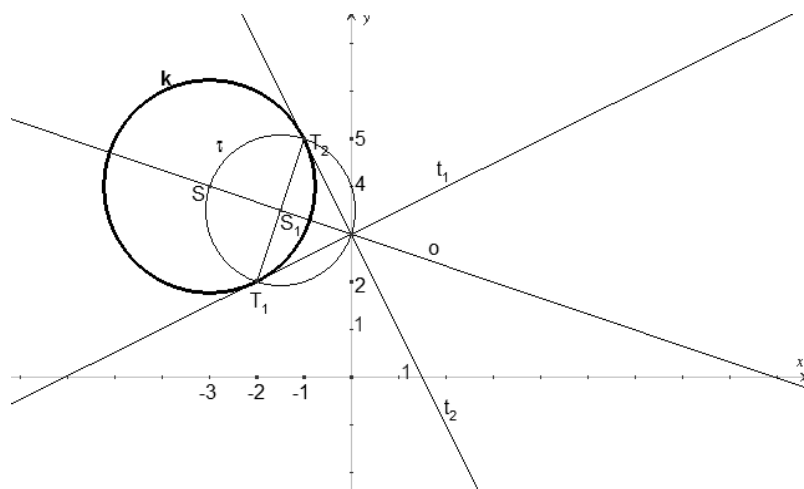


KOMPLEXNÍ PŘÍSTUP K ŘEŠENÍ GEOMETRICKÝCH ÚLOH

- KONSTRUKČNÍ, ANALYTICKÉ / POČETNÍ ŘEŠENÍ



Bc. Lucie Hurtová

Obsah

PŘEDMLUVA	3
ŘEŠENÍ ÚLOH	6
1 Tečna kružnice	6
2 Průsečík přímk a rovin	11
3 Odchylky přímk a rovin	20
ZÁVĚR	30

PŘEDMLUVA

Vážení kolegové,

máte před sebou sbírku geometrických úloh a to v komplexní podobě řešení. V průběhu studia na střední škole jsou studenti nejprve seznámeni s konstrukčním řešením úloh, později pak s analytickým, případně početním. Komplexní podobou je tedy myšleno řešení úloh dvěma, resp. všemi třemi uvedenými přístupy najednou.

Tato sbírka nabízí 13 úloh, z toho čtyři na tečnu kružnice, čtyři na průsečík přímk a rovin a posledních pět na odchylky přímk a rovin. Prvních osm úloh (úlohy na tečnu kružnice a průsečík přímk a rovin) jsou řešeny konstrukčně a analyticky, u následujících pěti úloh na odchylky přímk a rovin je navíc řešení početní. Jedná se o sbírku úloh, proto nebudeme k úlohám uvádět žádnou teorii.

Konstrukční a početní řešení úloh bylo zkonstruováno v programu Cabri.

ZADÁNÍ ÚLOH

Úlohy

1. Najděte tečnu ke kružnici k (S ; r) v bodě T . $S[0;0]$, $r = 5\text{cm}$, $T[3;4]$. Řešte konstrukčně a analyticky.
2. Najděte tečnu ke kružnici k (S ; r) v jejím průsečíku s přímkou p . $S[0;0]$, $r = 6\text{cm}$, $p: x = 3$. Řešte konstrukčně a analyticky.
3. Určete rovnici kružnice, jestliže je dán bod A , T a tečna t . $A[0;4]$, $T[1;1]$, $A, T \in k$, $T \in t$, $A \notin t$, t je tečna ke kružnici k , $t: 2x - y - 1 = 0$. Řešte konstrukčně a analyticky.
4. Jsou dány dvě tečny t_1, t_2 ke kružnici k (S ; r) s body dotyku T_1 a T_2 . Nalezněte rovnici kružnici k . $T_1[-2;2]$, $T_2[-1;5]$, $t_1: x - 2y + 6 = 0$, $t_2: 2x + y - 3 = 0$. Řešte konstrukčně a analyticky.
5. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete průsečík roviny BDF s přímkou AC . $A[0;0;0]$, $a = 3\text{cm}$. Řešte konstrukčně a analyticky.
6. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete průsečík přímek AG a S_1S_2 . S_1 je střed dolní podstavy krychle, S_2 je střed horní podstavy krychle, $A[2;1;1]$, $a = 4\text{cm}$. Řešte konstrukčně a analyticky.
7. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete průsečík přímky p s krychlí. $A[0;0;0]$, $a = 4\text{cm}$, $p = PQ$, $P \in CG$, $|CP| = 1,5 |CG|$, $Q \in AC$, $A = S_{CQ}$. Řešte konstrukčně a analyticky.
8. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete průsečík přímky p s krychlí. $A[1;2;-1]$, $a = 3\text{cm}$, $p = PQ$, $P \in AE$, $|AP| = \frac{4}{3} |AE|$, $Q \in CG$, $|GQ| = \frac{4}{3} |CG|$. Řešte konstrukčně a analyticky.
9. Určete odchylku přímek AB a BC , jestliže $A[0;0;0]$, $B[2;2;0]$, $C[0;0;4]$. Řešte konstrukčně, analyticky a početně.
10. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete odchylku přímky AS a ES . $A[0;0;0]$, $a = 4\text{cm}$, S je střed dolní podstavy krychle. Řešte konstrukčně, analyticky a početně.

11. Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímky BS a FS. $A[0;0;0]$, $a = 5\text{cm}$, S je střed dolní podstavky krychle. Řešte konstrukčně, analyticky a početně.
12. Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímek p a q. $A[0;0;0]$, $a = 5\text{cm}$, $p = BD$, $q = AH$.
13. Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku roviny ABC a BDE. $A[0;0;0]$, $a = 4\text{cm}$. Řešte konstrukčně, analyticky a početně.
-

ŘEŠENÍ ÚLOH

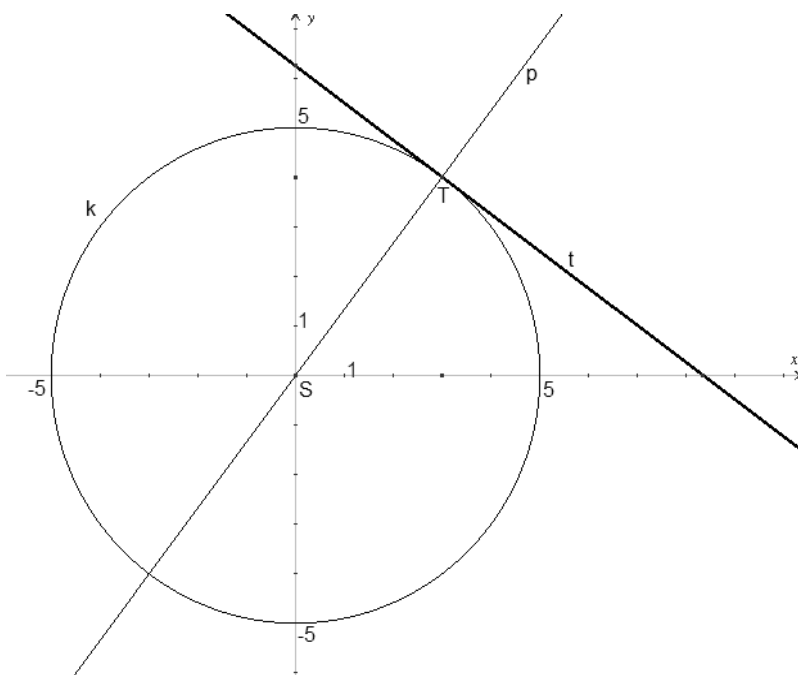
1 Tečna kružnice

Úloha 1

Najděte tečnu ke kružnici k (S ; r) v bodě T . $S[0;0]$, $r = 5\text{cm}$, $T[3;4]$. Řešte konstrukčně a analyticky.

Konstrukční řešení

Konstrukce



Postup konstrukce

1. S , k (S ; 5cm), $T \in k$
2. p ; $p = ST$
3. t ; $t \perp p$, $T \in t$

Závěr:

Úloha má 1 řešení.

