost, že směry těchto reakcí mají během pohybu tělesa stále stejnou orientaci.

Momentové účinky vazby jsou v obou bodech orientovány podle postupu vytváření vazby, resp. pořadím vybrání akčního (prvního) a reakčního (druhého) tělesa. Směr momentu, který nese v indexu označení  $x$ , je dán vektorovým součinem vektoru  $v$  z ose lokálního souřadného systému v místě uložení vazby spojeného s akčním tělesem a vektoru  $v$  y ose lokálního souřadného systému v témže místě spojeného s reakčním tělesem. Příkladem uveďme bod  $B$ . Zde mají oba lokální souřadné systémy (akčního i reakčního tělesa) v modelované pozici orientaci globálního souřadného systému, a proto se překrývají. Směr momentu  $M_{R2x}$  je z tohoto důvodu v záporném směru osy  $x$  globálního souřadného systému a moment  $M_{R2y}$  směřuje v kladném směru osy  $y$  globálního souřadného systému. Postupujeme-li během zadávání vazby tak, že nejprve vybereme těleso 3, budou se oba vektory  $M_{R2x}$  a  $M_{R2y}$  natáčet spolu s tělesem 2, neboť druhým vektorem v součinu  $z \times y$  je osa  $y$  souřadného systému tohoto tělesa. Osa  $z$  prvního tělesa je osou vlastní rotace, proto je její orientace stále stejná. Obrátíme-li výběr těles, bude



druhým vektorem v součinu osa  $y$  tělesa 3. První člen součinu, osa  $z$  tělesa 2, opět zůstává na místě. Proto by se v tomto případě směr vektorů  $M_{R2x}$  a  $M_{R2y}$  natáčel spolu s tělesem 3.

V těžišti  $T_2$  tělesa 2 je orientace lokálního souřadného systému  $x^2y^2z^2$  dána třemi Eulerovými úhly – precesí  $\psi$ , nutací  $\vartheta$  a vlastní rotací  $\phi$ . Postup při transformaci je naznačen na následujícím obrázku P3.4. Často se pro tuto transformaci používá označení 313.



Obr. P3.4 Transformace souřadných systémů.

Matematický vztah mezi souřadným systémem  $x^2y^2z^2$  a globálním souřadným systémem  $xyz$  udávají příslušné transformační matice. Označme  $T_{G \rightarrow i}$  transformační matici mezi globálním souřadným systémem a lokálním souřadným systémem  $i$ -tého tělesa, resp.  $T_{i \rightarrow G}$  transformační matici mezi lokálními souřadnicemi  $i$ -tého tělesa a globálním souřadným systémem. Potom na základě znalostí z kapitoly 3.1.1.3 (vztahy (3.3) až (3.5)) platí:

$$T_{G \rightarrow i} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i \cos \psi_i - \sin \varphi_i \cos \vartheta_i \sin \psi_i & \cos \varphi_i \sin \psi_i - \sin \varphi_i \cos \vartheta_i \cos \psi_i & \sin \varphi_i \sin \vartheta_i \\ -\sin \varphi_i \cos \psi_i - \cos \varphi_i \cos \vartheta_i \sin \psi_i & -\sin \varphi_i \sin \psi_i + \cos \varphi_i \cos \vartheta_i \cos \psi_i & \cos \varphi_i \sin \vartheta_i \\ \sin \vartheta_i \sin \psi_i & -\sin \vartheta_i \cos \psi_i & \cos \vartheta_i \end{pmatrix}, \quad (\text{P3.1})$$

resp.

$$T_{i \rightarrow G} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i \cos \psi_i - \sin \varphi_i \cos \vartheta_i \sin \psi_i & \sin \varphi_i \cos \psi_i + \cos \varphi_i \cos \vartheta_i \sin \psi_i & \sin \vartheta_i \sin \psi_i \\ -\cos \varphi_i \sin \psi_i - \sin \varphi_i \cos \vartheta_i \cos \psi_i & -\sin \varphi_i \sin \psi_i + \cos \varphi_i \cos \vartheta_i \cos \psi_i & \sin \vartheta_i \cos \psi_i \\ \sin \vartheta_i \sin \vartheta_i & -\cos \vartheta_i \sin \vartheta_i & \cos \vartheta_i \end{pmatrix}. \quad (\text{P3.2})$$

Při sestavování momentových pohybových rovnic jsou systémem MSC.ADAMS generovány rovnice ve směrech změny jednotlivých Eulerových úhlů  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\vartheta}$ ,  $\dot{\phi}$ . Bude proto nutné vyjádřit přepočtové vztahy mezi globálním souřadným systémem  $xyz$  a lokálním souřadným systémem tvořeným směry  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\phi$ . Je nutné si uvědomit, že osy tohoto lokálního souřadného systému nemusí být na sebe vzájemně kolmé. K transformaci není proto možné využít matic (P3.1) a (P3.2). Transformační vztahy budeme proto sestavovat postupnou rotací kolem jednotlivých os  $zxz$ .

Proveďme nyní transformaci obecného vektoru  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  daného v globálním souřadném systému. Nejprve zjistíme průmět tohoto vektoru ve směru osy  $\psi$ . Budeme postupovat tak, že vektor vynásobíme transformační maticí mezi systémem  $xyz$  a  $x^*y^*z^*$ . Třetí složka výsledného vektoru bude průmětem vektoru  $\mathbf{a}$  do směru  $\psi$ :

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proto

$$\mathbf{T}'\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Průmět vektoru  $\mathbf{a}$  do směru  $\psi$  je proto  $a_z$ .

Nyní vyjádříme zbylé dvě složky vektoru  $\mathbf{a}$  do směrů  $\vartheta$  a  $\phi$ . Tyto směry jsou dány orientací os  $z^{**}$  a  $x^{**}$  souřadného systému  $x^{**}y^{**}z^{**}$ . Daný systém získáme pootočením systému  $x^*y^*z^*$  o úhel  $\vartheta$  kolem osy  $x^*$ . Příslušná transformační matice mezi globálním souřadným systémem a systémem  $x^{**}y^{**}z^{**}$  je

$$\mathbf{T}'' = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos \vartheta \sin \psi & \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & -\sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Průmět vektoru  $\mathbf{a}$  do jednotlivých os tohoto souřadného systému bude dán

$$\mathbf{T}''\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos \vartheta \sin \psi & \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & -\sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \cos \psi + a_y \sin \psi \\ \dots \\ a_x \sin \vartheta \sin \psi - a_y \sin \vartheta \cos \psi + a_z \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Nyní je možné sestavit transformaci vektoru  $\mathbf{a}$  do souřadného systému  $\psi \vartheta \phi$ :

$$\mathbf{a}^{\psi \vartheta \phi} = \begin{pmatrix} a_z \\ a_x \cos \psi + a_y \sin \psi \\ a_x \sin \vartheta \sin \psi - a_y \sin \vartheta \cos \psi + a_z \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (\text{P3.3})$$

Podobným způsobem budeme postupovat také při transformaci ostatních vektorů neznámých reakcí ve vazbách do jednotlivých směrů  $\psi, \vartheta, \phi$ .

Přejdeme nyní k problematice samotného matematického popisu daného modelu. Vzhledem k obsažnosti matematických výrazů se omezíme pouze na situaci danou tímto konkrétním modelem. O stupni zjednodušení se zmíníme vždy u daného omezení.

Před započítím formulace rovnic je nutné vzít v úvahu tyto informace:

- a) souřadný systém  $x^2y^2z^2$  v těžišti tělesa 2 si během jeho pohybu zachovává stále stejnou orientaci,
- b) pohybové rovnice silové budou vždy psány ke globálnímu souřadnému systému  $xyz$ ,
- c) předpokládejme, že reakce ve vazbách  $R_{lx}, R_{ly}, R_{lz}$ , resp.  $R_{2x}, R_{2y}, R_{2z}$  budou mít po celou dobu simulace orientaci globálního souřadného systému; reakce  $R_{lx}, R_{ly}, R_{lz}$  směřují proti směru os  $x, y, z$  a reakce  $R_{2x}, R_{2y}, R_{2z}$  směřují ve směru os  $x, y, z$  globálního souřadného systému,
- d) při definici vazby v bodě  $B$  bylo nejprve zvoleno těleso 3 a následně těleso 2. Z výše uvedeného plyne, že v tomto bodě bude mít vektor reakčního momentu  $M_{R2x}$ , resp.  $M_{R2y}$ , na počátku simulace záporný směr osy  $x$ , resp. kladný směr osy  $y$ . V případě bodu  $B$  dále z výše uvedené skutečnosti plyne, že orientace těchto reakčních momentů vůči tělesu 2 bude během simulace stále stejná.
- e) v bodě  $A$  byl postup vytváření vazby podobný, jako v bodě  $B$  – nejprve bylo vybráno těleso 2, posléze rám. Směry reakčních momentů  $M_{R1x}$ , resp.  $M_{R1y}$  budou opačné směrům reakcí  $M_{R2x}$ , resp.  $M_{R2y}$ . Jejich poloha během simulace ovšem zůstane stejná. Z toho vyplývá, že s měnícím se úhlem  $\psi_2$  se bude měnit orientace těchto momentů k tělesu 2.

Začneme nejprve formulovat silové pohybové rovnice k osám  $x, y$  a  $z$  globálního souřadného systému. Po přepisu diferenciálních rovnic druhého řádu na rovnice řádu prvního získáme následujících šest rovnic:

$$1) \quad m_2 \dot{v}_{2x} + R_{lx} - R_{2x} - F_x = 0,$$

$$2) \quad m_2 \dot{v}_{2y} + R_{ly} - R_{2y} - F_y + m_2 g = 0,$$

$$3) \quad m_2 \dot{v}_{2z} + R_{lz} - R_{2z} - F_z = 0,$$

$$4) \quad -v_{2x} + \dot{x}_2 = 0,$$

$$5) \quad -v_{2y} + \dot{y}_2 = 0,$$

$$6) \quad -v_{2z} + \dot{z}_2 = 0,$$

kde  $m_2$  je hmotnost tělesa 2,

$F_x, F_y$  a  $F_z$  jsou složky síly  $F$  ve směrech  $x, y$  a  $z$  GSS.

Ve všech případech se jedná o rovnice rovnováhy.

Pozn.: ve všech pohybových rovnicích uvažujeme pro účely názornosti místo Lagrangeových multiplikátorů reakce ve vazbách. Platí mezi nimi přímá úměra. Při

samotném sestavování Jacobiho matice jsou tyto reakční účinky nahrazeny součinem  $\lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{x}_i}$  dle vztahu 3.34.

Nyní se soustředíme na momentové rovnice. Jejich přepisem na první řád získáme následující rovnice rovnováhy:

$$7) \quad I_{2xx} \omega_{2\psi} - p_{2\psi} = 0,$$

$$8) \quad I_{2zz} \omega_{2\varphi} - p_{2\varphi} = 0,$$

$$9) \quad I_{2yy} \omega_{2\vartheta} - p_{2\vartheta} = 0,$$

$$10) \quad -\omega_{2\psi} + \dot{\psi}_2 = 0,$$

$$11) \quad -\omega_{2\varphi} + \dot{\varphi}_2 = 0,$$

$$12) \quad -\omega_{2\vartheta} + \dot{\vartheta}_2 = 0,$$

kde  $I_{2xx}$ ,  $I_{2yy}$  a  $I_{2zz}$  jsou momenty setrvačnosti tělesa 2 k osám  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $z^2$  procházející těžištěm,

$\omega_{2\psi}$ ,  $\omega_{2\vartheta}$ ,  $\omega_{2\varphi}$  jsou úhlové rychlosti ve směru změny precesního, nutačního a rotačního úhlu.

