

Spektrální vlastnosti kruhových piezokeramických rezonátorů

Martin Pustka

Liberec 2019

Autor

Ing. Martin Pustka, Ph.D.

VÚTS, a.s.

Svárovská 619, Liberec XI-Růžodol I, 460 01 Liberec

Recenzent

prof. Ing. Jaroslav Nosek, CSc.

Technická univerzita v Liberci

Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií

Studentská 1402/2, 461 17 Liberec 1

Poděkování

Publikace vznikla za finanční podpory Ministerstva průmyslu a obchodu v rámci institucionální podpory na dlouhodobý koncepční rozvoj výzkumné organizace – poskytovatel MPO, příjemce VÚTS, a.s.

ISBN 978-80-87184-88-2

Abstrakt

Spektrální vlastnosti kruhových piezokeramických rezonátorů

Publikace se zabývá popisem spektrálních vlastností kruhových osově symetrických rezonátorů z piezoelektrické keramiky s obecným poměrem průměru a tloušťky. Závislost modálních parametrů (rezonanční frekvence a tvaru kmitu) na poměru rozměrů je studována pomocí analytických modelů odvozených za předpokladu lineární teorie piezoelektriny. Teoretické závislosti jsou doplněny řadou příkladů a porovnání s experimentálními hodnotami. Práce přináší souhrnný popis problematiky vycházející ze současného stavu poznání.

Abstract

Spectral properties of circular piezoceramic resonators

This monograph deals with the characterization of spectral properties of circular axisymmetrical resonators made of piezoelectric ceramics with a general diameter to thickness ratio. The dependence of modal parameters (resonance frequency and modal shape) on the aspect ratio is studied using analytical models based on linear piezoelectric theory. The theoretical dependencies are complemented by a number of examples and comparisons with experimental values. The book introduces a comprehensive description of this topic arising from the current state of knowledge.

Obsah

Úvod	1
1 Kruhové piezokeramické rezonátory	3
1.1 Základní vlastnosti	3
1.2 Studium frekvenčního spektra	5
2 Řešení kmitů kruhových rezonátorů	9
2.1 Elektroelastické vlnění v piezoelektrických rezonátorech	9
2.2 Základní předpoklady řešení	12
2.3 Rovnice lineární piezoelektřiny	12
2.4 Koeficient elektromechanické vazby	14
2.5 Elektrický náhradní obvod	16
3 Analytické modely	23
3.1 Prosté módy kmitu	23
3.1.1 Podélné kmity kruhové tyče	23
3.1.2 Tloušťkové kmity kruhové desky	26
3.1.3 Radiální kmity kruhové tyče	29
3.1.4 Radiální kmity kruhové desky	31
3.2 Vázané módy kmitu	33
3.2.1 Úplné piezoelektrické řešení	36
3.2.2 Elastické řešení	42
4 Spektrální vlastnosti	47
4.1 Porovnání výpočtových modelů	48
4.2 Disperzní závislost	50
4.3 Frekvenční spektrum	52
4.4 Tvary kmitu	56
5 Vybrané problémy spektrálních vlastností	61
5.1 Základní mód kmitu	62
5.2 Spektrální vlastnosti tlustých disků	65
5.3 Tloušťkový mód kmitu tenkých disků	68
Závěr	75
Literatura	77

A	Piezoelektrické rovnice v kartézských souřadnicích	83
B	Piezoelektrické rovnice ve válcových souřadnicích	87
C	Základní parametry kruhových rezonátorů	91
D	Materiálové konstanty	95

Seznam použitých symbolů

A_e	plocha elektrod	m^2
A_i	amplituda	m
$\overline{A}$	amplituda	m
a	rozměr kruhového rezonátoru (polovina průměru)	m
B_i	amplituda	m
b	rozměr kruhového rezonátoru (polovina tloušťky)	m
C_0, C_D	statická kapacita piezoelektrického rezonátoru	F
C_h, C'_h	dynamická kapacita elektrického náhradního obvodu v okolí h -té rezonance	F
$c_{ijkl}^D, c_{\lambda\mu}^D$	složky tenzoru elastického modulu při konstantním elektrickém posunutí	Pa
$c_{ijkl}^E, c_{\lambda\mu}^E$	složky tenzoru elastického modulu při konstantní intenzitě elektrického pole	Pa
$c_{\lambda\mu}^{(n)}$	modifikované složky tenzoru elastického modulu	Pa
$\tilde{c}_{\lambda\mu}, \tilde{c}_{\lambda\mu}^{(n)}$	poměrné složky tenzoru elastického modulu	1
D_i	složky elektrického posunutí	C m^{-2}
$\overline{D}_i$	amplituda elektrického posunutí	C m^{-2}
D, D_E	disperzní matice	
$d_{ikl}, d_{i\lambda}$	složky tenzoru piezoelektrického koeficientu	m V^{-1}
E	Youngův modul pružnosti	Pa
E'	elastická konstanta	Pa
E_i	složky intenzity elektrického pole	V m^{-1}
$e_{ikl}, e_{i\lambda}$	složky tenzoru piezoelektrického modulu	C m^{-2}
$e_{i\lambda}^{(n)}$	modifikované složky tenzoru piezoelektrického modulu	C m^{-2}
$\tilde{e}_{i\lambda}, \tilde{e}_{i\lambda}^{(n)}$	poměrné složky tenzoru piezoelektrického modulu	1
f	frekvence	Hz
f_a, f_{ha}	antirezonanční frekvence odpovídající nulové hodnotě imaginární části impedance	Hz
f_m	frekvence odpovídající minimální absolutní hodnotě impedance	Hz
f_n	frekvence odpovídající maximální absolutní hodnotě impedance	Hz
f_P	paralelní rezonanční frekvence	Hz
f_r, f_{hr}	rezonanční frekvence odpovídající nulové hodnotě imaginární části impedance	Hz
f_S	sériová rezonanční frekvence	Hz
j	imaginární jednotka	1

k, k_{33}, k_t	koeficient elektromechanické vazby	1
k_p, k'_p	koeficient elektromechanické vazby	1
k_{eff}	efektivní koeficient elektromechanické vazby	1
L_1, L_2	integrační konstanta	1
L_h	dynamická indukčnost elektrického náhradního obvodu v okolí h -té rezonance	H
$\mathbf{M}, \mathbf{M_E}$	matice okrajových podmínek	
N	frekvenční konstanta	m s^{-1}
$\mathbf{n}$	normálový vektor	1
n_i	složka normálového vektoru	1
Q, Q_h	činitel jakosti	1
R_h	sériový náhradní odpor v okolí h -té rezonance	Ω
r	souřadnice ve válcových souřadnicích	m
S_{ij}, S_λ	složky tenzoru deformace	1
$s_{ijkl}^D, s_{\lambda\mu}^D$	složky tenzoru elastického koeficientu při konstantním elektrickém posunutí	Pa^{-1}
$s_{ijkl}^E, s_{\lambda\mu}^E$	složky tenzoru elastického koeficientu při konstantní intenzitě elektrického pole	Pa^{-1}
T_{ij}, T_λ	složky tenzoru elastického napětí	Pa
t	čas	s
$t_{ij}^{(n)}$	složky dvourozměrného tenzoru elastického napětí	Pa
U	napětí	V
$\bar{U}$	amplituda napětí	V
u_i	složky mechanického posunutí	m
$u_i^{(n)}$	složky dvourozměrného mechanického posunutí	m
v_a	fázová rychlost vlny, akustická rychlost	m s^{-1}
W	vnitřní energie	J
x_i	souřadnice v kartézských souřadnicích	m
Y	admittance	S
Z, Z_h	impedance	Ω
α	poměr rozměrů	1
γ_{ij}	poměrná amplituda	1
ε_{ij}^S	složky tenzoru permitivity při konstantní deformaci	F m^{-1}
ε_{ij}^T	složky tenzoru permitivity při konstantním elastickém napětí	F m^{-1}
$\varepsilon_{ij}^{(n)}$	modifikované složky tenzoru permitivity	F m^{-1}
$\tilde{\varepsilon}_{ij}, \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)}$	poměrné složky tenzoru permitivity	1
η, η_r, η_a	vlnové číslo	m^{-1}

θ	souřadnice ve válcových souřadnicích	rad
κ	elastická konstanta	1
κ_i	korekční součinitel	1
λ	vlnová délka	m
μ	Lamého konstanta	Pa
ξ	vlnové číslo	m ⁻¹
$\bar{\xi}$	poměrné vlnové číslo	1
ρ	hustota	kg m ⁻³
$\sigma, \sigma^E, \sigma'$	Poissonovo číslo	1
$\sigma_{12}^E, \sigma_{13}^E, \sigma_p^E$	Poissonovo číslo	1
$\bar{\sigma}^{(n)}$	složky dvourozměrného elektrické posunutí	C m ⁻²
φ	elektrický potenciál	V
$\varphi^{(n)}$	dvourozměrný elektrický potenciál	V
Ω	poměrná frekvence	1
Ω_a	poměrná antirezonanční frekvence	1
Ω_e	poměrná frekvence hranového módu kruhové desky	1
Ω_r	poměrná rezonanční frekvence	1
Ω_{sTSh}	poměrná mezní frekvence prostého tloušťkově střižného módu druhého řádu nekonečné desky	1
Ω_{TSt}	poměrná mezní frekvence prostého tloušťkově rozpínavého módu nekonečné desky	1
Ω^*	poměrná frekvence odpovídající minimální reálné hodnotě vlnového čísla	1
ω	kruhová frekvence	rad s ⁻¹
ω_a	kruhová antirezonanční frekvence odpovídající nulové hodnotě imaginární části impedance	rad s ⁻¹
ω_P	kruhová paralelní rezonanční frekvence	rad s ⁻¹
ω_r	kruhová rezonanční frekvence odpovídající nulové hodnotě imaginární části impedance	rad s ⁻¹
ω_S	kruhová sériová rezonanční frekvence	rad s ⁻¹
ω_s	kruhová frekvenci nejnižšího prostého tloušťkového kmitu nekonečně rozlehlé desky	rad s ⁻¹

Úvod

Od vynálezu piezoelektrického rezonátoru [1], [2] zanedlouho uplyne sto let. Díky jednoduchému principu a nenáročné konstrukci se velmi rychle rozšířil do řady oborů a v současné době je nejobvyklejší piezoelektrickou aplikací. Piezoelektrické rezonátory můžeme najít v elektronických obvodech obsahujících krystalové oscilátory nebo frekvenční filtry, v rezonančních snímačích neelektrických veličin, v akustických systémech, aktuátorech a ultrazvukových motorech nebo v zařízeních pro energy harvesting.

Základem piezoelektrického rezonátoru je výbrus z piezoelektricky aktivního materiálu, který je opatřen vhodnou konfigurací elektrod a kmitá některým vlastním módem kmitu. Vynucené mechanické kmitání je vyvoláno harmonickým elektrickým polem s frekvencí blízkou vlastní frekvenci rezonátoru. Podle požadavků aplikace se používají nízkofrekvenční módy s jednoduchými tvary kmitu nebo vysokofrekvenční módy, při kterých dochází ke komplikovaným deformacím průřezu výbrusu. I přes velmi jednoduchý geometrický tvar je spektrum kmitů na vysokých frekvencích složité. Již vynálezce rezonátoru Walter G. Cady poznamenal ([3], str. 308), že „může existovat vazba mezi tloušťkovým módem a násobky všech dalších možných módů kmitu. Elastické podmínky jsou tak komplikované, že můžeme pozorovat řadu rezonančních frekvencí, které jsou všechny obsaženy v úzkém pásmu v okolí ideální tloušťkové frekvence“.

Studium spektrálních vlastností (tedy vlivu rozměrů na rezonanční frekvenci a tvar kmitu) je trvalým zájmem řady vědeckých a výzkumných pracovišť po celém světě. Rostoucí požadavky na přesnost a stabilitu rezonanční frekvence vedly mimo jiné k rozvoji některých oborů aplikované mechaniky, zejména teorie vysokofrekvenčních kmitů elastických a piezoelektrických desek [4], [5]. Přestože se z bohatého spektra prakticky využívá pouze několik módů, je znalost úplných spektrálních vlastností nezbytná pro spolehlivou činnost výsledné aplikace.

Piezoelektrické rezonátory se vyrábějí z monokrystalických (především z křemene) [6], [7] nebo polykrystalických materiálů (zejména z keramiky na bázi PZT) [8], [9]. Monokrystalické materiály vykazují značnou stálost materiálových parametrů a nacházejí uplatnění v rezonátorech s vysokou stabilitou rezonanční frekvence a vysokým činitelem jakosti. Polykrystalická keramika nedosahuje takové stability parametrů, má ale řadu výhod jako široké spektrum materiálových vlastností, možnost vyrábět prakticky libovolný tvar a velikost výbrusu nebo nižší cenu. Vysoký činitel elektromechanické vazby je výhodný pro výkonové akustické aplikace.

Úvodním krokem při návrhu rezonátoru nebo rezonanční struktury je volba a optimalizace rozměrů piezoelektrického výbrusu, který musí současně splňovat požadavky

na velikost rezonanční frekvence a tvar kmitu. Výchozí návrh je dále zpřesňován zahrnutím okrajových podmínek uložení, vlivu elektrod a okolního prostředí apod.

Kmitání výbrusu popisují třírozměrné rovnice piezoelektriny. Protože dosud nebylo nalezeno přesné řešení těchto rovnic vyhovující okrajovým podmínkám na hranicích rezonátoru obecného tvaru, je nutné použít řešení přibližná. Ta jsou založena buď na variačních numerických metodách, zejména metodě konečných prvků, nebo na analytických modelech různého stupně složitosti. Výpočetní postupy pomocí metody konečných prvků jsou v současné době dostatečně rozpracované a náročnost jejich použití je malá. Využívají se zejména pro návrh a analýzu kompozitních rezonančních struktur a umožňují studovat vazby mezi piezoelektrickým převodníkem a jeho okolím. Nezastupitelnou úlohu však mají také analytické modely, které dovolují pochopit fyzikální podstatu kmitání a vnitřních vazeb v rezonátoru.

Je třeba vzít v úvahu, že všechny výpočtové modely jsou pouze aproximací skutečného chování výbrusu a udávají přibližné výsledky s přesností, která musí vyhovovat požadavkům aplikace. Pokročilé výpočtové metody mají poměrně vysokou teoretickou přesnost, například u křemenných rezonátorů lze dosáhnout vysoké shody vypočtených hodnot s experimentem [6] a predikovat tak změnu chování při změně okolních veličin. U piezoelektrické keramiky je přesnost výpočtu ovlivněna tolerancí materiálových parametrů, která podle zkušeností i údajů výrobců dosahuje až desítek procent. Vlastnosti keramiky jsou závislé na čase a projevuje se také nelineární chování způsobené polykrystalickou strukturou materiálu. Pro základní studium frekvenčního spektra tak postačuje použít lineární vztahy [10]. Uvažování nelineárních jevů a zvláštních vlivů okolního prostředí (např. teplotního pole nebo hmotového zatížení) [11] v praxi obvykle nepřináší zvýšení přesnosti výsledků. Pro řadu piezokeramických materiálů nejsou známy všechny hodnoty materiálových konstant a konstanty vyšších řádů jsou publikovány jen zřídka.

V technické praxi převládá představa o jednoduchých tvarech kmitu, ve kterých se koncové plochy rezonátoru pohybují rovnoběžně a zůstávají rovinné. K popisu kmitání se používají jednoduché analytické modely odvozené za zjednodušených předpokladů o rozložení elastického napětí a elektrického pole uvnitř rezonátoru [8]. Na základě těchto vztahů jsou odvozeny výpočtové vztahy pro frekvenční konstanty N , koeficienty elektromechanické vazby k nebo různé materiálové konstanty. Rozdíl mezi zjednodušenými předpoklady a skutečnými spektrálními vlastnostmi se může projevit v nežádoucím chování a snížené účinnosti zařízení.

Základní vztahy pro výpočet prostých módů piezokeramických rezonátorů jsou v literatuře běžně dostupné a nově jsou souhrnně odvozeny v publikaci [8]. Pokročilé postupy pro návrh keramických rezonátorů a studium jejich spektrálních vlastností zatím nebyly uceleně publikovány a v případě potřeby je nutné vycházet z řady příspěvků ve vědeckých časopisech a z praktických zkušeností.

Tato publikace se zabývá popisem spektrálních vlastností kruhových osově symetrických rezonátorů z piezoelektrické keramiky s obecným poměrem průměru a tloušťky. Pomocí analytických modelů je studován vliv rozměrů na modální vlastnosti ve frekvenčním rozsahu od nejnižších módů kmitu až do okolí základní tloušťkové rezonance. Uvedené závěry jsou obecně platné pro materiály, jejichž struktura materiálových koeficientů odpovídá hexagonální třídě symetrie $6mm$.

Kapitola 1

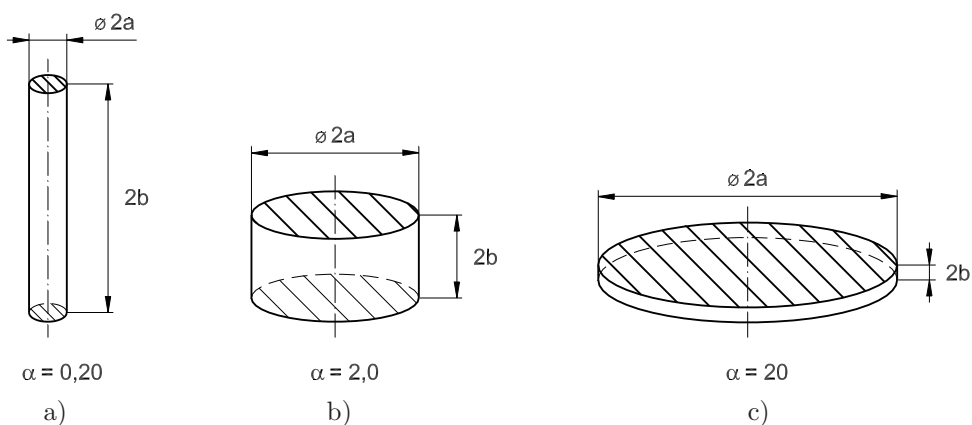
Kruhové piezokeramické rezonátory

1.1 Základní vlastnosti

Jako kruhové rezonátory budeme označovat osově symetrické výbrusy z piezoelektrické keramiky, polarizované v axiálním směru a s plnými elektrodami na obou kruhových plochách.

Základními rozměry kruhových rezonátorů jsou průměr $2a$ a tloušťka $2b$. Při analýze frekvenčního spektra využíváme geometrické podobnosti a pro určení velikosti používáme bezrozměrný parametr $\alpha = a/b$, který udává poměr průměru a tloušťky výbrusu. Provedení kruhových rezonátorů s různým poměrem α je znázorněno na obr. 1.1.

Rezonátory s velkým poměrem α označujeme jako kruhové desky (disky), rezonátory s malým poměrem α pak jako tyče (v tomto případě místo tloušťky hovoříme o délce).



Obr. 1.1: Kruhové rezonátory polarizované v axiálním směru, šrafování vyznačuje umístění elektrod

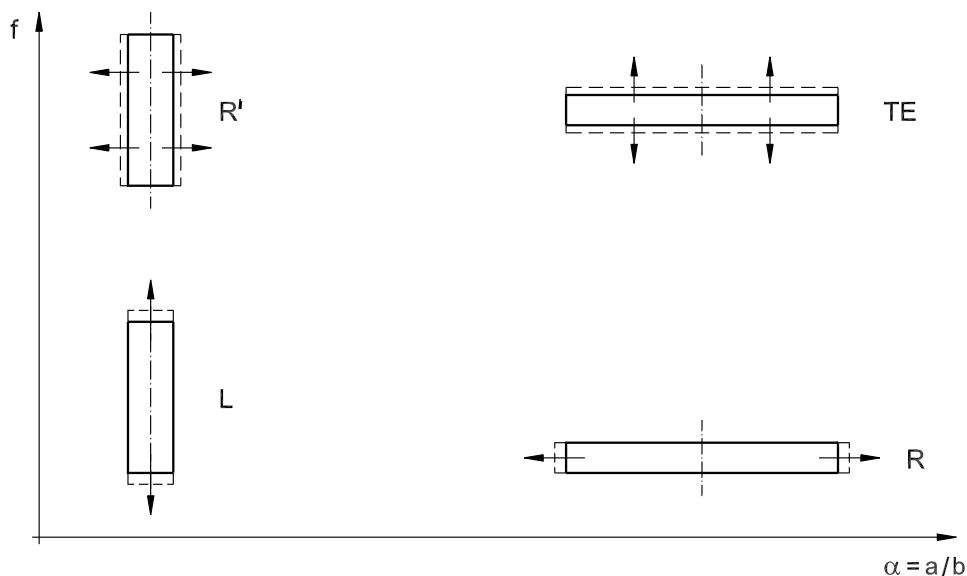
Nejjednodušší (a nejčastěji používaný) model kmitů kruhového rezonátoru vychází z představy, že se výbrus deformuje rovnoměrně pouze v jediném směru (axiálním nebo radiálním), hraniční plochy se pohybují ekvidistatně a zůstávají rovinné (resp. válcové). Pohyb rezonátoru popisuje jednoduchá vlnová rovnice, která je funkcí jediné prostorové proměnné a času. Za těchto předpokladů kmitají kruhové rezonátory dvěma základními skupinami módů kmitu:

- prosté tloušťkové (podélné) kmity**, při kterých se rezonátor deformuje převážně ve směru své osy,
- prosté radiální kmity**, při kterých se rezonátor se deformuje převážně v radiálním směru.

Frekvence kmitání je nepřímo úměrná velikosti rozměru (průměru $2a$ nebo tloušťky $2b$), ve kterém se daný mód šíří. Prostým módům kmitu odpovídají dvě krajní provedení kruhového rezonátoru s mezními rozměry:

- tenká dlouhá tyč** ($a \ll b, \alpha \rightarrow 0$), která kmitá nízkofrekvenčními podélnými kmity a vysokofrekvenčními radiálními kmity,
- tenká rozlehlá deska** ($a \gg b, \alpha \rightarrow \infty$), která kmitá nízkofrekvenčními radiálními kmity a vysokofrekvenčními tloušťkovými kmity.

Prosté módy kmitu kruhových rezonátorů a jejich poloha ve frekvenčním spektru jsou schematicky znázorněny na obr. 1.2. Výpočtové vztahy pro vlnová čísla, vlastní frekvence a parametry elektrického náhradního obvodu budou odvozeny v kap. 3.1.



Obr. 1.2: Prosté módy kmitu kruhových rezonátorů ve frekvenčním spektru
(L - podélné kmity tyče, TE - tloušťkové kmity disku, R' - radiální kmity tyče, R - radiální kmity disku)

Pro rezonátory obecných rozměrů (velikosti a a b jsou řádově srovnatelné) neplatí

výše uvedené jednoduché předpoklady a při řešení kmitání je nutné uvažovat vazbu více módů. Platnost aproximace pomocí prostých módů kmitu závisí na přesnosti výpočtu, kterou daná aplikace vyžaduje. Například u vzorků určených ke stanovení materiálových konstant doporučují normy [12], [13] mezní rozměry pro tyče $\alpha < 0,3$ a pro kruhové desky $\alpha > 10$, aby chyba způsobená rozměry rezonátoru byla nižší než 1 %.

Porovnání rezonančních frekvencí prostých módů kmitu s úplným frekvenčním spektrem kruhových rezonátorů je na příkladu keramiky BaTiO_3 znázorněno na obr. 4.1. Oblasti frekvenčního spektra, ve kterých lze kmitání rezonátorů popsat modelem prostých kmitů, přibližně odpovídají schematickému znázornění na obr. 1.2.

Kruhové výbrusy s plnou elektrodou jsou jedním z nejběžnějších provedení piezoelektrických keramických rezonátorů. Ve standardní nabídce výrobců piezoelektrické keramiky jsou kruhové rezonátory s poměry rozměrů α řádově od 0,1 až do 100. V České republice se v současné době vyrábějí v podniku Noliac Ceramics s.r.o. Hradec Králové a do roku 2008 také ve firmě APC International Ltd. Libřice.

V technických aplikacích se kruhové rezonátory provozují především na základní radiální nebo tloušťkové (resp. podélné) rezonanční frekvenci. Využívají se jako obvodové prvky v oscilačních nebo filtračních elektrických obvodech [14], v akustických převodnicích jako budiče a přijímače ultrazvukového vlnění nebo zvukové generátory [15] nebo jako snímací prvky v měřicí technice [16].

1.2 Studium frekvenčního spektra

Oproti monokrystalickým rezonátorům [6] je studiu frekvenčního spektra rezonátorů z piezoelektrické keramiky věnována v odborné literatuře menší pozornost.

V klasických publikacích o piezoelektřině [3], [17], [18], [19], u nás například [20], je kmitání rezonátorů modelováno pomocí jednoduchých vlnových rovnic odvozených za předpokladu zjednodušeného stavu napjatosti a rozložení elektrického pole. Na jejich základě jsou odvozeny analytické elektrické náhradní obvody se soustředěnými nebo rozprostřenými parametry [21]. Vztahy pro různá provedení piezokeramických rezonátorů jsou souhrnně uvedeny v [22] a nově včetně úplného odvození v [8]. Z jednoduchých jednorozměrných modelů vyplývají vztahy pro rezonanční frekvence, frekvenční konstanty, koeficienty elektromechanické vazby apod. běžně používané v technické praxi.

První práce, věnující se studiu vázaných kmitů kruhových rezonátorů s plnou elektrodou a vlivu rozměrů na jejich frekvenční spektrum, vznikaly z praktických potřeb použití piezokeramických rezonátorů v optických systémech.

Shaw [23] provedl podrobná měření rezonančních frekvencí, normálových tvarů kmitu a koeficientů elektromechanické vazby tlustých disků z BaTiO_3 s poměrem rozměrů α v rozmezí 1,14 až 6,63. Ve své práci popsal několik charakteristických vlastností kruhových rezonátorů. V homogenně polarizovaném přesně kruhovém disku existují pouze módy, které jsou symetrické vzhledem k ose a ke střední rovině disku. Vysokofrekvenční tloušťkové kmitý mají složité rozložení normálových výchylek, vzdálené od rovnoměrné planoparalelní deformace. Vedle radiálních a tloušťkových módů jako první ve spektru identifikoval tzv. hranové (edge) módy, vyznačující se největší výchylkou na okraji (hraně) disku, jejichž frekvence příliš nezávisí na poměru rozměrů α .

Současně se Shawem studoval Aggarwal [24] až [27] analytický popis kmitů ohraničených izotropních kruhových desek, který porovnával s naměřenými hodnotami. Při řešení použil třírozměrné pohybové rovnice s přesnými okrajovými podmínkami na hlavních plochách a přibližnými na okrajích disku. Pro určitá frekvenční pásma identifikoval imaginární kořeny vlnových rovnic.

Midlin a jeho spolupracovníci odvodili aproximační rovnice vyšších řádů pro roztažné kmity izotropních elastických desek [28], [29] a aplikovali je na analýzu frekvenčního spektra kruhových disků [30]. Z teoretického rozboru vyplývá závislost charakteru spektra na poměru mezních frekvencí tloušťkově rozpínavého módu a symetrického tloušťkově střižného módu druhého řádu. U izotropních materiálů je tento poměr úměrný velikosti Poissonova čísla s limitní hodnotou $\sigma^E = 1/3$. Dále byla teoreticky objasněna příčina vzniku hranových módu v určitém frekvenčním pásmu. Vypočtené rezonanční frekvence disků z BaTiO_3 se velmi dobře shodují s předchozím měřením [23]. Ve stejném období byla odvozena také teorie vyšších řádů pro vysokofrekvenční roztažné kmity kruhových tyčí [31], [32].

V práci [33] je provedena detailní analýza frekvenčního spektra disků z keramiky PbTiO_3 se středním Poissonovým číslem $\sigma^E = 0,18$. Podrobně byly naměřeny rezonanční frekvence módů v širokém okolí tloušťkové rezonanční frekvence pro rozsah rozměrů α od 5 do 30. Naměřené hodnoty jsou porovnány s teoretickými frekvencemi vypočtenými podle [30]. Ve spektru byly identifikovány základní typy módů (radiální, hranové, tloušťkově rozpínavé, tloušťkově střižné a vysokofrekvenční radiální).

Na tuto práci navázala detailní analýza spektra disků z keramiky PbTiO_3 se středním Poissonovým číslem $\sigma^E = 0,37$ [34]. Teoretické spektrum v širokém okolí tloušťkové rezonance vypočtené podle [30] je ověřeno měřením rezonančních frekvencí v rozmezí rozměrů α od 4,8 do 7,2. Výsledky potvrzují odlišný tvar frekvenčních křivek v porovnání s materiály se středním $\sigma^E < 1/3$ [29].

Citované příspěvky [30], [33] a [34] obsahují výchozí informace o obecných vlastnostech frekvenčního spektra keramických disků v rozsahu od nejnižších frekvencí do okolí základní tloušťkové rezonance.

Publikace [35] uvádí výsledky měření rezonančních frekvencí a rozložení rychlosti kmitání na povrchu disků z PZT keramiky v rozsahu rozměrů α mezi 2 a 12. Studováno je standardní a fazetované provedení kruhových rezonátorů a uvedeny jsou základní rozdíly v jejich spektrech. Práce navazuje na experimentální výsledky [23].

Analytický popis kmitů pomocí teorií vyšších řádů byl postupně aplikován do oblasti piezoelektrických desek. Dvourozměrné aproximační rovnice, odvozené na základě teorie druhého řádu pomocí rozvoje posunutí a potenciálu do řady harmonických funkcí, jsou uvedeny v [36]. V porovnání s izotropním modelem [30] vykazují výrazně menší odchylky od naměřených rezonančních frekvencí [23], a to zejména v oblasti hranových módů.

Vázané aproximační rovnice [36] je možné dále zjednodušit pro popis kmitů v blízkém okolí tloušťkové rezonance [37]. Rozšíření původní rovnic popisujících elastické kmitání izotropních desek [29] a tyčí [31] do oblasti piezoelektrických kmitů keramických rezonátorů s axiální polarizací je provedeno v příspěvcích [38] a [39].

Dalším způsobem řešení vázaných kmitů rezonátoru je použití numerických metod. Eer Nisse [40] aplikoval variační metodu výpočtu uvažující piezoelektrické vlastnosti

keramiky a dosáhl lepší shody s měřením [23] než izotropní model [30]. Po obecném definování konečného prvku pro piezoelektrické materiály [41] se ve větší míře začala pro studium spekter piezoelektrických rezonátorů používat metoda konečných prvků.

Kunkel [42] provedl spektrální analýzu kmitů tyčí a tlustých disků s rozměry α od 0,2 do 10 pomocí metody konečných prvků. Použitím vhodných okrajových podmínek jsou vypočteny rezonanční a antirezonanční frekvence jednotlivých módů a posouzeny jejich efektivní koeficienty elektromechanické vazby. Rozložení posunutí a vazba různých módů jsou analyzovány pomocí vypočtených modálních tvarů. V publikaci je poprvé uvedena výpočetní analýza antirezonančních frekvencí a koeficientů elektromechanické vazby. Analytický model umožňující obdobný rozbor spektra kmitů dosud nebyl publikován.

Podobné studium frekvenčního spektra, vlastních tvarů a elektrické impedance pomocí metody konečných prvků a modálního rozkladu je uvedeno v [43] a [44]. Pro popis elektromechanické vazby se jako vhodnější měřítko ukazují hodnoty modálních konstant. V oblastech s vysokou hustotou módů je zpravidla obtížné identifikovat odpovídající si dvojice rezonanční a antirezonanční frekvence a stanovit koeficient elektromechanické vazby.

Vedle studia frekvenčního spektra se obecnému popisu kmitů kruhových piezokeramických rezonátorů věnuje řada dalších publikací.

Příspěvky [45], [46] se zabývají tloušťkovými kmity piezokeramických disků s neúplnou elektrodou. Studována je problematika zachycení kmitů (energy trapping) v oblasti pod kovovou elektrodou způsobeného rozdílným charakterem vlnových čísel v pokovené a nepokovené části disku. Vliv neúplné elektrody na rezonanční frekvence radiálních módů je analyzován v monografii [47].

V publikaci [48] jsou odvozeny analytické vztahy pro prosté radiální, ohybové a tečné kmity keramických disků. Z těchto módů se s elektrickým polem váží pouze radiální kmit. Vypočtené rezonanční frekvence jsou porovnány s výsledky numerické analýzy pomocí metody konečných prvků, s měřením impedance a měřením tvarů kmitu pomocí interferometru. Podrobná analýza ohybových kmitů pro různé okrajové podmínky na obvodu disku je uvedena v [49].

Onoe [50] odvodil jednoduchý analytický model se dvěma stupni volnosti pro vázané radiální a tloušťkové kmity keramických disků. Stefan [51] tyto rovnice použil pro výpočet rezonančních frekvencí tří nejnižších módů kruhových rezonátorů s různým poměrem α a úspěšně jej ověřil měřením. Aronov [52] odvodil podobný model pomocí energetické metody a studoval závislost rezonanční frekvence, efektivního koeficientu elektromechanické vazby a tvaru kmitu kruhových desek na poměru α .

Analýze kmitů kruhových rezonátorů pomocí modelu s několika stupni volnosti se věnuje také Lin [53], [54], který použil vázané pohybové rovnice k odvození analytických vztahů pro admitanci a elektromechanický náhradní obvod s rozprostřenými parametry.

Kapitola 2

Řešení kmitů kruhových rezonátorů

2.1 Elektroelastické vlnění v piezoelektrických rezonátorech

Pojem piezoelektrický rezonátor označuje výbrus z piezoelektricky aktivního materiálu, který je na vhodných plochách opatřen soustavou elektrod a kmitá některým vlastním módem kmitu. Mechanické kmitání vzniká důsledkem převráceného piezoelektrického jevu po přiložení harmonického elektrického pole na elektrody výbrusu. Amplituda kmitů je největší v případě, kdy je budicí frekvence blízká některé vlastní frekvenci rezonátoru.

Podstatou činnosti piezoelektrického rezonátoru je šíření elektroelastického vlnění uvnitř prostorově ohraničeného prostředí [55], [56]. Znalost této problematiky je potřebná pro vysvětlení složitého spektra kmitů rezonátoru a pochopení některých úskalí spojených s jeho návrhem a použitím.

V *neohraničeném prostředí* se šíří elektroelastické vlnění složené ze tří rovinných elastických vln, jejichž polarizace (směry posunutí částic) jsou navzájem kolmé. Polarizace vln obecně nejsou rovnoběžné nebo kolmé na směr šíření vlnění. Vlna s polarizací nejbližší směru šíření se nazývá kvazipodélná, ostatní jsou kvazipříčné. Postupující elektrické pole má povahu podélné vlny, jejíž vlnoplochy jsou ekvipotenciálami a která tvoří čtvrtou složku postupujícího vlnění.

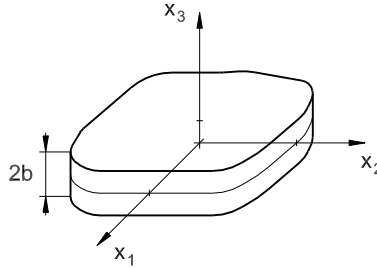
Vlny postupují se stejnou frekvencí jedním směrem s obecně různými rychlostmi, které závisí také na směru šíření. Mezi frekvencí f a kruhovou frekvencí vlnění ω , vlnovým číslem ξ , vlnovou délkou λ a (akustickou) rychlostí vlny v_a platí vztah

$$\omega = 2\pi f = \xi v_a, \quad \xi = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.1)$$

Neohraničené prostředí je nedisperzní a akustické rychlosti v_a jsou konstantní, nezávislé

na velikosti vlnových čísel ξ .¹

Piezoelektrické rezonátory jsou prostorově ohraničená tělesa konečných rozměrů. Obvykle mají pravidelný tvar tvořený jednou nebo několika dvojicemi planoparalelních ploch. Při popisu vlastních kmitů nahrazujeme rezonátor modelem ohraničené rovinné desky. V následujícím textu budeme uvažovat desku o tloušťce $2b$ s normálovou osou x_3 a střední rovinou x_1, x_2 (obr. 2.1).



Obr. 2.1: Model rovinné ohraničené desky umístěný v souřadném systému

V *nekonečně rozlehlé desce* se elektroelastické vlnění šíří ve směru kolmém na osu x_3 střídavým odražením od hraničních rovin $x_3 = \pm b$. Složky postupujícího vlnění (jednotlivé vlny) nazýváme *módy* (*módy kmitu*, *kmity*) nekonečně rozlehlé desky. Rovinná vlna dopadající na hranice desky může obecně vyvolat tři odražené vlny s odlišnou polarizací (jednu kvazipodélnou a dvě kvazipříčné) se stejnou frekvencí. Pokud tento případ nastává, nešíří se jednotlivé vlny deskou nezávisle, ale jsou *vázané* prostřednictvím okrajových podmínek na rozhraní.

Prostor omezený dvěma hraničními rovinami se chová jako vlnovod, ve kterém dochází k disperzi vlnění. Platí obecný vztah mezi frekvencí a vlnovým číslem (2.1), ve kterém ξ a v_a označují vlnové číslo a akustickou rychlost ve směru šíření vlnění deskou (tj. kolmo na osu x_3). Akustické rychlosti již nejsou konstantní, ale závisí geometrii prostředí a šířícího se vlnění. Složitá závislost mezi akustickou rychlostí a vlnovým číslem (případně frekvencí a vlnovým číslem) se vyjadřuje graficky ve formě spektra *disperzních křivek* (viz obr. 4.2 nebo 4.3). Každý mód kmitu má svou vlastní závislost akustické rychlosti a vlnového čísla, které odpovídá jedna disperzní křivka.

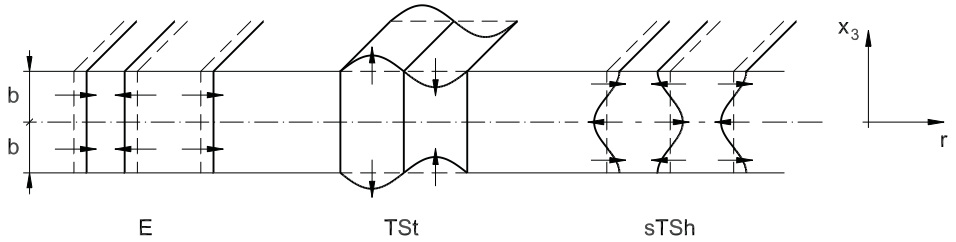
Z disperzního charakteru vlnění v desce vyplývá několik významných skutečností [57]. V nekonečně rozlehlé desce může existovat nekonečné množství módů s různou frekvencí, jejichž vlnové délky jsou v určitém poměru k tloušťce desky $2b$. V závislosti na frekvenci vlnění mohou být vlnová čísla reálná (šířící se vlna), ryze imaginární (nešířící se vlna) nebo komplexní (tlumená vlna). Vyšší módy kmitů se začínají deskou šířit až po překročení své *mezní frekvence* (*cut-off frequency*), takže při jedné frekvenci může deskou postupovat pouze konečný počet módů.

Pokud studujeme kmitání rezonátoru v určitém rozsahu frekvencí, stačí nám pro jeho popis uvažovat kombinaci pouze několika nejnižších módů kmitu, které nejvíce ovlivňují charakter vlnění. Každý z těchto módů vychází z odpovídajícího *prostého*

¹Pro přehlednost budeme v jednorozměrných vlnových rovnicích používat pro označení vlnového čísla symbol η .

tloušťkového módu nekonečné desky, což je limitní případ stojatého vlnění ve směru tloušťky desky s vlnovým číslem $\xi = 0$. Prostý tloušťkový mód charakterizuje rozložení posunutí a napjatosti v rezonátoru a jeho vlastní frekvence odpovídá mezní frekvenci daného módu.

Kruhové rezonátory z piezoelektrické keramiky se v běžných aplikacích používají do frekvencí blízkých základní tloušťkové rezonanci. V tomto frekvenčním rozsahu je vlnění v rezonátoru složeno z příspěvků tří módů odpovídajících nejnižším symetrickým prostým tloušťkovým módům desky [29]. Jsou to roztažný mód 0. řádu E (*extensional*), tloušťkově rozpínavý mód 1. řádu TSt (*thickness-stretch*) a tloušťkově strižný mód 2. řádu sTSh (*second-order symmetric thickness-shear*). Rozložení modálních posunutí přes tloušťku desky je harmonickou funkcí souřadnice x_3 a schematicky je znázorněno na obr. 2.2.



Obr. 2.2: Nejnižší symetrické prosté tloušťkové módy nekonečné desky

U postupujícího vlnění ($\xi \neq 0$) se ve směru kolmém na osu x_3 modální posunutí E, TSt a sTSh spojitě mění. Zastoupení těchto módů odpovídá experimentálnímu poznatku, že elektricky vynucené kmity kruhových rezonátorů jsou symetrické vzhledem ke střední rovině [23], i Aggarwalově poznámce o potřebě tří vlnových čísel k matematickému popisu tvarů kmitu [26]. Pouze tyto módy jsou vázány s elektrickým polem v rezonátoru [36].

Mezní frekvence prostých tloušťkových módů E, TSt a sTSh lze vypočítat řešením třírozměrných rovnic piezoelektriny (viz kap. 2.3). Při uvažování piezoelektrických vlastností keramiky a buzení kmitů elektrickým polem, které je přiloženo na elektrody umístěné na plochách $x_3 = \pm b$, získáme vztahy pro mezní frekvence

$$\omega_E = 0, \quad \omega_{\text{TSt}} = \eta \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}}, \quad \omega_{\text{sTSh}} = \frac{\pi}{b} \sqrt{\frac{c_{55}^E}{\rho}}, \quad (2.2)$$

kde c_{33}^D a c_{55}^E jsou elastické moduly, ρ je hustota a vlnové číslo η je řešením rovnice (3.32). Nejnižší roztažný mód E se deskou šíří již od nulové frekvence.

V *ohraničené desce* vznikají při odrazech vlnění na okrajích desky prostorové stojaté vlny a pro každý mód nekonečné desky existují v ohraničené desce také jeho násobky (*overtone*).² Všechny kmity jsou vzájemně vázány při odrazech na rozhraních a narozdíl od nekonečné desky nemohou existovat nezávislé módy. Protože se módy vyšších řádů šíří deskou až od určité mezní frekvence, jsou sice vysokofrekvenční kmity ovlivněny

²Běžně používaný český termín *harmonické* není přesný, protože poměr frekvence vyšších násobků k frekvenci základního módu obvykle není celé číslo.

vazbou s nižšími módy kmitů, ale pro nízkofrekvenční kmity je vazba s vyššími módy kmitů slabá. Výsledné pole posunutí a napjatosti v rezonátoru je složité.

2.2 Základní předpoklady řešení

Při řešení elektroelastických kmitů těles z piezoelektrické keramiky se omezíme na klasickou lineární teorii piezoelektriny [10]. Zanedbáváme přitom vnitřní ztráty v tělese (mechanické, piezoelektrické a dielektrické). Výpočtem získáme vlastní frekvence a tvary kmitu vyvolané elektrickým polem, které vyhovují předepsaným okrajovým podmínkám.

V piezoelektrickém prostředí jsou mechanické výchylky vázány s elektromagnetickým polem, takže elektrický potenciál a doprovodné elektrické pole jsou součástí elastické vlny. Elastické vlnění v tělese je za předpokladu nekonečně malých deformací určeno Hookovým zákonem. Elektromagnetické vlnění postupuje pevnou látkou rychlostí $10^4 \times$ až $10^5 \times$ vyšší než vlny elastické [56]. Magnetickou část energie spojenou s vlněním tak zanedbáváme a elektrické pole popisujeme Maxwellovými rovnicemi pro stacionární elektrické pole (tzv. kvazistacionární aproximace). Za těchto předpokladů je elastické a kvazistacionární elektrické pole vázáno lineárními piezoelektrickými rovnicemi (2.5).

Jednoznačnost řešení je dána okrajovými podmínkami (2.9) až (2.11). Počáteční podmínky ani s nimi spojené přechodové jevy neuvažujeme, protože hledáme pouze řešení ustálených kmitů rezonátoru.

V obecných vztazích je použito úplné tenzorového značení, při odvození konkrétních řešení pak zkrácené maticové značení. Pro zkrácení zápisu se využívá Einsteinova sumačního pravidla, podle něhož znamená opakování indexu ve výrazu sumaci přes všechny tři hodnoty tohoto indexu. Symbol vyskytující se v indexu veličiny za čárkou znamená parciální derivaci této veličiny podle odpovídající souřadnice, např.

$$u_{3,1} \equiv \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad (2.3)$$

parciální derivaci podle času zapisujeme ve tvaru (počet teček vyjadřuje stupeň derivace)

$$\ddot{u}_1 \equiv \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}. \quad (2.4)$$

Polarizovaná piezoelektrická keramika má makroskopickou symetrii třídy ∞m , které přísluší deset nezávislých materiálových konstant (pět elastických, tři piezoelektrické a dvě dielektrické) [59]. Směr polarizace (polární osa) je shodná s osou x_3 .

2.3 Rovnice lineární piezoelektriny

Kmitání piezoelektrických rezonátorů je popsáno následující skupinou rovnic:

a) algebraické rovnice (lineární piezoelektrické rovnice)

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k, \\ D_i &= e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ik}^S E_k, \end{aligned} \quad (2.5a)$$

nebo

$$\begin{aligned} S_{ij} &= s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{kij} E_k, \\ D_i &= d_{ikl} T_{kl} + \varepsilon_{ik}^T E_k, \end{aligned} \quad (2.5b)$$

b) divergenční rovnice (elastické pohybové rovnice a nábojová rovnice elektrostatiky)

$$\begin{aligned} T_{ij,i} &= \rho \ddot{u}_j, \\ D_{i,i} &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

c) gradientní rovnice (vztahy mezi deformací a mechanickým posunutím a mezi intenzitou elektrického pole a elektrickým potenciálem)

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \\ E_i &= -\varphi_{,i}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

kde T_{ij} , S_{ij} , E_i a D_i jsou po řadě složky elastického napětí, deformace, intenzity elektrického pole a elektrického posunutí, c_{ijkl}^E jsou složky elastického modulu při konstantní intenzitě elektrického pole, s_{ijkl}^E jsou složky elastického koeficientu při konstantní intenzitě elektrického pole, e_{ikl} jsou složky piezoelektrického modulu, d_{ikl} jsou složky piezoelektrického koeficientu a ε_{ik}^S a ε_{ik}^T jsou složky permitivity při konstantní deformaci a při konstantním elastickém napětí. Proměnné u_i jsou složky mechanického posunutí, φ je elektrický potenciál a ρ je hustota.

Systém 22 rovnic (2.5) až (2.7) pro 22 neznámých lze postupným vzájemným dosazováním zjednodušit na soustavu čtyř diferenciálních rovnic pro čtyři neznámé u_j a φ

$$\begin{aligned} c_{ijkl}^E u_{k,l} + e_{kij} \varphi_{,ki} &= \rho \ddot{u}_j, \\ e_{ikl} u_{k,l} - \varepsilon_{ik}^S \varphi_{,ki} &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Vazba mezi elastickým a kvazistacionárním elektrickým polem v rovnicích (2.5) a (2.8) ovlivňuje efektivní hodnoty elastických modulů, rychlostí šíření elastických vln a v konečném důsledku také vlastní frekvence a tvary kmitu rezonátoru.

Rovnice (2.5) až (2.8) popisují elektroelastické vlnění v neohraničeném prostředí. U prostorově omezeného elementu je musíme doplnit mechanickými a elektrickými okrajovými podmínkami. Při výpočtu se obvykle předpokládá rezonátor s mechanicky volnými plochami umístěný ve vakuu.

Z podmínky mechanicky volného povrchu, na který nepůsobí žádné vnější síly, vyplývá okrajová podmínka

$$n_i T_{ij} = 0, \quad (2.9)$$

kde n_i jsou složky normálového vektoru hraniční plochy $\mathbf{n}$.

Rozlišujeme dva různé případy elektrických okrajových podmínek. Povrch rezonátoru je buď bez elektrod, nebo pokrytý dokonale vodivými nehmotnými elektrodami, na které je přiložen elektrický potenciál.

V prvním případě splňuje elektrická okrajová podmínka případ spojitosti normálové složky elektrického posunutí v piezoelektrické látce a v okolním prostředí a má tvar

$$n_i D_i^{(p)} = n_i D_i^{(v)}, \quad (2.10)$$

kde indexem p je označeno piezoelektrické prostředí a indexem v vakuum nad povrchem. Při praktickém výpočtu uvažujeme permitivitu piezoelektrického prostředí mnohonásobně vyšší než permitivitu vakua, elektrické pole ve vakuu zanedbáváme a okrajová podmínka má zjednodušený tvar

$$n_i D_i = 0. \quad (2.11a)$$

U pokoveného povrchu vyžadujeme spojitý potenciál na celé ploše elektrody

$$\varphi = \varphi_0, \quad (2.11b)$$

kde hodnota přiloženého potenciálu φ_0 může být nulová, nebo může nabývat konečných hodnot.

Řešením soustavy (2.8) až (2.11) jsou posunutí u_i a elektrický potenciál φ , které jsou obecně funkcí všech souřadnic a času. Pro ustálený stav je můžeme vyjádřit jako součin funkce souřadnic a harmonické funkce času

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3, t) &= u_i(x_1, x_2, x_3) e^{j\omega t}, \\ \varphi(x_1, x_2, x_3, t) &= \varphi(x_1, x_2, x_3) e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Analytické řešení (2.12) vyjádřené v uzavřeném tvaru konečného počtu matematických funkcí nebylo pro rezonátor obecného tvaru dosud nalezeno. Při výpočtu je nutné buď nalézt přibližné řešení soustavy přesných třírozměrných rovnic piezoelektriny (2.8) až (2.11), nebo použít vhodnou aproximaci této soustavy a nalézt její přesné řešení.

V dalších kapitolách jsou popsány dva typy aproximačních rovnic různé složitosti. První jsou jednorozměrné rovnice odvozené za předpokladu zjednodušeného stavu napjatosti v rezonátoru. V druhém případě jsou uvedeny aproximační rovnice odvozené na základě teorie vyšších řádů pro piezoelektrické desky.

Při řešení radiálních kmitů je nutné rovnice lineární piezoelektriny transformovat do válcových souřadnic. Obecné rovnice platné pro keramický element s materiálovou symetrií třídy ∞m , který je polarizovaný v axiálním směru (polární osa x_3 je shodná s osou z), jsou uvedeny v přílohách A (kartézské souřadnice) a B (válcové souřadnice). Struktura materiálových koeficientů odpovídá hexagonální třídě $6mm$ [8].

2.4 Koeficient elektromechanické vazby

Koeficient elektromechanické vazby je bezrozměrný parametr, který charakterizuje schopnost piezoelektrického materiálu přeměnit vstupní energii (mechanickou, nebo elektrickou) na energii výstupní (elektrickou, nebo mechanickou) prostřednictvím přímého nebo převráceného piezoelektrického jevu. Význam má např. pro hodnocení šířky pásma piezokeramických filtrů nebo ultrazvukových převodníků. Pro daný mód kmitu je koeficient elektromechanické vazby měřítkem jeho vybuditelnosti elektrickým polem.

Obecně se definuje jako poměr

$$k = \sqrt{\frac{\text{mechanická energie přeměněná na elektrickou energii}}{\text{vstupní mechanická energie}}}, \quad (2.13a)$$

resp.

$$k = \sqrt{\frac{\text{elektrická energie přeměněná na mechanickou energii}}{\text{vstupní elektrická energie}}}, \quad (2.13b)$$

který lze také vyjádřit jako poměr piezoelektrické energie a geometrického průměru elastické a elektrické energie v jednotkovém objemu piezoelektrické látky [19].

Hodnota koeficientu závisí na rozložení mechanického napětí a elektrického pole v rezonátoru. Její velikost můžeme určit teoreticky pomocí materiálových konstant (statická hodnota) nebo vypočítat z naměřené sériové a paralelní rezonanční frekvence (dynamická hodnota). Dynamická hodnota je zpravidla nižší než statická, protože elastické pole není s elektrickým polem vázáno dokonale.

Výraz pro statickou hodnotu k určíme pomocí piezoelektrických rovnic (2.5). Vnitřní energie je definována rovnicí

$$W = \frac{1}{2}S_{\lambda}T_{\lambda} + \frac{1}{2}D_iE_i, \quad (2.14)$$

kterou dále upravíme

$$W = \frac{1}{2}T_{\lambda}s_{\lambda\mu}^ET_{\mu} + \frac{1}{2}T_{\lambda}d_{i\lambda}E_i + \frac{1}{2}E_id_{i\lambda}T_{\lambda} + \frac{1}{2}E_i\varepsilon_{ij}^TE_j = W_1 + 2W_{12} + W_2, \quad (2.15)$$

kde

$$W_1 = \frac{1}{2}s_{\lambda\mu}^ET_{\lambda}T_{\mu} \quad \text{je elastická energie,}$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^TE_iE_j \quad \text{je elektrická energie,}$$

$$W_{12} = \frac{1}{2}d_{i\lambda}E_iT_{\lambda} \quad \text{je vzájemná piezoelektrická energie.}$$

Koeficient elektromechanické vazby je pak určen výrazem

$$k = \frac{W_{12}}{\sqrt{W_1W_2}}. \quad (2.16)$$

Vztah (2.16) je v obecném případě velmi složitý, výrazně se však zjednodušuje pro jednoduché rezonanční módy [60]. Pro kruhové piezokeramické rezonátory definujeme čtyři základní koeficienty elektromechanické vazby:

a) podélné kmity tyče

$$k_{33} = \frac{d_{33}}{\sqrt{s_{33}^E\varepsilon_{33}^T}}, \quad (2.17a)$$

b) tloušťkové kmity kruhové desky

$$k_t = \frac{e_{33}}{\sqrt{c_{33}^D \varepsilon_{33}^S}}, \quad (2.17b)$$

c) radiální kmity tyče

$$k_p' = \frac{k_p + \sigma_p^E k_{33}}{\sqrt{(1 - (k_{33})^2) (1 - (\sigma_p^E)^2)}}, \quad (2.17c)$$

d) radiální kmity kruhové desky

$$k_p = \frac{d_{31}}{\sqrt{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T}} \sqrt{\frac{2}{1 - \sigma_{12}^E}}, \quad (2.17d)$$

kde

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^E &= -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}, \\ \sigma_{13}^E &= -\frac{s_{13}^E}{\sqrt{s_{11}^E s_{33}^E}}, \\ \sigma_p^E &= \sigma_{13}^E \sqrt{\frac{2}{1 - \sigma_{12}^E}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

jsou Poissonova čísla. Koeficient vypočtený z rovnice (2.17) je materiálovou konstantou. Hodnota k může být kladná nebo záporná podle znaménka piezoelektrického členu. Absolutní hodnota (nebo k^2) je vždy menší než jedna, protože celá vstupní energie se dokonale nepřemění na energii výstupní.

Dynamickou hodnotu koeficientu elektromechanické vazby lze stanovit pomocí relativního rozdílu sériové a paralelní frekvence daného módu. Pro podélné kmity tyčí (koeficient k_{33}) a tloušťkové kmity desek (k_t) platí vztah [8]

$$k^2 = \frac{\pi}{2} \frac{f_S}{f_P} \cotg \left(\frac{\pi}{2} \frac{f_S}{f_P} \right), \quad (2.19)$$

kde f_S a f_P jsou sériová a paralelní rezonanční frekvence (2.27). U radiálních módů (k_p a k_p') není dynamická závislost podobná (2.19) jednoduše definována a je nutné použít obecný vztah platný pro všechny typy kmitů

$$k_{eff}^2 = \sqrt{\frac{f_P^2 - f_S^2}{f_P^2}}. \quad (2.20)$$

2.5 Elektrický náhradní obvod

Přenosové vlastnosti piezoelektrického rezonátoru se v praxi často modelují pomocí zjednodušeného elektrického náhradního obvodu se soustředěnými parametry (tzv.

Butterworth-Van Dykův obvod, BVD) [61], [62]. Tento obvod je složen z cívek, kondenzátorů a odporů s konstantní velikostí, které lze vypočítat z materiálových parametrů a rozměrů rezonátoru. Obvod popisuje vstupní imitanci piezoelektrického rezonátoru v blízkosti rezonanční, resp. antirezonanční frekvence.

Při odvození BVD obvodu vycházíme z jednorozměrných aproximačních modelů pro prosté módy kmitu a jejich násobky. Pomocí okrajových podmínek vyjádříme elektrické posunutí D a intenzitu elektrického pole E v rezonátoru, posuvný proud I_p a napětí na elektrodách U a z jejich poměru odpovídající impedanci Z nebo admitanci Y . Postup odvození i struktura BVD obvodu se liší podle orientace elektrického pole vzhledem ke směru šíření akustické vlny v rezonátoru [8]. V našem případě kruhových rezonátorů se jedná o rozdíl mezi tloušťkovými (podélnými) kmity a radiálními kmity. Postupně naznačíme řešení pro oba případy.

Vzhledem k tlumení v rezonátoru obsahuje jeho impedance nenulovou reálnou složku a v okolí rezonance definujeme vedle sériové a paralelní rezonanční frekvence f_S a f_P další významné frekvence:

f_m - frekvence odpovídající minimální absolutní hodnotě impedance,

f_n - frekvence odpovídající maximální absolutní hodnotě impedance,

f_r - rezonanční frekvence odpovídající nulové hodnotě imaginární části impedance,

f_a - antirezonanční frekvence odpovídající nulové hodnotě imaginární části impedance, přičemž platí nerovnosti $f_m < f_S < f_r$ a $f_a < f_P < f_n$.

V dalším textu budeme rezonanční kmitání popisovat pomocí hodnot rezonanční a antirezonanční frekvence f_r a f_a , resp. kruhových ekvivalentů ω_r a ω_a . Jejich velikost lze stanovit s nejmenší nejistotou měření [6] a proto se také v praxi používají nejčastěji. Analýza vlivu ztrát v rezonátoru na hodnoty f_m , f_S , f_r , f_a , f_P a f_n a na způsob jejich měření a použití je uvedena např. v [13].

a) Tloušťkové (podélné) kmity

Síločáry elektrického pole v rezonátoru jsou rovnoběžné se směrem šíření akustické vlny a elektrické posunutí D je konstantní. Nezávislými veličinami jsou elastické napětí T a elektrické posunutí D a impedance rezonátoru je vyjádřena vztahem (viz rovnice (3.18) a (3.37))

$$Z = \frac{1}{j\omega C_D} \left(1 - k^2 \frac{\text{tg}(\eta b)}{\eta b} \right), \quad (2.21)$$

kde součin ηb je poměrné vlnové číslo a C_D je částečně upnutá kapacita definovaná vztahem

$$C_D = \varepsilon_D \frac{\pi a^2}{2b}. \quad (2.22)$$

Hodnota permitivity ε_D leží mezi hodnotami volné ε^T a upnuté permitivity ε^S ,

$$\varepsilon^T > \varepsilon_D \geq \varepsilon^S. \quad (2.23)$$

Závislost (2.21) má nekonečné množství pólů $h\pi$, h liché, ve kterých je impedance nekonečná. Tyto póly odpovídají antirezonančním frekvencím rezonátoru. Parametry elektrického náhradního obvodu získáme rozvojem impedance v okolí pólů pomocí vztahu [21]

$$\operatorname{tg}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8x}{(2k-1)^2 \pi^2 - 4x^2}. \quad (2.24)$$

Členy rozvoje (2.24) představují impedanci paralelních větví sériových rezonančních RLC obvodů, odpovídajících jednotlivým módům rezonátoru. Náhradní obvod se soustředěnými parametry je znázorněn na obr. 2.3a. V obvodu se vyskytuje člen se zápornou kapacitou $-C_D$, který je důsledkem vazby mezi budícím elektrickým polem (převrácený piezoelektrický jev) a elektrickým polem indukovaným v rezonátoru (přímý jev) [63], [64].

Zjednodušený náhradní obvod popisující chování obvodu v okolí h -tého násobku základní frekvence je znázorněn na obr. 2.4a. Tvoří jej sériový rezonanční obvod složený z „dynamických“ prvků C'_h , L_h a R_h , přemostěný „statickou“ kapacitou C_0 . Dynamická kapacita rezonátoru C'_h odpovídá sériové kombinaci kapacit C_h a $-C_0$. Impedance náhradního obvodu je popsána vztahem

$$Z = \frac{1}{j\omega C_0} \left(1 - k^2 \frac{8}{h^2 \pi^2 - 4(\eta b)^2} \right), \quad h \text{ liché}. \quad (2.25)$$

Kapacita C_0 zahrnuje příspěvky kapacit ostatních paralelních větví úplného obvodu, tj. dalších členů nekonečného součtu ve vztahu (2.24).

Vztahy vyjadřující velikost jednotlivých prvků C_0 , C'_h , L_h a R_h získáme dosazením za poměrné vlnové číslo ηb do (2.25) a porovnáním výsledného vztahu s obecnou impedancí obvodu na obr. 2.4a, která má tvar [6]

$$Z_h(\omega) = \frac{\omega L_h - \frac{1}{\omega C'_h} - jR_h}{\omega C_0 R_h + j \left[\omega C_0 \left(\omega L_h - \frac{1}{\omega C'_h} \right) - 1 \right]}. \quad (2.26)$$

Pomocí parametrů elektrického náhradního obvodu dále definujeme vztahy pro kruhovou sériovou a paralelní frekvenci

$$\omega_{hS} = \frac{1}{\sqrt{L_h C'_h}}, \quad \omega_{hP} = \frac{1}{\sqrt{L_h \frac{C_0 C'_h}{C_0 + C'_h}}} = \omega_{hS} \sqrt{1 + \frac{C'_h}{C_0}} \quad (2.27)$$

a činitel jakosti rezonátoru

$$Q_h = \frac{\omega_{hS} L_h}{R_h} = \frac{1}{\omega_{hS} R_h C'_h} = \frac{1}{R_h} \sqrt{\frac{L_h}{C'_h}}. \quad (2.28)$$

b) Radiální kmity

Ekvipotencionální plochy elektrického pole jsou ve směru šíření akustické vlny konstantní. Nezávislými veličinami jsou elastické napětí T a intenzita elektrického pole E . Kmitání rezonátoru řešíme ve válcových souřadnicích a výsledná admitance má tvar (viz vztahy (3.52) a (3.66))

$$Y = j\omega C_D \left(1 + \frac{k^2}{1 - k^2} \frac{(1 + \sigma) J_1(\eta a)}{\eta a J_0(\eta a) - (1 - \sigma) J_1(\eta a)} \right), \quad (2.29)$$

kde součin ηa je poměrné vlnové číslo, σ je Poissonovo číslo a J_0 , J_1 jsou Besselovy funkce prvního druhu a nultého a prvního řádu.

Vztah (2.29) má nekonečné množství pólů ηa , ve kterých je admitance nekonečná. Tyto póly získané řešením rovnice (3.47), resp. (3.62) odpovídají rezonančním frekvencím $\omega_r = \eta_r v_a$.

Parametry elektrického náhradního obvodu získáme rozvojem admitance v okolí pólů $\eta_r a$ pomocí Taylorovy řady. Při aproximaci uvažujeme první dva členy řady a aproximační funkce mají tvar

$$\begin{aligned} \eta a &\cong \eta_r a \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_r} \right), \\ J_0(\eta a) &\cong J_0(\eta_r a) - \eta_r a J_0'(\eta_r a) \frac{\Delta\omega}{\omega_r}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$J_1(\eta a) \cong J_1(\eta_r a) + (\eta_r a J_0'(\eta_r a) - J_1(\eta_r a)) \frac{\Delta\omega}{\omega_r},$$

kde

$$\Delta\omega = \omega - \omega_r, \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_r} \cong \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{2\omega_r^2}. \quad (2.31)$$

Použitím vztahů (2.30) a (2.31) odvodíme aproximaci

$$\frac{J_1(\eta a)}{\eta a J_0(\eta a) - (1 - \sigma) J_1(\eta a)} \cong \frac{1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_r} \sigma}{-\frac{\Delta\omega}{\omega_r} \left((\eta_r a)^2 - (1 - \sigma^2) + (\eta_r a)^2 \frac{\Delta\omega}{\omega_r} \right)}. \quad (2.32)$$

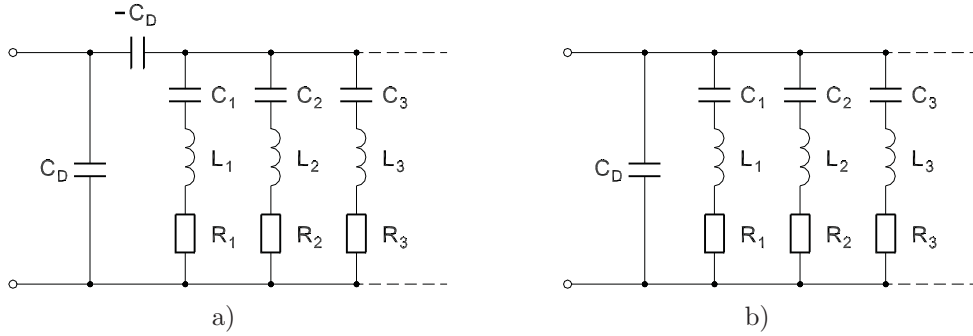
Vynecháním členů vyšších řádů $\frac{\Delta\omega}{\omega_r} \sigma$ a $(\eta_r a)^2 \frac{\Delta\omega}{\omega_r}$ v (2.32) získáme přibližný vztah pro admitanci náhradního obvodu

$$Y = j\omega C_0 \left(1 + \frac{k^2}{1 - k^2} \frac{1 + \sigma}{\frac{\omega_r^2 - \omega^2}{2\omega_r^2} ((\eta_r a)^2 - (1 - \sigma^2))} \right), \quad (2.33)$$

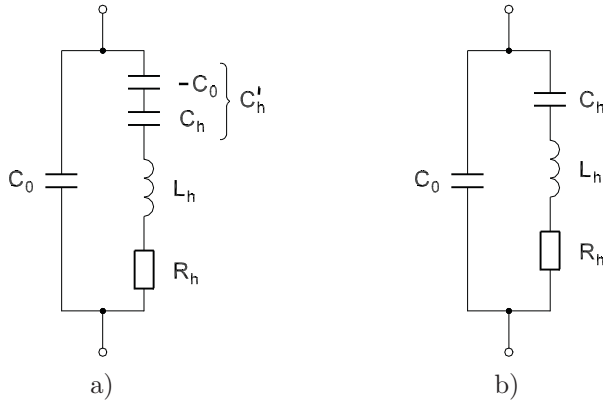
který je platný v okolí h -tého násobku rezonanční frekvence ω_r .

Náhradní obvody se soustředěnými parametry pro případ radiálních kmitů jsou znázorněny na obr. 2.3b a 2.4b. Narozdíl od tloušťkových módů se zde nevyskytují prvky se zápornou kapacitou $-C_D$ a $-C_0$.

Vztahy vyjadřující velikost jednotlivých prvků C_0 , C_h , L_h a R_h odvodíme dosazením za poměrné vlnové číslo ηa do (2.33) a porovnáním výsledného vztahu s obecnou impedancí obvodu na obr. 2.4b. Ta je popsána rovnicí (2.26), ve které – stejně jako ve vztazích (2.27) a (2.28) – nahradíme C'_h kapacitou C_h .



Obr. 2.3: Elektrický náhradní obvod piezoelektrického rezonátoru,
a) tloušťkové (podélné) kmity, budící elektrické pole je rovnoběžné se směrem šíření elastické vlny,
b) radiální kmity, budící elektrické pole je kolmé ke směru šíření elastické vlny



Obr. 2.4: Zjednodušený elektrický náhradní obvod platný v blízkosti h -tého módu,
a) tloušťkové (podélné) kmity, budící elektrické pole je rovnoběžné se směrem šíření elastické vlny,
b) radiální kmity, budící elektrické pole je kolmé ke směru šíření elastické vlny

Prvek R_h v náhradním obvodu představuje mechanické ztráty způsobené vnitřním třením v materiálu, ztrátami v uložení, tlumením vlivem okolního prostředí apod. Mechanické ztráty uvažujeme zavedením komplexních elastických konstant c^* , resp. s^* do výchozích lineárních piezoelektrických rovnic (2.5). Tím se akustické rychlosti, vlnová čísla a póly imitancí (2.25), (2.33) změň na komplexní hodnoty. Rozvojem imitancí získáme elektrický náhradní obvod s prvky s reálnou impedancí R_h . Do obvodu můžeme dále zahrnout piezoelektrické a dielektrické ztráty zavedením komplexních piezoelektrických a dielektrických konstant, náhradní obvod se pak rozšíří o další ztrátové

prvky [65], [66]. Při odvození náhradního obvodu z lineárních piezoelektrických rovnic (2.5) s reálnými konstantami předpokládáme sériový náhradní odpor R_h nulový a jeho hodnotu je nutné určit jinak, například experimentálně.

Zjednodušený elektrický náhradní obvod popisuje vlastnosti rezonátoru s dostatečnou přesností pouze v blízkosti rezonanční, resp. antirezonanční frekvence. Kapacita C_0 zahrnující příspěvek kapacit ostatních paralelních větví úplného obvodu je frekvenčně závislá. Protože u keramických rezonátorů s vysokým koeficientem elektromechanické vazby jsou rezonanční a antirezonanční frekvence velmi vzdáleny, nemůže zjednodušený obvod popisovat chování v celém tomto rozsahu přesně [22].

Při návrhu ultrazvukových převodníků a kompozitních struktur je nutné použít přesnější popis pomocí náhradních obvodů s rozprostřenými parametry, které jsou spojitou funkcí frekvence [18], [21].

Kapitola 3

Analytické modely

3.1 Prosté módy kmitu

Jednoduché (prosté) módy kmitu s převažujícím pohybem pouze v jednom směru je možné popsat pomocí jednorozměrných aproximačních rovnic. Rovnice jsou odvozeny za předpokladu zjednodušeného stavu napjatosti v rezonátoru, a to jednoosé napjatosti, rovinné napjatosti nebo rovinné deformace [67]. Vztahy (2.8) se redukují na *jednorozměrnou* vlnovou rovnici, závisející pouze na jedné prostorové proměnné a čase. Rezonanční frekvence ω (2.1) je přímo úměrná vlnovému číslu η a akustická rychlost v_a je konstantní, tj. prostředí je nedisperzní.

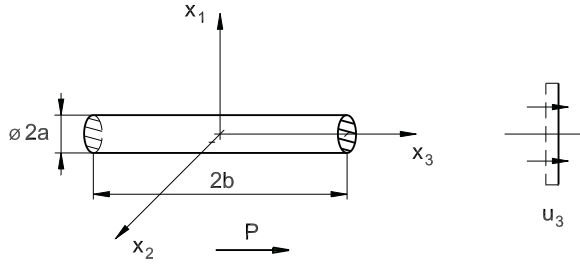
Jednorozměrné rovnice jsou platné pro rezonátory, jejichž tvar přibližně vyhovuje předpokladu zjednodušeného stavu napjatosti (např. dlouhá tyč s malým průřezem, tenká rozlehlá deska apod.). Například prosté radiální kmity vznikají pouze v nekonečně tenkých kruhových deskách nebo v nekonečně dlouhých válcových tyčích. Radiální kmity rezonátorů konečných rozměrů se vždy váží s dalšími módy kmitu.

Pro kruhové piezokeramické rezonátory rozlišujeme čtyři základní prosté módy kmitu, a to podélné [68] a radiální [22] kmity tenké kruhové tyče a radiální [69], [70] a tloušťkové [64] kmity tenké kruhové desky. Níže uvedené vztahy pro popis vlastního kmitání a parametrů elektrického náhradního obvodu vychází z odvození provedeného v [8]. Přehled základních parametrů prostých módů kruhových rezonátorů je uveden v příloze C.

3.1.1 Podélné kmity kruhové tyče

a) Řešení vlastních kmitů

Uvažujme pouze elastické napětí T_3 a elektrické pole působící ve směru osy x_3 tyče (obr. 3.1). Mechanické a elektrické veličiny závisí pouze na souřadnici x_3 a derivace $\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} = 0$.



Obr. 3.1: Tyč kmitající podélnými kmity ($b \gg a$)

Výchozí stavové rovnice

$$\begin{aligned} S_3 &= s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3, \\ D_3 &= d_{33} T_3 + \varepsilon_{33}^T E_3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

upravíme do tvaru

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{s_{33}^E} S_3 - \frac{d_{33}}{s_{33}^E} E_3, \\ D_3 &= \frac{d_{33}}{s_{33}^E} S_3 + \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) E_3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Po dosazení za S_3 a E_3 získáme s pomocí vztahů (2.6) a (2.7) pohybovou a elektrickou rovnici

$$\frac{1}{s_{33}^E} u_{3,33} + \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \varphi_{,33} = \rho \ddot{u}_3, \quad (3.3a)$$

$$\frac{d_{33}}{s_{33}^E} u_{3,33} - \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) \varphi_{,33} = 0. \quad (3.3b)$$

Z rovnice (3.3b) vyjádříme závislost

$$\varphi_{,33} = \frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} u_{3,33}, \quad (3.4)$$

jejíž dvojí integrací podle x_3 získáme vztah pro elektrický potenciál

$$\varphi = \frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} u_3 + (L_1 x_3 + L_2) e^{j\omega t}, \quad (3.5)$$

kde L_1 a L_2 jsou integrační konstanty.

Dosazením derivace potenciálu $\varphi_{,33}$ (3.4) do (3.3a) získáme výslednou pohybovou rovnici

$$\frac{1}{s_{33}^D} u_{3,33} = \rho \ddot{u}_3, \quad (3.6)$$

kde $s_{33}^D = s_{33}^E (1 - k_{33}^2)$. Řešení hledáme ve tvaru harmonické funkce s amplitudou $\bar{A}$

$$u_3(x_3, t) = \bar{A} \sin(\eta x_3) e^{j\omega t}. \quad (3.7)$$

Po dosazení do pohybové rovnice (3.6) získáme vztah pro vlastní frekvenci

$$f = \frac{\eta}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho s_{33}^D}} \quad (3.8)$$

a akustickou rychlost

$$v_a = \sqrt{\frac{1}{\rho s_{33}^D}}. \quad (3.9)$$

Vlnové číslo η musí splňovat okrajové podmínky na koncích tyče pro $x_3 = \pm b$

$$T_3 = \frac{1}{s_{33}^E} u_{3,3} + \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \varphi_{,3} = 0, \quad (3.10a)$$

$$\varphi = \frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} u_3 + (\pm L_1 b + L_2) e^{j\omega t} = \pm \varphi_0 e^{j\omega t}. \quad (3.10b)$$

Po dosazení řešení (3.7) do rovnice (3.10b) a vyloučení členu $e^{j\omega t}$ vypočteme integrační konstanty

$$L_2 = 0, \quad L_1 = \frac{\varphi_0}{b} - \frac{1}{d_{33}} \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{\bar{A}}{b} \sin(\eta b), \quad (3.11)$$

které dále dosadíme do (3.10a) a získáme vztah

$$\bar{A} \left[\frac{1}{1 - k_{33}^2} \eta \cos(\eta b) - \frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} \frac{1}{b} \sin(\eta b) \right] = -d_{33} \frac{\varphi_0}{b}. \quad (3.12)$$

Nehomogenní rovnice (3.12) popisuje závislost amplitudy kmitání na budícím napětí. Při rezonanci bezeztrátového rezonátoru je amplituda oscilací nekonečná ($\bar{A} \rightarrow \infty$) a člen v hranaté závorce musí být roven nule. Po úpravě získáme transcendentní rovnici pro η

$$\operatorname{tg}(\eta_r b) = \frac{\eta_r b}{k_{33}^2}. \quad (3.13)$$

b) Parametry elektrického náhradního obvodu

Směr budícího elektrického pole je rovnoběžný se směrem šíření akustické vlny. Ve směru šíření je konstantní elektrické posunutí D_3 . Vyjádříme elektrické stavové veličiny

$$D_3 = \bar{D}_3 e^{j\omega t}, \quad \bar{D}_3 = \text{konst.}, \quad (3.14)$$

$$E_3 = \frac{1}{\varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)} \left(D_3 - \frac{d_{33}}{s_{33}^E} u_{3,3} \right).$$

Amplitudu posunutí $\bar{A}$ získáme dosazením (3.7) do okrajové podmínky (3.10a) s pomocí vztahu $E_3 = -\varphi_{,3}$

$$\bar{A} = \frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T} \frac{\bar{D}_3}{\eta \cos(\eta b)}. \quad (3.15)$$

Napětí na elektrodách vypočítáme integrací intenzity elektrického pole

$$U = \int_{-b}^b E_3 dx_3 = \frac{2bD_3}{\varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)} \left(1 - k_{33}^2 \frac{\operatorname{tg}(\eta b)}{\eta b} \right) \quad (3.16)$$

a posuvný proud získáme integrací časové změny elektrického posunutí přes plochu elektrod $A_e = \pi a^2$

$$I = \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_e} D_3 dA = j\omega D_3 A_e. \quad (3.17)$$

Výsledná impedance rezonátoru má tvar

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)} \frac{2b}{\pi a^2} \left(1 - k_{33}^2 \frac{\operatorname{tg}(\eta b)}{\eta b} \right), \quad (3.18)$$

který odpovídá vztahu (2.21).

Při rezonanci bezetrátového rezonátoru je impedance nulová ($Z = 0$) a vlnové číslo η splňuje transcendentní rovnici (3.13). Při antirezonanci je impedance nekonečná ($Z \rightarrow \infty$) a vlnové číslo η splňuje rovnici

$$\eta_a b = \frac{h\pi}{2}, \quad h \text{ liché.} \quad (3.19)$$

Parametry elektrického náhradního obvodu na obr. 2.4a získané rozvojem impedance (3.18) mají tvar

$$\begin{aligned} C_0 &= \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) \frac{\pi a^2}{2b}, \\ C_h' &= \frac{8C_0 k_{33}^2}{h^2 \pi^2 - 8k_{33}^2}, \\ L_h &= \frac{b^2 \rho s_{33}^D}{2C_0 k_{33}^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.1.2 Tloušťkové kmity kruhové desky

a) Řešení vlastních kmitů

Uvažujeme pouze elastické napětí T_3 a elektrické pole působící ve směru osy x_3 disku (obr. 3.2). Mechanické a elektrické veličiny závisí pouze na souřadnici x_3 a derivace $\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} = 0$.

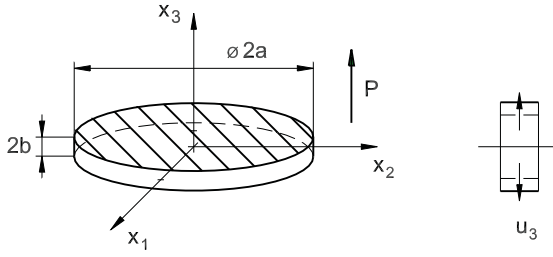
Do výchozích stavových rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} T_3 &= c_{33}^E S_3 - e_{33} E_3, \\ D_3 &= e_{33} S_3 + \varepsilon_{33}^S E_3 \end{aligned} \quad (3.21)$$

dosadíme za S_3 a E_3 a pomocí vztahů (2.6) a (2.7) získáme pohybovou a elektrickou rovnici

$$c_{33}^E u_{3,33} + e_{33} \varphi_{,33} = \rho \ddot{u}_3, \quad (3.22a)$$

$$e_{33} u_{3,33} - \varepsilon_{33}^S \varphi_{,33} = 0. \quad (3.22b)$$



Obr. 3.2: Kruhova deska kmitající tloustkovymi kmity ($a \gg b$)

Z rovnice (3.22b) vyjadíme zavislost

$$\varphi_{,33} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} u_{3,33}, \quad (3.23)$$

jejız dvojí integrací podle x_3 získeme elektricky potencial

$$\varphi = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} u_3 + (L_1 x_3 + L_2) e^{j\omega t}, \quad (3.24)$$

kde L_1 a L_2 jsou integraní konstanty. Po dosazení za derivaci potencialu $\varphi_{,33}$ (3.23) do rovnice (3.22a) obdrzíme vyslednou pohybovou rovnici

$$c_{33}^D u_{3,33} = \rho \ddot{u}_3, \quad (3.25)$$

kde $c_{33}^D = c_{33}^E / (1 - k_t^2)$. Řeení hledeme ve tvaru harmonické funkce s amplitudou $\bar{A}$

$$u_3(x_3, t) = \bar{A} \sin(\eta x_3) e^{j\omega t}. \quad (3.26)$$

Po dosazení do pohybove rovnice (3.25) získeme vlastní frekvenci

$$f = \frac{\eta}{2\pi} \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}} \quad (3.27)$$

a akustickou rychlost

$$v_a = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}}. \quad (3.28)$$

Vlnove íslo η musí splnovat okrajove podmínky na plochách desky pro $x_3 = \pm b$

$$T_3 = c_{33}^E u_{3,3} + e_{33} \varphi_{,3} = 0, \quad (3.29a)$$

$$\varphi = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} u_3 + (\pm L_1 b + L_2) e^{j\omega t} = \pm \varphi_0 e^{j\omega t}. \quad (3.29b)$$

Po dosazení řeení (3.26) do rovnice (3.29b) a vylouení lenu $e^{j\omega t}$ vypoteme integraní konstanty

$$L_2 = 0, \quad L_1 = \frac{\varphi_0}{b} - \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} \frac{\bar{A}}{b} \sin(\eta b), \quad (3.30)$$

které dále dosadíme do (3.29a) a získáme vztah

$$\bar{A} \left[\eta \cos(\eta b) - \frac{k_t^2}{b} \sin(\eta b) \right] = -\frac{e_{33}}{c_{33}^D} \frac{\varphi_0}{b}. \quad (3.31)$$

Nehomogenní rovnice (3.31) popisuje závislost amplitudy kmitání na budicím napětí. Při rezonanci bezeztrátového rezonátoru je amplituda oscilací nekonečná ($\bar{A} \rightarrow \infty$) a člen v hranaté závorce musí být roven nule. Po úpravě vyjde transcendentní rovnice pro η

$$\operatorname{tg}(\eta_r b) = \frac{\eta_r b}{k_t^2}. \quad (3.32)$$

b) Parametry elektrického náhradního obvodu

Směr budicího elektrického pole je rovnoběžný se směrem šíření akustické vlny. Ve směru šíření je konstantní elektrické posunutí D_3 . Vyjádříme elektrické stavové veličiny

$$\begin{aligned} D_3 &= \bar{D}_3 e^{j\omega t}, \quad \bar{D}_3 = \text{konst.}, \\ E_3 &= \frac{1}{\varepsilon_{33}^S} (D_3 - e_{33} u_{3,3}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Amplitudu posunutí $\bar{A}$ získáme dosazením (3.26) do okrajové podmínky (3.29a) s pomocí vztahu $E_3 = -\varphi_{,3}$

$$\bar{A} = \frac{e_{33}}{c_{33}^D \varepsilon_{33}^S} \frac{\bar{D}_3}{\eta \cos(\eta b)}. \quad (3.34)$$

Napětí na elektrodách vypočítáme integrací intenzity elektrického pole

$$U = \int_{-b}^b E_3 dx_3 = \frac{2bD_3}{\varepsilon_{33}^S} \left(1 - k_t^2 \frac{\operatorname{tg}(\eta b)}{\eta b} \right) \quad (3.35)$$

a posuvný proud získáme integrací časové změny elektrického posunutí přes plochu elektrod $A_e = \pi a^2$

$$I = \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_e} D_3 dA = j\omega D_3 A_e. \quad (3.36)$$

Výsledná impedance rezonátoru má tvar

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_{33}^S} \frac{2b}{\pi a^2} \left(1 - k_t^2 \frac{\operatorname{tg}(\eta b)}{\eta b} \right), \quad (3.37)$$

který odpovídá vztahu (2.21).

Při rezonanci bezeztrátového rezonátoru je impedance nulová ($Z = 0$) a vlnové číslo η splňuje transcendentní rovnici (3.32). Při antirezonanci je impedance nekonečná ($Z \rightarrow \infty$) a vlnové číslo η splňuje rovnici

$$\eta_a b = \frac{h\pi}{2}, \quad h \text{ liché}. \quad (3.38)$$

Parametry elektrického náhradního obvodu na obr. 2.4a získané rozvojem impedance určené vztahem (3.37) mají tvar

$$\begin{aligned} C_0 &= \varepsilon_{33}^S \frac{\pi a^2}{2b}, \\ C'_h &= \frac{8C_0 k_t^2}{h^2 \pi^2 - 8k_t^2}, \\ L_h &= \frac{b^2 \rho}{2C_0 k_t^2 c_{33}^D}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

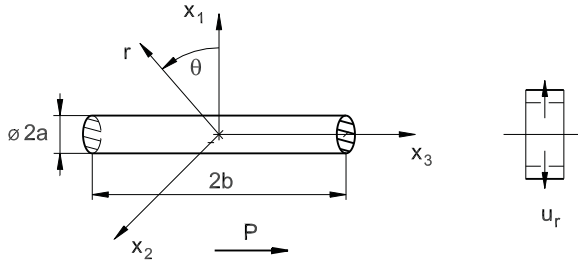
3.1.3 Radiální kmity kruhové tyče

a) Řešení vlastních kmitů

Uvažujeme rovinnou deformaci v rovině $x_1 x_2$ a elektrické pole působící ve směru osy x_3 tyče (obr. 3.3). Elektrické pole v rovinách rovnoběžných s rovinou $x_1 x_2$ je konstantní,

$$E_3 = -\varphi_{,3} = \frac{U}{2b}, \quad (3.40)$$

kde U je napětí přiložené na elektrody.



Obr. 3.3: Tyč kmitající radiálními kmity ($b \gg a$)

Stavové rovnice vyjádřené ve válcových souřadnicích mají tvar [8]

$$\begin{aligned} T_{rr} &= c_{11}^E u_{r,r} + c_{12}^E \frac{u_r}{r} + e_{31} \varphi_{,3}, \\ T_{\theta\theta} &= c_{12}^E u_{r,r} + c_{11}^E \frac{u_r}{r} + e_{31} \varphi_{,3}, \\ T_{r\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$D_3 = e_{31} \left(u_{r,r} + \frac{u_r}{r} \right) - \varepsilon_{33}^S \varphi_{,3}$$

a pohybová rovnice pro posunutí u_r je Besselova rovnice

$$c_{11}^E \left(u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = \rho \ddot{u}_r. \quad (3.42)$$

Obecným řešením pohybové rovnice je Besselova funkce 1. druhu a 1. řádu ve tvaru

$$u_r(r, t) = \bar{A} J_1(\eta r) e^{j\omega t} \quad (3.43)$$

s amplitudou $\bar{A}$. Po dosazení do pohybové rovnice (3.42) získáme vztah pro vlastní frekvenci

$$f = \frac{\eta}{2\pi} \sqrt{\frac{c_{11}^E}{\rho}} \quad (3.44)$$

a akustickou rychlost

$$v_a = \sqrt{\frac{c_{11}^E}{\rho}}. \quad (3.45)$$

Vlnové číslo η musí splňovat okrajovou podmínku na obvodu tyče pro $r = a$

$$T_{rr} = c_{11}^E u_{r,r} + c_{12}^E \frac{u_r}{r} - e_{31} \frac{U}{2b} = 0, \quad (3.46)$$

kde v rezonanci bezetrátového rezonátoru můžeme uvažovat napětí U nulové. Dosazením (3.43) do (3.46) získáme transcendentní rovnici pro vlnové číslo η

$$\eta_r a \frac{J_0(\eta_r a)}{J_1(\eta_r a)} = 1 - \sigma', \quad (3.47)$$

kde

$$\sigma' = \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E} = \frac{\sigma_{12}^E + (\sigma_{13}^E)^2}{1 - (\sigma_{13}^E)^2}. \quad (3.48)$$

b) Parametry elektrického náhradního obvodu

Směr budícího elektrického pole je kolmý na směr šíření akustické vlny. Ve směru šíření je konstantní elektrické pole E_3 . Vyjádříme elektrické stavové veličiny

$$\begin{aligned} E_3 = -\varphi_{,3} &= \frac{U}{2b}, \quad U = \bar{U} e^{j\omega t}, \quad \bar{U} = \text{konst.}, \\ D_3 &= e_{31} \left(u_{r,r} + \frac{u_r}{r} \right) + \varepsilon_{33}^S \frac{U}{2b}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Amplitudu posunutí $\bar{A}$ získáme dosazením (3.43) do okrajové podmínky (3.46)

$$\bar{A} = \frac{e_{31}}{c_{11}^E} \frac{\bar{U} a}{2b} \frac{1}{\eta a J_0(\eta a) - (1 - \sigma') J_1(\eta a)}. \quad (3.50)$$

Posuvný proud vypočítáme integrací časové změny elektrického posunutí přes plochu elektrod $A_e = \pi a^2$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_e} D_3 dA = \\ &= j\omega U \varepsilon_{33}^S \frac{\pi a^2}{2b} \left(1 + \frac{k_p'^2}{1 - k_p'^2} \frac{(1 + \sigma') J_1(\eta a)}{\eta a J_0(\eta a) - (1 - \sigma') J_1(\eta a)} \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Výsledná admitance rezonátoru má tvar

$$Y = \frac{I}{U} = j\omega\varepsilon_{33}^S \frac{\pi a^2}{2b} \left(1 + \frac{k_p'^2}{1 - k_p'^2} \frac{(1 + \sigma') J_1(\eta a)}{\eta a J_0(\eta a) - (1 - \sigma') J_1(\eta a)} \right), \quad (3.52)$$

který odpovídá vztahu (2.29).

Při rezonanci bezeztrátového rezonátoru je impedance nekonečná ($Y \rightarrow \infty$) a vlnové číslo η splňuje transcendentní rovnici (3.47). Při antirezonanci je velikost impedance nulová ($Y = 0$) a vlnové číslo η splňuje rovnici

$$\eta a \frac{J_0(\eta a)}{J_1(\eta a)} = 1 - \sigma' - \frac{k_p'^2}{1 - k_p'^2} (1 + \sigma'). \quad (3.53)$$

Parametry elektrického náhradního obvodu na obr. 2.4b získané rozvojem admitance (3.52) mají tvar

$$\begin{aligned} C_0 &= \varepsilon_{33}^S \frac{\pi a^2}{2b}, \\ C_h &= \frac{2C_0(1 + \sigma')}{(\eta_r a)^2 - (1 - (\sigma')^2)} \frac{k_p'^2}{1 - k_p'^2}, \\ L_h &= \frac{a^2 \rho}{2C_0 c_{11}^E (1 + \sigma')} \frac{1 - k_p'^2}{k_p'^2} \frac{(\eta_r a)^2 - (1 - (\sigma')^2)}{(\eta_r a)^2}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

3.1.4 Radiální kmity kruhové desky

a) Řešení vlastních kmitů

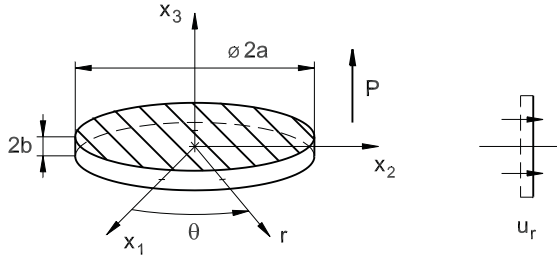
Uvažujme rovinnou napjatost v rovině $x_1 x_2$ a elektrické pole působící ve směru osy x_3 disku (obr. 3.4). Elektrické pole v rovinách rovnoběžných s rovinou $x_1 x_2$ je konstantní,

$$E_3 = -\varphi_{,3} = \frac{U}{2b}, \quad (3.55)$$

kde U je napětí přiložené na elektrody.

Stavové rovnice vyjádřené ve válcových souřadnicích mají tvar [8]

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - (\sigma_{12}^E)^2)} u_{r,r} + \frac{\sigma_{12}^E}{s_{11}^E (1 - (\sigma_{12}^E)^2)} \frac{u_r}{r} + \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \sigma_{12}^E)} \varphi_{,3}, \\ T_{\theta\theta} &= \frac{\sigma_{12}^E}{s_{11}^E (1 - (\sigma_{12}^E)^2)} u_{r,r} + \frac{1}{s_{11}^E (1 - (\sigma_{12}^E)^2)} \frac{u_r}{r} + \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \sigma_{12}^E)} \varphi_{,3}, \\ T_{r\theta} &= 0, \\ D_3 &= \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \sigma_{12}^E)} \left(u_{r,r} + \frac{u_r}{r} \right) - \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \varphi_{,3}. \end{aligned} \quad (3.56)$$



Obr. 3.4: Kruhová deska kmitající radiálními kmitý ($a \gg b$)

Pohybová rovnice pro posunutí u_r je Besselova rovnice

$$\frac{1}{s_{11}^E (1 - (\sigma_{12}^E)^2)} \left(u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = \rho \ddot{u}_r. \quad (3.57)$$

Jejím obecným řešením je Besselova funkce 1. druhu a 1. řádu ve tvaru

$$u_r(r, t) = \bar{A} J_1(\eta r) e^{j\omega t} \quad (3.58)$$

s amplitudou $\bar{A}$. Po dosazení do pohybové rovnice (3.57) získáme vztah pro vlastní frekvenci rezonátoru

$$f = \frac{\eta}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho s_{11}^E (1 - (\sigma_{12}^E)^2)}} \quad (3.59)$$

a akustickou rychlost

$$v_a = \sqrt{\frac{1}{\rho s_{11}^E (1 - (\sigma_{12}^E)^2)}}. \quad (3.60)$$

Vlnové číslo η musí splňovat okrajovou podmínku na obvodu desky pro $r = a$

$$T_{rr} = \frac{1}{s_{11}^E (1 - (\sigma_{12}^E)^2)} u_{r,r} + \frac{\sigma_{12}^E}{s_{11}^E (1 - (\sigma_{12}^E)^2)} \frac{u_r}{r} - \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \sigma_{12}^E)} \frac{U}{2b} = 0, \quad (3.61)$$

kde v rezonanci bezeztrátového rezonátoru můžeme uvažovat napětí U nulové. Dosazením (3.58) do (3.61) získáme transcendentní rovnici pro vlnové číslo η

$$\eta_r a \frac{J_0(\eta_r a)}{J_1(\eta_r a)} = 1 - \sigma_{12}^E. \quad (3.62)$$

b) Parametry elektrického náhradního obvodu

Směr budícího elektrického pole je kolmý na směr šíření akustické vlny. Ve směru šíření je konstantní elektrické pole E_3 . Vyjádříme elektrické stavové veličiny

$$E_3 = -\varphi_{,3} = \frac{U}{2b}, \quad U = \bar{U} e^{j\omega t}, \quad \bar{U} = \text{konst.}, \quad (3.63)$$

$$D_3 = \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \sigma_{12}^E)} \left(u_{r,r} + \frac{u_r}{r} \right) + \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \frac{U}{2b}.$$

Amplitudu posunutí $\bar{A}$ získáme dosazením (3.58) do okrajové podmínky (3.61)

$$\bar{A} = d_{31} (1 + \sigma_{12}^E) \frac{\bar{U}a}{2b} \frac{1}{\eta a J_0(\eta a) - (1 - \sigma_{12}^E) J_1(\eta a)}. \quad (3.64)$$

Posuvný proud vypočítáme integrací časové změny elektrického posunutí přes plochu elektrod $A_e = \pi a^2$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_e} D_3 dA = \\ &= j\omega U \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \frac{\pi a^2}{2b} \left(1 + \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{(1 + \sigma_{12}^E) J_1(\eta a)}{\eta a J_0(\eta a) - (1 - \sigma_{12}^E) J_1(\eta a)} \right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Výsledná admitance rezonátoru má tvar

$$Y = \frac{I}{U} = j\omega \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \frac{\pi a^2}{2b} \left(1 + \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{(1 + \sigma_{12}^E) J_1(\eta a)}{\eta a J_0(\eta a) - (1 - \sigma_{12}^E) J_1(\eta a)} \right), \quad (3.66)$$

který odpovídá vztahu (2.29).

Při rezonanci bezetrátového rezonátoru je impedance nekonečná ($Y \rightarrow \infty$) a vlnové číslo η splňuje transcendentní rovnici (3.62). Při antirezonanci je velikost impedance nulová ($Y = 0$) a vlnové číslo η splňuje rovnici

$$\eta a \frac{J_0(\eta a)}{J_1(\eta a)} = 1 - \sigma_{12}^E - \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} (1 + \sigma_{12}^E). \quad (3.67)$$

Parametry elektrického náhradního obvodu na obr. 2.4b získané rozvojem admitance (3.66) mají tvar

$$\begin{aligned} C_0 &= \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) \frac{\pi a^2}{2b}, \\ C_h &= \frac{2C_0 (1 + \sigma_{12}^E)}{(\eta_r a)^2 - (1 - (\sigma_{12}^E)^2)} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2}, \\ L_h &= \frac{a^2 \rho s_{11}^E (1 - \sigma_{12}^E)}{2C_0} \frac{1 - k_p^2}{k_p^2} \frac{(\eta_r a)^2 - (1 - (\sigma_{12}^E)^2)}{(\eta_r a)^2}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

3.2 Vázané módy kmitu

Při řešení složitějších případů, jako jsou vysokofrekvenční kmitky rezonátorů s obecným poměrem rozměrů, kmitky rezonátorů s nezanedbatelnými vazbami více módů, nebo při požadavcích na vysokou přesnost stanovení rezonanční frekvence a tvaru kmitu je nutné použít pokročilejší způsoby aproximace. Nejvíce rozvinuté a nejčastěji aplikované metody jsou založeny na teoriích vyšších řádů pro elastické a piezoelektrické desky [57], [58], [71], [72].

Aproximační teorie vyšších řádů původně pro izotropní elastické desky vznikla na počátku 50. let minulého století na základě požadavků Bell Telephone Laboratories, významného výrobce křemenných rezonátorů té doby [4]. Poprvé byla použita pro analýzu vázaných ohybových a tloušťkově střížných kmitů AT křemenných rezonátorů [73], [74], [75]. Základní princip systematického odvození a ověření platnosti rovnic vyšších řádů byl postupně aplikován do oblasti kmitů anizotropních elastických a piezoelektrických desek s různou symetrií. Problematice je věnována řada příspěvků a publikací, mezi nejvýznamnější patří [29], [76], [77], [78] nebo [79].

Princip odvození aproximačních rovnic spočívá v rozvoji vybraných veličin do řady matematických funkcí. Vyjdeme z předpokladu piezoelektrické desky (obr. 2.1), jejíž tloušťka $2b$ je orientována ve směru souřadnice x_3 kolmé na její plochy.³ Odvození aproximačních rovnic n -tého řádu začíná nekonečným rozvojem posunutí a potenciálu ve směru tloušťky desky

$$\begin{aligned} u_j(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_j^{(n)}(x_1, x_2, t) P_n(x_3), \\ \varphi(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x_1, x_2, t) R_n(x_3), \end{aligned} \quad (3.69)$$

kde $P_n(x_3)$ a $R_n(x_3)$ jsou známé báze funkce, $u_j^{(n)}$ a $\varphi^{(n)}$ jsou *dvourozměrné* složky posunutí a potenciálu n -tého řádu závislé pouze na souřadnicích x_1 , x_2 a čase t . Členy

$$u_j^{(n)}(x_1, x_2, t) P_n(x_3) \quad (3.70)$$

představují dílčí rozložení amplitud posunutí n -tého řádu přes tloušťku desky a aproximují přesné modální tvary prostých tloušťkových módů (viz obr. 2.2). Spojitý průběh posunutí a potenciálu je nahrazen nekonečným součtem diskretních průběhů, které nezávisí na tloušťkové souřadnici x_3 .

Jako báze funkce $P_n(x_3)$, resp. $R_n(x_3)$ se podle typu aproximace používají mocninná řada

$$P_n(x_3) = x_3^n, \quad (3.71a)$$

Legendrovy polynomy

$$P_n(x_3) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (z^2 - 1)^n}{dz^n}, \quad z = \frac{x_3}{b} \quad (3.71b)$$

nebo trigonometrické funkce

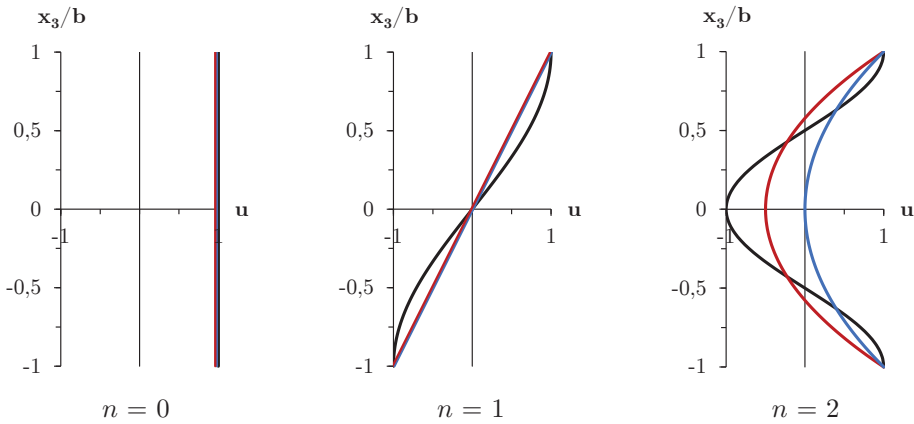
$$\begin{aligned} P_n(x_3) &= \cos \left[\frac{n\pi}{2} \left(1 - \frac{x_3}{b} \right) \right], \quad \text{případně} \\ R_n(x_3) &= \sin \left[\frac{n\pi}{2} \left(1 - \frac{x_3}{b} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.71c)$$

Různé způsoby odvození spolu s nejčastějšími aplikacemi jsou uvedeny v přehledové publikaci [71].

³V literatuře se pro tloušťkovou souřadnici obvykle volí osa x_2 . Vzhledem ke specifickému případu polarizace desky ve směru tloušťky [36] ji nahradíme osou x_3 .

Nejstarším způsobem aproximace bylo použití mocninné řady tloušťkové souřadnice. Odvození rovnic je velmi jednoduché, a proto je nejčastěji používaným postupem pro popis vázaných ohybových a tloušťkově střižných kmitů. Členy druhého a vyšších řádů v nekonečném rozvoji však nejsou ortogonální a důsledkem je nežádoucí vazba výsledných pohybových rovnic. Tato překážka byla nejdříve odstraněna použitím Legendrových polynomů [29], které ale pro členy třetího a vyšších řádů vedou na komplikované tvary pohybových rovnic. Jako nejvhodnější pro popis vysokofrekvenčních kmitů desek se ukazuje rozvoj do řady trigonometrických funkcí [80].

Na obr. 3.5 je znázorněna aproximace posunutí tloušťkových módů nekonečné desky pomocí nejnižších členů mocninné řady a Legendrových polynomů. Protože je náhrada harmonického posunutí pouze přibližná, nelze tyto rozvoje použít pro výpočet rozložení posunutí v průřezu desky. Výpočet je možný pomocí rozvoju do řady trigonometrických funkcí, které harmonické posunutí popisují přesně (viz kap. 4.4).



Obr. 3.5: Porovnání průběhu posunutí nejnižších módů nekonečné desky (černá) s aproximací pomocí mocninné řady (modrá) a Legendrových polynomů (červená)

Nekonečné rozvoje (3.69) se dosadí do variační rovnice pro piezoelektrické kontinuum [10] a integrují se přes tloušťku desky. Získáme tak dvourozměrné rovnice nekonečného řádu pro $u_j^{(n)}$ a $\varphi^{(n)}$ spolu s dvourozměrnými okrajovými podmínkami. Pro praktické použití se vhodně omezí počet členů aproximačních rovnic tak, aby obsahovaly pouze módy posunutí potřebné k popisu kmitání ve studovaném frekvenčním rozsahu. Výsledkem je soustava dvourozměrných rovnic konečného řádu s konečným počtem stupňů volnosti, které popisují několik vázaných módů rezonátoru v omezeném frekvenčním pásmu. Nahrazuje soustavu třírozměrných rovnic (2.8) až (2.11) a její analytické řešení lze vyjádřit přesně v uzavřeném tvaru.

Po odvození dvourozměrných aproximačních rovnic je nutné porovnat jejich řešení s řešením přesných třírozměrných rovnic (2.8), což je možné pro případ nekonečně rozlehlé piezoelektrické desky. Tím se ověří oblast platnosti aproximace (tzn. stanoví se maximální hodnoty frekvence a vlnového čísla, pro které mají výsledky akceptovatelnou odchylku od přesné hodnoty). Vzhledem ke geometrické podobnosti rezonátorů (viz obr. 1.1) se rovnice vyjadřují v bezrozměrovém tvaru a výsledky se uvádějí v bezrozměrových proměnných [81].

Řešení vázaných kmitů se obvykle znázorňuje graficky ve formě *frekvenčních spekter*, uvedených např. na obr. 4.1. Frekvenční spektrum je složeno z frekvenčních křivek, představujících závislost relativních frekvencí Ω na poměru rozměrů rezonátoru. Relativní hodnota Ω vyjadřuje poměr rezonanční frekvence ω k frekvenci nejnižšího prostého tloušťkového kmitu nekonečně rozlehlé desky ω_s ,

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_s}. \quad (3.72)$$

Sestrojíme-li ve spektru ve zvoleném bodě $\alpha = a/b$ vodorovné osy kolmici, vyznačují průsečíky této kolmice s frekvenčními křivkami relativní vlastní frekvence rezonátoru. Hodnoty rezonanční frekvence odečteme na svislé ose. Souvislost teoretického a naměřeného frekvenčního spektra rezonátoru je zřejmá z obr. 5.4 a obr. 5.8.

Pro popis vázaných kmitů tenkých úzkých piezoelektrických desek (pásků) se používají jednorozměrné aproximační rovnice, odvozené z dvourozměrných rovnic průměrováním přes tloušťkovou souřadnici [82], [83] nebo rozvojem do řady šířkové souřadnice [84], [85]. Výsledné jednorozměrné složky mechanického posunutí a elektrického potenciálu n -tého řádu jsou závislé pouze na délkové souřadnici a čase.

3.2.1 Úplné piezoelektrické řešení

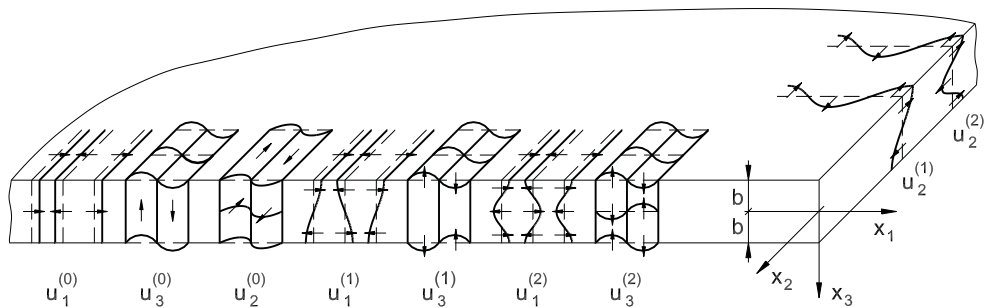
Pro popis vázaných kmitů kruhových rezonátorů použijeme dvourozměrné aproximační rovnice podle Huanga et al. [36]. Odvozeny jsou na základě teorie druhého řádu pro piezoelektrické desky pomocí rozvoje posunutí a potenciálu do řady harmonických funkcí [79]. Rozvoje (3.69) mají tvar

$$\begin{aligned} u_j(x_1, x_2, x_3, t) &= -u_{3,j}^{(0)}(x_1, x_2, t) x_3 + \sum_{n=0}^{\infty} u_j^{(n)}(x_1, x_2, t) \cos \left[\frac{n\pi}{2} \left(1 - \frac{x_3}{b} \right) \right], \\ \varphi(x_1, x_2, x_3, t) &= \bar{U}_0(t) + \bar{U}_1(t) \frac{x_3}{b} + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(x_1, x_2, t) \sin \left[\frac{n\pi}{2} \left(1 - \frac{x_3}{b} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.73)$$

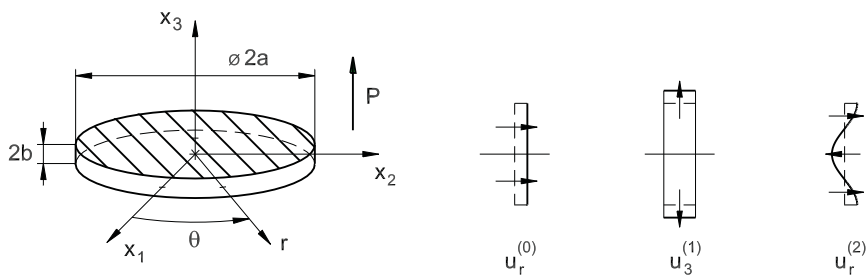
kde funkce $\bar{U}_0$ a $\bar{U}_1$ jsou určeny elektrickými okrajovými podmínkami na elektrodách [86]. Dvourozměrné složky posunutí n -tého řádu pro $n \leq 2$ jsou znázorněny na obr. 3.6.

Postup odvození analytického modelu provedený ve válcových souřadnicích je poměrně obsáhlý, a proto uvedeme pouze výsledné rovnice. Výpočet vyžaduje znalost úplné elasto-piezo-dielektrické matice materiálu.

Uvažujeme piezoelektrickou kruhovou desku s obecným poměrem průměru a tloušťky $\alpha = a/b$ (obr. 3.7). Deska je mechanicky volná a na kruhových plochách jsou naneseny vodivé elektrody. Při aproximaci druhého řádu jsou s potenciálem $\varphi^{(2)}$ přiloženým na elektrody vázány radiální kmity $u_r^{(0)}$, tloušťkově rozpínavé kmity $u_3^{(1)}$ a symetrické tloušťkově střížné kmity druhého řádu $u_r^{(2)}$. Vlastní tvary těchto kmitů, které nahrazují prosté tloušťkové módy E, TSt a sTSh (obr. 2.2), jsou znázorněny na obr. 3.7.



Obr. 3.6: Složky posunutí n -tého řádu pro desku polarizovanou ve směru x_3



Obr. 3.7: Piezoelektrická kruhová deska umístěná v souřadném systému; radiální $u_r^{(0)}$, tloušťkově rozpínavé $u_3^{(1)}$ a symetrické tloušťkově střížné $u_r^{(2)}$ složky kmitů

Výslednice elastických napětí a elektrického posunutí vyšších řádů mají tvar

$$\begin{aligned}
 t_{rr}^{(0)} &= 2 \left(c_{12}^{(0)} \nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(0)} + 2c_{66}^E \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial r} \right) - c_{11}^{(3)} \nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(2)} + \frac{2}{b} c_{13}^E u_3^{(1)} + \frac{\pi}{b} e_{31}^{(3)} \varphi^{(2)}, \\
 t_{rr}^{(2)} &= c_{12}^{(2)} \nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(2)} + 2c_{66}^E \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r} - c_{11}^{(3)} \nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(0)} - \frac{2}{3b} c_{13}^E u_3^{(1)} - \frac{\pi}{b} e_{31}^{(3)} \varphi^{(2)}, \\
 t_{r3}^{(1)} &= c_{55}^{(1)} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial r} + \frac{8}{3b} c_{55}^E u_r^{(2)} + \frac{8}{3\pi} e_{15} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r}, \\
 \bar{\sigma}^{(2)} &= \frac{\pi}{b} e_{15} u_r^{(2)} + \frac{8}{3\pi} e_{15} \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial r} - \varepsilon_{11}^S \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r},
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

kde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_T^{(n)} &= u_1^{(n)} \mathbf{e}_1 + u_2^{(n)} \mathbf{e}_2, \\
 \nabla &= \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

a $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ jsou jednotkové vektory ve směrech os x_1 a x_2 .

Soustava vázaných dvourozměrných pohybových rovnic je vyjádřena jako

$$\begin{aligned}
& 2c_{11}^{(0)} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(0)}) - c_{11}^{(3)} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(2)}) + \frac{2}{b} c_{13}^E \nabla^2 u_3^{(1)} + \frac{\pi}{b} e_{31}^{(3)} \nabla^2 \varphi^{(2)} = \\
& = 2\rho \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}_T^{(0)}, \\
& c_{55}^{(1)} \nabla^2 u_3^{(1)} - \frac{2}{b} c_{13}^E \nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(0)} + \frac{2}{3b} (c_{13}^E + 4c_{55}^E) \nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(2)} - \frac{\pi^2}{4b^2} c_{33}^E u_3^{(1)} + \\
& + \frac{8}{3\pi} e_{15} \nabla^2 \varphi^{(2)} - \frac{2\pi}{3b^2} e_{33} \varphi^{(2)} = \rho \ddot{u}_3^{(1)}, \\
& c_{11}^{(2)} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(2)}) - c_{11}^{(3)} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(0)}) - \frac{2}{3b} (c_{13}^E + 4c_{55}^E) \nabla^2 u_3^{(1)} - \\
& - \frac{\pi^2}{b^2} c_{55} \nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(2)} - \frac{\pi}{b} (e_{31}^{(2)} + e_{15}) \nabla^2 \varphi^{(2)} = \rho \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}_T^{(2)}, \\
& \frac{\pi}{b} (e_{31}^{(2)} + e_{15}) \nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(2)} - \frac{\pi}{b} e_{31}^{(3)} \nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(0)} + \frac{8}{3\pi} e_{15} \nabla^2 u_3^{(1)} - \frac{2\pi}{3b^2} e_{33} u_3^{(1)} - \\
& - \varepsilon_{11}^S \nabla^2 \varphi^{(2)} + \frac{\pi^2}{b^2} \varepsilon_{33}^{(2)} \varphi^{(2)} = 0.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Modifikované konstanty v rovnicích (3.74) a (3.76) jsou definovány pomocí vztahů

$$\begin{aligned}
c_{\lambda\mu}^{(0)} &= c_{\lambda\mu}^E - \frac{8}{9\pi^2} \frac{c_{\lambda 3}^E c_{3\mu}^E}{c_{33}^E}, \quad c_{\lambda\mu}^{(1)} = c_{\lambda\mu}^E - \frac{256}{225\pi^2} \left(\frac{c_{\lambda 4}^E c_{4\mu}^E}{c_{44}^E} + \frac{c_{\lambda 5}^E c_{5\mu}^E}{c_{55}^E} \right), \\
c_{\lambda\mu}^{(2)} &= c_{\lambda\mu}^E - \frac{144}{25\pi^2} \frac{c_{\lambda 3}^E c_{3\mu}^E}{c_{33}^E}, \quad c_{\lambda\mu}^{(3)} = \frac{16}{5\pi^2} \frac{c_{\lambda 3}^E c_{3\mu}^E}{c_{33}^E}, \\
e_{i\lambda}^{(2)} &= e_{i\lambda} - \frac{144}{25\pi^2} \frac{c_{\lambda 3}^E e_{i3}}{c_{33}^E}, \quad e_{i\lambda}^{(3)} = \frac{16}{5\pi^2} \frac{c_{\lambda 3}^E e_{i3}}{c_{33}^E}, \\
\varepsilon_{ij}^{(2)} &= \varepsilon_{ij}^S + \frac{144}{25\pi^2} \frac{e_{i3} e_{j3}}{c_{33}^E}.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Při předpokladu osově symetrických kmitů kruhové desky předpokládáme řešení ve tvaru stojatých vln

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(0)} &= \frac{1}{b} A_1 J_0(\xi r) e^{j\omega t}, \\
u_3^{(1)} &= A_2 J_0(\xi r) e^{j\omega t}, \\
\nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(2)} &= \frac{1}{b} A_3 J_0(\xi r) e^{j\omega t}, \\
\varphi^{(2)} &= \sqrt{\frac{c_{55}^E}{\varepsilon_{33}^S}} A_4 J_0(\xi r) e^{j\omega t},
\end{aligned} \tag{3.78}$$

kde A_i jsou amplitudy. Konstanta $\sqrt{\frac{c_{55}^E}{\varepsilon_{33}^S}}$ přizpůsobuje velikost amplitudy jednotkám elektrického potenciálu.

Vlnové číslo ξ a frekvenci ω vyjádříme ve tvaru poměrných hodnot

$$\bar{\xi} = \xi \frac{2b}{\pi}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_s}, \quad \text{kde } \omega_s = \frac{\pi}{2b} \sqrt{\frac{c_{55}^E}{\rho}}. \quad (3.79)$$

Poměrné vlnové číslo $\bar{\xi}$ představuje převrácený poměr poloviny vlnové délky ve směru šíření vlny k tloušťce desky $2b$. Ω je poměr rezonanční frekvence ke frekvenci prostého tloušťkového kmitu v rovině x_1x_3 .

Dosazením řešení (3.78) do pohybových rovnic (3.76) a použitím vztahu (3.79) získáme soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{D}(\Omega, \bar{\xi}) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.80)$$

kde matice koeficientů $\mathbf{D}$ (disperzní matice) má tvar

$$\begin{pmatrix} 2\Omega^2 - 2\tilde{c}_{11}^{(0)}\bar{\xi}^2 & -2\tilde{c}_{13}\bar{\xi}^2 & \tilde{c}_{11}^{(3)}\bar{\xi}^2 & -\pi\tilde{e}_{31}^{(3)}\bar{\xi}^2 \\ -2\tilde{c}_{13} & \frac{\pi^2}{4}(\Omega^2 - \tilde{c}_{55}^{(1)}\bar{\xi}^2 - \tilde{c}_{33}) & \frac{2}{3}(\tilde{c}_{13} + 4) & -\frac{2\pi}{3}(\tilde{e}_{15}\bar{\xi}^2 + \tilde{e}_{33}) \\ \tilde{c}_{11}^{(3)}\bar{\xi}^2 & \frac{2}{3}(\tilde{c}_{13} + 4)\bar{\xi}^2 & \Omega^2 - \tilde{c}_{11}^{(2)}\bar{\xi}^2 - 4 & \pi(\tilde{e}_{15} + \tilde{e}_{31}^{(2)})\bar{\xi}^2 \\ -\tilde{e}_{31}^{(3)} & -\frac{2}{3}(\tilde{e}_{15}\bar{\xi}^2 + \tilde{e}_{33}) & \tilde{e}_{15} + \tilde{e}_{31}^{(2)} & \frac{\pi}{4}(\tilde{\varepsilon}_{11}\bar{\xi}^2 + 4\tilde{\varepsilon}_{33}^{(2)}) \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

a poměrné materiálové konstanty jsou

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{\lambda\mu} &= \frac{c_{\lambda\mu}^E}{c_{55}^E}, & \tilde{c}_{\lambda\mu}^{(n)} &= \frac{c_{\lambda\mu}^{(n)}}{c_{55}^E}, \\ \tilde{e}_{i\lambda} &= \frac{e_{i\lambda}}{\sqrt{c_{55}^E \varepsilon_{33}^S}}, & \tilde{e}_{i\lambda}^{(n)} &= \frac{e_{i\lambda}^{(n)}}{\sqrt{c_{55}^E \varepsilon_{33}^S}}, \\ \tilde{\varepsilon}_{ij} &= \frac{\varepsilon_{ij}^S}{\varepsilon_{33}^S}, & \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)} &= \frac{\varepsilon_{ij}^{(n)}}{\varepsilon_{33}^S}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Soustava (3.80) má netriviální řešení pro nenulová A_j , pokud je determinant disperzní matice $\mathbf{D}$ roven nule,

$$\det(\mathbf{D}(\Omega, \bar{\xi})) = 0. \quad (3.83)$$

Determinant je rovnicí 4. řádu pro $\bar{\xi}^2$ a pro zvolené Ω jsou řešením vztahu (3.83) čtyři hodnoty $\bar{\xi}_j^2$. Každá ze závislostí $\Omega/\bar{\xi}_j$ představuje aproximaci disperzního vztahu (2.1) pro daný mód.

Poměrná vlnová čísla $\bar{\xi}_j$ musí vyhovovat okrajovým podmínkám na obvodu desky

$$t_{rr}^{(0)} = t_{rr}^{(2)} = t_{r3}^{(1)} = \bar{\sigma}^{(2)} = 0 \quad \text{pro } r = a. \quad (3.84)$$

Úplné řešení vázaných kmitů je dáno lineární kombinací čtyř dílčích stojatých vln

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(0)} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^4 \gamma_{1j} B_j J_0(\xi_j r) e^{j\omega t}, \quad (3.85a)$$

$$u_3^{(1)} = \sum_{j=1}^4 \gamma_{2j} B_j J_0(\xi_j r) e^{j\omega t}, \quad (3.85b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(2)} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^4 \gamma_{3j} B_j J_0(\xi_j r) e^{j\omega t}, \quad (3.85c)$$

$$\varphi^{(2)} = \sqrt{\frac{c_{55}^E}{\varepsilon_{33}^S}} \sum_{j=1}^4 \gamma_{4j} B_j J_0(\xi_j r) e^{j\omega t}, \quad (3.85d)$$

kde amplitudy B_j jsou určeny okrajovými podmínkami a poměrné amplitudy γ_{kj} můžeme vypočítat z poměru subdeterminantů $D_k(\Omega, \bar{\xi}_j)$ jako

$$\gamma_{1j} : \gamma_{2j} : \gamma_{3j} : \gamma_{4j} = D_1(\Omega, \bar{\xi}_j) : -D_2(\Omega, \bar{\xi}_j) : D_3(\Omega, \bar{\xi}_j) : -D_4(\Omega, \bar{\xi}_j). \quad (3.86)$$

Subdeterminanty D_k vzniknou z matice $\mathbf{D}(\Omega, \bar{\xi}_j)$ například vynecháním prvního řádku a k -tého sloupce. Složky posunutí $u_r^{(0)}$ a $u_r^{(2)}$ získáme integrací (3.85a) a (3.85c) podle r

$$\begin{aligned} u_r^{(0)} &= \sum_{j=1}^4 \gamma_{1j} B_j \frac{J_1(\xi_j r)}{\xi_j b} e^{j\omega t}, \\ u_r^{(2)} &= \sum_{j=1}^4 \gamma_{3j} B_j \frac{J_1(\xi_j r)}{\xi_j b} e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Po dosazení úplného řešení (3.85) do okrajových podmínek (3.84) získáme soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{M}(\Omega, \alpha) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.88)$$

kde j -tý sloupec matice koeficientů $\mathbf{M}$ (matice okrajových podmínek) má tvar

$$\begin{aligned}
M_{1j} &= \left(2\tilde{c}_{11}^{(0)}\alpha_{1j} + 2\tilde{c}_{13}\alpha_{2j} - \tilde{c}_{11}^{(3)}\alpha_{3j} + \pi\tilde{e}_{31}^{(3)}\alpha_{4j} \right) J_0\left(\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2}\alpha\right) - \\
&\quad - 4\tilde{c}_{66}\alpha_{1j} \frac{J_1\left(\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2}\alpha}, \\
M_{2j} &= \left(\tilde{c}_{11}^{(2)}\alpha_{3j} - \tilde{c}_{11}^{(3)}\alpha_{1j} - \frac{2}{3}\tilde{c}_{13}\alpha_{2j} - \pi\tilde{e}_{31}^{(2)}\alpha_{4j} \right) J_0\left(\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2}\alpha\right) - \\
&\quad - 2\tilde{c}_{66}\alpha_{3j} \frac{J_1\left(\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2}\alpha}, \\
M_{3j} &= \left(\frac{3}{8}\tilde{c}_{55}^{(1)}\alpha_{2j}\bar{\xi}_j^2 - \frac{4}{\pi^2}\alpha_{3j} + \frac{1}{\pi}\tilde{e}_{15}\alpha_{4j}\bar{\xi}_j^2 \right) \frac{J_1\left(\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2}\alpha}, \\
M_{4j} &= \left(-\frac{8}{3\pi}\tilde{e}_{15}\alpha_{2j}\bar{\xi}_j^2 + \tilde{e}_{11}\alpha_{4j}\bar{\xi}_j^2 + \frac{4}{\pi}\tilde{e}_{15}\alpha_{3j} \right) \frac{J_1\left(\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2}\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Soustava (3.88) má netriviální řešení pro nenulová B_j , pokud je determinant matice okrajových podmínek $\mathbf{M}$ roven nule,

$$\det(\mathbf{M}(\Omega, \alpha)) = 0. \tag{3.90}$$

Tato závislost představuje frekvenční rovnici, jejíž kořeny určují vlastní poměrnou frekvenci kruhového rezonátoru Ω jako funkci poměru jeho rozměrů $\alpha = a/b$.

Rovnice (3.83) a (3.90) tvoří úplný systém aproximačních vztahů pro popis vázaných kmitů kruhového rezonátoru.

Výpočet frekvenčního spektra kmitů (tj. závislosti rezonanční frekvence Ω na poměru rozměrů α) spočívá v cyklickém hledání hodnot Ω , které současně vyhovují oběma rovnicím (3.83) a (3.90). Pro pevné α volíme proměnnou Ω ve vhodném intervalu $\langle \Omega_1, \Omega_2 \rangle$ s krokem $\Delta\Omega$. Dané Ω_i dosadíme do disperzní rovnice (3.83), vypočteme vlnová čísla $\bar{\xi}_j$ a ty dosadíme do matice (3.89). Hodnotu Ω_i postupně iterujeme (např. metodou půlení intervalu) tak, až je s požadovanou přesností splněna rovnice (3.90) a Ω_i je pak rezonanční frekvencí. Takto postupujeme v celém intervalu frekvencí $\langle \Omega_1, \Omega_2 \rangle$. Výpočet opakujeme pro další hodnotu α ve zvoleném rozsahu rozměrů. Alternativně lze při výpočtu zvolit pevné Ω a iterovat hodnotu α .

Při praktických výpočtech byla zjištěna odchylka ve stanovení vlastních frekvencí nejnižších módů pomocí jednorozměrných aproximačních rovnic a dvourozměrné aproximace (3.83), (3.90). Rozdíl je možné porovnat např. pomocí akustické rychlosti radiálních kmitů kruhové desky. Úpravou vztahu (3.60) pro akustickou rychlost prostých kmitů získáme

$$v_a(R_1) = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E} \right)}. \tag{3.91}$$

Akustickou rychlost radiálních kmitů vyjádřenou pomocí dvourozměrné aproximace stanovíme z rovnice (3.83) za podmínky malých frekvencí a velkých vlnových délek ($\Omega \ll 1$, $\bar{\xi} \ll 1$) při zanedbání piezoelektrických a dielektrických členů. Po úpravě vyjde

$$v_a(R_2) = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(c_{11}^E - \frac{80}{9\pi^2} \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E} \right)} > v_a(R_1). \quad (3.92)$$

U piezoelektrické keramiky BaTiO₃ činí odchylka mezi hodnotami akustické rychlosti přibližně 1,1 %, u keramiky NCE51 pak 4,9 %. Podobné rozdíly lze zaznamenat také u podélných kmitů tyče.

3.2.2 Elastické řešení

Pro výpočet frekvenčního spektra lze použít také aproximační rovnice odvozené pro izotropní elastické kruhové desky [30]. Tento postup je vhodný v případech, kdy není známa úplná matice materiálových konstant použité piezoelektrické keramiky. Vstupními parametry modelu jsou pouze Youngův modul pružnosti $E = 1/s_{11}^E$, Poissonovo číslo σ^E a hustota ρ .

Rozvoj posunutí (3.69) má tvar

$$u_j(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_j^{(n)}(x_1, x_2, t) P_n(x_3), \quad (3.93)$$

kde funkce $P_n(x_3)$ jsou Legendrovy polynomy definované vztahem (3.71b).

Uvažujme kruhovou izotropní desku s obecným poměrem $\alpha = a/b$. Mechanicky volná deska kmitá vázanými radiální kmitů $u_r^{(0)}$, tloušťkově rozpínavými kmitů $u_3^{(1)}$ a symetrickými tloušťkově střížnými kmitů druhého řádu $u_r^{(2)}$ (obr. 3.8). Odvození analytických rovnic je podobné jako v předchozím případě úplného piezoelektrického řešení. Dále proto uvedeme pouze výsledné tvary disperzní matice a matice okrajových podmínek. Vlnové číslo ξ a frekvenci ω vyjádříme v obvyklém poměrném tvaru (3.79), kde

$$\omega_s = \frac{\pi}{2b} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma^E)} \quad (\text{Lamého konstanta}). \quad (3.94)$$

Výsledná disperzní matice $\mathbf{D_E}$ odpovídající soustavě pohybových rovnic má tvar

$$\begin{pmatrix} \kappa^2 \bar{\xi}^2 - \Omega^2 & \frac{2\kappa_1(\kappa^2 - 2)}{\pi} \bar{\xi} & 0 \\ \frac{2\kappa_1(\kappa^2 - 2)}{\pi} \bar{\xi} & \frac{\kappa_2^2}{3} \bar{\xi}^2 + \frac{4\kappa_1^2 \kappa^2}{\pi^2} - \frac{\kappa_3^2}{3} \Omega^2 & -\frac{2\kappa_2^2}{\pi} \bar{\xi} \\ 0 & -\frac{2\kappa_2^2}{\pi} \bar{\xi} & \frac{E'}{5\mu} \bar{\xi}^2 + \frac{12\kappa_2^2}{\pi^2} - \frac{\kappa_4^2}{5} \Omega^2 \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

ve kterém vystupují elastické konstanty

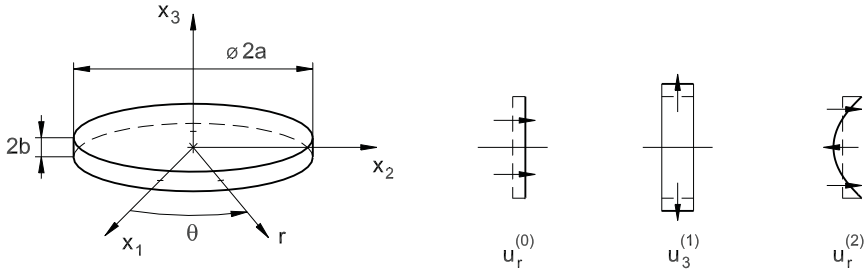
$$\kappa = \sqrt{\frac{2(1 - \sigma^E)}{1 - 2\sigma^E}}, \quad E' = \frac{2\mu}{1 - \sigma^E} \quad (3.96)$$

a korekční součinitele

$$\kappa_1 = \frac{\kappa_2}{\sqrt{p_1}}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\sqrt{p_2}}, \quad \kappa_3 = \kappa_1 \frac{\sqrt{12}}{\pi}, \quad \kappa_4 = \kappa_2 \frac{\sqrt{15}}{\pi}, \quad (3.97)$$

kde pomocné proměnné p_1, p_2 jsou

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{48(\kappa^2 - 4)}{\pi^3 \kappa^4} \left[\pi(\kappa^2 - 1) + 4\kappa \cotg\left(\kappa \frac{\pi}{2}\right) \right], \\ p_2 &= \frac{5\kappa^2}{4(\kappa^2 - 1)(\kappa^2 - 4)} \left[p_1 + \frac{6}{\pi^3}(\kappa^2 - 4) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\kappa} \tg\left(\frac{\pi}{\kappa}\right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.98)$$



Obr. 3.8: Elastická kruhová deska umístěná v souřadném systému; radiální $u_r^{(0)}$, tloušťkově rozpínavé $u_3^{(1)}$ a symetrické tloušťkově střížné $u_r^{(2)}$ složky kmitů

Netriviální řešení soustavy pohybových rovnic získáme v případě, je-li determinant disperzní matice $\mathbf{D_E}$ roven nule,

$$\det(\mathbf{D_E}(\Omega, \bar{\xi})) = 0. \quad (3.99)$$

Determinant je rovnicí třetího řádu pro $\bar{\xi}^2$ a pro zvolené Ω jsou řešením rovnice (3.99) tři hodnoty $\bar{\xi}_j^2$.

Matice $\mathbf{M_E}$ vychází z podmínky mechanicky volného okraje desky a její j -tý sloupec má tvar

$$\begin{aligned} M_{E1j} &= \bar{\xi}_j \frac{\pi}{2} \alpha J_1\left(\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2} \alpha\right) - \frac{\kappa^2 \gamma^2}{2} J_0\left(\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2} \alpha\right), \\ M_{E2j} &= \left[1 - \frac{15\kappa_2^2(1 - \sigma^E) \alpha^2}{2 \left(\left(\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2} \alpha \right)^2 - \delta^2 \right)} \right] \bar{\xi}_j \frac{\pi}{2} \alpha \left(\left(\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2} \alpha \right)^2 - \gamma^2 \right) J_1\left(\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2} \alpha\right), \\ M_{E3j} &= \frac{\left(\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2} \alpha \right)^2 - \gamma^2}{\left(\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2} \alpha \right)^2 - \delta^2} \bar{\xi}_j \frac{\pi}{2} \alpha \left[(1 - \sigma^E) J_1\left(\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2} \alpha\right) - \bar{\xi}_j \frac{\pi}{2} \alpha J_0\left(\bar{\xi}_j \frac{\pi}{2} \alpha\right) \right], \end{aligned} \quad (3.100)$$

kde pomocné proměnné γ^2 , δ^2 jsou

$$\gamma^2 = \left(\frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{\kappa} \Omega \right)^2, \quad \delta^2 = \frac{\pi^2}{8} \kappa_4^2 \alpha^2 (1 - \sigma^E) (\Omega^2 - 4). \quad (3.101)$$

Soustava okrajových podmínek má netriviální řešení, je-li determinant matice $\mathbf{M_E}$ roven nule,

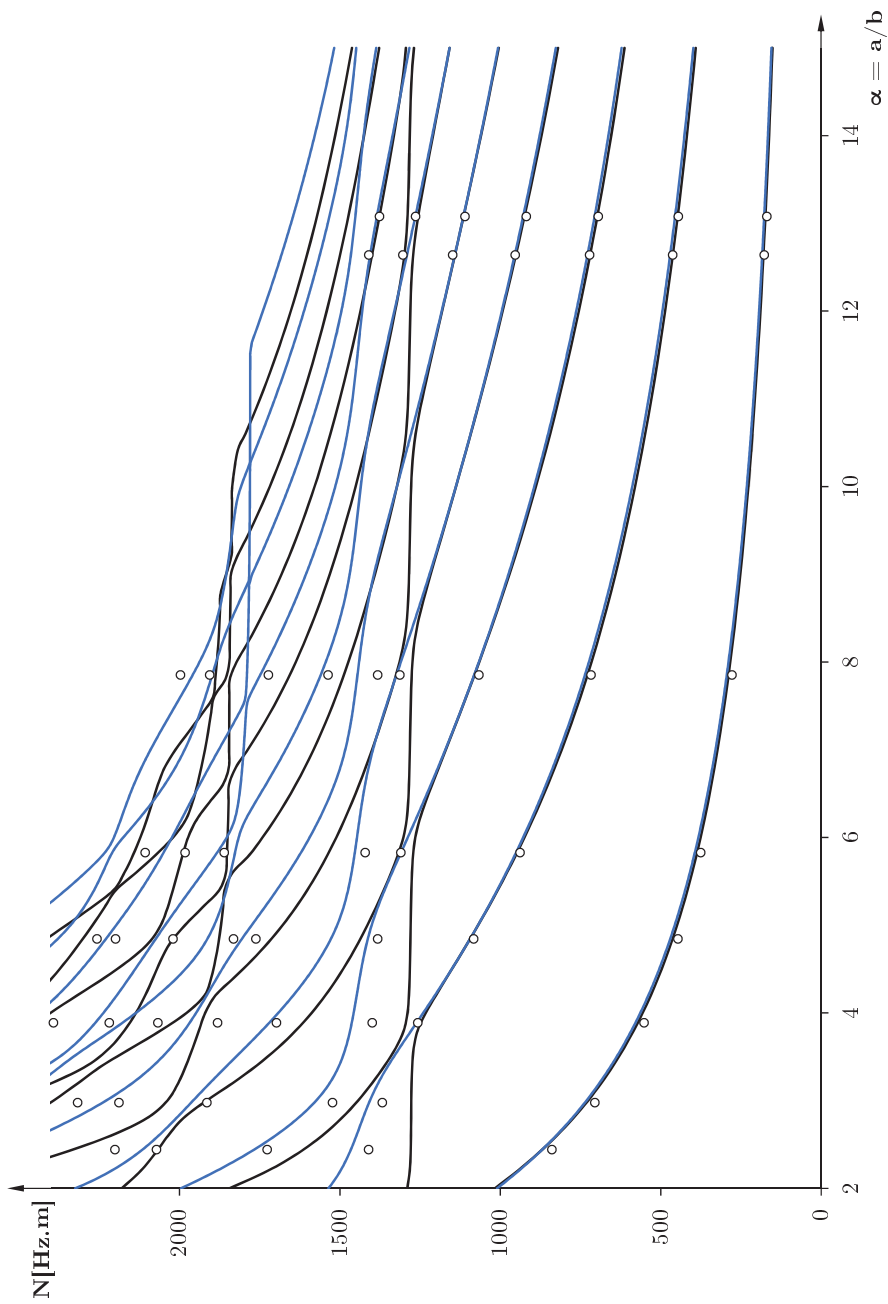
$$\det(\mathbf{M_E}(\Omega, \alpha)) = 0. \quad (3.102)$$

Tato závislost představuje frekvenční rovnici, jejíž kořeny určují vlastní poměrnou frekvenci kruhové desky Ω jako funkci poměru jejich rozměrů $\alpha = a/b$.

Rovnice (3.99) a (3.102) tvoří úplný systém aproximačních vztahů pro popis vlastních vázaných kmitů kruhové izotropní elastické desky.

Protože má piezoelektrická keramika rozdílná Poissonova čísla σ_{12}^E a σ_{13}^E , je nutné volit efektivní hodnotu σ^E mezi těmito dvěma hodnotami. Např. v práci [87] bylo modelováno frekvenční spektrum keramiky PCM40 ($\sigma_{12}^E = 0,30$ a $\sigma_{13}^E = 0,42$) s výpočtovou hodnotou $\sigma^E = 0,35$. Velikost σ^E byla při opakovaných výpočtech postupně upřesňována tak, aby teoretické křivky co nejlépe aproximovaly naměřené hodnoty na nízkých frekvencích a v blízkosti teoretické základní tloušťkové rezonance.

Na obr. 3.9 jsou znázorněna frekvenční spektra keramiky NCE40 (ekvivalentní keramice PCM40) vypočtená pomocí elastického modelu (3.99), (3.102) a úplného piezoelektrického modelu (3.83), (3.90) a jejich porovnání s naměřenými hodnotami [87]. V diagramu jsou rezonanční frekvence vyneseny ve tvaru frekvenční konstanty N vztažené na tloušťku desky $2b$. Přesnost elastického řešení je postačující pro nízké frekvence, s rostoucí frekvencí Ω a pro menší poměry α přesnost výsledků klesá.



Obr. 3.9: Porovnání frekvenčního spektra NCE40 vypočteného pomocí elastického modelu (černá) a úplného piezoelektrického modelu (modrá), naměřené hodnoty (body) [87]

Kapitola 4

Spektrální vlastnosti

Pod pojmem spektrální vlastnosti rozumíme závislost modálních parametrů rezonátoru (rezonanční frekvence, tvar kmitu a modální tlumení) na poměru rozměrů $\alpha = a/b$ [88]. Při jejich studiu použijeme výpočtové modely uvedené v předchozí kapitole. Analytické rovnice jsou odvozeny za předpokladu zanedbání ztrát v rezonátoru a neuvažují vliv modálního tlumení (činitel jakosti $Q \rightarrow \infty$). Dále se proto omezíme pouze na rezonanční frekvence a poměrné tvary kmitu.

Modální parametry jsou výrazně ovlivněny disperzním charakterem prostředí v rezonátoru a závislostí jednotlivých vlnových čísel na frekvenci. V této kapitole nejprve porovnáme jednorozměrné a dvojrozměrné aproximační modely kmitání a stanovíme rozsah jejich platnosti. Dále popíšeme disperzní závislost určující chování vlnových čísel, průběh frekvenčního spektra a základní skupiny tvarů kmitu.

Teoretické závislosti jsou uvedeny pomocí příkladů pro keramiku BaTiO₃ a tvrdou a měkkou PZT keramiku Noliac NCE40 a NCE51. Materiálové konstanty použité pro výpočet obsahuje příloha D.

Významnými frekvencemi ve spektru jsou mezní frekvence prostých tloušťkových módů nekonečné desky TSt a sTSh. Jejich poměrné hodnoty vypočtené s použitím vztahů (2.2) a (3.79) jsou

$$\Omega_{\text{TSt}} = \eta b \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{c_{33}^D}{c_{55}^E}}, \quad (4.1)$$
$$\Omega_{\text{sTSh}} = 2,$$

kde poměrné vlnové číslo ηb získáme řešením rovnice (3.32).

Frekvence prostého tloušťkově rozpínavého módu nekonečné desky TSt je shodná s frekvencí prostého tloušťkového módu kruhové desky TE, protože oba případy vycházejí ze stejného předpokladu jednoosé napjatosti ve směru tloušťky.

Charakter disperzní závislosti a tím i průběh frekvenčního spektra je výrazně ovlivněn poměrem mezních frekvencí Ω_{TSt} a Ω_{sTSh} , který lze vyjádřit z poměru materiálových konstant. Pro izotropní elastické desky odpovídá kritický poměr $\Omega_{\text{TSt}}/\Omega_{\text{sTSh}} = 1$ meznímu Poissonovu číslu $\sigma^E = 1/3$ [29]. V případě piezoelektrických desek buzených

elektrickým polem je kritický poměr vyjádřen rovnicí

$$\frac{\Omega_{\text{TSt}}}{\Omega_{\text{sTSh}}} = \frac{\eta b}{\pi} \sqrt{\frac{c_{33}^D}{c_{55}^E}} = 1. \quad (4.2)$$

4.1 Porovnání výpočtových modelů

Na obr. 4.1 je na příkladu kruhových rezonátorů z BaTiO₃ znázorněno porovnání frekvenčních křivek, vypočtených pomocí jednorozměrných aproximačních rovnic odvozených v kapitole 3.1, s úplným frekvenčním spektrem určeným řešením rovnic (3.83) a (3.90). Všechny frekvence jsou vyjádřeny shodně v normalizovaném tvaru Ω .

Úplné frekvenční spektrum je zobrazeno černou barvou a jeho nejnižší frekvenční křivky jsou pro názornost číslovány. Frekvenční křivky prostých módů kmitu mají modrou barvu a jsou označeny

L1 - základní podélný mód tyče, vypočteno pomocí vztahů (3.8) a (3.13),

TE - základní tloušťkový mód kruhové desky, vztahy (3.27) a (3.32),

R'1 - základní radiální mód tyče, vztahy (3.44) a (3.47),

Rn - n-té násobky radiálního módu kruhové desky, vztahy (3.59) a (3.62).

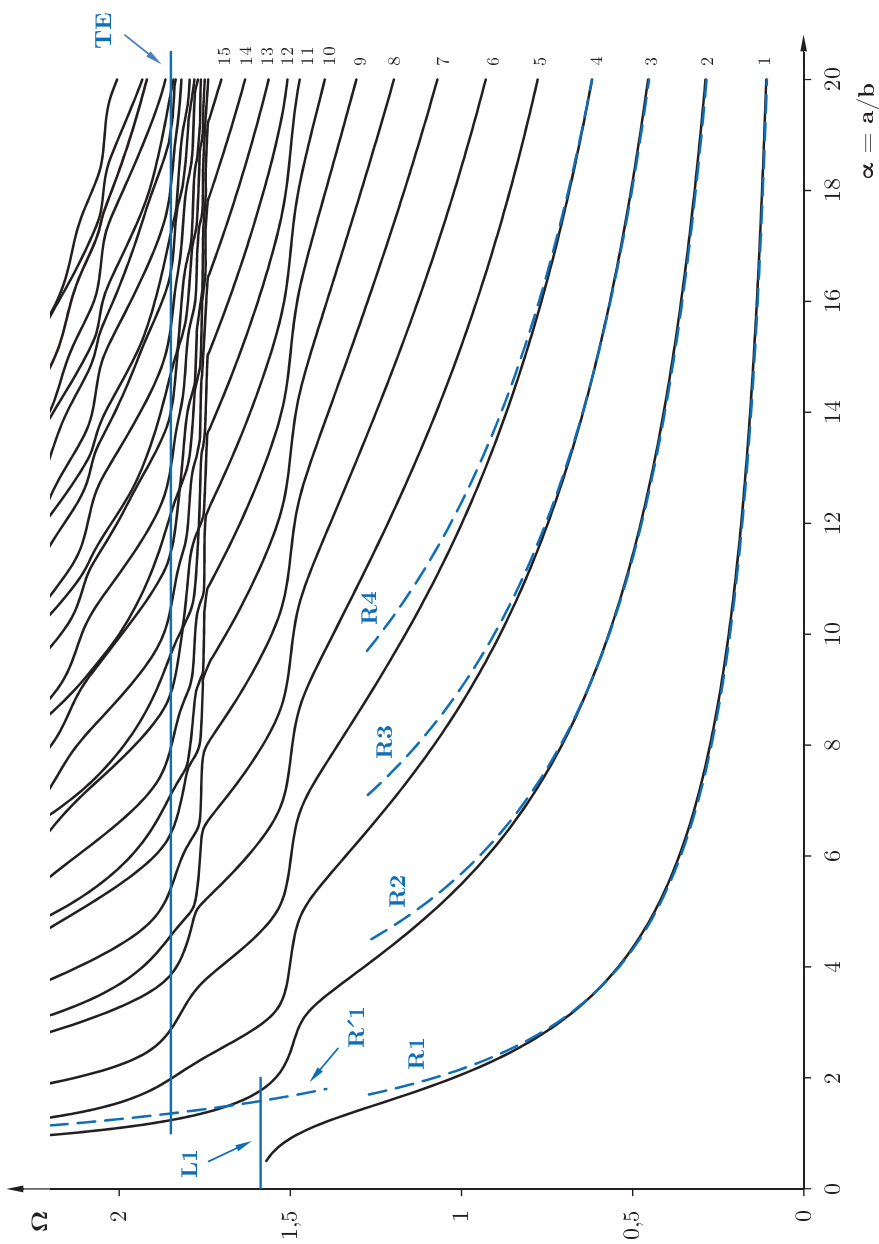
Modely prostých módů kmitu dostatečně aproximují pouze kmitání rezonátorů, jejichž rozměry jsou blízké limitním tvarům (srovnej obr. 1.2 a 4.1). V úplném spektru se vyskytuje velké množství dalších módů, jejichž vlnová čísla jsou v určitém poměru k rozměrům kruhového rezonátoru a u kterých nelze zanedbat prostorový stav napjatosti. Pro popis těchto módů je nutné použít složitější výpočetní modely.

Frekvenční křivky prostých radiálních módů Rn velmi dobře aproximují radiální kmity kruhových desek s vyšším poměrem α . S klesajícím α se projevuje disperze vlnění a snižuje se jeho fázová rychlost. Jednorozměrný model neuvažuje vliv tloušťky na šíření vlnění, předpokládá vlnovou délku $\lambda \gg 2b$, a proto jeho přesnost postupně klesá. Disperze se projevuje dříve u vyšších radiálních módů, které mají menší poměr vlnové délky vzhledem k tloušťce desky.

Frekvence základního tloušťkového kmitu kruhové desky se pro vyšší poměry α blíží frekvenci prostého tloušťkového kmitu TE. Podrobnější rozbor spektra v okolí tloušťkové rezonance je proveden v kap. 5.3.

Nejnižší frekvenční křivka úplného spektra se pro tenké dlouhé tyče ($\alpha \rightarrow 0$) limitně blíží k frekvenci základního podélného módu L1. Podobně směřuje druhá frekvenční křivka ke 3. násobku podélného módu L3 a třetí křivka k 5. násobku podélného módu L5 [89].

Radiální módy R' se vyskytují u tenkých tyčích a odpovídají jim vysoké hodnoty poměrné frekvence Ω , která již leží mimo rozsah platnosti použité dvourozměrné aproximace. V uvedeném frekvenčním rozsahu proto nelze křivku R' porovnat s frekvenčními křivkami úplného spektra.



Obr. 4.1: Úplné frekvenční spektrum kruhových rezonátorů z BaTiO₃ (černá), porovnání s frekvenčními křivkami pro prosté módy kmitu (modrá, L - podélný mód tyče, TE - tloušťkový mód kruhové desky, R' - radiální mód tyče, R - radiální mód kruhové desky)

Maximální poměrná frekvence Ω , pro kterou je úplné frekvenční spektrum vypočtené pomocí aproximačních rovnic n -tého řádu platné s akceptovatelnou tolerancí, se stanovuje porovnáním disperzních křivek určených řešením přesných a aproximačních pohybových rovnic. Pro materiály s nízkým koeficientem elektromechanické vazby se v literatuře obecně udává rozsah platnosti $0 \leq \Omega \leq n + 1/2$ [77]. U piezokeramických materiálů jsou rovnice platné do okolí nejvyššího uvažovaného módu (Ω_{TSt} nebo Ω_{sTSh}) [79] s odchylkou vypočtených a naměřených hodnot v řádu jednotek procent [36]. Pro zvýšení frekvenčního rozsahu by bylo nutné použít aproximaci 4. řádu a v rozvoji (3.73) uvažovat také složky posunutí $u_3^{(3)}$ a $u_r^{(4)}$, které odpovídají tloušťkově rozpínávému módu 3. řádu TSt3 a tloušťkově střižnému módu 4. řádu TSh4. Pro kruhové rezonátory s malým poměrem α lze také použít některou z teorií vyšších řádů pro roztažné kmity tyčí [32], [39] nebo [90].

4.2 Disperzní závislost

Závislost vlnových čísel na frekvenci (disperzní závislost) určuje, jaké módy kmitu budou v dané frekvenční oblasti vybudeny a jaký bude jejich výsledný tvar, složený z příspěvků dílčích vlnění. Proto je nejdříve nutné se podrobně seznámit s chováním kořenů disperzní rovnice.

Disperzní rovnice (3.83) je kubická rovnice pro Ω^2 a kvartická pro $\bar{\xi}^2$. Rezonanční frekvence je vždy reálná a kladná a pro zvolené Ω jsou řešením disperzní rovnice dvě čtveřice poměrných vlnových čísel $\pm \bar{\xi}_i$, $i = 1$ až 4. Vlnová čísla mohou být obecně reálná, komplexní nebo ryze imaginární a popisují čtyři složky elektroelastického vlnění v nekonečně rozlehlé desce. Pokud současně vyhovují okrajovým podmínkám na hranicích desky, vzniká v rezonátoru stojaté vlnění a zvolená hodnota Ω je rezonanční frekvencí. Řešení disperzní rovnice v definovaném rozsahu frekvencí vyjadřujeme graficky ve formě disperzních křivek.

Charakter disperzní závislosti závisí na poměru mezních frekvencí prostých módů $\Omega_{\text{TSt}}/\Omega_{\text{sTSh}}$. Rozdíl si ukážeme na příkladu piezoelektrické keramiky BaTiO₃ (obr. 4.2, $\Omega_{\text{TSt}} < \Omega_{\text{sTSh}}$) a NCE51 (obr. 4.3, $\Omega_{\text{TSt}} > \Omega_{\text{sTSh}}$).

Disperzní závislost obsahuje čtyři disperzní křivky pro čtyři vlnová čísla $\bar{\xi}_i$, která odpovídají výchozím módům E, TSt a sTSh a elektrickému poli $\Phi^{(2)}$. Zobrazené křivky nejsou jediné, další řešení disperzní rovnice znázorníme zrcadlením křivek podle rovin ($\text{Re } \bar{\xi} = 0, \Omega$) a ($\text{Im } \bar{\xi} = 0, \Omega$). Hodnotu normalizované fázové rychlosti $\Omega/\bar{\xi}$ příslušné vlny při zvolené frekvenci odečteme ze směrnice přímky, spojující odpovídající bod na křivce s počátkem grafu.

Nejdříve popíšeme disperzní závislost pro případ $\Omega_{\text{TSt}} < \Omega_{\text{sTSh}}$ na obr. 4.2. Průběh disperzních křivek je vymezen třemi mezními frekvencemi Ω^* , Ω_{TSt} a Ω_{sTSh} .

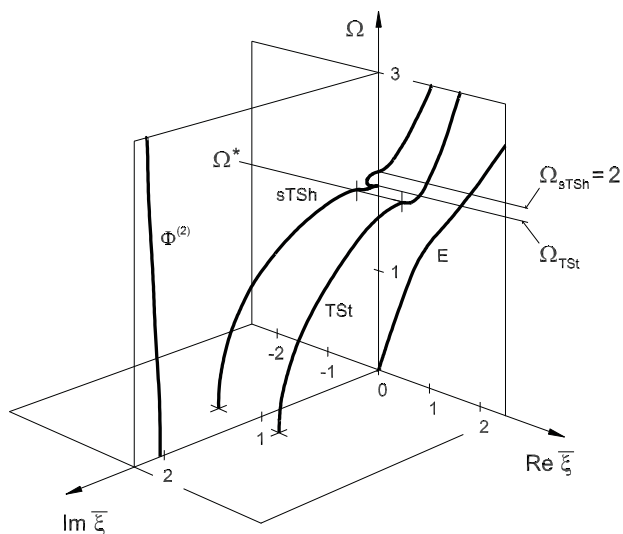
- Nejnižší podélný mód E nemá mezní frekvenci a jeho disperzní křivka vychází z počátku. Vlnové číslo je pro všechny frekvence reálné a vzhledem k ostatním módům postupuje deskou nejpomalejší rychlostí. U kruhových disků řešených ve válcových souřadnicích odpovídá podélný mód E radiálnímu módu.
- Vlnové číslo příslušející elektrickému poli $\Phi^{(2)}$ má ve spektru vždy ryze imaginární hodnotu.

- Charakter se vlnových čísel módů TSt a sTSh se v závislosti na frekvenci mění:

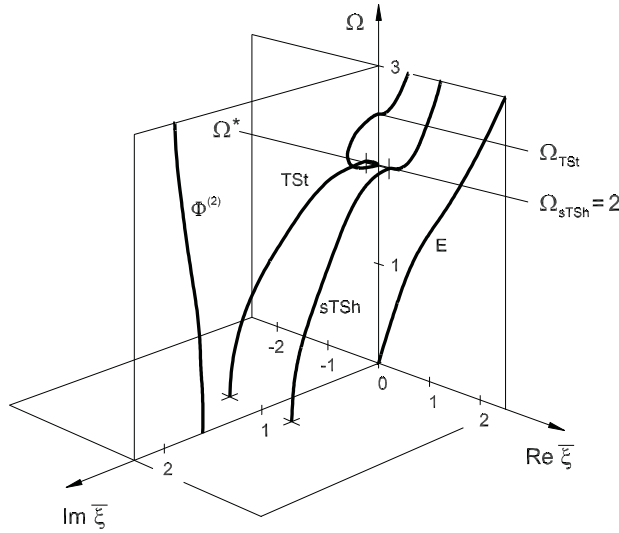
- 1) Pro nízké frekvence $\Omega < \Omega^*$ jsou vlnová čísla TSt a sTSh komplexně sdružená.
- 2) Při frekvenci Ω^* je jejich imaginární část nulová a dosahují minimální reálné hodnoty.
- 3) V intervalu $\Omega^* < \Omega < \Omega_{\text{TSt}}$ jsou obě vlnová čísla reálná.
- 4) Pro $\Omega_{\text{TSt}} < \Omega < \Omega_{\text{sTSh}}$ je vlnové číslo TSt reálné, zatímco číslo sTSh je ryze imaginární a prochází tzv. imaginární smyčkou.
- 5) Po překročení mezní frekvence Ω_{sTSh} jsou obě vlnová čísla reálná.

Průběh disperzní závislosti pro případ $\Omega_{\text{TSt}} > \Omega_{\text{sTSh}}$ na obr. 4.3 je analogický. Dochází pouze k záměně pořadí mezních frekvencí Ω_{TSt} a Ω_{sTSh} a k záměně disperzních větví pro vlnová čísla módů TSt a sTSh.

Pro limitní případ rezonátorů s materiálovými parametry vyhovujícími rovnici (4.2), který pro piezoelektrickou keramiku zatím nebyl v literatuře studován, by se obě mezní frekvence $\Omega_{\text{TSt}} = \Omega_{\text{sTSh}}$ sloučily v jednu a z průběhu disperzních křivek by vymizela imaginární smyčka.



Obr. 4.2: Disperzní křivky nekonečné desky z BaTiO₃, $\Omega^* = 1,7447$ a $\Omega_{\text{TSt}} = 1,8489$



Obr. 4.3: Disperzní křivky nekonečné desky z NCE51, $\Omega^* = 1,9907$ a $\Omega_{\text{TSt}} = 2,4954$

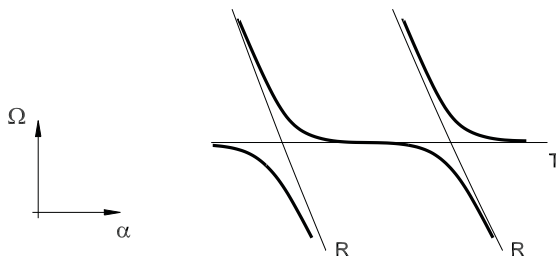
4.3 Frekvenční spektrum

Vlnová čísla $\bar{\xi}$ vyhovující okrajovým podmínkám (3.90) na obvodu kruhového rezonátoru definují rezonanční frekvence Ω pro zvolený poměr rozměrů α . Výsledné řešení pak tvoří frekvenční spektrum rezonátoru složené z jednotlivých frekvenčních křivek.

Při studiu frekvenčního spektra hovoříme o *vazbě* módů kmitu. Termín vazba užíváme ve dvou odlišných významech:

a) Vzájemná vazba módů kmitu ve smyslu vazby několika elektroelastických vln. Výchylky jednotlivých vln jsou vázány elasticky (přes elastický modul $c_{\lambda\mu}$) a v určitých frekvenčních oblastech může být jejich vazba zesílena vlivem okrajových podmínek. Na obr. 4.4 je schématicky znázorněn vliv vazby radiálních módů (R) s tloušťkovými (T) na průběh frekvenčního spektra. Frekvence radiálních módů jsou nepřímo úměrné průměru desky $2a$ a ve zobrazení $\Omega(\alpha)$ jim odpovídají klesající frekvenční křivky. Frekvence tloušťkových módů jsou nepřímo úměrné tloušťce $2b$ a jejich frekvenční křivky jsou přímky rovnoběžné s vodorovnou osou. Tenké čáry na obrázku představují spektrum těchto módů pro teoretický případ, ve kterém by se šířily nezávisle a nebyly vzájemně vázány. Vlivem vazby se frekvenční křivky radiálních kmitů deformují a vznikají charakteristické vodorovné úseky označované jako *terasovitý* (*terrace-like*) průběh. Čím je vazba s tloušťkovým módem silnější, tím jsou ve spektru vodorovné úseky výraznější.

b) Vazba módu kmitu s elektrickým polem ve smyslu vybuditelnosti vlastního kmitu o frekvenci Ω pomocí elektrického pole. Výchylka vlny je vázána piezoelektricky s elektrickým potenciálem (přes piezoelektrický modul $e_{i\lambda}$). Pro módy vázané s elektrickým polem je často používán termín piezoelektricky aktivní mód. Velikost vazby popisuje koeficient elektromechanické vazby k .



Obr. 4.4: Schématické znázornění vlivu vazby radiálních (R) a tloušťkových (T) módů na tvar frekvenčního spektra

Vazba módů kruhových rezonátorů je zřejmá z tvaru pohybových rovnic (3.76). Názorně ji lze také pozorovat z charakteru posunutí v jednotlivých tvarech kmitu. Pro výpočet elektromechanické vazby v úplném frekvenčním spektru kruhových rezonátorů zatím nebyl odvozen potřebný obecný analytický model, a tak se tato hodnota obvykle určuje experimentálně nebo numericky pomocí metody konečných prvků.

Podobně jako u disperzních křivek je průběh frekvenčního spektra závislý na poměru mezních frekvencí prostých tloušťkových módů Ω_{TSt} a Ω_{sTSh} . Oba případy frekvenčních spekter odpovídající disperzním závislostem na obr. 4.2 a 4.3 jsou zobrazeny na obr. 4.5 a 4.6.

Nejdříve popíšeme průběh frekvenčního spektra pro případ $\Omega_{TSt} < \Omega_{sTSh}$, který je pro kruhovou desku z BaTiO₃ znázorněn na obr. 4.5. Stejně jako u disperzních závislostí je tento průběh vymezen několika mezními frekvencemi.

- 1) V oblasti nejnižších frekvencí se ve spektru vyskytují pouze radiální módy a jejich vyšší násobky (tvar kmitu je znázorněn na obr. 4.8a). Základní radiální mód disku R1 přechází pro malé hodnoty α postupně do základního podélného módu tyče L1.
- 2) Při frekvenci $\Omega = \Omega_e \approx 1,5$ se objevují vodorovné terasovité úseky, ve kterých rezonanční frekvence příliš nezávisí na poměru α . V této oblasti se vyskytují hranové módy, charakterizované největší výchylkou na okraji disku, postupně se zmenšující směrem k jeho středu [23]. Tvar kmitu je znázorněn na obr. 4.8b. Hranové módy vznikají v důsledku vazby radiálních módů s vyššími módy TSt a sTSh, které mají v této oblasti komplexní vlnová čísla. Pro hranové módy kmitající v okolí frekvence Ω_e zatím nebyl publikován analytický výpočetní model.
- 3) Ve frekvenční oblasti $\Omega_e < \Omega < \Omega^*$ jsou ve spektru zastoupeny pouze radiální módy. Jejich vazba s elektrickým polem je obvykle slabá [42].
- 4) Při frekvenci Ω^* (vlnová čísla módů TSt a sTSh mají minimální reálnou hodnotu) vzniká další terasovitá část spektra, omezená shora mezní frekvencí prostého tloušťkového módu Ω_{TSt} . V pásmu $\Omega^* < \Omega < \Omega_{TSt}$ se vyskytuje řada slabých rezonancí, vzniklých důsledkem vazby radiálních módů s neharmonickými násobky módů TSt a sTSh majících reálná vlnová čísla. S rostoucím α jsou tyto módy stále více tlumené a dominantním módem zůstává silná tloušťková rezonance v blízkosti frekvence Ω_{TSt} [33], [42].
- 5) V blízkosti mezní frekvence prostého tloušťkového módu nekonečné desky Ω_{TSt} se vyskytuje základní tloušťkově rozpínavý mód kruhového rezonátoru, jehož frekvence

se pro tenké disky ($\alpha \gg 1$) limitně shora blíží hodnotě Ω_{TSt} . Tvar kmitu tloušťkově rozpínavého módu je uveden na obr. 4.8e.

- 6) Ve frekvenční oblasti $\Omega > \Omega_{\text{TSt}}$ nad tloušťkovou rezonancí se vyskytují vysoko-frekvenční radiální módy vázané s vyššími módy TSt a sTSh. Příklad tvaru kmitu je znázorněn na obr. 4.8d.
- 7) Další terasovitý průběh spektra se pro vyšší poměry α objevuje v blízkosti mezní frekvence Ω_{sTSh} . Vázané kmity mají v této oblasti charakteristický tloušťkově střížný tvar znázorněný na obr. 4.8c. Vazba těchto módů s elektrickým polem je obvykle slabá.

Ve druhém případě $\Omega_{\text{TSt}} > \Omega_{\text{sTSh}}$ má frekvenční spektrum průběh znázorněný na obr. 4.6 pro kruhovou desku z NCE51. V oblasti nízkých frekvencí je charakter spektra stejný. V okolí $\Omega_e \approx 1,5$ se také objevuje terasovitý průběh odpovídající výskytu hranových módů. Další terasovitá část spektra vzniká při frekvenci Ω^* , na rozdíl od prvního případu ale není shora ohraničena mezní frekvencí prostého tloušťkově střížného módu Ω_{sTSh} ⁴ a s rostoucím poměrem α ve spektru přibývá počet „teras“. V blízkosti frekvence Ω_{TSt} dochází k silné vazbě radiálních módů s tloušťkovými a vzniká další terasovitý průběh. Pro tenké disky ($\alpha \gg 1$) se spodní část terasovitého spektra limitně shora blíží hodnotě Ω_{TSt} . Okolí tloušťkově rozpínavého módu je pro vyšší poměry α detailně znázorněno na obr. 5.6.

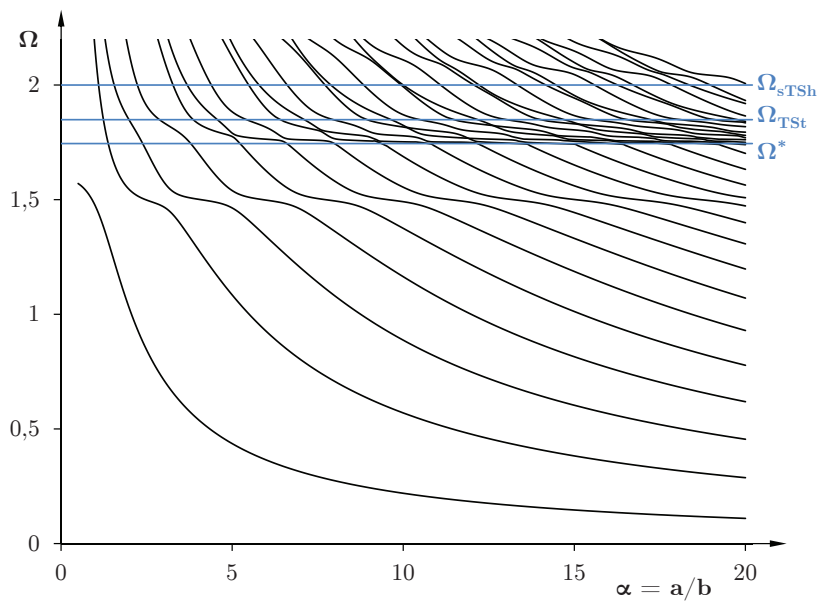
V nízkofrekvenční oblasti mají reálné vlnové číslo pouze podélné módy typu E a ve spektru převládá podélný (radiální) charakter kmitů. Po překročení mezních frekvencí Ω^* , Ω_{TSt} , resp. Ω_{sTSh} se začínají deskou volně šířit také vysokofrekvenční tloušťkové módy typu TSt a sTSh a jejich neharmonické násobky, které se všechny váží s nízkofrekvenčními podélnými módy. Důsledkem je zvýšení počtu módů ve spektru, patrné na obr. 4.5 a 4.6 jako zvýšení hustoty frekvenčních křivek nad mezními frekvencemi.

Existence komplexních větví v disperzním spektru na obr. 4.2 a 4.3 způsobuje, že vlnová čísla módů TSt a sTSh mají reálné minimum při své nenulové hodnotě $\bar{\xi} \neq 0$ a terasovité spektrum vzniká již při frekvenci Ω^* . To je významný rozdíl proti vlnovým číslům vázaných ohybových a tloušťkově střížných kmitů desek [91], [92], které mají reálné minimum vždy při mezních kmitočtech prostých tloušťkových módů, kde je vlnové číslo nulové ($\bar{\xi} = 0$) a při kterých vzniká terasovité spektrum.

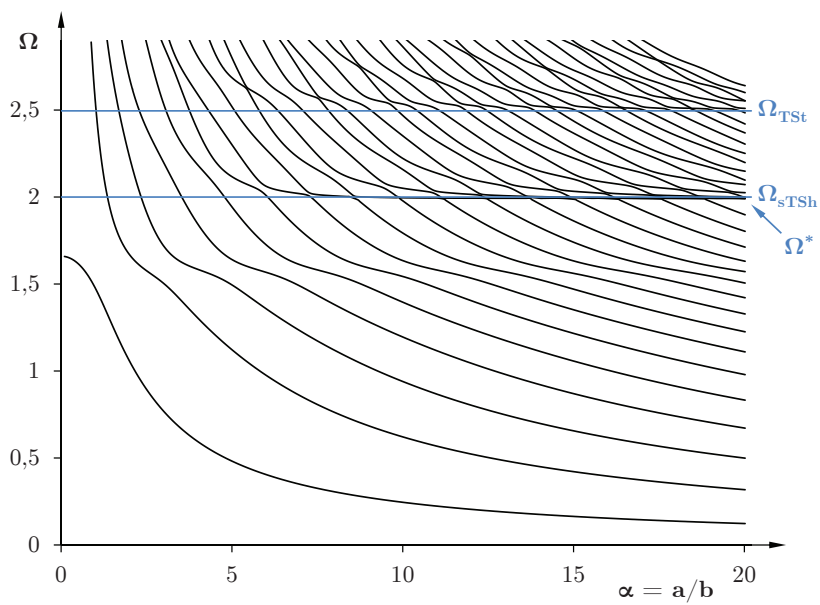
Obecný charakter frekvenčního spektra uvedený pro oba případy $\Omega_{\text{TSt}} \gtrless \Omega_{\text{sTSh}}$ je platný pro všechny kruhové piezokeramické rezonátory. Skutečný průběh a velikost vazeb mezi dílčími módy závisí na vlastnostech použitého materiálu. Například u rezonátorů z keramiky NCE51 (obr. 4.6) se ukazuje slabší vazba radiálních módů s tloušťkovými v oblasti frekvence hranových módů. Patrné je to z méně výrazného terasovitého spektra v blízkosti $\Omega_e \approx 1,5$ v porovnání se spektrem rezonátorů z BaTiO₃. Rozdíl je zřejmý také z porovnání tvarů kmitu na obr. 4.9, kde je patrná výraznější deformace na okraji disku pro materiál BaTiO₃.

Ve frekvenčním spektru se vedle základních módů blízkých prostým kmitům kruhových rezonátorů vyskytuje velké množství dalších módů. Tyto módy mají různě velkou elektromechanickou vazbu a různé modální tlumení. Pouze některé z módů kmitu mají praktický význam pro reálné použití.

⁴V příkladovém případě NCE51 je frekvence Ω^* blízká Ω_{sTSh} a na diagramu je nelze rozlišit.



Obr. 4.5: Frekvenční spektrum kruhových rezonátorů z BaTiO₃ ($\Omega_{\text{TSt}} < \Omega_{\text{sTSh}}$),
 $\Omega^* = 1,7447$ a $\Omega_{\text{TSt}} = 1,8489$



Obr. 4.6: Frekvenční spektrum kruhových rezonátorů z NCE51 ($\Omega_{\text{TSt}} > \Omega_{\text{sTSh}}$),
 $\Omega^* = 1,9907$ a $\Omega_{\text{TSt}} = 2,4954$

4.4 Tvary kmitu

Módy kruhových rezonátorů vyskytující se ve frekvenčním spektru můžeme podle charakteristického tvaru kmitu rozdělit do pěti základních skupin na radiální (v literatuře označované *R-mode*), hranové (*E-mode* nebo *Eg-mode*), tloušťkově střižné (*TS-mode*), tloušťkově rozpínavé (*TE-mode*) a vysokofrekvenční radiální módy (*A-mode*) [33], [44].

Poměrné tvary kmitu lze vypočítat analyticky s využitím rovnic (3.73), (3.85) a (3.87) a zobrazit je pomocí vhodně zvolené sítě bodů. Při použité aproximaci je tvar kmitu složen z příspěvků složek posunutí $u_r^{(0)}$, $u_3^{(1)}$ a $u_r^{(2)}$, jak je schematicky uvedeno na obr. 4.7. Šedou barvou je vykreslen nedeformovaný tvar, modrou barvou pak maximální posunutí výpočtových bodů při rezonanční frekvenci.

Na obr. 4.8 jsou znázorněny příklady jednotlivých typů vlastních tvarů vypočtené pro kruhový disk z NCE51 s poměrem rozměrů $\alpha = 13$. Zobrazena je polovina průřezu rezonátoru, kde na levé straně obrázku je osa symetrie a na pravé straně je volný okraj.

Skupiny modálních tvarů mají následující typické vlastnosti:

a) Radiální módy (obr. 4.8a) se vyznačují velkým posunutím v radiálním směru spojeném s příčnou deformací ve směru tloušťky. Střední hodnota maximálního (minimálního) posunutí povrchu v tloušťkovém směru je nulová a leží v rovině nedeformovaného tvaru. Počet uzlových kružnic na povrchu rezonátoru odpovídá číselnému násobku základního radiálního módu.

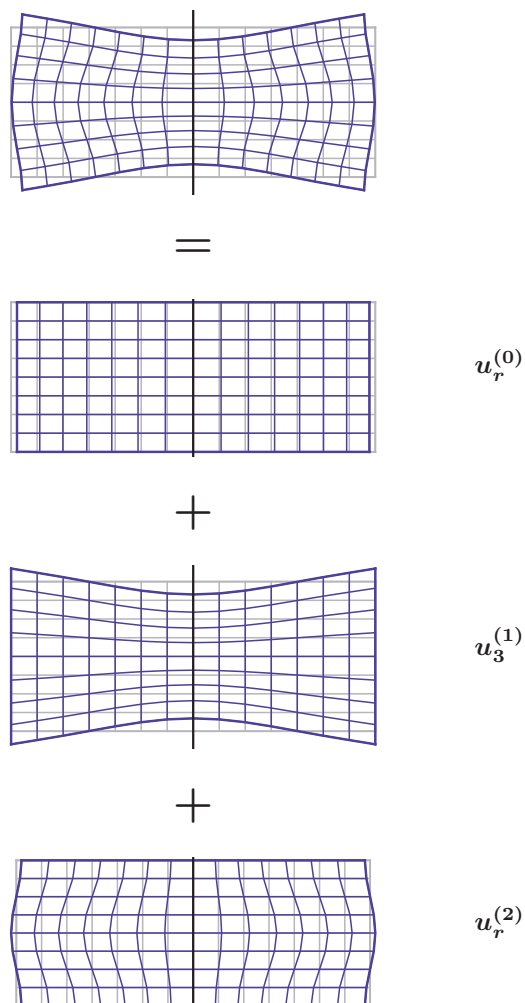
b) Hranové (edge) módy (obr. 4.8b) jsou charakterizovány velkou axiální výchylkou na okraji disku. Vznikají vazbou deskových módů typu E, které mají reálná vlnová čísla, s vyššími módy TSt a sTSh, které mají v dané frekvenční oblasti komplexní vlnová čísla. Vlivem komplexního charakteru vlnových čísel se vyšší módy po odrazu na volném okraji disku postupně utlumí a jejich příspěvek ke tvaru kmitu směrem ke středu rezonátoru klesá [30].

c) Tloušťkově střižné módy (obr. 4.8c) vznikají vlivem vazby deskových módů typu E a sTSh v okolí poměrné mezní frekvence $\Omega_{sTSh} = 2$. Vyznačují se velkou radiální deformací uvnitř disku odpovídající tvaru prostého módu sTSh nekonečné desky. Směrem k okraji disku se radiální posunutí postupně zmenšuje.

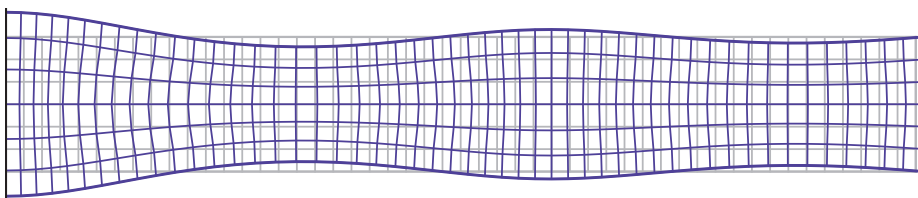
d) Vysokofrekvenční radiální módy (obr. 4.8d) mají podobný charakter kmitu jako radiální módy na obr. 4.8a. Tvar kmitu je ovlivněn vazbou vyšších násobků radiálních módů s vysokofrekvenčními módy typu TSt a sTSh. Radiální posunutí na okrajích disku je malé.

e) Tloušťkově rozpínavé módy (obr. 4.8e) se vyskytují v blízkosti poměrné mezní frekvence Ω_{TSt} . Ve tvaru kmitu převažují výchylky ve směru tloušťky s maximem na ose symetrie disku. Tloušťkové posunutí má podobný charakter jako radiální módy s tím rozdílem, že střední hodnota maximální (minimální) výchylky je posunuta vzhledem k rovině nedeformovaného tvaru.

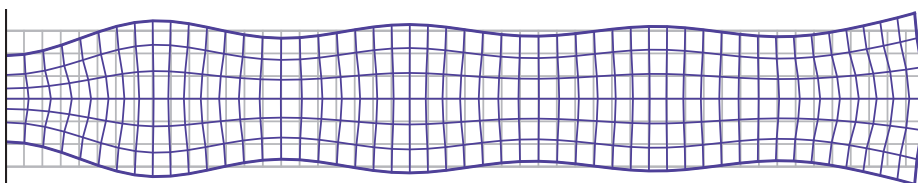
Žádná z uvedených skupin módů nemá jednoduchý tvar s rovnoměrným rozložením výchylky, odpovídající předpokladům jednorozměrných modelů pro prosté módy kmitu (viz obr. 1.2).



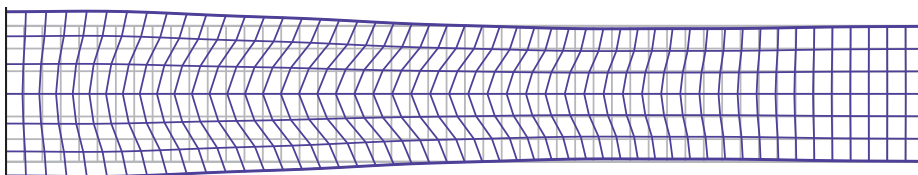
Obr. 4.7: Příspěvek dílčích složek posunutí k celkovému tvaru kmitu. Příklad pro kruhový rezonátor z NCE40 s poměrem rozměrů $\alpha = 2,43$ a $\Omega = 1,6347$



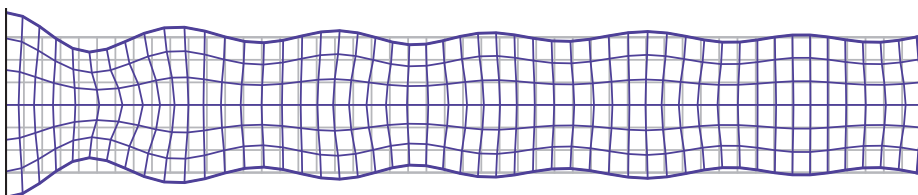
a) radiální mód (mód č. 4, $\Omega = 0,9805$)



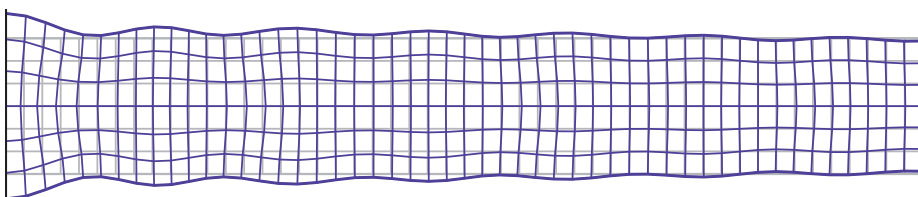
b) hranový mód (mód č. 8, $\Omega = 1,5703$)



c) symetrický tloušťkově střižný mód (mód č. 13, $\Omega = 1,9931$)

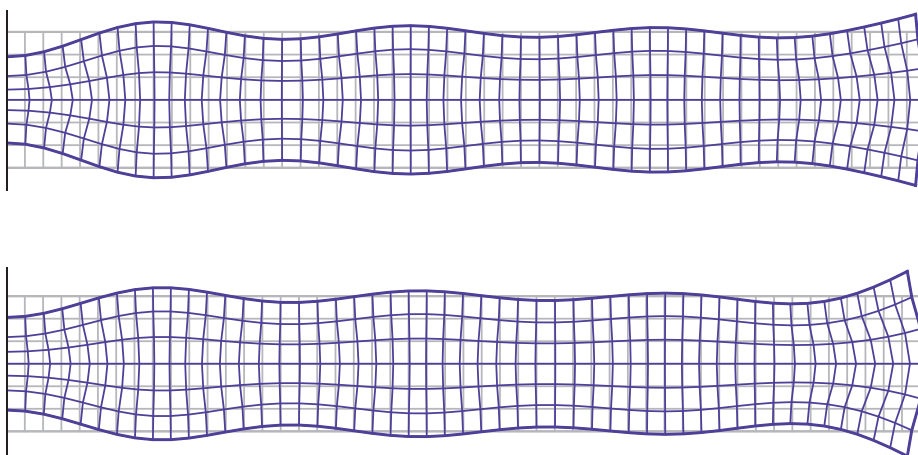


d) vysokofrekvenční radiální mód (mód č. 18, $\Omega = 2,2421$)



e) tloušťkově rozpínavý mód (mód č. 22, $\Omega = 2,5342$)

Obr. 4.8: Základní skupiny módů kruhových rezonátorů a jejich charakteristické tvary kmitu. Vypočteno pro kruhový rezonátor z NCE51 s poměrem $\alpha = 13$, zobrazena je polovina průřezu rezonátoru



Obr. 4.9: Porovnání tvaru kmitu hranového módu rezonátoru s poměrem $\alpha = 13$.
 Nahoře: NCE51 (mód č. 8, $\Omega = 1,5703$), dole: BaTiO₃ (mód č. 8, $\Omega = 1,5038$).
 Zobrazena je polovina průřezu rezonátoru

Kapitola 5

Vybrané problémy spektrálních vlastností

Kruhové rezonátory z piezoelektrické keramiky nacházejí uplatnění v různých oborech vědy a techniky. Každá z aplikací klade specifické požadavky na provedení rezonátoru, které zpravidla přímo souvisejí s jeho spektrálními vlastnostmi.

Prvky v oscilačních a filtračních elektrických obvodech vyžadují stabilitu rezonanční frekvence a optimální šířku pásma s minimálním ovlivněním impedančního spektra parazitními módy.

V akustických převodnicích je požadována vysoká účinnost přenosu podélného akustického vlnění do okolního prostředí. Přenos je nejúčinnější při rovnoměrném pohybu koncových ploch rezonátoru. U vysokofrekvenčních módů povrch kruhového rezonátoru nekmitá rovnoměrně, a proto je nutné znát rozložení rychlostního pole pro stanovení vyzařovací charakteristiky a směrovosti akustického záření.

Zvláštní oblastí je měření materiálových vlastností piezoelektrické keramiky rezonanční metodou. Využívají se kruhové rezonátory s vhodným poměrem rozměrů, které přibližně splňují podmínku jednoosé nebo rovinné napjatosti. Další podmínkou je potlačení vlivu parazitních módů na frekvenční spektrum impedance u vysokofrekvenčních kmitů.

Zásadním krokem při návrhu rezonátoru je volba vhodných rozměrů piezoelektrického výbrusu, který je základním výrobním polotovarem a definuje výchozí spektrální vlastnosti. V některých aplikacích je jeden z rozměrů rezonátorů pevně určen, a pak je nutné optimalizovat ostatní parametry pro dosažení požadovaných vlastností. Vzhledem k rozmanitému složení piezoelektrických keramik lze řadu požadavků splnit také vhodnou volbou materiálu. Dílčí materiálové parametry mohou mít různý vliv na dynamické chování rezonátoru. Vysoký planární koeficient k_p ukazuje na efektivní buzení radiálních kmitů, tyto módy však mohou vlivem elastické vazby nepříznivě ovlivnit chování v oblasti tloušťkových kmitů.

V běžné praxi se vychází ze zjednodušených návrhových vztahů odvozených za předpokladu prostých módů kmitu. Jak jsme ukázali v předchozích kapitolách, platí

tyto vztahy pouze v omezeném rozsahu rozměrů a frekvencí. Požadavky na přesnost návrhu tak vedou k použití pokročilých analytických modelů nebo numerických výpočtů pomocí metody konečných prvků.

Pro spolehlivou aplikaci piezoelektrických rezonátorů je důležitá znalost jejich úplných spektrálních vlastností. V dalším textu se zaměříme na některé problémy související s touto oblastí.

5.1 Základní mód kmitu

Základnímu módu kmitu odpovídá nejnižší frekvenční křivka úplného frekvenčního spektra. Jak je zřejmé např. z obr. 4.1, mění se postupně s rostoucím poměrem α stav napjatosti v rezonátoru z jednoosé na rovinnou napjatost a charakter módu přechází od prostého podélného kmitu tyče L1 do prostého radiálního kmitu kruhové desky R1.

Vedle řady dalších aplikací se základní mód kmitu používá pro stanovení materiálových konstant piezoelektrické keramiky rezonanční metodou. U podélného módu tyče L1 se měřením rezonančního a antirezanančního kmitočtu stanovují přímo konstanty k_{33} , s_{33}^D a s_{33}^E , u radiálního módu disku R1 jsou to k_p , σ_{12}^E , s_{11}^E a s_{12}^E [8].

Podmínkou pro stanovení materiálových konstant je takový tvar vzorku, jehož stav napjatosti je blízký některému z mezních geometrických provedení. Mezinárodní normy [12], [13] předepisují doporučené rozměry pro tyče $\alpha < 0,3$ a pro kruhové desky $\alpha > 10$. Analýza mezních poměrů α pro tyče je provedena například v [68] a pro kruhové desky například v [70].

Vliv rozměrů na stav napjatosti v rezonátoru lze studovat pomocí vlastních tvarů základního módu. Na obr. 5.1 je znázorněna závislost poměrných amplitud módů $u_r^{(0)}$, $u_3^{(1)}$ a $u_r^{(2)}$ (viz obr. 3.7) na poměru rozměrů α . Poměrné amplitudy byly vypočteny pomocí vztahů (3.85b) a (3.87) jako podíl maxim výchylek jednotlivých módů k maximu výchylky módu s největší amplitudou. Jedná se tedy o relativní zastoupení maximálních modálních výchylek při daném α .

Pro srovnání je ve spodní části diagramu na obr. 5.1 zobrazena závislost poměrné rezonanční frekvence Ω na poměru α s limitními frekvenčními křivkami módů L1 a R1. Hodnoty poměrných amplitud $u_r^{(0)}$, $u_3^{(1)}$ a $u_r^{(2)}$ pro vybrané poměry rozměrů α jsou uvedeny v tab. 5.1 a jejich odpovídající tvary kmitu jsou znázorněny na obr. 5.2.

α [1]	0,3	1	1,93	5	10
$u_r^{(0)}$ [1]	0,10	0,37	1,00	1,00	1,00
$u_3^{(1)}$ [1]	1,00	1,00	1,00	0,27	0,13
$u_r^{(2)}$ [1]	0,05	0,17	0,19	0,02	0,01

Tab. 5.1: Poměrné amplitudy složek posunutí $u_r^{(0)}$, $u_3^{(1)}$, $u_r^{(2)}$ při různém poměru rozměrů α . Vypočteno pro kruhový rezonátor z BaTiO₃

V diagramu na obr. 5.1 můžeme sledovat dílčí příspěvky jednotlivých módů na celkovou deformaci rezonátoru, které vlivem elastické vazby určují výsledný tvar kmitu.

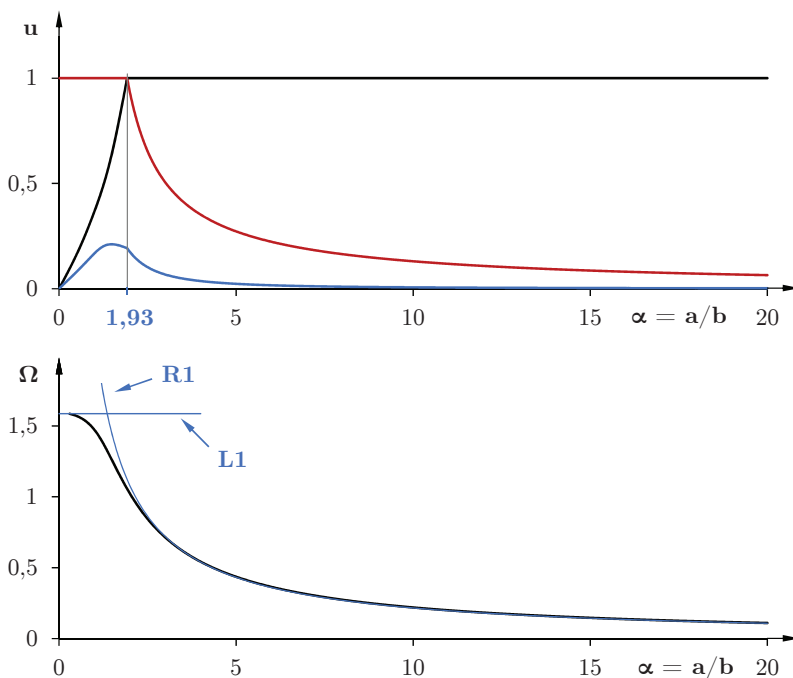
V nejnižší frekvenční oblasti je zastoupení složky $u_r^{(2)}$ malé a v posunutí převládá radiální mód $u_r^{(0)}$ nebo axiální mód $u_3^{(1)}$.

U tenkých tyčí s rozměrem $\alpha < 0,3$ převažuje podélné kmitání $u_3^{(1)}$. Při mezním poměru $\alpha = 0,3$ má příčný mód $u_r^{(0)}$ přibližně desetinou amplitudu.

Tenké desky s rozměrem $\alpha > 10$ mají analogický charakter deformace a v posunutí převažuje radiální kmitání $u_r^{(0)}$. Při mezním poměru $\alpha = 10$ má příčný mód $u_3^{(1)}$ také přibližně desetinou amplitudu.

V rozmezí $0,3 < \alpha < 10$ se projevuje vazba radiálního a axiálního módu kmitu. V uvedeném příkladě BaTiO₃ je vazba největší při poměru rozměrů blízkém $\alpha = 1,93$; kdy mají módy $u_r^{(0)}$ a $u_3^{(1)}$ stejnou relativní amplitudu.⁵ V této oblasti je stav napjatosti vzdálený od jednoosé nebo rovinné napjatosti, jak je také zřejmé z odpovídajícího tvaru kmitu na obr. 5.2c.

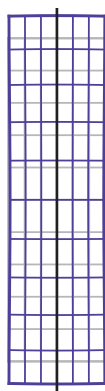
Podobná analýza vázaných tvarů kmitu základního módu je provedena také v [52]. Použit je model se dvěma stupni volnosti pro radiální a axiální kmit, vliv módu $u_r^{(2)}$ na tvar kmitu je zanedbán.



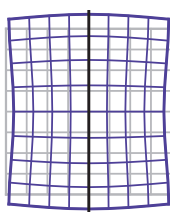
Obr. 5.1: Závislost modálních parametrů základního módu kruhového rezonátoru na poměru rozměrů α . Vypočteno pro kruhový rezonátor z BaTiO₃.

Nahoře: Poměrné amplitudy složek posunutí $u_r^{(0)}$ (černá), $u_3^{(1)}$ (červená) a $u_r^{(2)}$ (modrá). Dole: Poměrná rezonanční frekvence Ω (černá), frekvenční křivky podélného módu tyče L1 a radiálního módu disku R1 (modrá)

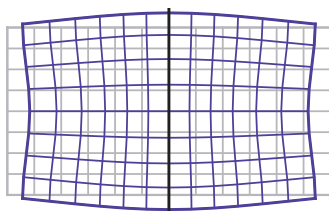
⁵Pro keramiku NCE40 je tento poměr přibližně $\alpha = 2,41$; pro keramiku NCE51 přibližně $\alpha = 2,45$.



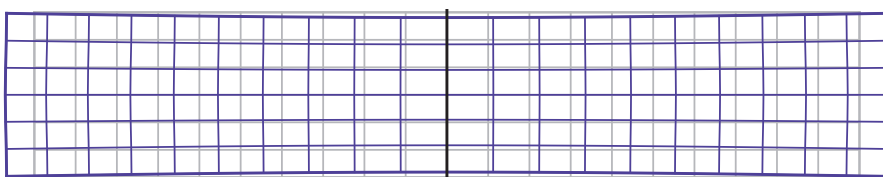
a) $\alpha = 0,3$



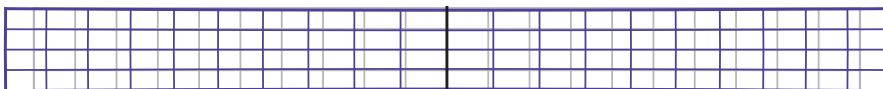
b) $\alpha = 1$



c) $\alpha = 1,93$



d) $\alpha = 5$



e) $\alpha = 10$

Obr. 5.2: Tvary kmitu základního módu kruhového rezonátorů s různým poměrem rozměrů α . Vypočteno pro kruhový rezonátor z BaTiO_3

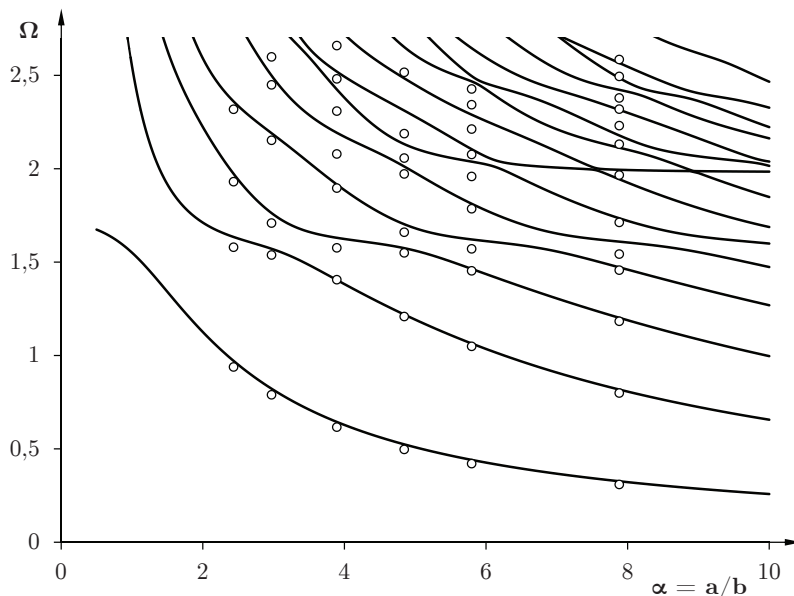
5.2 Spektrální vlastnosti tlustých disků

Pojem „tlustý disk“ není v literatuře přesně specifikován. V našem případě vyjdeme z požadavků norem [12], [13] a za tlusté disky označíme kruhové rezonátory s poměrem rozměrů v rozmezí $1 < \alpha < 10$, kde oba rozměry (průměr $2a$ a tloušťka $2b$) jsou stejného řádu. V uvedeném rozsahu je nutné v rezonátoru uvažovat prostorový stav napjatosti a nelze použít modely prostých kmitů. Výjimkou je základní radiální mód R1 pro vyšší poměry α , jak je zřejmé například z obr. 4.1.

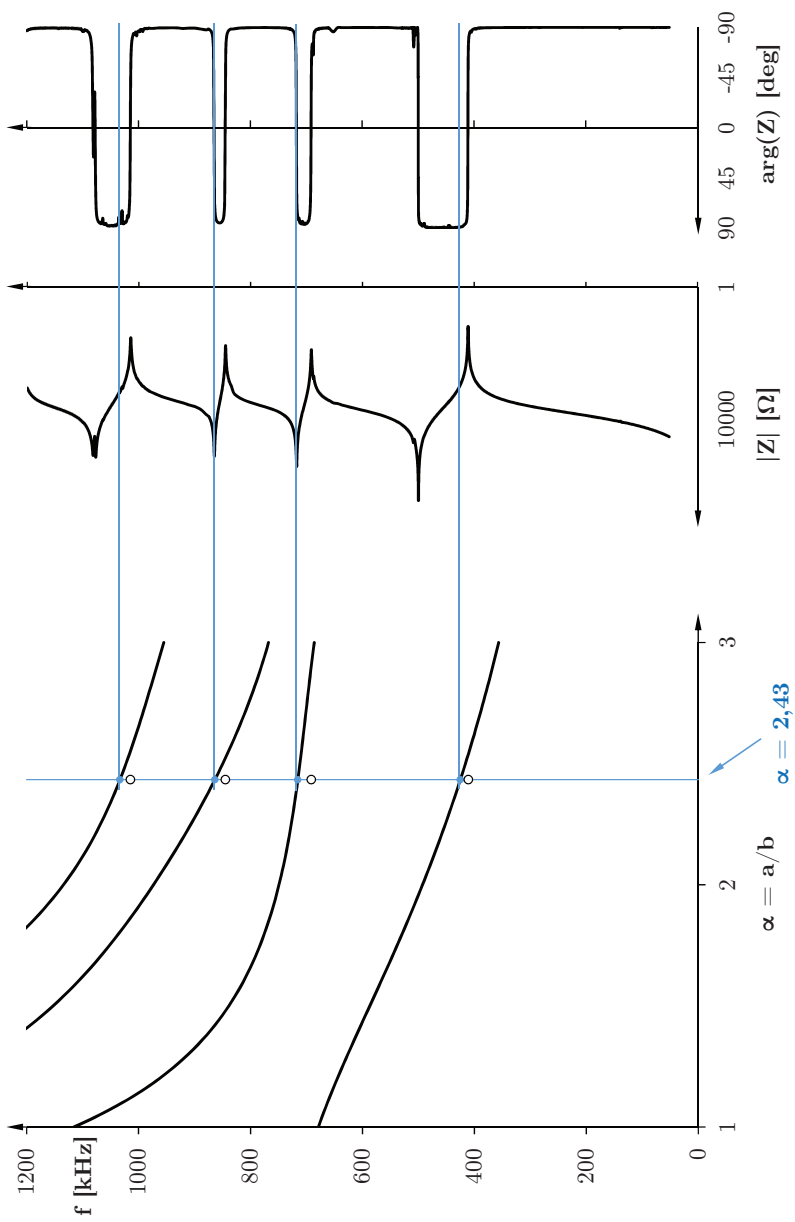
Frekvenční spektrum tlustých disků z NCE40 a jeho porovnání s naměřenými hodnotami je znázorněno na obr. 5.3. Na obr. 5.4 je kombinovaný diagram, který ukazuje souvislost spektra frekvenčních křivek s frekvenčním spektrem impedance pro kruhový rezonátor s poměrem $\alpha = 2,43$. Z porovnání je patrná obvyklá odchylka rezonančních frekvencí keramických rezonátorů od teoretické hodnoty. V uvedeném případě jsou naměřené hodnoty přibližně o 3 % nižší a vypočtené rezonanční frekvence 2. a 3. módu jsou v blízkosti naměřených antirezonančních frekvencí.

Tvary kmitu kruhového rezonátoru s poměrem $\alpha = 2,43$ jsou znázorněny na obr. 5.5. Rozložení výchylek odpovídá výrazné vazbě radiálních a tloušťkových módů, která je důsledkem srovnatelných velikostí průměru a tloušťky. Tvar kmitu na obr. 5.5b má charakter hranového módu.

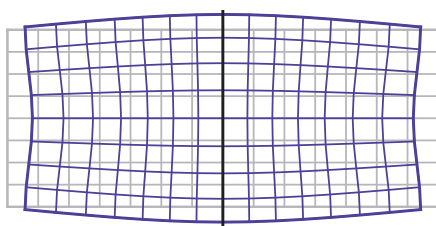
U tlustých disků se ve spektru nevyskytuje mód, který by bylo možné označit jako základní tloušťkovou rezonanci. Zejména pro nižší hodnoty α je ve spektru zastoupeno několik izolovaných módů s vyšším koeficientem elektromechanické vazby, jak je zřejmé také z průběhu impedance na obr. 5.4.



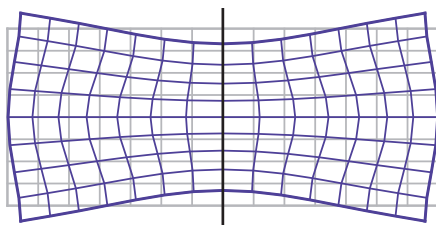
Obr. 5.3: Frekvenční spektrum tlustých disků z NCE40, naměřené hodnoty (body) [87]



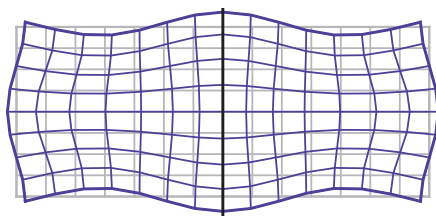
Obr. 5.4: Porovnání frekvenčního spektra tlustého disku s naměřenou impedancí [87], kruhový rezonátor z NCE40, $\varnothing 4,99$ mm, tloušťka 2,05 mm, $\alpha = 2,43$



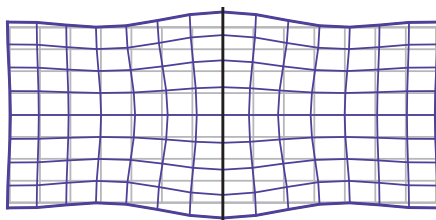
a) mód č. 1, $\Omega = 0,9714$



b) mód č. 2, $\Omega = 1,6347$



c) mód č. 3, $\Omega = 1,9733$



d) mód č. 4, $\Omega = 2,3607$

Obr. 5.5: Tvary kmitu kruhového rezonátoru z NCE40 s poměrem rozměrů $\alpha = 2,43$

5.3 Tloušťkový mód kmitu tenkých disků

Základní tloušťkový mód kmitu je nejběžněji používaným pracovním módem kruhových rezonátorů. Uplatnění nachází zejména v elektroakustických a ultrazvukových převodnících.

U tenkých disků předpokládáme poměr rozměrů $\alpha \gg 1$ a jejich frekvenční spektrum tak můžeme porovnat s modelem prostých tloušťkových kmitů kruhové desky TE. Poměrné rezonanční a antirezonanční frekvence módu TE vypočtené pomocí vztahů (3.27), (3.32), (3.38) a (3.79) mají tvar

$$\Omega_r = \Omega_{\text{TSt}} = \eta b \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{c_{33}^D}{c_{55}^E}}, \quad (5.1)$$

$$\Omega_a = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{c_{55}^E}},$$

kde poměrné vlnové číslo ηb vyhovuje rovnici (3.32). Rezonanční frekvence Ω_r je shodná s frekvencí prostého tloušťkově rozpínavého módu nekonečné desky Ω_{TSt} (4.1).

Na obr. 5.6 je zobrazeno frekvenční spektrum disků z NCE51 v okolí základního tloušťkového módu. Pro porovnání jsou znázorněny také frekvence prostého módu TE Ω_r a Ω_a a naměřené hodnoty rezonančních a antirezonančních frekvencí.⁶

Charakteristické terasy frekvenčního spektra odpovídající tloušťkovému módu se s rostoucím α limitně shora blíží k teoretické frekvenci prostých módů $\Omega_r = \Omega_{\text{TSt}}$. Koeficient elektromechanické vazby k_t piezoelektrické keramiky je vysoký a v širokém pásmu mezi rezonanční a antirezonanční frekvencí se vyskytuje řada dalších neharmonických parazitních módů kmitu (*spurious modes*).

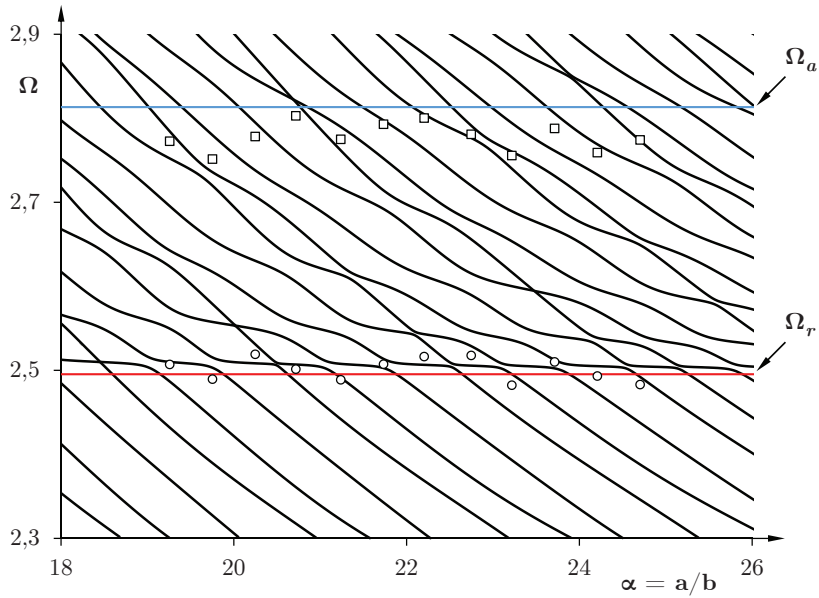
Neharmonické módy se váží se základním módem kmitu a ovlivňují jeho frekvenční závislost. Dochází se zkrácení frekvenčního spektra impedance, jak je zřejmé z kombinovaného diagramu pro kruhový rezonátor s poměrem $\alpha = 23,7$ na obr. 5.8. S rostoucím poměrem α roste tlumení neharmonických módů a snižuje se jejich vazba s elektrickým polem [33]. Vliv na základní tloušťkový mód postupně klesá a frekvenční spektrum impedance se blíží modelovému průběhu prostého tloušťkového kmitu TE. Tento jev můžeme pozorovat při porovnání průběhů impedance pro rezonátory s poměrem α rovným 23,7 a 49,0 na obr. 5.9 a 5.10.

Pro velmi tenké disky převládá ve spektru jediný málo tlumený mód s rezonanční frekvencí Ω blízkou frekvenci Ω_{TSt} . U disku s poměrem $\alpha = 49,0$ je sice ve spektru více parazitních módů než u provedení s $\alpha = 23,7$; jejich amplitudy jsou však výrazně zatlumeny. Teoretická rezonanční frekvence disku s poměrem $\alpha = 49,0$ rovná 2,4988 se již poměrně shoduje s hodnotou $\Omega_{\text{TSt}} = 2,4954$. Vliv rostoucího poměru α na výsledný tvar kmitu je patrný z porovnání na obr. 5.7.

Frekvenční spektrum v okolí základního tloušťkového kmitu se výrazně liší například od spektra základního tloušťkově střižného kmitu AT rezonátorů [6] s malým koeficientem elektromechanické vazby ($k_{26} = -0,088$) a nízkou hodnotou rezonanční frekvence

⁶Znázorněné antirezonanční frekvence nesouvisí se zobrazeným spektrem, protože použitý analytický model popisuje pouze rezonanční frekvence.

($\Omega \approx 1$). Narozdíl od křemenných rezonátorů [93] je tak obtížné najít optimální poměr rozměrů výbrusu s minimálním vlivem parazitních módů na základní rezanci.



Obr. 5.6: Frekvenční spektrum tenkých disků z NCE51 v okolí základního tloušťkového módu. Rezonanční (červená, $\Omega_r = 2,4954$) a antirezonanční frekvence (modrá, $\Omega_a = 2,8133$) prostého tloušťkového kmitu TE, naměřené rezonanční (kruhové body) a antirezonanční frekvence (čtvercové body) [94]

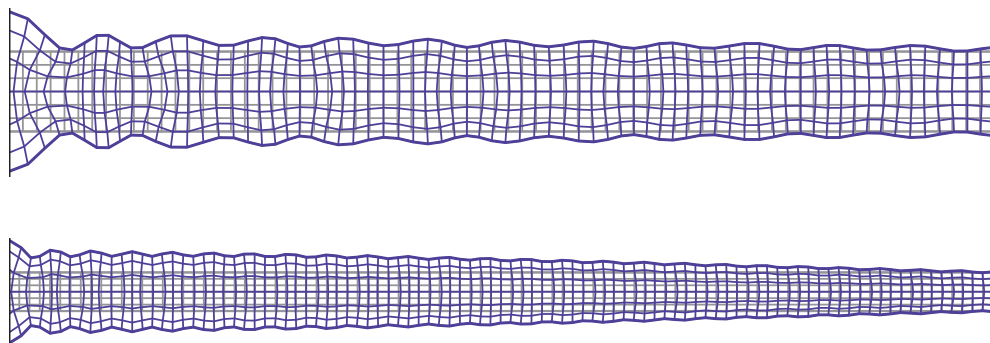
Porovnání vypočtených a naměřených hodnot rezonanční a antirezonanční frekvence je pro oba studované poměry α uvedeno v tab. 5.2 a 5.4. Teoretické frekvence byly vypočteny s použitím vztahů (3.27), (3.32) a (3.38). V uvedených případech je odchylka teoretických a naměřených hodnot vzhledem k vlastnostem keramiky poměrně malá a dosahuje přibližně 1 %.

Ve stejné tabulce je uvedeno také porovnání koeficientů elektromechanické vazby k_t . Potvrzuje se předpoklad, že dynamický koeficient vypočtený z naměřených frekvencí pomocí (2.19) je nižší než statická hodnota určená vztahem (2.17b).

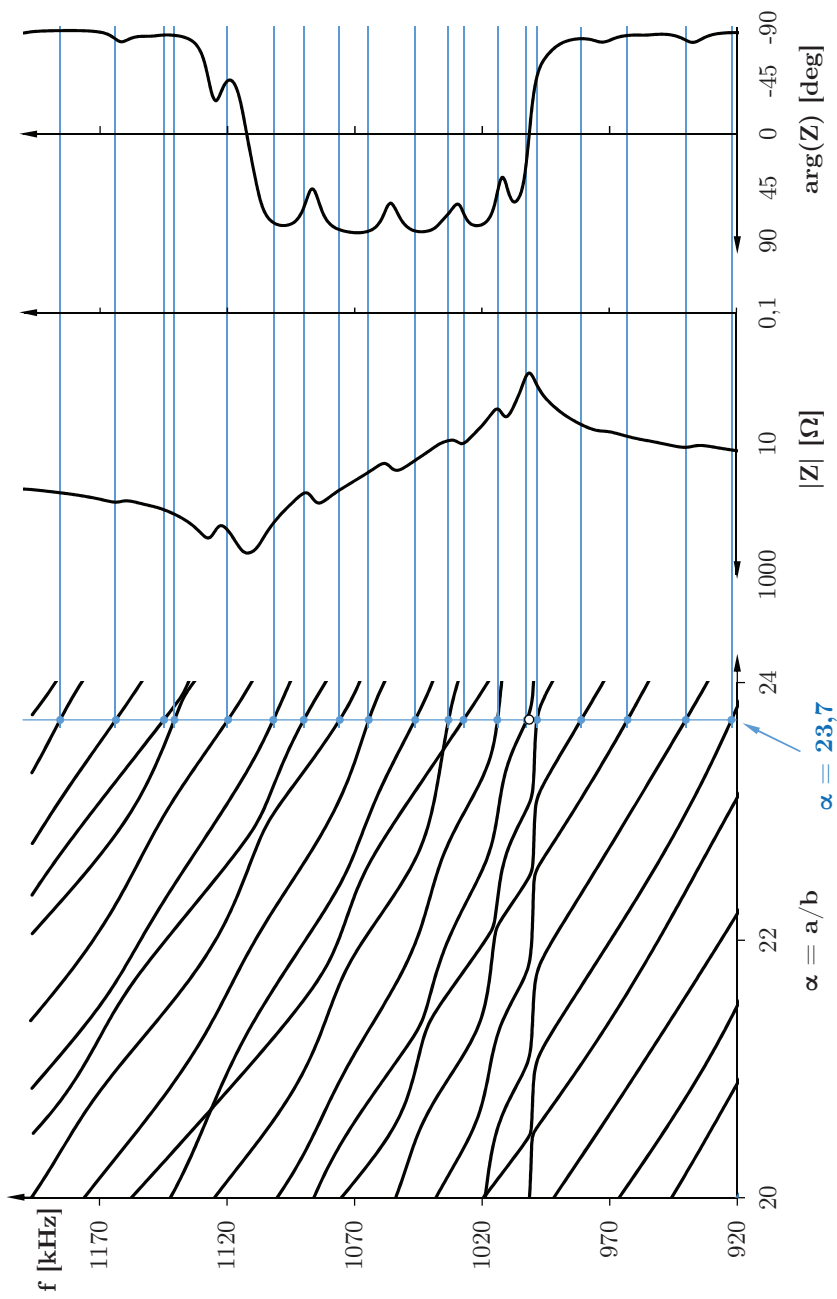
Tabulky 5.3 a 5.5 obsahují parametry elektrického náhradního obvodu vypočtené pomocí (3.39). Hodnota sériového náhradního odporu R_1 odpovídá minimální reálné hodnotě naměřené impedance a činitel jakosti Q_1 je stanoven ze vztahu (2.28). Parametry náhradního obvodu jsou použity k proložení naměřené impedance teoretickým průběhem (2.26), jak je zobrazeno na obr. 5.9 a 5.10. Náhrada kruhového rezonátoru v okolí tloušťkového módu pomocí obvodu znázorněného na obr. 2.4a je velmi dobrá. Tato shoda vyplývá také ze skutečnosti, že naměřené a vypočtené frekvence mají malou odchylku.

Moderní impedanceční a spektrální analyzátory stanovují parametry elektrického náhradního obvodu z naměřeného průběhu impedance v okolí rezonanční a antirezonanční

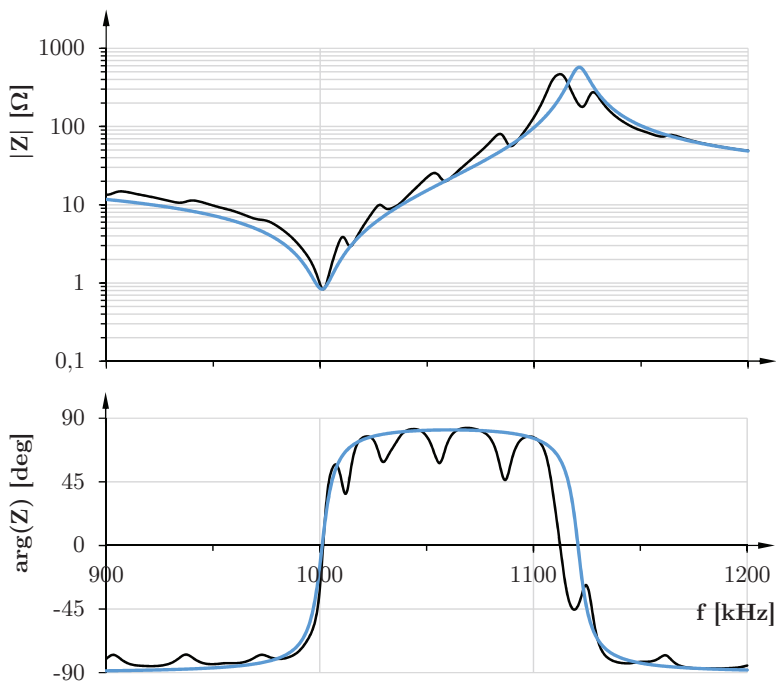
frekvence [95]. Do přenosové funkce obvodu na obr. 2.4 dosazují impedanci změřenou na několika frekvencích a ze vzniklé soustavy rovnic počítají jednotlivé obvodové prvky. Pokud je průběh impedance zkreslený (např. vlivem vazby s parazitními módy), může dojít k chybě určení náhradního obvodu.



Obr. 5.7: Tvar kmitu kruhového rezonátoru z NCE51 kmitajícího základním tloušťkovým módem. Nahoře: $\alpha = 23,7$ a $\Omega = 2,5026$; dole: $\alpha = 49,0$ a $\Omega = 2,4988$. Zobrazena je polovina průřezu rezonátoru



Obr. 5.8: Porovnání frekvenčního spektra tenkého disku v okolí základního tloušťkového módu s naměřenou impedancí [96], kruhový rezonátor z NCE51, $\varnothing 47,9$ mm, tloušťka 2,02 mm, $\alpha = 23,7$



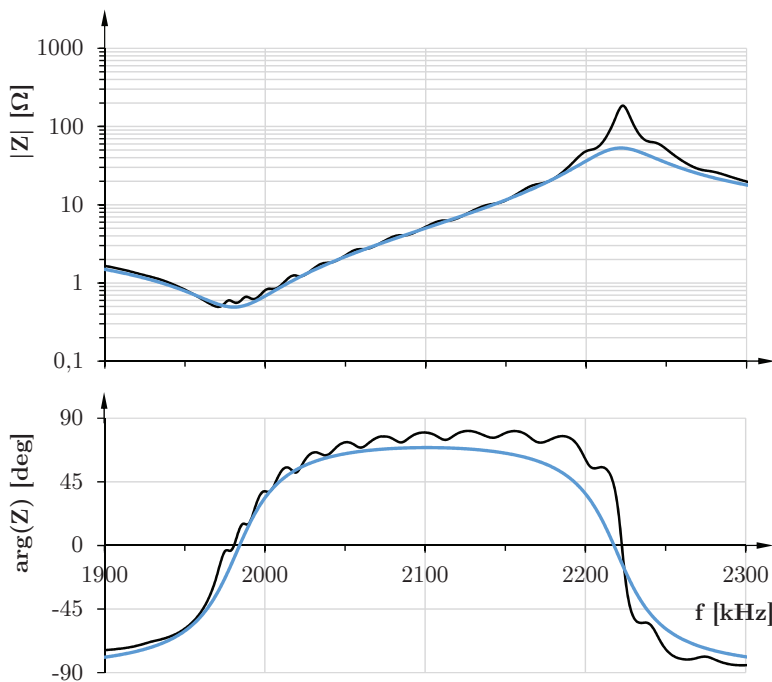
Obr. 5.9: Kruhový rezonátor z NCE51, průměr 47,9 mm, tloušťka 2,02 mm, $\alpha = 23,7$. Impedance v okolí tloušťkové rezonance, naměřený průběh (černá) [96] a průběh vypočtený pomocí parametrů elektrického náhradního obvodu (modrá)

	výpočet	měření
f_{1r} [kHz]	994,27	1 001,6
f_{1a} [kHz]	1 121,0	1 112,5
	statický	dynamický
k_t [-]	0,50	0,47

Tab. 5.2: Kruhový rezonátor z NCE51, průměr 47,9 mm, tloušťka 2,02 mm, $\alpha = 23,7$. Rezonanční a antirezonanční frekvence, koeficient elektromechanické vazby k_t

C_0 [nF]	C'_1 [nF]	L_1 [μH]	R_1 [Ω]	Q_1 [1]
6,50	1,65	15,3	0,83	115

Tab. 5.3: Kruhový rezonátor z NCE51, průměr 47,9 mm, tloušťka 2,02 mm, $\alpha = 23,7$. Vypočtené parametry elektrického náhradního obvodu



Obr. 5.10: Kruhový rezonátor z NCE51, průměr 50,0 mm, tloušťka 1,02 mm, $\alpha = 49,0$. Impedance v okolí tloušťkové rezonance, naměřený průběh (černá) [96] a průběh vypočtený pomocí parametrů elektrického náhradního obvodu (modrá)

	výpočet	měření
f_{1r} [kHz]	1 969,1	1 980,7
f_{1a} [kHz]	2 219,9	2 222,8
	statický	dynamický
k_t [-]	0,50	0,49

Tab. 5.4: Kruhový rezonátor z NCE51, průměr 50,0 mm, tloušťka 1,02 mm, $\alpha = 49,0$. Rezonanční a antirezonanční frekvence, koeficient elektromechanické vazby k_t

C_0 [nF]	C'_1 [nF]	L_1 [μH]	R_1 [Ω]	Q_1 [1]
14,0	3,57	1,81	0,49	45

Tab. 5.5: Kruhový rezonátor z NCE51, průměr 50,0 mm, tloušťka 1,02 mm, $\alpha = 49,0$. Vypočtené parametry elektrického náhradního obvodu

Závěr

Kruhové rezonátory jsou jedním z nejběžnějších provedení piezokeramických rezonátorů používaných v různých vědeckých a technických aplikacích. Pro dosažení optimálních vlastností rezonanční soustavy, ve které je kruhový rezonátor hlavním prvkem, je již při návrhu nezbytné věnovat pozornost spektrálním vlastnostem samotného výbrusu. V porovnání s monokrystalickými rezonátory má polarizovaná keramika obecně vyšší symetrii, výpočetní návrh je však obtížný z důvodů silné vazby pole mechanické napjatosti s elektrickým polem, velkého rozptylu materiálových parametrů a nelineárního chování způsobeného polykrystalickou strukturou materiálu.

Předložená práce obsahuje ucelený popis problematiky spektrálních vlastností kruhových rezonátorů s obecným poměrem průměru a tloušťky. Ke studiu frekvenčního spektra jsou použity analytické modely různého stupně složitosti vycházející z lineární teorie piezoelektriny. Teoretické závislosti jsou doplněny řadou příkladů a porovnání s experimentálními hodnotami. Popis spektrálních vlastností je omezen na výchozí případ mechanicky volného rezonátoru s plnými elektrodami na obou kruhových plochách.

Přestože mají kruhové rezonátory jednoduchý geometrický tvar a jsou buzeny symetrickým elektrickým polem, je jejich frekvenční spektrum vzhledem k vysoké pracovní frekvenci složité. Vedle základních módů blízkých prostým módům se vyskytuje velké množství dalších (parazitních) kmitů, které mají různě velkou vazbu s elektrickým polem a různé modální tlumení. Parazitní módy mohou v důsledku elastické vazby nepříznivě ovlivňovat chování rezonátoru na hlavních pracovních frekvencích.

Úplné frekvenční spektrum kruhových rezonátorů nelze popsat pomocí jednoduchých analytických vztahů, které se běžně používají v technické praxi. U rezonátorů s obecným poměrem rozměrů se projevují disperzní vlastnosti prostředí a silná vazba radiálních a tloušťkových módů. K popisu spektrálních vlastností je nutné využít některý z aproximačních modelů vázaných kmitů. Složité modální chování i v oblasti nízkých frekvencí se objevuje u tlustých disků, jejichž oba hlavní rozměry jsou stejného řádu.

Jednoduché modely prostých kmitů lze použít pro rezonátory ve tvaru tenkých tyčí nebo tenkých desek, kde můžeme jeden z rozměrů vzhledem ke druhému zanedbat. Tyto modely velmi dobře aproximují rezonanční frekvence, tvar kmitu však popisují pouze přibližně. U základního tloušťkového módu, který je nejčastějším pracovním módem kruhových rezonátorů, je vysokofrekvenční tvar kmitu výrazně odlišný od předpokládané rovnoměrné deformace v axiálním směru. Použití modelů prostých kmitů tak závisí na požadované přesnosti výpočtu.

Volba rozměrů kruhového výbrusu vyhovujících požadavkům na rezonanční frekvenci, tvar kmitu a potlačení parazitních módů je výchozím krokem při výpočetním návrhu rezonanční soustavy. Dalším postupem je modelování úplné soustavy s uvažováním konkrétních okrajových podmínek. Konečné řešení se získá optimalizací modelu v řadě iteračních kroků. U složitějších soustav se modelování provádí pomocí metody konečných prvků. Pro úvodní návrh výbrusu je však vhodné používat analytické modely, které mají výhodu v rychlosti výpočtu a přehlednosti výsledků ve formě frekvenčních křivek.

Literatura

- [1] Cady, W. G.: Piezoelectric resonator. *Physical Review A* 17, s. 531-533, 1921.
- [2] Cady, W. G.: Piezo-electric resonator. U.S. patent 1,450,246. 3. 4. 1923.
- [3] Cady, W. G.: Piezoelectricity. McGraw-Hill, New York 1946.
- [4] Pao, Y.-H., Kaul, R. K.: Waves and vibrations in isotropic and anisotropic plates. In: Herrmann, G. (ed.): *R. D. Mindlin and applied mechanics: A collection of studies in the development of applied mechanics dedicated to professor Raymond D. Mindlin by his former students*. Pergamon Press 1974, s. 149-195.
- [5] Lee, P. C. Y., Haines, D. W.: Piezoelectric crystals and electro-elasticity. In: Herrmann, G. (ed.): *R. D. Mindlin and applied mechanics: A collection of studies in the development of applied mechanics dedicated to professor Raymond D. Mindlin by his former students*. Pergamon Press 1974, s. 227-253.
- [6] Zelenka, J.: Piezoelectric resonators and their applications. Academia, Praha 1986.
- [7] Tichý, J., Erhart, J., Kittinger, E., Přívratská, J.: Fundamentals of piezoelectric sensorics: Mechanical, dielectric, and thermodynamical properties of piezoelectric materials. Springer 2010.
- [8] Erhart, J., Pülpan, P., Pustka, M.: Piezoelectric ceramic resonators. Springer 2017.
- [9] Schwartz, R. W., Ballato, J., Haertling, G. H.: Piezoelectric and electro-optic ceramics. In: Buchanan, R. C. (ed.): *Ceramic materials for electronics*, 3rd edition. Marcel-Dekker, New York 2004, s. 207-322.
- [10] Tiersten, H. F.: Linear piezoelectric plate vibrations. Plenum Press, New York 1969.
- [11] Yang, J.: An introduction to the theory of piezoelectricity. Springer, New York 2005.
- [12] IRE Standards on piezoelectric crystals: Measurement on piezoelectric ceramics. IRE Standard 179-1961.
- [13] IEEE Standard on Piezoelectricity. ANSI/IEEE Standard 176-1987.
- [14] Fujishima, S.: The history of ceramic filters. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 47(1), s. 1-7, 2000.
- [15] Cheeke, J. D. N.: Fundamentals and applications of ultrasonic waves. CRC Press 2002.
- [16] Sharapov, V.: Piezoceramic sensors. Springer 2011.
- [17] Mason, W. P.: Electromechanical transducers and wave filters. D. Van Nostrand Co. 1948.
- [18] Mason, W. P.: Piezoelectric crystals and their application to ultrasonics. D. Van Nostrand Co. 1950.

- [19] Berlincourt, D. A., Curran, D. R., Jaffe, H.: Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers. In: Mason, W. P. (ed.): Physical acoustics – Principles and methods, Vol. 1-A: Methods and devices. Academic Press, New York 1964, s. 169-270.
- [20] Petržílka, V., Slavík, J. B., Šolc, I., Taraba, O., Tichý, J., Zelenka, J.: Piezoelektrina a její technické použití. Nakladatelství ČSAV, Praha 1960.
- [21] Ballato, A.: Modeling piezoelectric and piezomagnetic devices and structures via equivalent networks. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control 48(5), s. 1189–1240, 2001.
- [22] Onoe, M., Jumonji, H.: Useful formulas for piezoelectric ceramic resonators and their application to measurement of parameters. The Journal of the Acoustical Society of America 41(4), s. 974-980, 1967.
- [23] Shaw, E. A. G.: On the resonant vibrations of thick barium titanate disks. The Journal of the Acoustical Society of America 28(1), s. 38-50, 1956.
- [24] Aggarwal, R. R.: Axially symmetric vibrations of a finite isotropic disk I. The Journal of the Acoustical Society of America 24(5), s. 463-467, 1952.
- [25] Aggarwal, R. R.: Axially symmetric vibrations of a finite isotropic disk II. The Journal of the Acoustical Society of America 24(6), s. 663-666, 1952.
- [26] Aggarwal, R. R.: Axially symmetric vibrations of a finite isotropic disk III. The Journal of the Acoustical Society of America 25(3), s. 533-535, 1953.
- [27] Aggarwal, R. R., Shaw, E. A. G.: Axially symmetric vibrations of a finite isotropic disk IV. The Journal of the Acoustical Society of America 26(3), s. 341-342, 1954.
- [28] Kane, T. R., Mindlin, R. D.: High-frequency extensional vibrations of plates. Journal of Applied Mechanics 23, s. 277-283, 1956.
- [29] Mindlin, R. D., Medick, M. A.: Extensional vibrations of elastic plates. Journal of Applied Mechanics 26, s. 561-569, 1959.
- [30] Gazis, D. C., Mindlin, R. D.: Extensional vibrations and waves in a circular disc and semi-infinite plate. Journal of Applied Mechanics 27, s. 541-547, 1960.
- [31] Mindlin, R. D., McNiven, H. D.: Axially symmetric waves in elastic rods. Journal of Applied Mechanics 27(1), s. 145-151, 1960.
- [32] McNiven, H. D., Perry, D. C.: Axially symmetric waves in finite, elastic rods. The Journal of the Acoustical Society of America 34(4), s. 433-437, 1962.
- [33] Ikegami, S., Ueda, I., Kobayashi, S.: Frequency spectra of resonant vibration in disk plates of PbTiO_3 piezoelectric ceramics. The Journal of the Acoustical Society of America 55(2), s. 339-344, 1974.
- [34] Ikegami, S., Nagata, T., Nakajima, Y.: Frequency spectra of extensional vibration in $\text{Pb}(\text{Zr,Ti})\text{O}_3$ disks with Poisson's ratio larger than $1/3$. The Journal of the Acoustical Society of America 60(1), s. 113-116, 1976.

- [35] Ueha, S., Sakuma, S., Mori, E.: Measurement of vibration velocity distributions and mode analysis in thick disks of $\text{Pb}(\text{Zr.Ti})\text{O}_3$. The Journal of the Acoustical Society of America 73(5), s. 1842-1847, 1983.
- [36] Huang, R., Lee, P. C. Y., Lin, W. S., Yu, J. D.: Extensional, thickness-stretch and symmetric thickness-shear vibrations of piezoceramic disks. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control 49(11), s. 1507-1515, 2002.
- [37] Huang, D., Yang, J.: On the propagation of long thickness-stretch waves in piezoelectric plates. Ultrasonics 54(5), s. 1277-1280, 2014.
- [38] Wu, B., Chen, W., Yang, J.: Two-dimensional equations for high-frequency extensional vibrations of piezoelectric ceramic plates with thickness poling. Archive of Applied Mechanics 84(12), s. 1917-1935, 2014.
- [39] Wu, B., Chen, W., Yang, J.: One-dimensional equations for coupled extensional, radial, and axial-shear motions of circular piezoelectric ceramic rods with axial poling. Archive of Applied Mechanics 84(9-11), s. 1677-1689, 2014.
- [40] Eer Nisse, E. P.: Variational method for electroelastic vibration analysis. IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics SU-14(4), s. 153-160, 1967.
- [41] Allik, H., Hughes, T. J.: Finite element method for piezoelectric vibration. International Journal for Numerical Methods in Engineering 2(2), s. 151-157, 1970.
- [42] Kunkel, H. A., Locke, S., Pikeroen, B.: Finite-element analysis of vibrational modes in piezoelectric ceramic disks. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control 37(4), s. 316-328, 1990.
- [43] Guo, N., Cawley, P., Hitchings, D.: The finite element analysis of the vibration characteristics of piezoelectric discs. Journal of Sound and Vibration 159(1), s. 115-138, 1992.
- [44] Guo, N., Cawley, P.: Measurement and prediction of the frequency spectrum of piezoelectric disks by modal analysis. The Journal of the Acoustical Society of America 92(6), s. 3379-3388, 1992.
- [45] Schnabel, P.: Dispersion of thickness vibrations of piezoceramic disk resonators. IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics SU-25(1), s. 16-23, 1978.
- [46] Shick, D. V., Tiersten, H. F., Sinha, B. K.: Forced thickness-extensional trapped energy vibrations of polarized ceramic plates. Journal of Applied Physics 68(10), s. 4998-5008, 1990.
- [47] Rogacheva, N. N.: The theory of piezoelectric shells and plates. CRC Press 1994.
- [48] Huang, C.-H., Lin, Y.-C., Ma, C.-C.: Theoretical analysis and experimental measurement for resonant vibration of piezoceramic circular plates. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control 51(1), s. 12-24, 2004.

- [49] Huang, C.-H.: Resonant vibration investigations for piezoceramic disks and annuli by using the equivalent constant method. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 52(8), s. 1217-1228, 2005.
- [50] Onoe, M., Tiersten, H. F.: Resonant frequencies of finite piezoelectric ceramic vibrators with high electromechanical coupling. *IEEE Transactions on Ultrasonics Engineering* 10(1), s. 32-39, 1963.
- [51] Stefan, O.: The coupling between the radial and thickness vibration of the circular resonator. *Czechoslovak Journal of Physics B* 19, s. 1425-1428, 1969.
- [52] Aronov, B. S., Bachand, C. L.: Piezoelectric cylindrical discs and solid rods: Dependence of the resonance frequencies and effective coupling coefficients on aspect ratio. *The Journal of the Acoustical Society of America* 140(3), s. 2162-2172, 2016.
- [53] Lin, S. Y.: Coupled vibration analysis of piezoelectric ceramic disk resonators. *Journal of Sound and Vibration* 218(2), s. 205-217, 1998.
- [54] Lin, S. Y.: Analysis of the equivalent circuit of piezoelectric ceramic disk resonators in coupled vibration. *Journal of Sound and Vibration* 231(2), s. 277-290, 2000.
- [55] Graff, K.F.: Wave motion in elastic solids. Dover Publications, New York 1991.
- [56] Royer, D., Dieulesaint, E.: Elastic waves in solids I. Springer 2000.
- [57] Mindlin, R. D.: An introduction to the mathematical theory of the vibrations of elastic plates. US Army Signal Corps Engineering Laboratory, Fort Monmouth 1955.
- [58] Mindlin, R. D., Yang, J.: An introduction to the mathematical theory of vibrations of elastic plates. World Scientific 2006.
- [59] Nye, J. F.: Physical properties of crystals: Their representation by tensors and matrices. Oxford University Press, Oxford 1985.
- [60] Mezheritsky, A. V.: Invariants of electromechanical coupling coefficients in piezoceramics. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 50(12), s. 1742-1751, 2003.
- [61] Butterworth, S.: On electrically-maintained vibrations. *Proceedings of the Physical Society of London* 27(1), s. 410-424, 1914.
- [62] Van Dyke, K. S.: The piezo-electric resonator and its equivalent network. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* 16(6), s. 742-764, 1928.
- [63] Onoe, M., Tiersten, H. F., Meitzler, A. H.: Shift in the location of resonant frequencies caused by large electromechanical coupling in thickness-mode resonators. *The Journal of the Acoustical Society of America* 35(1), s. 36-42, 1963.
- [64] Tiersten, H. F.: Thickness vibrations of piezoelectric plates. *The Journal of the Acoustical Society of America* 35(1), s. 53-58, 1963.

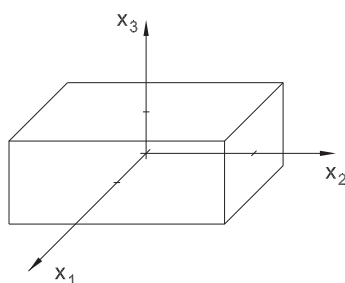
- [65] Holland, R.: Representation of dielectric, elastic, and piezoelectric losses by complex coefficients. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics* SU-14(1), s. 18-20, 1967.
- [66] Uchino, K., Zhuang, Y., Ural, S. O.: Loss determination methodology for a piezoelectric ceramic: New phenomenological theory and experimental proposals. *Journal of Advanced Dielectrics* 1(1), s. 17-31, 2011.
- [67] Sadd, M. H.: *Elasticity: Theory, applications, and numerics*. Elsevier, Amsterdam 2005.
- [68] Stephenson, C. V.: Vibrations in long rods of barium titanate with electric field parallel to the length. *The Journal of the Acoustical Society of America* 28(6), s. 1192-1194, 1956.
- [69] Mason, W. P.: Electrostrictive effect in barium titanate ceramics. *Physical Review* 74(9), s. 1134-1147, 1948.
- [70] Meitzler, A. H., O'Bryan, H. M., Tiersten, H. F.: Definition and measurement of radial mode coupling factors in piezoelectric ceramic materials with large variations in Poisson's ratio. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics* SU-20(3), s. 233-239, 1973.
- [71] Wang, J., Yang, J.: Higher-order theories of piezoelectric plates and applications. *Applied Mechanics Reviews* 53(4), s. 87-99, 2000.
- [72] Yang, J.: *The mechanics of piezoelectric structures*. World Scientific 2006.
- [73] Mindlin, R. D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* 18, s. 31-38, 1951.
- [74] Mindlin, R. D.: Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates. *Journal of Applied Physics* 22(3), s. 316-323, 1951.
- [75] Mindlin, R. D.: Forced thickness-shear and flexural vibrations of piezoelectric crystal plates. *Journal of Applied Physics* 23(1), s. 83-88, 1952.
- [76] