

Technická univerzita v Liberci
FAKULTA PEDAGOGICKÁ

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: 3. stupeň

Kombinace: matematika – zeměpis

**DERIVACE – PROPEDEUTIKA A ZAVEDENÍ
POJMU**

**DERIVATIVE – PROPAEDEUTICS AND
INTRODUCING THE CONCEPT
DIE DERIVATION - PROPEDEUTIK UND
BEGRIFFSEINFÜHRUNG**

Diplomová práce: 07–FP–KMD–

Autor:

Martina Holoušová

Podpis:

Adresa:

K Hájku 1712

509 01, Nová Paka

Vedoucí práce: RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.

Konzultant:

Počet

stran	slov	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
65	14 848	18	4	35	7

V Liberci dne: 15. 5. 2007

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucí diplomové práce.

V Liberci dne: 15. 5. 2007

Martina Holoušová

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucí práce RNDr. Aleně KOPÁČKOVÉ, Ph.D. za odborné vedení a za podnětné rady při tvorbě diplomové práce. Dále děkuji řediteli Gymnázia a SOŠP v Nové Pace Mgr. Pavlu Matějovskému a učitelce matematiky RNDr. Janě Vaškové, že mi umožnili v praxi ověřit netradiční zavedení diferenciálního počtu studentům třetího, respektive čtvrtého ročníku.

DERIVACE – PROPEDEUTIKA A ZAVEDENÍ POJMU

Anotace

Diplomová práce se zabývá propedeutikou pojmu derivace a ukazuje netradiční způsob zavedení tohoto pojmu na středních školách.

Práce je rozdělena do pěti hlavních částí. První část seznamuje se zakladateli infinitezimálního počtu a s jeho významem pro exaktní vědu, jakou je matematika. Druhá část pojednává o pojmu derivace v rámci školské matematiky, uvádí jeho zařazení do školských osnov a první interpretace ve školních učebnicích. Třetí část se věnuje vysvětlení samotného pojmu derivace pomocí dnes běžně dostupných středoškolských učebnic. Čtvrtá část se pokouší pomocí motivačních příkladů z matematiky a fyziky zavést pojem derivace. Důkazem toho je experiment uvádějící několik možných řešení, o které se pokouší sami studenti. V poslední části je uvedeno několik řešených příkladů.

DERIVATIVE – PROPAEDEUTICS AND INTRODUCING THE CONCEPT

Summary

This Diploma Thesis deals with a comprehensible explanation of the conception of derivation and it shows a non-traditional way of introduction this notion at secondary schools.

The work is divided into five main sections. The first part introduces founders of infinitesimal calculus and its importance for such exact science as mathematics is. The second section deals with the conception of derivation in terms of school mathematics and it shows its enlistment into school curricula and the first interpretations in school textbooks. The third part pursues explanation of the notion of derivation per today commonly available textbooks. The fourth section tries to introduce the notion of derivation by way of motivating mathematical and physical examples. The evidence of this is an experiment stating several possible solutions that students themselves are trying to find. In the last section, there are several solved examples.

DIE DERIVATION - PROPEDEUTIK UND BEGRIFFSEINFÜHRUNG

Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit der Propedeutik des Begriffs Derivation und zeigt eine ungewöhnliche Einführungsweise dieses Begriffs an den Mittelschulen.

Die Diplomarbeit wird in fünf Hauptteilen verteilt. Der erste Teil macht uns mit den Begründern der Infinitesimalrechnung und mit ihrer Bedeutung für exakte Wissenschaft – wie Mathematik ist, bekannt. Der zweite Teil behandelt das Begriff Derivation im Rahmen der Schulmathematik, umsetzt seine Einordnung in den Schulanlagen und erste Interpretationen in den Schullehrbüchern. Der dritte Teil widmet sich der Begriffserklärung der Derivation mit Hilfe der heute alltäglich erreichbaren Mittelschullehrbücher. Der vierte Teil versucht den Begriff Derivation durch die Motivationsbeispielen aus Mathematik und Physik einzuführen.

Der Beweis dafür ist ein Experiment, der viele möglichen Lösungen, sich sie selbst die Studenten versuchen, beibringt. Im letzten Teil werden einige gelöste Beispiele angeführt.

OBSAH

1. ÚVOD	10
2. HISTORIE.....	11
2.1. Objev a význam infinitezimálního počtu.....	11
2.2. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716).....	12
2.2.1. Charakteristický trojúhelník	13
2.3. Isaac Newton (1643 - 1727).....	15
2.3.1. Newtonova metoda	16
2.4. Vztah mezi Newtonem a Leibnizem.....	17
3. ŠKOLSKÁ MATEMATIKA	19
3.1. Historie.....	19
3.1.1. Posílení významu matematiky	19
3.1.2. Reforma matematiky.....	20
3.2. Osnovy matematiky v letech 1900 - 1945	22
3.3. První učebnice infinitezimálního počtu	23
3.4. Učebnice v období 1909 - 1933	24
3.5. Učebnice v období 1933 – 1945	27
3.6. Osnovy matematiky na čtyřletých gymnáziích.....	27
3.7. Rámcový vzdělávací program	28
4. POJEM DERIVACE	31
4.1. Význam pojmu derivace	31
4.2. Zavedení pojmu derivace.....	32
4.2.1. Okamžitá rychlost přímočarého pohybu.....	33
4.2.2. Tečna grafu funkce	34
4.3. Derivace ve středoškolských učebnicích	35
4.3.1. Diferenciální a integrální počet, PROMETHEUS.....	36
4.3.2. Odmaturuj z matematiky 2, DIDAKTIS.....	39
4.3.3. Matematika pro III. a IV. ročník průmyslových škol, SPN.....	40
4.4. Porovnání učebnic.....	43
5. PROPEDEUTIKA POJMU DERIVACE	45
5.1. Derivace v matematice.....	45
5.2. Derivace ve fyzice	46

5.3. Motivační příklad.....	48
5.3.1. Řešení – Metoda A	48
5.3.2. Řešení – Metoda B	50
5.3.3. Řešení – Metoda C.....	50
5.3.4. Vylepšení metody A	51
5.4. Experiment.....	52
5.4.1. Průběh diskuze a řešení studentů	53
5.4.2. Závěr diskuze.....	55
6. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY	56
7. ZÁVĚR	61
8. LITERATURA	62

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

$\Delta x, \Delta y$	přírůstek argumentu x v bodě x_0 nebo y v bodě y_0
$f(x)$	hodnota zobrazení funkce f v bodě x
$\mathbf{n}$	normálový vektor
$\mathbf{u}$	směrový vektor
$T = [x; y]$	bod T v rovině s kartézskými souřadnicemi x, y
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	limita reálné funkce f reálné proměnné x v bodě a
$f', f'(x), \frac{df}{dx}$	první derivace reálné funkce f proměnné x
$\log_a x$	logaritmus reálného čísla x ($x > 0$) se základem a ($a > 0, a \neq 1$)
$\ln x$	přirozený logaritmus reálného čísla x ($x > 0$)

1. ÚVOD

Diplomová práce je zaměřena na propedeutiku pojmu derivace a na méně tradiční přístup jeho zavedení na středních školách.

Diferenciální počet spolu s integrálním počtem je v osnovách pro střední školy zařazen do čtvrtého ročníku. Ne všechny školy ale toto téma do svých osnov zařazují. Diplomová práce v první části seznamuje se samotným vznikem a významem diferenciálního počtu v matematice. Pokouší se přiblížit významné objevitele tohoto aparátu, pomocí kterého jsme schopni vypočítat pohyb kolem nás. Popisuje základní myšlenkové postupy Gottfrieda Wilhelma Leibnize a Isaaca Newtona, kterým se téměř současně podařilo objevit základy infinitezimálního počtu.

Další část je věnována historii diferenciálního počtu v rámci českého školství. Představuje významné období, v němž byl diferenciální počet zaváděn do osnov matematiky a následně do některých vybraných učebnic té doby. Dále seznamuje s osnovami na středních školách, přesněji řečeno na gymnáziích různého zaměření. Neopomíná ani zmínku o dnes velmi diskutovaném rámcově vzdělávacím programu.

Význam pojmu derivace a jeho zavedení pomocí tečny ke grafu funkce a okamžité rychlosti nalezneme v další části práce. Ta se také zabývá výskytem derivace v běžně dostupných středoškolských učebnicích a snaží se je porovnat. Práce obsahuje motivační úlohy pro zavedení pojmu jak z hlediska matematického, tak fyzikálního. Jednu úlohu se snaží demonstrovat pomocí několika metod.

Poslední část DP obsahuje experiment, v němž byl pojem derivace zaveden netradičním způsobem pomocí analytické geometrie na střední škole. Dále pak následuje několik ukázkově řešených příkladů.

2. HISTORIE

2.1. Objev a význam infinitezimálního počtu

Svět, ve kterém žijeme, je v neustálém pohybu, pravidelném i nepravidelném. Každý den vychází Slunce pohybující se po své obvyklé dráze na obloze. S měnícím se ročním obdobím v našich zeměpisných šířkách výška sluneční dráhy nad obzorem střídavě roste a klesá, a to opět v nějakém rytmu. Všichni se shodneme na tom, že pohyb je všudypřítomný, bez něj by život na Zemi neexistoval. Některé druhy pohybu se zdají být chaotické, ale ve většině z nich najdeme svůj řád, který pochází z určité struktury, která se dá studovat z hlediska matematiky. Aby bylo možné zkoumat pohyb, bylo nutné nalézt způsob, jak pomocí statických nástrojů zachytit proces změny. Lidstvu to trvalo téměř dva tisíce let. Výsledkem byl vývoj a vznik diferenciálního počtu ve druhé polovině 17. století. Tento jedinečný objev znamenal jeden z největších mezníků ve vývoji matematiky a měl na náš život stejně revoluční dopad jako vynález kola nebo knihtisku. Připomeňme, že ideje, které mohou být považovány za propedeutiku diferenciálního počtu, byly rozpracovány již v antickém Řecku. Za zmínku nepochybně stojí Archimédes ze Syrakus (287 - 212 př. n. l.), Menaechmos (asi 380 - asi 320 př. n. l.) nebo Apollonios z Pergy (asi 260 př. n. l. - asi 1700 př. n. l.). Tito učenci studovali například křivky vzniklé spojitým pohybem bodu. Zamýšleli se nad jejich popisem i jejich průvodními jevy, jakými je i tečna. Bohužel Řekové byli ve svých výsledcích omezeni tím, že neměli k dispozici algebraickou symbolikou a aparát analytické geometrie. Postupem času dospěli ve studiu křivek a hledání tečen mnohem dále jejich pokračovatelé, a to vzhledem k novému nástroji, jakým byla analytická geometrie. Za další průkopníky idejí matematické analýzy jmenujme alespoň Blaise Pascala (1623 - 1662), Pierra de Fermata (1601 - 1665), Gillese Personna de Robervalu (1602 - 1675), Christiana Huygense (1629 - 1695) a Isaaca Barrowa (1630 - 1677). [6]

Téměř do poloviny 17. století matematika neprodělávala nijak výrazně velké skoky, pomineme-li významné období v Řecku nebo Egyptě. K význačnému pokroku došlo teprve tehdy, když Isaac Newton (v Anglii) a Gottfried Wilhelm Leibniz (v Německu) zavedli nezávisle na sobě tzv. diferenciální a integrální počet, který bývá označován pod souhrnným názvem jako infinitezimální počet. Dřívější matematika se

omezovala na statické formy počítání, měření a popisování tvarů. Díky postupům, které umožňují postihnout právě pohyb a změnu, jsme schopni studovat pohyb planety a pád tělesa, popsat principy mechaniky, proudění kapalin nebo rozpínání plynů, pracovat s fyzikálními jevy jako elektřina a magnetismus nebo také odhalit zákonitosti létání, růstu rostlin a živočichů, popsat průběh šíření epidemií nebo kolísání ekonomického zisku. Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz přetvořili matematiku nejenom ve studium čísel a tvarů, ale také pohybu a změny a obohatili tuto vědu o nové matematické postupy.

Většina prvotních prací, které používaly diferenciální a integrální počet, byla zaměřena na studium fyziky a ne jeden velký matematik té doby byl zároveň i významným fyzikem. Nicméně přibližně od poloviny 18. století vzrůstal zájem o matematiku jako vědu, nikoli pouze o její aplikace.

2.2. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Obr. 1: G. W. Leibniz



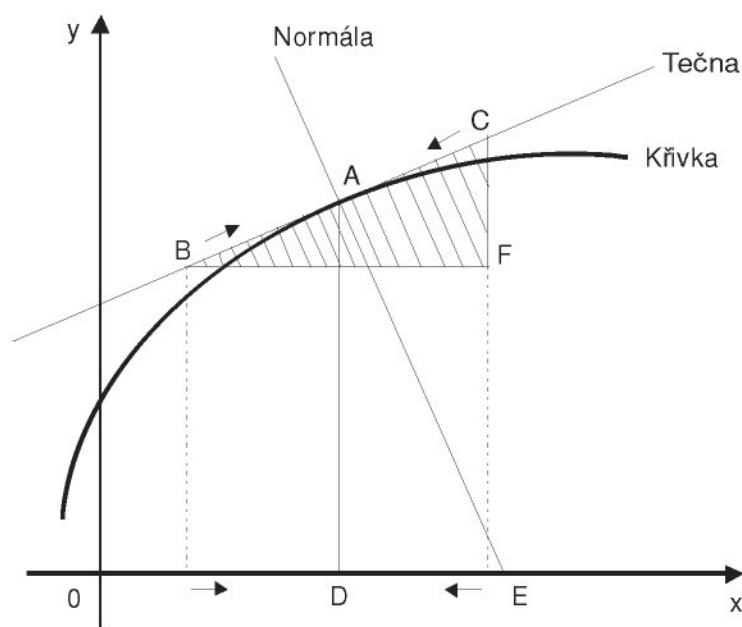
Zdroj: Diderot 2002

Narodil se 1. 7. 1646 v Lipsku jako syn váženého univerzitního profesora. Leibniz od mládí toužil vymyslet logický stroj, obecný myšlenkový algoritmus, umožňující najít téměř na každou otázku správnou odpověď. Snažil se o to třemi způsoby. Vycházeje z Pascalových myšlenek vynalezl počítačový stroj, jehož konstrukce se používá dodnes. To byl jeho první, mechanický algoritmus. Druhým způsobem byl jeho objev nekonečných řad. Se třetím algoritmem to bylo složitější. Leibniz se zabýval otázkou sestavení tečny k dané křivce. Tečnu Leibniz uváděl jako mezní případ sečny. Představoval si, že dva sousední průsečíky s křivkou se k sobě stále více a více přibližují, až je jejich vzdálenost nekonečně malá. Z této představy pak Leibniz vybudoval algoritmus, který téměř mechanicky, pouze na základě několika jednoduchých vzorců, dovoluje počítat směr tečny v libovolném místě křivky. Vznikla nová početní operace, které dnes říkáme derivace a která je základní operací infinitezimálního počtu. Tehdy také Leibniz zjistil, že existuje postup inverzní k derivování, který je vhodný pro výpočet obsahů obrazců jakkoli křivých. Tato operace byla nazvána integrování. [5]

2.2.1. Charakteristický trojúhelník

Leibnizův myšlenkový postup přiblížíme pomocí obr. 2.

Obr. 2: Charakteristický trojúhelník



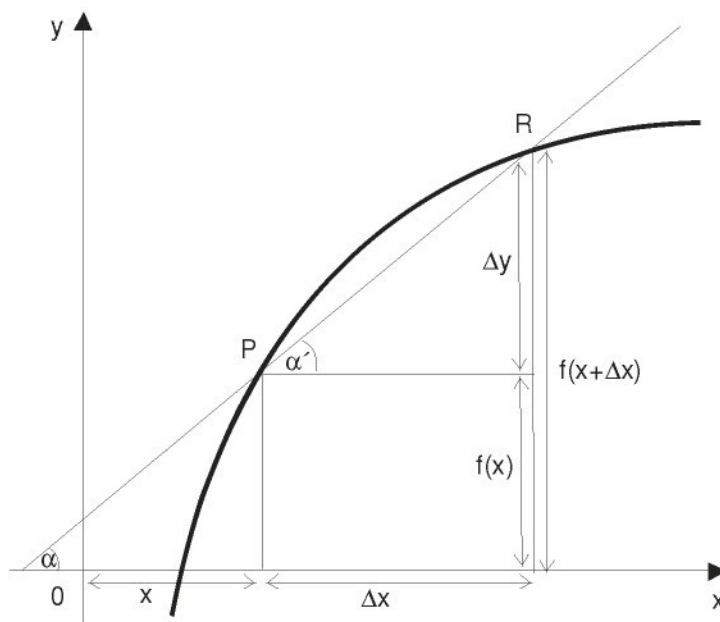
Zdroj: upravený podle předlohy Colerus 1941

Tečna, která se dotýká křivky v bodě A , se značně oddaluje od křivky v bodech B a C . Považujeme-li tyto body B a C za koncové body přepony pravoúhlého trojúhelníka BFC , jehož odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnými osami, pak je tento trojúhelník podobný trojúhelníku ADE , který je tvořen normálou tečny, částí vodorovné osy a rovnoběžkou s osou pořadnic. Trojúhelník BFC je tedy podobný trojúhelníku ADE . Dále si představme, že se body B a C pohybují stále více k bodu A ve směru naznačeném šipkami. Proto se bude trojúhelník BFC stále více zmenšovat, aniž by změnil svůj tvar. To znamená, že zůstane nadále podobný trojúhelníku ADE . Zmenšování však nemá žádných mezí. Přibližování bodů B a C můžeme provádět tak dlouho, jak chceme, a nelze vymezit okamžik, kdy tím zmizí našemu zraku tak, že body B , A a C splynou v jeden jediný bod. Leibniz se v tomto okamžiku sám sebe ptal: „Přestal nyní trojúhelník BFC existovat?“ Tuto otázku možno zodpovědět „ano“, protože trojúhelník nemůže více pojmově trvat, pokud leží jeho vrcholy na sobě a není tedy žádná možnost vést strany trojúhelníka. Nelze si však ani dobře představit, že zmizení nastává rázem, neboť předpokládáme spojitost čáry (strany trojúhelníka). Proto je logičtější připustit, že trojúhelník BFC zmizel našemu zraku, ale jeho vlastnosti

zůstaly zachovány. Už od dob starých Řeků je známo, že poměry nemají nic společného s absolutní velikostí. Trojúhelník BFC má však stále poměry trojúhelníka ADE , ať jsme jej nechali zmenšit jakkoli, poněvadž mu byl podobný. V tomto okamžiku lze připustit – a to je vrchol Leibnizova poznání a myšlení – že sice trojúhelník BFC zmizel, jeho poměry však zůstávají dále před našima očima, v obrovských rozměrech a měřitelné, v „charakteristickém“ trojúhelníku ADE .