Dříve, než přistoupíme k definici dalších rovnic, vyjádříme nejprve momentové účinky jednotlivých reakčních sil k osám souřadného systému  $\psi \vartheta \varphi$ . Začneme vazbou v bodě  $A$  a příslušnými reakcemi  $R_{Ix}$ ,  $R_{Iy}$ ,  $R_{Iz}$ . Polohový vektor bodu  $A$  vůči těžišti tělesa 2 je v našem příkladě v souřadném systému  $x^2 y^2 z^2$  podobu:

$${}^2\mathbf{r}_2^{TA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{l_2}{2} \end{pmatrix}^T.$$

Použitím transformační matice (P3.2) získáme složky tohoto vektoru v globálním souřadném systému:

$${}^G\mathbf{r}_2^{TA} = \mathbf{T}_{2 \rightarrow G} {}^2\mathbf{r}_2^{TA} = \begin{pmatrix} \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 \\ \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 \\ \frac{l_2}{2} \cos \vartheta_2 \end{pmatrix}.$$

Silový moment jednotlivých reakcí okolo os globálního souřadného systému je potom dán vektorovým součinem

$${}^G \mathbf{m}_1^2 = \begin{pmatrix} {}^G M_{1x}^2 \\ {}^G M_{1y}^2 \\ {}^G M_{1z}^2 \end{pmatrix} = {}^G \mathbf{r}_2^{TA} \times \begin{pmatrix} -R_{1x} \\ -R_{1y} \\ -R_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_{1z} \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 + R_{1y} \frac{l_2}{2} \cos \vartheta_2 \\ R_{1z} \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 - R_{1x} \frac{l_2}{2} \cos \vartheta_2 \\ -R_{1y} \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 + R_{1x} \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme tento vektor dle vztahu (P3.3) přetransformovat do souřadného systému  $\psi \vartheta \phi$ :

$${}^{\psi \vartheta \phi} \mathbf{m}_1^2 = \begin{pmatrix} {}^G M_{1z}^2 \\ {}^G M_{1x}^2 \cos \psi_2 + {}^G M_{1y}^2 \sin \psi_2 \\ {}^G M_{1x}^2 \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 - {}^G M_{1y}^2 \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 + {}^G M_{1z}^2 \cos \vartheta_2 \end{pmatrix}.$$

Podobným způsobem budeme postupovat také při vyjadřování momentových účinků reakčních vazeb v bodě  $B$ . Výsledkem bude vektor momentů  ${}^G \mathbf{m}_2^2$  v globálním souřadném systému  $xyz$ , resp. jemu příslušný vektor momentů  ${}^{\psi \vartheta \phi} \mathbf{m}_2^2$  v souřadném systému  $\psi \vartheta \phi$ :

$${}^G \mathbf{m}_2^2 = \begin{pmatrix} {}^G M_{2x}^2 \\ {}^G M_{2y}^2 \\ {}^G M_{2z}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{2z} \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 - R_{2y} \frac{l_2}{2} \cos \vartheta_2 \\ -R_{2z} \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 + R_{2x} \frac{l_2}{2} \cos \vartheta_2 \\ R_{2y} \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 - R_{2x} \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 \end{pmatrix}, \text{ resp.}$$

$${}^{\psi \vartheta \phi} \mathbf{m}_2^2 = \begin{pmatrix} {}^G M_{2z}^2 \\ {}^G M_{2x}^2 \cos \psi_2 + {}^G M_{2y}^2 \sin \psi_2 \\ {}^G M_{2x}^2 \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 - {}^G M_{2y}^2 \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 + {}^G M_{2z}^2 \cos \vartheta_2 \end{pmatrix}.$$

Podobným způsobem jako momenty sil budeme transformovat i reakční momenty  $M_{R1x}, M_{R1y}$ , resp.  $M_{R2x}, M_{R2y}$ . Napišme již výsledné vztahy:

$${}^{\psi \vartheta \phi} \mathbf{m}_{R1}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ M_{R1x} \cos \psi_2 - M_{R1y} \sin \psi_2 \\ M_{R1x} \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 + M_{R1y} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 \end{pmatrix}, \text{ resp.}$$

$${}^{\psi \vartheta \phi} \mathbf{m}_{R2}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -M_{R2x} \cos \psi_2 + M_{R2y} \sin \psi_2 \\ -M_{R2x} \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 - M_{R2y} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Je zřejmé, že při sestavování Jacobiho matice budeme úhly  $\psi_2$  a  $\vartheta_2$  příslušející momentu  ${}^{\psi\vartheta\phi}\mathbf{m}_{R2}^2$  považovat při derivování příslušných rovnic jako konstantní (na rozdíl od úhlů  $\psi_2$  a  $\vartheta_2$  příslušející momentu  ${}^{\psi\vartheta\phi}\mathbf{m}_{R1}^2$ ), neboť orientace vektoru  ${}^{\psi\vartheta\phi}\mathbf{m}_{R2}^2$  je vůči tělesu 2 stále stejná (viz písmeno *d*) výše uvedeného výpisu informací pro tuto úlohu).

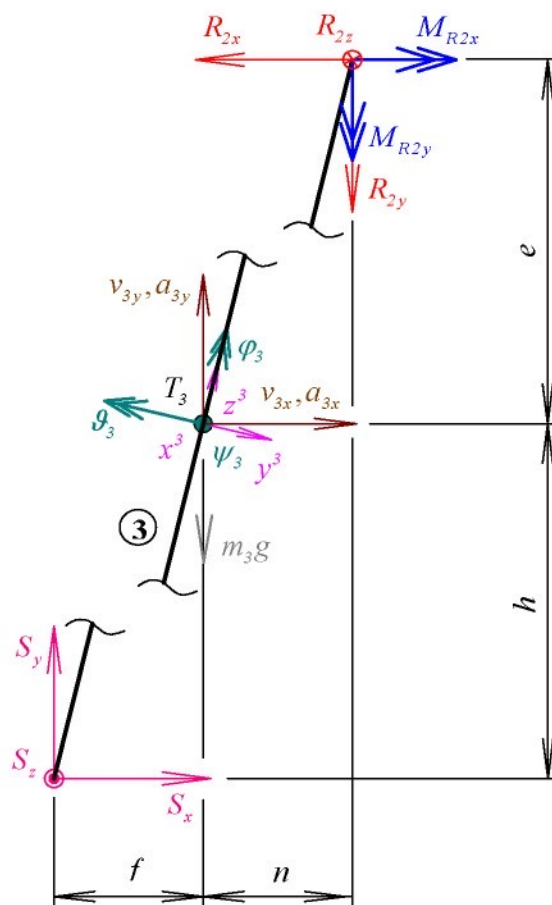
Nyní můžeme přistoupit k sestavení momentových rovnic ve směrech  $\dot{\psi}$  (rovnice 13),  $\dot{\vartheta}$  (rovnice 14) a  $\dot{\phi}$  (rovnice 15). Je třeba si uvědomit, že se jedná o rovnice nahrazení. Vzhledem k tomu, že kladný smysl derivací impulsmomentů zvolíme ve směru os  $\psi, \vartheta, \phi$ , budeme momenty všech reakcí psát s opačným znaménkem (odvodili jsme je pro směry  $+\dot{\psi}, +\dot{\vartheta}, +\dot{\phi}$ ).

$$13) \quad \dot{p}_{2\psi} - {}^G M_{1z}^2 - {}^G M_{2z}^2 - M = 0,$$

$$14) \quad \dot{p}_{2\vartheta} - {}^G M_{1x}^2 \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 + {}^G M_{1y}^2 \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 - {}^G M_{1z}^2 \cos \vartheta_2 - {}^G M_{2x}^2 \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 + \dots \\ \dots + {}^G M_{2y}^2 \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 - {}^G M_{2z}^2 \cos \vartheta_2 - M_{R1x} \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 - M_{R1y} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 + \dots \\ \dots + M_{R2x} \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 + M_{R2y} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 = 0,$$

$$15) \quad \dot{p}_{2\phi} - {}^G M_{1x}^2 \cos \psi_2 - {}^G M_{1y}^2 \sin \psi_2 - {}^G M_{2x}^2 \cos \psi_2 - {}^G M_{2y}^2 \sin \psi_2 - M_{R1x} \cos \psi_2 - \dots \\ \dots - M_{R1y} \sin \psi_2 + M_{R2x} \cos \psi_2 + M_{R2y} \sin \psi_2 = 0.$$

Tolik k popisu tělesa 2. Nyní obdobným způsobem matematicky popíšeme těleso 3. Následující obrázek zachycuje toto těleso při uvolnění.



Obr. P3.5 Uvolnění tělesa 3.

Silové pohybové rovnice k osám  $x, y, z$  globálního souřadného systému mají po přepisu na první řád následující podobu:

$$16) \quad m_3 \dot{v}_{3x} + R_{2x} - S_x = 0,$$

$$17) \quad m_3 \dot{v}_{3y} + R_{2y} - S_y + m_3 g = 0,$$

$$18) \quad m_3 \dot{v}_{3z} + R_{2z} - S_z = 0,$$

$$19) \quad -v_{3x} + \dot{x}_3 = 0,$$

$$20) \quad -v_{3y} + \dot{y}_3 = 0,$$

$$21) \quad -v_{3z} + \dot{z}_3 = 0.$$

V případě momentových rovnic získáme přepisem na první řád následující vtahy:

$$22) \quad I_{3xx} \omega_{3\psi} - p_{3\psi} = 0,$$

$$23) \quad I_{3zz} \omega_{3\varphi} - p_{3\varphi} = 0,$$

$$24) \quad I_{3yy} \omega_{3\vartheta} - p_{3\vartheta} = 0,$$



$$25) \quad -\omega_{3\psi} + \dot{\psi}_3 = 0,$$

$$26) \quad -\omega_{3\phi} + \dot{\phi}_3 = 0,$$

$$27) \quad -\omega_{3\vartheta} + \dot{\vartheta}_3 = 0.$$

Následují momentové rovnice nahrazení. Při jejich formulaci budeme používat stejného postupu, který jsme uvedli pro těleso 2. Na tomto místě zmíníme už pouze konkrétní výsledky.

Nejprve určíme momenty reakčních sil  $R_{2x}, R_{2y}, R_{2z}$  ke směrům  $\psi_3, \vartheta_3, \phi_3$ :

$${}^G \mathbf{r}_3^{TB} = \mathbf{T}_{3 \rightarrow G} {}^3 \mathbf{r}_3^{TB} = \begin{pmatrix} \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \sin \psi_3 \\ \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \cos \psi_3 \\ \frac{l_3}{2} \cos \vartheta_3 \end{pmatrix},$$

$${}^G \mathbf{m}_2^3 = \begin{pmatrix} {}^G M_{2x}^3 \\ {}^G M_{2y}^3 \\ {}^G M_{2z}^3 \end{pmatrix} = {}^G \mathbf{r}_3^{TB} \times \begin{pmatrix} -R_{2x} \\ -R_{2y} \\ -R_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_{2z} \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \cos \psi_3 + R_{2y} \frac{l_3}{2} \cos \vartheta_3 \\ R_{2z} \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \sin \psi_3 - R_{2x} \frac{l_3}{2} \cos \vartheta_3 \\ -R_{2y} \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \sin \psi_3 + R_{2x} \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \cos \psi_3 \end{pmatrix},$$

$${}^{\psi \vartheta \phi} \mathbf{m}_2^3 = \begin{pmatrix} {}^G M_{2z}^3 \\ {}^G M_{2x}^3 \cos \psi_3 + {}^G M_{2y}^3 \sin \psi_3 \\ {}^G M_{2x}^3 \sin \vartheta_3 \sin \psi_3 - {}^G M_{2y}^3 \sin \vartheta_3 \cos \psi_3 + {}^G M_{2z}^3 \cos \vartheta_3 \end{pmatrix}.$$

Nyní je nutné určit momenty jednotlivých složek síly pružiny  $S_x, S_y, S_z$  k těmto systémům  $\psi_3, \vartheta_3, \phi_3$ :

$${}^G \mathbf{m}_2^3 = \begin{pmatrix} {}^G M_{Sx}^3 \\ {}^G M_{Sy}^3 \\ {}^G M_{Sz}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_z \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \cos \psi_3 - S_y \frac{l_3}{2} \cos \vartheta_3 \\ -S_z \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \sin \psi_3 + S_x \frac{l_3}{2} \cos \vartheta_3 \\ S_y \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \sin \psi_3 - S_x \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \cos \psi_3 \end{pmatrix},$$

$${}^{\psi \vartheta \phi} \mathbf{m}_2^3 = \begin{pmatrix} {}^G M_{Sz}^3 \\ {}^G M_{Sx}^3 \cos \psi_3 + {}^G M_{Sy}^3 \sin \psi_3 \\ {}^G M_{Sx}^3 \sin \vartheta_3 \sin \psi_3 - {}^G M_{Sy}^3 \sin \vartheta_3 \cos \psi_3 + {}^G M_{Sz}^3 \cos \vartheta_3 \end{pmatrix}.$$

Před transformací reakčních momentů do směrů  $\psi_3, \vartheta_3, \phi_3$  je nutné si uvědomit, že na rozdíl od reakcí budou momenty měnit svoji orientaci s tělesem 2. Nejdříve proto musíme tyto momenty promítnout do směrů  $x$  a  $y$  globálního souřadného systému. Zjednodušíme úlohu tím, že se omezíme na konkrétní případ a budeme uvažovat rotaci tělesa 3 vzhledem k tělesu 2 pouze kolem osy  $z$  globálního souřadného systému. Potom je výsledný vektor po transformaci do směrů  $\psi_3, \vartheta_3, \phi_3$  dán:

$${}^{\psi \vartheta \phi} \mathbf{m}_{R2}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ M_{R2x} \sin \psi_2 \cos \vartheta_3 - M_{R2y} \cos \psi_2 \sin \vartheta_3 \\ M_{R2x} \sin \psi_2 \sin \vartheta_3 \sin \psi_3 + M_{R2y} \cos \psi_2 \sin \vartheta_3 \cos \psi_3 \end{pmatrix}.$$

Přistupme k formulaci momentových rovnic:

$$28) \quad \dot{p}_{3\psi} - {}^G M_{2z}^3 - {}^G M_{S_z}^3 - M = 0$$

$$29) \quad \dot{p}_{3\vartheta} - {}^G M_{2x}^3 \sin \vartheta_3 \sin \psi_3 + {}^G M_{2y}^3 \sin \vartheta_3 \cos \psi_3 - {}^G M_{2z}^3 \cos \vartheta_3 - {}^G M_{S_x}^3 \sin \vartheta_3 \sin \psi_3 + \dots \\ \dots + {}^G M_{S_y}^3 \sin \vartheta_3 \cos \psi_3 - {}^G M_{S_z}^3 \cos \vartheta_3 - M_{R2x} \sin \vartheta_3 \sin \psi_3 - M_{R2y} \sin \vartheta_3 \cos \psi_3 = 0$$

$$30) \quad \dot{p}_{3\phi} - {}^G M_{2x}^3 \cos \psi_3 - {}^G M_{2y}^3 \sin \psi_3 - {}^G M_{S_x}^3 \cos \psi_3 - {}^G M_{S_y}^3 \sin \psi_3 - M_{R2x} \cos \psi_3 - \dots \\ \dots - M_{R2y} \sin \psi_3 = 0$$

V tomto okamžiku jsme získali, dle očekávání, 30 rovnic. Pro každé těleso 15. Zbývá však ještě zformulovat kinematické rovnice vazeb. To učiníme v následujícím kroku. Nejprve vyjádříme pět vazebních rovnic pro rotační uložení v bodě  $A$ .

Ve smyslu stupňů volnosti odebraných v posuvném směru os globálního souřadného systému můžeme psát:

$${}^G \mathbf{r}^2 - {}^G \mathbf{r}_2^{TA} = \mathbf{0},$$

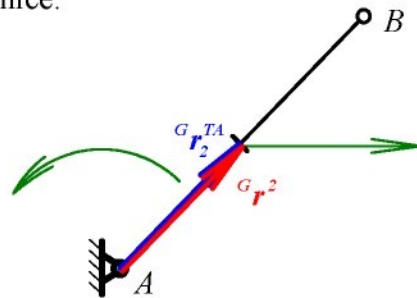
kde  ${}^G \mathbf{r}^2$  je polohový vektor těžiště tělesa 2 vůči bodu  $A$  o souřadnicích  $(x_2, y_2, z_2)$ .

Po rozepsání tohoto vztahu získáme tři rovnice:

$$31) \quad x_2 - \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 = 0$$

$$32) \quad y_2 - \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 = 0$$

$$33) \quad z_2 - \frac{l_2}{2} \cos \vartheta_2 = 0$$



Obr. P3.6 Vazba v bodě  $A$ .

Nyní přejdeme k zamezeným stupňům volnosti ve smyslu rotace kolem os  $x$  a  $y$  globálního souřadného systému. Úhel precese, nutace a vlastní rotace tělesa 2 budeme pro přehlednost značit vektorem ve směru časové změny těchto úhlů (úhlových rychlostí  $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\phi}$ ). Součet průmětů těchto úhlů do os  $x$  a  $y$  globálního souřadného systému musí být

nulový. Pro spočtení průmětů budeme vycházet ze zjednodušujícího předpokladu, který platí pro tuto úlohu: vektory úhlů  $\psi$  a  $\varphi$  směřují ve směru os  $x^2$  a  $z^2$ , vektor úhlu  $\vartheta$  leží v záporném směru osy  $y^2$ . K transformaci těchto úhlů do globálního souřadného systému můžeme proto využít transformační matici dle vztahu (P3.2)  $T_{2 \rightarrow G}$  (s přihlédnutím na znaménka). Vzhledem k tomu, že úhly souřadný systém  $x^2 y^2 z^2$  otáčíme proti kladnému směru úhlů  $\psi_2$ ,  $\vartheta_2$  a  $\varphi_2$ , budou mít tyto úhly hodnoty:

$$\psi_2 = -\frac{7}{4}\pi, \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{2}\pi, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{2}\pi.$$

Úhly se transformují následovně:

$$T_{2 \rightarrow G} \begin{pmatrix} \psi_2 \\ -\vartheta_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta_2 \cos \psi_2 - \varphi_2 \sin \psi_2 \\ -\vartheta_2 \sin \psi_2 - \varphi_2 \cos \psi_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Po rozepsání do směrů os  $x$  a  $y$  získáme rovnice:

$$34) \quad \vartheta_2 \cos \psi_2 - \varphi_2 \sin \psi_2 = 0$$

$$35) \quad -\vartheta_2 \sin \psi_2 - \varphi_2 \cos \psi_2 = 0$$

Podobným způsobem budeme definovat vazební rovnice pro rotační spojení v bodě  $B$ . Při psaní rovnic pro posuvný směr  $x$ ,  $y$  a  $z$  vyjdeme opět z vektorového součtu polohových vektorů dle obrázku P3.7 :

$${}^G \mathbf{r}^3 - {}^G \mathbf{r}^2 - {}^G \mathbf{r}_2^{TA} - {}^G \mathbf{r}_3^{TA} = \mathbf{0},$$

$${}^G \mathbf{r}^3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad {}^G \mathbf{r}^2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

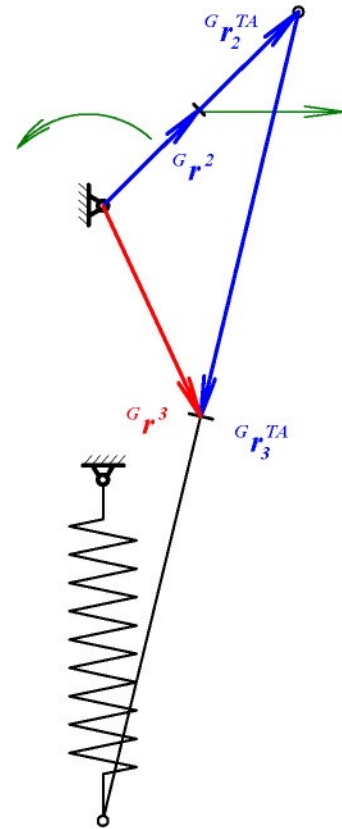
$${}^G \mathbf{r}_2^{TA} = \begin{pmatrix} \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 \\ \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 \\ \frac{l_2}{2} \cos \vartheta_2 \end{pmatrix}, \quad {}^G \mathbf{r}_3^{TA} = \begin{pmatrix} \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \sin \psi_3 \\ \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \cos \psi_3 \\ \frac{l_3}{2} \cos \vartheta_3 \end{pmatrix}.$$

Přepisem do jednotlivých směrů získáme rovnice:

$$36) \quad x_3 - x_2 - \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 - \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \sin \psi_3 = 0,$$

$$37) \quad y_3 - y_2 - \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 - \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \cos \psi_3 = 0,$$

$$38) \quad z_3 - z_2 - \frac{l_2}{2} \cos \vartheta_2 - \frac{l_3}{2} \cos \vartheta_3 = 0.$$



Obr. P3.7 Vazba v bodě  $B$ .

Stejným postupem jako v případě formulace rovnic 34 a 35 budeme postupovat v případě rovnic 39 a 40. Součet průmětů úhlů  $\psi_2, \vartheta_2, \varphi_2$  tělesa 2 a úhlů  $\psi_3, \vartheta_3, \varphi_3$  tělesa 3 do os  $x$  a  $y$  globálního souřadného systému musí být nulový. K transformaci úhlů do globálního souřadného systému opět využijeme matice (P3.1) a (P3.2). Je nutné si uvědomit, že do transformačních matic musíme znovu dosazovat záporné úhly.

$$-T_{2 \rightarrow G} \begin{Bmatrix} \psi_2 \\ -\vartheta_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} + T_{3 \rightarrow G} \begin{Bmatrix} \psi_3 \\ -\vartheta_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\vartheta_2 \cos \psi_2 + \varphi_2 \sin \psi_2 \\ \vartheta_2 \sin \psi_2 + \varphi_2 \cos \psi_2 \\ -\psi_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vartheta_3 \cos \psi_3 - \varphi_3 \sin \psi_3 \\ -\vartheta_3 \sin \psi_3 - \varphi_3 \cos \psi_3 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

Po rozepsání do jednotlivých směrů:

$$39) \quad -\vartheta_2 \cos \psi_2 + \varphi_2 \sin \psi_2 + \vartheta_3 \cos \psi_3 - \varphi_3 \sin \psi_3 = 0,$$

$$40) \quad \vartheta_2 \sin \psi_2 + \varphi_2 \cos \psi_2 - \vartheta_3 \sin \psi_3 - \varphi_3 \cos \psi_3 = 0.$$

Nyní přistoupíme k formulaci rovnic pro jednotlivé silové účinky. Začneme silou  $F$ . Program MSC.ADAMS definuje tento silový účinek pěti rovnicemi – délkou (podobně jako u pružiny), velikostí vektoru síly a jeho průměty do jednotlivých os globálního souřadného systému. V případě síly  $F$  budou proto rovnice následující:

$$41) \quad l_{20} = 0,$$

$$42) \quad F = 300,$$

$$43) \quad F_x - F = 0,$$

$$44) \quad F_y = 0,$$

$$45) \quad F_z = 0.$$

Podobně je definována i síla v pružině  $S$ . Její velikost je rovna součinu tuhosti  $k$  a deformace. Při stanovování její velikosti vyjdeme z níže uvedeného obrázku. Vektorem  ${}^G \mathbf{p}$  označme vektor ve směru pružiny. Jeho velikost je vyjádřena:

$${}^G \mathbf{p} = {}^G \mathbf{r}^3 + {}^G \mathbf{r}_3^{TA} - {}^G \mathbf{r}^{PA}.$$

Velikost vektoru síly  $S$  je dána součinem tuhosti  $k$  a velikosti vektoru  ${}^G \mathbf{p}$ :

$$\|S\| = k \cdot (\|{}^G \mathbf{p}\| - l_0).$$

Zbývá ještě určit průmět síly  $S$  do směru jednotlivých os globálního souřadného systému  $xyz$ :

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} = \|S\| \cdot \frac{1}{\|{}^G \mathbf{p}\|} {}^G \mathbf{p}.$$

Z výše uvedených vztahů sestavíme dané rovnice:

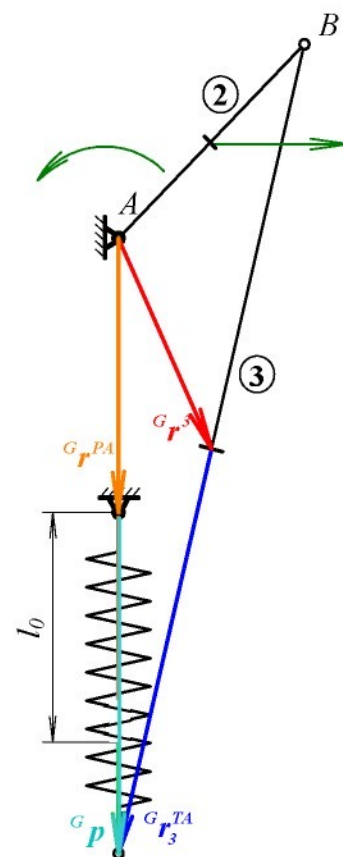
$$46) \quad l_{30} = 250,$$

$$47) \quad S - k \cdot (\|{}^G \mathbf{p}\| - l_0) = 0,$$

$$48) \quad S_x - S \cdot \frac{l}{\|{}^G \mathbf{p}\|} \cdot \left( x_3 + \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \sin \psi_3 - \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \sin \psi_2 \right),$$

$$49) \quad S_y - S \cdot \frac{l}{\|{}^G \mathbf{p}\|} \cdot \left( y_3 + \frac{l_3}{2} \sin \vartheta_3 \cos \psi_3 - \frac{l_2}{2} \sin \vartheta_2 \cos \psi_2 \right),$$

$$50) \quad S_z - S \cdot \frac{l}{\|{}^G \mathbf{p}\|} \cdot \left( z_3 + \frac{l_3}{2} \cos \vartheta_3 - \frac{l_2}{2} \cos \vartheta_2 \right).$$



Obr. P3.8 Definice silového účinku.

Nyní je nutné doplnit ještě poslední rovnici, která bude definovat hnací moment  $M$  působící na člen 2:

$$51) \quad M - M_0 + \frac{I}{3} M_0 \cdot t = 0.$$

Tolik k matematickému popisu daného příkladu v prostředí MSC.ADAMS.

