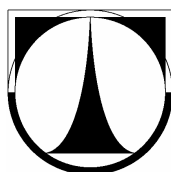


TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

**Fakulta mechatroniky a mezioborových
inženýrských studií**



Matematické modely vedení tepla v elektrických strojích

Habilitační práce

Obor: přírodovědné inženýrství

RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Fakulta pedagogická
Technická univerzita v Liberci

Liberec, srpen 2007

Anotace

Předkládaná práce je zaměřena na problematiku výpočtu oteplení a tepelných ztrát v komponentách elektrických strojů při jejich provozu. Matematické modely vedení tepla v elektrických strojích zaujímají v současné technické praxi nezastupitelné místo, zejména při charakteru kusové nebo malosériové výroby elektrických strojů. Nezbytným předpokladem správné funkčnosti a zajištění požadované životnosti stroje je zamezení překročení přípustné teploty a tepelného toku v jednotlivých částech stroje.

Práce se zabývá numerickým řešením matematických modelů vedení tepla při ustáleném zatížení stroje. Pozornost je soustředěna na řešení úloh popsaných eliptickou parciální diferenciální rovnicí 2. řádu s Newtonovou okrajovou podmínkou na hranici dvourozměrné oblasti. Řešení je zaměřeno na užití metody konečných prvků a metody tepelných bilancí. Další část práce se zabývá řešením dynamického zatěžování stroje pomocí náhradní tepelné sítě, úloha je popsána systémem obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu s Cauchyho počátečními podmínkami.

Součástí práce jsou numerické výsledky obdržené při řešení konkrétních technických tepelných úloh transformátorů.

Abstract

Mathematical Models of Thermal Convection in Electric Machines

The dissertation is focused on computational problems of warming and thermal losses in components of electric machines in the process of their operation. Mathematical models of thermal convection in electric machines are an important factor in current technical practice, especially in conditions of single-part production or short-run production of electric machines. The prevention of temperature exceeding and thermal flow in single parts of machine is a prerequisite of correct operation and functionality of the machine.

The dissertation describes numerical solution of mathematical models of thermal convection during stationary loading. Attention is focused on solving an elliptical partial differential equation of second order with Newton's boundary condition on two dimensional domain. The numerical solution is based on the use of the finite element method and box method. Another part of the dissertation is focused on problem of dynamic loading of electrical machines and its solving by the method of compensatory thermal network. The problem is described by a system of ordinary differential equations of first order with Cauchy's initial conditions.

The dissertation contains numerical results of real-life technical problems of transformers as well.

Rád bych na tomto místě poděkoval všem, kteří přispěli ke vzniku této práce. Především děkuji pracovníkům Ústavu silnoproudé elektrotechniky v Praze – Běchovicích a Matematického ústavu AV ČR v Praze, s nimiž řadu let spolupracuji při řešení problematiky vedení tepla v elektrických strojích.

Prohlašuji, že jsem práci vypracoval samostatně a že jsem použil pouze uvedenou literaturu.

V Liberci, srpen 2007

Obsah

SEZNAM ZKRATEK POUŽITÝCH MATEMATICKÝCH SYMBOLŮ	6
SEZNAM ZKRATEK POUŽITÝCH FYZIKÁLNÍCH VELIČIN.....	7
1. MOTIVACE.....	8
2. MATEMATICKÉ MODEL Y VEDENÍ TEPLA.....	12
2. 1. SESTAVENÍ MATEMATICKÉHO MODELU	16
2. 2. MATEMATICKÝ MODEL A REÁLNÝ TEPELNÝ PROBLÉM VEDENÍ TEPLA.....	17
3. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ MODELŮ VEDENÍ TEPLA	21
3. 1. ZÁKLADNÍ POJMY	21
3. 2. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ USTÁLENÝCH TEPELNÝCH DĚJŮ.....	26
3. 2. 1. <i>Slabá formulace úlohy</i>	28
3. 2. 2. <i>Metoda konečných prvků</i>	30
3. 2. 3. <i>Metoda tepelných bilancí</i>	40
3. 2. 4. <i>Metoda tepelných bilancí pro obdélníkovou oblast</i>	43
3. 3. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ DYNAMICKÝCH TEPELNÝCH DĚJŮ	50
4. VÝPOČET OTEPLENÍ STÍNĚNÍ TRANSFORMÁTORU PŘI USTÁLENÉM STAVU	54
4. 1. OTEPLENÍ VE STÍNĚNÍ TRANSFORMÁTORU	54
4. 1. 1. <i>Testovací úloha</i>	57

4. 1. 2. <i>Příklad č. 1 – oteplení v hliníkovém stínění</i>	60
4. 1. 3. <i>Příklad č. 2 – oteplení v hliníkovém stínění</i>	64
4. 1. 4. <i>Příklad č. 3 – oteplení v magnetickém stínění</i>	66
4. 1. 5. <i>Příklad č. 4 – oteplení v magnetickém stínění</i>	68
4. 1. 6. <i>Užití Richardsonovy extrapolace</i>	71
4. 2. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ÚLOH.....	73
 5. VÝPOČET OTEPLENÍ TRANSFORMÁTORU PŘI DYNAMICKÉM ZATÍŽENÍ.....	 77
5. 1. JEDNODUCHÁ NÁHRADNÍ TEPELNÁ SÍŤ	79
5. 1. 1. <i>Případ konstantního zatížení transformátoru</i>	80
5. 1. 2. <i>Případ cyklicky proměnného zatížení transformátoru</i>	83
5. 2. PODROBNÁ NÁHRADNÍ TEPELNÁ SÍŤ	87
5. 2. 1. <i>Případ cyklicky proměnného zatížení transformátoru</i>	90
 6. ZÁVĚR.....	 95
 LITERATURA.....	 97

Seznam zkratk použitých matematických symbolů

$a(\cdot, \cdot)$	sesquilineární, případně bilineární forma
v	testovací funkce
$C(\overline{\Omega})$	prostor spojitých funkcí na $\overline{\Omega}$
$C^k(\overline{\Omega})$	prostor funkcí, jejichž derivace až do řádu k patří do $C(\overline{\Omega})$
$C^\infty(\Omega)$	prostor nekonečně diferencovatelných funkcí na Ω
$C_0^\infty(\Omega)$	prostor nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem v Ω
$H^k(\Omega)$	Sobolův prostor funkcí, jejichž zobecněné derivace až do řádu k včetně patří do $L^2(\Omega)$
$L^2(\Omega)$	prostor funkcí lebesgueovsky integrovatelných s kvadrátem na Ω
$L^\infty(\Omega)$	prostor funkcí lebesgueovsky měřitelných a ohraničených na Ω
$\mathbf{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbf{R}^d$	d -rozměrný eukleidovský prostor
$U(z)$	okolí bodu z
V	lineární vektorový prostor
Ω	ohraničená oblast v $\mathbf{R}^d$
$\overline{\Omega}$	uzávěr Ω
$\partial\Omega$	hranice oblasti Ω
Δ	Laplaceův operátor
$(\cdot, \cdot)_V$	skalární součin ve vektorovém prostoru V
$\ \cdot\ _V$	norma ve vektorovém prostoru V
$(\cdot, \cdot)_{k, \Omega}$	skalární součin v $H^k(\Omega)$
$\ \cdot\ _{k, \Omega}$	norma definovaná v $H^k(\Omega)$
$ \cdot _{k, \Omega}$	seminorma definovaná v $H^k(\Omega)$

Seznam zkratek použitých fyzikálních veličin

a [WK^{-1}]	tepelná vodivost
a_Q [W K^{-1}]	vodivost proudícího chladiva
c_p [$\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$]	měrná tepelná kapacita tělesa
f [Wm^{-3}]	objemová hustota tepelných ztrát
t [s]	čas
u [$^{\circ}\text{C}$, K]	oteplení
C [JK^{-1}]	tepelná kapacita
L [h]	doba životnosti izolace udaná v hodinách
P [W]	tepelné ztráty
S [m^2]	teplosměnná plocha
T [$^{\circ}\text{C}$, K]	teplota
V [m^3]	objem
W [J]	tepelná energie
α [$\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$]	součinitel přestupu tepla
α_T [K^{-1}]	součinitel závislosti měrného odporu na teplotě
β_i [K^{-1}]	součinitel teplotní závislosti ztrát v i -tém uzlu sítě
δ [m]	tloušťka materiálu, jímž prochází teplo
σ [Am^{-2}]	proudová hustota ztrát
λ [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$]	součinitel tepelné vodivosti látky
φ [kg m^{-3}]	měrná hustota tělesa
ρ [Ωm]	měrný elektrický odpor

1. Motivace

Práce je zaměřena na problematiku výpočtu oteplení a tepelných ztrát v komponentách elektrických strojů při jejich provozu. V počátečních etapách konstrukce elektrických strojů se problematice oteplení a chlazení nepřikládal velký význam, neboť stroje byly obvykle předimenzovány a jejich vlastní funkčnost byla prioritní. Hospodárnost provozu strojů byla v té době podružnější. Následně se začala používat zjednodušená empirická kritéria k posouzení návrhu stroje z tepelného hlediska. V praxi se však postupně začalo ukazovat, že tato kritéria nejsou postačující pro vývoj nových efektivnějších strojů. Vznikla potřeba zabývat se problematikou oteplení a chlazení strojů podrobněji, aby nedocházelo k jejich trvalému poškození, špatné funkčnosti a ke zkrácení životnosti. K těmto stavům může dojít především v důsledku překročení limitní teploty části stroje nebo zvýšení tepelného toku ve stroji nad přípustnou mez. Jestliže například u olejového transformátoru dojde k překročení přípustné limitní teploty chladicího oleje, začne olej vřít a vznikají v něm bublinky. V důsledku toho olej ztratí dobré elektrické izolační vlastnosti a vzniká velké nebezpečí zkratu transformátoru. Pokud ke zkratu dojde, nelze již prakticky transformátor opravit. Jak již bylo uvedeno, k závažnému poškození stroje může také dojít v důsledku zvýšeného tepelného toku v jeho částech. Pokud například rozdíl teplot mezi vodičem vinutí a jeho izolací překročí hodnotu 30°C na 1 mm, dochází k velkému tepelnému toku, izolace se kroutí a roztahuje, dochází k jejímu rychlejšímu opotřebení. Pro izolaci vinutí je tedy důležitá nejen její teplota (aby nezačala hořet), ale i existující tepelný tok.

Řešení problematiky oteplení a sdílení tepla je v současnosti nedílnou součástí každého návrhu elektrického stroje. Praktickými příklady nutnosti řešení tepelné problematiky jsou transformátory používané v elektrárnách. Například v jaderné elektrárně Temelín vzniká v každém bloku výkon 1000 MW. K jednomu bloku jsou připojeny tři transformátory a vzhledem k jejich účinnosti 97% je z nich nutné odvádět přibližně teplo 33 MJ za sekundu.

Na obrázku 1 a 2 jsou znázorněny příklady elektrických strojů, u nichž je nezbytné řešit problematiku jejich oteplení a chlazení.

V této práci je pozornost zaměřena na numerické řešení matematických modelů tepelných dějů v elektrických strojích, jako jednoho z nejefektivnějších přístupů řešení tepelných dějů. Práce je rozčleněna na čtyři části.

2. kapitola obsahuje popis formulace matematických modelů, přepis některých teplotních vazeb a závislostí vznikajících při zatížení elektrických strojů. Přitom jsou uvažovány

dynamické tepelné děje (nestacionární děje) i ustálené tepelné děje (stacionární děje), které lze považovat za speciální případ dějů dynamických.

3. kapitola obsahuje popis některých matematických nástrojů, které lze úspěšně použít při numerickém řešení modelů šíření tepla v elektrických strojích. Ustálené děje jsou často řešeny jako úlohy dvourozměrné (některé vícerozměrné úlohy lze na takovou úlohu převést) a bývají často popsány eliptickými parciálními diferenciálními rovnicemi s příslušnými okrajovými podmínkami. V této kapitole je popsána slabá formulace matematického modelu, je ukázána existence a jednoznačnost řešení při Newtonově okrajové podmínce.



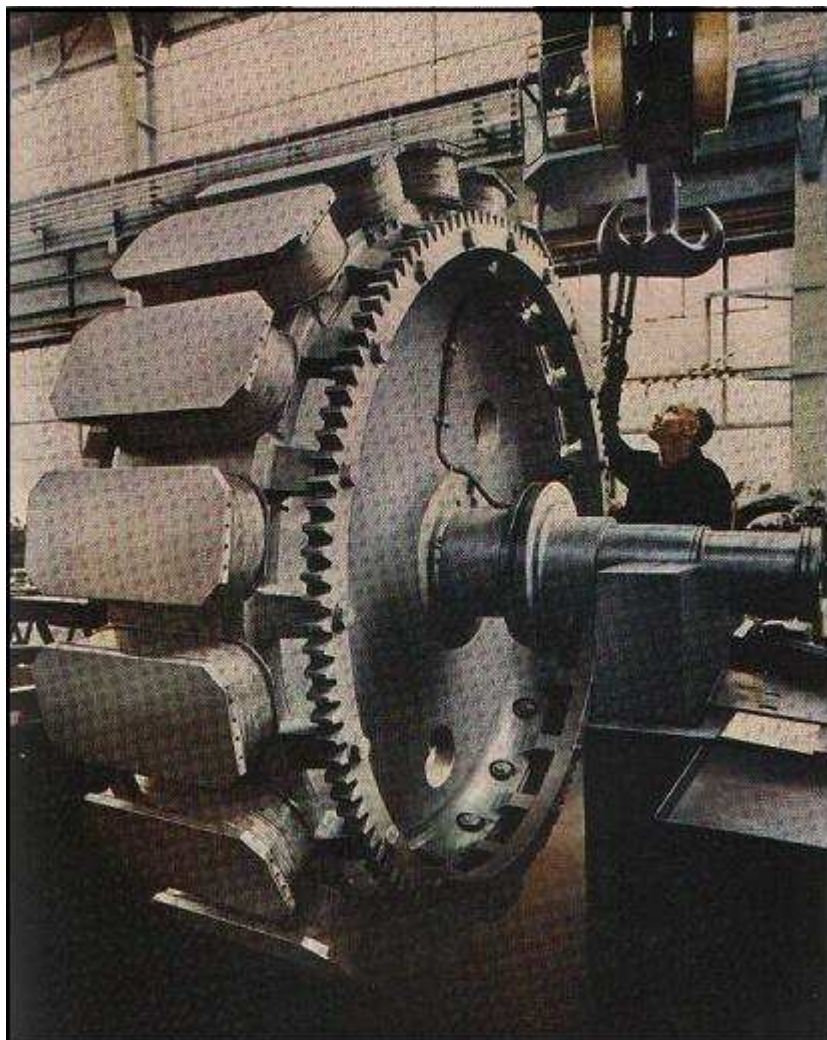
Obrázek 1 – Blokový transformátor ŠKODA o výkonu 570/3 MVA pro elektrárnu Mělník

Úloha se převádí na hledání minima příslušného energetického funkcionálu užitím metody konečných prvků, v současnosti jedné z nejefektivnějších metod pro řešení ustálených tepelných stavů elektrických strojů. Dále je v kapitole popsána metoda tepelných bilancí (box

method) a její užití při ustálených tepelných dějích. Pozornost je zaměřena na řešení eliptické parciální diferenciální rovnice 2. řádu s Newtonovou okrajovou podmínkou.

Dynamické děje ve strojích jsou závislé na čase a bývají řešeny pomocí náhradní tepelné sítě, kterou lze obvykle popsat soustavou obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu (obecně nelineární) s počátečními podmínkami. V práci je uveden možný postup praktického numerického řešení takových soustav.

4. kapitola obsahuje řešení praktických úloh výpočtu oteplení komponent transformátorů při stacionárním zatížení. Je proveden výpočet oteplení hliníkového stínění a magnetického stínění transformátoru. Úloha je popsána eliptickou parciální diferenciální rovnicí 2. řádu s Newtonovou okrajovou podmínkou.



Obrázek 2 – Rotor trojfázového synchronního motoru typu 1EBOE 280-65-20 Z

Numerické výpočty byly provedeny metodou tepelných bilancí. Jsou prezentovány výsledky výpočtů.

V závěru této kapitoly je vyšetřována nelineární úloha ustáleného vedení tepla, kdy koeficienty tepelných vodivostí závisí na teplotě. Je ukázána zajímavá vlastnost, že střední hodnota oteplení na hranici řešené oblasti nezávisí na typu nelinearity koeficientů.

V 5. kapitole jsou řešeny dynamické tepelné děje v olejových transformátorech pomocí náhradní tepelné sítě, která je popsána soustavou obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu s počátečními podmínkami v čase t_0 . Úloha byla řešena diskretizací časové derivace a rekurentním výpočtem oteplení jednotlivých uzlů náhradní tepelné sítě při daném časovém kroku. V závěru kapitoly jsou pak prezentovány zejména numerické výsledky výpočtů.

Při zpracování této práce byla použita pouze literatura uvedená na str. 97 – 101.

2. Matematické modely vedení tepla

Elektrické stroje lze rozdělit z hlediska jejich konstrukce na stroje točivé a netočivé. Mezi točivé stroje patří motory (mění energii elektrickou na mechanickou), generátory (převádí energii mechanickou na elektrickou) a rotační měniče (umožňují měnit elektrickou energii jednoho druhu na elektrickou energii jiného druhu, např. stejnosměrnou energii na střídavou). Netočivé elektrické stroje jsou reprezentovány měniči (mění frekvenci), především transformátory (základní funkcí je přeměna napětí nebo intenzity střídavého elektrického proudu pro danou frekvenci). Každý elektrický stroj se skládá z magnetického obvodu a vinutí.

V elektrickém stroji při přeměně elektrické energie na mechanickou nebo při obrácené přeměně, při přeměně napětí nebo intenzity střídavého proudu vznikají energetické ztráty, které se v konečném efektu mění ve ztrátové teplo. Tepelná kapacita C homogenního tělesa představuje tepelnou energii, kterou lze v tomto tělese akumulovat při zvýšení jeho teploty o 1 K. Pro elementární tepelnou energii dW , která je akumulována v tělese při oteplení dT vzhledem k okolí za dobu dt při rovnoměrném vzniku ztrát ΔP platí vztah

$$(2.1) \quad dW = \Delta P dt = C dT = c_p \varphi V dT,$$

kde c_p značí měrnou tepelnou kapacitu tělesa, φ měrnou hustotu tělesa a V objem tělesa. Pokud je těleso dokonale tepelně izolované (tj. z jeho povrchu nejsou odváděny ztráty) a vznikají v něm konstantní ztráty ΔP , jeho teplota stoupá lineárně v závislosti na čase a platí

$$(2.2) \quad C dT = \Delta P dt$$

a

$$(2.3) \quad T = T_0 + \frac{\Delta P}{C} t,$$

kde T_0 značí teplotu tělesa v čase $t = 0$. Za uvedených předpokladů veškeré vznikající teplo v tělese pouze zvyšuje jeho teplotu (tzv. adiabatický ohřev tělesa). Šíření tepla vedením je způsobeno rozdílnou teplotou jednotlivých částí stroje. Odvádí-li se teplo vzniklé uvnitř homogenní části stroje, platí následující *energetická bilance*: teplo přiváděné elektricky do tělesa (ztráty, které v něm vznikají) se rovná součtu tepla homogenní části stroje a tepla odváděného z jeho povrchu. V tomto případě platí vztah

$$(2.4) \quad \Delta P dt = \alpha S T dt + c_p \varphi V dT ,$$

kde α značí součinitele přestupu tepla a S plochu, kterou prochází tepelný tok.

Při provozu elektrických strojů dochází k *akumulaci tepelné energie*, šíření tepelné energie nazýváme *tepelným tokem*. Přitom znalost podrobného rozložení teplot a teplotních ztrát v elektrickém stroji je velmi důležitá. Jakmile totiž teplota části stroje přesáhne normou stanovenou teplotu, může dojít k poškození stroje. Nebezpečné teploty v elektrických strojích jsou vzhledem k přítomnosti izolačních materiálů uvažovány obvykle v rozmezí 60 až 180 °C. Provozní teplota elektrického stroje a jednotlivých jeho součástí je důležitým faktorem jeho správné funkčnosti a délky životnosti. Správná funkčnost mnohých elektrických strojů je zajištěna za podmínek dodržení jeho provozní teploty a stanovené teploty okolí. Pro většinu komponent stroje je obvykle stanovena nejvyšší provozní teplota, často se stanovuje i nejnižší provozní teplota částí stroje. Při překročení limitní teploty již není zajištěna správná funkčnost stroje a může dokonce dojít k jeho trvalému poškození. Z uvedených důvodů je znalost detailního rozložení teploty velmi důležitá například při návrzích elektrických strojů. V některých případech je také účelné znát, k jakým tepelným ztrátám dochází při jednotlivých úrovních zatížení elektrického stroje. Pro správnou funkčnost a životnost stroje je velmi důležitá úroveň oteplení vinutí elektrického stroje při provozu z důvodu zajištění potřebné délky životnosti izolace vinutí. Vztah mezi dobou životnosti izolace (tj. rychlostí stárnutí izolace způsobené teplotou) a teplotou vinutí (za předpokladu ustálené teploty) lze vyjádřit pomocí tzv. Bűsingovy formule

$$(2.5) \quad L = c_1 \exp \left(c_2 \frac{1}{T} \right) ,$$

kde L je doba životnosti izolace, c_1 a c_2 jsou materiálové konstanty a T je termodynamická teplota udaná v K.

Vlastní proces stárnutí izolace vinutí je poměrně složitý jev. Ve své podstatě se jedná o termooxidační proces, který je urychlován především mechanickým namáháním v důsledku tepelných dilatací při ohřevu, náhlých namáháních při zkratu a vibrací při provozu. Přitom životnost izolace nejvíce ovlivňují nejteplejší místa ve stroji. Problematikou stárnutí izolace vinutí se podrobně zabývá poměrně nová vědní disciplína – technogerontologie. Rozdělení jednotlivých druhů izolačních materiálů do tepelných tříd bývá stanoveno v příslušných normách. Pro každou tepelnou třídu je určeno mezní oteplení, které nesmí být překročeno, aby nedošlo ke zkrácení životnosti stroje.

Požadavkům na nepřekročení teplotních limitů jednotlivých komponent elektrického stroje lze vyhovět na základě omezení teploty prostředí, v němž elektrický stroj pracuje a zamezením oteplení částí stroje nad přípustnou mez. Ztrátové teplo se odvádí do okolních komponent stroje nebo do chladicího média prostřednictvím *vedení (kondukce)*, *proudění (konvekce)* a *sálání (radiace)*.

Sdílení tepla vedením se uskutečňuje v pevných látkách. Příčinou je rozdíl teplot mezi místy přenosu. Trojrozměrné proudění tepla v homogenním a izotropním tělese v ustáleném stavu je popsáno Laplaceovou rovnicí

$$(2.6) \quad \Delta T = 0 .$$

Pokud pevná látka obsahuje navíc vnitřní zdroj tepla rovnoměrně rozložený v celém svém objemu, lze v tomto případě proudění tepla vyjádřit pomocí Poissonovy rovnice

$$(2.7) \quad \Delta T = \frac{q}{\lambda} ,$$

kde q je hustota tepelného ztrátového výkonu ($q = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V}$), P značí tepelné ztráty, V objem tělesa a λ je součinitel tepelné vodivosti látky.

Případ trojrozměrného vedení tepla bývá často redukován na problém dvourozměrný (například v důsledku skutečnosti, že uvažovaná komponenta elektrického stroje je rotačně symetrická), případně na jednorozměrný problém.

Ke sdílení tepla prouděním dochází na teplosměnných plochách, kde se teplo odvádí do chladicího média, které proudí podél teplosměnné plochy. Jedná se tedy o výměnu tepla mezi pevným tělesem a tekutinou nebo plynem při jejich přímém styku. Intenzita sdílení tepla je přitom charakterizována součinitelem přestupu tepla α . Množství tepla P přecházející za jednotku času z chladicí plochy S do proudící média při teplotním rozdílu ΔT mezi teplosměnnou plochou a chladičem je dáno vztahem

$$(2.8) \quad P = \alpha S \Delta T .$$

V elektrických strojích neprobíhá obvykle odvod tepla jako samostatný přenos určitého typu. Nejčastěji se uplatňuje kombinace sdílení tepla vedením a prouděním do pohybujícího se oleje nebo jiné kapaliny, vzduchu nebo jiného plynu.

Vzhledem k relativně nízkým teplotám vyskytujícím se v elektrických strojích nemá sdílení tepla sáláním podstatný vliv na ochlazování elektrického stroje.

Metody používané k odvodu ztrátového tepla stroje z míst jejich vzniku do okolí (případně u uzavřeného systému chlazení pomocí výměníku z jednoho ventilačního nebo hydraulického okruhu do druhého, kterým se následně ztrátové teplo odvádí ven ze stroje) souhrnně nazýváme *chlazením elektrických strojů*. Při chlazení je vznikající ztrátové teplo ve stroji odváděno pomocí chladiva. Nejčastějšími chladivy jsou vzduch, voda, olej, vodík, dusík, kysličník uhličitý. Elektrické stroje mohou být chlazeny *přirozeně* (tj. bez chladicího zařízení). Přirozené chlazení se zpravidla užívá u strojů s výkonem do 1 kW a v případě otevřených strojů s poměrně malým využitím aktivních materiálů. Elektrické stroje s chladicím zařízením rozdělujeme na *stroje s vlastní ventilací* (mají ventilační systém, kde se aktivní části stroje ochlazují proudem chladiva uváděného do pohybu ventilátorem) a *stroje s nezávislou ventilací* (chladicí médium je uváděno do pohybu zvláštním zařízením – ventilátorem, čerpadlem, které je poháněno vlastním motorem, obvykle bývá tento motor připevněn k chlazenému stroji). Jedná-li se o kapalinové chlazení, pak místo pojmu ventilace se obvykle užívá název hydraulický systém.

Chlazení elektrických strojů se stává jedním z významných prvků konkurenceschopnosti stroje s ohledem na jeho energetickou spotřebu. Chlazení stroje je také spojeno s doprovodným hlukem aerodynamického původu a často i tato skutečnost může být pro zákazníka významná.

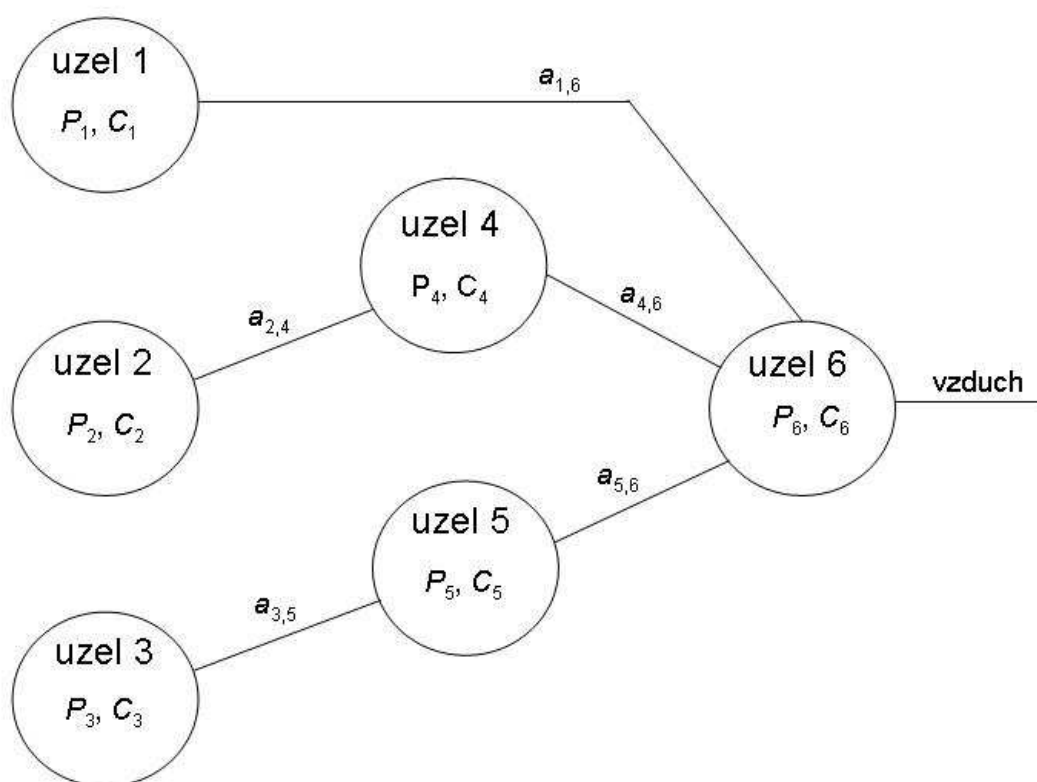
Chlazení a ventilace elektrických strojů je samostatná disciplína vývoje elektrických strojů. Složitost uvedené disciplíny je dána skutečností, že elektrický stroj by měl splňovat kompromis požadavků na vlastnosti elektromagnetické (z hlediska činnosti stroje jsou rozhodující), tepelně ventilační, mechanické a hlukové. Tepelně ventilační návrh stroje je v současnosti nedílnou částí celkového konstrukčního návrhu stroje, poněvadž podstatně ovlivňuje dimenzování aktivních i konstrukčních materiálů. Návrh optimálního ventilačního systému stroje lze provést pouze na základě celkového přehledu o chlazení stroje za různých podmínek chlazení v etapě elektromagnetického návrhu.

Pro jednotlivé typy elektrických strojů jsou platné konkrétní normy řešící problematiku oteplení strojů. Například pro výkonové transformátory je v ČR závazná norma [ČSN/EN 60076-2]. V uvedené normě je řešena problematika přípustného oteplení při trvalém jmenovitém výkonu a v průběhu zatěžovacího cyklu, jsou v ní uváděny postupy určení odhadu oteplení, určení střední teploty vinutí apod.