Nyní můžeme vyjádřit zákon tečny pro každý bod poměrem stran „charakteristického“ trojúhelníka nebo podobně funkcí úhlu odchylky tečny. Jak však nalezneme tuto funkci obecně? Jak uvedeme tuto funkci ve vztah s rovnicí křivky? Právě zde nasazuje Leibniz cestu tzv. diferenciálního počtu. A jako základ celého diferenciálního počtu stačí jeden jediný vzorec, který vstoupil do dějin matematiky jako tzv. „Leibnizova formule“. [5]

Obr. 3: Leibnizova formule



Zdroj: upravený podle předlohy Colerus 1941

Představme si nyní podle obr. 3, že x , tedy velikost úsečky, vzrostla. Poté i velikost y , tedy pořadnice, vzroste, protože se jedná o funkci rostoucí. Předpokládáme tedy, že pokud zvětšíme x o prozatím ještě nekonečný přírůstek Δx , vzroste také y o veličinu Δy . Z obrázku je patrné, že tu při konečném přírůstku můžeme získat pouze odchylku sečny, vedené body P a R , jako úhel α . Velikost Δy však není nic jiného než funkční hodnota $f(x + \Delta x)$ zmenšená o funkční hodnotu $f(x)$, jelikož funkční hodnota

$y = f(x)$ se o přírůstek $(x + \Delta x)$ změní v $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Můžeme tedy říci, že tangens úhlu α nebo totéž $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se rovná $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ nebo-li: rozdíl funkce zvětšené o přírůstek a funkce dané, lomený přírůstkem x značí trigonometrickou tangentu odchylky sečny, která prochází body P a R . Protože ale nechceme znát sečnu, nýbrž tečnu v bodě P , musíme předpokládat nekonečně malý přírůstek dx (označení dx , ale i dy je shodné s označením Δx a Δy , v následném textu budeme již používat toto označení, neboť je běžně používáno v moderních učebnicích o diferenciálním počtu). Nehledáme tedy již nyní úhel α , ale úhel α' , který však můžeme získat právě tak při konečných diferencích. Neboť i v tomto případě nemůže být úhel nic jiného než odchylka tečny od osy úseček, kterou považujeme za kladnou, vyjádřený funkcí tangenty. Tangens α' je však $\frac{dy}{dx}$, a dy dostaneme z obou rovnic

$$y = f(x) \text{ a } y + dy = f(x + dx),$$

takže

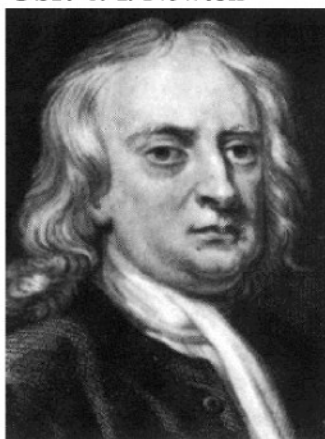
$$f(x) + dy = f(x + dx),$$

tedy

$$dy = f(x + dx) - f(x) \text{ a } \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha' = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}.$$

2.3. Isaac Newton (1643 - 1727)

Obr. 4: I. Newton



Zdroj: Diderot 2002

Isaac Newton se narodil 4. 1. 1643 jako syn venkovského šlechtice z anglického hrabství Lincolnshire. Studoval v Cambridge u Isaaca Barrowa. Řešením problému přitažlivosti kulových těles vytvořil základy teorie potenciálu. Newton našel svou obecnou metodu pro diferenciální a integrální počet v letech 1665-1666, když pobýval na venkově ve svém rodišti, aby se uchránil před morem, který se dostal do Cambridge. Tento počet nazýval „teorií fluxí“. Newtonův objev „fluxí“ souvisí velmi úzce s jeho studiem nekonečných řad. Přivedly ho totiž na nápad zobecnit binomickou větu také pro racionální a záporné exponenty, a tak dospěl k objevu binomické řady. To mu pak znovu velmi pomohlo při rozpracování jeho teorie fluxí pro „všechny“ funkce. „Fluxe“, která byla vyjádřena tečkou nad písmenem

(„tečková písmena“), byla konečná hodnota, rychlost. Písmena bez tečky představovala „fluenty“.

2.3.1. Newtonova metoda

Uvedme příklad, jakým způsobem Newton objasňoval svou metodu [20]:

Proměnné fluenty označme $v, x, y, z \dots$, a rychlostí, s nimiž se každá fluenta pohybem zvětšuje (ty budou nazývány fluxemi nebo jednoduše rychlostmi), budou označeny týmiž písmeny s tečkou, tedy $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Infinitesimální veličiny Newton nazývá „momenty fluxí“ a označuje $\dot{x}o, \dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o$, přičemž o je „nekonečně malá veličina“.

Necht' je dána rovnice: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$,

místo x dosadíme: $x + \dot{x}o$

a místo y dosadíme: $y + \dot{y}o$.

Pak dostaneme:

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$$

Po roznásobení:

$$x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}o^2 + x^3o^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}o^2 + axy + ay\dot{x}o + a\dot{x}o\dot{y}o + ax\dot{y}o - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}o^2 - \dot{y}o^3 o = 0$$

Nyní podle předpokladu je $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, takže po odstranění těchto veličin a dělení zbývajících výrazů veličinou o dostáváme:

$$3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}o + x^3oo - 2ax\dot{x} - a\dot{x}o + a\dot{y} + ay\dot{x} + a\dot{x}\dot{y}o - 3y^2\dot{y} - 3y\dot{y}o - y^3oo = 0$$

Protože však se o může pokládat za nekonečně malou veličinu, takže může vyjadřovat momenty veličin, nepředstavují jí násobné veličiny ve srovnání s ostatními vlastně nic.

Proto je odstraníme a zůstává: $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{y} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$.

Na závěr vyjádříme z rovnice poměr $\frac{y}{x}$:

$$x(3x^2 - 2ax + ay) + y(ax - 3y^2) = 0$$

$$x(3x^2 - 2ax + ay) = -y(ax - 3y^2)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{3y^2 - ax}{3x^2 - 2ax + ay}.$$

Tento příklad ukazuje, že Newton rozuměl pod svými derivacemi především rychlosti. V jeho vyjadřování tkví však jisté nepřesnosti. Znamenají symboly o nuly? Jsou to infinitezimální veličiny? Nebo to jsou konečné veličiny? Newton se pokusil o vysvětlení svého stanoviska teorií „prvého a posledního poměru“, kterou uvádí v Principiích a která obsahuje pojem limity, avšak v takovém tvaru, že ho bylo možno pochopit jen s obtížemi.

2.4. Vztah mezi Newtonem a Leibnizem

Mezi Leibnizem a Newtonem došlo ke sporu. Jedná se hlavně o dva rozdílné přístupy zkoumání infinitezimálního počtu. První přístup je fyzikální, který se zabývá studiem pohybu. Slavný anglický fyzik se totiž formálně dopracoval k týmž výsledkům jako německý matematik, avšak jinou metodou. Právě proto, že byl fyzikem a přistupoval ke svým problémům z fyzikální stránky, pracoval vlastně se závislostí veličin na čase. Zajímalo ho třeba, jak se u nepravidelných pohybů mění rychlost v závislosti na čase apod. Nakonec Newton ve svém pojetí dospěl k derivacím a integrálům, a to zcela nezávisle na Leibnizovi. Přesto je zde velmi podstatný rozdíl. Newtonův zápis je velmi těžkopádný a jeho výpočet může snadno obsahovat chyby. Druhý přístup, který používal Leibniz, je geometrický. Ten je zaměřen na studium křivek, konkrétněji řečeno na studium tečen. Leibnizovi se tak díky tomuto přístupu povedlo odkrýt algoritmus dnes již zcela běžně používaný.

Leibniz vybudoval základy své verze infinitezimálního počtu během svého působení v Paříži. V roce 1673 ještě přemýšlel nad vývojem dokonalejšího zápisu svého počtu a jeho první výpočty byly značně nepřehledné. 21. listopadu 1675 napsal příručku, kde poprvé použil svůj symbol pro integrál funkce, který se používá dodnes. Ve stejné příručce uváděl pravidla pro výpočet derivace. Na podzim roku 1676 Leibniz objevil pravidlo pro derivaci x^n pro celé i racionální n . Newton se domníval, že Leibniz

své metody nedokončil. Leibniz ale ve své odpovědi v osobní korespondenci mezi nimi popsal některé detaily principů svého diferenciálního počtu včetně pravidla pro derivace složené funkce. Newton byl překvapen, že pro něho samotného nejednoduchý problém Leibniz vyřešil. Leibniz ale nikdy neuvažoval o derivaci jako o limitě funkce. V roce 1684 Leibniz publikoval podrobně o diferenciálním počtu ve své práci "*Nova methodus pro maximis et minimis*" v časopise Acta Eruditorum, který sám založil v Lipsku o dva roky dříve. Práce již obsahovala běžnou konvenci pro označení derivace ve tvaru df/dx a pravidla pro výpočet derivací mocnin, součinů a zlomků. Neobsahovala ale žádné důkazy a Jacob Bernoulli se o ní vyjádřil pouze jako o návodu. V roce 1686 Leibniz publikoval v časopise Acta Eruditorum článek zabývající se integrálním počtem. V tomto článku se poprvé objevuje v tisku zápis integračního symbolu. Následujícího roku byla publikována Newtonova zásadní práce "*Principia*". Newton svoji metodu "fluxionů" dokončil v roce 1671, ale nepodařilo se mu ji publikovat tiskem. Teprve po jeho smrti v roce 1736 práci přeložil John Colson z latiny do angličtiny. Tuto prodlevu využil právě Leibniz. Hlavní příčinou, proč práce nebyla publikovaná dříve, byl matematik Barrow, jehož vydavatel zkrachoval, a ostatní vydavatelé knih proto odmítali publikovat matematické práce. [5, 20, 22, 23]

3. ŠKOLSKÁ MATEMATIKA

3.1. Historie

Pro pochopení důležitosti zařazení tématického okruhu diferenciálního a integrálního počtu do osnov matematiky, musíme nejprve proniknout do historie vyučování tohoto předmětu na našem území (respektive na území habsburských zemí). Podívejme se nejprve na širší souvislosti vývoje vyučování matematiky. Od druhé poloviny 19. století rostl ve všech vyspělých zemích zájem o matematiku, který se promítal i do vyučování na středních školách. Tento zájem pramenil pravděpodobně ze tří skutečností:

První byla společenský rozvoj na přelomu 19. a 20. století, jehož jednou součástí byl i rozvoj školství, který reagoval na rozvoj vědy a techniky v posledních desetiletích 19. století. Druhou skutečností se stal rozvoj matematiky v letech 1800 – 1870, který přinesl podstatné změny v předmětu matematiky i v metodách její práce, na které střední škola dosud nereagovala. Za třetí, výuka matematiky na vysokých školách zejména technického směru postoupila natolik, že potřebovala širší a pevnější základ již ve výuce matematiky středoškolské.

3.1.1. Posílení významu matematiky

Elementární školství na počátku 19. století se řídilo podle statutu vypracovaného v roce 1774 J. I. Filbingerem. To znamenalo povinnost šestileté školní docházky pro děti od 6 do 12 let, dále bylo upraveno vzdělání učitelů a do výuky byly zaváděny praktické předměty. V této době existovaly 3 druhy elementárních škol, a to triviální, hlavní a školy normální. Střední vzdělání poskytovala šestiletá gymnázia organizovaná podle statutu z roku 1775. Hlavním předmětem byla latina a za vedlejší předměty byl považován dějepis, zeměpis a přírodní vědy společně s matematikou. Jako mezistupeň pro přípravu na univerzitu sloužily dvouleté filozofické ústavy. Do roku 1848 se tento školský stav jen málo měnil. V roce 1848 se jednou z mnoha společensko správních reforem stala i reforma středního školství. Byla uskutečněna v duchu Exner – Bonitzova „Nástinu organizace gymnázií a reálék v Rakousku“, vyhlášena 16. září roku 1849 a císařem schválena v roce 1854. Hlavním smyslem reformy bylo spojení šestiletého gymnázia s oběma ročníky filozofického studia a vytvoření gymnázia osmiletého, které

bylo rozděleno do dvou cyklů po 4 třídách. Nižší stupeň byl zaměřen elementárně a vyšší stupeň poskytoval filozoficko - historické a matematicko - přírodovědné vzdělání. Dále byly zavedeny nové předměty jako hudební a výtvarná výchova nebo tělesná výchova. Zdvojnásobil se počet vyučovacích hodin, a tím se zvýšil i podíl matematiky a přírodních věd. Na konci první světové války začíná se vznikem samostatné Československé republiky nová éra českého školství. V samostatném národnostně nezávislém státě bylo třeba řešit řadu úkolů a problémů a vytvořit školské osnovy na národním základě, neboť dosavadní české osnovy byly vytvořeny jen úpravou osnov německých. Zákonem z 28. října 1918 bylo stanoveno, že zůstávají v platnosti veškeré dosavadní rakouské zákony a nařízení. To se týkalo i školství v českých zemích. Některé podstatnější dílčí změny pro území celé republiky byly provedeny tzv. Malým školským zákonem ze 13. července 1922. Veškerou správu školství až na malé výjimky převzalo Ministerstvo školství a národní osvěty. [18]

3.1.2. Reforma matematiky

Snahy o reformu vyučování matematiky se v evropských vyspělých zemích objevily již v 60. let 19. století. Německý matematik Felix Klein (1849 - 1925) v této době usiloval jednak o nalezení takové metodiky vyučování matematice, která by umožňovala vertikální propojení výuky na všech stupních škol, tj. od elementárních až po vysoké, jednak o přebudování obsahu učiva, aby po získání středoškolského vzdělání byli absolventi lépe připraveni pro studium matematiky a technických disciplín na vysokých školách. Klein sám pro to vykonal mnoho na svém působišti na univerzitě v Göttingenu. Vznikla zde pravděpodobně první katedra didaktiky matematiky a také myšlenka dalšího vzdělávání středoškolských profesorů formou přednášek a prázdninových kurzů, které sledovaly zvýšení úrovně jejich teoretické a metodické připravenosti. Ve Francii byly v roce 1902 do jednotného učebního plánu školské matematiky zařazeny elementární poznatky o funkcích a prvky infinitezimálního počtu. Obdobné reformní snahy se začaly objevovat i v Anglii a v USA.

Nejpodstatnější změny ve vyučování matematiky vyplynuly z přijetí tzv. Meranského programu, na který měl významný vliv právě Felix Klein. Program byl přijat na sjezdu německých přírodovědců v Meranu v roce 1905. Program připisuje matematice ve středoškolském vzdělání jedno z klíčových postavení a její hlavní úlohu

vidí v rozvíjení prostorové představivosti a logického a funkčního myšlení. Program se stal podkladem k dalším reformám, které přinesly některé obsahové změny v náplni středoškolské matematiky. Šlo především o zavedení pojmu funkce a základů diferenciálního a integrálního počtu, posílení aplikací na úkor některých izolovaných specifických problémů a některých projektivně geometrických prvků v geometrii. Kromě obsahových změn přineslo přijetí meranského programu také nový pohled na matematiku a její postavení v systému předmětů tvořících středoškolské vzdělání. To vše se promítalo do některých změn v metodickém zpracování učiva. Například analytická geometrie byla vykládána s využitím diferenciálního počtu.

České země se zapojily do celoevropského proudu reforem matematicko-přírodovědného vzdělání již od jeho počátku. Hlavní roli v usměrňování vývoje vyučování matematice na našich středních, ale i vysokých školách sehrála od svého vzniku v roce 1862 Jednota českých matematiků a fyziků. Má velké zásluhy o rozvoj novodobé české matematicko-fyzikální literatury, kam patří i středoškolské učebnice matematiky i fyziky. Hovoříme-li o zapojení českých zemí do reformního hnutí ve vyučování matematiky, pak nešlo jen o pasivní přejímání reformních návrhů ze zahraničí, hlavně z Německa, ale i o příspěvky českých matematiků k reformnímu dění ve světě. Jako příklad lze uvést tzv. „Pražské návrhy“, které přednesl školní rada Karel Zahradníček na 9. německo-rakouském středoškolském dnu ve Vídni 9. dubna 1906. Návrhy byly obsaženy v přednášce na téma *„K otázce infinitezimálního počtu na rakouské střední škole“*. V úvodu Karel Zahradníček položil otázku, zda mají být prvky infinitezimálního počtu zařazeny do osnov středoškolské matematiky. V průběhu přednášky podal několik argumentů, které posluchače přesvědčily o jejich důležitosti a tím o začlenění do osnov matematiky na středních školách. Poukazoval hlavně na mezipředmětové vztahy mezi matematikou a fyzikou, na potřebnost a vhodnost infinitezimální analýzy při řešení úloh zabývajících se výpočtem práce, která se koná při pohybu těles nebo elektrických nábojů v nehomogenních silových polích. Rovněž při vyjádření vztahů mezi dráhou, rychlostí a zrychlením obecných nerovnoměrných křivočarých pohybů jsou infinitezimální metody vhodné. Závěr přednášky formuloval ve dvou bodech a jednoznačně se vyslovil pro zavedení základů infinitezimálního počtu do středoškolské matematiky a žádal přítomné o vyzkoušení jeho návrhů ve školské praxi:

„Je velmi žádoucí, aby ve středoškolské matematice byl obsažen pojem funkce a prvky diferenciálního a integrálního počtu. Je to nutné při moderním pojetí didaktiky matematiky, má-li odpovídat současnému vědeckému pojetí a je to nutné i pro použití matematiky ve fyzice, která svým charakterem spadá do oblasti infinitezimální analýzy, jejíž metody zde mohou být jednoduše užity.“ [18]

3.2. Osnovy matematiky v letech 1900 - 1945 na vyšších stupních různého druhu gymnázií

Zaměříme se nyní na osnovy matematiky na vyšších gymnáziích a reálkách v letech 1900 - 1909. Období, které znamenalo nejdůležitější přípravnou fázi pro vstup infinitezimálního počtu na půdu školské matematiky. Osnovy se od vyššího klasického a reálného gymnázia s vyšší reálkou nelišily. Matematice se učilo v kvintě a sextě po 4 hodinách, septimě po 3 a oktávě po 2 vyučovacích hodinách týdně. Významným krokem bylo zařazení analytické geometrie přímky a kuželoseček do geometrie v septimě. V oktávě se nová látka již neprobírala, veškerý čas byl věnován souhrnnému opakování, procvičování a systematizaci učiva. Osnovy matematiky na vyšších reálkách byly dotovány v 5. a 7. ročníku 5 hodinami a v 6. ročníku po 4 hodinách týdně.

Osnovy matematiky v letech 1909 - 1933 na gymnáziích a reálkách vycházely ze školských úprav z let 1908 - 1910 za ministra kultu a vyučování Merchata, označované někdy jako Merchatova reforma. Osnovy byly posledními úpravami středního školství v habsburské monarchii. Oproti letem minulým se změnila organizace středního školství. Reálná gymnázia se stala třístupňová. Nejvyšší stupeň byl tvořen sextou, septimou a oktávou.

Osnovy matematiky měla po roce 1933 klasická, reálná i reformní gymnázia společné. Dotace hodin byla v kvintě až sextě po 3 vyučovacích hodinách týdně, v septimě po 2 a na reálných gymnáziích po 3 vyučovacích hodinách. Oktáva byla dotována na klasickém gymnáziu matematikou po jedné hodině, a to pouze v prvním pololetí. Po dvou hodinách po celý rok se pak matematika v oktávě vyučovala na reálném gymnáziu, kde byl obsah osnov v oktávě věnován souhrnnému opakování, doplnění a prohloubení učiva hlavně v aplikačních úlohách. Na reformním reálném gymnáziu se kromě společného základu vykládaly i základy diferenciálního a

integrálního počtu. Na reálkách byla matematika dotována v pátém a šestém ročníku čtyřmi, v sedmém ročníku pěti hodinami týdně. Látka pokrývala v plném rozsahu látku vyšších gymnázií, která byla například doplněna v šestém ročníku o určování maxim a minim a v sedmém o infinitezimální počet (jako v oktávě na reformním reálném gymnáziu). Jednalo se hlavně o intuitivní přístup z geometrického hlediska.