Analytické řešení

1. s využitím vzorce pro tečnu ke kružnici

$$t: (x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2, S[m;n], T[x_0;y_0]$$

$$t: (3 - 0)(x - 0) + (4 - 0)(y - 0) = 5^2$$

$$3x + 4y = 25$$

$$t: 3x + 4y - 25 = 0$$

2. s využitím kolmosti

$$t: ax + by + c = 0; a, b, c \in \mathbb{R}; (a;b) \neq (0;0); n = (a;b), T[x;y]$$

$$ST = n = T - S = (3;4)$$

$$t: 3x + 4y + c = 0$$

$$T \in t: 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + c = 0$$

$$c = -25$$

$$t: 3x + 4y - 25 = 0$$

Úloha má jedno řešení – tečnu $t: 3x + 4y - 25 = 0$.

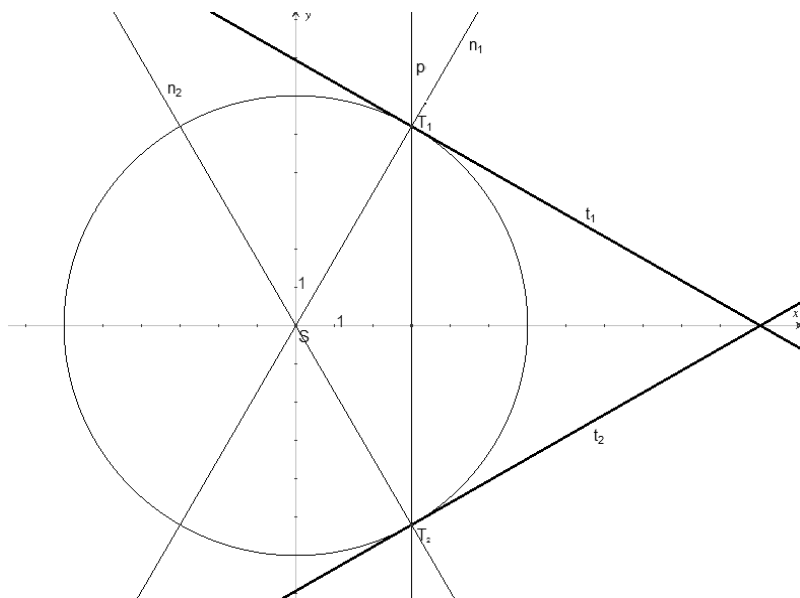
.....

Úloha 2

Najděte tečnu ke kružnici k (S ; r) v jejím průsečíku s přímkou p . $S[0;0]$, $r = 6\text{cm}$, $p: x = 3$. Řešte konstrukčně a analyticky.

Konstrukční řešení

Konstrukce



Postup konstrukce

1. $S, k(S; 6\text{cm})$,
 $p; v(S,p) = 3\text{cm}$
2. $T_1; T_1 = p \cap k$
3. $T_2; T_2 = p \cap k$
4. $n_1; n_1 = ST_1$
5. $n_2; n_2 = ST_2$
6. $t_1; t_1 \perp n_1, T_1 \in t_1$
7. $t_2; t_2 \perp n_2; T_2 \in t_2$

Závěr:

Úloha má 2 řešení.

Analytické řešení

- a) Nejprve nalezneme tečné body T_1 a T_2 jako průnik kružnice k s přímkou p . Pro rovnici kružnice platí: $x^2 + y^2 = 36$, pro přímkou p : $x = 3$. Abychom našli průsečíky, musíme vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých – využijeme dosazení $x = 3$ do rovnice kružnice:

$$x = 3$$

$$\underline{x^2 + y^2 = 36}$$

$$3^2 + y^2 = 36$$

$$y^2 = 36 - 9$$

$$y^2 = 27 \Rightarrow y_1 = 3\sqrt{3}, y_2 = -3\sqrt{3}$$

- známe x -ovou souřadnici bodu T , $x = 3$, a tak jsou souřadnice bodů T_1, T_2 :

$$\Rightarrow T_1[3; 3\sqrt{3}], T_2[3; -3\sqrt{3}]$$

- b) Vypočítáme obecnou rovnici tečny ke kružnici.

1. s využitím vzorce pro tečnu ke kružnici

$$t_1: 3x + 3\sqrt{3}y = 36$$

$$t_2: 3x - 3\sqrt{3}y = 36$$

$$t_1: 3x + 3\sqrt{3}y - 36 = 0$$

$$t_2: 3x - 3\sqrt{3}y - 36 = 0$$

2. s využitím kolmosti

$$ST_1 = \mathbf{n}_1 = T_1 - S = (3; 3\sqrt{3})$$

$$ST_2 = \mathbf{n}_2 = T_2 - S = (3; -3\sqrt{3})$$

$$t_1: 3x + 3\sqrt{3}y + c = 0$$

$$t_2: 3x - 3\sqrt{3}y + c = 0$$

$$T_1 \in t_1: 3 \cdot 3 + 3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} + c = 0$$

$$T_2 \in t_2: 3 \cdot 3 - 3\sqrt{3} \cdot (-3\sqrt{3}) + c = 0$$

$$c = -36$$

$$c = -36$$

$$t_1: 3x + 3\sqrt{3}y - 36 = 0$$

$$t_2: 3x - 3\sqrt{3}y - 36 = 0$$

Úloha má dvě řešení – tečny t_1, t_2 a body dotyku T_1 a T_2 . $t_1: 3x + 3\sqrt{3}y - 36 = 0$,
 $t_2: 3x - 3\sqrt{3}y - 36$, $T_1[3; 3\sqrt{3}]$, $T_2[3; -3\sqrt{3}]$.

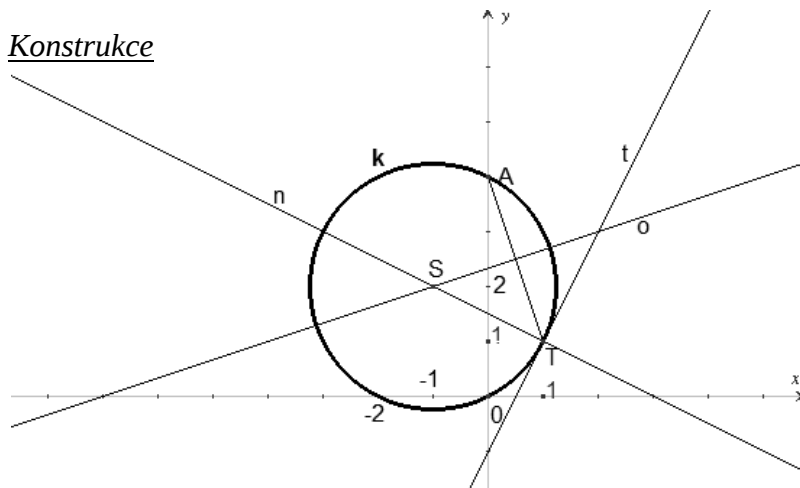
.....

Úloha 3

Určete rovnici kružnice, jestliže je dán bod A , T a tečna t . $A[0;4]$, $T[1;1]$, $A, T \in k$, $T \in t$, $A \notin t$, t je tečna ke kružnici k , $t: 2x - y - 1 = 0$. Řešte konstrukčně a analyticky.

Konstrukční řešení

Konstrukce



Postup konstrukce

1. $A, T, t; T \in t, A \notin t$
2. o ; o - osa úsečky AT
3. n ; $n \perp t, T \in n$
4. S ; $S = n \cap o$
5. k ; $k(S, |SA|)$

Závěr:

Úloha má 1 řešení.