2. 1. Sestavení matematického modelu

Jak již bylo uvedeno v předchozí kapitole, ustálené (stacionární) tepelné děje jsou často řešeny jako dvourozměrná úloha (nebo problém lze na takovou úlohu převést) a bývají popsány eliptickými parciálními diferenciálními rovnicemi s příslušnými okrajovými podmínkami. Ustálené tepelné děje jsou nezávislé na čase a lze je považovat za speciální případ dynamických (nestacionárních) tepelných dějů. Jednou z důležitých vlastností řešení eliptických rovnic je jejich hladkost. To je v souladu s tím, že eliptickými rovnicemi se popisují ustálené jevy. Je přirozené, že všechny původní nerovnosti se při ustáleném stavu uhladí. Pokud je zapotřebí sestavit matematický model pro dynamický tepelný děj, je sestavení odpovídajícího matematického modelu obtížnější. Řešení složitého teplotního pole s plynule se měnícími parametry v závislosti na čase může být poměrně složité. Sdílení tepla se obvykle uplatňuje kombinací vedení tepla a prouděním do pohybujícího se vzduchu, plynu nebo kapaliny. Konkrétní aplikace vedou obvykle k trojrozměrnému vedení tepla. Avšak analytické řešení takových případů není obecně možné. Pokud bychom chtěli řešit tepelné pole pomocí přesného matematického modelu, vyvstává následující technický problém (i pokud bude řešení matematicky schůdné). V takovém případě by bylo zapotřebí poměrně mnoho vstupních údajů (například velikost a rozložení tepelných ztrát, lokální součinitelů přestupu tepla - obecně závislé na teplotě, hodnoty vstupních parametrů v závislosti na teplotě). V technické praxi však uvedené údaje v potřebné kvalitě nejsou prakticky nikdy k dispozici. Proto se osvědčil praktický přístup sestavení *náhradní tepelné sítě* se soustřednými parametry. Smyslem sestavení náhradní tepelné sítě pro konkrétní úlohu dynamických tepelných dějů je nalezení středního oteplení jednotlivých částí stroje, stanovení ekvivalentních tepelných odporů a míst působení soustředěných zdrojů ztrát. Poněvadž neznáme tepelné pole stroje, vycházíme při sestavování sítě z intuitivní představy o směru dílčích tepelných toků a o těžších výsledných ztrát v jednotlivých částech tělesa. Při praktickém sestavování tepelné sítě je zapotřebí volit výchozí předpoklady velmi opatrně a provedené výpočty srovnávat s výsledky experimentů. Elektrický stroj je reprezentován několika uzly se soustřednými tepelnými ztrátami, tepelnými odpory, tepelnými kapacitami a tepelnými vodivostmi mezi těmito částmi stroje. Pomocí uvedeného přístupu lze určit střední oteplení jednotlivých částí stroje. Je zapotřebí si uvědomit, že touto metodou lze zjistit pouze přibližné střední (nikoliv maximální nebo lokální) oteplení trojrozměrné části elektrického stroje, neboť vychází pouze z průměrných hodnot vstupních údajů. Podrobná analýza tepelných poměrů ve stroji je při použití této metody nedostupná.

Tepelná síť bývá často popsána soustavou lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s počátečními podmínkami, kterou umíme numericky řešet. Metoda náhradní tepelné sítě představuje kompromis mezi podrobnými výpočty užívanými při stacionárním zatěžování a zjednodušenými postupy stanovenými normami. Na obrázku 3 je znázorněna schematicky náhradní tepelná síť elektrického stroje. Z tepelného hlediska je elektrický stroj reprezentován náhradní tepelnou sítí se šesti uzly, pro každý uzel je udána jeho tepelná kapacita C a tepelné ztráty P . Pro dvojice uzlů, mezi nimiž dochází k výměně tepla jsou stanoveny tepelné vodivosti a .



Obrázek 3 – Schéma náhradní tepelné sítě elektrického stroje se šesti uzly

2. 2. Matematický model a reálný tepelný problém vedení tepla

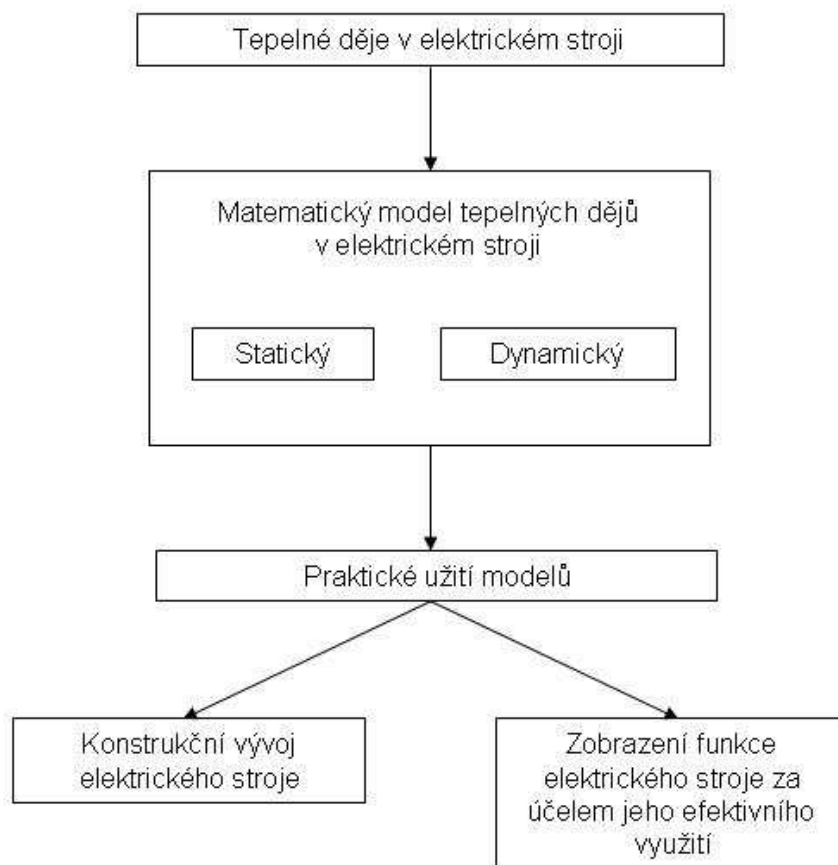
Efektivní přístup zkoumání problematiky tepelného toku v elektrických strojích spočívá v popisu dané problematiky pomocí matematických modelů. Užití matematického modelu k řešení problematiky tepelného toku v elektrickém stroji je výhodné z několika důvodů. Předně lze zkoumat problém i pokud odpovídající stroj není k dispozici. Vlastní konstrukce různých variant elektrického stroje a měření teplot jeho částí při provozu je finančně i časově náročné. Naproti tomu zkoumání příslušného matematického modelu umožňuje uvažovat

různé varianty stroje a nalezení optimalizovaného konstrukčního řešení elektrického stroje z hlediska šíření tepla, testovat jeho parametry výrazně rychleji a především s podstatně nižšími finančními náklady. Model by měl splňovat *požadavek variantnosti*, tj. aby na základě změny vstupních parametrů bylo možné dosáhnout rozdílných výstupních hodnot. Současně lze stanovit prostřednictvím matematického modelu požadavky na elektrický stroj, které zajistí požadovanou funkčnost stroje a tak urychlí jeho vývoj.

Při praktickém zkoumání však každý matematický model představuje idealizaci a zjednodušení skutečného teplotního problému. Zjednodušení teplotního problému a jeho převedení na matematický model ale umožňuje problém řešit. Je však zapotřebí provést kvalifikovaný odhad, které vlivy je potřebné do matematického modelu zahrnout a které lze zanedbat. Tepelné toky musí v matematickém modelu směřovat všemi použitelnými cestami ze zdrojů do okolí. S tím souvisí i problém chlazení příslušných částí stroje. Jelikož provozní teplota jednotlivých částí stroje je limitována, bývá často důležitou veličinou modelu zatížitelnost elektrickým výkonem. Příliš detailní popis problému může vést k obtížnému sestavení matematického modelu, pro který často nelze nalézt řešení. Vždy je však zapotřebí rozlišovat mezi skutečnou teplotní problematikou stroje a příslušným matematickým modelem. Na obrázku 4 je znázorněno schéma nejčastěji užívaných modelů z pohledu jejich využití.

Při sestavování návrhu matematického modelu je zapotřebí zachovat rovnováhu mezi složitostí matematického modelu a úrovní znalostí jednotlivých fyzikálních parametrů a konstant, které jsou vstupními údaji pro výpočet. Úroveň znalostí o těchto fyzikálních parametrech a konstantách zásadně podmiňuje přesnost tepelných výpočtů. Přitom potřebné informace o fyzikálních vlastnostech a parametrech vstupních údajů lze získat jednou z následujících možností:

- měřením na skutečných (již vyrobených) elektrických strojích,
- měřením na modelech (tento přístup se používá, není-li možné provést měření na skutečném stroji – z důvodů technických, časových nebo ekonomických, modely přitom mohou být celkové nebo dílčí; měření a zpracování výsledků získaných na modelech bývá obvykle časově velmi náročné a vyžaduje kvalifikované technické pracovníky),
- užitím technických norem a tabulek,
- měřením vlastností látek a materiálů, které mají být použity při konstrukci stroje.



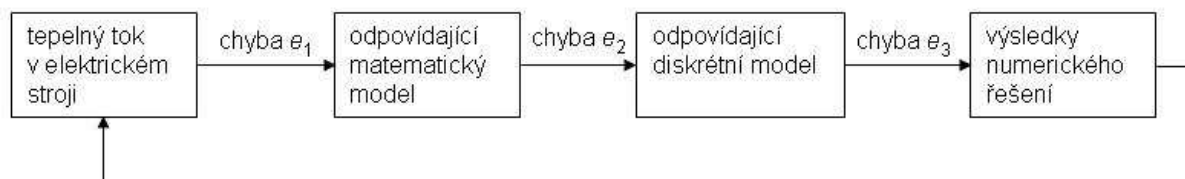
Obrázek 4 – Nejčastěji užívané matematické modely

Tepelné matematické modely umožňují posoudit zatížitelnost stroje. Vyšetřování tepelných poměrů elektrických strojů při různých přechodných tepelných stavech náleží k velmi složitým a obtížným technickým úlohám. Přitom tyto stavy lze rozdělit na děje pomalé (oteplování a ochlazování stroje při stálých podmínkách zatížení i chlazení) a rychlé (krátkodobé – jako je rozběh a doběh stroje, přepínání vinutí, případně havárie atd.). Tyto stavy se mohou střídát, a to pravidelně (opakované cykly) nebo zcela náhodně. Přitom v některých případech (s delšími časovými přestávkami klidu nebo odlehčení) nebývá stroj po stránce tepelné plně využit, zatímco v případech s častými rozběhy a elektrickým brzděním dochází ke zvýšenému tepelnému namáhání.

Cílem matematického modelu je, aby přiměřeně popisoval teplotní problém. Protože model nepopisuje reálnou teplotní problematiku zcela přesně, dopouštíme se při sestavení odpovídajícího modelu jisté chyby e_1 .

Při zkoumání modelu je zapotřebí vyšetřit existenci řešení a jeho jednoznačnost, případně násobnost řešení a výběr takového řešení, které vyhovuje původnímu teplotnímu problému.

Jelikož často i při existenci řešení matematického modelu nejsme schopni toto řešení analyticky vyjádřit, lze na základě diskretizace spojitého problému převést úlohu na konečně rozměrný problém řešitelný pomocí numerických metod a výpočetní techniky. Při diskretizaci problému se dopouštíme další chyby e_2 . Při vlastní realizaci navržené numerické metody k získání řešení teplotního matematického modelu využitím výpočetní techniky vzniká chyba e_3 vlivem zaokrouhlovacích chyb (viz obrázek 5).



Obrázek 5 – Postup zpracování tepelného problému elektrického stroje

Při numerickém řešení matematického problému je žádoucí současně s určením přibližného řešení stanovit odhad chyby e_2 , které se dopouštíme při diskretizaci úlohy zadané matematickým modelem.

3. Numerické řešení modelů vedení tepla

V této kapitole se zaměříme na numerické řešení modelů sdílení tepla v jednotlivých částech elektrických strojů při ustálených i dynamických dějích. Popíšeme postup numerického řešení eliptické parciální diferenciální rovnice 2. řádu na ohraničené oblasti $\Omega \subset R^2$ s lipschitzovsky spojitou hranicí a s Newtonovou okrajovou podmínkou. Uvedená rovnice popisuje ustálený stav sdílení tepla v elektrickém stroji.

Současně je v této kapitole uveden vhodný postup numerického řešení soustavy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu s počátečními podmínkami. Uvedená soustava popisuje tepelné děje ve stroji v případě nestacionárního zatížení při zjednodušení tepelných dějů ve stroji užitím náhradní tepelné sítě. Soustava může být užita i pro případ stacionárního zatížení jako speciálního případu zatížení nestacionárního.

Konkrétní realizace odvozených postupů je prezentována na případu výpočtu oteplení a tepelných ztrát ve stínění transformátoru při stacionárním zatížení ve 4. kapitole a při výpočtu teploty transformátoru při nestacionárním zatížení v 5. kapitole.

Než přistoupíme k vlastní formulaci matematických modelů tepelných dějů, uveďme několik základních pojmů a tvrzení.

3. 1. Základní pojmy

Definice 3.1

Hranici omezené oblasti $\Omega \subset R^d$ pro $d > 1$ nazýváme *lipschitzovsky spojitou*, jestliže pro každé $z \in \partial\Omega$ existuje takové okolí $U(z)$, že množina $U \cap \Omega$ může být vyjádřena v nějakém kartézském souřadnicovém systému $(x_1, \dots, x_d)$ nerovností $x_d < F(x_1, \dots, x_{d-1})$, kde F je lipschitzovsky spojitá funkce.

Poznámka 3. 1.

Vnější normála k lipschitzovsky spojitě hranici $\partial\Omega$ oblasti $\Omega \subset R^d$ existuje skoro všude (viz [Nečas, 1967]).

Definice 3. 2.

Nechť funkce $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ je reálná nebo komplexní funkce. Označme multiindex $m = (m_1, \dots, m_d)$ a $|m| = m_1 + \dots + m_d$, kde $m_1, \dots, m_d$ jsou přirozená čísla. Pak pro funkci

v definujeme m -tou klasickou derivaci předpisem

$$(3.1) \quad D^m v = \frac{\partial^{|m|} v}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_d^{m_d}}.$$

Definice 3. 3.

Funkce $v \in L^2(\Omega)$ má m -tou zobecněnou derivaci $v \in L^2(\Omega)$, pokud existuje $z \in L^2(\Omega)$ takové, že

$$(3.2) \quad \int_{\Omega} z w \, dx = (-1)^{|m|} \int_{\Omega} v D^{(m)} w \, dx$$

pro každé $w \in C_0^\infty$, kde C_0^∞ značí prostor nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem (tj. $C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } v \subset \Omega\}$, kde $\text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega \mid v(x) \neq 0\}}$). Funkce z se pak nazývá m -tá zobecněná derivace funkce v a pokládáme $D^m v = z$.

Poznámka 3. 2

Každá klasická m -tá derivace funkce v daná vztahem (3. 1) je současně i zobecněnou m -tou derivací danou vztahem (3. 2).

Definice 3. 4.

Sobolův prostor $H^k(\Omega)$ je pro $k = 0, 1, \dots$ definován předpisem

$$(3.3) \quad H^k(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid D^m v \in L^2(\Omega), |m| \leq k\}.$$

Poznámka 3. 3.

Lze ověřit, že Sobolův prostor $H^k(\Omega)$ se skalárním součinem definovaným předpisem

$$(3.4) \quad (v, w)_{k, \Omega} = \sum_{|m| \leq k} \int_{\Omega} D^m v (D^m w)^c \, dx,$$

kde $v, w \in H^k(\Omega)$ a symbol $(\cdot)^c$ značí komplexně sdružené číslo, je Hilbertův prostor.

Definice 3. 5.

Indukovaná norma $\|v\|_{k,\Omega}$ a seminorma $|v|_{k,\Omega}$ jsou definovány vztahy

$$(3.5) \quad \|v\|_{k,\Omega} = \left(\sum_{|m| \leq k} \int_{\Omega} |D^m v|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$(3.6) \quad |v|_{k,\Omega} = \left(\sum_{|m|=k} \int_{\Omega} |D^m v|^2 dx \right)^{1/2},$$

kde $v \in H^k(\Omega)$.

Definice 3. 6.

Nechť V je lineární vektorový prostor. Skalární zobrazení $a(\cdot, \cdot)$ definované na $V \times V$ se nazývá *sesquilineární forma*, jestliže pro každé pevné $v \in V$ jsou zobrazení $a(\cdot, v)$ a $(a(v, \cdot))^C$ lineární. Sesquilineární forma $a(\cdot, \cdot)$ se nazývá *spojitá*, jestliže existuje konstanta $c_1 > 0$ taková, že

$$(3.7) \quad |a(v, w)| \leq c \|v\|_V \|w\|_V$$

pro každé $v, w \in V$. Přitom indukovaná norma je definována vztahem $\|v\|_V = \sqrt{(v, v)_V}$, kde $v \in V$. Je-li navíc $a(\cdot, \cdot)$ reálné zobrazení, pak $a(\cdot, \cdot)$ se nazývá *bilineární forma*.

Sesquilineární forma $a(\cdot, \cdot)$ se nazývá *hermitovská*, jestliže platí

$$(3.8) \quad a(v, w) = (a(w, v))^C$$

pro každé $v, w \in V$.

Definice 3. 7.

Množina $\partial\Omega_0 \subset \partial\Omega$ se nazývá *relativně otevřená v $\partial\Omega$* , jestliže pro každé $x \in \partial\Omega_0$ existuje koule $B \subset \mathbb{R}^d$ obsahující x taková, že $B \cap \partial\Omega \subset \partial\Omega_0$.

Věta 3. 1. (věta o stopách)

Nechť Ω je ohraničená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí. Pak existuje konstanta $c > 0$ taková, že platí

$$(3.9) \quad \|v\|_{0, \partial\Omega} \leq c \|v\|_{1, \Omega}$$

pro každé $v \in H^1(\Omega)$.

Důkaz věty je uveden například v [Nečas, 1967].

Věta 3. 2. (Fridrichsova nerovnost)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je ohraničená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí a nechť $v \in H^1(\Omega)$. Pak existuje konstanta $c > 0$ taková, že platí

$$(3.10) \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 dx + \int_{\partial\Omega_0} v^2 ds \right)^{1/2},$$

kde $\partial\Omega_0$ je relativně otevřená podmnožina hranice $\partial\Omega$,

$$(3.11) \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 dx + \int_B v^2 dx \right)^{1/2},$$

kde $B \subset \Omega$ je koule.

Důkaz lze nalézt v [Nečas, 1967].

Věta 3. 3. (Greenova věta)

Nechť Ω je ohraničená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, d\}$ platí

$$(3.12) \quad \int_{\Omega} w \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} n_i v w ds$$

pro každé $v, w \in H^1(\Omega)$, kde n_i jsou složky jednotkové vnější normály $n = (n_1, \dots, n_d)^T$ k hranici $\partial\Omega$.

Důkaz je uveden v [Rektorys, 1974]. Existence (skoro všude) vnější jednotkové normály k hranici oblasti s lipschitzovsky spojitou hranicí je dokázána v [Nečas].

Lemma 3. 1. (Laxovo – Milgramovo)

Nechť V je Hilbertův prostor a nechť $a(\cdot, \cdot)$ je spojitá sesquilineární forma, k níž existuje konstanta $c > 0$ taková, že platí

$$(3.13) \quad |a(v, v)| \geq c \|v\|_V^2$$

pro každé $v \in V$ (podmínka V - eliptičnosti). Pak pro každý lineární spojitý funkcionář F definovaný na V existuje právě jeden prvek $u \in V$ takový, že platí

$$(3.14) \quad a(v, u) = F(v)$$

pro každé $v \in V$.

Důkaz je uveden v [Rektorys, 1974].

Definice 3. 8.

Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu 3.1. Pak kvadratický funkcionál definovaný vztahem

$$(3.15) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \operatorname{Re} (F(v))$$

pro každé $v \in V$ nazýváme *energetický funkcionál*.

Věta 3. 4.

Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu 3. 1., nechť navíc je sesquilineární forma $a(\cdot, \cdot)$ hermitovská a $a(v, v) \geq 0$ pro všechna $v \in V$. Pak úloha (3. 14) je ekvivalentní úloze nalézt $u \in V$ takové, že platí

$$(3. 16) \quad J(u) = \inf_{v \in V} J(v),$$

kde funkcionál J je definován vztahem (3. 15).

Důkaz.

Funkcionál J definovaný vztahem (3. 15) nabývá pouze reálných hodnot, neboť $a(\cdot, \cdot)$ je hermitovská sesquilineární forma. Předpokládejme, že u je řešením (3. 14). Pak z (3. 15), (3. 8) a ze sesquilinearity $a(\cdot, \cdot)$ plyne

$$\begin{aligned} 2J(v) &= a(v, v) - 2\operatorname{Re}(F(v)) = a(v, v) - F(v) - (F(v))^C = a(v, v) - a(v, u) - (a(v, u))^C = \\ &= a(v, v) - a(v, u) - a(u, v) = a(v, v - u) - a(u, v) = a(v - u, v - u) - a(u, u) \end{aligned}$$

pro každé $v \in V$. Z podmínky (3.13) vyplývá, že J nabývá minima pro $v = u$.

Nyní předpokládejme naopak, že funkcionál J definovaný vztahem (3. 15) nabývá svého minima v bodě $u \in V$ a nechť $v \in V$ je libovolné. Definujeme reálnou funkci $j(t) = J(u + tv)$. Pak pro $t \neq 0$ platí

$$\begin{aligned} \frac{j(t) - j(0)}{t} &= \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \frac{a(u + tv, u + tv) - a(u, u)}{2t} - \frac{\operatorname{Re}(F(u + tv)) - \operatorname{Re}(F(u))}{t} = \\ &= \frac{a(u, u) + ta(u, v) + ta(v, u) + t^2a(v, v) - a(u, u)}{2t} - \frac{\operatorname{Re}(F(u + tv)) - \operatorname{Re}(F(u))}{t}. \end{aligned}$$

Limitním přechodem pro $t \rightarrow 0$ a v důsledku minima funkcionálu J v bodě u obdržíme

$$\begin{aligned} 2j'(0) &= a(u, v) + a(v, u) + ta(v, v) - 2\left[\frac{\operatorname{Re}(F(u)) + \operatorname{Re}(F(tv)) - \operatorname{Re}(F(u))}{t}\right] = \\ &= a(u, v) + a(v, u) + ta(v, v) - 2\operatorname{Re}(F(v)) = a(v, u) - F(v) + (a(v, u) - F(v))^C = 0. \end{aligned}$$

Pak nutně musí platit $\operatorname{Re}(a(v, u)) = \operatorname{Re}(F(v))$ pro každé $v \in V$. Pro libovolné $w \in V$ položme $v = iw$. Pak $\operatorname{Im}(a(w, u)) = -\operatorname{Re}(ia(w, v)) = -\operatorname{Re}(iF(w)) = \operatorname{Im}(F(w))$ pro každé $w \in V$ a tedy nutně platí (3.13).

Úlohy (3. 14) a (3. 16) jsou tedy ekvivalentní.

3. 2. Numerické řešení ustálených tepelných dějů

V tomto odstavci se zaměříme na numerické řešení úlohy popisující ustálené zatížení elektrického stroje. Uvažujme klasickou formulaci problému popsanou eliptickou parciální diferenciální rovnicí 2. řádu

$$(3.17) \quad -\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + cu = f$$

na oblasti $\Omega \subset R^d$ s Newtonovou okrajovou podmínkou

$$(3.18) \quad \alpha u + \frac{\partial u}{\partial n_A} = g$$

na hranici $\partial\Omega$.

Předpokládáme, že hledaná funkce $u \in C^2(\overline{\Omega})$, funkce $c, f \in C(\overline{\Omega})$, pro prvky matice

$$(3.19) \quad \mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^d$$

platí $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ a $a_{ij} = a_{ji}$ pro $i, j = 1, \dots, d$.

Dále předpokládáme, že platí

$$(3.20) \quad c(x) \geq 0 \text{ pro } x \in \overline{\Omega}$$

a že existuje konstanta $M > 0$ taková, že

$$(3.21) \quad \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq M \sum_{i=1}^d \xi_i^2$$

pro každé $(\xi_1, \dots, \xi_d) \in R^d$, $x \in \overline{\Omega}$.

O hranici $\partial\Omega$ předpokládáme, že je lipschitzovsky spojitá. V okrajové podmínce (3.18) předpokládáme, že $\alpha = \alpha(s) \geq 0$ na hranici $\partial\Omega$ a $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega)$. Pro derivaci podle konormály v (3.18) platí

$$(3.22) \quad \frac{\partial u}{\partial n_A} = \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i = n^T \mathbf{A} \text{ grad } u,$$

kde $n = (n_1, \dots, n_d)$ značí vektor vnější jednotkové normály. Dále předpokládáme, že $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Poznámka 3. 3.

Koeficienty a_{ij} charakterizují látku, v níž dochází k vedení tepla. Pokud jsou a_{ij} konstanty nezávislé na hodnotě $x \in \overline{\Omega}$, nazýváme látku *homogenní* (v opačném případě *nehomogenní*).

Pokud $a_{ii}(x) = a_{11}(x)$ pro $i = 2, \dots, d$ a $a_{ij}(x) = 0$ pro $i \neq j$, pak látku nazýváme *izotropní* (v opačném případě *anizotropní*). Teplotní vlastnosti izotropní a homogenní látky jsou nezávislé na směru šíření a volbě souřadnicového systému.

Při řešení praktických úloh typu (3.17), (3.18) nejsou často funkce a_{ij} , c , α hladké (mohou být například po částech konstantní) a v důsledku toho klasická parciální derivace v (3.17) nemusí existovat. Proto je vhodné úlohu převést na její slabou (variační) formulaci.

3. 2. 1. Slabá formulace úlohy

Uvažujme nyní klasickou úlohu (3.17), (3.18) a zvolme libovolné $v \in H^1(\Omega)$. V souladu s (3.17) obdržíme

$$(3.23) \quad - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v \, dx + \int_{\Omega} c u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Užitím Greenovy věty získáme

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v \, dx &= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} - \\ &- \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i v \, ds = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i v \, ds \end{aligned}$$

a po dosazení do (3.23) dostáváme

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} - \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i v \, ds + \int_{\Omega} c u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Užitím vztahu (3.18) a (3.22) a dosazením

$$- \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i v \, dx = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n_A} v \, dx = \int_{\partial\Omega} \alpha u v \, ds - \int_{\partial\Omega} g v \, ds$$

obdržíme vztah

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha u v \, ds - \int_{\partial\Omega} g v \, ds + \int_{\Omega} c u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

výraz můžeme upravit na tvar

$$(3.24) \quad \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} c v u \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha v u \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, ds$$

pro libovolné $v \in H^1(\Omega)$. Vyjádření uvedené v (3.24) nazýváme *variační (slabou) formulací* klasické úlohy (3.17), (3.18). Funkce v nazýváme *testovacími funkcemi*.

Poznámka 3. 4.

Pokud řešení $u \in C^2(\Omega)$ klasické úlohy (3.17), (3.18) existuje, je současně i řešením variační formulace (3.24).

Úlohu (3.24) můžeme formulovat v následujícím tvaru: nalézt $u \in H^1(\Omega)$ takové, aby platilo

$$(3.25) \quad a(u, v) = F(v) \quad \text{pro každé } v \in H^1(\Omega),$$

kde

$$(3.26) \quad a(v, w) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} c v w dx + \int_{\partial\Omega} \alpha v w ds$$

a

$$(3.27) \quad F(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds$$

pro libovolné $v, w \in H^1(\Omega)$.

V následující části tohoto odstavce se zaměříme na existenci a jednoznačnost řešení úlohy (3.25) až (3.27).

Věta 3. 5.

Variační formulace úlohy (3.25) má právě jedno řešení.

Důkaz.

Ověříme splnění předpokladů Laxova – Millagramova lemmatu 3. 1. Linearita funkcionálu F a bilinearita a symetrie $a(\cdot, \cdot, \cdot)$ v Hilbertově prostoru $H^1(\Omega)$ je zřejmá. Spojitost funkcionálu F plyne ze vztahu (3.27), Schwarzovy nerovnosti a věty 3. 1.

$|F(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, ds \right| \leq \left| \int_{\Omega} f v \, dx \right| + \left| \int_{\partial\Omega} g v \, ds \right| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\partial\Omega} \|v\|_{0,\partial\Omega} \leq$
 $\leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} + c_1 \|g\|_{0,\partial\Omega} \|v\|_{1,\Omega} = (\|f\|_{0,\Omega} + c_1 \|g\|_{0,\partial\Omega}) \|v\|_{1,\Omega} = c_2 \|v\|_{1,\Omega},$ kde c_1, c_2 jsou kladné konstanty. Odsud vyplývá spojitost funkcionálu F .

Dále je zapotřebí ukázat spojitost $a(\cdot, \cdot)$. Podle (3.27) a na základě platnosti vztahu (3.9) ve větě 3. 1. a platnosti $\|v\|_{0,\Omega} \leq \|v\|_{1,\Omega}$ vyplývající z definice 3. 5. postupně obdržíme

$$\begin{aligned}
 |a(v, w)| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} c v w \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha v w \, ds \right| \leq \sum_{i,j=1}^d \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} + \\
 &+ \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{0,\Omega} \|w\|_{0,\Omega} + \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \|w\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c_1 \|v\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega},
 \end{aligned}$$

kde $L^\infty(\Omega)$ značí prostor lebesgueovsky ohraničených funkcí na Ω a c_1 je kladná konstanta.

Zbývá ukázat platnost podmínky V- eliptičnosti (3.13). Necht' $\alpha(s) \geq \alpha_0 > 0$ na $\partial\Omega$ a $c(x) \geq c_0 > 0$ na Ω , kde α_0 a c_0 jsou konstanty. Ze vztahu (3.26), (3.21) a užitím Fridrichsonovy nerovnosti (3.10) a (3.11) postupně obdržíme

$$\begin{aligned}
 a(v, v) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} c v v \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha v v \, ds \geq M \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \, dx + c_0 \int_{\Omega} v^2 \, dx + \\
 &+ \alpha_0 \int_{\partial\Omega} v^2 \, ds = \left(\frac{M}{2} \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \, dx + c_0 \int_{\Omega} v^2 \, dx \right) + \left(\frac{M}{2} \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \, dx + \alpha_0 \int_{\partial\Omega} v^2 \, ds \right) \geq \\
 &\geq c_1 \|v\|_{1,\Omega}^2 + c_2 \|v\|_{1,\Omega}^2 = c \|v\|_{1,\Omega}^2,
 \end{aligned}$$

kde c_1 a c_2 jsou kladné konstanty a $c = c_1 + c_2 > 0$. Tím je důkaz o existenci a jednoznačnosti řešení úlohy (3.25) proveden.

3. 2. 2. Metoda konečných prvků

Užití *metody konečných prvků* k řešení variační formulace eliptické parciální diferenciální rovnice popisující stacionární tepelné děje v elektrických strojích patří v současnosti mezi nejčastěji užívané přístupy v technické praxi. Uvedenou metodu lze považovat za speciální případ Ritzovy či Galerkinovy metody.

Uvažujme variační formulaci úlohy (3.25). Bilineární forma a definovaná vztahem (3.26) je pozitivně definitní, jak bylo ukázáno v důkazu věty 3. 5., a je definována na Hilbertově prostoru $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, který je separabilní. V prostoru $H^1(\Omega)$ definujeme

lineárně nezávislý úplný systém $\{v_i\}$. Pak řešení u variační formulace úlohy (3.25) lze zapsat lineární kombinací funkcí z posloupnosti $\{v_i\}$.

Zvolme přirozené číslo N . Budeme hledat aproximaci $u_N \in H^1(\Omega)$ řešení u ve tvaru

$$(3.28) \quad u_N = \sum_{i=1}^N c_i v_i, \quad c_i \in \mathbf{R}.$$

Přitom nalezení řešení úlohy (3.25) až (3.27) je ekvivalentní úloze nalezení minima funkcionálu J definovaného vztahem (3.15), tj. nalezení $u \in H^1(\Omega)$ takového, aby platilo $J(u) = \min_{v \in H^1(\Omega)} J(v)$. Pro aproximaci u_N řešení u danou vztahem (3.28) požadujeme, aby platilo

$$(3.29) \quad J(u_N) = \min \left\{ \sum_{i=1}^N b_i v_i, \quad b_i \in \mathbf{R} \right\},$$

kde dle vztahu (3.15) $J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \operatorname{Re}(F(v))$. Pokud funkcionál J nabývá svého minima na prostoru generovaném funkcemi v_i ($i = 1, \dots, N$), nutně musí platit

$$(3.30) \quad \frac{\partial J(v)}{\partial b_1} \Big|_{b_1=c_1, \dots, b_N=c_N} = \frac{\partial J(v)}{\partial b_2} \Big|_{b_1=c_1, \dots, b_N=c_N} = \dots = \frac{\partial J(v)}{\partial b_N} \Big|_{b_1=c_1, \dots, b_N=c_N} = 0,$$

neboť J nabývá na tomto prostoru pro funkci u_N svého minima. Po úpravě dostáváme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$(3.31) \quad \sum_{j=1}^N a(v_i, v_j) c_j = F(v_i) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, N.$$

Soustava lineárních algebraických rovnic (3.31) obsahuje N rovnic pro N neznámých $c_1, \dots, c_N$. Protože funkce $v_1, \dots, v_N$ jsou lineárně nezávislé, je nutně determinant soustavy (3.31) různý od nuly, tj.

$$(3.32) \quad \det \begin{vmatrix} a(v_1, v_1) & a(v_1, v_2) & \dots & a(v_1, v_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a(v_N, v_1) & a(v_N, v_2) & \dots & a(v_N, v_N) \end{vmatrix} \neq 0$$

a soustava je tudíž jednoznačně řešitelná (vztahem (3.32) dán *Gramův determinant* funkcí $v_1, \dots, v_N$). Jelikož lze ukázat, že kvadratická forma

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a(v_i, v_j) b_i b_j$$

je pozitivně definitní, nabývá funkcionál (3.15) na prostoru generovaném funkcemi $v_1, \dots, v_N$ v bodě u_N svého minima.

Z výše uvedeného vyplývá, že posloupnost funkcí $\{u_N\}$ daná vztahy (3.28) a (3.29) konverguje k řešení u variační formulace úlohy (3.25).

Věta 3. 6.

Nechť jsou dána přibližná řešení variační úlohy u_m a u_n variační úlohy (3.28) a (3.31); $m, n \in \mathbf{N}$; $m > n$. Nechť u je přesné řešení variační úlohy dané vztahy (3.25) až (3.27). Pak platí

$$(3.33) \quad \|u_n - u\|_{1, \Omega} \leq \|u_m - u\|_{1, \Omega}.$$

Důkaz.

Víme, že posloupnost funkcí $\{v_i\}$ tvoří bázi v prostoru $H^1(\Omega)$. Užitím Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu lze získat ortonormální bázi $\{w_i\}$ prostoru $H^1(\Omega)$.

Pak platí $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i v_i = \sum_{i=1}^{\infty} s_i w_i$, kde $s_i \in \mathbf{R}$ a $u_n = \sum_{i=1}^n c_i v_i = \sum_{i=1}^n s_i w_i$. Obdobně lze vyjádřit

i u_m . Odsud dostáváme $u - u_m = \sum_{i=m+1}^{\infty} s_i w_i$ a $u - u_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} s_i w_i$. Protože posloupnost funkcí

$\{w_i\}$ tvoří ortonormální bázi v $H^1(\Omega)$, postupně obdržíme

$$\begin{aligned} \|u_m - u\|_{1, \Omega}^2 &= (u_m - u, u_m - u)_{1, \Omega} = \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} s_i w_i, \sum_{i=m+1}^{\infty} s_i w_i \right)_{1, \Omega} = \sum_{i=m+1}^{\infty} s_i^2 \leq \sum_{n=n+1}^{\infty} s_i^2 = \\ &= \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} s_i w_i, \sum_{i=n+1}^{\infty} s_i w_i \right)_{1, \Omega} = (u_n - u, u_n - u)_{1, \Omega} = \|u_n - u\|_{1, \Omega}^2. \end{aligned}$$

Z uvedené věty vyplývá, že obecně s rostoucím n se přibližné řešení u_n blíží (nebo alespoň nezhoršuje) k řešení u variační úlohy (3. 25).

Výhodou Ritzovy metody je skutečnost, že při výpočtu přesnější aproximace řešení u_N lze při řešení soustavy (3.31) využít již dříve vypočítané koeficienty soustavy při určování méně přesné aproximace přesného řešení u . Hlavní nevýhodou Ritzovy metody při obecně zvolené bázi prostoru $H^1(\Omega)$ je skutečnost, že matice soustavy (3.31) je obecně plná, a tudíž pro vyšší hodnoty N je metoda náročnější na kapacitu paměti počítače a na počet potřebných operací k vyřešení soustavy.

Metodu konečných elementů lze považovat za speciální případ Ritzovy metody, kdy na posloupnost lineárně nezávislých funkcí v $H^1(\Omega)$ jsou kladeny speciální požadavky. V následující části tohoto odstavce popíšeme postup užití metody konečných prvků k nalezení přibližného řešení variační úlohy (3.25). Uvažujme neprázdný konečně dimenzionální podprostor V_h prostoru $H^1(\Omega)$ a hledejme aproximaci u_h řešení u úlohy (3.25) pomocí vztahu

$$(3.34) \quad a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \text{pro každé } v_h \in V_h.$$

Jelikož úloha (3.25) splňuje podmínky Laxova-Milgama lemmatu pro prostor $H_1(\Omega)$, jsou také splněny v případě podprostoru V_h . Tudíž existuje právě jedno řešení splňující rovnici (3.34). Nechť $\{v_i\}$ je báze v podprostoru V_h . Pak přibližné řešení u_h rovnice (3.34) lze vyjádřit jako lineární kombinaci

$$(3.35) \quad u_h = \sum_{i=1}^N c_i v_i,$$

kde $N = \dim V_h$. Dosazením vyjádření u_h a použitím (3.34) obdržíme

$$a\left(\sum_{i=1}^N c_i v_i, v_j\right) = F(v_j) \quad \text{pro } j=1, \dots, N,$$

což můžeme vzhledem k bilinearitě $a(\cdot, \cdot)$ můžeme upravit na tvar

$$(3.36) \quad \sum_{i=1}^N a(v_i, v_j) c_i = F(v_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Jedná se tedy o systém lineárních algebraických rovnic s neznámými $c_1, \dots, c_N$. Matici $\mathbf{A} = (a(v_i, v_j))_{i,j=1}^N$ obvykle nazýváme *maticí tuhosti* (metoda byla původně vyvinuta pro potřeby řešení úloh lineární statistiky, u níž matice vyjadřuje vztah mezi zatížením a

odpovídající deformací tělesa). Oproti Ritzově metodě jsou voleny báze funkce $\{v_i\}_{i=1}^N$ tak, aby čtvercová matice $\mathbf{A}$ soustavy (3.36) byla řídká, tj. aby obsahovala pouze $O(N)$ nenulových prvků pro $N \rightarrow \infty$. Tato skutečnost umožňuje podstatně efektivněji řešit soustavu (3.36) vzhledem k menším nárokům na paměť počítače a na počet potřebných operací.

Poznámka 3.5.

Soustava (3.36) je jednoznačně řešitelná, protože matice soustavy je pozitivně definitní.

Důkaz.

Nechť $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T \in R^N$ a $\xi \neq 0$. Pak

$$(\mathbf{A}\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^N a(v_i, v_j) \xi_i \xi_j = a\left(\sum_{i=1}^N \xi_i v_i, \sum_{j=1}^N \xi_j v_j\right) = a(v, v) \geq c \|v\|_{H_1(\Omega)}^2 > 0.$$

Využili jsme bilinearity a V-eliptičnosti $a(\cdot, \cdot)$ a vzhledem k tomu, že $a(\cdot, \cdot)$ je symetrická, ukázali jsme, že matice $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní.

Poznámka 3.6.

Přibližné řešení u_h dané vztahem (3.34) je nezávislé na výběru báze funkce $\{v_i\}_{i=1}^N$ v prostoru V_h . Výběr báze funkce však významně ovlivní strukturu matice $\mathbf{A}$. Cílem je provést takovou volbu funkcí $\{v_i\}_{i=1}^N$, aby matice $\mathbf{A}$ byla řídká, popř. pásová. Dosažení řídkosti matice $\mathbf{A}$ soustavy (3.34) lze dosáhnout splněním následujících podmínek:

- I. sestavení triangulace τ_h uzavěru oblasti $\overline{\Omega}$,
- II. každá funkce $v_h \in V_h$ má na každém prvku triangulace τ_h tvar polynomu, V_h pak nazýváme *prostorem konečných prvků*,
- III. báze funkce $v_1, \dots, v_n \in V_h$ jsou voleny tak, aby míra množin $M_i = \{x \in \overline{\Omega}; v_i(x) \neq 0\}$ byla výrazně menší, než míra Ω .

Při triangulaci τ_h uvedené v bodě I. je rozdělena množina $\overline{\Omega}$ na konečný počet prvků splňujících následující podmínky:

- 1) $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau_h} K$,
- 2) $K = \overline{K}$, $\text{int } K \neq \emptyset$ pro každé $K \in \tau_h$,

- 3) pro libovolné prvky $K_1, K_2 \in \tau_h$; $K_1 \neq K_2$ platí $\text{int } K_1 \cap \text{int } K_2 = \emptyset$,
 4) každý prvek $K \in \tau_h$ má lipschitzovsky spojitou hranici ∂K .

Následující věta se vztahuje k bodu II týkajícího se konstrukce báзовých funkcí $v_h \in V_h$.

Věta 3. 7.

Nechť τ_h je triangulace $\overline{\Omega}$ tvořená konvexními prvky. Nechť $V_h \subset L^2(\Omega)$ je takový podprostor, že prostor $P_K = \{v_{h|K} \mid v_h \in V_h\}$ obsahuje polynomiální funkce pro každé $K \in \tau_h$. Pak $V_h \subset H^1(\Omega) \Leftrightarrow V_h \subset C(\overline{\Omega})$.

Důkaz věty je založen na užití Greenovy věty a je podrobně proveden například v [Křížek, Neittaanmäki]. Věta nám říká, že každá po částech polynomiální funkce definovaná na $\overline{\Omega}$ je prvkem $H^1(\Omega)$, právě tehdy, když je na $\overline{\Omega}$ spojitá.

Zaměřme nyní pozornost na odhad chyby, které se dopouštíme při aproximaci přesného řešení u úlohy (3.25) pomocí u_h splňujícího vztah (3.34).

Lemma 3.2.

Nechť jsou splněny předpoklady Laxova-Milgramova lemmatu 3.1. Pak existuje reálná konstanta $c > 0$ nezávislá na prostoru V_h taková, že platí

$$(3.37) \quad \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega}.$$

Důkaz je uveden například v [Křížek, Segeth].

Z uvedeného lemmatu vyplývá, že odhad chyby $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ se redukuje na určení odhadu vzdálenosti $\text{dist}(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega}$.

Předpokládejme dále, že $\Omega \subset R^2$ a tudíž $d = 2$ ve slabé formulaci úlohy (3.25). Často je pak volena triangulace τ_h jako konečná množina trojúhelníků, kde každé dva různé trojúhelníky mají společnou právě jednu stranu, vrchol nebo nemají žádný společný bod.

Diskretizační parametr h udává maximální průměr prvků v triangulaci τ_h . Uvažujme dále prostor konečných prvků

$$(3.38) \quad V_h = \{v_h \in H_1(\Omega), \forall (v_h|_K \in P_1(K))\},$$

kde $P_1(K)$ značí prostor lineárních polynomů na trojúhelníku K . V důsledku platnosti věty 3. 7. vyplývá, že funkce $v_h \in V_h$ jsou spojité. Označme $B_1, \dots, B_N$ vrcholy trojúhelníků K v triangulaci τ_h . Pak lze volit tzv. *Courantovy báze funkce* $v_1, \dots, v_N \in V_h$ takové, že platí

$$(3.39) \quad v_i(B_j) = \delta_{ij},$$

kde δ_{ij} značí Kroneckerův symbol. Na obrázku 6 je znázorněna báze funkce v_i splňující vztah (3.39) na uniformní triangulaci čtverce. Tato funkce nabývá nenulových hodnot pouze na pravidelném šestiúhelníku se středem ve vrcholu B_i , v ostatních bodech oblasti Ω nabývá nulové hodnoty. Podstava šestibokého jehlanu tvořícího funkci v_i je znázorněna na obrázku 7.

Uvažujme pro jednoduchost speciální případ rovnice (3.17), *Poissonovu rovnici*

$$(3.40) \quad -\Delta u = f$$

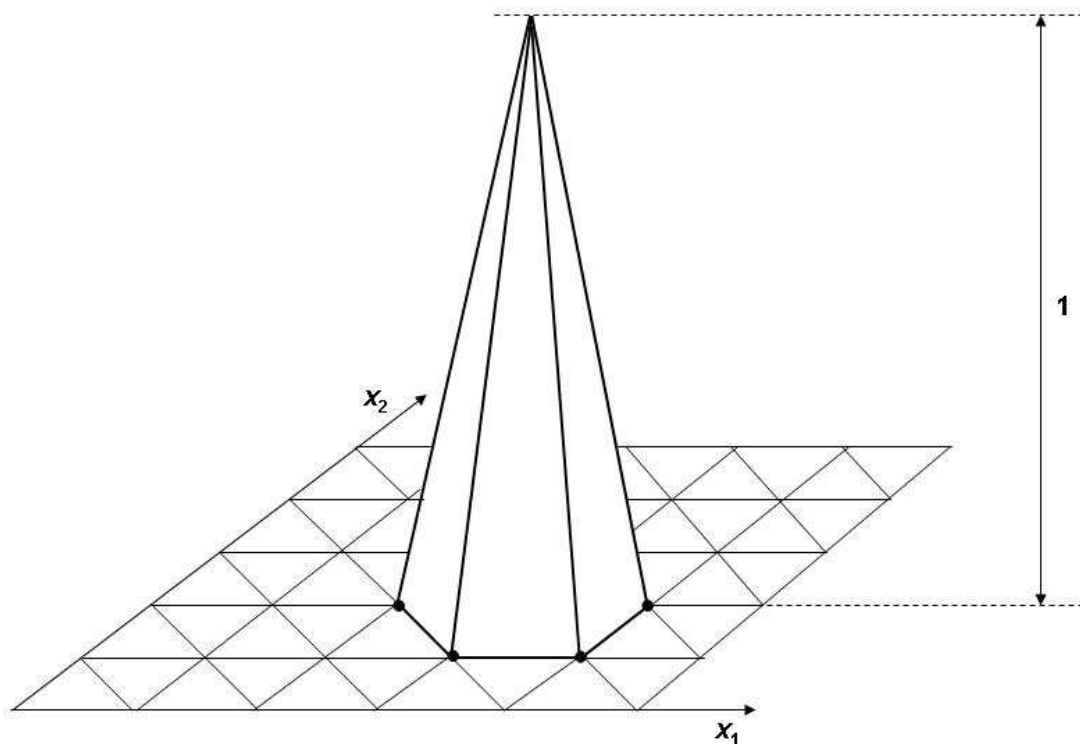
s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou $u = 0$ na $\partial\Omega$. Pak (3.26) se zjednoduší na tvar

$$(3.41) \quad a(v, w) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) dx.$$

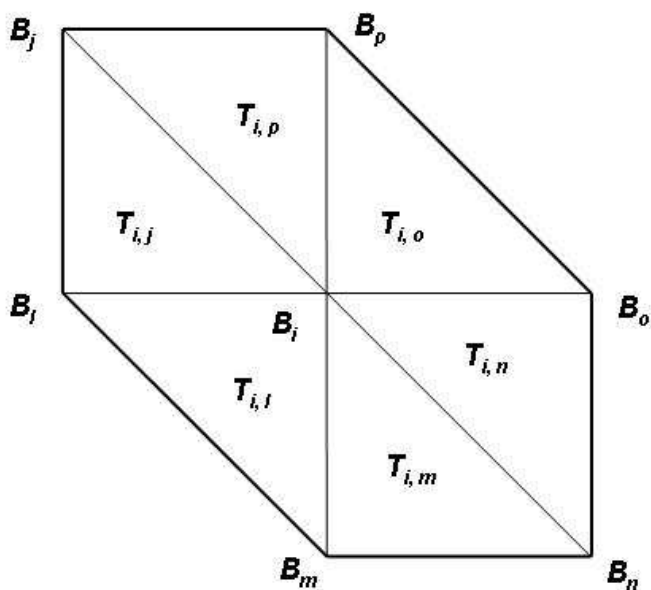
Speciálně pro funkce $v_1, \dots, v_N$ platí $a(v^i, v^j) = 0$, pokud neexistuje trojúhelník, jehož vrcholy jsou body B_i i B_j .

Předpokládejme dále, že triangulace τ_h je uniformní a trojúhelníky jsou pravoúhlé s odvěsnami délky h_1 ve směru osy x_1 a h_2 ve směru osy x_2 . Označme z třetí souřadnici kartézského systému (O, x_1, x_2, z) . Označme dále x_{i1}, x_{i2} souřadnice uzlu B_i na obrázku 7. Pak uzel B_j má souřadnice $x_{i1} - h_1, x_{i2} + h_2$ a uzel B_l má souřadnice

$x_{i_1} - h_1, x_{i_2}$. Vrcholy B_i, B_j a B_l je na obrázku 7 určen trojúhelník T_{ij} . Stěna jehlanu, který tvoří bázovou funkci v_i , procházející body $[x_{i_1}, x_{i_2}, 1], [x_{i_1} - h_1, x_{i_2} + h_2, 0]$ a



Obrázek 6 – Courantova bázová funkce



Obrázek 7 – Podstava šestibokého jehlanu bázové funkce v_i

$[x_{i_1} - h_1, x_{i_2}, 0]$ je částí roviny s obecnou rovnicí roviny $Ax_1 + Bx_2 + Cz + D = 0$.

Do uvedené rovnice dosadíme body $[x_{i_1}, x_{i_2}, 1]$, $[x_{i_1} - h_1, x_{i_2} + h_2, 0]$ a $[x_{i_1} - h_1, x_{i_1}, 0]$ a po úpravě obdržíme nad trojúhelníkem T_{ij} rovnici stěny báze funkce v_i ve tvaru

$$(3.42) \quad z = 1 + \frac{x_1 - x_{i_1}}{h_1}.$$

Obdobně nad trojúhelníky $T_{i,l}, T_{i,m}, T_{i,n}, T_{i,o}, T_{i,p}$ na obrázku 7 mají rovnice stěn báze funkce v_i postupně následující tvar

$$(3.43) \quad z = 1 + \frac{x_1 - x_{i_1}}{h_1} + \frac{x_2 - x_{i_2}}{h_2},$$

$$z = 1 + \frac{x_2 - x_{i_2}}{h_2},$$

$$z = 1 - \frac{x_1 - x_{i_1}}{h_1},$$

$$z = 1 - \frac{x_1 - x_{i_1}}{h_1} - \frac{x_2 - x_{i_2}}{h_2},$$

$$z = 1 - \frac{x_2 - x_{i_2}}{h_2}.$$

Proveďme ještě jedno zjednodušení úlohy, předpokládejme, že $h_1 = h_2 = h$. Pak plocha každého z uvažovaných trojúhelníků je $\frac{h^2}{2}$. Potom

$$\begin{aligned} a(v_i, v_i) &= \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx = \int_{T_{i,j}} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx + \\ &+ \int_{T_{i,l}} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx + \int_{T_{i,m}} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx + \int_{T_{i,n}} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{T_{i,o}} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx + \int_{T_{i,p}} \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx = \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{h^2} + 0^2 \right) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} \right) + \\
& + \frac{h^2}{2} \left(0^2 + \frac{1}{h^2} \right) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{h^2} + 0^2 \right) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} \right) + \frac{h^2}{2} \left(0 + \frac{1}{h^2} \right) = \frac{h^2}{2} \frac{8}{h^2} = 4.
\end{aligned}$$

Obdobným postupem určíme

$$\begin{aligned}
a(v_i, v_j) &= \int_{T_{i,p}} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_1} \frac{\partial v_j}{\partial x_1} + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} \frac{\partial v_j}{\partial x_2} \right] dx + \int_{T_{i,j}} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_1} \frac{\partial v_j}{\partial x_1} + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} \frac{\partial v_j}{\partial x_2} \right] dx = \\
& \frac{1}{h^2} \left[\left(-\frac{1}{h} \right) 0 + 0 \left(-\frac{1}{h} \right) \right] + \frac{1}{h^2} \left[0 \frac{1}{h} + \frac{1}{h} 0 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Analogicky můžeme stanovit

$$a(v_i, v_l) = -1, \quad a(v_i, v_m) = -1, \quad a(v_i, v_n) = 0, \quad a(v_i, v_o) = -1, \quad a(v_i, v_p) = -1.$$

Očíslujeme-li uzly B_i oblasti Ω po řádcích, pak obdržíme symetrickou řídkou a pásovou matici tuhosti danou vztahem (3.36) pro Poissonovu rovnici (3.40).

Pro přibližné řešení u_h platí

$$u_h(B_i) = \sum_{j=1}^N c_j v_j(B_i) = c_i v_i(B_i) = c_i.$$

Řešením soustavy lineárních algebraických rovnic (3.36) tedy obdržíme hodnoty přibližného řešení u_h v uzlových bodech.

Podstatnou výhodou metody konečných prvků například oproti Ritzově metodě je skutečnost, že při řešení soustavy (3.36) je matice tuhosti pásová a obsahuje pouze $O(N)$ nenulových prvků, kde N udává počet uzlových bodů oblasti Ω (typická šíře pásu pro $d = 2$ je $O(N^{1/2})$). Pokud je matice tuhosti symetrická, stačí ukládat do paměti počítače pouze polovinu nenulových prvků matice. Soustavy uvedeného typu je vhodné řešit například metodami typu sdružených gradientů.

3. 2. 3. Metoda tepelných bilancí

Uvažujme speciální případ úlohy (3.17) – (3.18), kdy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a pro funkce a_{ij} platí $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $a_{11} = a_{22} = 1$ na Ω . Pak se jedná o rovnici typu

$$(3.44) \quad -\Delta u + cu = f \quad \text{na } \Omega$$

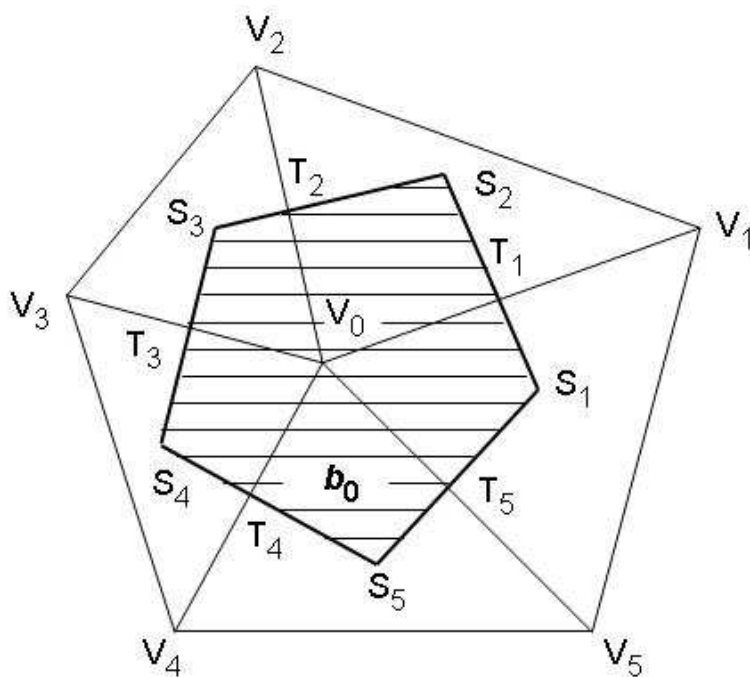
s Newtonovou okrajovou podmínkou

$$(3.45) \quad \alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{na } \partial\Omega,$$

kde $n = (n_1, n_2)$ značí jednotkový vektor vnější normály.

U metody tepelných bilancí, uvedené například ve [Varga], [Křížek, Segeth], postupujeme při řešení úlohy (3.44) – (3.45) následujícím způsobem. Provedeme triangulaci τ uzávěru oblasti Ω na prvky K splňující body 1) až 4) podmínky I. uvedené v poznámce 3. 6. o vytvoření triangulace na $\bar{\Omega}$ při užití metody konečných prvků v odstavci 3. 2. 2. Předpokládejme, že prvky $K \in \tau$ jsou trojúhelníky a že žádný trojúhelník triangulace není tupouhlý. Popište nyní postup konstrukce duální sítě oblasti Ω užitím triangulace τ .

Uvažujme sjednocení trojúhelníků triangulace, které mají společný vrchol V_0 , viz obrázek 8.



Obrázek 8 – Konstrukce buňky duální sítě

Označme dále T_i střed strany $V_0 V_i$. Tímto bodem vedeme osu strany $V_0 V_i$. Osy jednotlivých úseček se protnou v bodech S_i . Jelikož jsme předpokládali, že žádný trojúhelník $K \in \tau$ není tupoúhlý, leží body S_i uvnitř příslušných trojúhelníků nebo na jejich hranici. Označme b_0 plochu mnohoúhelníku určenou vrcholy S_i . Obecně označíme b_j buňku příslušnou vrcholu V_j . Výše popsanou konstrukcí vytvoříme duální síť B k triangulaci τ , $\overline{\Omega} = \bigcup_{V_j} b_j$. Předpokládejme, že žádná strana buňky b_0 není částí $\partial\Omega$, tj. $\partial b_0 \cap \partial\Omega = \emptyset$.

Integrujeme-li levou i pravou stranu rovnice (3.44) přes buňku b_0 , obdržíme rovnici:

$$(3.46) \quad - \int_{b_0} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] dx = \int_{b_0} (f - cu) dx.$$

Užitím Greenovy věty na levé straně rovnice (3.46) dostaneme

$$- \int_{b_0} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] dx = - \int_{\partial b_0} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \right] ds,$$

kde $n = (n_1, n_2)$ značí jednotkový vektor vnější normály. Vztah (3.46) tedy můžeme upravit na tvar

$$(3.47) \quad - \int_{\partial b_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \right) ds = \int_{b_0} (f - cu) dx.$$

Rovnice (3.47) vyjadřuje tepelnou bilanci na buňce b_0 : levá strana představuje celkový tepelný tok přes hranici buňky, pravá strana značí souhrn všech tepelných zdrojů v buňce. Derivace podle vnější normály n na levé straně rovnice (3.47) v bodech T_i lze nahradit centrální diferencí a určitý integrál na úsečkách $S_i S_{i+1}$ lze aproximovat pomocí *obdélníkového pravidla*. Levou stranu (3.47) tedy můžeme aproximovat výrazem

$$(3.48) \quad - \int_{\partial b_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \right) ds \approx - \sum_i \frac{u(V_i) - u(V_0)}{|V_i V_0|} \cdot |S_{i+1} S_i|,$$

kde $|V_i V_0|$, resp. $|S_{i+1} S_i|$ značí délku úsečky $V_i V_0$, resp. $S_{i+1} S_i$. Integrál na pravé straně (3.47) aproximujeme pomocí výrazu

$$\int_b (f - cu) dx \approx (f(V_0) - c(V_0)) \cdot |b_0|,$$

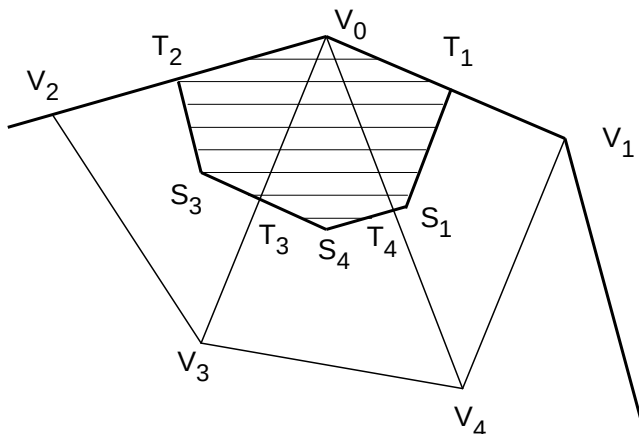
kde $|b_0|$ značí obsah buňky b_0 . Nahrazením levé a pravé části rovnice (4.47) jejími aproximacemi obdržíme rovnici

$$(3.49) \quad - \sum_i \frac{u(V_i) - u(V_0)}{|V_i V_0|} \cdot |S_{i+1} S_i| = (f(V_0) - c(V_0)u(V_0))|b_0|.$$

Pokud některá strana buňky b_0 je součástí $\partial\Omega$ (uvažujme například stranu $V_0 T_k$, viz obrázek 9), pak užitím vztahu (3.45) je zapotřebí pravou stranu (3.48) modifikovat. Například hodnotu

$$- \int_{|V_0 T_1|} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \right) ds \quad \text{lze aproximovat výrazem} \quad (g(T_1) - \alpha(T_1)u(T_1)) |V_0 T_1|,$$

přítom aproximaci hodnoty $u(T_1)$ můžeme vyjádřit pomocí lineární interpolace hodnot $u(V_0)$ a $u(V_1)$. Rovnici typu (3.49) lze sestavit pro každou buňku $b \in B$ a tak obdržet soustavu lineárních algebraických rovnic, jejíž neznámé jsou aproximace hodnot funkce u ve vrcholech trojúhelníků triangulace τ .



Obrázek 9 – Buňka, jejíž část hranice je součástí $\partial\Omega$

3. 2. 4. Metoda tepelných bilancí pro obdélníkovou oblast

Uvažujme opět speciální případ úlohy (3.17), kdy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je obdélník a pro koeficienty a_{ij} platí $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. Pak můžeme rovnici (3.17) zapsat ve tvaru

$$(3.50) \quad -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + cu = f$$

s Newtonovou okrajovou podmínkou

$$(3.51) \quad \alpha u + \frac{\partial}{\partial n_A} u = g,$$

kde derivace podle vnější konormály je dána vztahem

$$\frac{\partial u}{\partial n_A} = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2$$

a $n = (n_1, n_2)$ značí jednotkový vektor vnější normály. Obdobně jako v předchozím odstavci provedeme triangulaci τ uzávěru obdélníku Ω , avšak prvky triangulace budou obdélníky.