Na závěr je důležité poznamenat, že učební osnovy matematiky s vývojem vyučování vymezovaly učivo stále přesněji a konkrétněji. Na osnovách nelze pochopitelně požadovat detailní rozpracování učiva. Jsou jen přehledem rozsahu a obsahu učiva a naznačují koncepci výkladu, což plní i dnes. Konkretizaci náplně učiva představují pak učebnice. Nakonec ale reálná výuka závisí na učiteli, jeho přístupu k látce, zkušenostech a metodice. Do vývoje osnov se promítá i vývoj postavení matematiky ve středoškolském vzdělávání a s ním i sledovaných cílových záměrů, jichž mělo být vyučováním dosaženo. Na obecných školách, měšťankách a reálkách měla matematika původně především postavení předmětu praktického a průpravného, na gymnáziích pak všeobecně vzdělávacího. [19]

3.3. První učebnice infinitezimálního počtu

V počátcích této kapitoly už bylo řečeno, že se diferenciální a integrální počet nejprve stal součástí univerzitních kurzů matematiky. Za věhlasný materiál byla ceněna učebnice od profesora Stanislava Vydry (1741 - 1804) „*Elementa calculi differentialis et integralis*“, která vyšla v roce 1783 v Praze i ve Vídni.

Významným autorem, který se zasloužil o začlenění infinitezimálního počtu do učebnic pro střední školu, byl Václav Šimerka (1819 - 1887). Působil jako kněz, kaplan a především učitel matematiky a fyziky v Českých Budějovicích. V roce 1862 vydal v Královské české společnosti nauk práci „Příspěvky k neurčité analytice“, která je považována za první vědeckou práci psanou v českém jazyce. V roce 1863 vydal učebnici pro gymnázia „Algebra čili počtářství obecné“. Dodatek učebnice je věnován diferenciálnímu a integrálnímu počtu a je považována za první česky psaný učební text matematické analýzy. Vzhledem k tomu, že v té době nebyly základy matematické analýzy součástí osnov středoškolské matematiky, lze předpokládat, že tento text byl brán jako doplňkový nebo volitelný učební materiál. Text „Přídavek k algebře pro vyšší

gymnasia“ vyšel samostatně v roce 1864 v Praze s podtitulem: „Počátky počtu diferenciálního a integrálního“. Učebnice je rozdělena do šesti kapitol, z nichž první je pojmenována Differenciály daných úkonů a věnuje se základům diferenciálního počtu. Základním pojmem diferenciálního počtu je intuitivně zavedený pojem diferenciálu. Šimerka při zavedení pojmu diferenciál funkce nepoužívá pojmů limita ani derivace. Pouze předpokládá, že při změně nezávisle proměnné x o δx se změní závisle proměnná y o δy :

$$y + \delta y = f(x + \delta x).$$

Dalo by se očekávat, že nerozlišování skutečného přírůstku funkce $\Delta y = f(x + \delta x) - f(x)$ a přibližného přírůstku daného diferenciálem δy bude mít za následek chybné závěry. Šimerka však to, že ztotožňuje Δy a δy a neuvažuje tak chybu aproximace přírůstku diferenciálem, vyvažuje sofistikovanou a obezřetnou prací s infinitezimálními veličinami tak, jak to bylo běžné např. u Newtona nebo Leibnize. Šimerkova učebnice diferenciálního a integrálního počtu je odlišná od učebnic používaných dnes. Hlavním rozdílem je, že neobsahuje téměř žádné obrázky nebo grafy funkcí. Derivace není základním pojmem diferenciálního počtu, je pouze „úkonem odvozeným“ z diferenciálu, který je založen na intuitivních infinitezimálních kalkulacích bez použití pojmu limita.[14]

3.4. Učebnice aritmetiky, algebry a geometrie v období 1909 - 1933

Učebnice tohoto období byly ovlivněny evropským reformním hnutím, zejména meranským programem. Naše pozornost je věnována pojmu funkce a následně diferenciálnímu počtu. Obecná definice funkce zatím vyslovena nebyla, ale v jejím studiu se zacházelo do značné hloubky. Při vyšetřování průběhů funkcí se určovaly i jejich lokální a globální extrémy. Při tom se využívalo již známé problematiky kuželoseček, podané nyní ve funkční podobě s důrazem na geometrický tvar křivek. Šlo tedy vlastně o teorii konkrétních funkcí na obecnější úrovni. Tímto způsobem se u nás dostávaly do středoškolské matematiky prvky diferenciálního počtu. Výklad počátků diferenciálního počtu se prováděl na konkrétním případě kvadratické funkce. Začaly se definovat a vysvětlovat některé nové pojmy z analytické geometrie, kterých bylo v dalším výkladu zapotřebí, jako je směrový úhel, směrnice přímky a po nich následovaly derivace zkoumané funkce v daném bodě x . Derivace byly zavedeny a

vysvětleny pomocí intuitivně chápaného limitního přechodu od sečny paraboly k tečně. Zároveň byl ukázán geometrický význam derivace, což znamenalo vyvození představy směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě o souřadnicích x a $f(x)$. Autor učebnic aritmetiky a algebry, profesor matematiky na Univerzitě Karlově, Bohumil Bydžovský (1880 - 1969) definoval derivaci funkce v bodě x jako limitu podílu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, kde Δy je přírůstek funkce odpovídající přírůstku Δx nezávisle proměnné x . Nutno však poznamenat, že pojem limity užitý k definování derivace nebyl přesně vymezen a byl použit rovněž pouze na intuitivní úrovni. Bydžovský dále ukazoval na geometrickém významu derivace její další využití pro určování průběhu funkce a vyvozoval z něho podmínku pro existenci lokálních extrémů funkce (v bodech, kde má funkce lokální extrémy, nabývá její derivace nulové hodnoty). Poznatky o derivaci vyvodil na příkladu kvadratické funkce, ale vzápětí je rozšířil i na polynomické funkce stupně vyššího než 2.

Dalším významným autorem učebnic, které uváděly mezi svými tématy diferenciální počet, byl Karel Rašín. V jeho podání byla za pomoci intuitivně chápané limity zavedena derivace funkce x^n , rozšířena na funkci ax^n , kde a je konstanta, a na součet a rozdíl mocninných funkcí. Byly odvozeny i vztahy pro derivaci součinu a podílu dvou funkcí a pro derivace vyšších řádů. Získaný aparát byl pak užit na vyšetřování průběhů polynomických funkcí a hledání jejich lokálních extrémů. Metodicky byl postup zavádění prvků diferenciálního počtu velmi podobný postupu Bydžovského. Rašín však ve svém podání šel ještě dále. Vedle geometrického významu první derivace funkce, který vysvětloval jako změnu průběhu funkce (klesání či růstu), uváděl druhou derivaci funkce jako rychlost této změny. Za zmínku stojí i autor učebnice „Geometrie pro 5. – 7. třídu středních škol“ Josef Vinš (1872 - 1956). Ta část výkladu, která se zabývala úvodem do infinitezimálního počtu, byla vedena odlišně od Karla Rašína. Vinšovo pojetí se přibližovalo metodě, kterou užil Bohumil Bydžovský v učebnici algebry pro šestou třídu. Vycházel rovněž z kvadratické funkce. Říkal, že funkční předpis $y = x^2$ lze považovat za rovnici křivky. Upozorňoval tedy na souvislost mezi funkčním předpisem a analytickým vyjádřením křivky.

Možnosti, které poskytovaly základy infinitezimálního počtu, využili někteří autoři k řešení úlohy určit rovnici tečny ke kuželosečce. Dřívější tradiční způsob vycházel z toho, že diskuze vzájemné polohy přímky a kuželosečky odpovídá řešení

soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, z nichž jedna je lineární a je analytickým vyjádřením přímky, druhá je kvadratická a je analytickým vyjádřením kuželosečky. Poloha tečny ke kuželosečce odpovídá jediné dvojici kořenů soustavy rovnic. Podmínkou pro to, aby nastal tento případ, je nulový diskriminant kvadratické rovnice. Z této podmínky byla nalezena rovnice tečny ke kuželosečce. Vinš hledá směrnici tečny diferencováním rovnice kuželosečky. Dalším významným autorem učebnic se stal Jan Vojtěch (1879 - 1953). Závěrečnou partií učebnice geometrie byl úvod do infinitezimálního počtu. Derivace funkce byla zaváděna geometricky, jako tečna ke křivce v mezní poloze tečny, která se otáčí kolem jednoho ze svých průsečíků s křivkou. Vyjádříme-li rovnici křivky symbolickým zápisem $y = f(x)$, pak směrnice tečny je mezní hodnotou poměru

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

který je nazván diferenciálním poměrem proměnné y vzhledem k proměnné x v bodě o souřadnicích $[x_1; y_1]$, neboli derivací funkce $y = f(x)$ v bodě x_1 . Se zavedením označení Δy pro rozdíl funkčních hodnot $f(x_2) - f(x_1)$ a Δx pro rozdíl $x_2 - x_1$ a s intuitivním chápáním limitního přechodu Δx k nule (symbolicky $\Delta x \rightarrow 0$) je směrnice tečny dána vztahem

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Postup určení směrnice tečny diferencováním rovnice křivky ukazoval Vojtěch na vzorových úlohách. Problematika úvodu do infinitezimálního počtu byla zpracována prakticky ve stejném rozsahu jako v Rašínově podání. Byla tedy vyvozena pravidla pro derivování některých funkcí, z názoru byla ukázána souvislost mezi průběhem funkce a znaménkem její první derivace, hovořilo se o druhé derivaci a jejím geometrickém významu (pro zjišťování konkávnosti či konvexnosti funkce a jejich inflexních bodů. [18, 19]

3.5. Učebnice aritmetiky, algebry a geometrie v období 1933 – 1945

Po roce 1933 zůstaly i na diferencovaném vyšším stupni středních škol v platnosti učebnice pro vyšší stupeň středních škol předchozího období. V aritmetice a algebře platily i nadále učebnice Bohumila Bydžovského vydané Jednotou českých matematiků a fyziků, které podle nových osnov upravili Stanislav Teplý a František Vyčichlo. Upravené učebnice se staly univerzálními učebnicemi pro gymnázia i reálky. Z učebnic algebry a aritmetiky vydaných Jednotou českých matematiků a fyziků byl po roce 1933 vyjmut infinitezimální počet, který zůstal zařazen jen v učebnicích geometrie. Souběžně s upravenou učebnicí Bohumila Bydžovského se používala učebnice Bendlova – Mukova. V té zůstala kapitola o infinitezimálním počtu zařazena.

3.6. Osnovy matematiky na čtyřletých gymnáziích

Všimněme si nyní učebních plánů a osnov pro střední školy používaných v posledních deseti letech zejména na gymnáziích, kde se může žák poprvé setkat v rámci předmětu matematika s pojmem derivace. Pokud podrobně prostudujeme učební osnovy čtyřletého gymnázia, ať už větve přírodovědné, humanitní, všeobecné nebo se zaměřením na matematiku společně s fyzikou, zjistíme následující:

Téma Základy diferenciálního a integrálního počtu připadají většinou na 4. ročník. Větev přírodovědná se základům diferenciálního a integrálního počtu zpravidla věnuje 42 hodin. Předcházejícím tématem jsou Posloupnosti a řady. Téma derivací je uvedeno do osnov pomocí elementárních funkcí, jejich vlastností a grafů. Následuje okolí bodu, limita funkce, limita funkce v nevlastním bodě, spojitost funkce a některé věty o limitách. Dále pak derivace jako funkce, její geometrický a fyzikální význam. Kromě toho se zavádí derivace součtu, součinu a podílu funkcí, derivace elementárních funkcí a derivace složené funkce. Na gymnáziu s humanitním zaměřením téma Diferenciální počet v povinném předmětu matematika v osnovách chybí úplně. Větev všeobecná základům diferenciálního a integrálního počtu věnuje většinou 38 hodin, též ve 4. ročníku. Průběh výuky tohoto tématu se shoduje s učebními osnovami přírodovědné větve. Na gymnáziích se zaměřením studijního oboru Matematika a fyzika je základem všech tematických celků shodný rozsah učiva jako na přírodovědné větvi. Pouze učivo některých tematických celků je rozšířeno o další

témata. Základy diferenciálního a integrálního počtu obvykle odpovídají 50 hodinám a rozšiřujícím učivem mohou být L'Hospitalovo pravidlo, věta o střední hodnotě, derivace inverzní funkce nebo derivace funkce zavedené parametrickými rovnicemi. Podle větve přírodovědné se vyučuje i na gymnáziích se zaměřením studijního oboru – Programování.

Co se týče metodických doporučení u tématu Základy diferenciálního a integrálního počtu, zpravidla předchází tématu několikahodinové opakování elementárních funkcí (jako např. definice, obory hodnot, vlastnosti nebo grafy funkcí). Při probírání tématu se klade důraz na ovládnutí jednoduchých výpočtů limit a derivací funkcí a na praktické využití diferenciálního počtu, zejména pak při sestrojování grafů funkcí a řešení jednoduchých slovních úloh, především s fyzikální tematikou, ve kterých je potřeba nalézt extrémy funkcí. [24, 25, 26]

3.7. Rámcový vzdělávací program

V roce 2004 MŠMT schválilo nové principy v politice pro vzdělávání žáků od 3 do 19 let. Toto rozhodnutí změnilo systém kurikulárních dokumentů, které jsou nyní vytvářeny na dvou úrovních a to na úrovni státní a na úrovni školské. Státní úroveň představuje Národní program pro rozvoj vzdělávání (tzv. Bílá kniha) a rámcové vzdělávací programy. Národní program vzdělávání vymezuje počáteční vzdělávání jako celek a rámcové programy pak vymezují závazné „rámce“ pro jednotlivé etapy vzdělávání (předškolní, základní a střední vzdělávání). Školská úroveň pak představuje školní vzdělávací programy, podle kterých se uskutečňuje výuka na jednotlivých školách.

Hlavní změnou ve vzdělávání oproti tradičním osnovám je, že RVP vycházejí z nové strategie vzdělávání, která zdůrazňuje klíčové kompetence, jejich provázanost se vzdělávacím obsahem a uplatnění získaných vědomostí a dovedností v praktickém životě. RVP vycházejí z koncepce celoživotního učení, formulují očekávanou úroveň vzdělání stanovenou pro všechny absolventy jednotlivých etap vzdělávání a podporují pedagogickou autonomii škol a profesní odpovědnost učitelů za výsledky vzdělávání.

Protože se diplomová práce zabývá pojmem derivace, se kterým se studenti setkávají v posledních ročnících střední škol, zaměříme se nyní na rámcové vzdělávací

programy pro gymnaziální vzdělávání (dále už jen RVP GV), po případně na rámcové vzdělávací programy pro střední odborné vzdělávání (dále už jen RVP SOV).

RVP GV začal vznikat v roce 2001 a od jeho pracovní verze doznal text mnohých koncepčních i jiných změn. V druhé polovině roku 2003 proběhlo k dokumentu první veřejné připomínkové řízení. Podle očekávání vzbudily největší polemiku rozsah a obsah vzdělávacího obsahu oborů. Na základě připomínek k RVP GV byla v červnu 2004 vydána tzv. pilotní verze RVP GV, která byla určena pro pilotní ověřování tvorby a realizace školních vzdělávacích programů (ŠVP) na vybraných pilotních gymnáziích: Gymnázium F. X. Šaldy v Liberci, Gymnázium tř. Kapitána Jaroše a Gymnázium na Slovanském náměstí v Brně, Gymnázium olympijských nadějí České Budějovice, Gymnázium Ladislava Jaroše v Holešově, Gymnázium a SOŠ Hostinné, Gymnázium Cheb, Letohradské soukromé gymnázium, Gymnázium Jana Opletala Litovel, Biskupské gymnázium Ostrava – Zábřeh, Gymnázium Jana Keplera v Praze, Gymnázium Oty Pavla, Praha – Radotín, Gymnázium Příbram, Gymnázium a SOŠ Rokycany, Gymnázium Rumburk, Biskupské gymnázium Žďár nad Sázavou.

Vzdělávací obsah základního vzdělávání je v RVP orientačně rozdělen do devíti vzdělávacích oblastí. Jednotlivé vzdělávací oblasti jsou tvořeny jedním vzdělávacím oborem nebo více obsahově blízkými vzdělávacími obory. Matematika jako předmět zůstala v rámci obsahu mezi předměty osamocena. Po prozkoumání všech RVP pilotních gymnázií z uveřejněných dokumentů na internetu a vlastních internetových stránek můžeme konstatovat, že nejlépe rozpracovaný program v oboru Matematika mají gymnázia: Gymnázium F. X. Šaldy v Liberci, Gymnázium tř. Kapitána Jaroše v Brně a Gymnázium Rumburk.

Hlavním cílem Gymnázia F. X. Šaldy je diferenciací na humanitní, přírodovědné a všeobecné zaměření a široká nabídka volitelných předmětů v předposledním a posledním ročníku. Školní vzdělávací program tak vychází vstříc individuálním požadavkům studentů a zároveň je dostatečně otevřený, aby mohl pružně reagovat i na potřeby regionu. Tím pádem je již ve třetím ročníku otvírán předmět Seminář a cvičení z matematiky, kde se studenti poprvé setkávají s pojmem derivace a jeho zavedením a výpočty v tématickém okruhu Diferenciální počet. Hlavním cílem je jeho pozdější užití při hledání tečen ke grafu funkce.

Na Gymnáziu tř. Kapitána Jaroše v Brně vznikly tři školní vzdělávací programy, mezi nimiž je pro nás důležité osmileté studium s matematickým zaměřením. Žáci mohou již od třetího ročníku (tercie) navštěvovat nepovinný předmět Cvičení z matematiky, od 5. ročníku (kvinta) vedený externími spolupracovníky z Masarykovy univerzity. S tématickým okruhem Diferenciální počet jsou všichni studenti seznamováni podle RVP v osmém ročníku. Hlavním výstupem okruhu, o který se zajímá diplomová práce je vyslovení definice derivace funkce, uvedení nejdůležitějších vzorců pro derivace elementárních funkcí, aplikace geometrického významu 1. a 2. derivace. Dále je to aplikace znalosti limit a derivací funkce při vyšetřování průběhu funkce.

Gymnázium Rumburk na základě ŠVP vyčlenil matematicko-technický blok v rámci volitelných předmětů na vyšším a čtyřletém gymnáziu, který umožňuje kvalitní přípravu pro studium na technických vysokých školách. V tomto bloku je výrazně posílena výuka matematiky a je kladen důraz na využívání výpočetní techniky. S pojmem derivace se na této škole žáci seznamují v předmětu Matematická analýza v posledním ročníku. Hlavními úkoly tohoto předmětu je seznámit se s některými myšlenkami a metodami diferenciálního počtu, naučit a procvičit matematické a jiné jednoduché aplikace diferenciálního počtu v návaznosti na oblasti probírané v předmětu matematika. Důležitým školním výstupem je tak metodami diferenciálního počtu zkoumat základní vlastnosti funkcí. [32]

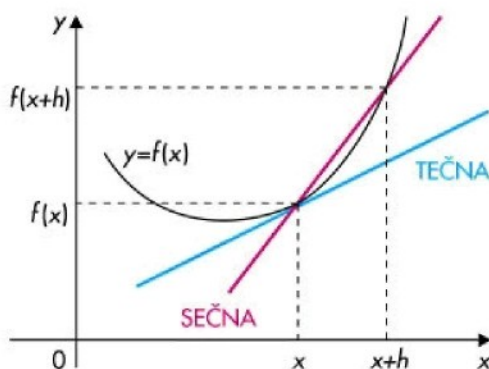
4. POJEM DERIVACE

Než se zaměříme na matematický význam pojmu slova derivace, ukažme si i jiné oblasti, než je matematika, ve kterých se s pojmem derivace lze setkat.