Analytické řešení

- a) Budeme hledat souřadnice středu S . Ze zadání je zřejmé, že $|SA| = |ST| = r$. Označme $\mathbf{n} = (2; -1)$ normálovým vektorem tečny t .

$$\mathbf{n} = T - S = (2; -1), S[s_1; s_2], T[1; 1]$$

$$(1 - s_1; 1 - s_2) = (2; -1)$$

$$1 - s_1 = 2 \quad 1 - s_2 = -1$$

$$s_1 = -1 \quad s_2 = 2 \quad \Rightarrow S[-1; 2]$$

- b) Správnost výsledku si můžeme ověřit. Víme, že $|SA| = |ST| = r$.

$$|SA| = \sqrt{(0+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$|ST| = \sqrt{(1+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \text{rovnost PLATÍ, } r = \sqrt{5}$$

- c) Vyjádříme rovnici kružnice k : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Úloha má jedno řešení – kružnici k : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

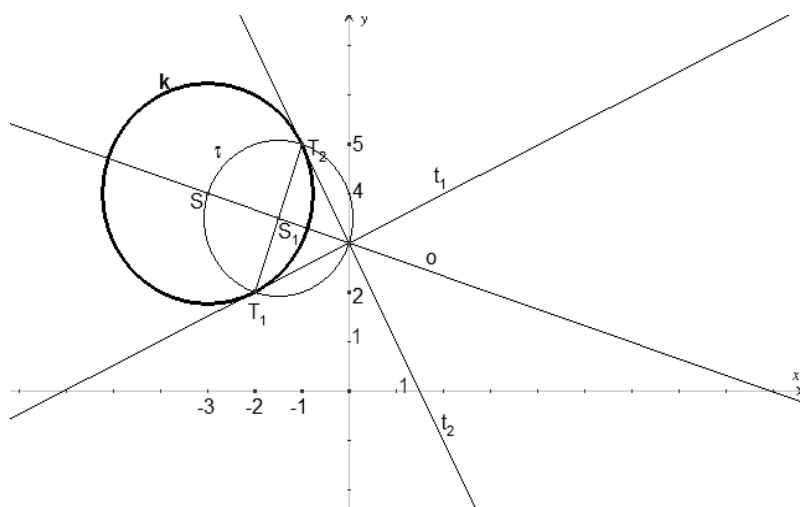
.....

Úloha 4

Jsou dány dvě tečny t_1, t_2 ke kružnici k ($S; r$) s body dotyku T_1 a T_2 . Nalezněte rovnici kružnici k . $T_1[-2;2]$, $T_2[-1;5]$, $t_1: x - 2y + 6 = 0$, $t_2: 2x + y - 3 = 0$. Řešte konstrukčně a analyticky.

Konstrukční řešení

Konstrukce



Postup konstrukce

1. $T_1, T_2, t_1, t_2; T_1 \in t_1, T_2 \in t_2$
2. o ; o - osa úhlu tečen
3. $S_1; S_1$ - střed T_1T_2
4. $\tau; \tau$ ($S_1, |S_1T_1|$)
5. $S; S = \tau \cap o$
6. $k; k$ ($S, |ST_1|$)

Závěr:

Úloha má 1 řešení.

Analytické řešení

- a) Ze zadání je zřejmé, že $|ST_1| = |ST_2| = r$. Označme $\mathbf{n}_1 = (1; -2)$ normálovým vektorem tečny t_1 .

$$\mathbf{n}_1 = T_1 - S = (1; -2), S[s_1; s_2], T_1[-2; 2]$$

$$(-2 - s_1; 2 - s_2) = (1; -2)$$

$$-2 - s_1 = 1 \quad 2 - s_2 = -2$$

$$s_1 = -3 \quad s_2 = 4 \quad \Rightarrow \mathbf{S}[-3; 4]$$

- b) Správnost výsledku si můžeme ověřit. Víme, že $|ST_1| = |ST_2| = r$.

$$|ST_1| = \sqrt{(-2 + 3)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{5}$$

$$|ST_2| = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \text{rovnost PLATÍ, } r = \sqrt{5}$$

- c) Vyjádříme rovnici kružnice k : $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$.

Úloha má jedno řešení – kružnici k : $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$

.....

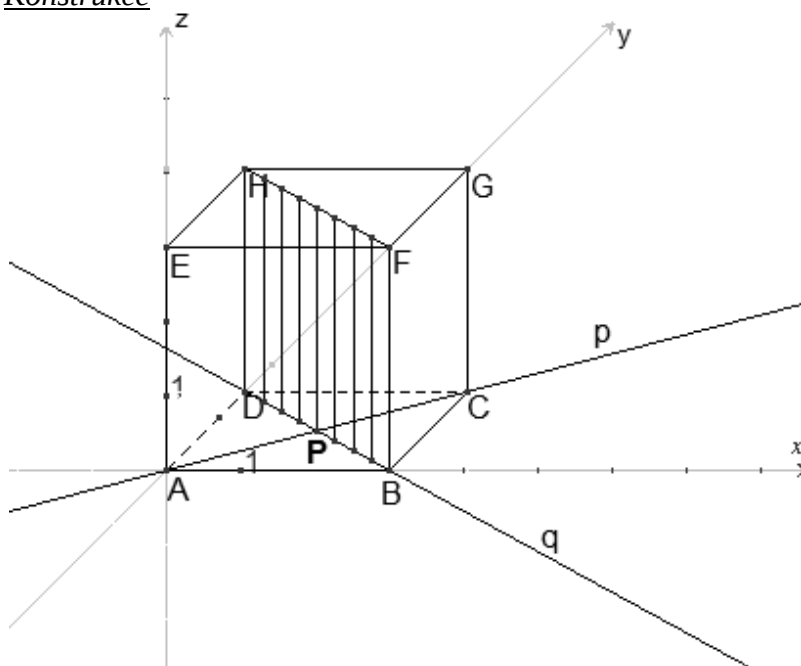
2 Průsečík přímek a rovin

Úloha 5

Je dána krychle ABCDEFGH. Určete průsečík roviny BDF s přímkou AC. $A[0;0;0]$, $a = 3\text{cm}$. Řešte konstrukčně a analyticky.

Konstrukční řešení

Konstrukce



Postup konstrukce

1. krychle ABCDEFGH
2. p ; $p = AC$
3. q ; $q = BD$, $q \in BDF$
4. P ; $P = p \cap q$

Závěr

Úloha má 1 řešení.

Analytické řešení

- a) Rovina DBF a přímka p mají jeden společný bod P , přímka p je různoběžná s rovinou DBF, společný bod je jejich průsečík.
- b) Nejprve nalezneme předpis přímky $p = AC$ a přímky $q \in BDF$, $q = BD$, jejichž průsečíkem bude bod P . Můžeme si všimnout, že přímka p a q leží v rovině podstavy krychle, a proto při výpočtu budeme využívat souřadnice bodů v rovině a nikoli v prostoru.
- c) Souřadnice bodu A a délka strany a jsou zadány - $A[0;0;0]$, resp. $A[0;0]$, $a = 3\text{cm}$, snadno tedy určíme souřadnice zbývajících bodů B , C a D : $B[3;0]$, $C[3;3]$, $D[0;3]$.

d) Určíme obecnou rovnici přímk p a q i jejich parametrické vyjádření.

obecná rovnice přímky p

p: $ax + by + c = 0$, $(a;b) \neq (0;0)$, $\mathbf{n}_p = (a;b)$

$\mathbf{u}_p = C - A = (3;3)$, $\mathbf{n}_p = (-3;3)$

$\Rightarrow$ p: $-3x + 3y + c = 0$

$A \in p$: $-3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + c = 0$

$c = 0$

$-3x + 3y + 0 = 0$

p: $x - y = 0$

parametrické vyjádření přímky p

p: $X = A + t\mathbf{u}_p$, $A[a_1;a_2]$, $\mathbf{u}_p = (u_1;u_2) = C - A$

$x = a_1 + tu_1$

$y = a_2 + tu_2$, $t \in \mathbb{R}$

p: $x = 0 + 3t$

$y = 0 + 3t$, $t \in \mathbb{R}$

p: $x = 3t$

$y = 3t$, $t \in \mathbb{R}$

obecná rovnice přímky q

q: $ax + by + c = 0$, $(a;b) \neq (0;0)$, $\mathbf{n}_q = (a;b)$

$\mathbf{u}_q = D - B = (-3; 3)$, $\mathbf{n}_q = (-3;-3)$

$\Rightarrow$ q: $-3x - 3y + c = 0$

$B \in q$: $-3 \cdot 3 - 3 \cdot 0 + c = 0$

$c = 9$

$-3x - 3y + 9 = 0$

q: $x + y - 3 = 0$

parametrické vyjádření přímky q

q: $X = B + s\mathbf{u}_q$, $B[b_1;b_2]$, $\mathbf{u}_q = (u_1;u_2) = D - B$

$x = b_1 + su_1$

$y = b_2 + su_2$, $s \in \mathbb{R}$

q: $x = 3 - 3s$

$y = 0 + 3s$, $s \in \mathbb{R}$

q: $x = 3 - 3s$

$y = 3s$, $s \in \mathbb{R}$

Nalezli jsme předpis přímk p a q v obecném tvaru i parametrickém vyjádření. Průsečík P přímk p a q nalezneme jejich položením do rovnosti $p = q$. Ukážeme si nalezení průsečíku P z obecné rovnice i parametrického vyjádření.

e) Nejprve najdeme průsečík přímk z obecného tvaru rovnice:

$p = q$, p: $y = x$, q: $y = -x + 3$

$x = -x + 3$

$x = \frac{3}{2}$

- o y-ovou souřadnici nalezneme dosazením x do předpisu jedné z přímek, zvolíme např. $p: x - y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow P\left[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$$

- f) Nalezneme průsečík i z parametrického vyjádření přímek p a q (porovnáním parametrických vyjádření přímek p, q).

$$\begin{array}{ll} p = q, p: x = 3t; & q: x = 3 - 3s \\ y = 3t, t \in \mathbb{R} & y = 3s, s \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$3t = 3 - 3s$$

$$\underline{3t = 3s, t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}} \Rightarrow t = s, \text{ dosadíme do 1. rovnice}$$

$$3s = 3 - 3s$$

$$6s = 3$$

$$s = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

- o dopočítáme souřadnice průsečíku P dosazením do přímky p nebo q , zvolili jsme si dosazení do přímky q a získáme $x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2} \Rightarrow P\left[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$

Úloha má jedno řešení - průsečík přímek p a q je bod $P\left[\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

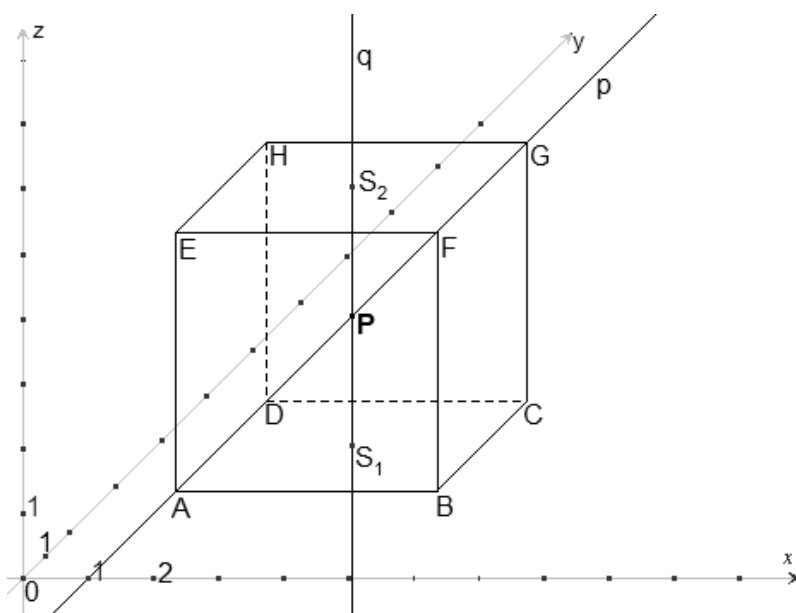
.....

Úloha 6

Je dána krychle ABCDEFGH. Určete průsečík přímek AG a S_1S_2 . S_1 je střed dolní podstavy krychle, S_2 je střed horní podstavy krychle, $A[2;1;1]$, $a = 4\text{cm}$. Řešte konstrukčně a analyticky.

Konstrukční řešení

Konstrukce



Postup konstrukce

1. krychle ABCDEFGH
2. p ; $p = AG$
3. S_1 ; S_1 střed AC
4. S_2 ; S_2 střed EG
5. q ; $q = S_1S_2$
6. P ; $P = p \cap q$

Závěr:

Úloha má 1 řešení.

Analytické řešení

- a) Přímka p je určena body A, G a přímka q body S_1 a S_2 . Jelikož je délka strany $a = 4\text{cm}$, snadno nalezneme souřadnice bodů G, S_1 a S_2 : $G[6;5;5]$, $S_1[4;3;1]$, $S_2[4;3;5]$.
- b) Vzhledem k tomu, že jsme již v prostoru, lze přímky vyjádřit pouze parametricky:

$$p: X = A + t\mathbf{u}_p, A[a_1;a_2;a_3], \mathbf{u}_p = (u_1;u_2;u_3) = G - A = (4;4;4)$$

$$x = a_1 + tu_1$$

$$y = a_2 + tu_2$$

$$\underline{z = a_3 + tu_3, t \in \mathbb{R}}$$

$$p: \mathbf{x} = 2 + 4t$$

$$\mathbf{y} = 1 + 4t$$

$$\underline{\mathbf{z} = 1 + 4t, t \in \mathbb{R}}$$

$$q: X = S_1 + s\mathbf{u}_q, S_1[s_1; s_2; s_3], \mathbf{u}_q = (u_1; u_2; u_3) = S_2 - S_1 = (0; 0; 4)$$

$$x = s_1 + su_1$$

$$y = s_2 + su_2$$

$$z = s_3 + su_3, s \in \mathbb{R}$$

$$q: x = 4$$

$$y = 3$$

$$\underline{z = 1 + 4s, s \in \mathbb{R}}$$

c) K nalezení průsečíku přímek p a q dáme parametrická vyjádření přímek do rovnosti:

$$\text{I. } 2 + 4t = 4 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{II. } 1 + 4t = 3 \Rightarrow t = \frac{1}{2}, \text{ dosadíme do rovnice III.}$$

$$\text{III. } \underline{1 + 4t = 1 + 4s, t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}}$$

$$1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 1 + 4s$$

$$s = \frac{1}{2}$$

Nalezli jsme parametry s a t a nyní nalezneme souřadnice průsečíku a to buď dosazením parametru t do parametrického vyjádření přímky p anebo parametru s do parametrického vyjádření přímky q.

d) Vybrali jsme si přímku q:

$$q: x = 4$$

$$y = 3$$

$$\underline{z = 1 + 4s, s \in \mathbb{R}} \Rightarrow x = 4, y = 3, z = 3 \Rightarrow \mathbf{P[4,3,3]}$$

Úloha má jedno řešení – průsečíkem přímek p a q je bod P[4,3,3].

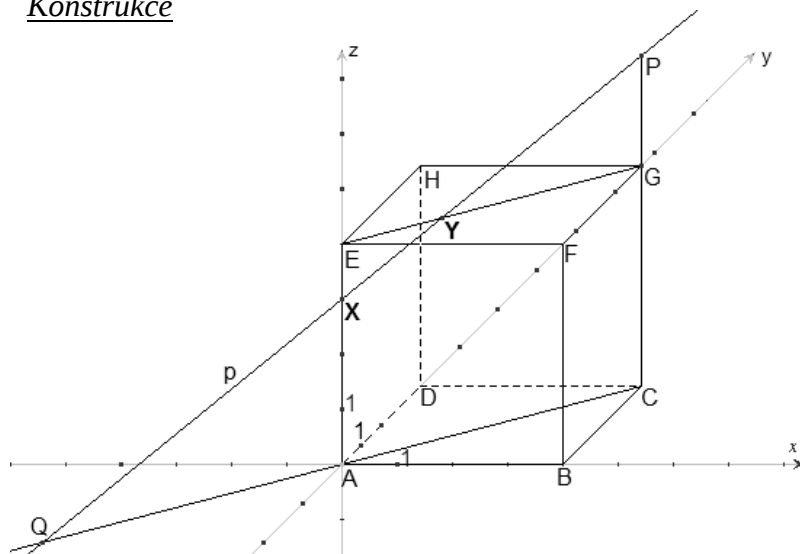
.....