## P 4. Výpis Jacobiho matice v prostředí MSC.ADAMS

V této příloze je uveden výpis Jacobiho matice z prostředí MSC.ADAMS pro případ dvojitého kyvadla (viz příloha P3). Výpis je proveden v prvním integračním kroku v první iteraci. Vzhledem k jeho obsažnosti byla Jacobiho matice rozdělena na dvě části. Dříve, než uvedeme její výpis, specifikujme si jednotlivé proměnné. Čísla rovnic souhlasí s číslováním v příloze P3.

| označení v Jacobiho matici | označení<br>v příloze P3 | označení v Jacobiho matici | označení<br>v příloze P3 |
|----------------------------|--------------------------|----------------------------|--------------------------|
| PART/2 X Vel               | $v_{2x}$                 | PART/3 Z                   | $z_3$                    |
| PART/2 Y Vel               | $v_{2y}$                 | PART/3 Psi                 | $\psi_3$                 |
| PART/2 Z Vel               | $v_{2z}$                 | PART/3 Phi                 | $\phi_3$                 |
| PART/2 Psi Vel             | $\omega_{2\psi}$         | PART/3 The                 | $\theta_3$               |
| PART/2 Phi Vel             | $\omega_{2\phi}$         | REVOL JOI/1 X Force        | $R_{1x}$                 |
| PART/2 The Vel             | $\omega_{2\theta}$       | REVOL JOI/1 Y Force        | $R_{1y}$                 |
| PART/2 Psi Mom             | $p_{2\psi}$              | REVOL JOI/1 Z Force        | $R_{1z}$                 |
| PART/2 Phi Mom             | $p_{2\phi}$              | REVOL JOI/1 Zi,Xj Torq     | $M_{R1y}$                |
| PART/2 The Mom             | $p_{2\theta}$            | REVOL JOI/1 Zi,Yj Torq     | $M_{R1x}$                |
| PART/2 X                   | $x_2$                    | REVOL JOI/2 X Force        | $R_{2x}$                 |
| PART/2 Y                   | $y_2$                    | REVOL JOI/2 Y Force        | $R_{2y}$                 |
| PART/2 Z                   | $z_2$                    | REVOL JOI/2 Z Force        | $R_{2z}$                 |
| PART/2 Psi                 | $\psi_2$                 | REVOL JOI/2 Zi,Xj Torq     | $M_{R2y}$                |
| PART/2 Phi                 | $\phi_2$                 | REVOL JOI/2 Zi,Yj Torq     | $M_{R2x}$                |
| PART/2 The                 | $\theta_2$               | SFORCE/2 Lenght            | $l_{20}$                 |
| PART/3 X Vel               | $v_{3x}$                 | SFORCE/2 Force             | $F$                      |
| PART/3 Y Vel               | $v_{3y}$                 | SFORCE/2 Fx                | $F_x$                    |
| PART/3 Z Vel               | $v_{3z}$                 | SFORCE/2 Fy                | $F_y$                    |
| PART/3 Psi Vel             | $\omega_{3\psi}$         | SFORCE/2 Fz                | $F_z$                    |
| PART/3 Phi Vel             | $\omega_{3\phi}$         | SFORCE/3 Lenght            | $l_{30}$                 |
| PART/3 The Vel             | $\omega_{3\theta}$       | SFORCE/3 Force             | $S$                      |
| PART/3 Psi Mom             | $p_{3\psi}$              | SFORCE/3 Fx                | $S_x$                    |
| PART/3 Phi Mom             | $p_{3\phi}$              | SFORCE/3 Fy                | $S_y$                    |
| PART/3 The Mom             | $p_{3\theta}$            | SFORCE/3 Fz                | $S_z$                    |
| PART/3 X                   | $x_3$                    | SFORCE/1 Torque            | $M$                      |
| PART/3 Y                   | $y_3$                    |                            |                          |



|                    | 1       | 2       | 3       | 4       | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26             |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----------------|
| PART/2 X Vel       | 2.4E+03 | 0       | 2.4E+03 | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Y       |
| PART/2 Y Force     | 0       | 2.4E+03 | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 X       |
| PART/2 Z Force     | 0       | 0       | 2.4E+03 | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Mom |
| PART/2 Psi Mom     | 0       | 0       | 0       | 8.3E+08 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Mom |
| PART/2 The Mom     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Mom |
| PART/2 Psi Torq    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Vel |
| PART/2 Phi Torq    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Vel |
| PART/2 The Torq    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Vel |
| PART/2 X Vel       | -1      | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Mom |
| PART/2 Y Vel       | 0       | 0       | -1      | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Mom |
| PART/2 Z Vel       | 0       | 0       | 0       | -1      | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Mom |
| PART/2 Psi Vel     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Vel |
| PART/2 Phi Vel     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Vel |
| PART/2 The Vel     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Vel |
| PART/3 X Force     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Mom |
| PART/3 Y Force     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Mom |
| PART/3 Z Force     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Mom |
| PART/3 Psi Mom     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Vel |
| PART/3 Phi Mom     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Vel |
| PART/3 The Mom     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Vel |
| PART/3 Psi Torq    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Mom |
| PART/3 Phi Torq    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Mom |
| PART/3 The Torq    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Mom |
| PART/3 X Vel       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Vel |
| PART/3 Y Vel       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Vel |
| PART/3 Z Vel       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Vel |
| PART/3 Psi Vel     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Mom |
| PART/3 Phi Vel     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Mom |
| PART/3 The Vel     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Mom |
| REVOL JOI/1 X      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Vel |
| REVOL JOI/1 Y      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Vel |
| REVOL JOI/1 Z      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Vel |
| REVOL JOI/1 Z1X    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Mom |
| REVOL JOI/1 Z1Y    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Mom |
| REVOL JOI/2 X      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Mom |
| REVOL JOI/2 Y      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Vel |
| REVOL JOI/2 Z      | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Vel |
| REVOL JOI/2 Z1X    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Vel |
| REVOL JOI/2 Z1Y    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Mom |
| REVOL JOI/2 Length | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Mom |
| SFORCE/2 Force     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Mom |
| SFORCE/2 Px        | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Vel |
| SFORCE/2 Py        | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Vel |
| SFORCE/2 Fz        | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Vel |
| SFORCE/3 Length    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Mom |
| SFORCE/3 Force     | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Mom |
| SFORCE/3 Px        | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Mom |
| SFORCE/3 Py        | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 The Vel |
| SFORCE/3 Fz        | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Phi Vel |
| SFORCE/1 Torque    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | PART/3 Psi Vel |



[illegible]

## P 5 Výpis Jacobiho matice v prostředí MSC.ADAMS

Dále je uveden výpis Jacobiho matice pro příklad dvojitého kyvadla z přílohy P1. Výpis platí pro první integrační krok, první iteraci a je uveden v textové podobě tak, jak jej ukládá prostředí MSC.ADAMS do výstupního souboru.

V prvním sloupci je uvedeno pořadové číslo prvku, ve druhé a třetím sloupci je číslo řádku a sloupce matice, pátý, resp. šestý sloupec udávají název rovnice, resp. proměnné pro příslušný řádek, resp. sloupec.

Výpis prvků matice pro těleso 2:

| PART | ID =  | 2     |                |                |
|------|-------|-------|----------------|----------------|
| NP   | NPOSR | NPOSC |                |                |
| 1    | 1     | 1     | PART/2 X Force | PART/2 X vel   |
| 2    | 2     | 2     | PART/2 Y Force | PART/2 Y vel   |
| 3    | 3     | 3     | PART/2 Z Force | PART/2 Z vel   |
| 4    | 4     | 4     | PART/2 Psi Mom | PART/2 Psi vel |
| 5    | 5     | 5     | PART/2 Phi Mom | PART/2 Phi vel |
| 6    | 6     | 6     | PART/2 The Mom | PART/2 The vel |
| 7    | 4     | 5     | PART/2 Psi Mom | PART/2 Phi vel |
| 8    | 5     | 4     | PART/2 Phi Mom | PART/2 Psi vel |
| 9    | 4     | 6     | PART/2 Psi Mom | PART/2 The vel |
| 10   | 6     | 4     | PART/2 The Mom | PART/2 Psi vel |
| 11   | 4     | 14    | PART/2 Psi Mom | PART/2 Phi     |
| 12   | 8     | 4     | PART/2 Phi Trq | PART/2 Psi vel |
| 13   | 4     | 15    | PART/2 Psi Mom | PART/2 The     |
| 14   | 9     | 4     | PART/2 The Trq | PART/2 Psi vel |
| 15   | 5     | 15    | PART/2 Phi Mom | PART/2 The     |
| 16   | 9     | 5     | PART/2 The Trq | PART/2 Phi vel |
| 17   | 6     | 14    | PART/2 The Mom | PART/2 Phi     |
| 18   | 8     | 6     | PART/2 Phi Trq | PART/2 The vel |
| 19   | 6     | 15    | PART/2 The Mom | PART/2 The     |
| 20   | 9     | 6     | PART/2 The Trq | PART/2 The vel |
| 21   | 10    | 1     | PART/2 X vel   | PART/2 X vel   |
| 22   | 10    | 10    | PART/2 X vel   | PART/2 X       |
| 23   | 11    | 2     | PART/2 Y vel   | PART/2 Y vel   |
| 24   | 11    | 11    | PART/2 Y vel   | PART/2 Y       |
| 25   | 12    | 3     | PART/2 Z vel   | PART/2 Z vel   |
| 26   | 12    | 12    | PART/2 Z vel   | PART/2 Z       |
| 27   | 13    | 4     | PART/2 Psi vel | PART/2 Psi vel |
| 28   | 13    | 13    | PART/2 Psi vel | PART/2 Psi     |
| 29   | 14    | 5     | PART/2 Phi vel | PART/2 Phi vel |
| 30   | 14    | 14    | PART/2 Phi vel | PART/2 Phi     |
| 31   | 15    | 6     | PART/2 The vel | PART/2 The vel |
| 32   | 15    | 15    | PART/2 The vel | PART/2 The     |
| 33   | 4     | 7     | PART/2 Psi Mom | PART/2 Psi Mom |
| 34   | 7     | 7     | PART/2 Psi Trq | PART/2 Psi Mom |
| 35   | 5     | 8     | PART/2 Phi Mom | PART/2 Phi Mom |
| 36   | 8     | 8     | PART/2 Phi Trq | PART/2 Phi Mom |
| 37   | 6     | 9     | PART/2 The Mom | PART/2 The Mom |
| 38   | 9     | 9     | PART/2 The Trq | PART/2 The Mom |
| 39   | 7     | 13    | PART/2 Psi Trq | PART/2 Psi     |
| 40   | 8     | 13    | PART/2 Phi Trq | PART/2 Psi     |
| 41   | 9     | 13    | PART/2 The Trq | PART/2 Psi     |
| 42   | 7     | 14    | PART/2 Psi Trq | PART/2 Phi     |
| 43   | 8     | 14    | PART/2 Phi Trq | PART/2 Phi     |
| 44   | 9     | 14    | PART/2 The Trq | PART/2 Phi     |
| 45   | 7     | 15    | PART/2 Psi Trq | PART/2 The     |
| 46   | 8     | 15    | PART/2 Phi Trq | PART/2 The     |
| 47   | 9     | 15    | PART/2 The Trq | PART/2 The     |

# Výpis prvků matice pro těleso 3:

| PART | ID =  | 3     |                |                |
|------|-------|-------|----------------|----------------|
| NP   | NPOSR | NPOSC |                |                |
| 48   | 16    | 16    | PART/3 X Force | PART/3 X vel   |
| 49   | 17    | 17    | PART/3 Y Force | PART/3 Y vel   |
| 50   | 18    | 18    | PART/3 Z Force | PART/3 Z vel   |
| 51   | 19    | 19    | PART/3 Psi Mom | PART/3 Psi vel |
| 52   | 20    | 20    | PART/3 Phi Mom | PART/3 Phi vel |
| 53   | 21    | 21    | PART/3 The Mom | PART/3 The vel |
| 54   | 19    | 20    | PART/3 Psi Mom | PART/3 Phi vel |
| 55   | 20    | 19    | PART/3 Phi Mom | PART/3 Psi vel |
| 56   | 19    | 21    | PART/3 Psi Mom | PART/3 The vel |
| 57   | 21    | 19    | PART/3 The Mom | PART/3 Psi vel |
| 58   | 19    | 29    | PART/3 Psi Mom | PART/3 Phi vel |
| 59   | 23    | 19    | PART/3 Phi Trq | PART/3 Psi vel |
| 60   | 19    | 30    | PART/3 Psi Mom | PART/3 The vel |
| 61   | 24    | 19    | PART/3 The Trq | PART/3 Psi vel |
| 62   | 20    | 30    | PART/3 Phi Mom | PART/3 The vel |
| 63   | 24    | 20    | PART/3 The Trq | PART/3 Phi vel |
| 64   | 21    | 29    | PART/3 The Mom | PART/3 Phi vel |
| 65   | 23    | 21    | PART/3 Phi Trq | PART/3 The vel |
| 66   | 21    | 30    | PART/3 The Mom | PART/3 The vel |
| 67   | 24    | 21    | PART/3 The Trq | PART/3 The vel |
| 68   | 25    | 16    | PART/3 X vel   | PART/3 X vel   |
| 69   | 25    | 25    | PART/3 X vel   | PART/3 X       |
| 70   | 26    | 17    | PART/3 Y vel   | PART/3 Y vel   |
| 71   | 26    | 26    | PART/3 Y vel   | PART/3 Y       |
| 72   | 27    | 18    | PART/3 Z vel   | PART/3 Z vel   |
| 73   | 27    | 27    | PART/3 Z vel   | PART/3 Z       |
| 74   | 28    | 19    | PART/3 Psi vel | PART/3 Psi vel |
| 75   | 28    | 28    | PART/3 Psi vel | PART/3 Psi     |
| 76   | 29    | 20    | PART/3 Phi vel | PART/3 Phi vel |
| 77   | 29    | 29    | PART/3 Phi vel | PART/3 Phi     |
| 78   | 30    | 21    | PART/3 The vel | PART/3 The vel |
| 79   | 30    | 30    | PART/3 The vel | PART/3 The     |
| 80   | 19    | 22    | PART/3 Psi Mom | PART/3 Psi Mom |
| 81   | 22    | 22    | PART/3 Psi Trq | PART/3 Psi Mom |
| 82   | 20    | 23    | PART/3 Phi Mom | PART/3 Phi Mom |
| 83   | 23    | 23    | PART/3 Phi Trq | PART/3 Phi Mom |
| 84   | 21    | 24    | PART/3 The Mom | PART/3 The Mom |
| 85   | 24    | 24    | PART/3 The Trq | PART/3 The Mom |
| 86   | 22    | 28    | PART/3 Psi Trq | PART/3 Psi     |
| 87   | 23    | 28    | PART/3 Phi Trq | PART/3 Psi     |
| 88   | 24    | 28    | PART/3 The Trq | PART/3 Psi     |
| 89   | 22    | 29    | PART/3 Psi Trq | PART/3 Phi     |
| 90   | 23    | 29    | PART/3 Phi Trq | PART/3 Phi     |
| 91   | 24    | 29    | PART/3 The Trq | PART/3 Phi     |
| 92   | 22    | 30    | PART/3 Psi Trq | PART/3 The     |
| 93   | 23    | 30    | PART/3 Phi Trq | PART/3 The     |
| 94   | 24    | 30    | PART/3 The Trq | PART/3 The     |

Výpis prvků matice pro vazbu v bodě A:

| JOINT | ID =  | 1     |                   |                       |
|-------|-------|-------|-------------------|-----------------------|
| NP    | NPOSR | NPOSC |                   |                       |
| 95    | 31    | 10    | REVOL JOI/1 X     | PART/2 X              |
| 96    | 32    | 11    | REVOL JOI/1 Y     | PART/2 Y              |
| 97    | 33    | 12    | REVOL JOI/1 Z     | PART/2 Z              |
| 98    | 31    | 13    | REVOL JOI/1 X     | PART/2 Psi            |
| 99    | 32    | 13    | REVOL JOI/1 Y     | PART/2 Psi            |
| 100   | 31    | 14    | REVOL JOI/1 X     | PART/2 Phi            |
| 101   | 32    | 14    | REVOL JOI/1 Y     | PART/2 Phi            |
| 102   | 33    | 14    | REVOL JOI/1 Z     | PART/2 Phi            |
| 103   | 31    | 15    | REVOL JOI/1 X     | PART/2 The            |
| 104   | 32    | 15    | REVOL JOI/1 Y     | PART/2 The            |
| 105   | 33    | 15    | REVOL JOI/1 Z     | PART/2 The            |
| 106   | 1     | 31    | PART/2 X Force    | REVOL JOINT/1 X Force |
| 107   | 2     | 32    | PART/2 Y Force    | REVOL JOINT/1 Y Force |
| 108   | 3     | 33    | PART/2 Z Force    | REVOL JOINT/1 Z Force |
| 109   | 7     | 31    | PART/2 Psi Trq    | REVOL JOINT/1 X Force |
| 110   | 7     | 32    | PART/2 Psi Trq    | REVOL JOINT/1 Y Force |
| 111   | 8     | 31    | PART/2 Phi Trq    | REVOL JOINT/1 X Force |
| 112   | 8     | 32    | PART/2 Phi Trq    | REVOL JOINT/1 Y Force |
| 113   | 8     | 33    | PART/2 Phi Trq    | REVOL JOINT/1 Z Force |
| 114   | 9     | 31    | PART/2 The Trq    | REVOL JOINT/1 X Force |
| 115   | 9     | 32    | PART/2 The Trq    | REVOL JOINT/1 Y Force |
| 116   | 9     | 33    | PART/2 The Trq    | REVOL JOINT/1 Z Force |
| 117   | 34    | 13    | REVOL JOI/1 Zi.Xj | PART/2 Psi            |
| 118   | 34    | 14    | REVOL JOI/1 Zi.Xj | PART/2 Phi            |
| 119   | 34    | 15    | REVOL JOI/1 Zi.Xj | PART/2 The            |
| 120   | 7     | 34    | PART/2 Psi Trq    | REVOL JOINT/1 ZX Torq |
| 121   | 8     | 34    | PART/2 Phi Trq    | REVOL JOINT/1 ZX Torq |
| 122   | 9     | 34    | PART/2 The Trq    | REVOL JOINT/1 ZX Torq |
| 123   | 35    | 13    | REVOL JOI/1 Zi.Yj | PART/2 Psi            |
| 124   | 35    | 14    | REVOL JOI/1 Zi.Yj | PART/2 Phi            |
| 125   | 35    | 15    | REVOL JOI/1 Zi.Yj | PART/2 The            |
| 126   | 7     | 35    | PART/2 Psi Trq    | REVOL JOINT/1 ZY Torq |
| 127   | 8     | 35    | PART/2 Phi Trq    | REVOL JOINT/1 ZY Torq |
| 128   | 9     | 35    | PART/2 The Trq    | REVOL JOINT/1 ZY Torq |

Výpis prvků matice pro vazbu v bodě B:

| JOINT | ID =  | 2     |                |                       |
|-------|-------|-------|----------------|-----------------------|
| NP    | NPOSR | NPOSC |                |                       |
| 129   | 36    | 25    | REVOL JOI/2 X  | PART/3 X              |
| 130   | 37    | 26    | REVOL JOI/2 Y  | PART/3 Y              |
| 131   | 38    | 27    | REVOL JOI/2 Z  | PART/3 Z              |
| 132   | 36    | 28    | REVOL JOI/2 X  | PART/3 Psi            |
| 133   | 37    | 28    | REVOL JOI/2 Y  | PART/3 Psi            |
| 134   | 36    | 29    | REVOL JOI/2 X  | PART/3 Phi            |
| 135   | 37    | 29    | REVOL JOI/2 Y  | PART/3 Phi            |
| 136   | 38    | 29    | REVOL JOI/2 Z  | PART/3 Phi            |
| 137   | 36    | 30    | REVOL JOI/2 X  | PART/3 The            |
| 138   | 37    | 30    | REVOL JOI/2 Y  | PART/3 The            |
| 139   | 38    | 30    | REVOL JOI/2 Z  | PART/3 The            |
| 140   | 36    | 10    | REVOL JOI/2 X  | PART/2 X              |
| 141   | 37    | 11    | REVOL JOI/2 Y  | PART/2 Y              |
| 142   | 38    | 12    | REVOL JOI/2 Z  | PART/2 Z              |
| 143   | 36    | 13    | REVOL JOI/2 X  | PART/2 Psi            |
| 144   | 37    | 13    | REVOL JOI/2 Y  | PART/2 Psi            |
| 145   | 36    | 14    | REVOL JOI/2 X  | PART/2 Phi            |
| 146   | 37    | 14    | REVOL JOI/2 Y  | PART/2 Phi            |
| 147   | 38    | 14    | REVOL JOI/2 Z  | PART/2 Phi            |
| 148   | 36    | 15    | REVOL JOI/2 X  | PART/2 The            |
| 149   | 37    | 15    | REVOL JOI/2 Y  | PART/2 The            |
| 150   | 38    | 15    | REVOL JOI/2 Z  | PART/2 The            |
| 151   | 16    | 36    | PART/3 X Force | REVOL JOINT/2 X Force |
| 152   | 17    | 37    | PART/3 Y Force | REVOL JOINT/2 Y Force |
| 153   | 18    | 38    | PART/3 Z Force | REVOL JOINT/2 Z Force |
| 154   | 22    | 36    | PART/3 Psi Trq | REVOL JOINT/2 X Force |
| 155   | 22    | 37    | PART/3 Psi Trq | REVOL JOINT/2 Y Force |
| 156   | 23    | 36    | PART/3 Phi Trq | REVOL JOINT/2 X Force |
| 157   | 23    | 37    | PART/3 Phi Trq | REVOL JOINT/2 Y Force |
| 158   | 23    | 38    | PART/3 Phi Trq | REVOL JOINT/2 Z Force |
| 159   | 24    | 36    | PART/3 The Trq | REVOL JOINT/2 X Force |
| 160   | 24    | 37    | PART/3 The Trq | REVOL JOINT/2 Y Force |

|     |    |    |                   |                       |
|-----|----|----|-------------------|-----------------------|
| 160 | 24 | 37 | PART/3 The Trq    | REVOL JOINT/2 Y Force |
| 161 | 24 | 38 | PART/3 The Trq    | REVOL JOINT/2 Z Force |
| 162 | 1  | 36 | PART/2 X Force    | REVOL JOINT/2 X Force |
| 163 | 2  | 37 | PART/2 Y Force    | REVOL JOINT/2 Y Force |
| 164 | 3  | 38 | PART/2 Z Force    | REVOL JOINT/2 Z Force |
| 165 | 7  | 36 | PART/2 Psi Trq    | REVOL JOINT/2 X Force |
| 166 | 7  | 37 | PART/2 Psi Trq    | REVOL JOINT/2 Y Force |
| 167 | 8  | 36 | PART/2 Phi Trq    | REVOL JOINT/2 X Force |
| 168 | 8  | 37 | PART/2 Phi Trq    | REVOL JOINT/2 Y Force |
| 169 | 8  | 38 | PART/2 Phi Trq    | REVOL JOINT/2 Z Force |
| 170 | 9  | 36 | PART/2 The Trq    | REVOL JOINT/2 X Force |
| 171 | 9  | 37 | PART/2 The Trq    | REVOL JOINT/2 Y Force |
| 172 | 9  | 38 | PART/2 The Trq    | REVOL JOINT/2 Z Force |
| 173 | 39 | 28 | REVOL JOI/2 Zi.Xj | PART/3 Psi            |
| 174 | 39 | 29 | REVOL JOI/2 Zi.Xj | PART/3 Phi            |
| 175 | 39 | 30 | REVOL JOI/2 Zi.Xj | PART/3 The            |
| 176 | 39 | 13 | REVOL JOI/2 Zi.Xj | PART/2 Psi            |
| 177 | 39 | 14 | REVOL JOI/2 Zi.Xj | PART/2 Phi            |
| 178 | 39 | 15 | REVOL JOI/2 Zi.Xj | PART/2 The            |
| 179 | 22 | 39 | PART/3 Psi Trq    | REVOL JOINT/2 ZX Torq |
| 180 | 23 | 39 | PART/3 Phi Trq    | REVOL JOINT/2 ZX Torq |
| 181 | 24 | 39 | PART/3 The Trq    | REVOL JOINT/2 ZX Torq |
| 182 | 7  | 39 | PART/2 Psi Trq    | REVOL JOINT/2 ZX Torq |
| 183 | 8  | 39 | PART/2 Phi Trq    | REVOL JOINT/2 ZX Torq |
| 184 | 9  | 39 | PART/2 The Trq    | REVOL JOINT/2 ZX Torq |
| 185 | 40 | 28 | REVOL JOI/2 Zi.Yj | PART/3 Psi            |
| 186 | 40 | 29 | REVOL JOI/2 Zi.Yj | PART/3 Phi            |
| 187 | 40 | 30 | REVOL JOI/2 Zi.Yj | PART/3 The            |
| 188 | 40 | 13 | REVOL JOI/2 Zi.Yj | PART/2 Psi            |
| 189 | 40 | 14 | REVOL JOI/2 Zi.Yj | PART/2 Phi            |
| 190 | 40 | 15 | REVOL JOI/2 Zi.Yj | PART/2 The            |
| 191 | 22 | 40 | PART/3 Psi Trq    | REVOL JOINT/2 ZY Torq |
| 192 | 23 | 40 | PART/3 Phi Trq    | REVOL JOINT/2 ZY Torq |
| 193 | 24 | 40 | PART/3 The Trq    | REVOL JOINT/2 ZY Torq |
| 194 | 7  | 40 | PART/2 Psi Trq    | REVOL JOINT/2 ZY Torq |
| 195 | 8  | 40 | PART/2 Phi Trq    | REVOL JOINT/2 ZY Torq |
| 196 | 9  | 40 | PART/2 The Trq    | REVOL JOINT/2 ZY Torq |
| 197 | 22 | 13 | PART/3 Psi Trq    | PART/2 Psi            |
| 198 | 23 | 13 | PART/3 Phi Trq    | PART/2 Psi            |
| 199 | 24 | 13 | PART/3 The Trq    | PART/2 Psi            |
| 200 | 22 | 14 | PART/3 Psi Trq    | PART/2 Phi            |
| 201 | 23 | 14 | PART/3 Phi Trq    | PART/2 Phi            |
| 202 | 24 | 14 | PART/3 The Trq    | PART/2 Phi            |
| 203 | 22 | 15 | PART/3 Psi Trq    | PART/2 The            |
| 204 | 23 | 15 | PART/3 Phi Trq    | PART/2 The            |
| 205 | 24 | 15 | PART/3 The Trq    | PART/2 The            |
| 206 | 7  | 28 | PART/2 Psi Trq    | PART/3 Psi            |
| 207 | 7  | 29 | PART/2 Psi Trq    | PART/3 Phi            |
| 208 | 7  | 30 | PART/2 Psi Trq    | PART/3 The            |
| 209 | 8  | 28 | PART/2 Phi Trq    | PART/3 Psi            |
| 210 | 8  | 29 | PART/2 Phi Trq    | PART/3 Phi            |
| 211 | 8  | 30 | PART/2 Phi Trq    | PART/3 The            |
| 212 | 9  | 28 | PART/2 The Trq    | PART/3 Psi            |
| 213 | 9  | 29 | PART/2 The Trq    | PART/3 Phi            |
| 214 | 9  | 30 | PART/2 The Trq    | PART/3 The            |