4.1. Význam pojmu derivace

Zajímáme-li se o samotný význam slova derivace, můžeme využít výkladový slovník nebo slovník cizích slov či matematickou encyklopedii. U slova derivace najdeme hned několik výkladů z různých oborů. Výkladový slovník uvádí pojem derivace jako *odchýlení, úchylka*. Nejpodstatnější a nejrozsáhlejší část interpretace je věnována matematickému hledisku, ve kterém je derivace považována za jeden ze základních pojmů matematické analýzy (viz obr. 5), (vysvětlení bude následovat v dalším oddílu podkapitoly). Ze sociologického hlediska je pojem derivace zaveden Vilfredem Paretem (1848 - 1923), italským ekonomem, sociologem a politologem. Pojem označuje různé slovní prostředky, pomocí nichž lidé dodávají svému jednání, jež ve skutečnosti není logické, zdání logičnosti. Z jazykovědné stránky je pojem připisován tvoření slov a to pomocí předpon a přípon. Dalším oborem, kde se můžeme setkat s pojmem derivace, je fyzika. Derivace tíhového zrychlení je metoda sloužící k zpřesnění lokalizace rušivých těles v gravimetrii, kde podkladem je měřené tíhové pole. [27]

Obr. 5: Derivace funkce



Zdroj: Diderot 2002

Z hlediska matematiky se podívejme, jak je derivace uváděna. Derivace nějaké funkce vyjadřuje rychlost změny (růstu) této funkce vzhledem k jejímu parametru či parametrům. Opačným procesem k derivování je integrování. Na pojem derivace se dá nahlížet z mnoha hledisek, například v případě dvourozměrného grafu funkce $f(x)$ je derivace této funkce v libovolném bodě (ve kterém existuje) rovna směrnici tečny tohoto grafu. Z toho je vidět, že pojem derivace se objevuje i v mnoha geometrických souvislostech.

Historické definice vyjadřovaly derivaci jako poměr, v jakém růst nějaké proměnné y odpovídá změně jiné proměnné x , na které má ona proměnná nějakou funkční závislost. Nejjednodušší představa o derivaci je, že „*derivace je mírou změny funkce v daném bodě, resp. bodech*“. Pro změnu hodnoty se používá symbol Δ , tudíž lze

tento poměr symbolicky zapsat jako $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Derivace je hodnota podílu pro Δx jdoucí k 0.

Nahradíme-li konečně malý rozdíl Δx nekonečně malou změnou dx , získáme definici derivace $\frac{dy}{dx}$, což označuje poměr dvou infinitezimálních hodnot (odborně říkáme, že

derivace je podílem diferenciálů závisle a nezávisle proměnné). Tento zápis se čte *dy podle dx*. Předcházející výraz je považován za symbol, nikoliv za obyčejný zlomek. Během vývoje matematiky se intuitivní představa nekonečně malých (infinitezimálních) hodnot ukázala jako nedostatečně přesná a byla nahrazena „ ε - δ “ formalismem limit.

Nejběžnější moderní definice derivace je: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

4.2. Zavedení pojmu derivace

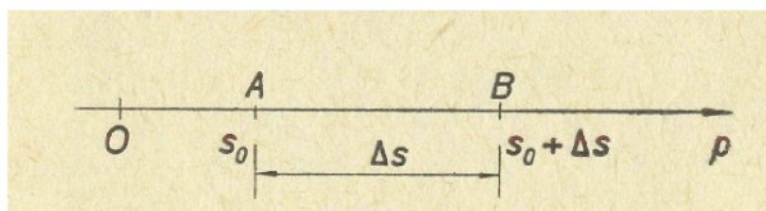
Studenti se s pojmem derivace seznamují prostřednictvím učebnic, studijních textů a materiálů. V řadě učebnic je pojem derivace vysvětlován pomocí fyzikálního a geometrického významu. Občas bývá doprovázen i historickou poznámkou, např.: pojem derivace vznikl během druhé poloviny 17. století při řešení konkrétních fyzikálních a geometrických úloh. Často bývá uváděna alespoň jedna úloha, která vede k zavedení pojmu derivace. Jedná se o problém určení okamžité rychlosti přímočarého pohybu a o problém tečen. Seznamme se s nimi v následujících kapitolách. [11]

Ukažme první problém, který vede k zavedení pojmu derivace na obecném příkladu okamžité rychlosti přímočarého pohybu a druhý problém na tečnách.

4.2.1. Okamžitá rychlost přímočarého pohybu

Nechme pohybovat hmotný bod N po orientované přímce p , na které je zvolen počátek O . Dráha s bodu N (měřená od počátku O) je funkcí času t , $s = f(t)$. Jako otázka se nyní nabízí, co máme rozumět okamžitou rychlostí tohoto pohybu a jak tuto rychlost vypočítat. Názorná ukázka je na obr. 6 z učebnice Matematika I. [11]

Obr. 6: Pohyb bodu po orientované přímce



Zdroj: Matematika I.1965

V čase t_0 je $s_0 = f(t_0)$ neboli bod N je v čase t_0 v bodě A . V čase $t_0 + \Delta t$ je $s_0 + \Delta s = f(t_0 + \Delta t)$ neboli bod N je v bodě B . Přírůstek dráhy za dobu Δt je tedy:

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0).$$

Kdyby se hmotný bod pohyboval z bodu A do bodu B rovnoměrně, byla by jeho rychlost $\bar{v}$, kterou nazýváme průměrnou rychlostí v časovém intervalu $\langle t_0 ; t_0 + \Delta t \rangle$, dána výrazem:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \quad (1)$$

Při nerovnoměrném pohybu charakterizuje tato veličina daný pohyb v čase t_0 tím lépe, čím menší je Δt . Je vhodné proto definovat okamžitou rychlost v v čase t_0 jako limitu

průměrné rychlosti pro $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}$$

čili podle (1)

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \quad (2)$$

Učebnice [11] dále odvozený vztah rychlosti konkretizuje na dalším příkladě:

Příklad

Pro tzv. rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb je zákon dráhy vyjádřen formulí

$$s = f(t) = \frac{1}{2}at^2,$$

kde a je konstanta. Přírůstek dráhy v čase t_0 je

$$\Delta s = \frac{1}{2}a(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}at_0^2 = at_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2.$$

Okamžitá rychlost

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{at_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(at_0 + \frac{1}{2}a\Delta t \right) = at_0$$

Tedy okamžitá rychlost v libovolném časovém okamžiku t je

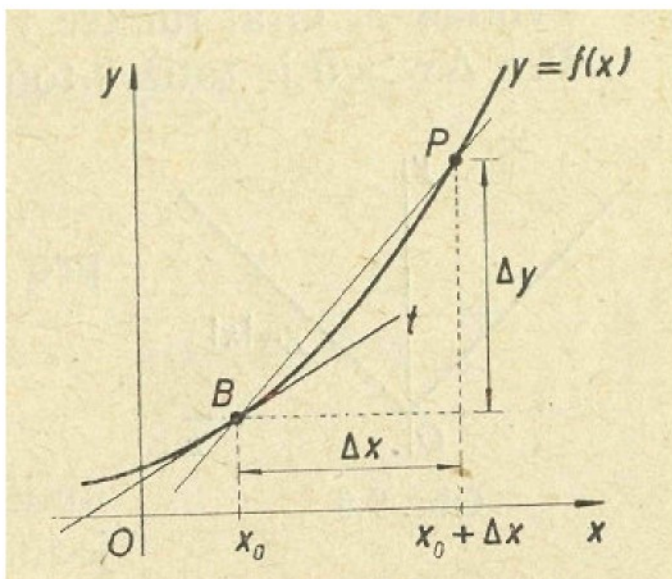
$$v = a \cdot t$$

Vztah nám vyjadřuje velikost okamžité rychlosti hmotného bodu, který je při nulové počáteční rychlosti přímo úměrný času.

4.2.2. Tečna grafu funkce

Na obr. 7 je nakreslen graf spojitě funkce $y = f(x)$. Zvolme na grafu pevný bod B o souřadnicích $[x_0 ; f(x_0)]$. Úkolem je stanovit, co rozumíme tečnou daného grafu

Obr. 7: Tečna grafu funkce



v tomto bodě, a najít rovnici této tečny. Zdá se, že stačí, najdeme-li směrnici k této tečny, neboť rovnici tečny napíšeme snadno jako:

$$y - f(x_0) = k(x - x_0). [11]$$

Zdroj: Matematika I. 1965

Zvolme na grafu funkce $f(x)$ bod P o souřadnicích $[x_0 + \Delta x ; f(x_0 + \Delta x)]$. Přímka BP , která vyjadřuje sečnu grafu, má směrnici

$$k_{BP} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} . \quad (2)$$

Z geometrického hlediska lze očekávat, že bude-li funkce $f(x)$ dosti „rozumná“, bude se směrnice sečny BP pro $\Delta x \rightarrow 0$ bez omezení blížit k směrnici určité přímky t , která prochází bodem B . Tu později nazveme tečnou grafu $y = f(x)$ v bodě B . Na základě toho a na základě rovnice (2) definujeme tečnu grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $B[x_0 ; f(x_0)]$, kterou rozumíme přímkou procházející tímto bodem a mající směrnici:

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} .$$

4.3. Derivace ve středoškolských učebnicích

Popišme si nyní nejběžněji používané učebnice na českých středních školách, které se věnují tématu diferenciální počet. Nejpoužívanější učebnicí na gymnáziích je bezesporu série knih z vydavatelství PROMETHEUS. Z této knihy uvádíme i příklad, který zavádí pojem derivace, hlavně pro srovnání s historickým včleněním do základů diferenciálního počtu. Ukázkou dalšího učebního textu pro střední školy je výukový text s názvem Odmaturuj z matematiky 2 od nakladatelství DIDAKTIS. Nakonec uvádíme příklad učebnice Matematika pro III. a IV. ročník průmyslových škol s mimořádnými způsoby studia. Tabulka č. 1 nás seznamuje se základními údaji o vybraných učebních.

Tab. č. 1: Seznam vybraných učebnic

Název	Nakladatelství	Autor	Rok vydání
Diferenciální a integrální počet	Prometheus	Hrubý D., Kubát J.	1997
Základy diferenciálního a integrálního počtu	Didaktis	kol. autorů	2004
Matematika pro III. a IV. ročník průmyslových škol	SPN	Kubíček F., Gajdoš T.	1960

4.3.1. Diferenciální a integrální počet, PROMETHEUS

Učebnice s názvem Diferenciální a integrální počet vydaná nakladatelstvím PROMETHEUS je poslední v řadě monotematických psaných učebnic pro vyšší gymnázia vydaná v Praze v letech 1994 – 1997. Cílem učebnice je podat základy diferenciálního a integrálního počtu na úrovni odpovídající studentům nejvyšších ročníků gymnázia. V úvodním slovu učebnice se student seznamuje s pojmem *infinitesimální*, a to jako výrazem pro diferenciální a integrální počet. Autoři pamatují i na latinský původ slova, lat. *infinitesimalis*, který značí nekonečně malý, a upozorňují, že tento počet byl svými objeviteli založen *na nekonečně malých veličinách*. Více poznatků z historie se čtenář dočte v historické poznámce na konci učebnice. Autoři učebnice poukazují na metody matematické analýzy, které umožňují řešení a přesný popis řady složitých jevů, které by nebylo možné popsat metodami elementární matematiky. Uvádí se, že znalosti infinitesimálního počtu jsou nezbytné nejen při studiu fyziky, ale také chemie, zejména termodynamiky a kinematiky chemických dějů, popisu atomových a molekulových orbitalů apod. Studenty se snaží motivovat tím, že bez diferenciálního a integrálního počtu se neobejde žádný inženýr v oboru strojírenství, stavebnictví, elektrotechniky a ekonomie, ale ani odborníci zabývající se pravděpodobností a statistikou. Metody infinitesimálního počtu se užívají i v lékařství.

Úspěšné zvládnutí učiva této učebnice předpokládá znalost operací s reálnými čísly, absolutní hodnoty, úprav výrazů, řešení rovnic a nerovnic, základů analytické geometrie v rovině, zejména rovnice přímky; z planimetrie pak znalost pojmů tečna a sečna. Základním požadavkem je však dobré zvládnutí pojmu funkce včetně znalostí jednotlivých elementárních funkcí na úrovni odpovídající předcházejícím učebnicím. [8]

Zaměříme se na první část, kterou je Diferenciální počet. Kapitola má 4 základní části. Čtvrté části „Derivace funkce“, pro nás nejpodstatnější, předchází: „Elementární funkce“, „Spojitost funkce“ a „Limita funkce“. Úvodní část textu seznamuje studenta s pojmem derivace jako hlavním pilířem infinitesimálního počtu. Autoři motivují tím, že se studenti naučí elegantní způsob vyšetřování průběhu funkcí včetně sestavení jejich grafů, možnost řešení slovních úloh, kde je požadováno určení extrému dané veličiny (maxima nebo minima). Dále informuje o využití derivace v geometrii a

ve fyzice. Nejprve připomíná směrnici tečny a upozorňuje na souvislost s určením tečny grafu funkce f v bodě $T[x_0; y_0]$ jako limitu:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$$

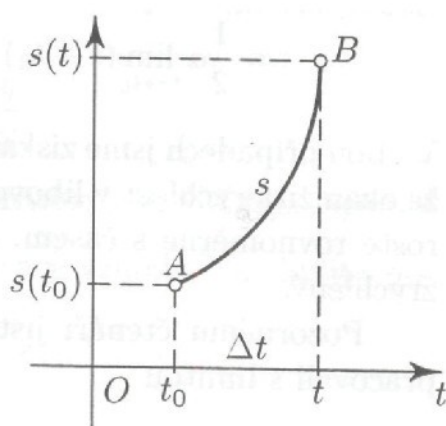
Zdůrazňuje, že limita má geometrickou interpretaci, a to tím, že udává směrnici tečny k_T grafu funkce f v bodě $T[x_0; y_0]$.

Problém z fyziky ukazuje na příkladu okamžité rychlosti pohybu hmotného bodu. Učebnice seznamuje studenty s pojmem derivace pomocí motivačního příkladu následovně:

Příklad:

Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje. Od jistého okamžiku začneme měřit čas a zároveň v závislosti na čase t budeme měřit dráhu $s(t)$, kterou bod urazil od okamžiku $t = 0$. Dráha $s(t)$ je, jak známe z fyziky, funkcí času t . Na jednu osu

Obr. 8: Okamžitá rychlost pohybu hmotného bodu



Zdroj: Matematika 1997

soustavy souřadnic budeme nanášet čas t , na druhou stranu $s(t)$, dostaneme tak graf funkce $s = s(t)$, (viz obr. 8). V době mezi časy t_0 a t urazil bod dráhu délky $s(t) - s(t_0)$.

Průměrná rychlost $\bar{v}$ v časovém intervalu $\langle t_0; t_0 + \Delta t \rangle$ je dána výrazem:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Veličina $\bar{v}$ charakterizuje pohyb v čase t_0 tím přesněji, čím je menší Δt . Okamžitou rychlost

v v čase t_0 budeme definovat jako limitu:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

V další části kapitole je uveden příklad rovnoměrného zrychlení. Typová úloha je dána vztahem pro dráhu přímočarého pohybu: $s(t) = \frac{1}{2}at^2$, kde a je konstanta. Přírůstek dráhy v čase t_0 je

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \frac{1}{2}a(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}at_0^2 = at_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2.$$

Pro okamžitou rychlost pak platí

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{at_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(at_0 + \frac{1}{2}a\Delta t \right) = at_0$$

nebo psáno jinak:

$$\Delta s = s(t) - s(t_0) = \frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{2}at_0^2 = \frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2),$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2)}{t - t_0} = \frac{1}{2}a \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0} = \frac{1}{2}a \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (t + t_0) = \frac{1}{2}a \cdot 2t_0 = at_0.$$

V obou případech si studenti mají uvědomit, že jsme získali stejný výsledek $v = a \cdot t_0$.

V tuto chvíli lze prohlásit, že okamžitá rychlost v libovolném časovém okamžiku t je $v = a \cdot t$, tzn., že roste rovnoměrně s časem. Proto tento pohyb nazýváme rovnoměrně zrychlený. Pozornému čtenáři jistě neujde, že v uvedených případech jsme pracovali s limitou $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, tj. s limitou podílu přírůstku funkce a přírůstku argumentu. Tato limita má pro nás zásadní význam, a proto je zcela přirozené, že má své vlastní označení a svůj vlastní název. Text učebnice v této části definuje derivaci funkce následovně:

„Mějme funkci f definovanou v jistém okolí bodu x_0 . Existuje-li

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

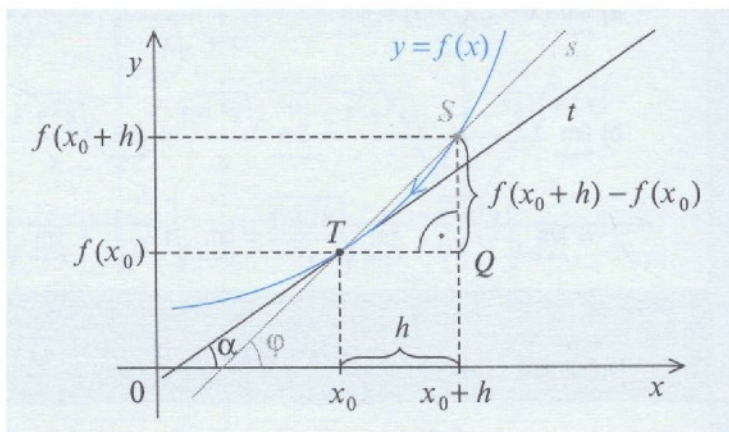
nazýváme ji derivací funkce f v bodě x_0 “.

4.3.2. Odmaturuj z matematiky 2, DIDAKTIS

Učební text vydaný nakladatelstvím DIDAKTIS si klade za cíl poskytnout studentům kompletní přehled učiva střední školy a pomoci tak k přípravě na maturitní zkoušku nebo k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Kniha studenty seznamuje se základními poznatky z disciplíny zvané matematická analýza. První dvě kapitoly jsou věnovány diferenciálnímu počtu, třetí a čtvrtá integrálnímu počtu. Probírané učivo je obohaceno o řadu řešených příkladů a názorných obrázků. Snadnou orientaci v textu podporuje jednak účelné členění na kapitoly a menší tématické celky, ale i grafické rozdělení textu do ústředního bloku a sloupce doplňující poznámky. Nejpodstatnější pojmy jsou navíc graficky znázorněny. K zapamatování učiva napomáhají také přehledné tabulky. K vyhledávání údajů výrazně napomáhá rejstřík v závěru knihy. Úvodní slovo učebnice je věnováno k nahlédnutí do historie diferenciálního a integrálního počtu. První část učebnice pojednává o Základech diferenciálního počtu s následujícími podkapitolami: Spojitost funkce, Limita funkce a Derivace funkce. Následná kapitola se zaměřuje na Užití diferenciálního počtu, jako je určování význačných vlastností funkcí, vyšetření průběhu funkce a řešení geometrických úloh.