Úloha 7

Je dána krychle ABCDEFGH. Určete průsečík přímky p s krychlí. $A[0;0;0]$, $a = 4\text{cm}$, $p = PQ$, $P \in CG$, $|CP| = 1,5 |CG|$, $Q \in AC$, $A = S_{CQ}$. Řešte konstrukčně a analyticky.

Konstrukční řešení

Konstrukce



Postup konstrukce

1. krychle ABCDEFGH
2. P ; $|CP| = 1,5|CG|$,
 $P \in \rightarrow CG$
3. Q ; $A = S_{CQ}$, $Q \in \rightarrow CA$
4. p ; $p = PQ$
5. ACG ; $p \in ACG$
6. X ; $X = p \cap AE$
7. Y ; $Y = p \cap EG$

Závěr

Úloha má 2 řešení.

Analytické řešení

- a) Přímka p leží v rovině ACG . Krychle ABCDEFGH, resp. rovina ACG , a přímka p mají dva společné body X a Y .
- b) Nejprve nalezneme parametrické vyjádření přímky $p = PQ$. Ze zadání známe $A[0;0;0]$, $a = 4\text{cm}$, proto snadno určíme souřadnice bodů P a Q : $P[4;4;6]$, $Q[-4;-4;0]$

$$p: X = P + t\mathbf{u}_p, t \in \mathbb{R}, \mathbf{u}_p = Q - P = (-8;-8;-6)$$

$$p: x = 4 - 8t$$

$$y = 4 - 8t$$

$$z = 6 - 6t, t \in \mathbb{R}$$

- c) K nalezení souřadnic bodů X a Y (průsečíků přímky p s krychlí ABCDEFGH) určíme parametrická vyjádření přímek $q = AE$ a $k = EG$

souřadnice bodu X nalezneme jako
průsečík přímky p a $q = AE$

$$A[0;0;0], E[0;0;4], \mathbf{u}_q = E - A = (0;0;4)$$

$$q: X = A + s\mathbf{u}_q, s \in \mathbb{R}$$

$$q: x = 0$$

$$y = 0$$

$$z = 4s, s \in \mathbb{R}$$

$$p = q$$

$$\text{I. } 4 - 8t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{II. } 4 - 8t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}, \text{ dosadíme do III.}$$

$$\text{III. } 6 - 6t = 4s$$

$$6 - 6 \cdot \frac{1}{2} = 4s$$

$$\underline{3 = 4s} \Rightarrow s = \frac{3}{4}$$

$$X: x = 0, y = 0, z = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$$

$$\Rightarrow X[0;0;3]$$

souřadnice bodu Y nalezneme jako
průsečík přímky p a $k = EG$

$$E[0;0;4], G[4;4;4], \mathbf{u}_k = G - E = (4;4;0)$$

$$k: X = E + v\mathbf{u}_k, v \in \mathbb{R}$$

$$k: x = 4v$$

$$y = 4v$$

$$z = 4, v \in \mathbb{R}$$

$$p = k$$

$$\text{I. } 4 - 8t = 4v \Rightarrow t = \frac{1-v}{2}$$

$$\text{II. } 4 - 8t = 4v \Rightarrow t = \frac{1-v}{2}$$

$$\text{III. } 6 - 6t = 4$$

$$6 - 6 \cdot \frac{1-v}{2} = 4$$

$$\underline{3v = 1} \Rightarrow v = \frac{1}{3}, t = \frac{1}{3}$$

$$Y: x = 4 \cdot \frac{1}{3}, y = 4 \cdot \frac{1}{3}, z = 4$$

$$\Rightarrow Y\left[\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; 4\right]$$

Úloha má dvě řešení – průsečíky X a Y. $X[0;0;3], Y\left[\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; 4\right]$.

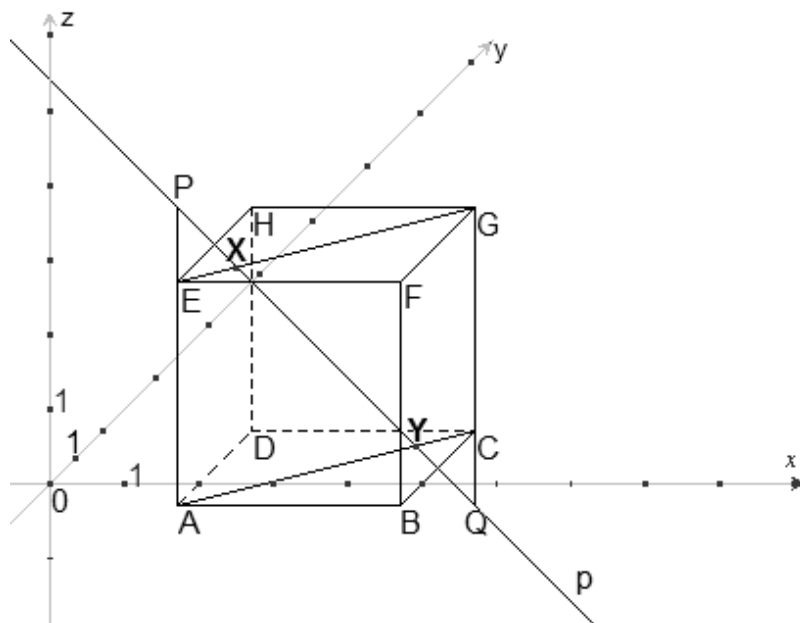
.....

Úloha 8

Je dána krychle ABCDEFGH. Určete průsečík přímky p s krychlí. $A[1;2;-1]$, $a = 3\text{cm}$, $p = PQ$, $P \in AE$, $|AP| = \frac{4}{3} |AE|$, $Q \in CG$, $|GQ| = \frac{4}{3} |CG|$. Řešte konstrukčně a analyticky.

Konstrukční řešení

Konstrukce



Postup konstrukce

1. krychle ABCDEFGH
2. P ; $|AP| = \frac{4}{3} |AE|$, $P \in \rightarrow AE$
3. Q ; $|GQ| = \frac{4}{3} |CG|$, $Q \in \rightarrow CG$
4. p ; $p = PQ$
5. ACG ; $p \in ACG$
6. X ; $X = p \cap EG$
7. Y ; $Y = p \cap AC$

Závěr

Úloha má 2 řešení.

Analytické řešení

- a) Přímka p leží v rovině ACG . Krychle ABCDEFGH, resp. rovina ACG , a přímka p mají dva společné body X a Y .
- b) Stejně jako u předchozí úlohy (Úloha 7) i zde nejprve nalezneme parametrické vyjádření přímky $p = PQ$. Jelikož známe souřadnice bodu A a délku strany a , $A[1;2;-1]$, $a = 3\text{cm}$, snadno určíme souřadnice bodů P a Q : $P[1;2;3]$, $Q[4;5;-2]$.

$$p: X = P + t\mathbf{u}_p, t \in \mathbb{R}, \mathbf{u}_p = Q - P = (3;3;-5)$$

$$p: x = 1 + 3t$$

$$y = 2 + 3t$$

$$z = 3 - 5t, t \in \mathbb{R}$$

c) Nalezneme souřadnice bodů X a Y, jak si označíme průsečíky přímky p s krychlí ABCDEFGH.