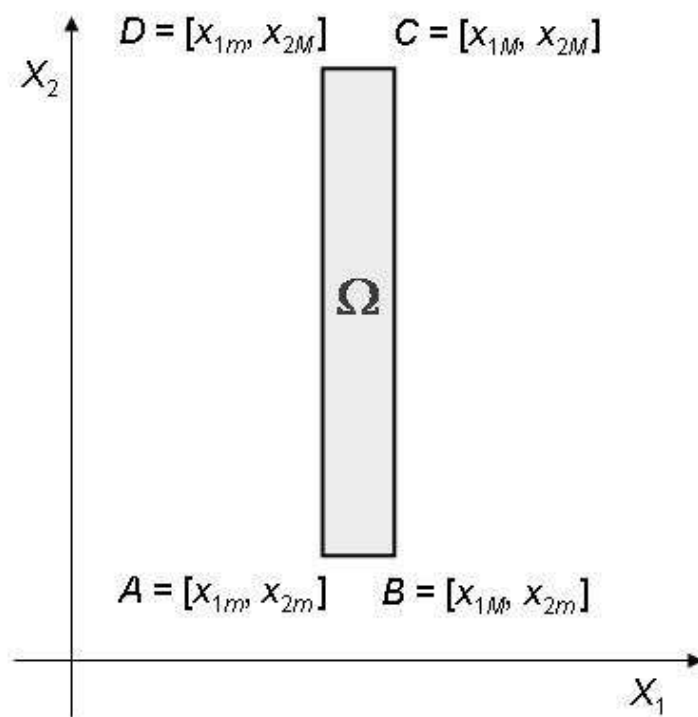
Na obrázku 10 je znázorněn obdélník Ω s vrcholy $A = [x_{1m}, x_{2m}]$, $B = [x_{1M}, x_{2m}]$, $C = [x_{1M}, x_{2M}]$ a $D = [x_{1m}, x_{2M}]$. Obdélník rozdělíme rovnoměrně na p dílků ve směru

osy x_1 a na q dílků ve směru osy x_2 . Označme $h_1 = \frac{x_{1M} - x_{1m}}{p}$ a $h_2 = \frac{x_{2M} - x_{2m}}{q}$. Na

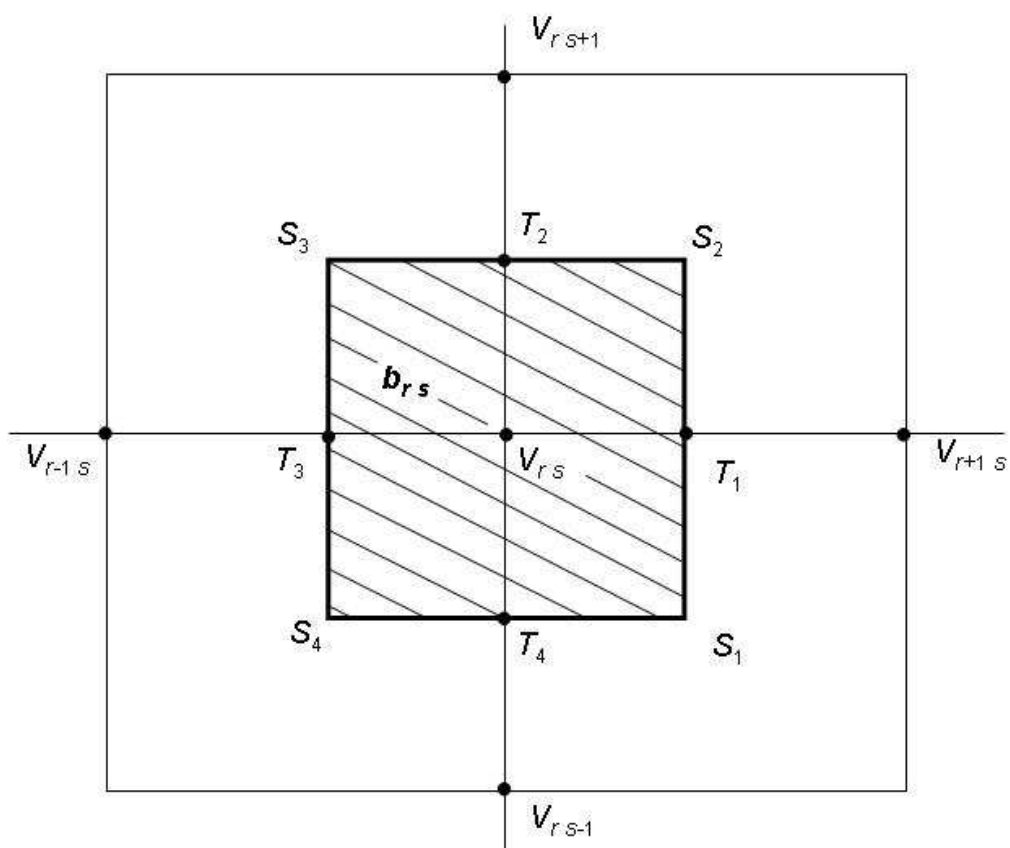
obdélníku Ω obdržíme $(p+1) \times (q+1)$ uzlových bodů, obecný uzlový bod V_{rs} má souřadnice $V_{rs} = [x_{1m} + rh_1, x_{2m} + sh_2]$, $0 \leq r \leq p$, $0 \leq s \leq q$.

Uvažujme vnitřní bod sítě $V_{rs} = [x_{1m} + rh_1, x_{2m} + sh_2]$, $0 < r < p$, $0 < s < q$, viz obrázek 11.

Sestavíme duální síť B k triangulaci τ , která je však v tomto případě tvořena obdélníkovými prvky. Body $T_i, 1 \leq i \leq 4$, tvoří na obrázku 11 středy úseček určených vrcholem V_{rs} a sousedními uzly sítě, body $S_i, 1 \leq i \leq 4$, tvoří průsečíky os uvedených úseček procházejících body T_i . Příslušný obdélník k uzlu V_{rs} určený vrcholy S_1, S_2, S_3 a S_4 tvoří buňku b_{rs} duální sítě B k obdélníkové triangulaci τ .

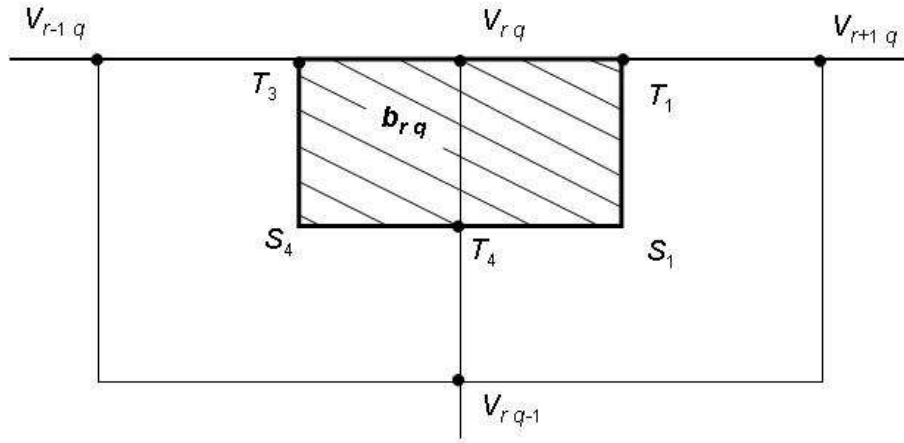


Obrázek 10 – Obdélníková oblast Ω



Obrázek 11 – Buňka b_{rs} duální sítě B příslušná uzlu V_{rs}

Jestliže bude uzel V_{rs} bodem hranice obdélníku Ω , pak bude odpovídajícím způsobem obdélník modifikován. Uvedme příklad hraničního bodu V_{rq} , $0 < r < p$. Odpovídající buňka b_{rq} je vyznačena na obrázku 12.



Obrázek 12 – Buňka b_{rq} příslušná hraničnímu uzlu V_{rq}

Ke každému uzlovému bodu V_{rs} uvedeným postupem zkonstruuujeme příslušnou buňku b_{rs} . Přitom platí, že $\overline{\Omega} = \bigcup_{0 \leq r \leq p, 0 \leq s \leq q} b_{rs}$ a $\text{int } b_{rs} \cap \text{int } b_{kl} = \emptyset$ pro $V_{rs} \neq V_{kl}$. Uvažujme nyní buňku b_{rs} příslušnou uzlovému bodu V_{rs} . V rovnici (3.50) můžeme převést člen cu na pravou stranu a obě strany rovnice integrovat přes buňku b_{rs} :

$$(3.52) \quad \int_{b_{rs}} \left[-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] dx = \int_{b_{rs}} (f - cu) dx.$$

Užitím Greenovy věty můžeme upravit levou stranu (3.52):

$$\begin{aligned} \int_{b_{rs}} \left[-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] dx &= - \int_{b_{rs}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) dx - \int_{b_{rs}} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx = \\ &= - \int_{\partial b_{rs}} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 ds - \int_{\partial b_{rs}} a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 ds. \end{aligned}$$

Vztah (3.52) tedy můžeme přepsat ve tvaru

$$(3.53) \quad - \int_{\partial b_{rs}} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 ds - \int_{\partial b_{rs}} a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 ds = \int_{b_{rs}} (f - cu) dx .$$

Levá strana rovnice (3.53) vyjadřuje celkový tok řešení přes hranici buňky b_{rs} , pravá strana vyjadřuje souhrn všech zdrojů v buňce. Jelikož hranice buňky b_{rs} je obdélník, můžeme níže uvedené výrazy aproximovat následujícími hodnotami:

$$(3.54) \quad a_{11}(T_1) \frac{\partial u(T_1)}{\partial x_1} n_1 \approx a_{11}(T_1) \frac{u(V_{r+1s}) - u(V_{rs})}{h_1} ,$$

$$a_{11}(T_3) \frac{\partial u(T_3)}{\partial x_1} n_1 \approx a_{11}(T_3) \frac{u(V_{r-1s}) - u(V_{rs})}{h_1} ,$$

$$a_{22}(T_2) \frac{\partial u(T_2)}{\partial x_2} n_2 \approx a_{22}(T_2) \frac{u(V_{rs+1}) - u(V_{rs})}{h_2} ,$$

$$a_{22}(T_4) \frac{\partial u(T_4)}{\partial x_2} n_2 \approx a_{22}(T_4) \frac{u(V_{rs-1}) - u(V_{rs})}{h_2} .$$

Zde jako oddělovače dvojitého indexu u V píšeme mezeru. Užitím aproximací uvedených v (3.54) a obdélníkového pravidla s výběrem uzlu ve středu intervalu můžeme levou stranu rovnice (3.53) aproximovat výrazem:

$$(3.55) \quad - \int_{\partial b_{rs}} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 ds - \int_{\partial b_{rs}} a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 ds \approx -a_{11}(T_1) \frac{u(V_{r+1s}) - u(V_{rs})}{h_1} h_2 -$$

$$- a_{11}(T_3) \frac{u(V_{r-1s}) - u(V_{rs})}{h_1} h_2 - a_{22}(T_2) \frac{u(V_{rs+1}) - u(V_{rs})}{h_2} h_1 - a_{22}(T_4) \frac{u(V_{rs-1}) - u(V_{rs})}{h_2} h_1 .$$

Dvojnásobným použitím obdélníkového pravidla s výběrem uzlu ve středu intervalu můžeme pravou stranu rovnice (3.53) aproximovat výrazem:

$$(3.56) \quad \int_{b_{rs}} (f - cu) dx \approx (f(V_{rs}) - c(V_{rs})u(V_{rs})) h_1 h_2 .$$

Položením do rovnosti aproximací uvedených ve vztazích (3.55) a (3.56) obdržíme rovnici odpovídající buňce b_{rs} pro daný bod V_{rs} :

$$\begin{aligned}
 (3.57) \quad & a_{11}(T_1) \frac{u(V_{r+1s}) - u(V_{rs})}{h_1} h_2 + a_{11}(T_3) \frac{u(V_{r-1s}) - u(V_{rs})}{h_1} h_2 + \\
 & + a_{22}(T_2) \frac{u(V_{rs+1}) - u(V_{rs})}{h_2} h_1 + a_{22}(T_4) \frac{u(V_{rs-1}) - u(V_{rs})}{h_2} h_1 = \\
 & = (c(V_{rs})u(V_{rs}) - f(V_{rs})) h_1 h_2
 \end{aligned}$$

Analogickou rovnici sestavíme pro všechny uzly V_{rs} , $0 \leq r \leq p$, $0 \leq s \leq q$. Pokud uzel V_{rs} leží na hranici $\partial\Omega$, je odpovídající rovnice modifikována. Necht' je například uzel V_{rq} bodem horní vodorovné hranice obdélníka Ω (viz obrázek 12). Pak

$$\int_{\partial b_{rq}} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 ds \approx a_{11}(T_1) \frac{u(V_{r+1q}) - u(V_{rq})}{h_1} \cdot \frac{h_2}{2} + a_{11}(T_3) \frac{u(V_{r-1q}) - u(V_{rq})}{h_1} \cdot \frac{h_2}{2}$$

a

$$\int_{\partial b_{rq}} a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 ds \approx a_{22}(V_{rq})(g(V_{rq}) - \alpha(V_{rs})u(V_{rs}))h_1 + a_{22}(T_4) \frac{u(V_{rq-1}) - u(V_{rq})}{h_2} \cdot h_1.$$

Po sestavení rovnic typu (3.57) pro všechny uzlové body V_{rs} obdélníkové oblasti Ω obdržíme soustavu lineárních algebraických rovnic se čtvercovou, symetrickou a pásovou maticí. Hledané neznámé soustavy jsou aproximacemi přesného řešení úlohy (3.50) – (3.51) v uzlových bodech V_{rs} , $0 \leq r \leq p$, $0 \leq s \leq q$.

Na závěr tohoto odstavce se zaměříme na odhad chyby při výpočtu aproximace hodnoty u_{ij} v uzlech sítě pomocí výše popsaného postupu. Nejdříve dokážeme následující lemma.

Lemma 3.3.

Necht' funkce $v \in C^1_{<a, b>}$. Pak $\left| \int_a^b v(x) dx - v\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a) \right| \leq M(b-a)^2$, kde $M \in \mathbf{R}$.

Důkaz.

Uvažujme Lagrangeův interpolační polynom nultého stupně P_0 s interpolačním uzlem

$\frac{a+b}{2}$. Pak podle věty o chybě Lagrangeova interpolačního polynomu (viz [Ralston, str. 63])

existuje pro libovolné x hodnota $\xi \in \langle \min(x, \frac{a+b}{2}), \max(x, \frac{a+b}{2}) \rangle$ taková, že platí

$$v(x) = P_0\left(\frac{a+b}{2}\right) + v'(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right).$$

Potom $\int_a^b v(x) dx = \int_a^b v\left(\frac{a+b}{2}\right) dx + \int_a^b v'(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx$ a můžeme psát na základě užití

1. věty o střední hodnotě integrálního počtu ([Jarník], str. 198):

$$\begin{aligned} \int_a^b v(x) dx - \int_a^b v\left(\frac{a+b}{2}\right) dx &= \int_a^b v'(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} v'(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + \\ &+ \int_{\frac{a+b}{2}}^b v'(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = v'(\eta_1) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + v'(\eta_2) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = \\ &= v'(\eta_1) \frac{1}{2} \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \right]_a^{\frac{a+b}{2}} + v'(\eta_2) \frac{1}{2} \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \right]_{\frac{a+b}{2}}^b = v'(\eta_1) \frac{1}{2} \left(- \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 \right) + \\ &+ v'(\eta_2) \frac{1}{2} \left(b - \frac{a+b}{2} \right)^2 = v'(\eta_1) \frac{1}{2} \left(- \frac{(a-b)^2}{4} \right) + v'(\eta_2) \frac{1}{2} \frac{(b-a)^2}{4} = -v'(\eta_1) \frac{1}{8} (b-a)^2 + \\ &+ v'(\eta_2) \frac{1}{8} (b-a)^2 = (v'(\eta_2) - v'(\eta_1)) \frac{1}{8} (b-a)^2, \end{aligned}$$

kde $\eta_1, \eta_2 \in \langle a, b \rangle$ a obecně $\eta_1 \neq \eta_2$.

Pro odhad chyby tedy platí

$$\left| \int_a^b v(x) dx - \int_a^b v\left(\frac{a+b}{2}\right) dx \right| = \left| (v'(\eta_2) - v'(\eta_1)) \frac{1}{8} (b-a)^2 \right| = |v'(\eta_1) - v'(\eta_2)| \frac{1}{8} (b-a)^2 \leq$$

$\leq M(b-a)^2$, kde $M \in \mathbf{R}$ a $M \geq 0$, neboť $v \in C_{<a,b>}^1$.

Jelikož ve vztahu (3.54) jsou příslušné parciální derivace aproximovány pomocí centrálních diferencí, dopouštíme se při užití těchto aproximací chyby $O(h_1^2)$, resp. $O(h_2^2)$. Současně při aproximaci určitého integrálu ve vztazích (3.55), (3.56) se dle předchozího lemmatu také dopouštíme chyby $O(h_1^2)$, resp. $O(h_2^2)$. Na závěr tohoto odstavce tedy můžeme uvést následující větu.

Věta 3. 8.

Označme U_{rs} aproximaci přesného řešení u v uzlu V_{rs} úlohy (3.50) – (3.51), které získáme řešením soustavy rovnic typu (3.57). Předpokládejme, že funkce $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $a_{11}, a_{22}, c, f \in C^1(\overline{\Omega})$ a $\alpha, g \in C^1(\partial\Omega)$. Dále označme $h = \max(h_1, h_2)$. Pak existuje konstanta $C \in \mathbf{R}$ taková, že pro vnitřní uzlové body V_{rs} oblasti Ω platí

$$(3.58) \quad |u(V_{rs}) - U_{rs}| \leq C h^2.$$

Poznámka 3. 7.

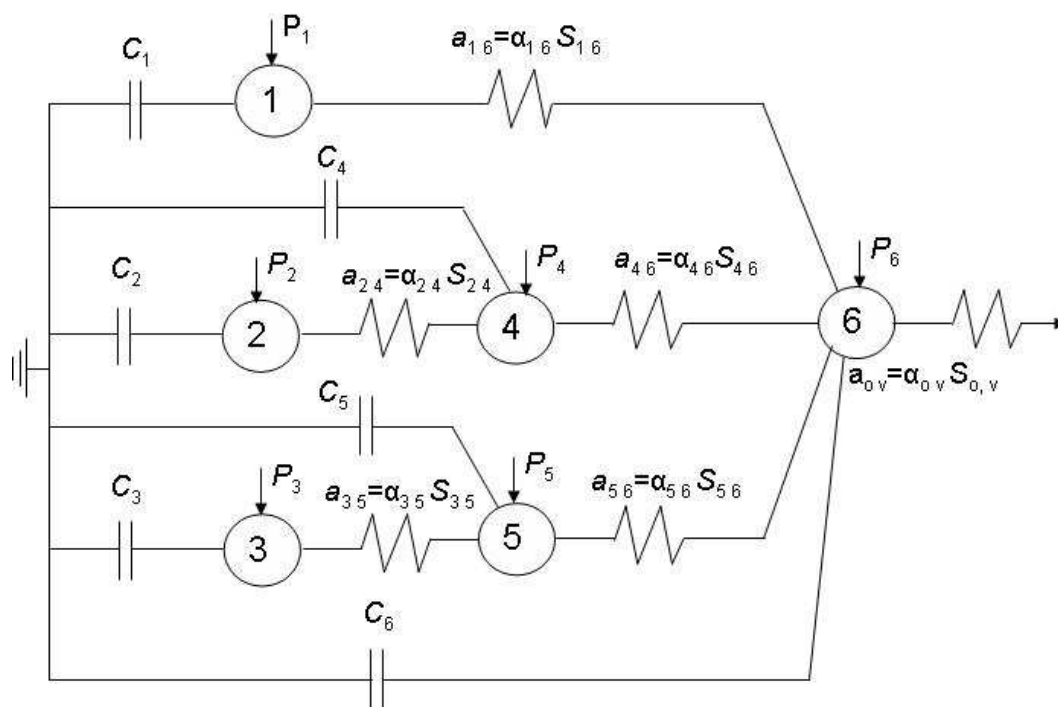
V práci [Bank, Rose] je podána obecná teorie konvergence bilanční metody. Autoři uvádějí odhad konvergence

$$\|u - u_L\| \leq \|u - u_B\| \leq C \|u - u_L\|,$$

kde $\|v\|$ značí energetickou normu (tj. $\|v\| = \sqrt{a(v, v)}$, přitom $a(v, v)$ je definováno vztahem (3.26)), $C > 0$ reálnou konstantu, u přesné řešení úlohy typu (3.17) – (3.18); u_L , resp. u_B značí numerické řešení získané užitím metody konečných elementů, resp. metody tepelných bilancí. Bilanční metoda tedy konverguje asymptoticky stejně rychle jako metody konečných prvků.

3. 3. Numerické řešení dynamických tepelných dějů

Jak již bylo uvedeno v předchozí kapitole, v případě dynamických tepelných dějů se spojitě měnícími se parametry v závislosti na čase lze danou úlohu řešit sestavením *náhradní tepelné sítě* se soustřednými parametry a získat pomocí ní hodnoty středního oteplení jednotlivých částí stroje. Elektrický stroj lze z hlediska tvorby a šíření tepla rozdělit na několik částí – *uzlů* náhradní tepelné sítě elektrického stroje. Každý uzel tedy reprezentuje danou část stroje. Do uzlu se soustřeďují veškeré ztráty (P) a tepelné kapacity (C) příslušné části stroje. Mezi jednotlivými uzly sítě jsou definovány tepelné vodivosti (a). Postup uvedený v této části obvykle používáme k výpočtu oteplení uzlových bodů sítě při nestacionárním zatížení. Lze však užít také v případě stacionárního zatížení, v takovém případě však obdržené výstupy obvykle slouží k orientačnímu stanovení oteplení stroje, přesnější výstupy obdržíme užitím například metod uvedených v odstavci 3. 2. Na obrázku 13 je znázorněn příklad jednoduché náhradní tepelné sítě olejového transformátoru.



Obrázek 13 – Náhradní tepelná síť transformátoru

Uveďme, jaké části stroje reprezentují jednotlivé uzly sítě na obrázku 13:

- 1. uzel – magnetický obvod,
- 2. uzel – hliník vinutí,
- 3. uzel – hliník zatížené části vinutí,

- 4. uzel – izolace vinutí,
- 5. uzel – izolace zatížené části vinutí,
- 6. uzel – olej, nádoba, radiátory.

Tepelné vodivosti mezi uzly sítě představují převrácené hodnoty tepelných odporů, uplatňujících se při sdílení tepla mezi částmi stroje. Obecně můžeme tepelnou vodivost a_{ik} mezi uzly i a k vyjádřit vztahem

$$(3.59) \quad a_{ik} = \alpha_{ik} S_{ik},$$

kde S_{ik} udává velikost teplosměnné plochy mezi uzly i a k . V dalším popisu metody budeme rozlišovat dva základní typy součinitele přestupu tepla α_{ik} mezi uzly i a k . První typ součinitele přestupu tepla je konstantní a lze vyjádřit ve tvaru

$$(3.60) \quad \alpha_{ik} = \frac{\lambda}{\delta},$$

kde λ je měrná tepelná vodivost materiálu, jímž je teplo vedeno, a δ udává tloušťku materiálu, jímž teplo prochází.

Budeme předpokládat, že druhý typ součinitele přestupu tepla α_{ik} je závislý na teplotách T_i a T_k uzlů i a k a že může být vyjádřen nelineárním vztahem

$$(3.61) \quad \alpha_{ik} = (c_1 T_k + c_2) c_3 (T_i - T_k)^{c_4},$$

kde funkce c_1, c_2, c_3 a c_4 jsou nezáporné parametry. Jak uvidíme později, úloha se pak bude řešit iteračně.

Tepelné ztráty P_i v i -tém uzlu jsou obecně teplotně závislé a lze je vyjádřit ve tvaru

$$(3.62) \quad P_i(T_i) = P_{i0} (1 + \beta_i T_i),$$

kde P_{i0} jsou tepelné ztráty v i -tém uzlu při 0°C a β_i je součinitel teplotní závislosti ztrát v i -tém uzlu.

Náhradní tepelnou síť o n uzlech lze obvykle popsat soustavou n obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu, kterou lze maticově vyjádřit ve tvaru

$$(3.63) \quad \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{P} - \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}$$

s počáteční podmínkou

$$(3.64) \quad \mathbf{T}_0 = [T_{01}, \dots, T_{0n}]^T.$$

Matice $\mathbf{A}$ je čtvercová a pro její prvky A_{ik} platí

$$(3.65) \quad A_{ik} = -a_{ik} \quad \text{pro } i \neq k,$$

$$A_{ii} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} + \sum_{k=i+1}^n a_{ik} - \beta_i P_{i0} + \frac{C_i}{\Delta t} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$A_{nn} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{kn} + a_{nv} - \beta_n P_{n0} + \frac{C_n}{\Delta t},$$

kde a_{nv} značí tepelnou vodivost mezi n -tým uzlem (olej) a okolím (vzduch).

Dále $\mathbf{P} = [P_1, \dots, P_n]^T$ je vektor tepelných ztrát v jednotlivých uzlech, $\mathbf{C} = [C_1, \dots, C_n]^T$ je konstantní vektor tepelných kapacit uzlů sítě a $\mathbf{T} = [T_1, \dots, T_n]^T$ je vektor teplot v uzlech sítě. Hodnota t značí čas. V čase $t = 0$ je počáteční teplota uzlů určena vektorem $\mathbf{T}_0$ z (3.64).

Vztahy (3.63) a (3.64) je dána Cauchyho úloha pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu. Jelikož maticová funkce $\mathbf{A}$ a vektorová funkce $\mathbf{P}$ jsou v závislosti na čase t spojité na intervalu $< 0, \infty)$, má daná Cauchyho úloha právě jedno řešení.

Pro praktickou potřebu nalezení oteplení příslušných částí náhradní tepelné sítě není nutné nalézt analytické řešení úlohy (teplota v příslušném uzlu vyjadřuje střední hodnotu části stroje, která je reprezentována daným uzlem). Při praktickém řešení tepelných sítí se osvědčil diferenční přepis časové derivace ve tvaru

$$(3.66) \quad \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right)_i^{(j)} = \frac{T_i^{(j)} - T_i^{(j-1)}}{\Delta t},$$

kde i značí i -tý uzel, (j) označuje j -tou časovou vrstvu. Náhradou derivace v (3.66) diferencí vzniká chyba $O(h)$, ale jak již bylo uvedeno, pro prováděné technické výpočty byla

tato přesnost postačující. Nahrazením časové derivace ve vztahu (3.63) pomocí difference (3.66) obdržíme soustavu lineárních algebraických rovnic ve tvaru

$$(3.67) \quad \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{T}^{(j)} = \mathbf{P}^{(j)} + \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \mathbf{T}^{(j-1)},$$

kde $\mathbf{A}^{(j)}$ je čtvercová matice řádu n tepelných vodivostí v j -tém časovém úseku. Prvky $a_{ik}^{(j)}$ matice $\mathbf{A}^{(j)}$ udávají tepelnou vodivost mezi i -tým a k -tým uzlem v j -tém časovém úseku. Vektor $\mathbf{P}^{(j)}$ obsahuje teplotně závislé ztráty v jednotlivých uzlech dané obecně vztahem (3.62) v j -tém časovém úseku. $\mathbf{C}$ je konstantní vektor tepelných kapacit uzlů řádu n , $\mathbf{T}^{(j)}$ je vektor teplot v jednotlivých uzlech řádu n v j -tém časovém úseku, Δt značí časový krok (rozdíl dvou po sobě následujících časových úseků).

Postup výpočtu přibližné hodnoty teploty v jednotlivých uzlech sítě je následující. Na počátku výpočtu zvolíme počáteční teplotu uzlů, obvykle volíme složky vektoru $\mathbf{T}^{(0)}$ rovny teplotě okolí. Ze vztahu (3.59) a (3.60), (3.61) určíme teplotní vodivosti $a_{ik}^{(1)}$ matice $\mathbf{A}^{(1)}$, stanovíme vektor tepelných ztrát uzlů $\mathbf{P}^{(1)}$ užitím vztahu (3.62). Následně řešíme soustavu lineárních algebraických rovnic (3.67), řešením je vektor $\mathbf{T}^{(1)}$ přibližných teplot v uzlech v 1. časovém úseku. Uvedený postup rekurentně opakujeme pro jednotlivé časové úseky. Ukončení výpočtu lze provést dvěma způsoby:

- 1/ je-li překročen zadaný maximální čas nestacionárního zatížení elektrického stroje (například 24 hodin – denní zatěžovací cyklus),
- 2/ klesne-li rozdíl teplot ve vybraných uzlech (obvykle s největší tepelnou kapacitou) ve dvou po sobě následujících časových úsecích pod zadanou mez (například 10^{-4} °C); tento způsob ukončení výpočtu lze užít také při výpočtu teplot uzlových bodů při stacionárním zatížení.

Postup uvedený v tomto odstavci se při praktických výpočtech osvědčil používat při nestacionárním zatížení elektrického stroje. Obdržené hodnoty teplot částí stroje jsou méně přesné, než při užití metod uvedených v odstavci 3. 2. při stacionárním zatížení. Avšak obdržené výstupy jsou výrazně lepší, než při užití odhadů uvedených v technických normách s uvedenou problematikou (například norma ČSN/EN 60076-2 *Výkonové transformátory – Část 2: Oteplení*. ČNI, 1999; zaměřená na oteplení a chlazení olejových transformátorů).

4. Výpočet oteplení stínění transformátoru při ustáleném stavu

V této části práce je pozornost věnována praktickým úlohám výpočtu oteplení ve stínění transformátoru. Jedná se přitom o stacionární zatížení stroje. Výpočty byly prováděny pro potřeby vývoje a testování transformátoru ŠKODA 70 MVA a transformátoru Dukovany 250 MVA. V testovací fázi byly vypočítané hodnoty oteplení porovnávány s hodnotami naměřenými. Výpočty byly prováděny v programovacích jazycích FORTRAN 77 a Pascal, grafy byly zpracovány pomocí nástroje MATLAB.

Problematika nelineárních úloh oteplení částí elektrických strojů je zmíněna v poslední části této kapitoly.

4. 1. Oteplení ve stínění transformátoru

V tomto odstavci se zaměříme na numerický výpočet rozložení oteplení a tepelných ztrát ve stínění transformátorové nádoby. Tepelné ztráty vznikají vlivem vířivých proudů indukovaných magnetickým polem v elektricky vodivých částech transformátoru. Uvažované stínění je v transformátorové nádobě umístěno způsobem znázorněným na obrázku 14.