Zaměřme se na podkapitolu Derivace funkce, kterou uvádí hlavní poznámka: „Pojem derivace byl vytvořen ve druhé polovině 17. století při řešení fyzikálních a geometrických problémů.“ Studenty dále vybízí na zaměření jednoho z problémů: nalézt rovnici tečny ke grafu funkce v libovolném bodě. K výkladu je použit obrázek (obr. 9)

Obr. 9: Derivace funkce



Zdroj: Odmaturuj 2004

Autoři učebnice názorně popisují obrázek jako část grafu funkce $y = f(x)$, s tečnou t v dotykovém bodě $T = [x_0 ; f(x_0)]$, dále sečnou s určenou tímto bodem T a bodem $S[x_0 + h ; f(x_0 + h)]$. Směrový úhel sečny je

označen jako φ , směrový úhel tečny je označen jako α . Směrnice sečny je z pravoúhlého trojúhelníku STQ :

$$k_s = \operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ze sečny se stane tečna v okamžiku, kdy bod S přejde po části grafu funkce f do bodu T . Tento pohyb je naznačen na obrázku šipkou. Přitom se stále zmenšuje hodnota h . Pro směrnici tečny tedy platí:

$$k_t = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{S \rightarrow T} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

V tomto momentě autoři učebnice vyslovují definici derivace funkce v bodě jako:

Limitu $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ nazýváme derivací funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 .

Označujeme ji obvykle $f'(x_0)$ a píšeme: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Další významné poznámky jsou uvedeny v graficky upravených blocích:

- 1) Derivace funkce je speciální případ limity.
- 2) Derivace funkce v bodě geometricky představuje směrnici tečny funkce v bodě. Tečna je určena bodem $T[x_0; f(x_0)]$ a měřnicí $k = f'(x_0)$. Rovnice tečny je t :
 $y - f(x_0) = k(x - x_0)$.
- 3) Pojem derivace funkce v bodě označuje konkrétní číslo, zatímco pojem derivace funkce (resp. derivace funkce v intervalu) označuje funkci.
- 4) Libovolná funkce má v libovolném bodě nejvýše jednu derivaci. Tedy: buď nemá v bodě derivaci, nebo má v tomto bodě právě jednu derivaci.
- 5) Derivace je lokální vlastnost, popisuje růst nebo pokles funkce v okolí daného bodu.

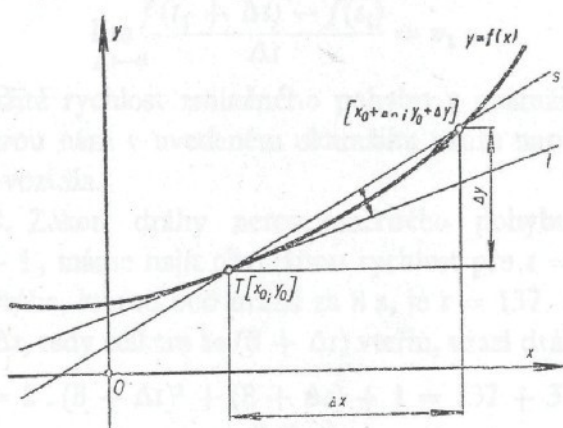
4.3.3. Matematika pro III. a IV. ročník průmyslových škol, SPN

Učebnice zavádí derivaci funkce jako nejdůležitější limitu funkce. K tomuto pojmu se dospělo úvahami o tečně křivky a při odvození vzorce pro výpočet okamžité

rychlosti rovnoměrného i nerovnoměrného pohybu. K zavedení pojmu autoři učebnice používají obr. 10. Obrázek je popsán následovně [15]:

Je-li dána spojitá funkce $y = f(x)$, kterou lze znázornit spojitou křivkou jako na obrázku. Na ní je dán bod $T[x_0; y_0]$. Máme najít rovnici tečny v tomto bodě. Podmínkou je znalost souřadnic dotykového bodu T a znalost směrnice k_t hledané tečny. Proto zvolíme na křivce další bod P o souřadnicích $[x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y]$. Spojnice TP je sečna, jejíž směrnice k_s je:

Obr. 10: Derivace funkce



Zdroj: Matematika 1960

$$k_s = \frac{y_0 + \Delta y - y_0}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Řekneme, že směrnice tečny je podíl přírůstku (diferencí) Δy a Δx . Blíží-li se bod P po křivce k pevnému bodu T , tj. když přírůstky Δy a Δx se blíží nule, otáčí se sečna kolem bodu T a přechází v tečnu. Říkáme, že tečna je limitní polohou sečny. Pak také směrnice sečny přechází ve směrnici tečny. Symbolicky píšeme:

$$k_t = \lim_{P \rightarrow T} k_s$$

$$\text{nebo podrobněji: } k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Dovedeme-li tuto limitu vypočítat, dovedeme také sestavit rovnici tečny:

$$y - y_0 = k_t(x - x_0).$$

V této části kapitoly autoři uvádějí řešený příklad, kde úkolem pro studenty je najít tečnu paraboly v daném bodě. Dále uvádějí úlohu z mechaniky, při níž se postupuje jako při hledání směrnice tečny dané křivky.

Po přímce se pohybuje bod, a to tak, že dráha, kterou urazí od zvoleného počátku, je známou funkcí času. Vyjádříme to funkční rovnicí $s = f(t)$, kde s je dráha (závisle proměnná) a t čas (nezávisle proměnná). Jsou-li t_1 a t_2 dva okamžiky ($t_1 < t_2$), udává rozdíl $f(t_2) - f(t_1)$ dráhu, kterou bod urazil za čas $t_2 - t_1$.

Podíl
$$v_{1,2} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

je průměrná rychlost bodu v čase od t_1 do t_2 (Δs je přírůstek dráhy a Δt přírůstek času). Tato průměrná rychlost je rovna okamžité rychlosti pohybu pouze v případě, jde-li o pohyb rovnoměrný. Bude-li se časový interval (přírůstek) zmenšovat a blížit nule ($\Delta t \rightarrow 0$), pak

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t} = v_1,$$

což je okamžitá rychlost zmíněného pohybu v okamžiku t_1 . Je to rychlost, kterou nám v uvedeném okamžiku ukáže např. tachometr motorového vozidla.

Příklad: Zákon dráhy nerovnoměrného pohybu zní: $s = 2t^2 + t + 1$. Máme najít okamžitou rychlost pro $t = 8$ vteřin.

Řešení: Dráha, kterou bod urazil za 8 s, je $s = 137$. Za další přírůstek času Δt , tedy celkem za $(8 + \Delta t)$ vteřin, urazí dráhu

$$s + \Delta s = 2 \cdot (8 + \Delta t)^2 + (8 + \Delta t) + 1 = 137 + 33 \cdot \Delta t + 2(\Delta t)^2,$$

čili přírůstek dráhy Δs je:

$$\Delta s = 33 \cdot \Delta t + 2(\Delta t)^2.$$

Rychlost na konci osmé vteřiny bude:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{33 \cdot \Delta t + 2(\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (33 + 2\Delta t) = 33.$$

V předchozích úlohách a příkladech jsme počítali limitu jistého zlomku, tzv. derivace funkce v bodě.

V tuto chvíli autoři učebnice vyslovují definici:

Derivace funkce $y = f(x)$ v bodě $x = a$ je limita zlomku

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x},$$

kteřou značíme $f'(a)$. Předpokládáme, že tato limita existuje (mohou nastat případy, že tato limita neexistuje). Takto vypočtená derivace je určité číslo. Počítáme-li hodnoty derivací v celém oboru funkce $f(x)$, dostaneme množinu derivací čísel, tj. dostáváme novou funkci, tzv. derivovanou funkci nebo zkrátka derivaci a píšeme:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Autoři učebnice se zmiňují o původu slova derivace, které je vzato z latiny a značí odvozeninu, tj. odvozené číslo nebo odvozenou funkci. Jinak autoři připomínají označení derivace jako $\frac{df(x)}{dx}$ nebo $\frac{dy}{dx}$. Uvedený limitní vztah můžeme psát:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{dy}{dx}.$$

A říkáme, že derivace funkce je limita podílu přírůstku závislé proměnné a nezávislé proměnné, pokud se jmenovatel blíží k nule.

Autoři učebnice novou látku shrnují do dvou bodů:

- a) derivace funkce v určitém bodě je určité číslo – geometricky směrnice tečny v daném bodě
- b) derivace funkce v určitém oboru (intervalu) je nová funkce, z níž dosazením za x najdeme derivaci v bodě jako číslo.

V samotném závěru úvodu k diferenciálnímu počtu je uvedena derivace jako nejdůležitější limita, která má velký význam v přírodních a technických vědách, kde se často zajímáme o okamžitou změnu určité veličiny závislé na čase. Autoři odkazují studenty na dvě uvedené nejdůležitější aplikace derivace, tj. geometrický význam je derivace směrnice tečny dané křivky a fyzikální význam je rychlost, je-li známa závislost dráhy na čase.

4.4. Porovnání učebnic

Hlavním důvodem výběru předchozích učebních pomůcek bylo jejich nejčastější používání na středních školách, které jsme zjistili na základě průzkumu ve školách. Učebnici Diferenciální počet od nakladatelství Prometheus nepoužívají jen gymnázia, ale i některé střední průmyslové a ekonomické školy, a to hlavně z důvodu nedostatku jiných učebnic zabývajících se tématem diferenciální počet. Podle průzkumu na řadě takových škol podobné učebnice chybí.

Po prostudování obou učebnic a učebního textu se domníváme, že splnily základní požadavek seznámit studenty se základy diferenciálního počtu na střední škole. Autoři učebnice z nakladatelství Prometheus řeší i otázku zařazení základů infinitezimálního počtu do středoškolské matematiky. Jsou přesvědčeni, že s těmito základy by měli být seznámeni nejen studenti středních škol, ale i škol odborných, kteří

budou pokračovat ve studiu matematiky nebo jiných technických oborů na různých typech vysokých škol. Zařazení základů diferenciálního a integrálního počtu do gymnaziálních osnov matematiky má velkou tradici nejen u nás, ale téměř ve všech dalších evropských zemích.

Je nutné si uvědomit, že zavádění diferenciálního a integrálního počtu na střední škole vyžaduje práci s mnoha novými pojmy. S nimi se většinou seznamujeme pomocí motivačních příkladů, do jisté míry intuitivně, přesnost a určitý systém však musejí být zachovány. I když edice Odmaturuj z matematiky 2 od nakladatelství Didaktis není klasickou učebnicí, je oproti námi vybraným učebnicím mnohem přehlednější, a práce s ní je tak mnohem snazší. Napovídá tomu i přehledné členění do 4 kapitol, které jsou dále děleny na menší podkapitoly. Snadnou orientaci v textu podporuje grafické odlišení ústředního textu od doplňujících poznámek, přehledné řazení poznatků do tabulek a barevné zvýraznění důležitých pojmů. Za velký nedostatek učebnice od Prometheusa pokládáme chybějící rejstřík na konci knihy. Podle našeho názoru je to jedna z nejdůležitějších částí, kterou by měla obsahovat každá učebnice. Slouží ke snadnější práci s textem a rychlejšímu vyhledávání informací. Autoři od Prometheusa upozorňují v předmluvě na řadu motivačních příkladů. Ve skutečnosti mnohem více motivačních příkladů najdeme v učebním textu Odmaturuj z matematiky 2 a v Matematice pro III. a IV. ročník průmyslových škol. Příklady jsou názorně doprovázeny obrázky a jednoduchými vysvětlivkami, a to přímo v textu nebo u konkrétního obrázku. Učebnice Odmaturuj z matematiky 2 uvádí příklady s konkrétním řešením, na rozdíl od učebnice od nakladatelství Prometheus, kde naopak ve většině případů začínají autoři novou látku pomocí obecného zadání, což je pro studenty velice složité.

Nakladatelství Prometheus vydává i učebnice matematiky pro střední odborné školy a střední odborná učiliště. Edice Matematika pro SOŠ a studijní obory má dohromady 5 dílů. Nakladatelství připravuje 6. díl, který bude zaměřen na základy diferenciálního a integrálního počtu.

5. PROPEDEUTIKA POJMU DERIVACE

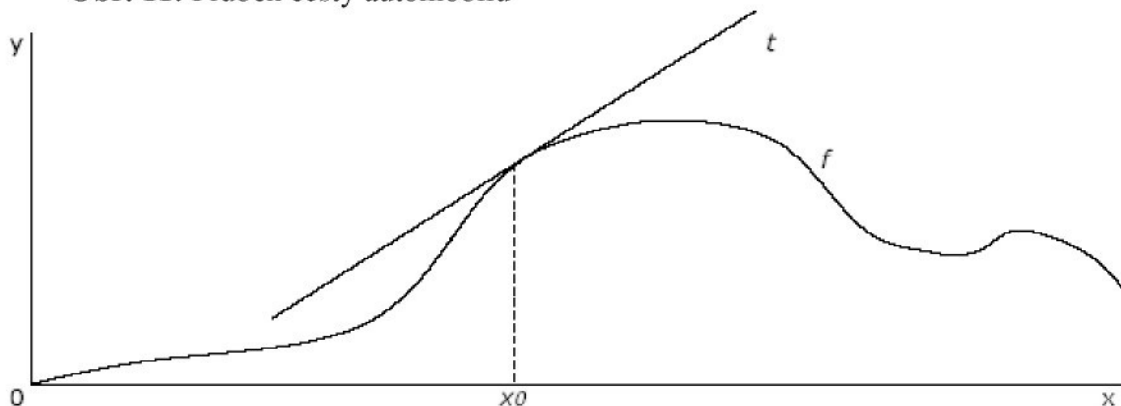
Předchozí kapitola nám podala stručný pohled na zavedení derivace dnes běžně zavedeným způsobem. Zkusme se podívat na situaci očima studenta a pokusme se pojem derivace zavést pomocí reálného příkladu. Studenta tak neodradíme neznámou úlohou, naopak ho můžeme motivovat. Pojem derivace můžeme zavést pomocí dvou motivačních příkladů, které si studenti snadno dokáží představit i v reálném prostředí. První způsob je z matematického hlediska jako směrnice tečny k dané křivce a z hlediska fyzikálního jako okamžitá rychlost.

5.1. Derivace v matematice

Představme si, že cestujeme autem kdesi v horách. Silnice vede chvíli do kopce, chvíli z kopce, tu mírněji a tu zase příkřeji, v některých okamžicích jedeme po rovině. Náhle nám zatelefonuje kamarád a zeptá se nás, jak je naše cesta příkrá a v jakém směru, vzhůru či dolů. Nejspíš bychom odpověděli, že záleží na místě, ve kterém se budeme v daný okamžik nacházet. Kamarád se nás tedy zeptá, jak je příkrá právě tam, kde zrovna jsme. Zastavíme tedy a zjistíme, jak strmá je na daném místě podlaha našeho vozu – zda je vůz výše kapotou či zadním zavazadlovým prostorem. Dá se říci, že pokud bychom vedli podlahou od výfuku k přední značce spojnicí, odpovídala by strmost této přímky zhruba strmosti silnice v tom konkrétním místě, kde právě stojíme.

Přenesme nyní tento ilustrační příklad do prostředí analytické geometrie. Vše, co k tomu budeme potřebovat, je níže uvedený obrázek (viz obr. 11):

Obr. 11: Průběh cesty automobilu



Průběh cesty (a tedy vertikální členitost silnice) je v tomto případě znázorněna funkcí $f(x)$. Vidíme, že zpočátku cesta mírně stoupá, poté náhle její sklon prudce vzroste. Na vrcholku se jakoby narovná, nato má klesající charakter atd. Místo, kde jsme autem zastavili, je v grafu znázorněno jako bod na křivce, jehož první souřadnice je x_0 . Chceme-li zjistit, jak strmá je křivka právě v bodě o souřadnici x_0 (nebo raději jaký má křivka v bodě o souřadnici x_0 směr), nejsnazším řešením bude „přiložit“ k této křivce v daném bodě tečnu (znázorněno přímkou t) a vyjádřit její směrnici. Můžeme tedy říci, že směr dráhy v konkrétním bodě lze přesně vyjádřit směrnicí tečny v tomto bodě. Číslo vyjadřující směrnici tečny k funkci $f(x)$ v bodě o souřadnici x_0 se nazývá derivace funkce f v bode x_0 .

5.2. Derivace ve fyzice

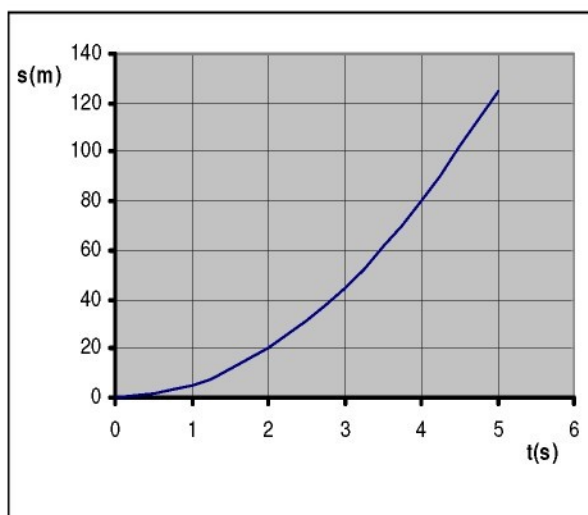
Ukažme si na konkrétním příkladu volného pádu problematiku průměrné a okamžité rychlosti. Uvědomme si, že průměrná rychlost je skalární veličina a okamžitá rychlost veličina vektorová.

Dráha uražená při volném pádu je dána vztahem $s = \frac{1}{2} g \cdot t^2$. Definičním oborem této funkce jsou vzhledem k fyzikálnímu významu nezáporné časy a grafem část paraboly s vrcholem v počátku umístěná v prvním kvadrantu. Sestavíme pro několik hodnot tabulku (tab. 2), použijeme $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a sestojíme graf (obr. 12)

Tab. 2: Naměřené hodnoty

t (s)	0	1	2	3	4	5
s (m)	0	5	20	45	80	125

Obr. 12: Graf naměřených hodnot z tab. 2



Ukažme si metodu, jak z funkční závislosti dráhy na čase určit závislost velikosti okamžité rychlosti. Vypočítejme okamžitou rychlost například v čase 2 s. Nejprve určíme průměrnou rychlost, např. mezi 2. a 5. sekundou volného pádu. Dráha v čase 2 s je $s(2) = 20$ m, v čase 5 s pak $s(5) = 125$ m. Hledanou průměrnou rychlost vyjádříme

ze vzorce:

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

po dosazení dostáváme: $v_p(2; 5) = \frac{s(5) - s(2)}{5 - 2} = 35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$

Obdobně v kratším časovém intervalu od 2 s do 3 s je průměrná rychlost

$$v_p(2; 3) = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

v intervalu od 2 s do 2,1 s je

$$v_p(2; 2,1) = \frac{s(2,1) - s(2)}{2,1 - 2} = 20,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Budeme-li pokračovat dále ve zmenšování časového intervalu, bude se odpovídající průměrná rychlost blížit hodnotě hledané okamžité rychlosti v čase 2 s. Jak však zjistit tuto okamžitou rychlost přesně, když uvedená metoda bude vždy určovat pouze rychlost průměrnou, byť v menším a menším časovém intervalu? Pokusme se tento nedostatek obejít obecným vyjádřením průměrné rychlosti od časového okamžiku t do okamžiku

$$t + \Delta t. \text{ V těchto časech jsou uražené dráhy } s(t) = \frac{g}{2}t^2, \quad s(t + \Delta t) = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2.$$

Průměrná rychlost v časovém intervalu Δt se pak rovná

$$v_p(t; t + \Delta t) = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\frac{g}{2}(t + \Delta t)^2 - \frac{g}{2}t^2}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2t + \Delta t).$$

Obecný výsledek můžeme použít k výpočtu průměrné rychlosti během času Δt , ale navíc nám umožňuje udělat úvahu, kterou jsme před tím provést nemohli. Položíme-li totiž časový interval Δt roven nule, získáme vzorec pro okamžitou rychlost v čase t : $v(t) = g \cdot t$. Z něj určíme rychlost v čase 2 s, tj. $v(2) = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Shrňme-li poznatky o uvedené metodě, můžeme konstatovat, že okamžitou rychlost získáme matematicky přesně, považujeme-li časový interval Δt za nekonečně malý. Formálně tuto skutečnost nazýváme „limitou výrazu pro Δt blížící se neomezeně

k nule“ a zapisujeme jako $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Limita je tedy hodnota zlomku, ke které se

neomezeně přiblížíme při zmenšování časového intervalu Δt k nule. Podíl nazýváme derivace dráhy podle času.