nalezneme souřadnice bodu X jako
průsečík přímky p a $q = EG$

$$E[1;2;2], G[4;5;2], \mathbf{u}_q = G - E = (3;3;0)$$

$$q: \mathbf{x} = E + s\mathbf{u}_q, s \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{q}: \mathbf{x} = \mathbf{1} + 3s$$

$$y = 2 + 3s$$

$$z = 2, s \in \mathbb{R}$$

$$p = q$$

$$\text{I. } 1 + 3t = 1 + 3s \Rightarrow t = s$$

$$\text{II. } 2 + 3t = 2 + 3s \Rightarrow t = s$$

$$\text{III. } 3 - 5t = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{5}, s = \frac{1}{5}$$

$$X: x = 1 + 3 \cdot \frac{1}{5}, y = 2 + 3 \cdot \frac{1}{5}, z = 2$$

$$\Rightarrow X \left[\frac{8}{5}; \frac{13}{5}; 2 \right]$$

nalezneme souřadnice bodu Y jako
průsečík přímky p a $k = AC$

$$A[1;2;-1], C[4;5;-1], \mathbf{u}_k = C - A = (3;3;0)$$

$$k: \mathbf{x} = A + v\mathbf{u}_k, v \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{k}: \mathbf{x} = \mathbf{1} + 3v$$

$$y = 2 + 3v$$

$$z = -1, v \in \mathbb{R}$$

$$p = k$$

$$\text{I. } 1 + 3t = 1 + 3v \Rightarrow t = v$$

$$\text{II. } 2 + 3t = 2 + 3v \Rightarrow t = v$$

$$\text{III. } 3 - 5t = -1 \Rightarrow t = \frac{4}{5}, v = \frac{4}{5}$$

$$Y: x = 1 + 3 \cdot \frac{4}{5}, y = 2 + 3 \cdot \frac{4}{5}, z = -1$$

$$\Rightarrow Y \left[\frac{17}{5}; \frac{22}{5}; -1 \right]$$

Úloha má dvě řešení – průsečíky X a Y. $X \left[\frac{8}{5}; \frac{13}{5}; 2 \right], Y \left[\frac{17}{5}; \frac{22}{5}; -1 \right]$.

.....

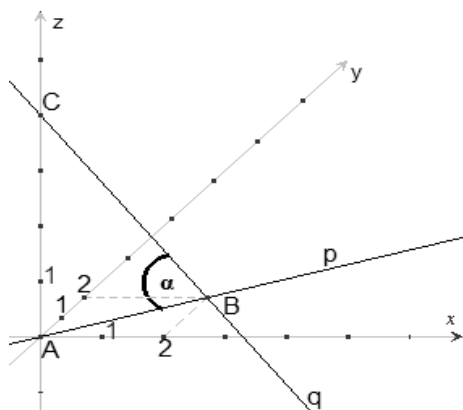
3 Odchylky přímek a rovin

Úloha 9

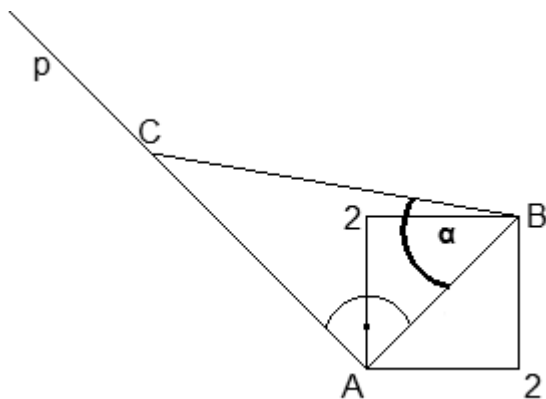
Určete odchylku přímek AB a BC, jestliže $A[0;0;0]$, $B[2;2;0]$, $C[0;0;4]$. Řešte konstrukčně, analyticky a početně.

Konstrukční řešení

Náčrt



Konstrukce



Postup konstrukce

1. čtverec $A2B2$, $a = 2\text{cm}$
2. $\rightarrow p$; $\rightarrow p \perp AB$, $A \in \rightarrow p$
3. C ; $|CA| = 4\text{cm}$, $C \in \rightarrow p$
4. trojúhelník ABC
5. α ; $\alpha = |\angle ABC|$

Závěr: Odchylka přímek AB a BC je asi 55° .

Analytické řešení

a) Přímku AB označme jako přímku p, BC pak jako přímku q.

b) Odchylku přímek p a q vypočítáme podle vzorce $\cos \alpha = \frac{|\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_q|}{|\mathbf{u}_p| \cdot |\mathbf{u}_q|}$, kde

$\mathbf{u}_p$ je směrový vektor přímky p, $\mathbf{u}_p = B - A = (2; 2; 0)$

$\mathbf{u}_q$ je směrový vektor přímky q, $\mathbf{u}_q = B - C = (2; 2; -4)$

$$|\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_q| = |u_{p1} \cdot u_{q1} + u_{p2} \cdot u_{q2} + u_{p3} \cdot u_{q3}| = |2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-4)| = |8| = 8$$

$$|\mathbf{u}_p| = \sqrt{u_{p1}^2 + u_{p2}^2 + u_{p3}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|\mathbf{u}_q| = \sqrt{u_{q1}^2 + u_{q2}^2 + u_{q3}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6}},$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\alpha = 54^\circ 44'$$

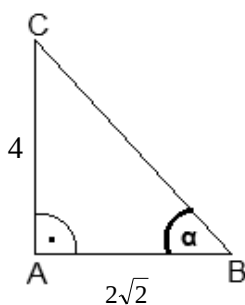
Odchylka přímek AB a BC je $54^\circ 44'$.

Početní řešení

a) V početním řešení této úlohy hledáme pravoúhlý trojúhelník, který svírá hledaný úhel α . Hledaný trojúhelník je BAC s pravým úhlem při vrcholu A. Délka strany $|AC| = 4\text{cm}$, $|AB| = 2\sqrt{2}$.

poznámka: $|AB|$ je úhlopříčkou čtverce o délce strany 2 cm $\rightarrow$ úhlopříčka ve čtverci má délku $a\sqrt{2}$, což je v našem případě tedy rovno $2\sqrt{2}$

b) Z náčrtu trojúhelníku je zřejmé, jakou goniometrickou funkci pro výpočet úhlu využijeme – funkci tangens



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AC|}{|AB|},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{2\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2},$$

$$\alpha = 54^\circ 44'$$

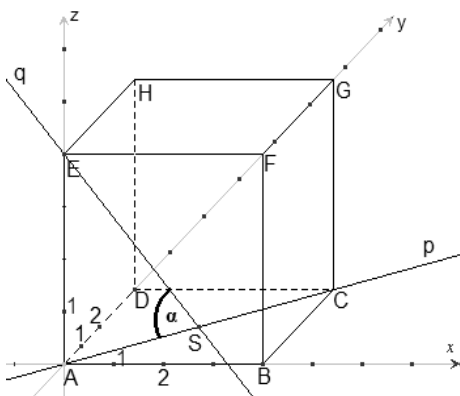
Odchylka přímek AB a BC je $54^\circ 44'$.

Úloha 10

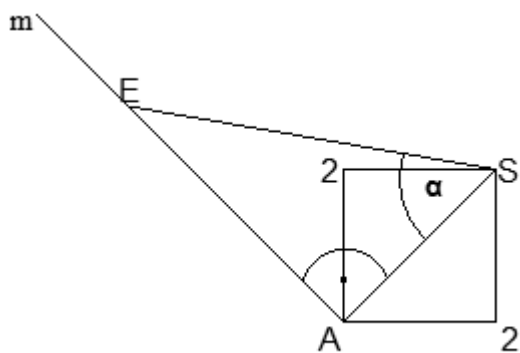
Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímky AS a ES. $A[0;0;0]$, $a = 4\text{cm}$, S je střed dolní podstavy krychle. Řešte konstrukčně, analyticky a početně.

Konstrukční řešení

Náčrt



Konstrukce



Postup konstrukce

1. čtverec $A2S2$, $a = 2\text{cm}$
2. $\rightarrow m$; $\rightarrow m \perp AS$, $A \in \rightarrow m$
3. E ; $|AE| = 4\text{cm}$, $E \in \rightarrow m$
4. trojúhelník ASE
5. α ; $\alpha = |\angle ASE|$

Závěr: Odchylka přímek AS a ES je asi 55° .