Výpis prvků matice pro sílu  $F$ :

| FORCE | ID =  | 2     |                 |                 |
|-------|-------|-------|-----------------|-----------------|
| NP    | NPOSR | NPOSC |                 |                 |
| 215   | 42    | 42    | SFORCE/2 Force  | SFORCE/2 Force  |
| 216   | 1     | 43    | PART/2 X Force  | SFORCE/2 Fx     |
| 217   | 2     | 44    | PART/2 Y Force  | SFORCE/2 Fy     |
| 218   | 3     | 45    | PART/2 Z Force  | SFORCE/2 Fz     |
| 219   | 7     | 13    | PART/2 Psi Trq  | PART/2 Psi      |
| 220   | 8     | 13    | PART/2 Phi Trq  | PART/2 Psi      |
| 221   | 9     | 13    | PART/2 The Trq  | PART/2 Psi      |
| 222   | 7     | 14    | PART/2 Psi Trq  | PART/2 Phi      |
| 223   | 8     | 14    | PART/2 Phi Trq  | PART/2 Phi      |
| 224   | 9     | 14    | PART/2 The Trq  | PART/2 Phi      |
| 225   | 7     | 15    | PART/2 Psi Trq  | PART/2 The      |
| 226   | 8     | 15    | PART/2 Phi Trq  | PART/2 The      |
| 227   | 9     | 15    | PART/2 The Trq  | PART/2 The      |
| 228   | 7     | 13    | PART/2 Psi Trq  | PART/2 Psi      |
| 229   | 8     | 13    | PART/2 Phi Trq  | PART/2 Psi      |
| 230   | 9     | 13    | PART/2 The Trq  | PART/2 Psi      |
| 231   | 7     | 14    | PART/2 Psi Trq  | PART/2 Phi      |
| 232   | 8     | 14    | PART/2 Phi Trq  | PART/2 Phi      |
| 233   | 9     | 14    | PART/2 The Trq  | PART/2 Phi      |
| 234   | 7     | 15    | PART/2 Psi Trq  | PART/2 The      |
| 235   | 8     | 15    | PART/2 Phi Trq  | PART/2 The      |
| 236   | 9     | 15    | PART/2 The Trq  | PART/2 The      |
| 237   | 7     | 43    | PART/2 Psi Trq  | SFORCE/2 Fx     |
| 238   | 7     | 44    | PART/2 Psi Trq  | SFORCE/2 Fy     |
| 239   | 7     | 45    | PART/2 Psi Trq  | SFORCE/2 Fz     |
| 240   | 8     | 43    | PART/2 Phi Trq  | SFORCE/2 Fx     |
| 241   | 8     | 44    | PART/2 Phi Trq  | SFORCE/2 Fy     |
| 242   | 8     | 45    | PART/2 Phi Trq  | SFORCE/2 Fz     |
| 243   | 9     | 43    | PART/2 The Trq  | SFORCE/2 Fx     |
| 244   | 9     | 44    | PART/2 The Trq  | SFORCE/2 Fy     |
| 245   | 9     | 45    | PART/2 The Trq  | SFORCE/2 Fz     |
| 246   | 41    | 41    | SFORCE/2 Length | SFORCE/2 Length |
| 247   | 43    | 42    | SFORCE/2 Fx     | SFORCE/2 Force  |
| 248   | 44    | 42    | SFORCE/2 Fy     | SFORCE/2 Force  |
| 249   | 45    | 42    | SFORCE/2 Fz     | SFORCE/2 Force  |
| 250   | 43    | 43    | SFORCE/2 Fx     | SFORCE/2 Fx     |
| 251   | 44    | 44    | SFORCE/2 Fy     | SFORCE/2 Fy     |
| 252   | 45    | 45    | SFORCE/2 Fz     | SFORCE/2 Fz     |

Výpis prvků matice pro sílu pružiny  $S$ :

| FORCE | ID =  | 3     |                |                |
|-------|-------|-------|----------------|----------------|
| NP    | NPOSR | NPOSC |                |                |
| 253   | 47    | 47    | SFORCE/3 Force | SFORCE/3 Force |
| 254   | 47    | 25    | SFORCE/3 Force | PART/3 X       |
| 255   | 47    | 26    | SFORCE/3 Force | PART/3 Y       |
| 256   | 47    | 27    | SFORCE/3 Force | PART/3 Z       |
| 257   | 47    | 28    | SFORCE/3 Force | PART/3 Psi     |
| 258   | 47    | 29    | SFORCE/3 Force | PART/3 Phi     |
| 259   | 47    | 30    | SFORCE/3 Force | PART/3 The     |
| 260   | 16    | 48    | PART/3 X Force | SFORCE/3 Fx    |
| 261   | 17    | 49    | PART/3 Y Force | SFORCE/3 Fy    |
| 262   | 18    | 50    | PART/3 Z Force | SFORCE/3 Fz    |
| 263   | 22    | 28    | PART/3 Psi Trq | PART/3 Psi     |
| 264   | 23    | 28    | PART/3 Phi Trq | PART/3 Psi     |
| 265   | 24    | 28    | PART/3 The Trq | PART/3 Psi     |
| 266   | 22    | 29    | PART/3 Psi Trq | PART/3 Phi     |
| 267   | 23    | 29    | PART/3 Phi Trq | PART/3 Phi     |
| 268   | 24    | 29    | PART/3 The Trq | PART/3 Phi     |
| 269   | 22    | 30    | PART/3 Psi Trq | PART/3 The     |
| 270   | 23    | 30    | PART/3 Phi Trq | PART/3 The     |
| 271   | 24    | 30    | PART/3 The Trq | PART/3 The     |
| 272   | 22    | 28    | PART/3 Psi Trq | PART/3 Psi     |
| 273   | 23    | 28    | PART/3 Phi Trq | PART/3 Psi     |
| 274   | 24    | 28    | PART/3 The Trq | PART/3 Psi     |
| 275   | 22    | 29    | PART/3 Psi Trq | PART/3 Phi     |
| 276   | 23    | 29    | PART/3 Phi Trq | PART/3 Phi     |
| 277   | 24    | 29    | PART/3 The Trq | PART/3 Phi     |



|     |    |    |                 |                 |
|-----|----|----|-----------------|-----------------|
| 277 | 24 | 29 | PART/3 The Trq  | PART/3 Phi      |
| 278 | 22 | 30 | PART/3 Psi Trq  | PART/3 The      |
| 279 | 23 | 30 | PART/3 Phi Trq  | PART/3 The      |
| 280 | 24 | 30 | PART/3 The Trq  | PART/3 The      |
| 281 | 22 | 48 | PART/3 Psi Trq  | SFORCE/3 Fx     |
| 282 | 22 | 49 | PART/3 Psi Trq  | SFORCE/3 Fy     |
| 283 | 22 | 50 | PART/3 Psi Trq  | SFORCE/3 Fz     |
| 284 | 23 | 48 | PART/3 Phi Trq  | SFORCE/3 Fx     |
| 285 | 23 | 49 | PART/3 Phi Trq  | SFORCE/3 Fy     |
| 286 | 23 | 50 | PART/3 Phi Trq  | SFORCE/3 Fz     |
| 287 | 24 | 48 | PART/3 The Trq  | SFORCE/3 Fx     |
| 288 | 24 | 49 | PART/3 The Trq  | SFORCE/3 Fy     |
| 289 | 24 | 50 | PART/3 The Trq  | SFORCE/3 Fz     |
| 290 | 48 | 25 | SFORCE/3 Fx     | PART/3 X        |
| 291 | 49 | 25 | SFORCE/3 Fy     | PART/3 X        |
| 292 | 50 | 25 | SFORCE/3 Fz     | PART/3 X        |
| 293 | 48 | 26 | SFORCE/3 Fx     | PART/3 Y        |
| 294 | 49 | 26 | SFORCE/3 Fy     | PART/3 Y        |
| 295 | 50 | 26 | SFORCE/3 Fz     | PART/3 Y        |
| 296 | 48 | 27 | SFORCE/3 Fx     | PART/3 Z        |
| 297 | 49 | 27 | SFORCE/3 Fy     | PART/3 Z        |
| 298 | 50 | 27 | SFORCE/3 Fz     | PART/3 Z        |
| 299 | 48 | 28 | SFORCE/3 Fx     | PART/3 Psi      |
| 300 | 49 | 28 | SFORCE/3 Fy     | PART/3 Psi      |
| 301 | 50 | 28 | SFORCE/3 Fz     | PART/3 Psi      |
| 302 | 48 | 29 | SFORCE/3 Fx     | PART/3 Phi      |
| 303 | 49 | 29 | SFORCE/3 Fy     | PART/3 Phi      |
| 304 | 50 | 29 | SFORCE/3 Fz     | PART/3 Phi      |
| 305 | 48 | 30 | SFORCE/3 Fx     | PART/3 The      |
| 306 | 49 | 30 | SFORCE/3 Fy     | PART/3 The      |
| 307 | 50 | 30 | SFORCE/3 Fz     | PART/3 The      |
| 308 | 46 | 46 | SFORCE/3 Length | SFORCE/3 Length |
| 309 | 48 | 47 | SFORCE/3 Fx     | SFORCE/3 Force  |
| 310 | 49 | 47 | SFORCE/3 Fy     | SFORCE/3 Force  |
| 311 | 50 | 47 | SFORCE/3 Fz     | SFORCE/3 Force  |
| 312 | 48 | 48 | SFORCE/3 Fx     | SFORCE/3 Fx     |
| 313 | 49 | 49 | SFORCE/3 Fy     | SFORCE/3 Fy     |
| 314 | 50 | 50 | SFORCE/3 Fz     | SFORCE/3 Fz     |

Výpis prvků matice pro hnací moment  $M$ :

| FORCE | ID =  | 1     |                 |                 |
|-------|-------|-------|-----------------|-----------------|
| NP    | NPOSR | NPOSC |                 |                 |
| 315   | 51    | 51    | SFORCE/1 Torque | SFORCE/1 Torque |
| 316   | 7     | 51    | PART/2 Psi Trq  | SFORCE/1 Torque |
| 317   | 8     | 51    | PART/2 Phi Trq  | SFORCE/1 Torque |
| 318   | 9     | 51    | PART/2 The Trq  | SFORCE/1 Torque |