5.3. Motivační příklad

Pokusme se najít tečnu ke křivce, kterou umíme bezpečně zakreslit do grafu, se kterou umíme počítat nebo kterou můžeme snadno popsat. Využijeme při tom několik metod, které nahradí ještě neznámý pojem derivace. Začneme pomocí několika motivačních příkladů dle Hejného [7]:

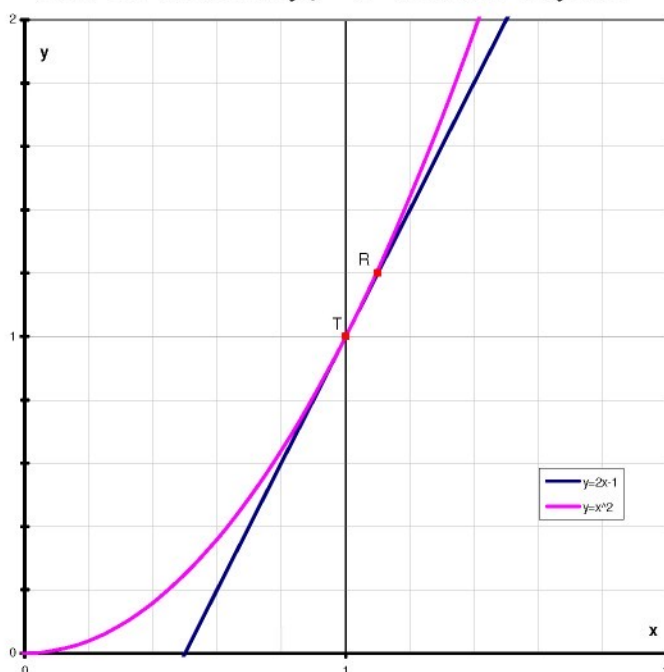
Zadání:

Je dána křivka pomocí rovnice: $y = x^2$. Hledejte její tečnu v bodě $T = [1 ; 1]$.

5.3.1. Řešení – Metoda A

Protože nevíme, jak tečnu k dané křivce v bodě $T [1 ; 1]$ najít, pro tuto chvíli se spokojíme pouze s přibližným řešením. Zvolíme si bod R , velmi „blízký“ k bodu T , například $R [1,1 ; 1,2]$ (viz obr. 13). Abychom mohli s co největší přesností určovat blízké body, použijeme milimetrový papír, kam poměrně přesně zaneseme graf paraboly a přibližnou podobu tečny k parabole.

Obr. 13: Část křivky $y = x^2$ s bodem dotyku T



Protože zatím netušíme, že pojem derivace má něco společného s tečnou křivky, vystačíme pouze s pojmem směrnice, kterou lze pomocí jednoduchého náčrtku odvodit. Připomeňme tedy co je to směrnice a uvědomme se především, že směrnice je číslo.

Směrnice přímky f je $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, neboli $\frac{y - y_0}{x - x_0}$, což lze rovněž zapsat jako $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Nyní se vraťme k našemu zadání. Zadaný pevný bod T má souřadnice $[1 ; 1]$. Abychom mohli vypočítat přibližnou směrnici tečny, musíme znát další bod. Zvolili jsme bod $R [1,1 ; 1,2]$, bod velice blízký k bodu T . Další bod R volíme z důvodu, že každé dva různé body určují přímku. V našem případě vymezují přímku TR , ta nám určí přibližnou tečnu k parabole. Přímku v rovině pak můžeme určit jedním bodem a nenulovým vektorem $\mathbf{n}$, který je kolmý k směrovému vektoru přímky.

Způsoby určení směrnice přímky TR , kde $T [1 ; 1]$ a $R [1,1 ; 1,2]$:

1. možnost:

- podle výše uvedených vzorců pouze dosadíme číselně do vzorce

$$k = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1,2 - 1}{1,1 - 1} = \frac{0,2}{0,1} = 2$$

- pomocí směrnice $k = 2$ a jednoho daného bodu $T [t_1 ; t_2]$ jsme nyní schopni vyjádřit i hledanou přímku, tečnu,

- můžeme napsat, že přímka bude mít rovnici:

$$y = k \cdot x + q,$$

- číslo q určíme dosazením souřadnic bodu T a dosadíme-li číselně za k a T , hledaná rovnice přímky blízké k tečně je

$$y = 2x - 1.$$

2. možnost:

- uvědomme si, že přímka se směrovým vektorem např. $u = (u_1 ; u_2)$ má směrnici

$$k = \frac{u_2}{u_1},$$

- máme-li přímku určenou dvěma body T, R , pak její směrový vektor je $R - T$,

- přímka, která prochází body $T = [t_1 ; t_2]$ a $R = [r_1 ; r_2]$, kde $t_1 \neq r_1$, má rovnici

$$y = \frac{r_2 - t_2}{r_1 - t_1} (x - t_1) + t_2,$$

- dosadíme-li číselně za T a R vyjde rovnice:

$$y = 2x - 1,$$

- z rovnice tedy vyčteme, že směrnice je rovna číslu 2.

3. možnost:

- přímku v rovině můžeme určit jedním bodem a nenulovým vektorem $\mathbf{n}$, který je kolmý k směrovému vektoru přímky (podmínka, kterou musí splňovat souřadnice bodu, aby ležel na přímce určené zadaným bodem a normálovým vektorem $\mathbf{n}$):

1) máme-li zadané dva body, musíme nejprve určit směrový vektor $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$ přímky TR

2) určíme normálový vektor $\mathbf{n} = (-u_2; u_1)$ tím máme dány koeficienty a, b v obecné rovnici přímky $ax + by + c = 0$

3) do obecné rovnice přímky dosadíme rovnice souřadnice jednoho z bodů T, R a určíme poslední koeficient v obecné rovnici přímky

- počtetně tedy:

$$\text{ad 1) } \mathbf{u} = R - T = (0,1 ; 0,2)$$

$$\text{ad 2) } \mathbf{n} = (-0,2 ; 0,1)$$

$$\text{ad 3) } T \in t: -0,2x + 0,1y + 0,1 = 0$$

$$\text{směrniceový tvar přímky: } y = 2x - 1.$$

5.3.2. Řešení – Metoda B

Zvolíme body R_1 a R_2 – každý z jedné strany bodu T a určíme směrnici k_1 a k_2 sečen TR_1 a TR_2 . Například $R_1 = [1,1 ; 1,21]$ a $R_2 = [0,9 ; 0,81]$. Potom $k_1 = 2,1$ a $k_2 = 1,9$ a hledanou směrnici určíme jako $\frac{k_1 + k_2}{2}$, tedy 2.

5.3.3. Řešení – Metoda C

Využijeme tezi „čím blíže je bod R k bodu T , tím blíže je přímka TR k tečně“. Budeme tedy body R_1, R_2 přibližovat tak blízko k bodu T , až dostaneme požadovanou přesnost, například $|k_1 - k_2| < 10^{-4}$. Numerické hodnoty najdeme na následující stránce v tabulce č. 3

Tab. 3: Přibližování bodu R a směrnice přímky TR

R_1	R_2	k_1	k_2	$k = \frac{k_1 + k_2}{2}$
[1,1;1,21]	[0,9;0,81]	2,1	1,9	2
[1,05;1,1025]	[0,95;0,9025]	2,05	1,95	2
[1,025;1,050625]	[0,975;0,950625]	2,025	1,975	2
[1,005;1,010025]	[0,995;0,990025]	2,005	1,995	2
[1,0025;1,00500625]	[0,9975;0,99500625]	2,0025	1,9975	2
[1,0005;1,00100025]	[0,9995;0,99900025]	2,0005	1,9995	2

5.3.4. Vylepšení metody A

Pokusme se vylepšit metodu A. Bod R jsme volili vždy konkrétně. Nyní ho necháme pohyblivý. Tím lépe využijeme faktu: „čím blíže je bod R k bodu T , tím bližší je sečna TR k tečně v bodě T . Vráťme se ke křivce $y = x^2$ a bodu T . Zvolíme bod R $[1+a; 1+e]$, kde a , e jsou malá reálná čísla. Po dosazení souřadnic bodu R do rovnice křivky dostáváme: $1+e = (1+a)^2$.

Po ekvivalentních úpravách získáme kvadratickou rovnici: $a^2 + 2a - e = 0$.

Najdeme její kořeny, které jsou: $a_1 = -1 - \sqrt{1+e}$

$$a_2 = -1 + \sqrt{1+e}$$

Z obr. 13 na stránce 47 je vidět, že směrnice má tvar $k = \frac{e}{a}$. Kořen a_1 můžeme vyloučit,

protože řešíme pouze první kvadrant části grafu, kterému tento kořen nevyhovuje. Po dosazení prvního kořene kvadratické rovnice a_1 do rovnice směrnice dostáváme:

$$k = \frac{e}{-1 + \sqrt{1+e}} = 1 + \sqrt{1+e}.$$

Přibližování bodu R k bodu T vyjádříme zmenšováním čísla e . Výpočty jsou patrné z tab. 4. Z tabulky je vidět, že čím menší je číslo e , tím blíže je směrnice k k 2.

Tab. 4: Zmenšování velikosti čísla e

e	0,1	0,01	0,001	0,0001
$1 + \sqrt{1+e}$	2,048809	2,0049876	2,00049988	2,000049999

5.4. Experiment

Popsanou metodu hledané tečny v podkapitole 5.3. jsem vyzkoušela na Gymnáziu a Střední odborné škole pedagogické v Nové Pace, na které jsem byla sama studentkou a absolvovala zde i středoškolskou praxi v rámci svého studia na FP TUL. Školu jsem zvolila také z důvodu známého prostředí, přátelské komunikace mezi mnou a vyučujícími a snadnou dostupností z mého bydliště. Na základě ústní dohody jsem se setkala začátkem června 2006 s RNDr. Janou Vaškovou, jež na gymnáziu vyučuje předměty matematiku a fyziku. Domluvily jsme se na mé další návštěvě, na které bych vybrané žáky seznámila se svou prací a předložila jim zavedení derivace netradičním způsobem.

Datum: 12. 6. 2006

Místo konání experimentu: Gymnázium a SOŠP Nová Paka

Studenti: ze třetího ročníku, 3 ze čtvrtého ročníku, všichni z matematického semináře

Čas: 2 vyučovací hodiny

Cíl: bez znalosti výpočtu derivací odhalit možný postup výpočtu tečny ke křivce

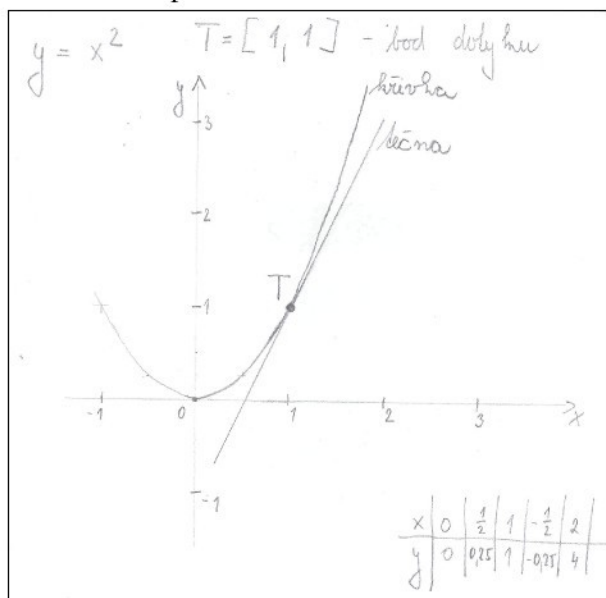
Motivace: zmínka z historie matematiky o vzniku a důležitosti derivace

Pomůcky: kalkulačka, milimetrové papíry

Styl výuky: týmová spolupráce, diskuze

Způsob zadání: základní situace načrtnuta na tabuli s doprovodným ústním komentářem (viz náčrtek na obr. 14)

Obr. 14: Způsob zadání na tabuli



Zadání úlohy:

„Křivka je zadána pomocí rovnice: $y = x^2$. Pokuste se najít její tečnu v bodě dotyku o souřadnicích $T = [1 ; 1]$. Využívejte pouze doposud známé matematické postupy, např. z analytické geometrie.“

5.4.1. Průběh diskuze a řešení studentů

Cílem našeho experimentu bylo přijít na rovnici tečny ke křivce bez znalosti použití derivace, pomocí níž by bylo nalezení řešení nejjednodušší. Studenti, kteří s námi spolupracovali, byli vybráni z důvodu zájmu o předmět matematika a proto, že navštěvovali povinně volitelný předmět Seminář z matematiky. Navíc se jednalo o studenty, kteří měli prospěch na výbornou. Mohli jsme tedy předpokládat, že většina z nich byla na stejné vědomostní a dovednostní úrovni. Diskuze se vedle studentů ze třetího ročníku, zúčastnili i tři studenti z maturitního ročníku, kteří pojem derivace již bezpečně ovládali. Experiment byl uskutečněn po vyučování, to znamená ve volném čase studentů, v učebně fyziky a matematiky za spolupráce RNDr. Jany Vaškové, učitelky matematiky a fyziky.

Úloha byla zadána studentům slovně za pomoci základního náčrtku funkce $y = x^2$, vyznačení bodu dotyku T o souřadnicích $[1 ; 1]$ a přibližným vyznačením tečny procházející bodem T na tabuli (viz obr. 14, str. 51). Ihned v úvodu byli studenti upozorněni, aby dbali na co nejpresnější zakreslení křivky do grafu, které jim může při řešení problému pomoci. Z tohoto důvodu jsme považovali za výhodnou pomůcku milimetrový papír, který byl studentům poskytnut při zadávání úlohy.

Předpokládaným postupem řešení u studentů bylo hlavně využití směrnice přímk. Také jsme očekávali, že si studenti nejprve uvědomí, čím je přímk v rovině určena a jak tyto parametry vypočítat, např. pracovat s pojmy jako směrový vektor, normálový vektor, obecná rovnice přímk. Studenti ze třetího ročníku ale od první chvíle pohlíželi na zadanou křivku jako na parabolu a začali uvažovat o problému najít rovnici tečny k parabole. Přemýšleli tedy o základních vlastnostech paraboly, jakým je ohnisko, vrchol, řídící přímk a vztahy mezi nimi. Někteří studenti si vzpomněli na existenci vzorce, který snadno určí rovnici tečny k parabole. Důvodem byla nedávno probraná látka zaměřená na vzájemné polohy kuželoseček a přímek. Přesné znění vzorce si však nikdo nepamatoval. Studentovi A se díky nákresu zadané situace podařilo vzorec odvodit a hledanou rovnici tečny vyřešit. Jeho řešení je přiloženo v Příloze 1.

Studenti B a C zadanou úlohu považovali za výpočet vzájemné polohy křivky a přímky. Vycházeli tedy z toho, že hledají rovnici tečny paraboly. Když v analytické geometrii pracujeme s tečnou a kuželosečkou (v našem případě s parabolou), vycházíme z toho, že početně řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Přičemž jedna rovnice je kvadratická, je rovnicí paraboly, a druhá rovnice je lineární, rovnice přímky neboli tečny. Při řešení vycházeli z toho, že tato soustava musí mít jediné řešení, protože tečna má s parabolou jediný průsečík, tečný bod. Kvadratická rovnice má jediné řešení pro diskriminant roven nule. V tomto případě nám vyjde jediná rovnice pro dvě neznámé, jednu neznámou ale eliminujeme tak, že do rovnice dosadíme bod, ve kterém je tečna hledána. Oba postupy jsou v originální verzi přiloženy v Přílohách 2 a 3.

Zbytek studentů začal uvažovat nad možností, že bude nějaká souvislost mezi ohniskem a bodem na parabole, konkrétně bodem dotyku T . Tento fakt jsme společnými silami vzápětí vyvrátili pouhými náčrtky grafu vzájemné polohy křivky a tečny na tabuli. Protože studenti stále více připouštěli myšlenku souvislosti rovnice tečny a vlastností paraboly, navodila jsem jednoduchou situaci z analytické geometrie. Kladením jednoduchých otázek jsem se snažila studenty navést na základní pojmy analytické geometrie, jako jsou směrové a normálové vektory, rovnice přímky, směrnice přímky apod. Jeden ze studentů oponoval slovy, že na určení směrnice bychom museli mít zadaný další bod tečny. Ten tu bohužel nemáme. Navrhla jsem další bod zvolit alespoň přibližně. Výpočet tečny ke křivce za podpory dalšího zvoleného bodu je znázorněn v Příloze 4. Student D využil přibližného určení druhého bodu, pomocí něhož byl schopen vyjádřit tečnu jako přímku. Bod volil co nejbližší k zadanému bodu dotyku $T = [1; 1]$. Příklad začal řešit pomocí základního náčrtku zadané situace, kde je vidět volba druhého bodu R , který leží taktéž na křivce. Student si uvědomil, že pokud bod R bude dostatečně blízko bodu T , vznikne jejich spojením sečna, která kopíruje velice přibližnou polohu tečny. K určení rovnice tečny použil pouze určení směrového vektoru, vyjádření normálového vektoru a obecnou rovnici, kterou je přímka určena za pomoci bodu dotyku T .

V Příloze 5 je vidět důkladnější náčrtek a podrobnější popis základní situace. Student E si uvědomil, že k výpočtu tečny ke křivce vystačí s určením směrnice přímky. V tomto případě musel zvolit další bod V , který bude určovat přibližnou polohu hledané tečny. Student zvolil bod V na křivce stejným způsobem jako student D v Příloze 4. Bod

V označil indexem 1, protože v dalším postupu zvolil druhý bod V_2 , taktéž v blízkosti bodu dotyku pro zpřesnění výpočtu hledané tečny. Z obrázku je patrné, že si student pro určení směrnice křivky, hledané tečny, překreslil nejdůležitější část grafu. Směrnici přímký vypočítal jako rozdíl funkčních hodnot bodu T a V . Pro určení přímký dosadil směrnici do směrnicevého tvaru rovnice přímký a pomocí bodu dotyku T našel hledanou rovnici tečny. Pro upřesnění směrnice tečny zvolil bod V_2 , aby pomocí aritmetického průměru hledanou přibližnou sečnu, co nejvíce přiblížil hledané tečně.

Student A se pokusil o stejnou metodu výpočtu jako student D, ale v tomto případě zvolil bod velmi blízký bodu T . Přiblížení určil až na 4 desetinná místa. Pro názornost volby tak to blízkého bodu použil pro znázornění milimetrový papír, na který zanesl křivku v okolí bodu T . Postup výpočtu je přiložen v Příloze 6.

