Technická univerzita v Liberci

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

---

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Kombinace oborů: MA - AJ

# O LOKÁLNÍCH EXTRÉMECH S VAZBAMI

Diplomová práce 97 - FP - KMD - 007


Autor:

Jméno a PŘÍJMENÍ: Podpis: Lenka Hnízdová

Lenka HNÍZDOVÁ

Adresa: Laudova 1027

163 00 Praha 6 - Řepy


Vedoucí práce: Doc. RNDr. Miloslav Nekvinda, CSc

Počet

| stran | obrázků | tabulek | příloh |
|---|---|---|---|
| 34 | 10 | 0 | 0 |

V Liberci dne 21. května 1997

# Technická univerzita v Liberci
## FAKULTA PEDAGOGICKÁ
461 17 LIBEREC 1, Hálkova 6 Telefon: 5227111 Fax: 5227332

*Katedra:* matematiky a didaktiky matematiky

# ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(závěrečného projektu)

*diplomant:* Lenka Hnízdová

*adresa:* Landova 1027, 163 00 Praha 6

*obor:* matematika - anglický jazyk

*Název:* O lokálních extrémech s vazbami

*Vedoucí práce:* Doc. RNDr. Miloslav Nekvinda, CSc.

*Termín odevzdání:* květen 1997

Pozn.: Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž specifikují zadání: východiska, cíle, předpoklady, metody zpracování, základní literaturu (zpravidla na rub tohoto formuláře). Zásady pro zpracování DP jsou k dispozici ve dvou verzích (stručné, resp. metodické pokyny) v UKN TU, na katedrách a na Děkanátě Fakulty pedagogické.

V Liberci dne 30. 5. 1996

M. Nekvinda v.zast.
*vedoucí katedry*

J. Vild
Doc. RNDr. Jaroslav Vild
*děkan*

Převzal (diplomant):
Datum:
Podpis: Lenka Hnízdová

Prohlášení o původnosti práce:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla veškerou použitou literaturu.

Liberec, 1997.-05.-21.

*Lenka Hnízdová*

Prohlášení k využívání výsledků DP:

Jsem si vědoma toho, že diplomová práce je majetkem školy a že s ní nemohu sama bez svolení školy disponovat, a že diplomová práce může být zapůjčena či objednána (kopie) za účelem využití jejího obsahu.

Beru na vědomí, že po pěti letech si mohu diplomovou práci vyžádat v Univerzitní knihovně TU v Liberci, kde je uložena.

Jméno a PŘÍJMENÍ: Lenka HNÍZDOVÁ

Adresa: Laudova 1027, Praha 6, PSČ: 163 00

Podpis: Lenka Hnízdová

## O lokálních extrémech s vazbami


### Resumé

Práce se zabývá lokálními extrémy funkcí více proměnných za existence vazebních podmínek. Seznamuje čtenáře s některými existujícími postupy řešení a nabízí možnosti jak zpřístupnit tyto problémy. Důraz je kladen na pochopení použitých prostředků. Práce obsahuje převážně velmi jednoduché úlohy, které se omezují na trojrozměrný prostor. Lokální extrémy jsou zpočátku vyšetřovány pomocí schématu dotýkajících se vrstevnic za použití příkladů z reálného života, následuje návod k vytvoření reálné představy vázaného lokálního extrému a několik úloh. V druhé části práce se uplatňuje analytický přístup, tedy parciální derivace, konkrétně technika Lagrangeových multiplikátorů.


## Extrema subject to constraints


### Summary

The work deals with extreme values of functions of several variables subject to constraints. The thesis introduces some existing procedures of solving such tasks and suggests ways of presenting the subject in an accessible way. Stress is laid upon understanding the use of the means employed. The work contains mainly simple exercises in no more than three-dimensional space. First, the extreme values are sought by means of the touching level curves, using real life examples, than the image of extremum is created and several exercises supplemented. The second part of the thesis makes use of mathematical analysis through partial derivatives, namely Lagrange multipliers.


## Äusserste Themen des Zwanges


### Zusammenfassung

Die Arbeit handelt über äusserste Funktionswerte verschiedener veränderlichen Themen des Zwanges. Die These stellt einige schon bestehende Verfahren über die Lösung solcher Aufgaben vor und schlägt vor das Thema auf eine einfache Art vorzustellen. Der Stress beruht sich auf das Verstehen der angewendeten Mitteln. Die Arbeit besteht hauptsächlich aus einfachen Aufgabe, in nicht mehr als drei-dimensionale Abständen. Erstens, die äussersten Funktionswerte werden nach der Bedeutung der verbundenen Höhenkurven ausgesucht, aus echten Lebensbeispielen, dann ist das Image der Extreme erschaffen und mehrere Aufgaben ergänzt. Der zweite Teil davon benutzt mathematische Analyze durch Teilderivative, genannt Lagrange Multiplikator.

# OBSAH


1. Úvod 1

2. Stav problému 2

3. Extrémy v běžném životě 3

4. Schéma dotýkajících se vrstevnic 7

5. Extrémy a diferenciální počet 13

6. Vázané extrémy 14

6.1. Jak si představit lokální extrém s vazbou 14

6.2. Jak hledat lokální extrém s vazbou 15

7. Nutná podmínka pro vázaný lokální extrém 17

7.1. Postup při výpočtu vázaného lokálního extrému 18

8. Postačující podmínka pro vázaný lok. extrém 21

8.1. Volný lokální extrém funkce jedné proměnné 21

9. Analytické odvození postačujících podmínek 23

9.1. Analytické odvození nutných podmínek 23

9.2. Postačující podmínky 24

10. Funkce více proměnných 32

11. Závěr 34

# 1 Úvod

Součástí čtyřsemestrového kurzu matematické analýzy pro učitele 2. stupně základních škol je studium lokálních extrémů funkcí více proměnných za existence vazebních podmínek. K řešení tohoto typu úloh se používá technika Lagrangeových multiplikátorů. Zmíněná látka je poměrně složitá na pochopení a při výkladu vznikají metodické problémy související se zdůvodněním, geometrickou interpretací a názorností použitých metod.

Mým cílem bylo seznámit čtenáře s některými existujícími postupy řešení úlohy používanými v literatuře a pokusit se o nalezení možností, jak zpřístupnit tyto problémy.

Na základě vlastní zkušenosti s danou tematikou, získané ve výše zmíněném kursu matematické analýzy, kladu důraz na pochopení použitých prostředků.

Ve snaze přiblížit problematiku nezasvěcenému čtenáři jsem ve výkladu začínala u velice jednoduchých metod a úloh a postupně docházela pomocí několika různých postupů k obecným závěrům.

Jelikož se domnívám, že pro potřeby učitele základní školy je základní znalost postačující, zaměřuji se ve své práci na jednoduché úlohy, ve kterých vystačím s prostorem trojrozměrným.

Práce je zpracována s použitím editoru Ami Pro v programu Windows firmy Microsoft. Jediným problémem, ačkoli nepříliš závažným, je skutečnost , že uvedený editor nezachovává nastavené řádkování při použití režimu "rovnice". Tento fakt se bohužel negativně projevuje na estetickém vzhledu textu.

# 2 Stav problému

K danému tématu jsem prostudovala tři základní publikace.

Doporučenou literaturou ke kurzu matematické analýzy je *Diferenciální počet* V. Jarníka. Tato kniha je charakterizována jako vysokoškolská učebnice a lokálními maximy a minimy se zabývá poměrně stručně na šestnácti stránkách [Jar-84:504-519] , z nichž na vázané extrémy připadá přibližně devět. Kniha nabízí definice, věty a jejich důkazy, společně s řešenými příklady, neobsahuje však geometrickou interpretaci. Zabývá se zkrátka tématem výlučně z hlediska diferenciálního počtu.

Další knihou je *Kurs differencial'nogo i integral'nogo isčislenija* G. M. Fichtengol´ce. Ta se naopak extrémy zabývá poměrně obšírně, rovněž však převážně z pohledu diferenciálního počtu. Samotným extrémům je věnována celá kapitola čítající 24 stran [Fich-66:417-440], avšak technikou Lagrangeových multiplikátorů se autor zabývá v souvislosti s jiným tématem - v souvislosti s implicitními funkcemi.

Z hlediska názornosti považuji za nejvhodnější knihu *Matematika i pravdopodobnye rassuždenija,* jejímž autorem je G. Polya. Tato kniha se totiž maximy a minimy zabývá [Pol-75:141-160] z pohledu laika, nikoli matematika, a snaží se nalézt způsob provázání vědy a běžného života. Diferenciální počet se používá pouze při řešení úloh, a to pouze v několika případech, a tehdy je velmi jasně uvedena souvislost s geometrickou interpretací problému. Pro názornost je většina příkladů uvedena pro prostory maximálně trojrozměrné.