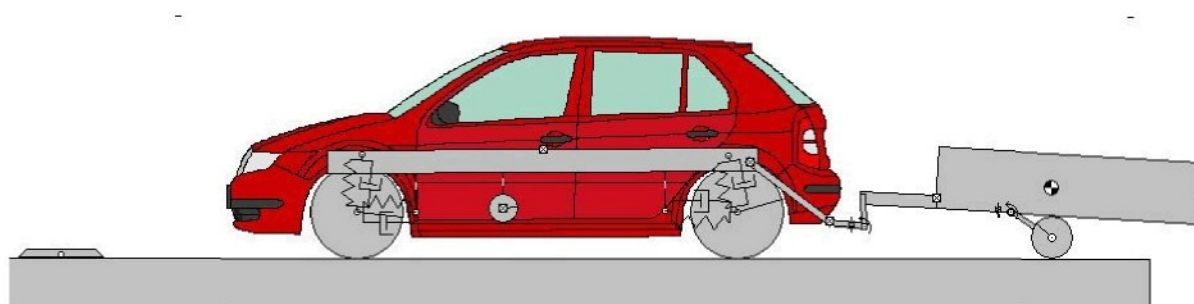


Nyní následuje výpis, který přiřazuje jednotlivým prvkům Jacobiho matice, které byly definovány výše pořadovými čísly), hodnoty derivací dle příslušných proměnných.

|              |              |                |              |     |              |     |              |
|--------------|--------------|----------------|--------------|-----|--------------|-----|--------------|
| PART ID = 2  |              |                |              |     |              |     |              |
| NP           | G(NP)        | NP             | G(NP)        | NP  | G(NP)        | NP  | G(NP)        |
| 1            | 2.40000E+03  | 2              | 2.40000E+03  | 3   | 2.40000E+03  | 4   | 8.33000E+06  |
| 5            | 3.05282E+06  | 6              | 5.67246E+06  | 7   | -1.86128E-03 | 8   | -1.86128E-03 |
| 9            | -1.98076E-02 | 10             | -1.98076E-02 | 11  | 0.00000E+00  | 12  | 0.00000E+00  |
| 13           | 0.00000E+00  | 14             | 0.00000E+00  | 15  | 0.00000E+00  | 16  | 0.00000E+00  |
| 17           | 0.00000E+00  | 18             | 0.00000E+00  | 19  | 0.00000E+00  | 20  | 0.00000E+00  |
| 21           | -1.00000E+00 | 22             | 6.00000E+00  | 23  | -1.00000E+00 | 24  | 6.00000E+00  |
| 25           | -1.00000E+00 | 26             | 6.00000E+00  | 27  | -1.00000E+00 | 28  | 6.00000E+00  |
| 29           | -1.00000E+00 | 30             | 6.00000E+00  | 31  | -1.00000E+00 | 32  | 6.00000E+00  |
| 33           | -1.00000E+00 | 34             | 6.00000E+00  | 35  | -1.00000E+00 | 36  | 6.00000E+00  |
| 37           | -1.00000E+00 | 38             | 6.00000E+00  | 39  | 0.00000E+00  | 40  | 0.00000E+00  |
| 41           | 0.00000E+00  | 42             | 0.00000E+00  | 43  | 0.00000E+00  | 44  | 0.00000E+00  |
| 45           | 0.00000E+00  | 46             | 0.00000E+00  | 47  | 0.00000E+00  |     |              |
| PART ID = 3  |              |                |              |     |              |     |              |
| NP           | G(NP)        | NP             | G(NP)        | NP  | G(NP)        | NP  | G(NP)        |
| 48           | 7.20000E+03  | 49             | 7.20000E+03  | 50  | 7.20000E+03  | 51  | 2.25000E+08  |
| 52           | 2.00000E+08  | 53             | 1.37765E+08  | 54  | -1.10035E-01 | 55  | -1.10035E-01 |
| 56           | -1.62571E+00 | 57             | -1.62571E+00 | 58  | 0.00000E+00  | 59  | 0.00000E+00  |
| 60           | 0.00000E+00  | 61             | 0.00000E+00  | 62  | 0.00000E+00  | 63  | 0.00000E+00  |
| 64           | 0.00000E+00  | 65             | 0.00000E+00  | 66  | 0.00000E+00  | 67  | 0.00000E+00  |
| 68           | -1.00000E+00 | 69             | 6.00000E+00  | 70  | -1.00000E+00 | 71  | 6.00000E+00  |
| 72           | -1.00000E+00 | 73             | 6.00000E+00  | 74  | -1.00000E+00 | 75  | 6.00000E+00  |
| 76           | -1.00000E+00 | 77             | 6.00000E+00  | 78  | -1.00000E+00 | 79  | 6.00000E+00  |
| 80           | -1.00000E+00 | 81             | 6.00000E+00  | 82  | -1.00000E+00 | 83  | 6.00000E+00  |
| 84           | -1.00000E+00 | 85             | 6.00000E+00  | 86  | 0.00000E+00  | 87  | 0.00000E+00  |
| 88           | 0.00000E+00  | 89             | 0.00000E+00  | 90  | 0.00000E+00  | 91  | 0.00000E+00  |
| 92           | 0.00000E+00  | 93             | 0.00000E+00  | 94  | 0.00000E+00  |     |              |
| JOINT ID = 1 |              | JOINT TYPE = 3 |              |     |              |     |              |
| NP           | G(NP)        | NP             | G(NP)        | NP  | G(NP)        | NP  | G(NP)        |
| 95           | 1.00000E+00  | 96             | 1.00000E+00  | 97  | 1.00000E+00  | 98  | 1.76777E+02  |
| 99           | -1.76777E+02 | 100            | -1.07779E-07 | 101 | 1.07779E-07  | 102 | 2.72856E-14  |
| 103          | -7.53694E-17 | 104            | -7.53694E-17 | 105 | -2.50000E+02 | 106 | 1.00000E+00  |
| 107          | 1.00000E+00  | 108            | 1.00000E+00  | 109 | 1.76777E+02  | 110 | -1.76777E+02 |
| 111          | -1.07779E-07 | 112            | 1.07779E-07  | 113 | 2.72856E-14  | 114 | -7.53694E-17 |
| 115          | -7.53694E-17 | 116            | -2.50000E+02 | 117 | -7.04165E-17 | 118 | -7.07107E-01 |
| 119          | -7.07107E-01 | 120            | -7.04165E-17 | 121 | -7.07107E-01 | 122 | -7.07107E-01 |
| 123          | -7.04165E-17 | 124            | 7.07107E-01  | 125 | -7.07107E-01 | 126 | -7.04165E-17 |
| 127          | 7.07107E-01  | 128            | -7.07107E-01 |     |              |     |              |
| JOINT ID = 2 |              | JOINT TYPE = 3 |              |     |              |     |              |
| NP           | G(NP)        | NP             | G(NP)        | NP  | G(NP)        | NP  | G(NP)        |
| 129          | 1.00000E+00  | 130            | 1.00000E+00  | 131 | 1.00000E+00  | 132 | -7.28877E+02 |
| 133          | 1.76777E+02  | 134            | 4.01011E-07  | 135 | -9.72584E-08 | 136 | 7.75752E-14  |
| 137          | 1.23888E-16  | 138            | 5.10809E-16  | 139 | -7.50007E+02 | 140 | -1.00000E+00 |
| 141          | -1.00000E+00 | 142            | -1.00000E+00 | 143 | 1.76777E+02  | 144 | -1.76777E+02 |
| 145          | -1.07779E-07 | 146            | 1.07779E-07  | 147 | 6.99182E-14  | 148 | 7.53695E-17  |
| 149          | 7.53695E-17  | 150            | -2.50000E+02 | 151 | 1.00000E+00  | 152 | 1.00000E+00  |
| 153          | 1.00000E+00  | 154            | -7.28877E+02 | 155 | 1.76777E+02  | 156 | 4.01011E-07  |
| 157          | -9.72584E-08 | 158            | 7.75752E-14  | 159 | 1.23888E-16  | 160 | 5.10809E-16  |
| 161          | -7.50007E+02 | 162            | -1.00000E+00 | 163 | -1.00000E+00 | 164 | -1.00000E+00 |
| 165          | 1.76777E+02  | 166            | -1.76777E+02 | 167 | -1.07779E-07 | 168 | 1.07779E-07  |
| 169          | 6.99182E-14  | 170            | 7.53695E-17  | 171 | 7.53695E-17  | 172 | -2.50000E+02 |
| 173          | 2.34719E-17  | 174            | 9.71826E-01  | 175 | 2.35700E-01  | 176 | -2.34719E-17 |
| 177          | 7.07107E-01  | 178            | 7.07107E-01  | 179 | 2.34719E-17  | 180 | 9.71826E-01  |
| 181          | 2.35700E-01  | 182            | -2.34719E-17 | 183 | 7.07107E-01  | 184 | 7.07107E-01  |
| 185          | 9.67783E-17  | 186            | -2.35700E-01 | 187 | 9.71826E-01  | 188 | -9.67783E-17 |
| 189          | -7.07107E-01 | 190            | 7.07107E-01  | 191 | 9.67783E-17  | 192 | -2.35700E-01 |
| 193          | 9.71826E-01  | 194            | -9.67783E-17 | 195 | -7.07107E-01 | 196 | 7.07107E-01  |
| FORCE ID = 2 |              | FORCE TYPE = 1 |              |     |              |     |              |
| NP           | G(NP)        | NP             | G(NP)        | NP  | G(NP)        | NP  | G(NP)        |
| 215          | 1.00000E+06  | 216            | -1.00000E+00 | 217 | -1.00000E+00 | 218 | -1.00000E+00 |
| 219          | 0.00000E+00  | 220            | 2.26108E-14  | 221 | -2.26108E-14 | 222 | 0.00000E+00  |
| 223          | 0.00000E+00  | 224            | 0.00000E+00  | 225 | 0.00000E+00  | 226 | -1.00895E-06 |
| 227          | 0.00000E+00  | 228            | 1.00894E-06  | 229 | -6.15145E-16 | 230 | 3.69167E-28  |
| 231          | 2.19957E-14  | 232            | -4.26326E-12 | 233 | -4.26326E-12 | 234 | -2.26108E-14 |
| 235          | 1.00895E-06  | 236            | 1.00895E-06  | 237 | 3.36317E-09  | 238 | -3.36314E-09 |
| 239          | 0.00000E+00  | 240            | 7.33189E-17  | 241 | -7.33190E-17 | 242 | 2.00972E-14  |
| 243          | 7.53694E-17  | 244            | 7.53694E-17  | 245 | -4.75622E-09 | 246 | 1.00000E+07  |
| 247          | -1.00000E+00 | 248            | 6.12303E-17  | 249 | -6.12303E-17 | 250 | 1.00000E+07  |
| 251          | 1.00000E+07  | 252            | 1.00000E+07  |     |              |     |              |
| FORCE ID = 3 |              | FORCE TYPE = 1 |              |     |              |     |              |
| NP           | G(NP)        | NP             | G(NP)        | NP  | G(NP)        | NP  | G(NP)        |
| 253          | 1.00000E+06  | 254            | 3.67708E-08  | 255 | -2.50000E-01 | 256 | 0.00000E+00  |
| 257          | 4.41944E+01  | 258            | -2.84217E-08 | 259 | 2.52655E-04  | 260 | 1.00000E+00  |
| 261          | 1.00000E+00  | 262            | 1.00000E+00  | 263 | 0.00000E+00  | 264 | -4.52322E-14 |
| 265          | -1.09703E-14 | 266            | 0.00000E+00  | 267 | 0.00000E+00  | 268 | 0.00000E+00  |
| 269          | 0.00000E+00  | 270            | -1.56536E+04 | 271 | 0.00000E+00  | 272 | -6.45420E+04 |
| 273          | 3.55095E-05  | 274            | 7.52316E-37  | 275 | 3.55095E-05  | 276 | -1.63863E-12 |
| 277          | 6.67575E-12  | 278            | -1.09703E-14 | 279 | 1.56536E+04  | 280 | -6.45420E+04 |
| 281          | 7.28877E+02  | 282            | -1.76777E+02 | 283 | 0.00000E+00  | 284 | -4.01011E-07 |
| 285          | 9.72584E-08  | 286            | -8.52651E-14 | 287 | 1.23888E-16  | 288 | 5.10809E-16  |
| 289          | 7.50007E+02  | 290            | -1.46557E-01 | 291 | 0.00000E+00  | 292 | 0.00000E+00  |
| 293          | 0.00000E+00  | 294            | 0.00000E+00  | 295 | 1.76689E-26  | 296 | 0.00000E+00  |
| 297          | 1.76689E-26  | 298            | -1.46557E-01 | 299 | -1.06822E+02 | 300 | 0.00000E+00  |
| 301          | -3.12345E-24 | 302            | 5.87711E-08  | 303 | -1.37067E-39 | 304 | 1.13692E-14  |
| 305          | -1.81567E-17 | 306            | 1.32518E-23  | 307 | -1.09919E+02 | 308 | 1.00000E+07  |
| 309          | 0.00000E+00  | 310            | -1.00000E+00 | 311 | -1.20559E-25 | 312 | 1.00000E+07  |
| 313          | 1.00000E+07  | 314            | 1.00000E+07  |     |              |     |              |
| FORCE ID = 1 |              | FORCE TYPE = 2 |              |     |              |     |              |
| NP           | G(NP)        | NP             | G(NP)        | NP  | G(NP)        | NP  | G(NP)        |
| 315          | 1.00000E+06  | 316            | -1.00000E+00 | 317 | 6.09693E-10  | 318 | 0.00000E+00  |

## P 6 Model vozidla s přívěsem v prostředí Working Model 2D

Za účelem ukázky tvorby porovnávacího modelu pro analýzu výsledků získaných v kap. 5.3.3 byl v prostředí WM2D sestaven následující půlový model automobilu s přívěsem (obr. P6.1)



Obr. P6.1 Model osobního automobilu s přívěsem v prostředí WM2D.