Analytické řešení

- a) Přímka p je dána body A a S, přímka q body E a S. Je zdán bod A, $A[0;0;0]$, snadno dopočítáme souřadnice bodů S a E, jelikož známe délku strany $a = 4\text{cm}$: $S[2;2;0]$, $E[0;0;4]$.

b) Určíme směrové vektory přímky p a q a nalezneme odchylku α podle vzorce:

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_q|}{|\mathbf{u}_p| |\mathbf{u}_q|}, \quad p = AS, \mathbf{u}_p = S - A = (2; 2; 0), \quad q = ES, \mathbf{u}_q = S - E = (2; 2; -4)$$

$$|\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_q| = |2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-4)| = |8| = 8$$

$$|\mathbf{u}_p| = \sqrt{u_{p1}^2 + u_{p2}^2 + u_{p3}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|\mathbf{u}_q| = \sqrt{u_{q1}^2 + u_{q2}^2 + u_{q3}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6}},$$

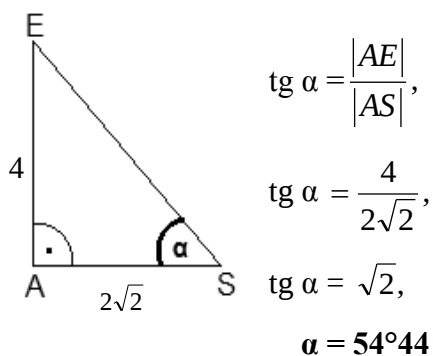
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\alpha = 54^\circ 44'$$

Odchylka přímek AB a BC je $54^\circ 44'$.

Počtení řešení

- a) K výpočtu využijeme pravoúhlý trojúhelník SAE, pravý úhel při vrcholu A. Délka strany $|AE| = 4\text{cm}$, $|AS| = 2\sqrt{2}\text{cm}$.
- b) Získáváme pravoúhlý trojúhelník SAE. Úhel α nalezneme pomocí funkce tangens.



Odchylka přímek AB a BC je $54^\circ 44'$.

poznámka: Úloha 10 má shodný postup řešení s úlohou 9. Bodu S v úloze 10 odpovídá bod B v úloze 9, stejně tak je to s bodem E a C.

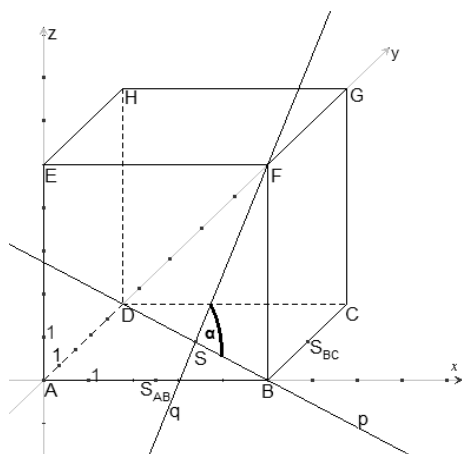
.....

Úloha 11

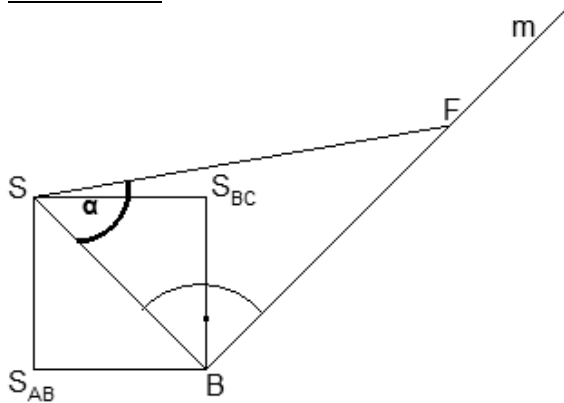
Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímky BS a FS. $A[0;0;0]$, $a = 5\text{cm}$, S je střed dolní podstavy krychle. Řešte konstrukčně, analyticky a početně.

Konstrukční řešení

Náčrt



Konstrukce



Postup konstrukce

1. čtverec $S_{AB}BS_{BC}S$, $a = 2,5\text{cm}$
2. $\rightarrow m$; $\rightarrow m \perp BS$, $B \in \rightarrow m$
3. F; $|BF| = 5\text{cm}$, $F \in \rightarrow m$
4. trojúhelník BSF
5. α ; $\alpha = |\angle BSF|$

Závěr:

Odchylka přímky BS a FS je asi 55° .

Analytické řešení

- a) Je dána přímka p a přímka q, $p = BS$, $q = FS$. Známe souřadnice bodu A a délku strany a, $A[0;0;0]$, $a = 5\text{cm}$, určíme souřadnice bodů B, F a S: $B[5;0;0]$, $F[5;0;5]$, $S\left[\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right]$.

b) Odchylku přímek p a q vypočítáme podle vzorce $\cos \alpha = \frac{|\mathbf{u}_p \mathbf{u}_q|}{|\mathbf{u}_p| |\mathbf{u}_q|}$.

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{B} - \mathbf{S} = \left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}; 0\right), \mathbf{u}_q = \mathbf{F} - \mathbf{S} = \left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}; 5\right)$$

$$|\mathbf{u}_p \mathbf{u}_q| = \left| \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 0 \cdot 5 \right| = \frac{50}{4}$$

$$|\mathbf{u}_p| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$|\mathbf{u}_q| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{\frac{150}{4}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{50}{4}}{\frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{12}},$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\alpha = 54^\circ 44'$$

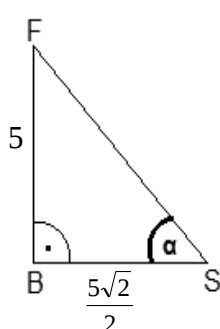
Odchylka přímek BS a FS je $54^\circ 44'$.

Počtení řešení

a) K výpočtu využijeme pravoúhlý trojúhelník SBF s pravým úhlem při vrcholu B.

b) Ze zadání jsou zřejmé délky stran BF a BS. $|BF| = 5\text{cm}$, $|BS| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

c) Získáváme pravoúhlý trojúhelník SBF. Pro výpočet hledaného úhlu α využijeme funkci tangens.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|BF|}{|BS|},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{\frac{5\sqrt{2}}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = 54^\circ 44'$$

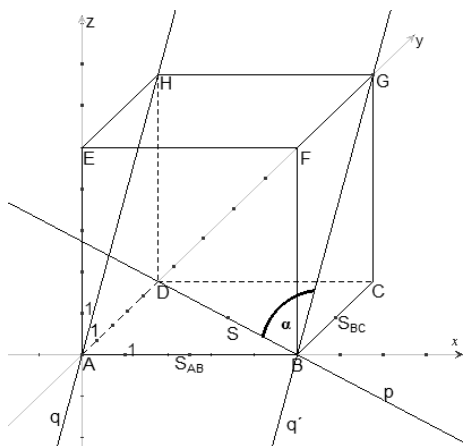
Odchylka přímek BS a FS je $54^\circ 44'$.

Úloha 12

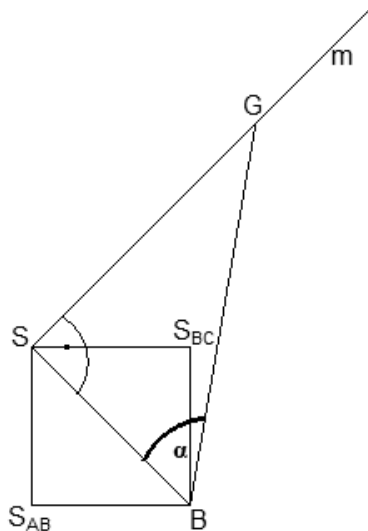
Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku přímek p a q. $A[0;0;0]$, $a = 5\text{cm}$, $p = BD$, $q = AH$. Řešte konstrukčně, analyticky a početně.

Konstrukční řešení

Náčrt



Konstrukce



Postup konstrukce

1. čtverec $S_{AB}BS_{BC}S$, $a = 2,5\text{cm}$
2. $\rightarrow m$; $\rightarrow m \perp SB$, $S \in \rightarrow m$
3. G ; $|BG| = 5\sqrt{2}$, $G \in \rightarrow m$
4. trojúhelník BSG
5. α ; $\alpha = |\angle SBG|$

Závěr:

Odchylka přímek p a q je asi 60° .