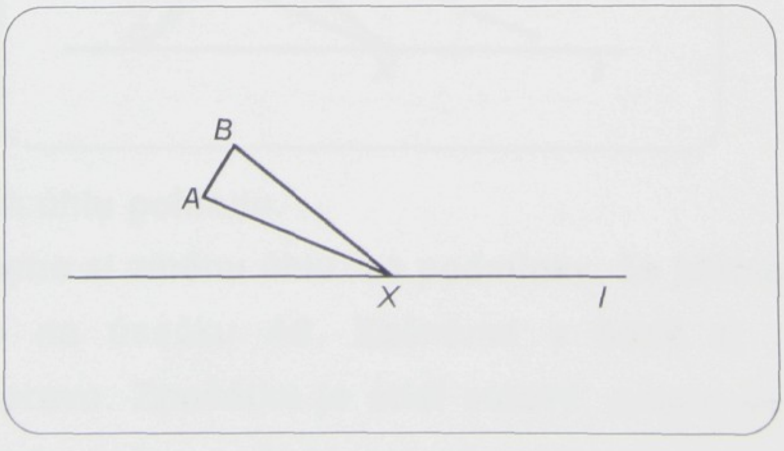
# 3 Extrémy v běžném životě

Tato kapitola je do značné míry volnou interpretací kapitoly *Maksimumy i minimumy* [Pol-75:141-160].

Každý z nás se v každodenním životě běžně dostává do situací, kdy musí řešit úlohy na maximum či minimum. Chceme získat určité zboží za nejmenší možnou cenu, vykonat danou práci při nejmenším možném úsilí, dosáhnout maximálního efektu při daném úsilí ap. Matematické úlohy na maximum nás zřejmě lákají proto, že jsou idealizací našich běžných úkolů.

V této kapitole se budeme zabývat několika úlohami na maximum či minimum, a pokusíme se nalézt nějaká schémata pro nalezení uvedených extrémů. Řešíme-li úlohu s určitým zájmem a porozuměním, může se nám podařit dosáhnout velmi cenného cíle - nalezení schématu či modelu, který bude možno použít při řešení podobných úloh.

•Příklad 1. V rovině jsou dány dva body a přímka, přičemž oba body leží ve stejné polorovině určené přímkou. Na dané přímce máme nalézt bod, z něhož je úsečka určená dvěma danými body vidět pod největším možným úhlem.




Obr. 1. Hledání ideálního úhlu pohledu.

Zvolme nejprve označení. Nechť

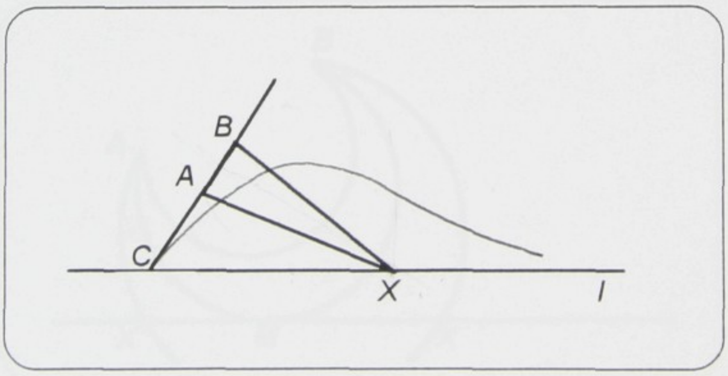
$A$ a $B$ jsou dva dané body,

$l$ je daná přímka,

$X$ je proměnný bod.

Budeme se zabývat úhlem $\angle AXB$, který má vrchol v proměnném bodě $X$ a je určen danou úsečkou $AB$. Je třeba nalézt takovou polohu bodu $X$ na přímce $l$, pro kterou by tento úhel byl maximální.

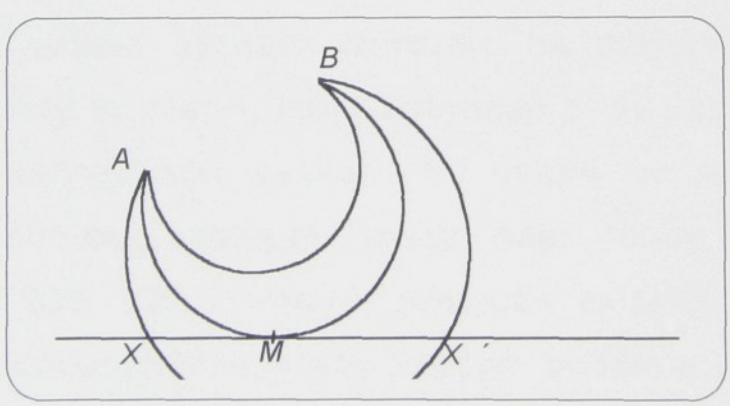
Představme si, že přímka $l$ je přímá cesta. Chceme-li z některého bodu cesty $l$ vystřelit na cíl rozprostírající se od $A$ do $B$, bylo by vhodné si vybrat právě hledaný bod, ten nám totiž dává nejlepší možnost, jak vidět cíl. Pokud bychom měli za úkol pořídit z ulice fotografii domu, jehož rohy jsou v bodech $A$, $B$, opět bychom měli vybrat hledaný bod. Poskytuje nám totiž nejširší pole pohledu. Nevíme sice, kde úhel dosahuje maxima, ale víme, že nějaké maximum existuje. Proč je existence maxima tolik pravděpodobná?




Obr. 2. Průběh úhlu pohledu.

Představme si změnu úhlu za podmínky, že jdeme po přímce $l$ a díváme se na úsečku $AB$. Začněme v bodě $C$ (obr. 2) a pokračujme vpravo. Zpočátku je úhel nulový, potom se zvětšuje, a od určitého bodu začne opět klesat až v bodech velmi vzdálených od úsečky *AB* se opět blíží k nule. Mezi dvěma krajními body, kde je úhel minimální, musí zřejmě ležet bod, ve kterém má úhel maximální hodnotu. Nabízí se otázky, kolik takových bodů bude, a kde budou ležet.

Vyberme proměnný bod *X* přímky *l*. Je nepravděpodobné, že by se právě v tomto bodě nacházelo maximum. Jak bychom mohli s naprostou jistotou určit, zda je v tomto bodě úhel maximální či ne? Navazujíce na úvahu o průběhu velikosti úhlu při pohybu po přímce *l* docházíme k závěru, že pokud bod *X* není v poloze maxima, musí existovat ještě jeden bod (ležící na druhou stranu od hledaného maxima), ve kterém je velikost úhlu stejná jako velikost úhlu ∠*AXB*. Nazvěme tento bod *X´*. Kde bude ležet takový bod *X´***?** Odpověď je lehká. Nabízí se řešení pomocí "množin bodů daných vlastností" a tedy v našem případě množiny bodů, z nichž je vidět daná úsečka pod stejným úhlem. Takovou množinou je v našem případě (omezujeme se na polorovinu určenou přímkou *AB* a bodem *X*) oblouk kružnice procházející body *A, B* a *X*. Existuje-li bod *X´*, musí ležet na tomto oblouku.




Obr. 3. Dotýkající se vrstevnice.

Nyní vytvoříme hypotézu. Sestrojíme několik kružnic procházejících danými body *A* a *B*. Jestliže taková kružnice protíná přímku *l* ve dvou bodech, jako například *X* a *X´* na obr. 3, je z těchto dvou bodů vidět úsečka *AB* pod stejným úhlem, nikoli však

-6 -

nejmenším možným. Kružnice protínající přímku *l* mezi body *X* a *X´* dává větší úhel. Kružnice, které protínají přímku *l*, nemohou určit vrchol největšího úhlu. Vrcholem maximálního úhlu je bod, v němž se oblouk kružnice procházející body *A* a *B* *dotýká* přímky *l* (*l* je tečnou kružnice).

# 4 Schéma dotýkajících se vrstevnic

Podívejme se znovu na právě nalezené řešení. Jaké nám z něho plyne poučení? Pozorovali jsme změnu úhlu pohledu na danou úsečku, přičemž jeho vrchol měnil svou polohu v rovině. Zkoumali jsme závislost velikosti tohoto úhlu na poloze jeho vrcholu. Zkrátka jsme si představili tento úhel jako *funkci proměnného bodu* (jeho vrcholu), přičemž tento bod se pohyboval v rovině.

Velikost úhlu se nemění, pokud se jeho vrchol pohybuje po části kružnice procházející dvěma body *A, B*. Nazvěme tuto část kružnice *vrstevnicí* (ekvipotenciální křivkou). Nezapomeňme, že v naší úloze byla jistá podmínka. Potřebovali jsme najít maximální úhel (funkce proměnného bodu), přičemž jeho vrchol (proměnný bod) se nemohl libovolně pohybovat v rovině, ale byl omezen *předepsanou drahou* (vazební podmínkou), přímkou *l*. A v jakém bodě této předepsané dráhy dosahuje maxima? Odpověď už známe, ale podívejme se na analogickou úlohu, která je naší intuici ještě bližší.

Všichni známe význam vrstevnic na mapě - jsou to čáry spojující ty body na mapě, které zobrazují body zemského povrchu se stejnou nadmořskou výškou. Na mapě se zobrazují pouze některé vrstevnice, spojující pouze např. body s nadmořskou výškou 100, 200, 300,... metrů, přestože existuje vrstevnice pro každou nadmořskou výšku, takže každým bodem v krajině prochází nějaká vrstevnice. Nadmořská výška je funkcí proměnného bodu, která při pohybu po krajině po vrstevnici zůstává konstantní.

Vezměme úlohu, která je analogická té předchozí.

•Příklad 2. Jdeme po cestě, po předepsané dráze. V jakém bodě naší cesty dosáhneme maximální nadmořské výšky?

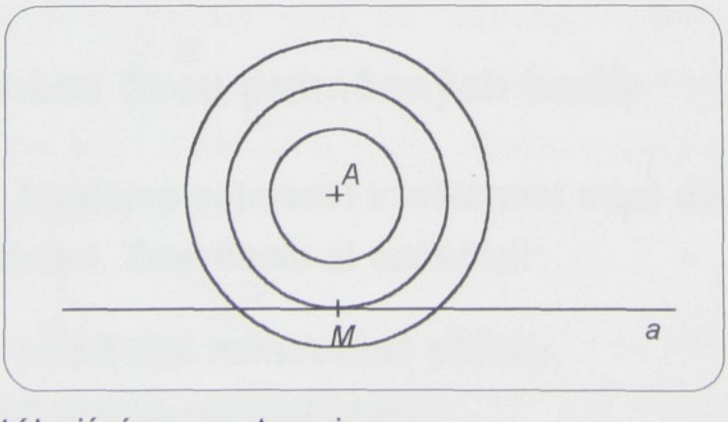
Řešení úlohy pouze naznačme. Velmi lehko určíme, ve kterém bodě maximální výšky nedosáhneme. Procházíme-li nějakým místem, v němž buď stoupáme, nebo klesáme, pak takové místo zřejmě není bodem maximální ani minimální nadmořské výšky. V tomto bodě naše dráha protíná vrstevnici. *Maxima ani minima nelze dosáhnout v bodě, v němž předepsaná dráha protíná vrstevnici.*

Vraťme se nyní k původní úloze (Příklad 1). Při pohledu na předepsanou dráhu - přímku *l* - od bodu *C* (obr. 2) směrem doprava vidíme, že s výjimkou jediného bodu tato dráha protíná vrstevnice. Zmíněnou výjimkou je bod , ve kterém se předepsaná dráha dotýká vrstevnice. Existuje-li maximum, musí se nacházet právě v tomto bodě: *v bodě maxima se předepsaná dráha dotýká vrstevnice*. Toto je poměrně silné tvrzení, které vzniklo z pouhé idey vytvořené na základě našeho příkladu. Zkusme uplatnit tuto ideu na podobný příklad .

·Příklad 3. Na dané přímce nalezněme bod, který má nejmenší vzdálenost od daného bodu ležícího mimo danou přímku. Nechť:

*A* je daný bod,

*a* je daná přímka.




Obr. 4. Dotýkající se vrstevnice.

Hledáme nejmenší vzdálenost *A* od *a*. Řešení je známo každému. Představme si, že plaveme v moři (jsme v bodě *A*) a chceme se co nejkratší cestou dostat na břeh (přímka *a*). I zvíře by tento úkol bez problémů vyřešilo (za předpokladu, že břeh je v dohledu) a plavalo by po kolmici z bodu na přímku. Řešení je tedy jasné, vyzkoušejme naši hypotézu. Veličina, jejíž minimum hledáme, je vzdálenost proměnného bodu od daného bodu *A*. Tato vzdálenost je závislá na poloze proměnného bodu. Vrstevnicemi této vzdálenosti jsou zjevně soustředné kružnice se středem v bodě *A*. Předepsanou drahou je daná přímka *a*. V bodě, ve kterém protíná předepsaná dráha vrstevnici minimum není. Minimum skutečně leží v jediném bodě ve kterém se předepsaná dráha dotýká vrstevnice. Nejkratší vzdáleností bodu *A* od přímky *a* je poloměr kružnice se středem v bodě *A* a dotýkající se přímky *a*.

Zatím jsme se zabývali funkcí proměnného bodu pohybujícího se v rovině a hledali minimum či maximum této funkce na předepsané dráze. Stejně by bylo možno pozorovat proměnný bod v prostoru a hledat extrém této funkce na předepsané ploše. V rovině hrál hlavní roli dotyk s ekvipotenciální křivkou (vrstevnicí). Analogicky lze očekávat, že v prostoru bude mít hlavní význam dotyk s ekvipotenciální plochou. Podívejme se na dva příklady, které lze řešit stejnou metodou, ačkoli jinak mají velmi málo společného.

## 4.0.1 Funkce dvou proměnných bodů

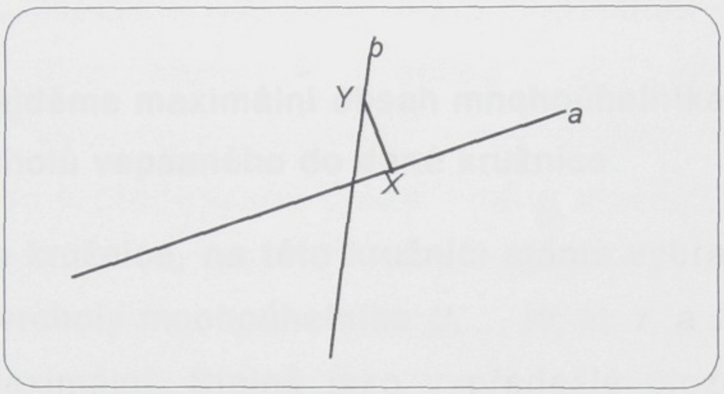
•Příklad 4. Najděme nejmenší vzdálenost mezi dvěma danými mimoběžkami. Zavedeme si označení:

*a* a *b* budiž dvě mimoběžné přímky,

*X* budiž proměnný bod přímky *a*,

*Y* budiž proměnný bod přímky *b*.

Hledáme nejkratší úsečku *XY*. Vzdálenost *XY* je závislá na poloze krajních bodů *X* a *Y* úsečky *XY*, přičemž oba tyto body jsou proměnné. Složitost úlohy spočívá v existenci dvou, nikoli pouze jednoho proměnného bodu. Kdyby jeden z bodů byl zadán, byla by úloha jednoduchá, v podstatě by se jednalo o variaci na předchozí úlohu.




Obr. 5. Dvě mimoběžky.

Považujme na chvíli jeden z bodů, např. *Y*, za pevný. Potom bude úsečka *XY* ležet v rovině určené pevným bodem *Y* a danou přímkou *a*. Jediným proměnným bodem bude nyní bod *X*, probíhající přímku *a*. Délka úsečky *XY* bude očividně minimální, bude-li tato úsečka kolmá na přímku *a*. Jedná se totiž o úlohu předešlou - hledání nejmenší vzdálenosti bodu od přímky v rovině.

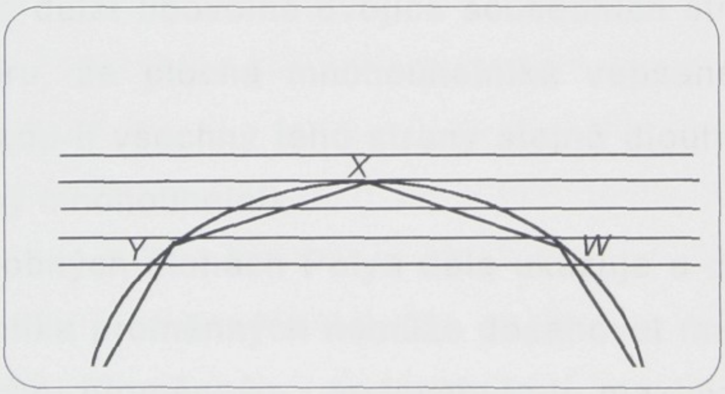
Zaměňme nyní úlohu bodů. Nechť pevným bodem je *X* a proměnným je *Y*. Vidíme opět, že úsečka *XY* bude nejkratší, pokud bude kolmá k přímce *b*. Nabízí se řešení, že úsečka bude nejkratší, bude-li kolmá k *a* i *b* zároveň. Toto řešení jsme nalezli díky dvojímu uplatnění naší metody.

*Poznámka : Napadne nás možná otázka, zda taková úsečka vůbec existuje. S pomocí analytické geometrie lze lehko dokázat, že ano. Množina všech kolmic k přímce v prostoru procházejících daným bodem je rovina. Dvě roviny v prostoru mohou býti rovnoběžné různé, totožné, nebo* *mají společnou jednu přímku. První dva případy nemohou nastat, protože naše dvě přímky a, b jsou mimoběžné. Úsečka XY tedy leží na průsečnici p rovin kolmých na přímky a, b. Její krajní body jsou průsečíky přímky p s přímkami a a b.*

S ohledem na naši teorii je ještě nutno uvést, že ekvipotenciálními plochami jsou v tomto příkladě válcové plochy s osami *a* a *b*.

·Příklad 5. Najděme maximální obsah mnohoúhelníka s daným počtem vrcholů vepsaného do dané kružnice.

Je dána kružnice, na této kružnici máme vybrat *n* bodů, které budou tvořit vrcholy mnohoúhelníka *U,..., W, X, Y,* a *Z* tak, aby jeho obsah byl maximální. Stejně jako v předešlé úloze, hlavní obtíž spočívá v množství proměnných. Vyzkoušejme naši metodu na této úloze.




Obr. 6. Trojúhelník s maximálním obsahem.

Dívejme se na úlohu jako by byla již částečně vyřešená. Představme si, že jsme již našli žádanou polohu všech vrcholů s výjimkou jednoho, dejme tomu *X*. Ostatních *n* - 1 bodů je pevných, v postavení ve kterém mají být. Zbývá už jen vybrat polohu bodu *X* tak, aby plocha vzniklého n-úhelníka byla maximální. Celá plocha n-úhelníka se dá rozdělit na dvě části: mnohoúhelník *U...WYZ* mající *n* - 1 vrcholů, jehož plocha není na bodu *X* nikterak závislá, a trojúhelník *WXY* závislý na *X*. Zmíněný mnohoúhelník má maximální možnou plochu a zbývá pouze umístit bod *X* tak, aby i obsah trojúhelníka byl maximální.

Obsah trojúhelníka je funkcí dvou veličin: délky jedné ze stran a výšky na tuto stranu. Délka strany *YW* trojúhelníka je daná, obsah tedy závisí na výšce. Bude-li se vrchol *X* pohybovat po rovnoběžce s úsečkou *YW*, bude výška konstantní a s ní i plocha trojúhelníka. Rovnoběžky s úsečkou *YW* tedy zřejmě jsou vrstevnicemi. Vybereme vrstevnici - rovnoběžku s úsečkou *YW*, která je tečnou k předepsané dráze - dané kružnici. Bod dotyku je zřejmě umístěním vrcholu *X*, které zaručuje maximální obsah trojúhelníka *WXY*. Při této poloze vrcholu *X* je trojúhelník rovnoramenný, */WX/=/XY/*. Má-li být plocha mnohoúhelníka maximální, sousední strany musí mít stejnou délku. Jelikož dvojice sousedních stran byla vybrána libovolně, platí zřejmě nalezené pravidlo i pro další libovolné dvojice sousedních stran. Docházíme tak k závěru, že plocha mnohoúhelníka vepsaného kružnici je maximální, jsou-li všechny jeho strany stejně dlouhé. Musí to tedy být pravidelný mnohoúhelník.

Na podobných úlohách Polya dále ukazuje a dokazuje, že "... funkce *f* několika proměnných nemůže dosahovat maxima vzhledem ke všem svým proměnným, nedosahuje-li maxima vzhledem ke každé proměnné zvlášť. "[Pol-75:149] (Přeložila L. Hnízdová)

# 5 Extrémy a diferenciální počet

Podívejme se nyní na problematiku lokálních extrémů z hlediska diferenciálního počtu. Pro názornost začněme příklady v trojzměrném prostoru.

Věta ustavující nutné podmínky pro existenci (volného) lokálního extrému [Jar-84:506] tvrdí, že (převedeno na funkce dvou proměnných) má-li funkce $f(x, y)$ lokální extrém v bodě $[a, b]$, pak existují-li parciální derivace $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}, \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}$, tak se rovnají nule.

Geometrický význam této věty je částečně obsažen ve výše uvedeném tvrzení o existenci maxima. A totiž v tom, že funkce nemůže nabývat maximální hodnoty vzhledem ke všem svým proměnným, pokud jej nenabývá vzhledem ke každé zvlášť. Nulová hodnota derivace funkce jedné proměnné je totiž nutnou podmínkou pro existenci extrému.

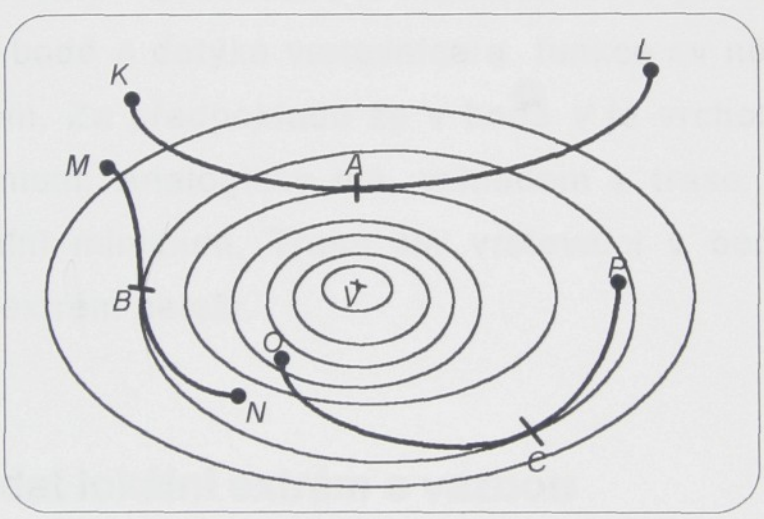
Parciální derivace funkce $f$ podle $x$ v bodě $[a, b]$ se hledá tak, jako by $y$ byla konstanta. Jde tudíž o hledání derivace funkce jedné proměnné - funkce $f(x, b)$ v bodě $a$ [Jak-84:328]. Jelikož derivace je geometricky interpretována jako směrnice tečny ke křivce a její nulová hodnota značí rovnoběžnost s danou osou, nabízí se analogie s teorií dotýkajících se vrstevnic [Pol-75:144-146]. Našimi vrstevnicemi by byly v daném případě rovnoběžky s osou $x$, a předepsanou drahou je graf funkce $f(x, b)$.

-14 -

# 6 Vázané extrémy

## 6.1 Jak si představit lokální extrém s vazbou

V předchozích kapitolách jsme se sice již tímto tématem zabývali, ale úlohy nebyly řešeny metodou diferenciálního počtu. Pokusíme se zde nyní o vytvoření představy na základě reálných asociací. V úloze č. 2 jsme řešili otázku dosažení nejvyšší nadmořské výšky při chůzi po cestě. Tehdy jsme došli k závěru, že v bodě maxima (ale i minima) se předepsaná dráha dotýká vrstevnice. Navážeme nyní na tuto úlohu a její výsledky.




Obr. 7. Mapa s extrémy.

Na obr. 7 je část mapy zobrazující horu či kopec. V bodě *V* uprostřed obrázku je vrchol tohoto kopce. Ovály jsou vrstevnice spojující ty body na mapě, které zobrazují místa kopce se stejnou nadmořskou výškou. Čím vzdálenější je vrstevnice od bodu *V*, tím je nadmořská výška jí zobrazená menší. Mapa je dvojrozměrným modelem této prostorové situace a zároveň jejím pravoúhlým průmětem do roviny "rovnoběžné s hladinou moře" (při zanedbání křivosti zemského povrchu).

Pravoúhlých průmětů do roviny budeme využívat i nadále.

Funkci *f*, jejíž extrém hledáme, tedy máme. Je to nadmořská výška. Její vrstevnice máme též. Volným lokálním extrémem této funkce (bodem s největší funkční hodnotou) je bezpochyby bod *V*, vrchol kopce. V našem případě jsme však vázáni danou trasou pochodu, tj. křivkou v rovině. Vázaným lokálním extrémem bude proto minimální nebo maximální nadmořská výška dosažená na této trase.

V předešlých úlohách jsme vytvořili hypotézu, že funkce může mít v bodě lokální extrém pouze tehdy, jestliže se v něm vrstevnice dotýká křivky, na niž jsme vázáni.

Na obr. 7 jsou znázorněny trasy *KL*, *MN*, *OP* (pravoúhlé průměty do roviny "rovnoběžné s hladinou moře"). Trasa *KL* - graf vazby - se v bodě *A* dotýká vrstevnice a funkce *f* v něm má lokální vázaný extrém. Za předpokladu že v bodě *V* je vrchol kopce, je to lokální maximum. Analogicky má, vzhledem k trase *OP*, funkce v bodě *C* lokální minimum. Trasa *MN* vrstevnici v bodě *B* protíná, proto v něm extrém neleží.

## 6.2 Jak hledat lokální extrém s vazbou

•Příklad 6. Hledáme lokální extrém funkce $z = f(x, y)$ na množině *M* bodů splňujících podmínku $g(x, y) = 0$.

Rovnice $g(x, y) = 0$ implicitně zadává křivku v rovině, pro nás je to vazba (vazební podmínka). Pokusme se najít způsob nalezení extrému této funkce s použitím schématu dotýkajících se vrstevnic. Vazba $g(x, y) = 0$ je v tomto případě předepsanou drahou a má se dotýkat vrstevnice - ekvipotenciální křivky funkce *f*.

Hledejme rovnici tečny ke křivce $g(x, y) = 0$ v bodě $T = [a, b]$. Obecně známe rovnici tečny ke křivce $y = \varphi(x)$ v bodě $[a, \varphi(a)]$ , pokud existuje $\varphi'$:

$$y - \varphi(a) = \varphi'(a)(x - a).$$

Rádi bychom nalezli možnost vyjádření tečny prostřednictvím funkce *g*. To nám umožní věta o implicitní funkci [Jak-84:357-358], která má (při změně značení odpovídající této DP) následující znění:

<u>*Věta 6.2.0.1*</u> *Budiž f (x ,y) funkce, [a, b] bod v rovině, n přirozené číslo. Nechť existuje otevřený dvojrozměrný interval L obsahující bod [a, b] takový, že funkce f (x, y) má v L spojité parciální derivace až do řádu n-tého. Budiž dále f (a, b) = 0,* $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \neq 0$. *Potom existují kladná čísla* $\Delta_1, \Delta_2$ *tak, že platí toto:*

*I. Ke každému číslu x intervalu* $(a - \Delta_1, a + \Delta_1)$ *existuje v intervalu* $(b - \Delta_2, b + \Delta_2)$ *jedno a jen jedno číslo y tak, že je f (x, y) = 0. Označíme-li tyto y znakem* $\varphi(x)$, *je rovnice f (x, y) = 0 pro* $a - \Delta_1 < x < a + \Delta_1, b - \Delta_2 < y < b + \Delta_2$ *splněna tehdy a jen tehdy, je-li* $y = \varphi(x)$.

*II. Funkce* $\varphi(x)$ *má v intervalu* $(a - \Delta_1, a + \Delta_1)$ *spojité derivace až do řádu n-tého.*

# 7 Nutná podmínka pro vázaný lokální extrém

Rovnicí $g(x, y) = 0$ je definována implicitní funkce $y = \varphi(x)$.
Derivováním rovnice $g(x, y) = 0$ dostáváme rovnost:

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} y' = 0,$$

z níž úpravou a dosazením:

$$\varphi'(x) = \frac{-g'_x(x,\varphi(x))}{g'_y(x,\varphi(x))}.$$

Dosazením do rovnice tečny:

$$y - b = \frac{-g'_x(a,b)}{g'_y(a,b)}(x-a),$$

(rovnice platí za předpokladu že $g'_y \neq 0$)

$$g'_x(T)(x-a) + g'_y(T)(y-b) = 0.$$

Normála k tečně je tedy

$$\vec{N} = [g'_x(T), g'_y(T)] = \operatorname{grad} g(T).$$

Má-li mít funkce $f$ v bodě $T[a, b]$ lokální extrém vzhledem k vazbě, musí se vazební křivka $g$ dotýkat vrstevnice funkce $f$, a tudíž tečna ke křivce $g(x, y) = 0$ musí být totožná s tečnou k ekvipotenciální křivce jdoucí bodem $T$. Normály obou křivek tedy musí být kolineární. Postup, jímž jsme získali souřadnice normály ke křivce $g(x, y)=0$ můžeme analogicky uplatnit i na vrstevnici funkce $f$ (jedná se opět o pravoúhlé průměty do roviny).

Jestliže tedy $\operatorname{grad} g(T) \neq 0$, a pokud existují všechny potřebné derivace, pak nutnou podmínkou pro vázaný lokální extrém je podmínka, že $\operatorname{grad} f(T)$ je násobkem $\operatorname{grad} g(T)$. To znamená, že musí existovat číslo $\lambda$, že:

$$\operatorname{grad} f(T) = \lambda \operatorname{grad} g(T) \quad \Leftrightarrow \quad [f'_x, f'_y] = \lambda[g'_x, g'_y].$$

Vyslovme větu:

*Věta 7.0.0.1 Nechť funkce $z = f(x, y)$ nabývá lokálního extrému v bodě $T = [a, b]$ vzhledem k vazbě $g(x, y) = 0$. Nechť $f$, $g$ mají spojité* *parciální derivace 1. řádu v okolí bodu T a nechť* grad g (T) ≠ 0. *Pak existuje číslo* λ *takové, že :*

$$f'_x(T) - \lambda g'_x(T) = 0 \ ,$$

$$f'_y(T) - \lambda g'_y(T) = 0 \ .$$

## 7.1 Postup při výpočtu vázaného lokálního extrému

Jak postupovat při výpočtu?

Sestrojíme tzv. Lagrangeovu funkci:

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \ .$$

Pak v bodech lokálních extrémů platí:

$$L'_x(x, y, \lambda) = 0 \ ,$$

$$L'_y(x, y, \lambda) = 0 \ ,$$

$$L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow g(x, y) = 0 \ .$$

Máme tři rovnice pro tři neznámé: $x, y, \lambda$.

Jestliže tímto způsobem nalezneme jediný bod splňující tyto podmínky, můžeme tvrdit, že funkce v tomto bodě nabývá své největší (nejmenší) hodnoty.

•Příklad 7. Ze všech obdélníků s daným obvodem najděte ten, který má největší obsah.

Označme $x$, $y$ velikosti stran obdélníku $(x \geq 0, y \geq 0)$.
Funkcí, jejíž maximum hledáme je obsah $S = xy$.

Vazbou je konstantní obvod, tedy

$$2\ (x + y) = o \Leftrightarrow 2\,x + 2\,y - o = 0 \ .$$

Utvoříme Lagrangeovu funkci:

$$L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(2x + 2y - o) \ .$$

Podmínky pro existenci extrému jsou:

$$(1) \quad L'_x = y - 2\lambda = 0 \ ,$$

(2) $L'_y = x - 2\lambda = 0$ ,

(3) $\underline{2x+2y = o}$ .

Z (1), (2) dostáváme:

(4) $x = y = 2\lambda$ .

Dosazením do (3) :

$4\lambda + 4\lambda = o$ .

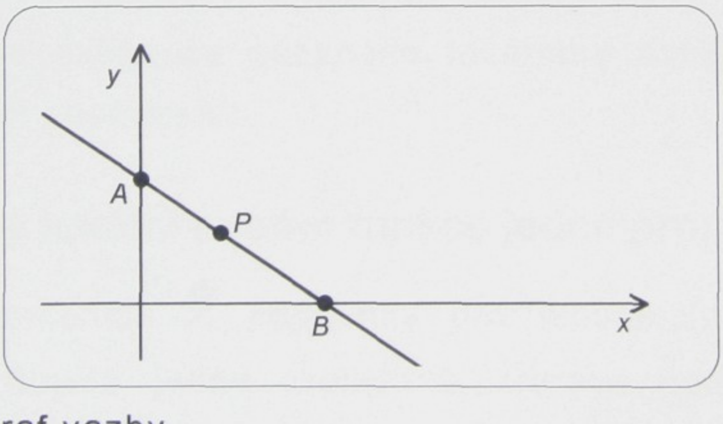
Vyjádříme $\lambda$, $2\lambda$ :

$\lambda = \frac{o}{8} \Leftrightarrow 2\lambda = \frac{o}{4}$

$o = 4x = 4y$ .

Kandidátem na extrém je tedy bod $P = \left[\frac{o}{4}, \frac{o}{4}\right]$ .

Z výsledku se zdá, že při daném obvodu má největší obsah čtverec. Nemáme však zatím dostatek prostředků abychom to mohli tvrdit s jistotou. Nabízí se například otázka, zda nalezené řešení nemůže být minimem. Pomůže nám snad obrázek.




Obr. 8. Graf vazby.

Na obrázku je přímka, která je grafem rovnice $y = \frac{o}{2} - x$ , což je rovnice vazby. Pro nás je však důležitá pouze ta její část, která leží v 1. kvadrantu, čili úsečka $AB$ (hodnoty $x$, $y$ jsou totiž nezáporné). Hledáme takový bod $P$ úsečky $AB$, v němž funkce $S$ nabývá největší hodnoty. Hodnota funkce $S$ v krajních bodech úsečky $AB$ je $0$. Jelikož obsah obdélníku musí být nezáporný, je nulová hodnota minimem funkce $S$. Maximální hodnota musí být větší než nula. Hledaný bod $P$ proto nemůže být krajním bodem úsečky. Řekněme, že jsme si jisti, že funkce maxima nabývá. Vyloučili jsme již možnost, že nalezené řešení je minimem. Jelikož máme jediného kandidáta pro lokální extrém, musí být nalezený bod $P$ řešením úlohy. Později toto tvrzení dokážeme s pomocí dalších prostředků.

*Poznámka : Existuje věta, která tvrdí, že funkce spojitá na kompaktní množině nabývá na této množině své největší hodnoty. Úsečka* $\underline{AB}$ *je omezená a uzavřená, je tedy kompaktní množinou, proto lze tvrdit, že funkce* $\underline{S}$ *na ní nabývá své největší hodnoty.*

# 8 Postačující podmínka pro vázaný lok. extrém

V předcházející kapitole jsme vyslovili větu vyjadřující nutné podmínky pro existenci vázaného lokálního extrému. Je zřejmě na místě položit si otázku, jsou-li tyto podmínky zároveň postačujícími.