Uvedme nyní základní zjednodušení prostředí WM2D vůči software MSC.ADAMS i vůči realitě:

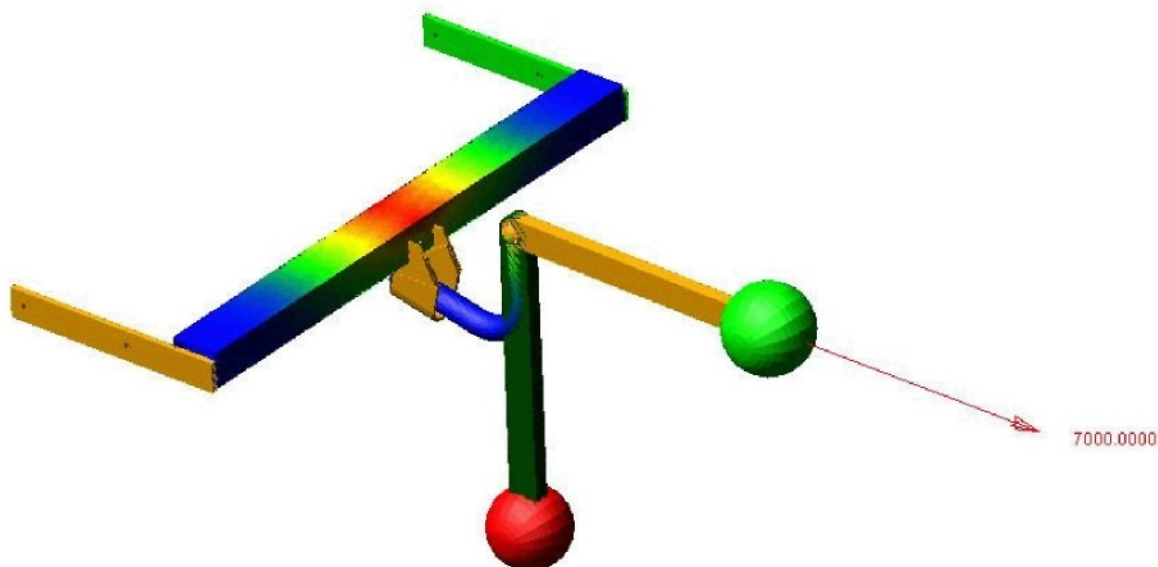
- a) jedná se o půlový rovinný model,
- b) charakteristiky pružin a tlumičů jsou zadány pouze lineárním průběhem, tj. s konstantní tuhostí a tlumením,
- c) pneumatiky jsou modelovány jako tuhá tělesa, jejich elastické vlastnosti jsou zjednodušeně nahrazeny konstantou elasticity, tzn. mírou pohlcení energie během kontaktu dvou těles.

Vzhledem k zásadnosti těchto zjednodušení je možné brát výsledky simulací pouze informativně. Jejich stěžejním úkolem je podat základní představu o velikostech kinematických a silových účinků v modelu.

Velikost tuhosti a tlumení pro odpružení automobilu byly získány linearizací průběhu skutečných charakteristik v okolí pracovního bodu. Torzní tuhost a tlumení nápravy přívěsu je převzato z prostředí MSC.ADAMS.

Posledním úkolem před začátkem výpočtu bylo stanovit náhradní model tažného zařízení včetně určení vhodných konstant tuhosti a tlumení. To je do jisté míry obtížná záležitost. Pro odhad těchto parametrů nebylo k dispozici dostatečné množství podkladů. Neproběhlo ani měření na samostatném tažném zařízení. Proto byl v této situaci s výhodou využit samotný model tažného zařízení, který byl z modulu Car převeden do prostředí View a tam podroben zatížení. Výsledky této simulace se dají vzít jako referenční z toho důvodu, že vzhledem k jednoduché konstrukci tohoto modelu není nutné předpokládat žádné nesrovnalosti ve výpočtu. Jednoduchou konstrukcí modelu je myšlena skutečnost, že model neobsahuje

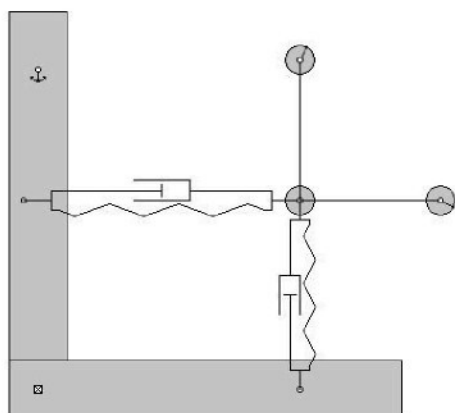
žádné prvky, které by způsobily výrazně odlišné vlastní frekvence od těch, které byly vybrány při definování poddajných členů. Model tažného zařízení v prostředí MSC.ADAMS/View je uveden na následujícím obrázku P6.2:



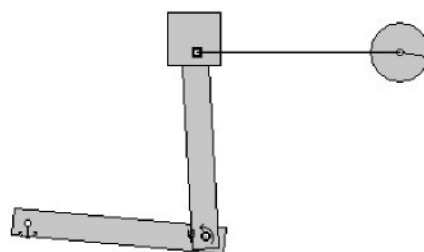
Obr. P6.2 Model tažného zařízení osobního automobilu v prostředí MSC.ADAMS.

Boční ploché držáky příčného nosníku jsou pevnou vazbou vetknuty do rámu (GROUND). Ke kouli háku tažného zařízení jsou nehmotnými táhly připojeny dvě přídavné hmoty (červená, resp. zelená koule), které se mohou pohybovat pouze ve svislém, resp. vodorovném směru. Tyto hmoty jsou určeny ke zjištění tlumících charakteristik. Aktivována je vždy pouze jedna z nich, která je postupně pomalu vychylována. Po dosažení určité deformace tažného zařízení hmota setrvá po dobu 1 s na dané pozici (pro odeznění případného přechodového děje) a posléze je uvolněna. Sleduje se průběh deformace těžiště koule háku v závislosti na čase. Tentýž experiment je proveden ve zjednodušeném modelu v prostředí WM2D.

Za tímto účelem byly v prostředí WM2D navrženy dva typy modelů dle následujících obrázků P6.3 a P6.4.



Obr. P6.3 Návrh 1. modelu tažného zařízení v prostředí WM2D.

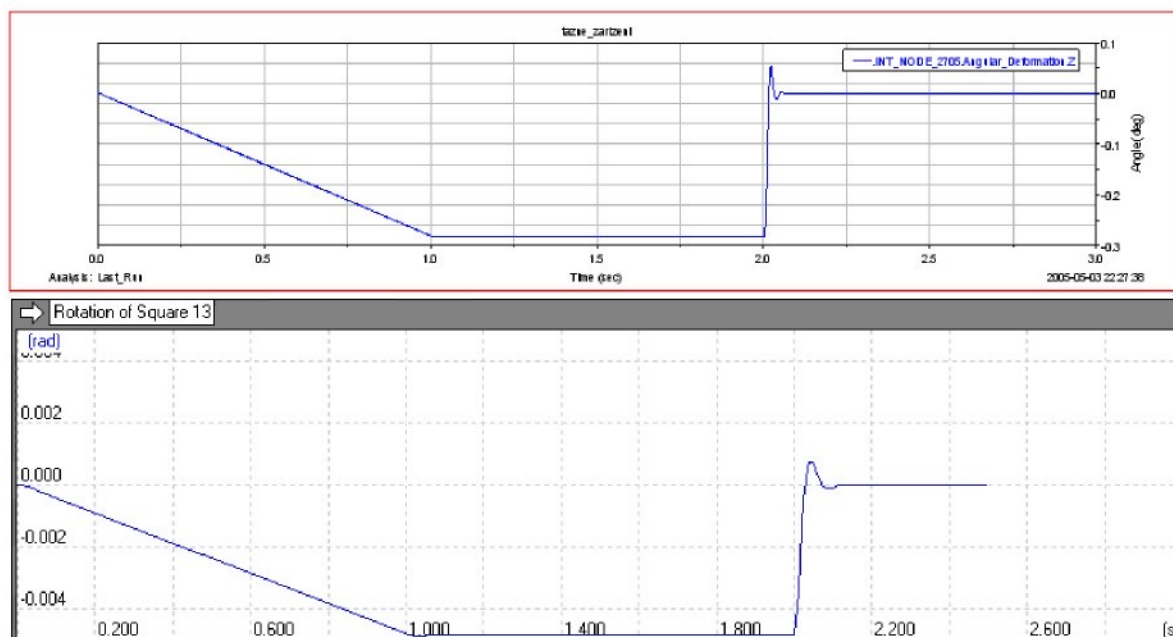


Obr. P6.4 Návrh 2. modelu tažného zařízení v prostředí WM2D.



Model na obr. P6.3 je tvořen pevným pravoúhlým rámem (karoserií automobilu), k němuž je vodorovnou a svislou soustavou pružina-tlumič připojena hmota háku. K této hmotě jsou, stejně jako v prostředí MSC.ADAMS/View) připojena dvě tělesa, z nichž pouze jedno je aktivní. Tělesům je předepsán možný pohyb pouze ve vodorovném, resp. svislém směru. Druhý model tažného zařízení je složen ze dvou těles – první (spodní) je pevně spojeno s karoserií, druhé je k prvnímu připevněno rotační vazbou s implementovanou torzní pružinou a tlumičem. Na konci tělesa je připevněna hmota koule, ke které je opět připojena hmota konající vodorovný pohyb.

Na základě výsledků simulace provedené v prostředí MSC.ADAMS se ve 2D modelu postupně nastavují konstanty tlumení v daném směru do té doby, než se časové závislosti deformace háku v obou prostředích shodují. V případě modelu na obr. P6.3 je nutné toto zatížení vykonat ve vodorovném i svislém směru, přičemž při výpočtu ve svislém směru je v modelech vypnuta gravitace. Příklad porovnání závislosti deformace háku zařízení na čase v prostředí MSC.ADAMS a WM2D je uveden na následujícím obrázku



Obr. P6.5 Zjištění tuhostí a tlumení náhradního modelu tažného zařízení.

Hodnota tuhosti je zjištěna z průběhu deformace těžiště koule háku v závislosti na zatěžující síle při postupném zatěžování koule vodorovnou, resp. svislou silou v prostředí MSC.ADAMS. Zatěžování probíhá velmi malou rychlostí, aby se eliminovaly dynamické vlastnosti těles. Vzhledem k tomu, že je zjištěná závislost přímkového charakteru, je hodnota tuhosti rovna derivaci příslušné deformační charakteristiky v daném směru.

Oba výše navržené modely tažného zařízení byly následně zakomponovány do celkového modelu vozidla s přívěsem v prostředí WM2D. V následných simulacích však bylo zjištěno, že první model svým chováním neodpovídá kladeným požadavkům. Je to zejm. proto, že ve spojení s přívěsem způsobuje ve všech zkoumaných průbězích přenášených silových účinků stálou kmitavou složku. Další důvod, proč tento model není zcela vhodný je fakt, že

koule háku koná při skutečné deformaci pohyb po „kružnici“. Z výše popsaných důvodů byl pro simulaci zvolen druhý model tažného zařízení, který zmiňované nedostatky zcela potlačil.

Tolik k ukázce tvorby modelu sloužícího pro porovnání výsledků simulace z prostředí MSC.ADAMS/Car. Vzhledem ke složitostem při porovnávání průběhů z jednotlivých prostředí (půlový  $\times$  prostorový model) a s ohledem na cíl této práce, nebudeme výsledky simulací na tomto místě srovnávat. Jen pro zajímavost uvedme bez komentáře graf závislosti zrychlení příčného nosníku tažného zařízení ve svislém směru při přejezdu soustavy automobil – přívěs přes překážku.



Obr. P6.6 Průběh svislé složky zrychlení příčného nosníku tažného zařízení v prostředí WM2D.