V Příloze 7 přikládáme jako ukázkou práce studenta F ze čtvrtého ročníku, který již ovládal pojem derivace a uměl k nalezení tečny použít náležité řešení. Použití derivace bylo ale při zadání úlohy zakázáno z důvodu neznalosti tohoto pojmu.

5.4.2. Závěr diskuze

Díky nalezení rovnice tečny studentem F jsme mohli s ostatními studenty v závěru debaty porovnat postup výpočtu bez použití a s použitím derivace a vysvětlit tak, co pojem derivace znamená z geometrického hlediska. Díky výpočtu studenta F ze čtvrtého ročníku ostatní studenti sami přišli na to, že se vlastně jedná o číslo vyjadřující směrnici tečny v nějakém bodě o určitých souřadnicích.

Studenti se během diskuze chovali velice otevřeně, což umožnilo velmi příjemnou debatu nad zadaným problémem. Každý se pokusil přijít na nějaký nápad a jeho řešení i ústně zhodnotit a okomentovat. Před přípravou samotného experimentu jsme nepočítali s možností, že by se studentům podařilo přijít na více než dvě možná řešení, jak nalézt rovnici tečny. Byli jsme ale mile překvapeni. Nenapadlo nás, že by studenti např. k najetí rovnice tečny přistupovali jako ke vzájemné poloze křivky a přímký nebo využití vzorce určující tečnu k parabole. Důvodem toho bylo, že podobná látka byla probírána o měsíc před naším experimentem.

6. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Kapitola je věnována několika ukázkově řešeným úlohám, které se zabývají hledáním rovnice tečny ke křivce bez použití derivace.

1) Je dána křivka pomocí rovnice: $y = x^2$. Hledejte její tečnu v bodě $T = [1 ; 1]$.

Řešení:

Tento příklad byl pomocí několika metod vyřešen v podkapitole 5.3. na stranách 47 – 50 a stal součástí experimentu v podkapitole 5.4. na stranách 51 – 54.

2) Je dána křivka pomocí rovnice: $y = x^2$. Hledejte její tečnu v bodě $T = [\sqrt{2} ; 2]$.

Řešení:

Pokusme se najít rovnici tečny, je-li křivka zadána jako v typovém příkladě s funkcí $y = x^2$ a tečným bodem $T = [\sqrt{2} ; 2]$ (viz obr. 15). K výpočtu hledané rovnice tečny si zvolíme na zadané křivce bod velmi blízký bodu T , který určí směrnici odpovídající přibližně hledané tečně. Zvolíme-li na ose x -ovou souřadnici bodu $V_1 \sqrt{2} + 0,1$, hodnotu souřadnice y snadno dopočítáme dosazením nové souřadnice do zadané rovnice křivky. Po výpočtu dostáváme obě souřadnice $V_1 [\sqrt{2} + 0,1 ; 2,29]$. Přibližnou směrnici tečny určíme ze vztahu

$$v_1 = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2,29 - 2}{\sqrt{2} + 0,1 - \sqrt{2}} \approx 2,9 \quad .$$

Pro zpřesnění hledané směrnice zvolíme ještě jeden bod, opět v těsné blízkosti bodu T a stejným postupem zjistíme směrnici odpovídající volbě bodu $V_2 [\sqrt{2} - 0,1 ; 1,73]$:

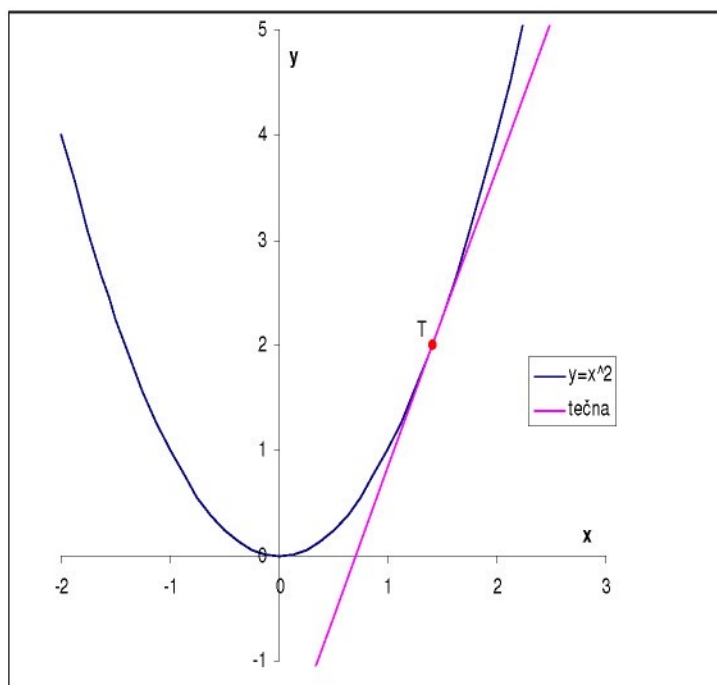
$$v_2 = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2 - 1,73}{\sqrt{2} - \sqrt{2} + 0,1} \approx 2,7 \quad .$$

Pomocí aritmetického průměru vypočítáme průměrnou hodnotu hledané směrnice:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{2,9 + 2,7}{2} = 2,8 \quad .$$

Rovnice hledané přímky má tvar $y = v \cdot x + q$ (kde v je směrnice), stačí tedy už jen určit konstantu q , která vyjadřuje posun po ose y .

Obr. 15: $y = x^2$, $T = [\sqrt{2}; 2]$



Protože hledaná tečna prochází bodem dotyku $T = [\sqrt{2}; 2]$ dosadíme už jen do směrnicového tvaru rovnice:

$$y = v \cdot x + q$$

$$2 = 2,8 \cdot \sqrt{2} + q$$

$$q = -1,96 ;$$

hledaná rovnice tečny má

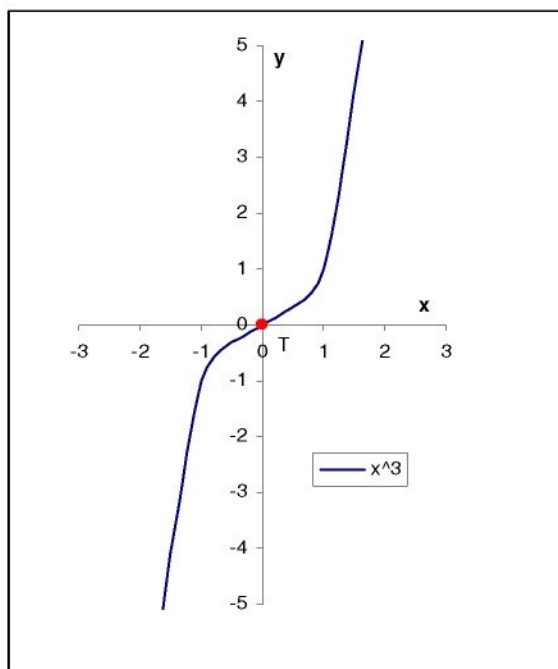
tedy tvar: $y = 2,8x - 1,96$.

3) Je dána křivka pomocí rovnice: $y = x^3$. Hledejte její tečnu v bodě $T = [0; 0]$.

Řešení:

Stejným způsobem hledáme rovnici tečny pro rovnici třetího stupně s bodem dotyku v počátku souřadnicového systému $T [0; 0]$.

Obr. 15: $y = x^3$, $T = [0; 0]$



Bod $V_1 [0 + 0,01; 0,001]$ má směrnicí

$$v_1 = \frac{0,001 - 0}{0,1 - 0} = 0,01.$$

Bod $V_2 [0 - 0,1; -0,001]$ má směrnicí

$$v_2 = \frac{0 + 0,001}{0 + 0,1} = 0,01.$$

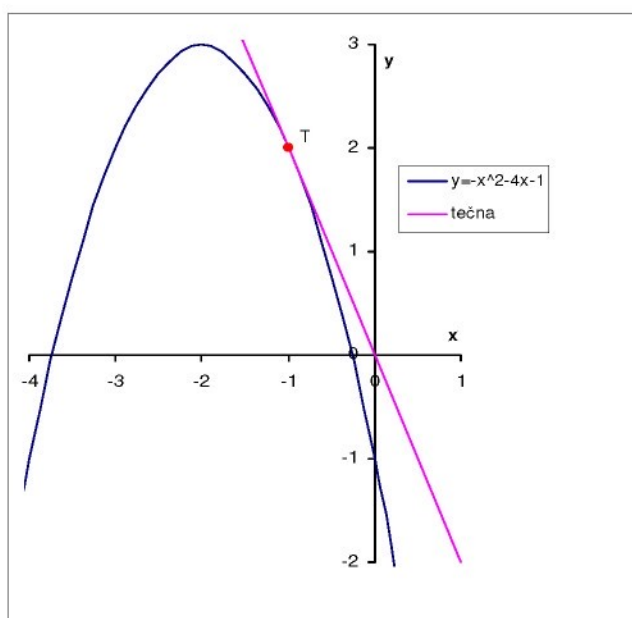
V tomto případě se držíme shodného postupu s hledáním směrnic tečny jako v metodě B (str. 49, kap. 5.3.2.). Při vypočítání směrnic ale narazíme na zvláštní jev: $v_1 = 0,01$ stejně jako

$v_2 = 0,01$. Jak je to možné? Vždyť hlavní princip metody C (str. 49, kap. 5.3.3.) je v tom, že směrnice tečny leží mezi k_1 a k_2 . Tedy to samé očekáváme i tomto případě. Proč je tedy nyní $v_1 = v_2$? Odpověď můžeme snadno vyčíst z obr. (viz obr. 15). V bodě T je „prohnutí“, jinými slovy, v tomto bodě je inflexe. To znamená, že se jedná o takový bod grafu funkce, ve kterém dochází k přechodu mezi konvexní a konkávní částí grafu. V inflexním bodě se mění zakřivení grafu funkce a tečna grafu v tomto bodě graf protíná. Zjistili jsme, že tedy metoda C ($k_1 < k < k_2$) nefunguje, pokud je v bodě T inflexní bod.

4) Je dána křivka pomocí rovnice: $y = -x^2 - 4x - 2$. Hledejte její tečnu v bodě $T = [-1; 1]$.

Řešení:

Obr. 16: $y = -x^2 - 4x - 2$, $T = [-1; 1]$



Hledanou rovnici tečny můžeme najít i pomocí jiného postupu než je určení směrnice. Přímka v rovině může být určena jedním bodem a nenulovým vektorem n , který je kolmý k směrovému vektoru přímky. V našem případě máme zadáné body dva, protože si opět určíme pro větší přiblížení sečny tečně bod $V [-1 - 0,1; 1,19]$, velice blízký bodu T . Určíme si tak nejprve jejich směrový vektor $u = (u_1; u_2)$ přímky TV ze vztahu: $u \cdot v = 0$

$$\text{tj.:} \quad (u_1; u_2) \cdot (-u_2; u_1) = 0,$$

$$\text{tedy} \quad u = V - T = (-0,1; 0,19).$$

Dále určíme normálový vektor $n = (-u_2; u_1)$, který udává koeficienty a, b v obecné rovnici přímky $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$

$$n = (0,19; 0,1)$$

Protože bod T leží na tečně, dosadíme do obecné rovnice přímky souřadnice bodu T a určíme poslední koeficient v obecné rovnici přímky:

$$0,19 \cdot x + 0,1 \cdot y + c = 0,$$

$$0,19 \cdot (-1) + 0,1 \cdot 1 + c = 0,$$

$$c = 0,09.$$

Směrnice tvar přímky je tedy $y = -1,9x - 0,9$. Přibližným důkazem toho může být obr. 16.

5) Je dána křivka pomocí rovnice: $y = 2^x - 4$. Hledejte její tečnu v bodě $T = [0; -3]$.

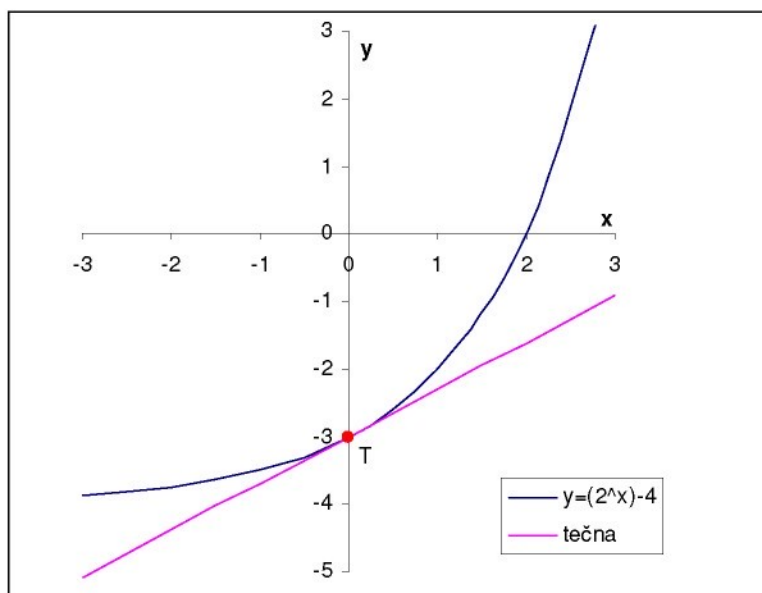
Řešení:

Protože nevíme, jak tečnu přesně najít, spokojíme se opět s přibližným řešením. Zvolíme bod N , který je velmi blízko bodu dotyku T . Zvolíme-li x -ovou souřadnici bodu N $0 + 0,1$, bude mu přibližně odpovídat na ose y souřadnice $-2,928$. Nyní určíme

směrnici sečny TN :
$$k = \frac{-2,928 + 3}{0,1 - 0} = 0,72$$

Tečnu poté nahradíme velmi blízkou sečnou TN rovnicí, kterou snadno vypočteme ze směrového tvaru přímky: $y = k \cdot x + q$.

Obr. 17: $y = 2^x - 4$, $T = [0; -3]$



Po dosazení bodu dotyku, který na hledané tečně leží, získáváme koeficient $q = -3$. Koeficient q lze vyčíst i z obrázku nebo přímo ze zadání, uvědomíme-li si, že určuje posun po ose y . Naším úkolem je tedy najít tečnu v bodě o souřadnici $y = -3$. Pro názornost je graf křivky s přibližnou tečnou znázorněn na obr. 17.

6) Je dána křivka pomocí rovnice: $y = \log_2(x+4)$. Hledejte její tečnu v bodě $T = [-3; 0]$.

Řešení:

Abychom mohli určit tečnu k zadané křivce, určíme si opět bod velice blízký k dotykovému bodu. Určíme tak sečnu, která kopíruje přibližně hledanou tečnu. Zvoleným bodem bude bod $N = [-3+0,1; 0,14]$, kde souřadnice y je velmi přibližná, neboť je zaokrouhlena pro lepší práci při výpočtech hledané tečny. K výpočtu použijeme směrový, normálový vektor a obecnou rovnici tečny. Směrový vektor je

$$\mathbf{u} = N - T = (0,1; 0,14),$$

ze vztahu $(u_1; u_2) \cdot (-u_2; u_1) = 0$ určíme normálový vektor, který nabývá hodnot

$$\mathbf{n} = (-0,14; 0,1).$$

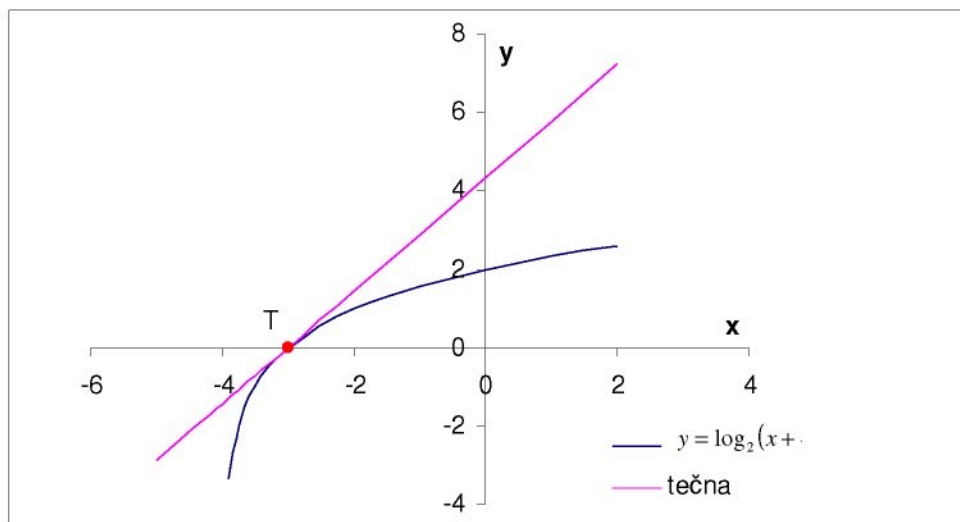
Po dosazení normálového vektoru, který určuje koeficienty a, b , do obecné rovnice přímky:

$$-0,14 \cdot x + 0,1 \cdot y + c = 0$$

a bodu dotyku, který na přímce leží: $-0,14 \cdot (-3) + c = 0$,

hledaný koeficient je roven $-0,42$. Rovnice tečny vyjádřená ve směrnicovém tvaru je po úpravě: $y = 1,4 \cdot x + 4,2$. Přibližně najitou tečnu můžeme porovnat s obr. 18.

Obr.18: $y = \log_2(x+4)$, $T = [-3; 0]$



7. ZÁVĚR

Diplomová práce se zabývala propedeutikou pojmu derivace a pokusila se ukázat méně tradiční způsob zavedení tohoto pojmu na středních školách.

Kapitola 2 zaměřená na historii pojmu derivace, seznámila s objevem, významem a hlavními objeviteli, G. W. Leibnizem a I. Newtonem, infinitezimálního počtu. Interpretaci popsala pomocí obrázků a metod, které použili sami objevitelé.

Kapitola 3 se zaměřila na školskou matematiku z hlediska historického vývoje, aby mohla ukázat postupné zařazování pojmu derivace do školských osnov. Užívala při tom názorné ukázky některých vybraných středoškolských učebnic z počátku 20. století. Dále představila osnovy matematiky se zaměřením na infinitezimální počet na dnešních gymnáziích. Zmínila i velmi diskutovaný rámcově vzdělávací program.

Samotným pojmem derivace se zabývala kapitola 4. Uvedla hlavní význam slova a jeho zavedení pomocí matematického a fyzikálního hlediska. Porovnála a zhodnotila přístup k pojmu derivace v nejpoužívanějších učebnicích na středních školách.

Propedeutika pojmu derivace v kapitole 5 byla uvedena prostřednictvím motivačních úloh. Pomocí několika metod ukázala řešení vybraného typového příkladu. Součástí kapitoly se stal experiment provedený na Gymnáziu a SOŠP v Nové Pace, kde se studenti pokusili o řešení problému prostřednictvím diskuse. Jeho výsledky jsou připojeny k diplomové práci v přílohách.

Poslední kapitola byla zaměřena na řešené příklady pomocí základních znalostí a dovedností z analytické geometrie. Jednotlivé úlohy byly doplněny obrázky grafů znázorňujících přibližnou situaci zadání.

I když zavádění diferenciálního počtu na středních školách vyžaduje práci s mnoha novými pojmy a zachování určité posloupnosti učiva, lze se s pojmem derivace seznámit pomocí znalostí z analytické geometrie, jako se to povedlo studentům na Gymnáziu a SOŠP v Nové Pace.

8. LITERATURA

- [1] BRUTHANS, V. (1976): *Úvod do matematické analýzy*. Liberec, TU v Liberci, 147 s.
- [2] BYDŽOVKÝ, B. (1921): *Aritmetika pro IV. – VII. třídu škol středních, 2. díl*. Praha, JČMF, 160 s.
- [3] BYDŽOVKÝ, B., VOJTĚCH, J. (1912): *Mathematika pro nejvyšší třídu reálék*. Praha, JČMF, 176 s.
- [4] BYDŽOVKÝ, B., VOJTĚCH, J. (1912): *Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol*. Praha, JČMF, 329 s.
- [5] COLERUS, E. (1941): *Od Pythagory k Hilbertovi. Dějiny matematiky pro všechny*. Praha, Družstevní práce, 350 s.
- [6] DEVLIN, K. (2002): *Jazyk matematiky. Jak zviditelnit neviditelné*. Praha, Agro a Dokořán, 343 s. ISBN: 80-86569-09-8
- [7] HEJNÝ, M. a kol. (1990): *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 554 s. ISBN: 80-08-01344-3
- [8] HRUBÝ, D., KUBÁT, J. (1997): *Diferenciální a integrální počet, Matematika pro gymnázia*. Praha, PROMETHEUS, 195 s. ISBN: 80-7196-063-2
- [9] CHARVÁT, F., SMELHAUS, J. (1971): *Populární encyklopedie matematiky*. Praha, SNTL, 660 s.
- [10] JARNÍK, V. (1984): *Diferenciální počet (II)*. Praha, ACADEMIA, 669 s.
- [11] KNICHAL, V. a kol. (1965): *Matematika I*. Praha, SNTL/SVTL, 541 s.
- [12] KOČANDRLE, M., BOČEK, L. (1995): *Analytická geometrie, Matematika pro gymnázia*. Praha, PROMETHEUS, 220 s. ISBN: 80-7196-163-9
- [13] KOPÁČKOVÁ, A. (2006): *Obyčejná derivace?* In: Sborník příspěvků z mezinárodní konference Prezentace matematiky ICPM 2005. TU Liberec, str. 129-136
- [14] KOPÁČKOVÁ, A. (2006): *Počátky diferenciálního a integrálního počtu ve školské matematice*. In: Sborník příspěvků z 10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. ZČU Plzeň.

- [15] KUBÍČEK, F., a kol. (1960): *Matematika pro III. A IV. ročník průmyslových škol s mimořádnými způsoby studia*. Praha, SPN, 445 s.
- [16] JČMF (1981): *Slovník školské matematiky*. Praha, SPN, 239 s. ISBN: 14-614-81
- [17] ODVÁRKO, O. (1993): *Funkce, Matematika pro gymnázia*. Praha, PROMETHEUS, 160 s. ISBN: 80-85849-09-7
- [18] POTŮČEK, J (1992): *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900 – 1945. I. díl*. Plzeň, PF ZČU, 55 s. ISBN: 80-7043-039-7
- [19] POTŮČEK, J (1993): *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900 – 1945. II. díl*. Plzeň, PF ZČU, 49 s. ISBN: 80-7043-070-2
- [20] STRUIK, D. J. (1963): *Dějiny matematiky. Malá moderní encyklopedie*. Praha, Orbis, 250 s.
- [21] ŠKRÁŠEK, J., TICHÝ, Z. (1983): *Základy aplikované matematiky I*. Praha, SNTL, 876 s.
- [22] VEKERDI, L. (1981): *Isaac Newton*. Bratislava, Smena, 165 s.
- [23] ZNÁM, Š. a kol. (1986): *Pohl'ad do dejín matematiky*. Praha, SNTL, 239 s.
- [24] MŠMT ČR (1991): *Učební osnovy čtyřletého gymnázia, matematika*. Praha, Fortuna, 40 s.
- [25] MŠMT ČR (1999): *Učební dokumenty pro gymnázia*. Praha, Fortuna, 205 s. ISBN: 80-7168-659-X
- [26] MŠMT ČR (1999): *Standard vzdělávání ve čtyřletém gymnáziu*. Praha, Fortuna, 47 s. ISBN: 80-7168-603-4
- [27] Encyklopedie DIDEROT 2002, 1. – 5. cd
- [28] WIKIPEDIE, Otevřená encyklopedie, online
- [29] 21. století, Revue objevů, vědy, techniky a lidí. 3, březen, 2007, str. 34 – 35, Kdo první objevil derivaci?
- [30] <<http://www.goncb.cz/fyzika/down/Fyzika1.pdf>>
- [31] <http://www.math.muni.cz/math/biografie/vaclav_simerka.html>
- [32] <<http://www.rvp.cz/clanek/481/996>>
- [33] <http://www.studentzone.cz/dokumenty_detail.php?id=111&raz=2&fak=0>
- [34] <<http://math.feld.cvut.cz/mt/txtc/1/txc3ca1b.htm>>
- [35] <http://neviditelnypes.zpravy.cz/p_veda.asp>

PŘÍLOHY

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha 1	Odvození rovnice tečny pomocí kuželosečky a přímky
Příloha 2	Vzájemná poloha křivky a přímky 1
Příloha 3	Vzájemná poloha křivky a přímky 2
Příloha 4	Odvození rovnice tečny přes obecnou rovnici přímky
Příloha 5	Odvození rovnice tečny přes směrnici
Příloha 6	Maximální přiblížení bodu na sečně
Příloha 7	Výpočet rovnice tečny pomocí derivace

$$(p_1 - 1)^2 + 1 = (1 + p_1)^2$$

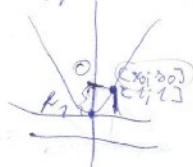
$$p_1^2 - 2p_1 + 1 + 1 = 1 + 2p_1 + p_1^2$$

$$\sigma[i p_1]$$

$$-4p_1 + 1 = 0$$

$$-p_1 = -\frac{1}{4}$$

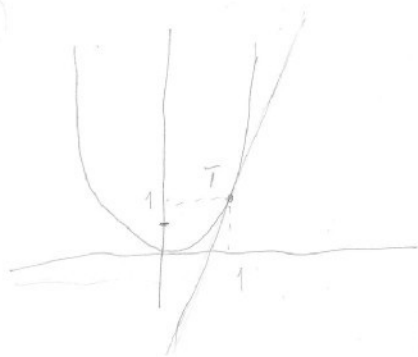
$$p_1 = \frac{1}{4}$$



$$\Rightarrow w = 2p_1 = \frac{1}{2}$$

$$re: x \cdot y = p \cdot (y + y_0) = x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} =$$

$$\Rightarrow \cancel{x = y + 1} = \underline{2x - y - 1}$$



$$y = x^2$$

$$y = 2x + q$$

$$kx + q = x^2$$

$$0 = x^2 - kx - q$$

$$D = k^2 + 4q = 0$$

$$\begin{aligned} 1 &= k + q \\ 1 - k &= q \end{aligned}$$

$$k^2 + 4(1 - k) = 0$$

$$k^2 + 4 - 4k = 0$$

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

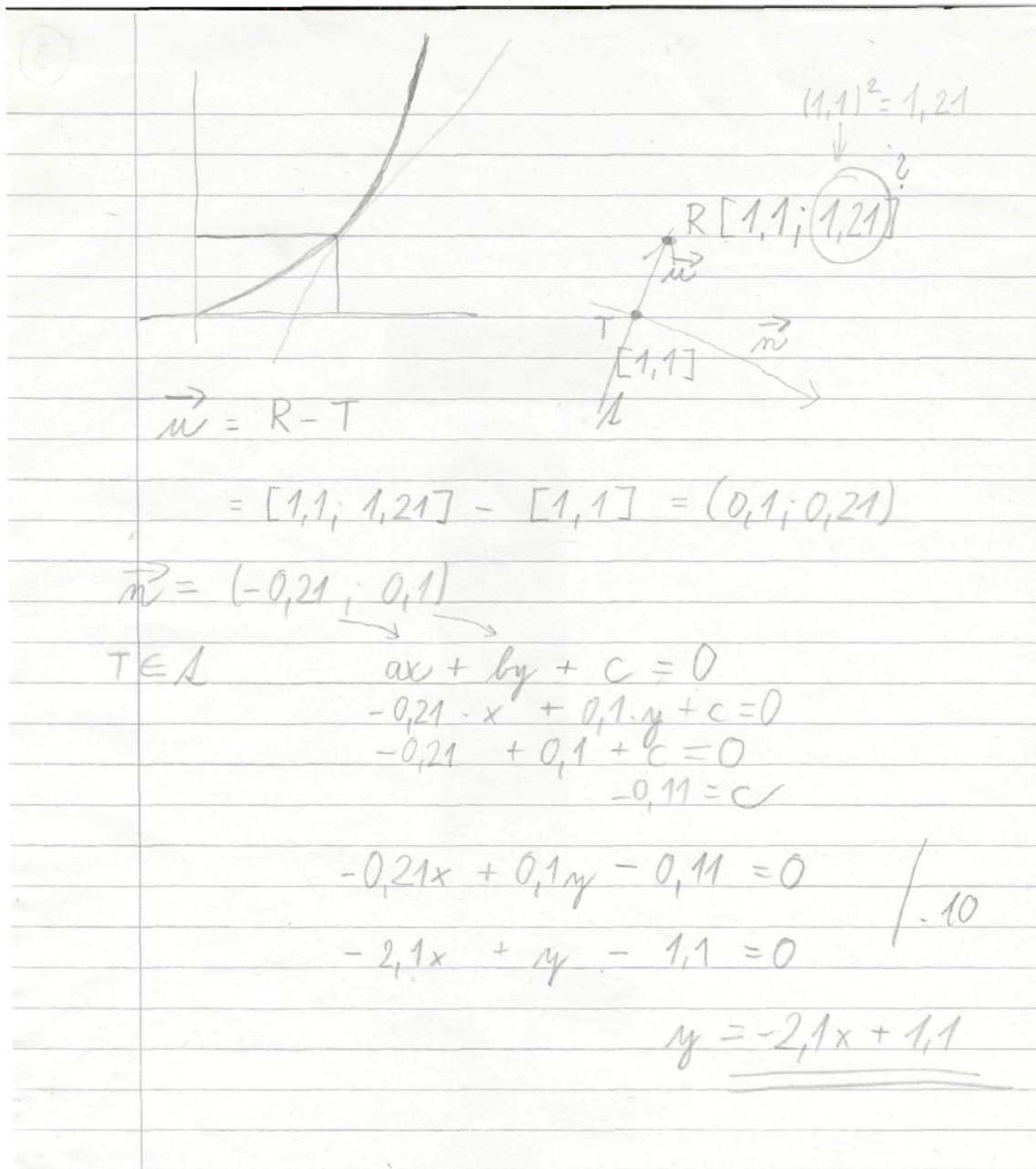
$$(k - 2)^2 = 0$$

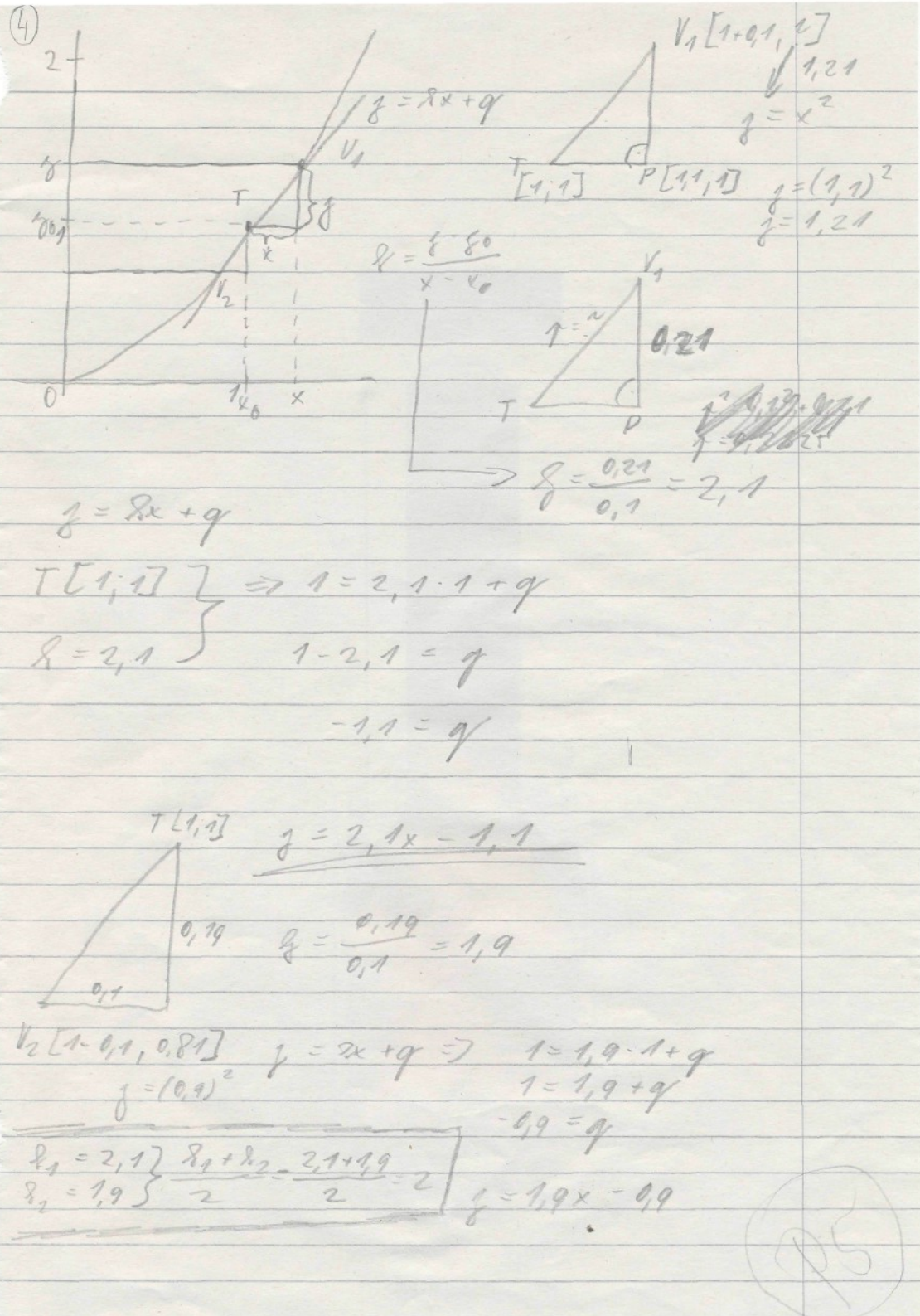
$$\underline{\underline{k = 2}}$$

$$q = 1 - 2$$

$$q = -1$$

$$\boxed{y = 2x - 1}$$





$$T \subset 1; 1]$$

$$Q \subset 1,0001; 1,0002]$$

$$\Rightarrow \vec{v}(0,0001; 0,0002) = \vec{v}(1; 2).$$

$$\Rightarrow \vec{v}(-2; 1)$$

$$\Rightarrow -2x + y + e = 0$$

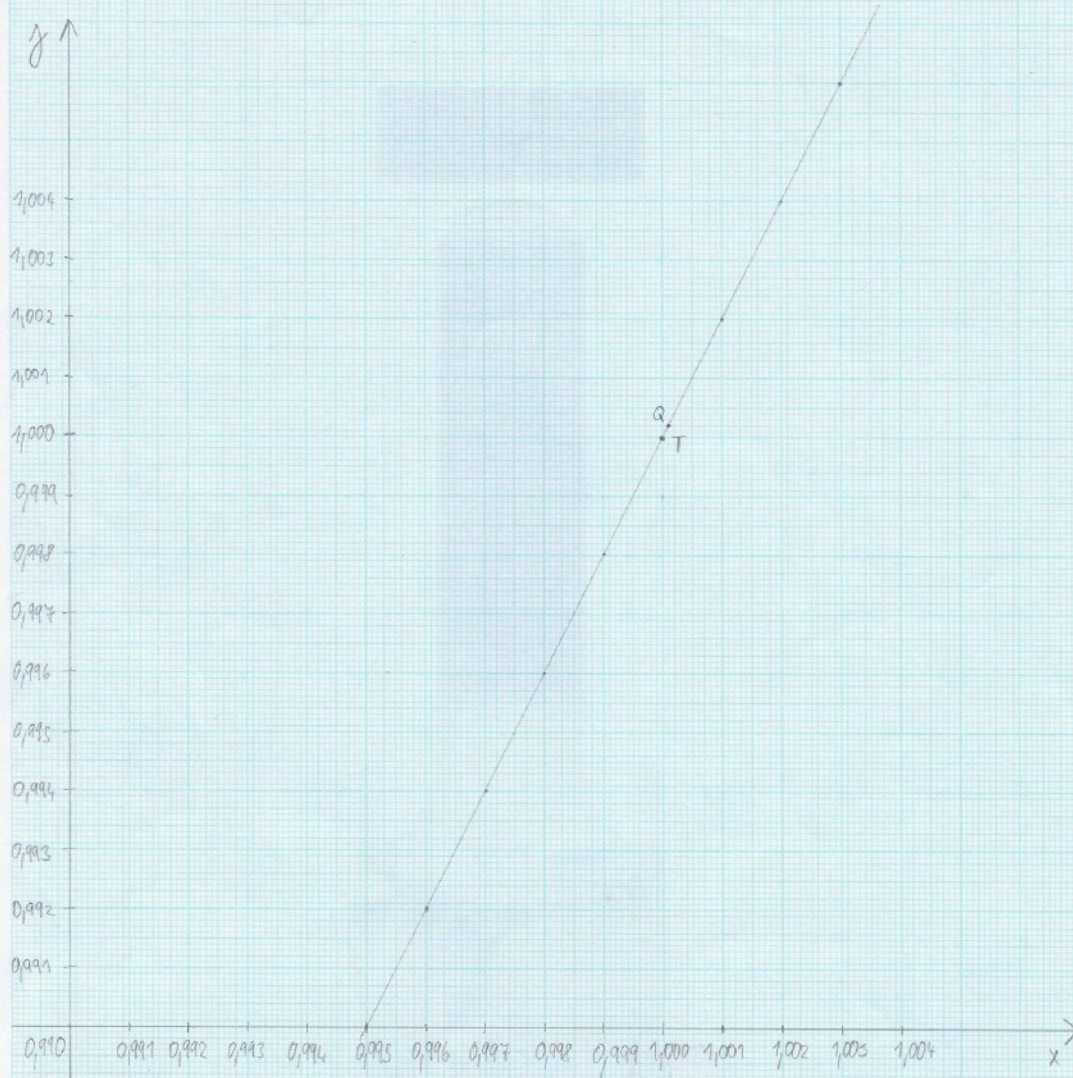
$$-2 + 1 + e = 0$$

$$e = 1$$

$$\Rightarrow -2x + y + 1 = 0$$

$$2x - y - 1 = 0$$

$$f = x^2$$



$\Rightarrow$ Sledujeme křivku, neboť máme funkci $f = x^2$, a myslíme si, že bychom mohli najít nějaký bod T, který by byl blíže k bodu Q, než bod Q. (Ať už bychom si vybrali jakýkoliv bod T, vždy bychom našli nějaký bod Q, který by byl blíže k bodu T, než bod T.)

$$y = x^2 \quad T[1; 1]$$

$$y' = 2x \mid_{x_0=1} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$y = kx + q$$

$$1 = 2x + q$$

$$1 = 2 \cdot 1 + q$$

$$\therefore -1 = q$$

$$\underline{\underline{y = 2x - 1}}$$