Nalezneme-li alespoň jeden příklad, ve kterém jsou uvedené podmínky (normály obou křivek jsou kolineární a tedy gradienty lineárně závislé) splněny, a přesto v daném bodě extrém nenastává, pak ovšem podmínky nejsou postačující.

Hledáme tudíž bod, v němž je tečna k vrstevnici funkce totožná s tečnou k vazbě, a přesto v něm neleží vázaný extrém funkce. Takový bod je na obr. 7. Je to bod *B* křivky *MN*. V tomto bodě má vrstevnice s vazbou společnou tečnu, ale graf vazby tečnu protíná, a proto v něm extrém neleží [Viz. příklad 2 (extrému nelze dosáhnout v bodě, v němž předepsaná dráha protíná vrstevnici)]. (Jedná se opět o pravoúhlé průměty.)

Lineární závislost gradientů je nutnou, nikoli však postačující podmínkou existence vázaného lokálního extrému. Jaká je tedy postačující podmínka?

## 8.1 Volný lokální extrém funkce jedné proměnné

Připomeňme si podmínky pro existenci volného lokálního extrému funkce jedné proměnné. Nutnou podmínkou je nulová hodnota 1. derivace v bodě extrému za předpokladu její existence. [Jak-84:255] Nalezneme-li body splňující tuto podmínku, zkoumáme hodnotu 2. derivace v těchto bodech.

Jestliže $f'(x_0) = 0$, v bodě $x_0$ může ležet lokální extrém.

Je-li dále $f''(x_0) > 0$, je funkce $f$ v bodě $x_0$ ryze konvexní a má tam tudíž ostré lokální minimum.

Je-li $f''(x_0) < 0$, je funkce $f$ v bodě $x_0$ ryze konkávní a má v něm ostré lokální maximum.

Je-li $f''(x_0) = 0$, je nutné vyšetřit průběh funkce (vypočíst další derivace) [Jak-84:247-268].

Postačující podmínkou pro volný lokální extrém je tedy skutečnost, že 2. derivace je nenulová. Na základě její hodnoty pak umíme určit, o jaký druh extrému se jedná.

# 9 Analytické odvození postačujících podmínek

Doposud se nám podařilo nalézt postup pro pochopení lokálních extrémů s vazbami a odvození pravidel pro jejich hledání na základě analogie s volnými lokálními extrémy. Pokusíme se použít analogický postup i pro odvození postačující podmínky pro existenci vázaného lokálního extrému.

Odvodíme nejprve analyticky nutné podmínky a následně podmínky postačující.

## 9.1 Analytické odvození nutných podmínek

Je dána funkce $z = f(x, y)$, definovaná v otevřené množině $G$ a vazba $g(x, y) = 0$, tvořící množinu $M \subset G$ bodů vyhovujících rovnici vazby.

Předpokládejme, že existují spojité parciální derivace $g'_x, g'_y$ a nejsou současně rovny nule v žádném bodě množiny $M$. Nechť v bodě $T[a, b] \in M$ má funkce lokální extrém vzhledem k vazbě. Věta o implicitních funkcích (věta 6.2.0.1) tvrdí, že pokud $g'_y(T) \neq 0$ existuje funkce $y = \varphi(x)$ tak, že $g(x, \varphi(x)) = 0$, $x \in I; \varphi(a) = b$, kde $I$ je nějaký interval obsahující bod $a$.

Dosadíme za $y$ do funkce $f: z = f(x, \varphi(x)), x \in I$. Máme tedy funkci $F(x) = f(x, \varphi(x))$ a víme, že má lokální extré v bodě $a$. Nutná podmínka pro lokální extrém funkce jedné proměnné zní: $F'(x) = 0$.

$$F'(x) = f'_x(x, \varphi(x)) + f'_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) .$$

V bodě extrému platí:

$$x = a : F'(a) = 0 ,$$

$$f'_x(T) + f'_y(T)\varphi'(a) = 0 .$$

Vyjádříme $\varphi'(a)$:

$$g(x, y) = 0 , y = \varphi(x) .$$

Derivujeme rovnici vazby:

$$g'_x(x,\varphi(x)) + g'_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0 .$$

Za předpokladu že $g'_y \neq 0$ platí:

*ii*• $$\varphi'(x) = -\frac{g'_x(x,\varphi(x))}{g'_y(x,\varphi(x))} ,$$

. $$x = a : \varphi'(a) = -\frac{g'_x(T)}{g'_y(T)} .$$

Osadíme do *i* :

$$f'_x(T) + f'_y(T)(-1)\frac{g'_x(T)}{g'_y(T)} = 0 .$$

Rovnici *ii* násobíme nenulovým výrazem $g'_y(T)$ :

$$f'_x(T)g'_y(T) - f'_y(T)g'_x(T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} f'_x(T) & f'_y(T) \\ g'_x(T) & g'_y(T) \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\lambda : \quad \underline{grad\ f\ (T) = \lambda\ grad\ g\ (T)} .$$

Došli jsme ke shodnému výsledku jako v kap. 7 (věta 7.0.0.1) při použití odlišných metod. Nalezli jsme vyjádření nutných podmínek pro existenci vázaného lokálního extrému.

Povšimněme si:

$$f'_x(T) - \frac{f'_y(T)}{g'_y(T)} g'_x(T) = 0 \quad \wedge \quad f'_x(T) - \lambda g'_x(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{f'_y(T)}{g'_y(T)} .$$

## 9.2 Postačující podmínky

Zaměřme se nyní na podmínky postačující. Pro funkci $F$ jedné proměnné budeme zkoumat znaménko druhé derivace.

$$F'(x) = f'_x + f'_y\varphi' ,$$

*iii*• $$F''(x) = f''_{x^2} + f''_{xy}\varphi' + (f''_{xy} + f''_{y^2}\varphi')\varphi' + f'_y\varphi'' =$$

$$= f''_{x^2} + 2f''_{xy}\varphi' + f''_{y^2}\varphi'^2 + f'_y\varphi'' .$$

*(všechny hodnoty jsou v bodě $[x,\varphi(x)]$ , pod $\varphi$ rozumíme $\varphi(x)$)*

Právo na záměnu parciálních derivací druhého řádu mi dává následující věta [Jak-84:329].

Věta 9.2.0.1 *Jsou-li* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *v bodě* $[x_0, y_0]$ *spojité, platí v bodě* $[x_0, y_0]$ *rovnost* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

Derivováním rovnice vazby podruhé dostáváme analogickou rovnici pro funkci $g$ , na pravé straně rovnice je ovšem 0:

$$g''_{x^2} + 2g''_{xy}\varphi' + g''_{y^2}\varphi'^2 + g'_y\varphi'' = 0 .$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit $\varphi''$ :

$$\varphi'' = -\frac{1}{g'_y}(g''_{x^2} + 2g''_{xy}\varphi' + g''_{y^2}\varphi'^2).$$

Již dříve jsme vyjádřili hodnotu $\varphi'$:

$$\varphi' = -\frac{g'_x}{g'_y} .$$

Hodnoty $\varphi'$ a $\varphi''$ dosadíme do rovnice *iii* :

$$F''(x) = f''_{x^2} + 2f''_{xy}(-\frac{g'_x}{g'_y}) + f''_{y^2}(-\frac{g'_x}{g'_y})^2 + (-\frac{f'_y}{g'_y})(g''_{x^2} + 2g''_{xy}(-\frac{g'_x}{g'_y}) + g''_{y^2}(-\frac{g'_x}{g'_y})^2).$$

Pro $x = a$ jsme ovšem dokázali, že platí: $\lambda = \frac{f'_y(T)}{g'_y(T)}$.

Při dosazení $\lambda$ by předcházející rovnice připomínala rovnici druhého diferenciálu Lagrangeovy funkce. Pokusíme se ji dále upravit. Lagrangeova funkce má tvar:

$$L = f - \lambda g.$$

Pro druhý diferenciál platí vztah:

$$d^2L \;=\; L''_{x^2}\,dx^2 + 2L''_{xy}\,dx\,dy + L''_{y^2}\,dy^2 .$$

Pravou stranu rovnice můžeme upravit tak, aby se podobala tomuto diferenciálu. Bylo by velmi výhodné nalézt jednoduchý vztah pro dx, dy, $g'_x, g'_y$. Tento vztah lze vyjádřit z rovnice 1. diferenciálu rovnice vazby :

$$iv\bullet \qquad g'_x dx + g'_y dy = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} g'_x & -g'_y \\ dy & dx \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$-\frac{g'_x}{g'_y} = \frac{dy}{dx} .$$

Upravena pomocí nalezených vztahů vypadá naše rovnice takto:

$$F''(a) = f''_{x^2} + 2f''_{xy}\frac{dy}{dx} + f''_{y^2}\frac{dy^2}{dx^2} - \lambda(g''_{x^2} + 2g''_{xy}\frac{dy}{dx} + g''_{y^2}\frac{dy^2}{dx^2}) \quad \Leftrightarrow$$

$$F''(a) = (f''_{x^2} - \lambda g''_{x^2}) + 2(f''_{xy} - \lambda g''_{xy})\frac{dy}{dx} + (f''_{y^2} - \lambda g''_{y^2})\frac{dy^2}{dx^2} \quad / \bullet dx^2$$

$$dx^2 F''(a) = L''_{x^2} dx^2 + 2L''_{xy} dx\,dy + L''_{y^2} dy^2 .$$

Předpokládejme, že všechny výrazy použité ve jmenovateli zlomku jsou nenulové. Výraz $dx^2$ je pak kladný a můžeme jím násobit, aniž bychom změnili znaménko výrazu.

Získali jsme kvadratickou formu proměnných *dx, dy*. Se znalostí hodnot $g'_x, g'_y$ můžeme výraz zjednodušit a vyjádřit jako kvadratickou formu jediné proměnné pomocí vztahu z rovnice *iv* .

Jevem, který zkoumáme, je znaménko druhé derivace funkce *F* v bodě extrému. Protože násobení výrazem $dx^2$ nemá na znaménko žádný vliv, můžeme říci, že 2. derivace funkce $F(x) = f(x, \varphi(x))$ má stejné znaménko jako 2. diferenciál Lagrangeovy funkce. Nyní můžeme odvodit i postačující podmínky pro funkci dvou proměnných.

Jestliže nalezneme podezřelé body, vytvoříme druhý diferenciál Lagrangeovy funkce. Tím získáme kvadratickou formu v proměnných *dx* a *dy* .

---

## 9.2.1 Kvadratické formy

Připomeňme si, co je to kvadratická forma a základní vlastnosti.

Kvadratická forma proměnných $x_1,\dots,x_r$ je výraz tvaru:

$$Q(x) = Q(x_1,\dots,x_r) = \sum_{j,k=1}^{r} a_{jk} x_j x_k$$

V bodě $o = [0, \dots, 0]$ má hodnotu $0$.

Je-li $Q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$, nazývá se forma *pozitivně definitní*.
Je-li $Q(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$, nazývá se forma *negativně definitní*.
Existují-li $x, y: Q(x) > 0, Q(y) < 0$, forma je *indefinitní*.

---

Nalezli jsme analogii mezi postačujícími podmínkami pro existenci volného lokálního extrému funkce jedné proměnné a vázaného lokálního extrému funkce dvou proměnných.

Funkce jedné proměnné má v podezřelém bodě maximum (minimum), je-li 2. derivace v tomto bodě záporná (kladná). Funkce dvou proměnných má v podezřelém bodě maximum (minimum), je-li kvadratická forma $d^2L$ negativně (pozitivně) definitní.

Vyslovme větu vyjadřující postačující podmínky pro lokální extrémy s vazbou.

*Věta 9.2.1.1 Je dána funkce $f(x, y)$ a vazba $g(x, y) = 0$. Nechť $f$, $g$ mají spojité parciální derivace až do 2. řádu a nechť $\operatorname{grad} g(T) \neq 0$. Nechť v bodě $T[a, b]$ platí: existuje číslo $\lambda$ tak, že funkce $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ splňuje (nutné podmínky ): $L'_x(T) = 0, L'_y(T) = 0, g(T) = 0$. Vytvoříme 2. diferenciál $d^2L$ funkce $L$ vzhledem k proměnným $x, y$, s konstantou $\lambda$. Z rovnice $g'_x(T)dx + g'_y(T)dy = 0$ vyjádříme jeden z diferenciálů $dx$, $dy$ pomocí druhého a dosadíme do kvadratické formy $d^2L$. Dostaneme kvadratickou formu jedné proměnné ($dx$ nebo $dy$). Je-li tato forma pozitivně (negativně) definitní, má funkce $f$ v bodě $T$ ostré lokální minimum (maximum) vzhledem k vazbě $g$.*

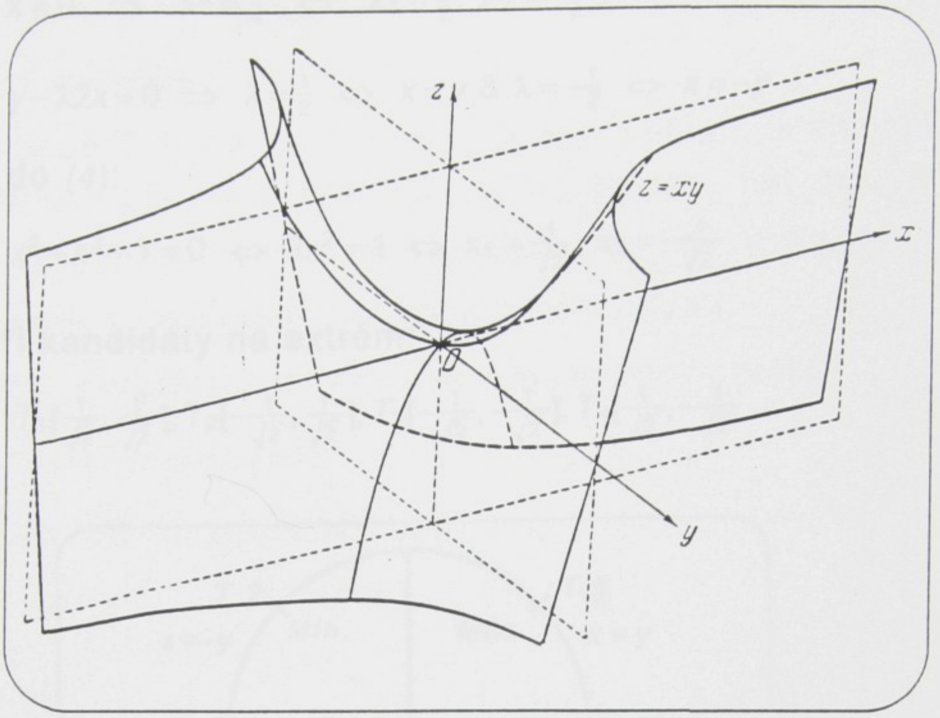
Kvadratická forma jedné proměnné nemůže být indefinitní (plyne z definice indefinitnosti). V případě, že koeficient kvadrátu proměnné by vyšel roven nule, musíme pro rozhodnutí o existenci a druhu extrému použít nějaké doplňkové metody (vyšetření průběhu funkce v okolí podezřelého bodu).

Ukažme si funkci věty a postup výpočtu na příkladě.

•Příklad 8. Hledejme lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy$ s vazbou $x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

Grafem funkce je hyperbolický paraboloid (obr. 9) a vazba je kružnice o poloměru 1.

-28 -




Obr. 9. Hyperbolický paraboloid. [Fich-66:344 "Ris.92."]

Vytvoříme Lagrangeovu funkci:

*(1)* $L(x, y) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

Vytvoříme soustavu tří rovnic pro tři neznámé a budeme ji řešit:

*(2)* $(L'_x =)$ $y - \lambda 2x = 0$ ,

*(3)* $(L'_y =)$ $x - \lambda 2y = 0$ ,

*(4)* (*vazba*) $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Položme si otázku, může-li se $\lambda$ rovnat nule. Z rovnic *(2)*, *(3)* plyne:

$$\lambda = 0 \Rightarrow x = y = 0.$$

Bod *[0, 0]* však nevyhovuje vazební podmínce, tudíž $\lambda \neq 0$.
Z rovnice *(2)*:

*(5)* $y = 2\lambda x$ .

Dosadíme *(5)* do *(3)*:

*(6)* $x - 2\lambda(2\lambda x) = 0$ .

Dalšími úpravami získáváme:

$$x(1 - 4\lambda^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = o \ \vee \ 4\lambda^2 = 0 \ ,$$

-29 -

$$x \neq 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 = \tfrac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = \tfrac{1}{2},\ \lambda_2 = -\tfrac{1}{2}\ .$$

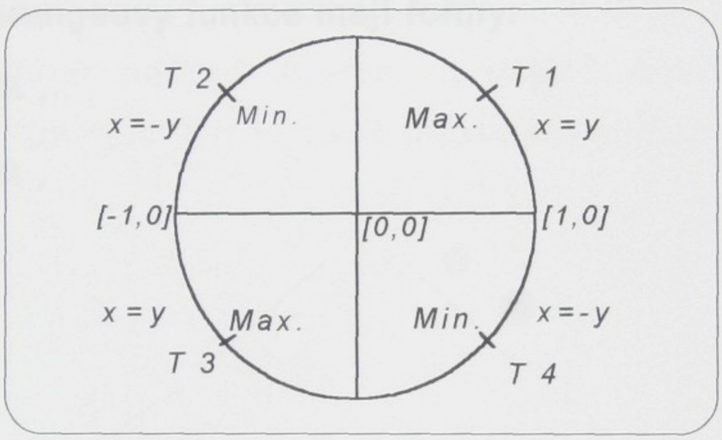
$$y - \lambda 2x = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \tfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = y \ \&\ \lambda = -\tfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = -y\ .$$

Dosadíme do *(4)*:

$$x^2 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

Máme čtyři kandidáty na extrém:

$$T_1[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}],\ T_2[-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}],\ T_3[-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}],\ T_4[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\ .$$




Obr. 10. Extrémy na kružnici

Nyní budeme zkoumat druhý diferenciál Lagrangeovy funkce:

$$L''_{x^2} = -2\lambda$$

$$L''_{xy} = 1$$

$$L''_{y^2} = -2\lambda$$

$$d^2L = -2\lambda\, dx^2 + 2\,dx\,dy\ - 2\lambda\, dy^2$$

*derivace rovnice vazby:* $2x\,dx + 2y\,dy = 0$

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow dx = -dy \Leftrightarrow d^2L = -dx^2 - 2dx^2 - dx^2 = -4dx^2$$

$$\lambda = -\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow dx = dy \Leftrightarrow d^2L = dx^2 + 2dx^2 + dx^2 = 4dx^2$$

V bodech $T_1, T_3$ je forma negativně definitní a funkce $f(x,y) = xy$ v nich má vzhledem k vazbě $x^2 + y^2 - 1 = 0$ lokální maximum. V bodech $T_2, T_4$ je forma pozitivně definitní a funkce $f$ v nich má vzhledem k vazbě lokální minimum.

Příklad 7. (dokončení)

V příkladě 7 jsme hledali obdélník s největším obsahem při daném obvodu. Jediným kandidátem na extrém byl bod $P=[\frac{o}{4},\frac{o}{4}]$. Pokusíme se nyní s pomocí nalezených postupů dokázat, zda se skutečně jedná o maximum, jak jsme se domnívali.

Budeme zkoumat 2. diferenciál Lagrangeovy funkce.

$$L(x,y,\lambda)=xy-\lambda(2x+2y-o).$$

Derivace Lagrangeovy funkce mají formy:

$$L'_x=y-2\lambda\ ,$$

$$L'_y=x-2\lambda\ ,$$

$$L''_{x^2}=0\ ,$$

$$L''_{xy}=1\ ,$$

$$L''_{y^2}=0\ .$$

2. diferenciál Lagrangeovy funkce má tvar:

$$d^2L=L''_{x^2}dx^2+2L''_{xy}dx\,dy+L''_{y^2}dy^2\ .$$

Po dosazení:

$$d^2L=2dx\,dy\ .$$

Nalezneme vztah pro $dx, dy$. Rovnice vazby je:

$$2x+2y-o=0\ .$$

Derivováním rovnice vazby dostáváme:

$$2dx+2dy=0\ ,$$

$$dx=-dy\ .$$

Dosadíme-li do rovnice 2. diferenciálu, získáváme:

$$d^2L=-2dx^2.$$

Tato kvadratická forma je negativně definitní, v funkce tedy v daném bodě nabývá svého lokálního maxima.

Ukažme ještě, že toto lokální maximum je ve skutečnosti maximem globálním, a že je tudíž řešením naší úlohy. Jak bylo již uvedeno výše, funkce $xy$ nabývá na uvažovaném definičním oboru, což je uzavřená úsečka, své největší (i nejmenší) hodnoty. Protože tato funkce je všude (vyjma krajních bodů úsečky) kladná, nabývá své největší hodnoty (globální maximum) uvnitř úsečky. V tomto bodě pak má též lokální maximum. My jsme však viděli, že jediné lokální maximum nabývá funkce uprostřed úsečky. Proto toto lokální maximum musí být zároveň maximem globálním.

# 10 Funkce více proměnných

Máme-li se zabývat funkcemi více proměnných, neměli bychom se omezovat na funkce pouhých dvou.

Vázaným extrémům funkce více proměnných se věnuje V. Jarník [Jar-84:511-519] na několika málo stránkách a omezuje se na obecnou větu, důkaz a několik řešených příkladů.

Jelikož u počtu proměnných vyšším než 2 se podmínky pro extrém liší, uvedu obecnou formulaci věty pro $n$-rozměrné prostory [Jar-84:511-513].

*Věta 10.0.0.1* *Funkce*

*(1)* $f(x_1,\dots,x_r), g_1(x_1,\dots,x_r),\dots,g_s(x_1,\dots,x_r)$ $(0 < s < r)$

*nechť mají spojité parciální derivace 1. řádu v otevřené množině* $E \subset E_r$. *V každém bodě množiny* $E$ *nechť má matice*

*(2)* $$\begin{matrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g_1}{\partial x_r} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g_s}{\partial x_r} \end{matrix}$$

*hodnost* $s$. *Budiž* $M$ *množina všech bodů* $[x_1,\dots,x_r]$, *jež vyhovují rovnicím*

*(3)* $g_1(x_1,\dots,x_r)=0,\dots,g_s(x_1,\dots,x_r)=0$ .

*Potom platí :*

*I. Má-li funkce* $f$ *v nějakém bodě* $a=[a_1,\dots,a_r]\in E$ *lokální extrém vzhledem k M, existují reálná čísla* $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ *tak, že jest*

*(4)* $\frac{\partial f(a)}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{s}\lambda_k\frac{\partial g_k(a)}{\partial x_j}=0 \quad (j=1,\dots,r)$ ,

*(5)* $g_k(a)=0 \quad (k=1,\dots,s)$ .

*II. Je-li* $a\in E$ *bod a* $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ *čísla, pro která platí (4), (5), a mají-li funkce (1) v bodě a totální diferenciál 2. řádu, sestrojme kvadratickou formu v proměnných* $dx_1,\dots,dx_r$

*(6)* $\Psi(dx_1,\dots,dx_r)=\sum_{j,m=1}^{r}\left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j\,\partial x_m}+\sum_{k=1}^{s}\lambda_k\frac{\partial^2 g_k(a)}{\partial x_j\,\partial x_m}\right)dx_j\,dx_m$ .

*Ježto matice (2) má v bodě a hodnost s, je aspoň jeden její s -řadový determinant v bodě a různý od nuly; budiž na př.*

*(7)* $\left(\frac{D(g_1,\dots,g_s)}{D(x_1,\dots,x_s)}\right)_{[a_1,\dots,a_r]}\neq 0$ .

*Napišme s rovnic*

*(8)* $\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial g_k(a)}{\partial x_l}dx_l=0 \quad (k=1,\dots,s)$ ,

*Vypočteme z nich* $dx_1,\dots,dx_s$ *(kdyby byl determinant (7) roven nule bylo by místo* $x_1,\dots x_s$ *třeba psát jiné proměnné* $x_{m_1},\dots,x_{m_s}$*) jako lineární formy v proměnných* $dx_{s+1},\dots,dx_r$ *a dosaďme tyto lineární formy do* $\Psi$ *za* $dx_1,\dots,dx_s$ . *Tím přejde* $\Psi$ *v kvadratickou*

-33 -

*formu* $\Phi(dx_{s+1}, \ldots, dx_r)$ *proměnných* $dx_{s+1}, \ldots, dx_r$ . *Je-li tato forma* $\Phi$ *positivně (negativně) definitní, má f v bodě a vzhledem k M ostré lokální minimum (maximum); je-li indefinitní, nemá f v bodě a vzhledem k M lokální extrém.*

Věta je analogická té předchozí. Tato věta nám však navíc dává v některých případech možnost jednoznačně určit, zda extrém existuje či nikoli již na základě (in-)definitnosti kvadratické formy.

# 11 Závěr

Práce není rozsáhlá, domnívám se však, že i v této podobě splňuje cíle určené zadáním. Při jejím zpracovávání jsem pronikla do problematiky vázaných lokálních extrémů na úrovni úloh pro trojrozměrný prostor a osvěžila jsem si obecná pravidla pro jejich výpočet pro prostory vícerozměrné.

Snažila jsem se o zpracování tématu pro čtenáře, který se začíná o problém zajímat se stejnými znalostmi jako jsem měla já sama na počátku své práce.

Nemám bohužel vyhlídky na použití nabytých vědomostí a objevených postupů ve vlastní pedagogické praxi, protože daná látka se na základních, ba ani na středních školách nevyučuje.

Naprosto chápu, že při hodinové dotaci a množství učiva, které se má na vysokých školách zvládnout, je nemožné věnovat každému tématu takový počet hodin, aby byla probíraná látka naprosto zvládnuta a pochopena všemi studenty. Samostudium je samozřejmě nedílnou součástí vysokoškolské přípravy.

Tato diplomová práce by se, podle mého názoru, dala využít pro studium vázaných lokálních extrémů na vysoké škole. Může být použita jako zdroj inspirace pro vyučující, nebo jako doplňkový studijní materiál pro studenty.

## Seznam pramenů


[Jar] Jarník, V.: Diferenciální počet II. Praha 1984

[Jak] Jarník, V.: Diferenciální počet I. Praha 1984

[Fich] Fichtengol´c, G.: Kurs differencial´nogo i integral´lnogo isčislenia I. Moskva1966

[Pol] Polya, G.: Matematika i pravdopodobnye rassuždenia. Moskva 1975