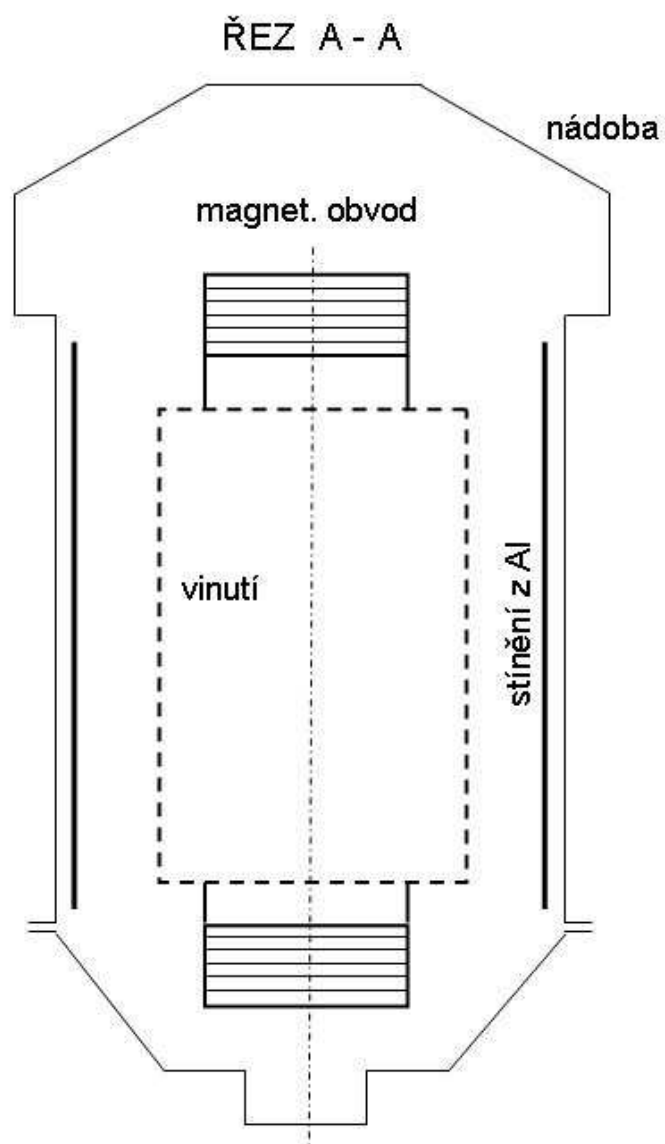
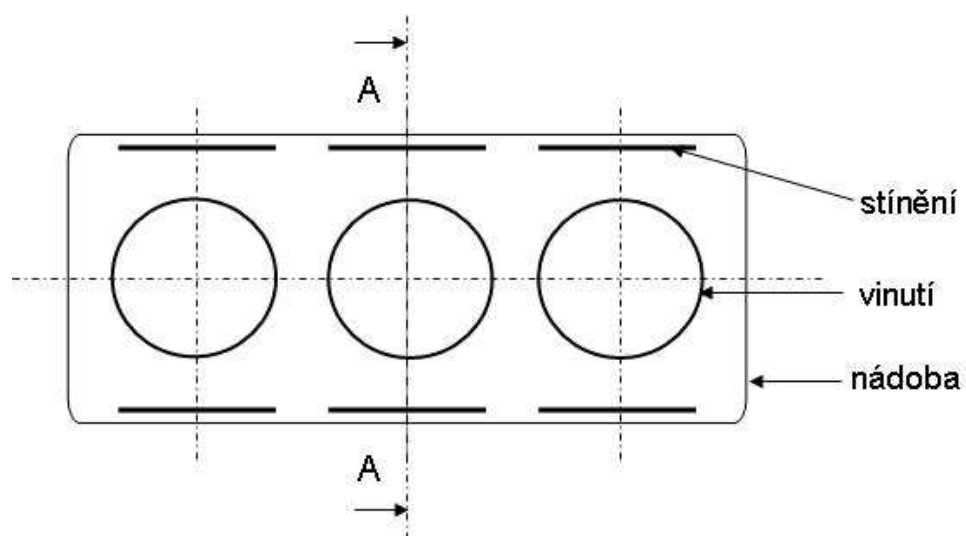
Při výpočtu oteplení a ztrát ve stínění se vychází z rozptylového magnetického pole, které se řeší v celém okně transformátoru. Stínění je ve tvaru tenkostěnné válcové plochy o poloměru rovnému vzdálenosti stínění od osy vinutí. Teplotní pole, stejně jako pole magnetické, se považuje za rotačně symetrické. Úlohu proto můžeme řešit ve dvou proměnných, budeme hledat pole oteplení v průřezu stínění Ω znázorněném na obrázku 15.

Hledané pole je popsáno eliptickou parciální diferenciální rovnicí

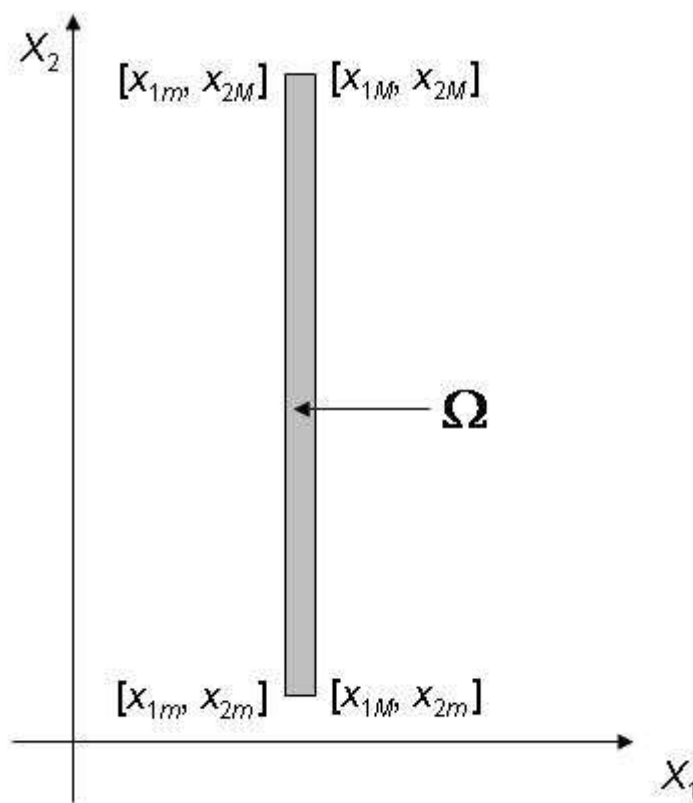
$$(4.1) \quad \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f \quad \text{v } \Omega$$

s Newtonovou okrajovou podmínkou

$$(4.2) \quad \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 + \alpha u = \alpha g \quad \text{na } \partial\Omega,$$



Obrázek 14 – Příčný řez - uspořádání stínění v nádobě transformátoru



Obrázek 15 – Řešená oblast – řez stíněním

kde $n = (n_1, n_2)$ je jednotkový vektor vnější normály. V rovnici (4.1) značí λ_1 , resp. λ_2 konstantní tepelnou vodivost ve směru osy x_1 , resp. x_2 . Oteplení $u = T_s - T_o$, kde T_s je teplota stínění a T_o teplota okolního oleje. Jelikož stínění může dosahovat značné výšky (například 2 m), je často potřebné při výpočtu respektovat proměnnou teplotu oleje vzhledem k souřadnici x_2 . V takovém případě je T_o teplota okolního oleje ve výšce x_{2m} (viz obrázek 15), funkce g ve vztahu (4.2) je zadána vztahem

$$(4.3) \quad g(x_2) = K(x_2 - x_{2m}),$$

kde K je konstanta vyjadřující oteplení oleje na jednotku délky ve směru osy x_2 . V případě, kdy lze teplotu okolního oleje považovat za konstantní (například za podmínky velmi intenzivní cirkulace oleje), pokládáme $K = 0$. Ve vztahu (4.1) je dále f objemová hustota ztrát, která je v případě hliníkového stínění vyjádřena vztahem

$$(4.4) \quad f = \sigma^2 \rho_0 (1 + \alpha_T u),$$

kde $\sigma = \sigma(x_2)$ je proudová hustota vířivých proudů (předpokládáme její závislost pouze na složce x_2), ρ_0 je měrný elektrický odpor hliníku při teplotě T_0 a α_T je součinitel závislosti měrného odporu na teplotě.

V okrajové podmínce (4.2) značí α hodnotu součinitele přestupu tepla na hranici $\partial\Omega$. Pro účely našich výpočtů je α konstantní hodnota na jednotlivých částech hranice $\partial\Omega$, postupně značíme $\alpha_L, \alpha_p, \alpha_H, \alpha_D$ jako součinitele přestupu tepla na „levé“, „pravé“, „horní“ a „dolní“ části hranice $\partial\Omega$.

Rovnici (4.1) můžeme užitím (4.4) přepsat na tvar

$$(4.5) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda_1 x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = -x_1 \sigma^2 \rho_0 (1 + \alpha_T u).$$

Jedná se tedy o typ úlohy (3.50) z odstavce 3. 2. 4. Úloha byla řešena metodou tepelných bilancí na základě vygenerování duální sítě B (viz odstavec 3. 2. 4.) Jestliže obdélníkovou oblast Ω rozdělíme na p ekvidistantních dílků ve směru osy x_1 a q ekvidistantních dílků ve směru osy x_2 , obdržíme při užití bilanční metody soustavu lineárních algebraických rovnic řádu $(p+1) \times (q+1)$, která byla pro zadané vstupní parametry v následujících uváděných příkladech symetrická, pásová a pozitivně definitní. Do paměti počítače tedy stačilo ukládat pouze diagonální prvky matice soustavy a prvky ležící nad diagonálou. Vyřešením vzniklé soustavy (byl použit LL^T rozklad matice soustavy) obdržíme aproximaci oteplení U_{rs} v uzlových bodech V_{rs} , $0 \leq r \leq p$, $0 \leq s \leq q$. Označme

$$h_1 = \frac{x_{1M} - x_{1m}}{p}, \quad h_2 = \frac{x_{2M} - x_{2m}}{q} \quad \text{a} \quad h = \max(h_1, h_2).$$

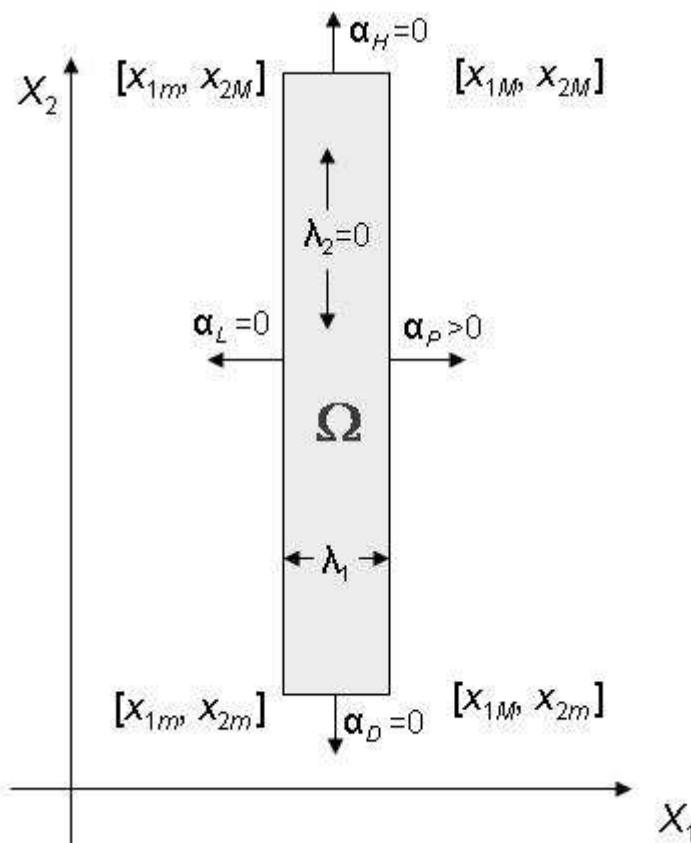
Pak v důsledku věty 3. 8 se při diskretizaci úlohy dopustíme chyby $O(h^2)$ při výpočtu oteplení ve vnitřních uzlových bodech V_{rs} .

4. 1. 1. Testovací úloha

Numerické řešení úlohy (4.1) získané užitím metody tepelných bilancí bylo testováno pro případ jednorozměrného vedení tepla ve směru osy x_1 (tj. $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 = 0$) na základě porovnání s řešením analytickým.

Předpokládejme, že součinitel přestupu α je nenulový pouze na „vnější svislé“ části $\partial\Omega$ (tj. ochlazování stínění by probíhalo pouze na jedné straně, $\alpha_p > 0$ a

$\alpha_L = \alpha_H = \alpha_D = 0$, viz obrázek 16), dále předpokládáme konstantní proudovou hustotu σ a součinitel teplotní závislosti el. odporu $\alpha_T = 0$. Za těchto předpokladů se rovnice (4.1) zjednoduší na tvar



Obrázek – 16 Schéma jednorozměrného vedení tepla

$$(4.6) \quad \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = -f,$$

kde $f = \sigma^2 \rho_0$.

Dále položíme $K = 0$ ve vztahu (4.3). Pak se vztah (4.2) redukuje na tvar

$$(4.7) \quad \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \alpha u = 0.$$

Analytické řešení úlohy (4.6) s okrajovou podmínkou (4.7) uvádí [Kutateladze, str. 85], v následujícím tvaru. Označme

$$H_1 = f \frac{x_{1M}^2}{4\lambda_1} \quad \text{a} \quad H_2 = 1 - \left(\frac{x_{1m}}{x_{1M}} \right)^2.$$

Pak pro oteplení ve vnitřním bodě x_1 platí

$$(4.8) \quad u(x_1) = H_1 \left[\frac{2\lambda_1}{\alpha_p x_{1M}} H_2 + 1 - \left(\frac{x}{x_{1M}} \right)^2 - 2 \left(\frac{x_{1m}}{x_{1M}} \right)^2 \ln \frac{x_{1M}}{x_1} \right],$$

pro bod x_{1m} platí

$$(4.9) \quad u(x_{1m}) = H_1 \left[\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha_p x_{1M}} + 1 \right) H_2 - 2 \left(\frac{x_{1m}}{x_{1M}} \right)^2 \ln \frac{x_{1M}}{x_{1m}} \right]$$

a pro bod x_{1M} platí

$$(4.10) \quad u(x_{1M}) = u(x_{1m}) + q \frac{x_{1M}^2}{4\lambda_1} \left[2 \ln \frac{x_{1M}}{x_{1m}} + 1 - \left(\frac{x_{1M}}{x_{1m}} \right)^2 \right].$$

Důkaz vztahů (4.8) až (4.10) je založen na transformaci rovnice (4.6) na tvar

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = - \frac{f x_1}{\lambda_1}$$

a opakovanou integrací dané rovnice podle proměnné x_1 a využitím platnosti $\alpha_p > 0$ a $\alpha_L = 0$.

V tabulce 1 jsou porovnány přibližné hodnoty oteplení vypočítané numericky užitím metody tepelných bilancí při postupném zjemňování kroku h_1 a „přesné“ hodnoty oteplení získané užitím vztahů (4.8) až (4.10) pro následující vstupní hodnoty: $f = 10^5$ [W/m³], $x_{1m} = 1$ [m], $x_{1M} = 1.1$ [m], $\alpha_p = 50$ [W/m²K], $\alpha_L = \alpha_H = \alpha_D = 0$, $\lambda_1 = 1$ [W/mK].

velikost kroku h_1 [m]	oteplení $u(x_{1m})$ [K] ($x_{1m} = 1.0$ m)		oteplení $u(x_1)$ [K] ($x_1 = 1.05$ m)		oteplení $u(x_{1M})$ [K] ($x_{1M} = 1.1$ m)	
	přibližné	přesné	přibližné	přesné	přibližné	přesné
0.05	673.33	675.37	551.37	552.41	190.91	190.88
0.025	674.88		552.15		190.91	
0.0167	675.17		552.29		190.91	

Tabulka 1 – Jednorozměrné vedení tepla – porovnání přibližné a přesné hodnoty oteplení

4. 1. 2. Příklad č. 1 – oteplení v hliníkovém stínění

Výše popsaná metoda tepelných bilancí je v tomto odstavci užita k výpočtu oteplení hliníkového stínění transformátoru ŠKODA o výkonu 70 MVA a napětí $121\pm 5\%$ / 10,5 kV. Hliníkové stínění o tloušťce 8 mm bylo umístěno ve vzdálenosti 207 mm od vinutí a 7 mm od stěny nádoby. Je řešena rovnice (4.5) s okrajovou podmínkou (4.2). Vstupní hodnoty veličin popsaných v úvodu odstavce 4.1. jsou následující:

$$x_{1m} = 0,8600 \text{ [m]}, \quad x_{1M} = 0,8680 \text{ [m]}, \quad x_{2m} = 0,8864 \text{ [m]}, \quad x_{2M} = 2,5100 \text{ [m]},$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 220 \text{ [W/Km]}, \quad \rho_0 = 0,3 \times 10^{-7} \text{ [\Omega m]}, \quad K = 10 \text{ [K/m]},$$

$$\alpha_T = 0.00409 \text{ [K}^{-1}\text{]}, \quad \alpha_L = \alpha_P = \alpha_H = \alpha_D = 50 \text{ [W/m}^2\text{K]}.$$

Proudová hustota $\sigma = \sigma(x_2)$ je zadána 19 hodnotami (předpokládáme závislost pouze na složce x_2) v následující tabulce.

x_2 [m]	$\sigma(x_2)$ [A/m ²]	x_2 [m]	$\sigma(x_2)$ [A/m ²]	x_2 [m]	$\sigma(x_2)$ [A/m ²]
2,5100	$0,35080 \times 10^7$	2,0820	$0,61560 \times 10^6$	1,1890	$0,14680 \times 10^7$
2,4740	$0,16380 \times 10^7$	1,9920	$0,71060 \times 10^6$	1,1100	$0,15390 \times 10^7$
2,4370	$0,41800 \times 10^6$	1,8590	$0,81140 \times 10^6$	1,0320	$0,13470 \times 10^7$
2,4010	$0,10930 \times 10^6$	1,7250	$0,91980 \times 10^6$	0,9592	$0,84170 \times 10^6$
2,3640	$0,24980 \times 10^5$	1,6350	$0,10120 \times 10^7$	0,9228	$0,46910 \times 10^6$
2,3240	$0,11320 \times 10^6$	1,3680	$0,13460 \times 10^7$	0,8864	$0,23890 \times 10^6$
2,1760	$0,37530 \times 10^6$				

Obdélníková oblast Ω je dělena ve směru osy x_1 na 2 dílky ($h_1 = 0,004$ [m]). Výpočet byl proveden pro uvedené vstupní parametry postupně pro dělení oblasti ve směru osy x_2 na 16 dílků ($h_2 = 0,10148$ [m]), 32 dílků ($h_2 = 0,050738$ [m]) a 64 dílků ($h_2 = 0,025369$ [m]).

Hodnota proudové hustoty $\sigma = \sigma(x_2)$ v uzlech vzniklé sítě byla aproximována užitím lineární interpolace hodnot zadaných v tabulce proudových hustot.

V následujících třech tabulkách je uvedeno oteplení v jednotlivých uzlových bodech oblasti Ω .

Výsledné pole oteplení [K](při dělení oblasti Ω na 16 dílků ve směru osy x_2 ,

uveden „každý řádek“ uzlových bodů)

x_2 [m]	$x_{1m} = 0,860$ [m]	$x_1 = 0,864$ [m]	$x_{1M} = 0,868$ [m]
2,51000	35,790	35,795	35,790
2,40852	29,262	29,264	29,262
2,30705	25,714	25,715	25,714
2,20557	23,680	23,681	23,680
2,10410	22,435	22,436	22,435
2,00262	21,528	21,529	21,528
1,90115	20,753	20,753	20,753
1,79967	20,071	20,072	20,071
1,69820	19,481	19,482	19,481
1,59672	18,991	18,992	18,991
1,49525	18,570	18,571	18,570
1,39377	18,136	18,138	18,136
1,29230	17,556	17,558	17,556
1,19082	16,746	16,748	16,746
1,08935	15,540	15,542	15,540
0,98787	13,746	13,748	13,746
0,88640	12,607	12,609	12,607

Výsledné pole oteplení [K](při dělení oblasti Ω na 32 dílků ve směru osy x_2 ,

uveden každý „2. řádek“ uzlových bodů)

x_2 [m]	$x_{1m} = 0,860$ [m]	$x_1 = 0,864$ [m]	$x_{1M} = 0,868$ [m]
2,51000	30,908	30,911	30,908
2,40852	27,145	27,147	27,145
2,30705	24,693	24,693	24,693
2,20557	23,188	23,188	23,188
2,10410	22,192	22,193	22,192
2,00262	21,409	21,409	21,409
1,90115	20,694	20,695	20,694
1,79967	20,042	20,043	20,042
1,69820	19,467	19,468	19,467
1,59672	18,986	18,987	18,986
1,49525	18,568	18,570	18,568
1,39377	18,135	18,137	18,135
1,29230	17,563	17,565	17,563
1,19082	16,758	16,760	16,758
1,08935	15,535	15,537	15,535
0,98787	13,806	13,807	13,806
0,88640	12,764	12,765	12,764

Výsledné pole oteplení [K]

(při dělení oblasti Ω na 64 dílků ve směru osy x_2 ,

uveden každý „4. řádek“ uzlových bodů)

x_2 [m]	$x_{1m} = 0,860$ [m]	$x_1 = 0,864$ [m]	$x_{1M} = 0,868$ [m]
2,51000	29,444	29,446	29,444
2,40852	26,571	26,572	26,571
2,30705	24,423	24,423	24,423
2,20557	23,061	23,061	23,061
2,10410	22,133	22,133	22,133
2,00262	21,380	21,381	21,380
1,90115	20,682	20,682	20,682
1,79967	20,037	20,038	20,037
1,69820	19,466	19,467	19,466
1,59672	18,986	18,987	18,986
1,49525	18,569	18,571	18,569
1,39377	18,138	18,140	18,138
1,29230	17,567	17,569	17,567
1,19082	16,761	16,764	16,761
1,08935	15,535	15,537	15,535
0,98787	13,823	13,825	13,823
0,88640	12,809	12,811	12,809

Z uvedených tří tabulek vidíme, že numerického řešení prakticky konverguje. Pro výpočet se ukázalo jako postačující dělit oblast Ω ve směru osy x_1 pouze na dva dílky. Z výpočtu vyplývá, že hodnotu oteplení v jednotlivých uzlových bodech výrazně ovlivňuje velikost zadané proudové hustoty.

Současně s výpočtem oteplení v uzlových bodech oblasti můžeme stanovit přibližné celkové tepelné ztráty P na jednotku délky v obvodovém směru. Ztráty P_{rs} odpovídající vnitřnímu prvku b_{rs} duální sítě B (viz odstavec 3. 2. 4.) stanovíme podle vztahu (4.4) ve tvaru

$$(4.11) \quad P_{rs} \approx \sigma^2(x_{rs})\rho_0(1 + \alpha_T u_{rs})h_1h_2 ,$$

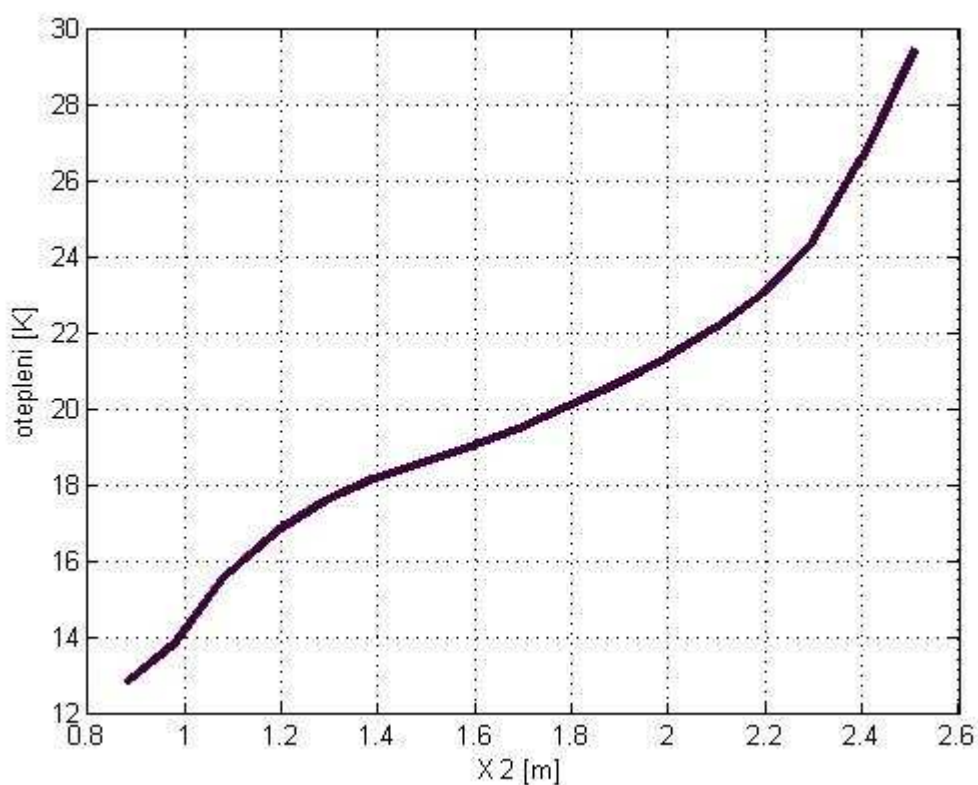
kde $x_{rs} = [x_{1m} + rh_1, x_{2m} + sh_2]$, $1 \leq r \leq p-1$, $1 \leq s \leq q-1$; p , resp. q udává počet dílků, na něž je rozdělena oblast Ω ve směru os x_1 a x_2 . Ztráty odpovídající uzlovým bodům ležícím na hranici $\partial\Omega$ se aproximují zcela analogicky. Výsledné přibližné ztráty jsou pak dány vztahem

$$(4.12) \quad P \approx \sum_{r=0}^p \sum_{s=0}^q P_{rs} .$$

Přibližné vypočítané ztráty jsou uvedeny v následující tabulce.

počet dílků ve směru osy x_2	přibližná hodnota celkových ztrát P [W/m]
16	560,80
32	492,14
64	474,62

Na závěr tohoto podstavce uvádíme na obrázku 17 graf oteplení v průřezu stínění pro body, u nichž je souřadnice $x_1 = 0.864$ [m] (střed průřezu stínění ve směru osy x_1), a to na základě vypočítaných hodnot při počtu dílků oblasti Ω ve směru osy x_2 rovnému 64.



Obrázek 17 – Graf oteplení hliníkového stínění v bodech s $x_1 = 0.864$ [m]

4. 1. 3. Příklad č. 2 – oteplení v hliníkovém stínění

Zadání této úlohy se liší od předchozího příkladu č. 1 v některých vstupních parametrech, pro přehlednost uvádíme všechny vstupní parametry:

$$x_{1m} = 0,8600 \text{ [m]}, \quad x_{1M} = 0,8680 \text{ [m]}, \quad x_{2m} = 0,8864 \text{ [m]}, \quad x_{2M} = 2,5100 \text{ [m]},$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 220 \text{ [W/Km]}, \quad \rho_0 = 0,3 \times 10^{-7} \text{ [\Omega m]}, \quad K = 0 \text{ [K/m]},$$

$$\alpha_T = 0.00409 \text{ [K}^{-1}\text{]}, \quad \alpha_L = \alpha_P = \alpha_H = \alpha_D = 50 \text{ [W/m}^2\text{K]}.$$

Proudová hustota $\sigma = \sigma(x_2)$ je zadána 26 hodnotami (předpokládáme závislost pouze na složce x_2) v následující tabulce.

x_2 [m]	$\sigma(x_2)$ [A/m ²]	x_2 [m]	$\sigma(x_2)$ [A/m ²]	x_2 [m]	$\sigma(x_2)$ [A/m ²]
1,9000	$0,1145 \times 10^7$	1,3310	$0,1028 \times 10^6$	0,5579	$0,4466 \times 10^5$
1,8530	$0,1073 \times 10^7$	1,2730	$0,3489 \times 10^6$	0,5293	$0,9049 \times 10^5$
1,8070	$0,8882 \times 10^6$	1,1880	$0,6172 \times 10^6$	0,4434	$0,3067 \times 10^6$
1,7600	$0,6980 \times 10^6$	1,0440	$0,8318 \times 10^6$	0,3576	$0,4202 \times 10^6$
1,7030	$0,4528 \times 10^6$	0,9300	$0,8641 \times 10^6$	0,1572	$0,5955 \times 10^6$
1,6460	$0,3578 \times 10^6$	0,7869	$0,7562 \times 10^6$	0,1286	$0,7146 \times 10^6$
1,4740	$0,3049 \times 10^6$	0,7010	$0,5877 \times 10^6$	0,0667	$0,9232 \times 10^6$
1,4450	$0,2432 \times 10^6$	0,6152	$0,3033 \times 10^6$	0,0333	$0,9558 \times 10^6$
1,3880	$0,1046 \times 10^6$	0,5866	$0,1719 \times 10^6$		

Počet dílků ve směru osy x_1 je roven 2 ($h_1 = 0,004$ [m]) a ve směru osy x_2 je roven 64 ($h_2 = 0,029167$ [m])

Výsledné pole oteplení [K]

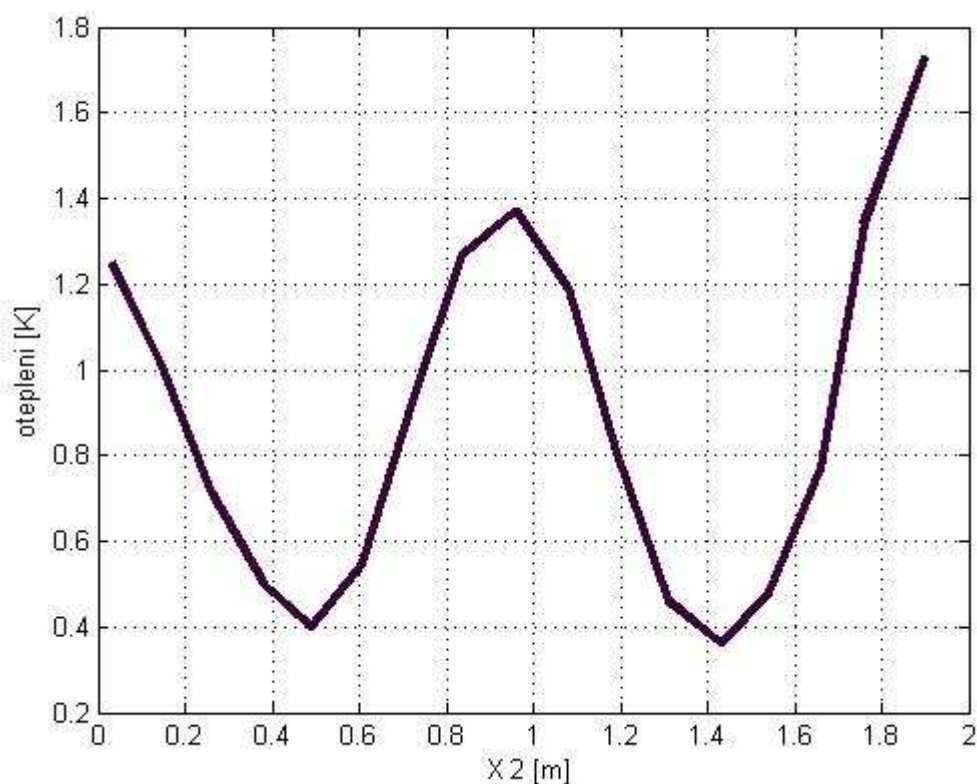
(uveden každý „4. řádek“ uzlových bodů)

x_2 [m]	$x_{1m} = 0,860$ [m]	$x_1 = 0,864$ [m]	$x_{1M} = 0,868$ [m]
1,90000	1,73200	1,73280	1,73200
1,78333	1,34920	1,34980	1,34920
1,66666	0,77886	0,77921	0,77886
1,54999	0,48220	0,48242	0,48220
1,43333	0,36969	0,36986	0,36969
1,31666	0,46108	0,46129	0,46108
1,19999	0,81250	0,81286	0,81249
1,08332	1,19200	1,19250	1,19200
0,96665	1,37860	1,37930	1,37860
0,84998	1,27500	1,27560	1,27500

0,73331	0,94292	0,94334	0,94291
0,61664	0,55698	0,55723	0,55697
0,49997	0,40287	0,40305	0,40287
0,38331	0,50014	0,50037	0,50014
0,26664	0,71523	0,71555	0,71523
0,14997	1,02080	1,02130	1,02080
0,03330	1,25860	1,25920	1,25860

Celkové tepelné ztráty $P \approx 161,52$ [W/m] .

V tomto příkladu byla uvažována konstantní teplota okolního oleje ($K = 0$), hodnota oteplení v uzlových bodech oblasti Ω nabývá z pohledu tepelných dějů nevýznamných hodnot. Na obrázku 18 je uveden graf oteplení v průřezu stínění, u nichž je souřadnice $x_1 = 0.864$ [m] (střed průřezu stínění ve směru osy x_1), a to na základě vypočítaných hodnot.



Obrázek 18 – Graf oteplení hliníkového stínění v bodech s $x_1 = 0.864$ [m]

4. 1. 4. Příklad č. 3 – oteplení v magnetickém stínění

V této úloze budeme uvažovat magnetické stínění transformátoru DUKOVANY o výkonu 250 MVA. Řešíme úlohu (4.1) s okrajovou podmínkou (4.2). Jsou zadány následující vstupní parametry:

$$\begin{aligned}x_{1m} &= 0,8600 \text{ [m]}, & x_{1M} &= 0,8680 \text{ [m]}, & x_{2m} &= 0,0333 \text{ [m]}, & x_{2M} &= 1,9 \text{ [m]}, \\ \lambda_1 &= 3 \text{ [W/Km]}, & \lambda_2 &= 20 \text{ [W/Km]}, & K &= 0 \text{ [K/m]}, \\ \alpha_L &= \alpha_H = \alpha_D = 50 \text{ [W/m}^2\text{K]}, & \alpha_p &= 15 \text{ [W/m}^2\text{K]}.\end{aligned}$$

Intenzita ztrát $f = f(x_2)$ je zadána 36 hodnotami (předpokládáme závislost pouze na složce x_2) v následující tabulce.

x_2 [m]	$f(x_2)$ [W/m ³]	x_2 [m]	$f(x_2)$ [W/m ³]	x_2 [m]	$f(x_2)$ [W/m ³]
1,90000	$0,93476 \times 10^6$	1,32300	$0,288 \times 10^5$	0,43900	$0,15665 \times 10^5$
1,85300	$0,71971 \times 10^6$	1,29000	$0,34411 \times 10^5$	0,38470	$0,24854 \times 10^5$
1,80700	$0,26588 \times 10^6$	1,12600	$0,27378 \times 10^5$	0,31070	$0,96379 \times 10^4$
1,76000	$0,17438 \times 10^5$	1,06100	$0,24332 \times 10^5$	0,28600	$0,49305 \times 10^4$
1,69900	$0,71425 \times 10^5$	0,93000	$0,22276 \times 10^5$	0,25170	$0,16517 \times 10^5$
1,63900	$0,29018 \times 10^5$	0,83180	$0,23945 \times 10^5$	0,22130	$0,35839 \times 10^5$
1,60800	$0,71297 \times 10^2$	0,76630	$0,26734 \times 10^5$	0,19100	$0,24295 \times 10^5$
1,57000	$0,85227 \times 10^4$	0,66810	$0,33012 \times 10^5$	0,16070	$0,49037 \times 10^2$
1,50000	$0,29581 \times 10^5$	0,60270	$0,33075 \times 10^5$	0,13030	$0,92717 \times 10^5$
1,45100	$0,17552 \times 10^5$	0,56990	$0,26723 \times 10^5$	0,10000	$0,38471 \times 10^6$
1,42100	$0,17890 \times 10^4$	0,53720	$0,14023 \times 10^5$	0,06667	$0,69264 \times 10^6$
1,35600	$0,17024 \times 10^5$	0,50450	$0,14296 \times 10^4$	0,03333	$0,82341 \times 10^6$

V tomto případě jsou uvažovány rozdílné tepelné vodivosti ve směru osy x_1 a x_2 , jedná se tedy o anizotropní prostředí. Dále je uvažován jiný součinitel přestupu tepla na „pravé“ části hranice $\partial\Omega$, než na ostatních částech hranice, předpokládá se konstantní teplota okolního oleje ($K = 0$). Počet dílků ve směru osy x_1 je 2 ($h_1 = 0,004$ [m]) a ve směru osy x_2 je roven 64 ($h_2 = 0,029167$ [m]).

Výsledné pole oteplení v uzlových bodech sítě je dáno v následující tabulce.

Výsledné pole oteplení [K]

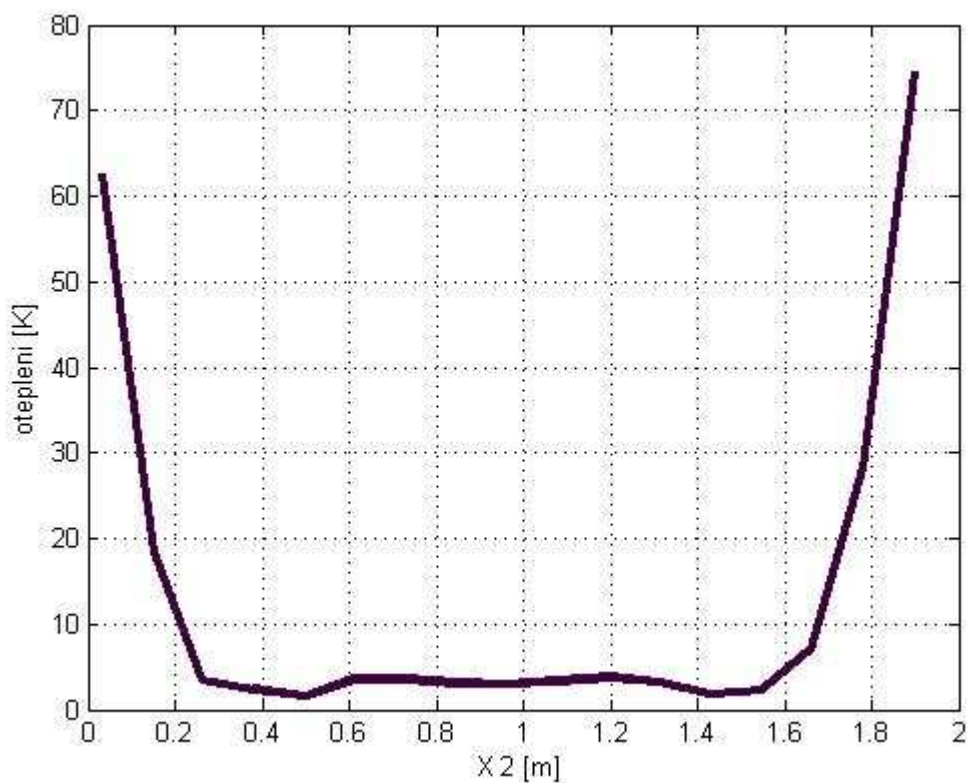
(uveden každý „4. řádek“ uzlových bodů)

x_2 [m]	$x_{1m} = 0,860$ [m]	$x_1 = 0,864$ [m]	$x_{1M} = 0,868$ [m]
1,90000	71,36900	74,53000	74,58500
1,78333	26,99700	28,21400	28,24200
1,66667	6,75390	7,05650	7,06290
1,55000	2,24770	2,34870	2,35090
1,43333	1,73660	1,81490	1,81660
1,31667	3,10590	3,24430	3,24700
1,20000	3,60110	3,76200	3,76520
1,08333	3,14450	3,28500	3,28790
0,96667	2,85570	2,98340	2,98600
0,85000	2,96290	3,09540	3,09810
0,73333	3,45780	3,61230	3,61540
0,61666	3,44920	3,60290	3,60590
0,50000	1,50380	1,57190	1,57350
0,38333	2,31910	2,42230	2,42430
0,26666	3,44910	3,60480	3,60840
0,15000	17,61400	18,41300	18,43200
0,03330	60,03500	62,69000	62,73600

Oteplení v uzlových bodech dosahuje vyšších hodnot především vlivem nižší tepelné vodivosti λ_1, λ_2 , vyšší intenzitou tepelných ztrát f , nižšími hodnotami koeficientů přestupu tepla α na hranici $\partial\Omega$.

Tepelné ztráty P_{rs} odpovídající vnitřnímu prvku b_{rs} duální sítě B (viz odstavec 3. 2. 4.) stanovíme podle vztahu $P_{rs} \approx f_{rs} h_1 h_2$, kde pro r, s platí stejné vztahy jako ve (4.11), hodnota f_{rs} je získána na základě interpolace zadaných hodnot intenzity ztrát v daných bodech. Ztráty odpovídající uzlovým bodům ležícím na hranici $\partial\Omega$ se aproximují analogicky. Přibližná hodnota ztrát je pak dána vztahem (4.12). V našem případě vychází celkové ztráty $P \approx 1232,1$ [W/m].

Na obrázku 19 je znázorněn graf oteplení v průřezu magnetického stínění pro body, u kterých je souřadnice $x_1 = 0,864$ [m] (střed průřezu stínění ve směru osy x_1), a to na základě vypočítaných hodnot.



Obrázek 19 – Graf oteplení průřezu hliníkového stínění v bodech s $x_1 = 0.864$ [m]

4. 1. 5. Příklad č. 4 – oteplení v magnetickém stínění

Uvažujeme stínění zkonstruované z transformátorových plechů. Budeme řešit úlohu (4.5) s okrajovou podmínkou (4.2). Na rozdíl od předchozích příkladů je v tomto případě proudová hustota $\sigma = \sigma(x_1, x_2)$ závislá na obou souřadnicích. Proudová hustota je zadána pomocí následující tabulky s 15 řádky (odpovídají složce x_1) a 3 řádky (odpovídají složce x_2). Jelikož je známo, že průběh proudové hustoty ve směru osy x_1 v magnetickém stínění má charakter exponenciální funkce, aproximujeme každou trojici zadaných hodnot σ se stejnou souřadnicí x_2 funkcí tvaru

$$(4.13) \quad f(x_1) = A e^{B x_1}$$

užitím metody nejmenších čtverců (viz [Ralston], str. 262), kde hodnoty A a B pro každou trojici zadaných hodnot σ se stejnou souřadnicí x_2 určíme řešením příslušných normálních rovnic. Aproximaci hodnoty σ_{rs} v uzlovém bodě $[x_{1m} + r h_1, x_{2m} + s h_2]$

obdržíme pomocí lineární interpolace hodnot funkcí $f_1(x_1) = A_1 e^{B_1 x_1}$ a $f_2(x_1) = A_2 e^{B_2 x_1}$ pro argument $x_{1m} + r h_1$. Přitom funkci f_1 , resp. f_2 určíme z nejbližší trojice zadaných hodnot σ ležící „pod“, resp. „nad“ bodem $[x_{1m} + r h_1, x_{2m} + s h_2]$. V případě potřeby (v blízkosti „vodorovné“ části $\partial\Omega$) provedeme lineární extrapolaci pomocí hodnot funkcí f_1, f_2 , které odpovídají nejbližším dvěma zadaným trojicím proudové hustoty ležícím „pod“, resp. „nad“ uzlovým bodem $[x_{1m} + r h_1, x_{2m} + s h_2]$.

Uveďme hodnoty vstupních veličin pro tento příklad.

$$\begin{aligned} x_{1m} &= 1,273 \text{ [m]}, & x_{1M} &= 1,28 \text{ [m]}, & x_{2m} &= 0.0 \text{ [m]}, & x_{2M} &= 1,2 \text{ [m]}, \\ \lambda_1 &= 3 \text{ [W/Km]}, & \lambda_2 &= 20 \text{ [W/Km]}, & \rho_0 &= 0,143 \times 10^{-6} \text{ [\Omega m]}, & K &= 0 \text{ [K/m]}, \\ \alpha_T &= 0.0 \text{ [K}^{-1}\text{]}, & \alpha_L &= \alpha_p = \alpha_H = 50 \text{ [W/m}^2\text{K]}, & \alpha_D &= 0.0 \text{ [W/m}^2\text{K]}. \end{aligned}$$

Proudová hustota $\sigma = \sigma(x_1, x_2)$ je zadána 45 hodnotami (předpokládáme závislost na složce x_1 i x_2) v následující tabulce.

Tabulka hodnot proudové hustoty $\sigma(x_1, x_2)$ [A/m²]

x_2 [m]	$x_{1m} = 1,274$ [m]	$x_1 = 1,276$ [m]	$x_{2M} = 1,2785$ [m]
1,1885	$0,1685 \times 10^7$	$0,7866 \times 10^6$	$0,1032 \times 10^7$
1,1712	$0,9679 \times 10^6$	$0,6399 \times 10^6$	$0,1781 \times 10^6$
1,1425	$0,1242 \times 10^7$	$0,2834 \times 10^6$	$0,2096 \times 10^6$
1,1195	$0,1255 \times 10^7$	$0,4088 \times 10^6$	$0,1284 \times 10^6$
1,0500	$0,1460 \times 10^7$	$0,4412 \times 10^6$	$0,1675 \times 10^6$
0,9577	$0,1674 \times 10^7$	$0,5034 \times 10^6$	$0,1884 \times 10^6$
0,8480	$0,1855 \times 10^7$	$0,5546 \times 10^6$	$0,2059 \times 10^6$
0,6577	$0,1980 \times 10^7$	$0,5889 \times 10^6$	$0,2173 \times 10^6$
0,5192	$0,1993 \times 10^7$	$0,5920 \times 10^6$	$0,2180 \times 10^6$
0,4038	$0,1980 \times 10^7$	$0,5877 \times 10^6$	$0,2164 \times 10^6$
0,2885	$0,1958 \times 10^7$	$0,5810 \times 10^6$	$0,2140 \times 10^6$
0,1731	$0,1936 \times 10^7$	$0,5743 \times 10^6$	$0,2118 \times 10^6$
0,0803	$0,1934 \times 10^7$	$0,5533 \times 10^6$	$0,2199 \times 10^6$
0,0266	$0,1934 \times 10^7$	$0,5743 \times 10^6$	$0,2118 \times 10^6$
0,0039	$0,1991 \times 10^7$	$0,5457 \times 10^6$	$0,1158 \times 10^6$

Obdélníková oblast Ω je dělena ve směru osy x_1 na 6 dílků ($h_1 = 0,0011667$ [m]), ve směru osy x_2 na 25 dílků ($h_2 = 0,048$ [m]).

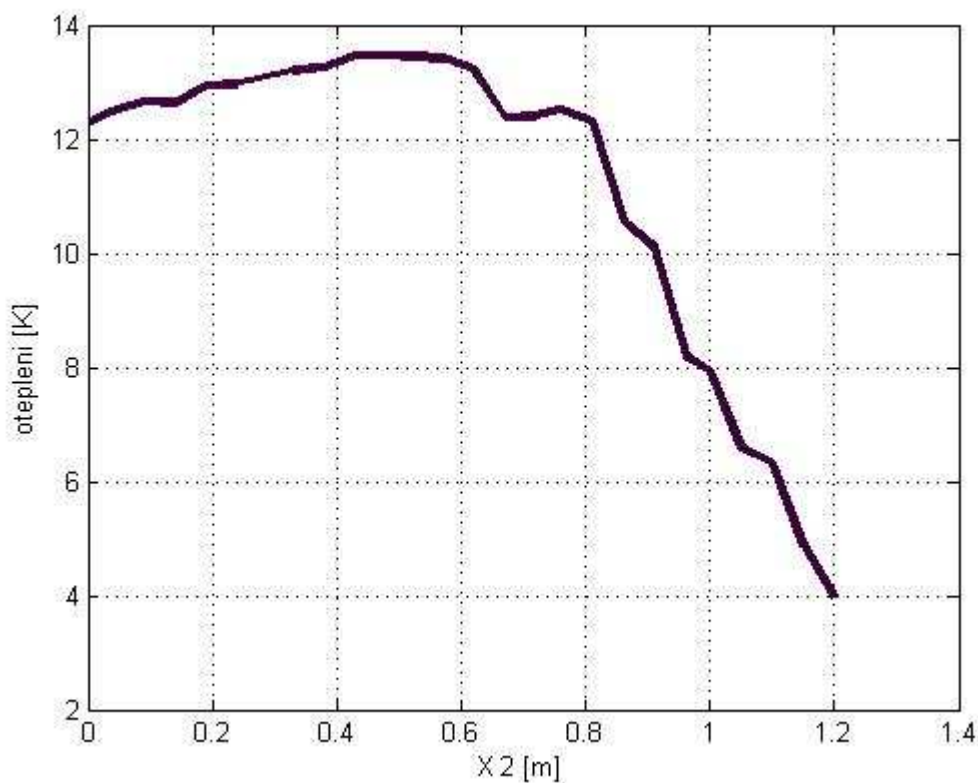
Výsledné pole oteplení v uzlových bodech sítě je dáno v následující tabulce.

Výsledné pole oteplení [K]
(uvedeny pouze „vybrané“ sloupce)

x_2 [m]	$x_{1m} = 1,2730$ [m]	$x_1 = 1,27533$ [m]	$x_1 = 1,27767$ [m]	$x_{1M} = 1,28$ [m]
1,200	3,9930	3,9651	3,8594	3,7313
1,152	4,8785	4,8766	4,7341	4,5627
1,104	6,3334	6,2677	6,0390	5,8072
1,056	6,6051	6,5702	6,3676	6,1366
1,008	7,9408	7,8669	7,5876	7,2991
0,960	8,2119	8,1824	7,9382	7,6524
0,912	10,1000	10,0030	9,6455	9,2782
0,864	10,5750	10,5200	10,1900	9,8183
0,816	12,3110	12,1930	11,7580	11,3110
0,768	12,5230	12,4240	12,0020	11,5530
0,720	12,3940	12,3050	11,8970	11,4550
0,672	12,3830	12,3080	11,9120	11,4740
0,624	13,2210	13,1110	12,6620	12,1870
0,576	13,4130	13,3100	12,8620	12,3820
0,528	13,4450	13,3450	12,8990	12,4180
0,480	13,4740	13,3730	12,9260	12,4440
0,432	13,4660	13,3620	12,9130	12,4300
0,384	13,2650	13,1690	12,7310	12,2580
0,336	13,2110	13,1090	12,6680	12,1950
0,288	12,9670	12,8740	12,4480	11,9860
0,240	12,9570	12,8600	12,4300	11,9670
0,192	12,9380	12,8360	12,4030	11,9390
0,144	12,6400	12,5550	12,1430	11,6920
0,096	12,6550	12,5590	12,1370	11,6840
0,048	12,4910	12,4010	11,9880	11,5410
0,000	12,2890	12,2130	11,8150	11,3780

Přibližná hodnota celkových ztrát daná vztahy (4.12) a (4.11) je $P \approx 1308,3$ [W/m] .

Na obrázku 20 je znázorněn graf oteplení v průřezu magnetického stínění pro body, u nichž je souřadnice $x_1 = x_{1m} = 1.273$ [m] („pravá svislá“ část hranice Ω), a to na základě vypočítaných hodnot .



Obrázek 20 – Graf oteplení v průřezu magnetického stínění v bodech s $x_1 = x_{1m} = 1,273$ [m]

4. 1. 6. Užití Richardsonovy extrapolace

Při výpočtu oteplení stínění a celkových tepelných ztrát ve stínění transformátoru se osvědčilo užití Richardsonovy extrapolace (viz [Ralston, str. 145]). Obdélníkovou oblast Ω rozdělíme ve směru osy x_1 na p dílků a ve směru osy x_2 na q dílků, přitom p je sudé číslo. Vypočítáme oteplení U_{rs} v uzlových bodech vzniklé sítě. Dále provedeme výpočet oteplení stínění při počtu dílků $\frac{p}{2}$ ve směru osy x_1 a opět q dílků ve směru osy x_2 . Nechť $U_{rs}^{(p)}$ značí oteplení uzlu $[x_{1m} + r h_1, x_{2m} + s h_2]$ vypočítané užitím jemnější sítě. Nechť tento bod je současně i uzlem hrubší sítě a označme vypočítané oteplení v při hrubší síti $U_{rs}^{(\frac{p}{2})}$. Pak přibližnou hodnotu oteplení v daném bodě můžeme extrapolovat ve tvaru

$$(4.14) \quad \bar{U}_{rs}^{(p)} = \frac{1}{3} \left(4U_{rs}^{(p)} - U_{rs}^{(\frac{p}{2})} \right).$$

Při praktických výpočtech se při pevně zvolené hodnotě q a pro $p = 6$ přesnost výsledného extrapolovaného řešení odpovídalo přesnosti jednoduchého řešení s $p = 16$.

Obdobný postup lze aplikovat při výpočtu celkových ztrát ve stínění na jednotku délky v obvodovém směru

$$(4.15) \quad \overline{P}^{(p)} = \frac{1}{3} \left(4P^{(p)} - P^{\left(\frac{p}{2}\right)} \right),$$

kde $P^{(p)}$, resp. $P^{\left(\frac{p}{2}\right)}$ jsou ztráty vypočítané při pevně daném počtu q a počtu dílků dělení oblasti Ω ve směru osy x_1 rovnému p , resp. $\frac{p}{2}$.

Uvažujme stínicí desku transformátoru a vypočtěme analyticky ztráty v pásu, v němž platí $1,273 \leq x_1 \leq 1,278$ a $0,2885 - \frac{h_2}{2} \leq x_2 \leq 0,2885 + \frac{h_2}{2}$, kde $h_2 = 0,048$. Předpokládejme dále, že proudová hustota σ je konstantní ve směru osy x_2 a ve směru osy x_1 má exponenciální průběh ve tvaru

$$(4.16) \quad \sigma(x_1) = 0,1798 \times 10^7 e^{-488,35(x_1 - 1,274)}.$$

Pak analytickým výpočtem obdržíme celkové ztráty v daném pásu

$$(4.17) \quad P = \left[\int_{1,273}^{1,278} \sigma^2(x_1) \rho_0 dx_1 \right] h_2 = \left[\int_{1,273}^{1,278} (0,1798 \times 10^7 e^{-488,35(x_1 - 1,274)})^2 0,143 \times 10^{-6} dx_1 \right] 0,048 =$$

$$= 60,2707 \text{ [W/m]}.$$

Nyní pro dané dělení uvedeného pásu ve směru osy x_1 vypočítáme druhé mocniny proudové hustoty v uzlových bodech $x_r = x_{1m} + rh_1$ pásu užitím vztahu (4.16), počítáme hodnoty $P_r = \sigma^2(x_r) \rho_0 b_r$, kde b_r je plocha prvku duální sítě příslušná odpovídajícímu vrcholu sítě pásu, sečtením hodnot P_r obdržíme přibližnou hodnotu ztrát v daném pásu. Následující tabulka 2 udává závislost vypočítaných přibližných ztrát na počtu dílků, na něž je pás ve směru osy x_1 rozdělen.

počet dílků ve směru osy x_1	ztráty v pásu [W/m]
2	38,558
4	53,517
6	57,133
8	58,478
10	59,115
12	59,683
14	59,692
16	59,817
20	59,981
50	60,247
10	60,279

Tabulka 2 – Závislost hodnoty vypočtených ztrát na počtu dělicích bodů

Extrapolované hodnoty ztrát v daném pásu užitím Richardsonovy extrapolace jsou uvedeny v tabulce 3.

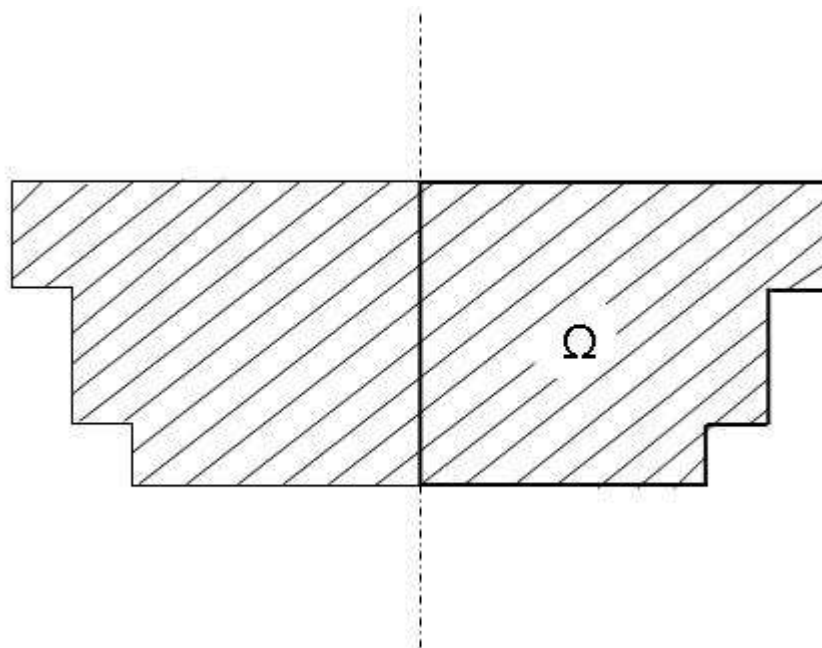
počet dílků ve směru osy x_1		extrapolovaná hodnota ztrát v pásu [W/m]
2	4	58,503
4	8	60,132

Tabulka 3 – Závislost hodnoty extrapolovaných ztrát na počtu dělicích bodů

4. 2. Numerické řešení nelineárních úloh

Lineární modely vedení tepla v elektrických strojích při stacionárním zatížení lze úspěšně řešit užitím stávajících numerických metod. Odlišná situace však nastává v případě nelineárních modelů, neboť neexistuje obecná metoda k jejich řešení. Jednotlivé typy nelineárních problémů je proto nezbytné řešit individuálně.

Jako praktickou nelineární úlohu lze uvést příklad vedení tepla v magnetickém obvodu velkých transformátorů chlazených olejem. Magnetický obvod se skládá z několika pravoúhlých polyedrických oblastí, které jsou navzájem odděleny kanálky s proudícím olejem. Na obrázku 21 je znázorněn řez jedné z uvedených oblastí (z konstrukčních důvodů nejsou hranice oblasti zaoblené).



Obrázek 21 – Dvourozměrná oblast části řezu magnetického obvodu transformátoru

Vzhledem k symetrii budeme uvažovat pouze pravou část oblasti, označíme ji Ω .

Klasickou úlohu vedení tepla v Ω lze formulovat v následujícím tvaru:

nalézt funkci $u \in C^1(\overline{\Omega})$ takovou, aby $u|_{\Omega} \in C^2(\Omega)$ a aby platilo

$$(4.18) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_{11}(u) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_{22}(u) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = f \quad \text{v } \Omega$$

s Neumanovou okrajovou podmínkou

$$(4.19) \quad \alpha u + a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 = g \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Přitom koeficienty $a_{11}(u)$, $a_{22}(u)$ udávají tepelné vodivosti materiálu ve směru osy x_1 a x_2 ; funkce f udává hustotu tepelných zdrojů (vzniká v důsledku střídavého elektromagnetického pole), α je koeficient přestupu tepla na hranici oblasti, funkce g je na hranici $\partial\Omega$ zadána ve tvaru $g = \alpha u_0$, kde u_0 značí teplotu okolního chladicího oleje. Hodnota $\alpha = 0$ na svislé levé části $\partial\Omega$, na zbývajících částech hranice $\partial\Omega$ je dána konstantní hodnota $\alpha = \alpha_0$.

Pro uvedenou úlohu je podstatná skutečnost, že koeficienty tepelných vodivostí $a_{11}(u)$ a $a_{22}(u)$ jsou nelineárně závislé na teplotě, $a_{11}(u) \neq a_{22}(u)$ a přitom typ nelinearity je v každém směru jiný. Jedná se tedy o případ *nelineárního ortotropního materiálu*.

Položme

$$(4.20) \quad a(y; w, v) = (\mathbf{A}(y) \operatorname{grad} w, \operatorname{grad} v)_{0, \Omega} + \langle \alpha w, v \rangle_{0, \partial \Omega}$$

a

$$(4.21) \quad F(v) = (f, v)_{0, \Omega} + \langle g, v \rangle_{0, \partial \Omega},$$

$$\text{kde } \mathbf{A}(y) = \begin{pmatrix} a_{11}(y) & 0 \\ 0 & a_{22}(y) \end{pmatrix}, \quad y, w, v \in H^1(\Omega), \quad \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ značí skalární součin v } L^2(\partial \Omega).$$

Definice 4. 1.

Funkci $u \in H^1(\Omega)$ nazveme *slabým řešením úlohy* (4.18) – (4.19), jestliže platí

$$(4.22) \quad a(u; u, v) = F(v) \quad \text{pro každé } v \in H^1(\Omega).$$

Existence Galerkonovy aproximace slabého řešení definovaného vztahem (4.22) a postup získání této aproximace pomocí Kačanovovy metody je ukázáno v [Křížek, Segeth].

Položíme-li $y = w = u$ a $v = 1$, pak ze vztahů (4.20), (4.21) a definice 4.1. obdržíme

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega} \alpha u \, ds &= \langle \alpha u, 1 \rangle_{0, \partial \Omega} = a(u; u, 1) = F(1) = (f, 1)_{0, \Omega} + \langle g, 1 \rangle_{0, \partial \Omega} = \int_{\Omega} f(x) \, dx + \\ &+ \int_{\partial \Omega} g \, ds = \int_{\Omega} f(x) \, dx + \int_{\partial \Omega} \alpha u_0 \, ds. \end{aligned}$$

Odsud dostáváme

$$(4.23) \quad \int_{\partial \Omega} \alpha(u - u_0) \, ds = \int_{\Omega} f(x) \, dx.$$

Ze vztahu (4.23) plyne, že střední nárůst oteplení $\vartheta = u - u_0$ na hranici $\partial \Omega$ je zcela nezávislý na typu nelinearity koeficientů tepelné vodivosti $a_{11}(u)$ a $a_{22}(u)$.

Jinou třídou nelineárních úloh jsou případy monotónních operátorů, teorie monotónních operátorů je účinným nástrojem k vyšetřování široké třídy nelineárních operátorů. Problematika nelineárních monotónních operátorů je například řešena v [Gajewski, Gröger, Zacharias], [Feistauer, 1989], [Křížek, Neittaanmäki, 1996], [Ženíšek, 1990]; nelineární problematika je také vyšetřována v [Nečas, Hlaváček], [Hlaváček, Křížek, Malý], [Glowinski, 1984].

5. Výpočet oteplení transformátoru při dynamickém zatížení

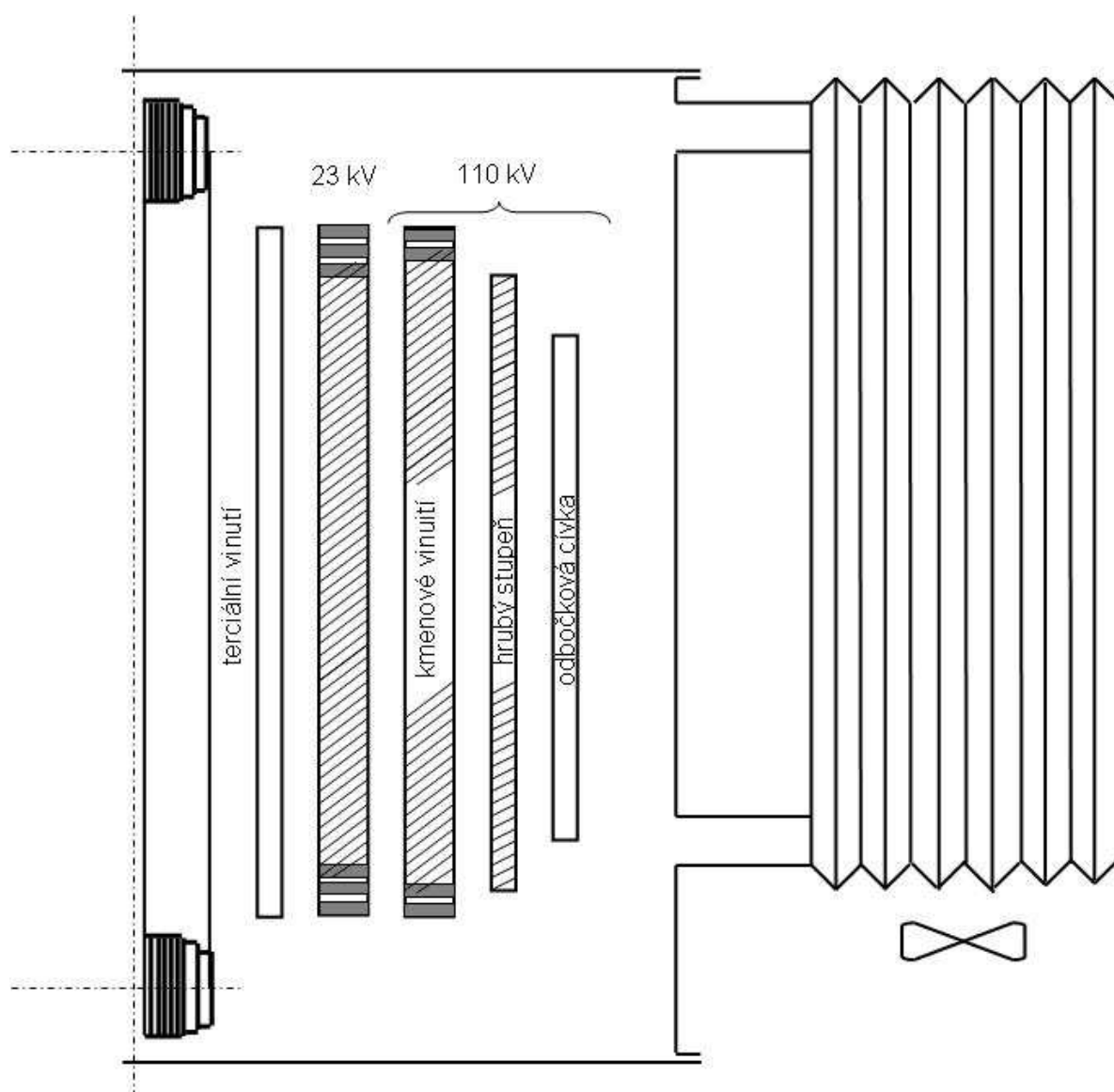
Předchozí kapitola se zabývala výpočtem oteplení stínění transformátoru při stacionárním zatížení. Nyní se zaměříme na konkrétní úlohy popisující nestacionární zatěžování transformátoru a s tím související potřebu určení rozložení teplot v jednotlivých částech transformátoru. Přitom stacionárním zatížení při ustáleném tepelném stavu stroje lze považovat za speciální případ neustálených tepelných dějů.

Informace o rozložení teplot v transformátoru (zejména o teplotě nejteplejšího místa vinutí při různých podmínkách nestacionárního zatěžování) jsou důležité z hlediska zatížitelnosti stroje. Tyto poznatky se uplatňují při řešení různých havarijních situací, při výběru vhodných jmenovitých parametrů a zatěžovacích podmínek u nově zprovozněných transformátorů. Znalost rozložení teplot při dynamickém zatěžování umožňuje také vypracovat podrobné pokyny pro obsluhu velkých síťových transformátorů v rozvodnách vvn. U důležitých nebo hodně rozšířených transformátorů lze při znalosti tepelného stavu vypracovat doporučení pro jejich zatěžování. Znalost tepelných poměrů je také nepostradatelná při návrzích transformátorů pro speciální zatěžovací podmínky.

V odstavci 3. 3. byla popsána metoda náhradní tepelné sítě se soustřednými parametry. Uvedená metoda je rozšířena a obecně užívána v oblasti rotačních elektrických strojů při stacionárních i nestacionárních tepelných dějích. Obdobně je tomu i v případě transformátorů (viz například [Lindsay]). Zdůrazňme, že metoda náhradní tepelné sítě poskytuje pouze informace o středních teplotách jednotlivých částí stroje. Tuto metodu lze považovat za střední cestu mezi podrobným výpočtem při stacionárním zatížení a velmi zjednodušenými postupy používanými v normách (například [ČSN/EN 60076 – 2]). K výhodám této metody patří její jednoduchost, variabilnost umožňující navrhnout tepelnou síť tak, aby vystihovala všechna tepelná specifika daného transformátoru. Jistou nevýhodou může být obtížné stanovení některých parametrů (zejména teplotně závislých) a obtížné měření teplot jednotlivých částí transformátoru za účelem zpětné kontroly výpočtů a korekce parametrů sítě (u metody sítě je korekce běžným krokem výpočtu vyplývajícím z toho, že některé vodivosti není možno předem stanovit s dostatečnou přesností). Nestacionární tepelné děje v transformátorech se obvykle vyšetřují v souvislosti se stanovením teploty nejteplejšího místa vinutí, která je rozhodující z hlediska životnosti a spolehlivosti transformátoru. Přesnost

a stanovení hledané teploty nejteplejšího místa vinutí závisí především na vhodně zvolené náhradní tepelné síti. Zejména se jedná o sestavení dostatečně jemné sítě. Čím je požadována přesnější a jemnější síť, tím je zapotřebí detailněji respektovat vlastnosti konkrétního typu transformátoru (například systém chlazení, konstrukci vinutí a magnetického obvodu). V určitém stádiu však další zjemňování sítě přestává být efektivní z důvodu omezené přesnosti vstupních parametrů, dané fyzikálními a technologickými příčinami.

Ve zbývající části této kapitoly je uveden popis jednoduché a podrobné náhradní tepelné sítě pro olejový transformátor 40 MVA – 8ERH, jehož schéma je znázorněno na obrázku 22.



Obrázek 22 – Schematické znázornění transformátoru 40 MVA – 8ERH

Pro uvedený transformátor je proveden výpočet teploty jeho jednotlivých částí pro dané zatížení užitím jednoduché a podrobné náhradní tepelné sítě.

5. 1. Jednoduchá náhradní tepelná síť

Schematicky je jednoduchá náhradní tepelná síť znázorněna na obrázku 13, str. 50. Přitom jednotlivé uzly sítě reprezentují následující části transformátoru:

- 1. uzel – magnetický obvod,
- 2. uzel – hliník vinutí 23 kV,
- 3. uzel – hliník zatížené části vinutí 110 kV (tj. kmenové vinutí a hrubý stupeň regulace),
- 4. uzel – izolace vinutí 23 kV,
- 5. uzel – izolace zatížené části vinutí 110 kV,
- 6. uzel – olej, nádoba, radiátory.

Význam jednotlivých parametrů sítě je zřejmý z obrázku 13. Teplotně nezávislé hodnoty $a_{2,4}$ a $a_{3,5}$ jsou tepelné vodivosti charakterizující vedení tepla izolací vinutí a jsou dány vztahy (3.59) a (3.60). Přitom λ ve vztahu (3.60) udává pro uvedené vodivosti měrnou tepelnou vodivost izolace, δ příslušnou vrstvu izolace. Teplota uzlu č. 4, resp. uzlu č. 5 vyjadřuje střední teplotu povrchu příslušného vinutí. Vedení tepla uvnitř magnetického obvodu (uzel č. 1) v této síti není uvažováno. Teplota uzlu č. 1 tak udává střední teplotu povrchu magnetického obvodu. Tepelné vodivosti $a_{1,6}$, $a_{4,6}$ a $a_{5,6}$ jsou vodivosti vyjadřující přestup tepla z povrchu aktivní části do oleje. Součinitelé přestupu tepla $\alpha_{1,6}$, $\alpha_{4,6}$ a $\alpha_{5,6}$ ze vztahu (3.50) jsou zadány vztahem (3.61), závisí na teplotě oleje i na rozdílu teplot uzlů a oleje. Součinitel přestupu tepla mezi olejem a vzduchem $\alpha_{o,v}$ je dán nelineárním vztahem

$$(5.1) \quad \alpha_{o,v} = con_1 (T_o - T_v)^{con_2},$$

kde con_1 , con_2 jsou reálné konstanty. Vztah (5.1) je speciálním případem vztahu (3.61). Pro uzly sítě jsou dále zadány jejich konstantní tepelné kapacity, chladicí plochy mezi uzly a jejich počáteční teploty (obvykle je pokládáme rovny teplotě okolního vzduchu). Pro jednotlivé časové intervaly s typem chlazení ONAN, resp. ONAF (viz dále poznámka 5. 1.) jsou stanoveny hodnoty tepelných ztrát P_{i0} v i -tém uzlu při 0 °C a součinitel teplotní závislosti β_i pro i -tý uzel. Pomocí hodnot P_{i0} a β_i lze užitím vztahu (3.62) stanovit

tepelné ztráty P_i v i -tém uzlu pro daný čas a typ chlazení. Pokud jsou zadány dva a více časových intervalů typů chlazení, předpokládáme, že pořadí zadáných časových intervalů se periodicky opakuje, hovoříme o cyklicky proměnném zatěžování. V následující části uvádíme vstupní hodnoty a vypočítané teploty uzlů jednoduché tepelné sítě v případě konstantního a cyklicky proměnného zatížení transformátoru.

Poznámka 5. 1.

U olejových transformátorů je udáván způsob chlazení pomocí čtyřmístného písemného kódu. V této práci jsou uváděny pouze typy chlazení označené pomocí kódů ONAF a ONAN. Přitom význam jednotlivých písmen v kódu je následující:

1. pozice = O ... chladicím médiem je minerální olej,
2. pozice = N ... přirozené termosifonové proudění procházející chladicím zařízením a vinutím,
3. pozice = A ... vnějším chladicím médiem je vzduch,
4. pozice = F ... nucená cirkulace (ventilátory, čerpadla) vnějšího chladicího média,
4. pozice = N ... přirozené konvekční proudění vnějšího chladicího média.

Podrobněji jsou způsoby chlazení a jejich symbolické značení popsány v normě [ČSN/EN 60076-2].

5. 1. 1. Příklad konstantního zatížení transformátoru

Jsou zadány vstupní parametry jednoduché náhradní tepelné sítě, popsané v odstavcích 3. 3 a 5. 1., se šesti uzly při konstantním zatížení nabývajících následujících hodnot.

vektor ztrát v uzlech při 0 [°C]:

$$\mathbf{P}_0 = [40000, 71000, 86000, 0.0, 0.0, 10000] \text{ [W]}$$

typ chlazení:

ONAF

vektor tepelných kapacit uzlů:

$$\mathbf{C} = [10382000, 1364000, 2203000, 133000, 625000, 53120000] \text{ [Ws/K]}$$

součinitelé teplotní závislosti v uzlech:

$$\beta_1 = 0.0, \beta_2 = 0.003, \beta_3 = 0.00264, \beta_4 = 0.0, \beta_5 = 0.0, \beta_6 = 0.0 \text{ [1/K]}$$

teplosměnné plochy:

dvojice uzlů		plocha [m ²]
1	6	35.7
2	4	80.5
3	5	172.4
4	6	80.5
5	6	172.4
6	vzduch	467.3

konstantní součinitelé přestupu tepla:

dvojice uzlů i, k		α [W/m ² K]
2	4	500.0
3	5	292.0

proměnné součinitelé přestupu tepla – parametry (ve vztahu (3.61)):

dvojice uzlů i, k		c_1	c_2	c_3	c_4
1	6	0.007	0.51	35.0	0.3
4	6	0.007	0.51	35.0	0.3
5	6	0.007	0.51	35.0	0.3

součinitel přestupu tepla olej-vzduch (α_{ov}) – parametry (ve vztahu (5.1)):

$$con_1 = 13.0, \quad con_2 = 0.065$$

počáteční teplota uzlů:

$$T_0 = [21.0, 21.0, 21.0, 21.0, 21.0, 21.0] [^{\circ}\text{C}]$$

teplota okolí (vzduchu):

$$T_v = 21 [^{\circ}\text{C}]$$

časový krok:

$$\Delta t = 60 [\text{s}]$$

celková délka časového intervalu:

$$30 [\text{h}]$$

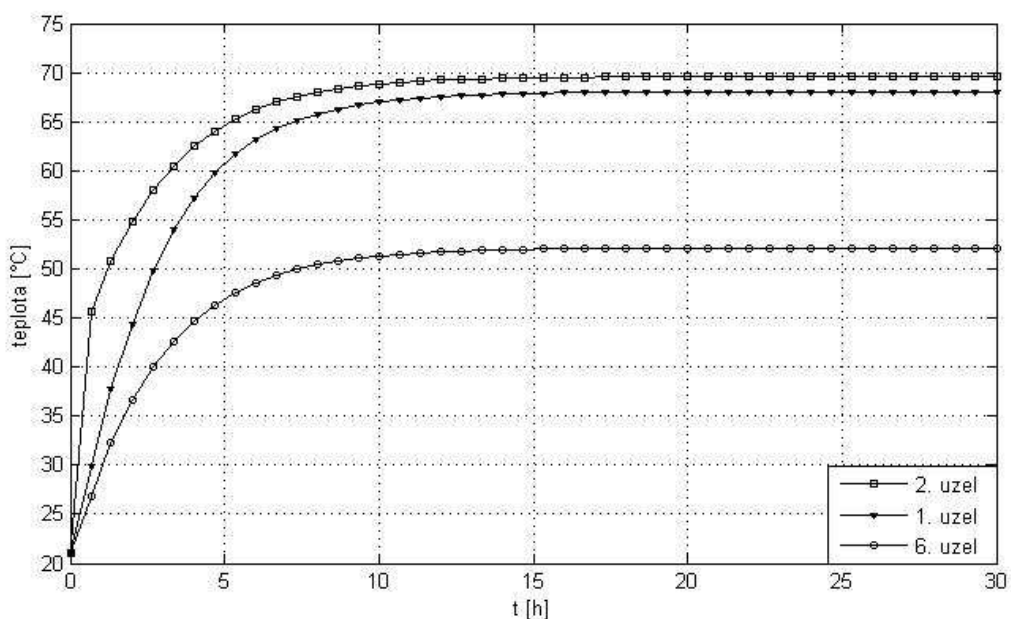
Vypočítané teploty uzlů

(v závislosti na čase, uvedeny teploty uzlů pro vybrané časy)

čas [h]	teplota uzlů sítě [°C]					
	1. uzel	2. uzel	3. uzel	4. uzel	5. uzel	6. uzel
0.67	29.81	45.62	30.99	43.70	37.22	26.88
1.33	37.72	50.77	44.34	48.80	42.50	32.35
2.00	44.42	54.79	48.51	52.79	46.65	36.61
2.67	49.82	57.97	51.79	55.94	49.90	39.96
3.33	54.03	60.48	54.38	58.42	52.47	42.60
4.00	57.28	62.46	56.42	60.39	54.49	44.68
4.67	59.77	64.03	58.03	61.94	56.09	46.31
5.33	61.68	65.25	59.30	63.16	57.34	47.60
6.00	63.14	66.22	60.29	64.11	58.32	48.60
6.67	64.26	66.97	61.06	64.86	59.09	49.38
7.33	65.12	67.55	61.66	65.44	59.68	49.99
8.00	65.79	68.01	62.13	65.89	60.15	50.47
8.67	66.30	68.36	62.49	66.24	60.51	50.84
9.33	66.70	68.64	62.77	66.52	60.79	51.12
10.00	67.01	68.85	62.99	66.73	61.00	51.34
10.67	67.24	69.02	63.16	66.89	61.17	51.52
11.33	67.43	69.15	63.29	67.02	61.30	51.65
12.00	67.57	69.24	63.39	67.12	61.40	51.75
12.67	67.68	69.32	63.47	67.19	61.48	51.83
13.33	67.76	69.30	63.53	67.25	61.54	51.89
14.00	67.83	69.43	63.58	67.30	61.59	51.94
14.67	67.88	69.46	63.62	67.33	61.62	51.98
15.33	67.92	69.49	63.65	67.36	61.65	52.01
16.00	67.95	69.51	63.67	67.38	61.67	52.03
16.67	67.97	69.53	63.68	67.40	61.69	52.05
17.33	67.99	69.54	63.70	67.41	61.70	52.06
18.00	68.00	69.55	63.71	67.42	61.71	52.07
18.67	68.01	69.56	63.72	67.43	61.72	52.08
19.33	68.02	69.56	63.72	67.43	61.73	52.08
20.00	68.03	69.57	63.73	67.44	61.73	52.09
20.67	68.03	69.57	63.73	67.44	61.73	52.09
21.33	68.04	69.58	63.73	67.44	61.74	52.09
22.00	68.04	69.58	63.73	67.45	61.74	52.10
22.67	68.04	69.58	63.74	67.45	61.74	52.10
23.33	68.04	69.58	63.74	67.45	61.74	52.10
24.00	68.05	69.58	63.74	67.45	61.74	52.10
24.67	68.05	69.58	63.74	67.45	61.74	52.10
25.33	68.05	69.58	63.74	67.45	61.74	52.10
26.00	68.05	69.58	63.74	67.45	61.74	52.10
26.67	68.05	69.58	63.74	67.45	61.74	52.10
27.33	68.05	69.58	63.74	67.45	61.74	52.10
28.00	68.05	69.58	63.74	67.45	61.74	52.10
28.67	68.05	69.58	63.74	67.45	61.74	52.10

29.33	68.05	69.58	63.74	67.45	61.74	52.10
30.00	68.05	69.58	63.74	67.45	61.74	52.10

Z tabulky vypočítaných teplot uzlů je zřejmé, že nejvyšších teplot nabývají 1. uzel (magnetický obvod) a 2. uzel (hliník vinutí 23 kV). Současně je vidět, že přibližně po 20 hodinách konstantního zatížení transformátoru dochází k ustálenému stavu teplot v jednotlivých uzlech. Na obrázku 23 je znázorněn graf průběhu teplot vybraných uzlů.



Obrázek 23 – Graf průběhu teplot vybraných uzlů při konstantním zatěžování

5. 1. 2. Případ cyklicky proměnného zatížení transformátoru

Jsou zadány vstupní parametry jednoduché náhradní tepelné sítě, popsané v odstavcích 3. 3. a 5. 1., se šesti uzly při proměnném zatížení nabývající následujících hodnot.

cyklus zatížení:

délka časového intervalu [h]	typ chlazení	vektor ztrát P_0 v uzlech (při 0 [°C]) [W]					
		1. uzel	2. uzel	3. uzel	4. uzel	5. uzel	6. uzel
8.0	ONAN	37400.0	34790.0	42140.0	0.0	0.0	4900.0
3.0	ONAF	37400.0	71000.0	86000.0	0.0	0.0	10000.0
3.0	ONAN	37400.0	45440.0	55040.0	0.0	0.0	6400.0
2.0	ONAF	37400.0	131322.0	159066.0	0.0	0.0	10496.0
3.5	ONAF	37400.0	51297.0	62135.0	0.0	0.0	7225.0
4.5	ONAN	37400.0	34790.0	42940.0	0.0	0.0	4900.0

vektor tepelných kapacit uzlů:

$$\mathbf{C} = [10382000, 1364000, 2203000, 133000, 625000, 53120000] \text{ [Ws/K]}$$

součinitelé teplotní závislosti v uzlech:

$$\beta_1 = 0.0, \beta_2 = 0.003, \beta_3 = 0.00264, \beta_4 = 0.0, \beta_5 = 0.0, \beta_6 = 0.0 \text{ [1/K]}$$

teplosměnné plochy:

dvojice uzlů		plocha [m ²]
1	6	35.7
2	4	80.5
3	5	172.4
4	6	80.5
5	6	172.4
6	vzduch	467.3

konstantní součinitelé přestupu tepla:

dvojice uzlů i, k		α [W/m ² K]
2	4	500.0
3	5	292.0

proměnné součinitelé přestupu tepla – parametry (ve vztahu (3.61)):

dvojice uzlů i, k		c_1	c_2	c_3	c_4
1	6	0.007	0.51	35.0	0.3
4	6	0.007	0.51	35.0	0.3
5	6	0.007	0.51	35.0	0.3

součinitel přestupu tepla olej-vzduch (α_{ov}) – parametry (ve vztahu (5.1)):

$$\text{chlazení typu ONAF: } con_1 = 13.0, \quad con_2 = 0.065$$

$$\text{chlazení typu ONAN: } con_1 = 3.4, \quad con_2 = 0.300$$

počáteční teplota uzlů:

$$T_0 = [10.0, 10.0, 10.0, 10.0, 10.0, 10.0] \text{ [}^\circ\text{C]}$$

teplota okolí (vzduchu):

$$T_v = 10 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

časový krok:

$$\Delta t = 60 \text{ [s]}$$

celková délka časového intervalu:

$$48 \text{ [h]}$$

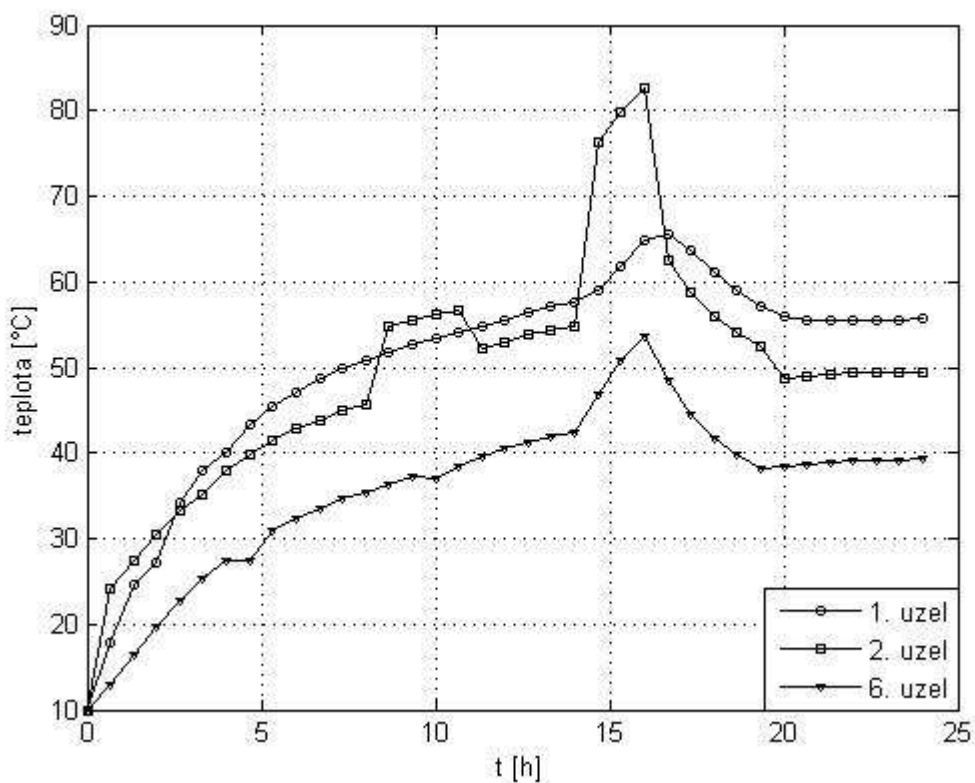
Vypočítané teploty uzlů

(v závislosti na čase, uvedeny teploty uzlů pro vybrané časy)

čas [h]	teplota uzlů sítě [°C]					
	1. uzel	2. uzel	3. uzel	4. uzel	5. uzel	6. uzel
0.67	17.95	24.17	20.16	23.29	19.35	12.90
1.33	24.52	27.47	23.57	26.60	22.74	16.49
2.00	27.08	30.50	26.73	29.60	25.09	19.73
2.67	34.26	33.30	29.60	32.46	20.75	22.65
3.33	37.87	35.06	32.14	34.93	31.27	25.23
4.00	40.07	38.02	34.35	37.02	33.48	27.47
4.67	43.36	39.89	36.26	38.95	35.37	27.40
5.33	45.45	41.40	37.88	40.53	36.99	31.04
6.00	47.19	42.84	39.26	41.08	38.76	32.43
6.67	48.66	43.90	40.47	43.02	39.52	33.60
7.33	49.88	44.94	41.41	47.97	40.50	34.59
8.00	50.90	45.75	42.23	44.70	41.31	35.41
8.67	51.72	54.71	48.44	52.67	46.53	36.22
9.33	52.59	55.61	49.37	53.56	47.45	37.16
10.00	53.38	56.27	50.06	54.22	48.13	37.06
10.67	54.05	56.78	50.57	54.72	48.65	38.32
11.33	54.71	52.20	47.08	50.90	46.66	39.51
12.00	55.56	53.03	48.77	51.74	47.55	40.45
12.67	56.35	53.77	49.52	52.47	48.30	41.21
13.33	57.06	54.37	50.13	53.07	48.91	41.83
14.00	57.66	54.86	50.64	53.55	49.40	42.33
14.67	59.11	76.30	66.24	72.35	62.61	46.89
15.33	61.87	79.90	70.01	75.90	66.33	50.79
16.00	64.77	82.52	72.76	78.48	69.04	53.64
16.67	65.44	62.59	58.08	61.00	56.56	48.50
17.33	63.59	58.68	54.09	57.14	52.62	44.56
18.00	61.22	55.96	51.31	54.44	47.86	41.78
18.67	59.03	53.98	49.28	52.47	47.85	39.74
19.33	57.19	52.49	47.76	51.00	46.34	38.21
20.00	56.02	48.74	45.27	47.75	44.34	38.40
20.67	55.61	49.01	45.55	48.03	44.62	38.76
21.33	55.49	49.19	45.73	48.20	44.80	38.94
22.00	55.49	49.31	45.06	48.32	44.92	39.06
22.67	55.54	49.40	45.95	48.41	43.01	39.15
23.33	55.60	49.47	46.02	48.49	45.08	39.22
24.00	55.65	49.53	46.07	48.53	45.14	39.27
24.67	55.70	49.57	46.12	48.58	45.13	39.32
25.33	55.75	49.61	46.16	48.61	45.22	39.36
26.00	55.78	49.64	46.19	48.64	45.25	39.39
26.67	55.81	49.66	46.21	48.67	45.27	39.41
27.33	55.84	49.68	46.23	48.69	45.29	39.43
28.00	55.86	49.70	46.25	48.71	45.31	39.45
28.67	55.88	49.71	46.26	48.72	45.33	39.46

29.33	55.89	49.72	46.20	48.73	45.34	39.48
30.00	55.91	49.73	46.29	48.74	45.35	39.49
30.67	55.92	49.74	46.29	48.75	45.36	39.49
31.33	55.92	49.75	46.30	48.76	45.36	39.50
32.00	55.93	49.75	46.31	48.76	45.37	39.51
32.67	55.02	57.68	51.51	55.62	49.57	39.55
33.33	55.87	57.09	51.73	55.02	49.79	39.56
34.00	55.97	58.04	51.88	55.97	49.94	39.71
34.67	56.07	58.14	51.98	56.07	50.04	39.82
35.33	56.30	53.32	49.03	52.01	47.80	40.67
36.00	56.83	53.98	49.73	52.68	48.51	41.43
36.67	57.39	54.56	50.32	53.25	49.10	42.02
37.33	57.91	55.02	50.80	53.72	49.57	42.50
38.00	58.36	55.40	51.19	54.09	49.95	42.09
38.67	59.68	76.69	66.65	72.74	63.01	47.32
39.33	62.33	80.20	70.33	76.20	66.64	51.13
40.00	65.14	82.76	73.01	78.72	69.28	53.90
40.67	65.72	62.78	58.27	61.20	56.76	48.70
41.33	63.80	58.83	54.24	57.29	52.77	44.71
42.00	61.38	56.08	51.42	54.56	49.98	41.90
42.67	59.15	54.07	49.37	52.56	47.94	39.03
43.33	57.28	52.56	47.82	51.07	46.41	38.28
44.00	56.10	48.79	45.32	47.81	44.39	38.54
44.67	55.67	49.06	45.60	48.07	44.67	38.81
45.33	55.54	49.23	45.77	48.24	44.84	38.98
46.00	55.54	49.35	45.89	48.36	44.95	39.09
46.67	55.57	49.43	45.98	48.44	45.04	39.10
47.33	55.63	49.49	46.04	48.50	45.10	39.24
48.00	55.68	49.54	46.09	48.55	45.15	39.29

Jedna perioda dynamického zatěžování trvá 24 hodin, výpočet byl proveden pro dvě periody. Z uvedené tabulky teplot uzlů vyplývá, že nejvyšších teplot v průběhu periody nabývá 2. uzel (hliník vinutí 23 kV) a následně 4. uzel (izolace vinutí 23 kV) a 3. uzel (hliník zatížené části vinutí 110 kV). Na obrázku 24 je znázorněn graf teplot vybraných uzlů první zatěžovací periody.



Obrázek 24 – Graf průběhu teplot vybraných uzlů při první zatěžovací periodě

5. 2. Podrobná náhradní tepelná síť

V případě jednoduché tepelné sítě jsme předpokládali, že chladicí okruh transformátoru je reprezentován pouze jedním uzlem (v uvedených příkladech odstavce 5. 1. se jednalo o uzel č. 6). U podrobné tepelné sítě je vhodné přiřadit chladicímu okruhu hydraulickou síť tvořenou několika uzly. V tom případě pak matice $\mathbf{A}^{(j)}$ ve vztahu (3.67) má část symetrickou a část nesymetrickou. Označme indexem $nsym$ poslední uzel náhradní sítě, který nepatří do hydraulické sítě. Pak pro prvky matice $\mathbf{A}^{(j)}$ platí $(A^{(j)})_{ik} = (A^{(j)})_{ki}$, pokud $\min(i, k) \leq nsym$. Sestavení rovnic příslušných uzlům hydraulické sítě (tj. určení prvků nesymetrické části matice $\mathbf{A}^{(j)}$) je obtížnější a specifické pro konkrétní tepelnou síť. Uzly hydraulické sítě neobsahují tepelné kapacity. Rovnice popisující hydraulickou síť (viz (3.63)) jsou tedy algebraické již svojí fyzikální podstatou, nikoliv až po diferenčním přepisu časové derivace.

Uvažujme zpřesněnou podrobnější síť transformátoru ŠKODA 40 MVA – 8ERH, který jsme uváděli na začátku kapitoly 5. Schématicky je tato náhradní tepelná síť znázorněna na obrázku 25. Síť má celkem 26 uzlů, přitom uzly 1 až 21 tvoří tepelnou část sítě (tj. $nsym = 21$), uzly 22 až 26 tvoří hydraulickou část sítě. Zatímco v jednoduché síti uváděné v odstavci

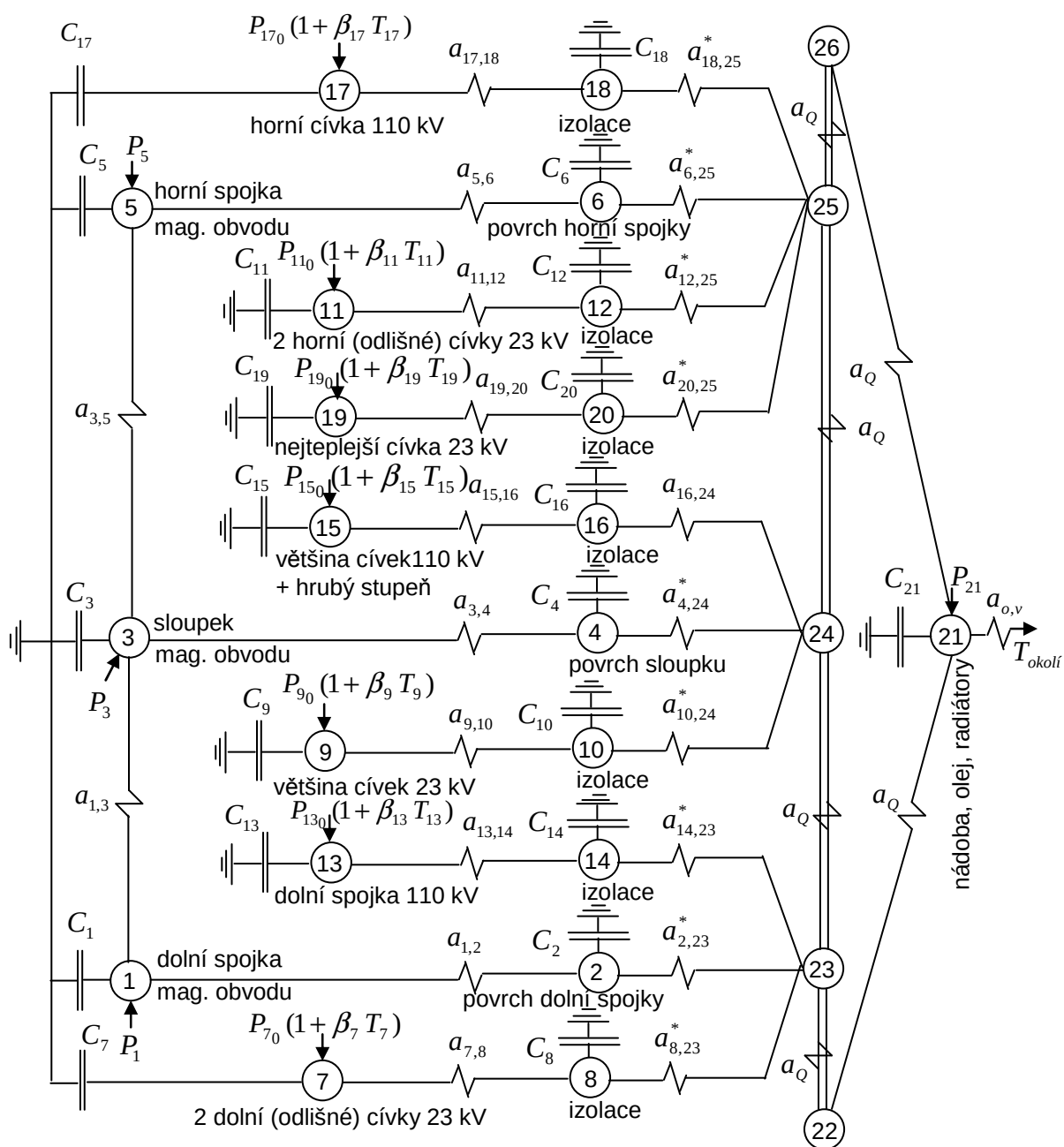
5. 1. byl například magnetický obvod (jehož teplota odpovídá střední teplotě celého obvodu) reprezentován jedním uzlem (uzel č. 1), u podrobnější síť je magnetický obvod reprezentován uzly 1 až 6. Uzly 1 a 2 odpovídají vnitřku a povrchu dolní spojky, uzly 3 a 4 vnitřku a povrchu sloupků a uzel 5 a 6 vnitřku a povrchu horní spojky. Tepelná kapacita magnetického obvodu je soustředěna do vnitřních uzlů 1, 3 a 5; povrchové uzly 2, 4 a 6 mají nulovou tepelnou kapacitu. Zavedení vnitřních a povrchových uzlů bylo provedeno z následujících důvodů. Tepelné vodivosti mezi vnitřními uzly respektují podélné vedení tepla v magnetickém obvodu. Znalost teploty v povrchových uzlech lze využít ke stanovení teplotně závislých tepelných vodivostí vyjadřujících přestup tepla do oleje.

Obdobně další komponenty transformátoru jsou reprezentovány několika uzly náhradní sítě. Na obrázku 25 je uveden základní popis jednotlivých uzlů, podrobný popis sítě a jejich uzlů lze nalézt v [Preiningerová, Mlýnek, 1989].

V dané síti jsou uvažovány 4 typy tepelných vodivostí:

- konstantní vodivosti (charakterizující vedení tepla pevnou hmotou),
- teplotně závislé vodivosti (charakterizují přestup tepla z povrchu aktivních částí do oleje), na obrázku 23 jsou značeny a^* ,
- teplotně závislá vodivost a_{21v}^* , charakterizující přestup tepla z oleje stěnou radiátoru do vzduchu,
- vodivost proudícího chladiva a_Q , která je závislá na typu chlazení (ONAF, ONAN), teplotně ji však považujeme za nezávislou.

Pro hydraulickou část konkrétní uvažované sítě byly v soustavě (3.67) uvažovány následující rovnice odpovídající postupně uzlům 22, 23 24, 25 a 26. Všechny veličiny v rovnicích v následujícím vztahu (5.2) patří do stejného časového intervalu j a měly by být označeny $^{(j)}$. Pro zjednodušení toto označení ve vztahu (5.2) vynecháme.



Obrázek 25 - Podrobná náhradní tepelná síť

(5.2) uzel 22

$$a_Q T_{22} - (a_Q - a_{21,v}) T_{21} = P_{21} + a_{21,v} T_v ,$$

uzel 23

$$(a_Q + a_{2,23} + a_{8,23} + a_{14,23}) T_{23} - a_{2,23} T_2 - a_{8,23} T_8 - a_{14,23} T_{14} - a_Q T_{22} = 0 ,$$

uzel 24

$$(a_Q + a_{4,24} + a_{10,24} + a_{16,24})T_{24} - (a_Q - a_{2,23} - a_{8,23} - a_{14,23})T_{23} - a_{2,23}T_2 - \\ - a_{8,23}T_8 - a_{14,23}T_{14} - a_{10,24}T_{10} - a_{16,24}T_{16} - a_{4,24}T_4 = 0 \quad ,$$

uzel 25

$$(a_Q + a_{6,25} + a_{12,25} + a_{18,25} + a_{20,25})T_{25} - (a_Q - a_{4,24} - a_{10,24} - a_{16,24})T_{24} - \\ - a_{6,25}T_6 - a_{12,25}T_{12} - a_{18,25}T_{18} - a_{20,25}T_{20} - a_{4,24}T_4 - a_{10,24}T_{10} - a_{16,24}T_{16} = 0 \quad ,$$

uzel 26

$$a_Q T_{26} - (a_Q - a_{6,25} - a_{12,25} - a_{18,25} - a_{20,25})T_{25} - a_{6,25}T_6 - a_{12,25}T_{12} - \\ - a_{18,25}T_{18} - a_{20,25}T_{20} = 0 \quad .$$

Podrobné zdůvodnění sestavení uvedených rovnic je uvedeno v [Preiningarová, Mlýnek, 1989].

Ve zbývající části odstavce 5. 2. je uveden příklad cyklicky proměnného zatěžování při užití popsané náhradní podrobné tepelné sítě transformátoru.

5. 2. 1. Příklad cyklicky proměnného zatížení transformátoru

Jsou zadány vstupní parametry podrobné náhradní tepelné sítě, popsané v odstavcích 3. 3. a 5. 2., s 26 uzly při proměnném zatížení nabývajících následujících hodnot.

cyklus zatížení:

poř. číslo zatížení	1	2	3	4	5
typ chlazení	ONAN	ONAF	ONAF	ONAF	ONAN
a_Q [W/K]	30000.0	27428.0	33400.0	24900.0	30000.0
délka čas. intervalu [h]	10.0	3.0	2.0	5.0	4.0
číslo uzlu	vektor ztrát $\mathbf{P}_0$ v uzlech (při 0 °C) [W]				
1	10460.0	10460.0	10460.0	10460.0	19500.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	19078.0	19078.0	19078.0	19078.0	19078.0
4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	10460.0	10460.0	10460.0	10460.0	10460.0
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	907.0	1295.0	1761.0	1165.0	907.0
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

9	46361.0	66230.0	90073.0	59607.0	46361.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
11	907.0	1295.0	1761.0	1165.0	907.0
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
13	623.0	890.0	1210.0	801.0	623.0
14	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
15	60200.0	86000.0	116960.0	77400.0	60200.0
16	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
17	623.0	890.0	1210.0	801.0	623.0
18	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
19	863.0	1195.0	1625.0	1075.0	836.0
20	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
21	6650.0	9500.0	12920.0	8550.0	6650.0
22	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
23	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
24	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
25	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
26	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

vektor tepelných kapacit uzlů C [Ws/K] :

čís. uzlu	tep. kapacita	čís. uzlu	tep. kapacita	čís. uzlu	tep. kapacita
1	2715165.0	10	111393.0	19	17049.0
2	0.0	11	17049.0	20	1662.0
3	4951670.0	12	9972.0	21	53120000.0
4	0.0	13	26002.0	22	0.0
5	2715165.0	14	4435.0	23	0.0
6	0.0	15	2157791.0	24	0.0
7	17049.0	16	616125.0	25	0.0
8	9972.0	17	22602.0	26	0.0
9	1312848.0	18	4435.0		

součinitelé teplotní závislosti v uzlech (β_i) [1/K]:

čís. uzlu	β_i	čís. uzlu	β_i	čís. uzlu	β_i
1	0.0	10	0.0	19	0.00131
2	0.0	11	0.00119	20	0.0
3	0.0	12	0.0	21	0.0
4	0.0	13	0.002	22	0.0
5	0.0	14	0.0	23	0.0
6	0.0	15	0.00265	24	0.0
7	0.00119	16	0.0	25	0.0
8	0.0	17	0.002	26	0.0
9	0.00308	18	0.0		

teplosměnné plochy [m²]:

dvojice uzlů <i>i</i> <i>k</i>		plocha <i>S_{ik}</i>	dvojice uzlů <i>i</i> <i>k</i>		plocha <i>S_{ik}</i>
1	2	10.500	11	12	1.320
1	3	0.705	12	25	1.685
2	23	10.500	13	14	1.690
3	4	18.000	14	23	1.690
3	5	0.705	15	16	169.020
4	24	18.000	16	24	169.020
5	6	10.500	17	18	1.690
6	25	10.500	18	25	1.690
7	8	1.320	19	20	1.000
8	23	1.685	20	25	1.000
9	10	75.500	21	vzduch	467.300
10	24	75.500			

konstantní součinitelé přestupu tepla :

dvojice uzlů <i>i</i> <i>k</i>		α_{ik} [W/m ² K]	dvojice uzlů <i>i</i> <i>k</i>		α_{ik} [W/m ² K]
1	2	130.7	9	10	500.0
1	3	28.6	11	12	500.0
3	4	130.7	13	14	267.5
3	5	28.6	15	16	267.5
5	6	130.7	17	18	267.5
7	8	500.0	19	20	500.0

proměnné součinitelé přestupu tepla – parametry (ve vztahu (3.61)):

dvojice uzlů <i>i</i> <i>k</i>		dvojice uzlů <i>i</i> <i>k</i>	
2	3	12	25
4	24	14	23
6	25	16	24
8	23	18	25
10	24	20	25

pro všechny uvedené dvojice platí: $c_1 = 0,007$; $c_2 = 0,51$; $c_3 = 27,0$; $c_4 = 0,3$;

počáteční hodnota koeficientů 15.0 [W/m²K]

součinitel přestupu tepla olej-vzduch (α_{ov}) – parametry (ve vztahu (5.1)):

chlazení typu ONAF: $con_1 = 11.5$, $con_2 = 0.065$

chlazení typu ONAN: $con_1 = 2.2$, $con_2 = 0.300$

počáteční teplota uzlů (vektor T_0):

20 [°C]

teplota okolí (vzduchu):

$T_v = 20$ [°C]

časový krok:

$\Delta t = 300$ [s]

celková délka časového intervalu:

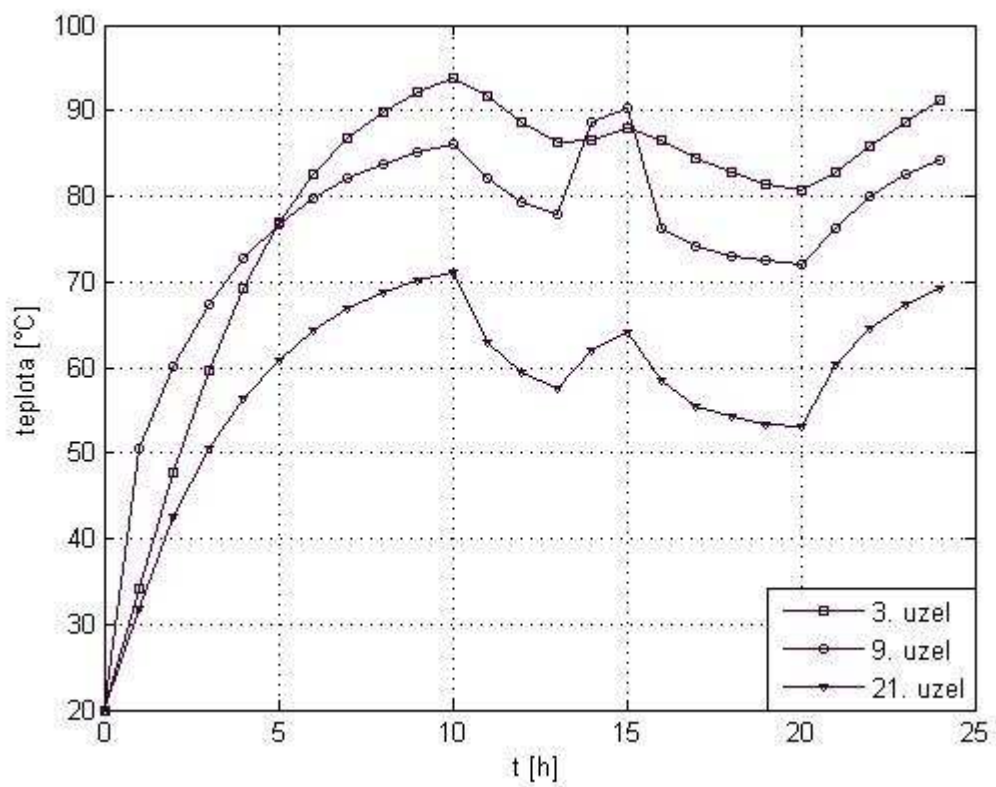
24 [h]

Vypočítané teploty uzlů

V následující tabulce jsou uvedeny teploty pouze uzlů č. 3 (sloupek mag. obvodu), 9 (cívky 23 kV) a 21 (olej, nádoba, radiátory) pro vybrané časy z celkového počtu 26 uzlů náhradní tepelné sítě transformátoru.

čas [h]	teplota uzlů sítě [°C]			čas [h]	teplota uzlů sítě [°C]		
	3. uzel	9. uzel	21. uzel		3. uzel	9. uzel	21. uzel
1.0	34.11	50.56	31.70	13.0	86.43	77.97	57.65
2.0	47.70	60.20	42.50	14.0	86.66	88.63	61.94
3.0	59.63	67.34	50.48	15.0	87.87	90.33	64.10
4.0	69.33	72.71	56.44	16.0	86.53	76.28	58.49
5.0	76.85	76.76	60.93	17.0	84.43	74.09	55.55
6.0	82.54	79.81	64.30	18.0	82.70	73.01	54.16
7.0	86.73	82.09	66.83	19.0	81.46	72.42	53.42
8.0	89.92	83.80	68.72	20.0	80.60	72.08	53.00
9.0	92.22	85.06	70.12	21.0	82.71	76.32	60.25
10.0	93.91	86.00	71.15	22.0	85.79	80.09	64.54
11.0	91.61	82.06	62.85	23.0	88.72	82.55	67.31
12.0	88.77	79.34	59.35	24.0	91.15	84.23	69.19

V dané tabulce jsou uvedeny teploty vybraných uzlů v průběhu 24 hodin, což je časová perioda zatěžovacího cyklu. Na obrázku 26 je uveden graf teplot daných uzlů sítě v průběhu zatěžovací periody.



Obrázek 26 – Graf průběhu teplot vybraných uzlů při první zatěžovací periodě

6. Závěr

Matematické modely sdílení tepla v elektrických strojích zaujímají v současné technické praxi nezastupitelné místo. Zejména při charakteru kusové nebo malosériové výroby elektrických strojů (například výroba jednotlivých transformátorů splňujících specifické požadavky pro tepelné, jaderné a větrné elektrárny) totiž nelze vzhledem k finančním nákladům postavit prototyp a na základě postupného zlepšování jeho tepelných parametrů zajistit výrobu, jak tomu může být u sériově vyráběných strojů menších výkonů.

V současné době se klade důraz na zvyšování využití navrhovaných strojů, na jejich provozní spolehlivost a životnost. Dříve bylo možné navrhovat stroje po tepelné a ventilační stránce s většími tepelnými rezervami. Vzhledem k současnému trendu je provedení návrhu stroje po tepelné stránce obtížnější. Zmenšování hmotnosti, zvyšování provozní spolehlivosti a další parametry elektrických strojů do značné míry závisí na výsledcích dosažených ve výzkumu chlazení a ventilace elektrických strojů.

Při návrhu matematického modelu musí být zachována nezbytná rovnováha mezi složitostí matematického modelu a úrovní znalostí jednotlivých fyzikálních parametrů, které jsou součástí vstupních dat při výpočtu. Úroveň znalostí uvedených parametrů a konstant v současnosti zásadním způsobem ovlivňuje přesnost tepelných výpočtů. Celému procesu návrhu elektrického stroje předchází elektromagnetický návrh s dimenzováním částí stroje a výpočtem jejich tepelného zatížení a alespoň zevrubný návrh chladicího systému.

Metoda konečných prvků se stala díky své matematické obecnosti univerzální metodou řešení fyzikálních úloh nevyjímaje oblasti tepelných výpočtů elektrických strojů. Tato metoda je jedním z progresivních nástrojů řešení tepelných problémů při návrzích elektrických strojů. Umožňuje získat podrobné informace o oteplení, o velikosti a směru tepelných toků v jednotlivých částech stroje.

Metoda konečných prvků a metoda tepelných bilancí se uplatňuje zejména při ustálených tepelných dějích v elektrických strojích. Při dynamických dějích je však výpočet podrobných tepelných dějů ve stroji obtížnější a proto jsou často úlohy tohoto typu řešeny pomocí náhradní tepelné sítě. Tato metoda je analogií elektrických obvodů, její nevýhodou je skutečnost, že umožňuje vypočítat pouze střední oteplení částí stroje, které jsou reprezentovány jednotlivými uzly sítě. Zpřesnění tepelných výpočtů při užití metody náhradní tepelné sítě závisí především na spolehlivosti určování tepelných vodivostí a ztrát.

Závěrem poznamenejme, že u všech konstrukčních řešení elektrických strojů dochází postupem času k degradaci izolace vinutí. Tato skutečnost má za následek větší tepelný odpor. Současně se elektrické stroje postupně zanášejí nečistotami nasátými netěsnostmi ve stroji (například kolem hřídele). Proto je žádoucí kontrolovat tepelný stav stroje (například pomocí termistorů) i při menších výkonech, než které jsou přípustné na základě příslušných norem. Současně by tepelné výpočty měly být provedeny kvalitně, neboť měření teploty některých částí strojů může být při jeho provozu značně obtížné.

Literatura

- [1] Angot, A.: *Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry*. SNTL, Praha, 1972.
- [2] Antia, H. M.: *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. Birkäuser Verlag, Berlin, 2000.
- [3] Arsenin, V. J.: *Matematická fyzika*. Alfa, Bratislava, 1977.
- [4] Axelson, O., Barker, V. A.: *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*. Academic Press, Orlando, FL, 1984.
- [5] Babuška, I., Práger, M., Vitásek, E.: *Numerické řešení diferenciálních rovnic*. SNTL, Praha, 1964.
- [6] Bank, R. E., Rose, D. J.: *Some error estimates for the box method*. SIAM J. Numer. Anal. 24 (1987), 777 – 787.
- [7] Bank, R. E., Weiser, A.: *Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations*. Math. Comp. 44 (1985), 283 – 301.
- [8] Brezzi, F., Fortin, M.: *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer, New York, 1991.
- [9] Brožek, J., Ondruška, E.: *Vyšetřování tepelných polí rotorů turbomotorů metodou konečných prvků*. XVI. seminář „O chlazení elektrických strojů“, ČSVTS, Plzeň, 1989, 7 – 17.
- [10] Ciarlet, P. G.: *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [11] Ciarlet, P. G., Lions, J. L.: *Handbook of Numerical Analysis , Vol. II, Finite Element Methods*. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [12] ČSN/EN 60076 – 2 *Výkonové transformátory – Část 2: Oteplení*. ČNI, 1999.
- [13] Doležal, I.: *Numerical calculation of the leakage field in the windows of a transformer with magnetic shielding*. Acta Tech. ČSAV (1981), 563 – 588.
- [14] Elberg, S., Mathonnet, P.: *Odvod tepla z elektronických zařízení*. SNTL, Praha, 1983.
- [15] Feistauer, M.: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.
- [16] Feistauer, M., Kalis, H., Rokyta, M.: *Mathematical modelling of an electrolysis process*. Comment. Math. Univ. Carolin. 30 (1989), 465 – 477.
- [17] Fiedler, M.: *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*. SNTL, Praha, 1981.

- [18] Gajewski, H., Gröger, K., Zacharias, K.: *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
- [19] George, A., Liu, J. W.: *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*. Prentice-Hall, New York, 1981.
- [20] Glowinski, R.: *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [21] Haslinger, J.: *Metoda konečných prvků pro řešení eliptických rovnic a nerovnic*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980.
- [22] Hlaváček, I., Křížek, M., Malý, J.: *On Galerkin approximations of quasilinear nonpotential elliptic problem of a nonmonotone type*. J. Math. Anal. Appl. 184 (1994), 168 – 189.
- [23] Hulička, J.: *Chlazení elektrických strojů točivých – ventilace statorových kanálů asynchronního motoru*. Diplomová práce, FS TU v Liberci, 1995.
- [24] Isačenko, V. P., Osipova, V. A., Sukomel, A. S.: *Teploperedača*. Energozdat, Moskva, 1981.
- [25] Jarník, V.: *Integrální počet I*. Academia, Praha, 1974.
- [26] Johnson, C.: *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [27] Koukal, S., Křížek, M., Potůček, R.: *Fourierovy trigonometrické řady a metoda konečných prvků v komplexním oboru*. Academia, Praha, 2002.
- [28] Křížek, M., Mlýnek, J.: *On the preconditioned biconjugate gradients for solving linear complex equations arising from finite elements*. Banach Center Publ. 29 (1994), 195 – 205.
- [29] Křížek, M., Neittaanmäki, P.: *Finite Element Approximation of Variational Problems and Applications*. Longman & Technical, Harlow, 1990.
- [30] Křížek, M., Neittaanmäki, P.: *Mathematical and Numerical Modelling in Electrical Engineering: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [31] Křížek, M., Preiningerová, V.: *Třírozměrné řešení teplotního pole v magnetickém obvodu velkých transformátorů*. Elektrotechnický obzor, 76 (1987), 646 – 652.
- [32] Křížek, M., Segeth, K.: *Numerické modelování problémů elektrotechniky*. Karolinum, Praha, 2001.

- [33] Kutateladze, S. S.: *Foundations of Heat Interchange Theory*. (In Russian), Nauka, Moskva, 1979.
- [34] Künzelt, G.: *Matematické modely sdílení tepla v konstrukcích elektrotechniky*. Academia, Praha, 1990.
- [35] Lindsay, J. F.: *Temperature Rise of an Oil-Filled Transformer with Varying Load*. IEEE Trans. PAS, 103 (1984), Number 9, pp. 2530 – 2536.
- [36] Lykov, A. V.: *Teplomassobmen*. Energija, Moskva, 1971.
- [37] Marčuk, G. I.: *Metody numerické matematiky*. Academia, Praha, 1987.
- [38] Mayer, D., Polák, J.: *Metody řešení elektrických a magnetických polí*. SNTL, Praha, 1983.
- [39] Michajev, M. A.: *Základy sdílení tepla*. Praha, SNTL, 1953.
- [40] Míka, S., Přikryl, P.: *Numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic – eliptické rovnice*. ZČU, Plzeň. 1995.
- [41] Minkowycz, W. J.: *Handbook of Numerical Heat Transfer*, New York, 1988.
- [42] Mlýnek, J.: *Box Metod Method Applicatoin in Electrical Engineering*. Proc. of the Internat. Conf. Presentation of Mathematics 2007, Liberec, September 2007, 6 stran.
- [43] Mlýnek, J.: *The application of the thermal balance method for computation of warming in electric machines*. Proc. of the Internat. Conf. Programs and Algorithms of Numerical Mathematics 13, Mathematical Institute Academy of Sciences of CR, Prague, May 2006, 196 – 201.
- [44] Mlýnek, J.: *Method of Compensatory Thermal Networks of Electric Machines*. Proc. of the Internat. Conf. Presentation of Mathematics 2006, Liberec, September 2006, 83 – 88.
- [45] J. Mlýnek, V. Preiningerová: *Metoda a program pro výpočet oteplení hliníkového stínění a magnetického stínění transformátoru*. Výzkumná zpráva, VÚSE, Praha – Běchovice, 1985, 69 stran.
- [46] Mlýnek, J., Preiningerová, V.: *Metoda a program pro výpočet rozložení ztrát a oteplení ve stínění transformátoru*. Výzkumná zpráva, VÚSE, Praha – Běchovice, 1988, 39 stran.
- [47] Mlýnek, J., Preiningerová, V.: *Návod na použití programu pro řešení neustálých tepelných dějů v olejových transformátorech*. Výzkumná zpráva, VÚSE, Praha – Běchovice, 1990, 79 stran.

- [48] Nečas, J.: *Les méthodes directes en théorie des equations elliptiques*. Academia, Praha, 1967.
- [49] Nečas, J., Hlaváček, I.: *Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles*. SNTL, Praha, 1983.
- [50] Ondruška, E., Maloušek, A.: *Ventilace a chlazení elektrických strojů točivých*. SNTL, Praha, 1985.
- [51] Preiningerová, V., Kahoun, V.: *Numerická metoda výpočtu rozložení přídavných ztrát a oteplení ve vinutí velkých transformátorů*. Elektrotechnický obzor, 70 (1981), 633 – 639.
- [52] Preiningerová, V., Kahoun, V., Doležel, I.: *Spojený výpočet magnetického pole, pole ztrát a oteplení ve vinutích velkých olejových transformátorů*. Elektrotechnický obzor, 73 (1984), 69 – 76.
- [53] Preiningerová, V., Křížek, M.: *Tepelný výpočet magnetického obvodu velkých olejových transformátorů*. Elektrotechnický obzor, 73 (1984), 487 – 492.
- [54] Preiningerová, V., Křížek, M., Kahoun, V.: *Temperature distribution in large transformer cores*. In „Proc. of GANZ Conf.“, (M. Franto, ed.), Budapest, 1985, 254 – 261.
- [55] Preiningerová, V., Plecháč, L., Mlýnek, J.: *Náhradní síť olejového transformátoru pro výpočet nestacionárních tepelných dějů*. Výzkumná zpráva, VÚSE, Praha – Běchovice, 1987, 59 stran.
- [56] Preiningerová, V., Mlýnek, J.: *Řešení neustálených tepelných dějů v olejových transformátorech pomocí náhradní tepelné sítě – jednoduchá a zpřesněná verze*. Výzkumná zpráva, VÚSE, Praha – Běchovice, 1989, 76 stran.
- [57] Preiningerová, V., Mlýnek, J., Kahoun, V.: *Výpočet neustálených tepelných dějů v olejových transformátorech metodou náhradní tepelné sítě*. Elektrotechnický obzor, 80 (1991), 199 – 209.
- [58] Ralston, A.: *Základy numerické matematiky*. Academia, Praha, 1978.
- [59] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užití matematiky*. Prometheus, Praha, 1995.
- [60] Rektorys, K.: *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*. SNTL, Praha, 1974.
- [61] Segeth, K.: *Je bilanční metoda lepší než metoda konečných prvků?* Programy a algoritmy numerické matematiky 8, sborník semináře, Janov n. N., Matematický ústav AV ČR, Praha, 1996, 184 – 193.
- [62] Segeth, K.: *Numerický software I*. Karolinum, Praha, 1998.
- [63] Segethová, J.: *Základy numerické matematiky*. Karolinum, Praha, 2002.

- [64] Surf, I. S., Erisman, A. M., Reid, J., K.: *Direct methods for sparse matrices*. Clarendon Press, Oxford, 1987.
- [65] Szabó, B., Babuška, I.: *Finite Element Analysis*. J. Wiley & Sons, New York, 1991.
- [66] Šolín, P., Segeth, K., Doležel, I.: *Higher-Order Finite Element Methods*. Boca Raton, FL, Chapman & Hall /CRC 2004.
- [67] Tailor, A. E.: *Úvod do funkcionální analýzy*. Academia, Praha, 1973.
- [68] Trojovský, V.: *Nestacionární tepelné stavy turbogenerátorů při regulaci chlazení*. XVI. seminář „O chlazení elektrických strojů“, ČSVTS, Plzeň, 1989, 66 – 71.
- [69] Varga, R. S.: *Matrix Iterative Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 2000.
- [70] Vitásek, E.: *Numerické metody*. SNTL, Praha, 1987.
- [71] Vitásek, E.: *Základy teorie numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic*. Academia, Praha, 1994.
- [72] Ženíšek, A.: *Nonlinear Elliptic and Evolution Problems and Their Finite Element Approximations*. Academic Press, London, 1990.