Analytické řešení

- a) Hledáme odchylku přímek p a q, ale jelikož nemají žádný společný bod, je nutné nalézt rovnoběžku jedné z přímek tak, aby měli jeden společný bod. Zvolili jsme si nalézt rovnoběžku přímky q, tedy přímku q' , a to tak, že $B \in q'$.

b) K nalezení odchylky přímek p a q, resp. q', nejprve určíme souřadnice bodů, jimiž přímky procházejí. Ze zadání víme, že A[0;0;0], a = 5cm, proto jsou souřadnice bodů B, D, G následující: B[5;0;0], D[0;5;0], G[5;5;5].

c) Určíme souřadnice směrových vektorů přímek a následně pak jejich odchylku.

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_{q'}|}{|\mathbf{u}_p| |\mathbf{u}_{q'}|}, \quad p = BD, \quad \mathbf{u}_p = D - B = (-5; 5; 0), \quad q' = BG, \quad \mathbf{u}_{q'} = G - B = (0; 5; 5)$$

$$|\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_{q'}| = |(-5) \cdot 0 + 5 \cdot 5 + 0 \cdot 5| = |25| = 25$$

$$|\mathbf{u}_p| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\mathbf{u}_{q'}| = \sqrt{0^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{25}{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2},$$

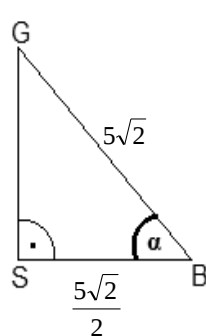
$$\alpha = 60^\circ$$

Odchylka přímek p a q, resp. q' je 60°.

Počtní řešení

a) Při výpočtu budeme vyjadřovat úhel α z pravoúhlého trojúhelníku BSG, pravý úhel je při vrcholu S. Délka strany $|BS| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm, $|BG| = 5\sqrt{2}$ cm.

b) Načtneme pravoúhlý trojúhelník BSG a pomocí funkce $\cos \alpha$ vypočítáme odchylku přímek p a q'



$$\cos \alpha = \frac{|BS|}{|BG|},$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{5\sqrt{2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Odchylka přímek p a q' je 60°.

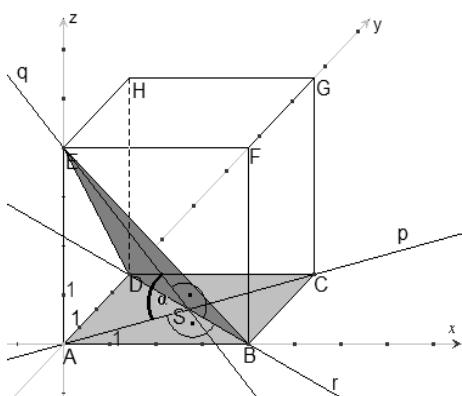
.....

Úloha 13

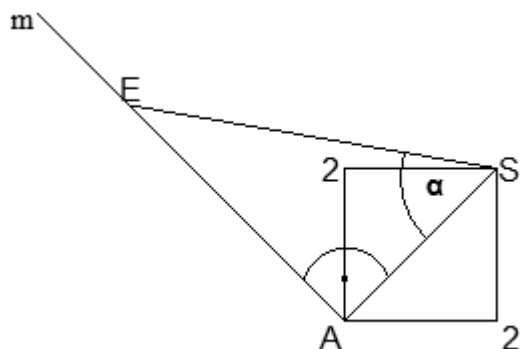
Je dána krychle ABCDEFGH. Určete odchylku roviny ABC a BDE. $A[0;0;0]$, $a = 4\text{cm}$. Řešte konstrukčně, analyticky a početně.

Konstrukční řešení

Náčrt



Konstrukce



Postup konstrukce

1. čtverec $A2S2$, $a = 2\text{cm}$
2. $\rightarrow m$; $\rightarrow m \perp AS$, $A \in \rightarrow m$
3. E ; $|AE| = 4\text{cm}$, $E \in \rightarrow m$
4. trojúhelník ASE
5. α ; $\alpha = |\angle ASE|$

Závěr:

Odchylka rovin ABC a BDE je asi 55° .

Analytické řešení

- a) Nejprve musíme nalézt průsečnici rovin ABC a BDE, na kterou je kolmá přímka z roviny ABC a zároveň z roviny BDE. S je střed BD, $p = AS$, $p \perp BD$, $p \in ABC$, $q = ES$, $q \perp BD$, $q \in BDE$. Přímka BD = r je průsečnicí rovin ABC a BDE.

$\rightarrow$ odchylkou rovin ABC a BDE je tedy $|\angle pq| = |\angle ASE|$

b) Určíme souřadnice bodů A, S, E. A[0;0;0], a = 4cm, pak tedy S[2;2;0], E[0;0;4].

c) Odchylku přímek p a q vypočítáme podle vzorce $\cos \alpha = \frac{|\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_q|}{|\mathbf{u}_p| \cdot |\mathbf{u}_q|}$, kde

$\mathbf{u}_p$ je směrový vektor přímky p, $\mathbf{u}_p = \mathbf{S} - \mathbf{A} = (2;2;0)$

$\mathbf{u}_q$ je směrový vektor přímky q, $\mathbf{u}_q = \mathbf{S} - \mathbf{E} = (2;2;-4)$

$$|\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_q| = |u_{p1} \cdot u_{q1} + u_{p2} \cdot u_{q2} + u_{p3} \cdot u_{q3}| = |2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-4)| = |8| = 8$$

$$|\mathbf{u}_p| = \sqrt{u_{p1}^2 + u_{p2}^2 + u_{p3}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|\mathbf{u}_q| = \sqrt{u_{q1}^2 + u_{q2}^2 + u_{q3}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6}},$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\alpha = 54^\circ 44'$$

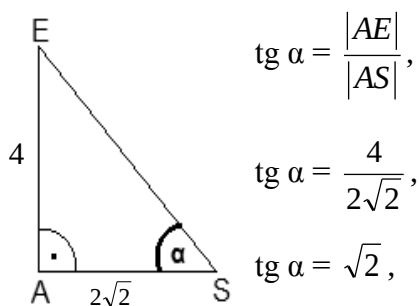
Odchylka rovin ABC a BDE je $54^\circ 44'$.

Počtení řešení

Zjistili jsme, že odchylkou rovin ABC a BDE je $|\angle pq| = |\angle ASE|$. Odchylku tedy budeme zjišťovat z pravoúhlého trojúhelníku SAE s pravým úhlem při vrcholu A.

a) Známe délky stran pravoúhlého trojúhelníka: $|AE| = 4\text{cm}$, $|AS| = 2\sqrt{2}$.

b) Výslednou odchylku vypočítáme pomocí goniometrické funkce tangens.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AE|}{|AS|},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{2\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2},$$

$$\alpha = 54^\circ 44'$$

Odchylka rovin ABC a BDE je $54^\circ 44'$.

.....

ZÁVĚR

Řešené úlohy doporučujeme aplikovat v hodinách analytické geometrie na střední škole. Studenti tak budou mít možnost poznat a uvědomit si komplexní řešení úloh. S některými způsoby řešení se setkávají již na základní škole, konkrétně tedy s konstrukčním řešením, které se na střední škole prohlubuje a rozšiřuje.

Početní řešení bývá jakýmsi doplňkem konstrukčního řešení. Je založené na obdobném přístupu, jako má konstrukční řešení, liší se však v užití matematického modelu používaného pro řešení úloh. Početní řešení se využívá nejen ve stereometrických úlohách, ale i v úlohách planimetrických. Jako příklad můžeme uvést určení úhlu úhlopříček v rovnoběžníku (lichoběžníku apod.). Tuto úlohu je možné jednak zkonstruovat a změřit úhel a jednak vypočítat s využitím goniometrických funkcí, Pythagorovy věty a dalších vět.

S analytickým řešením se studenti setkávají až na střední škole a řešení úloh spočívá v převedení konstrukční úlohy pomocí souřadnic na úlohu algebraickou. Úloha se vyřeší a převede a vyjádří opět geometricky. Zpravidla probíhá výuka analytické geometrie výkladem planimetrických úloh, tedy úloh v rovině, na některých středních školách se vyučují stereometrické úlohy, úlohy v prostoru.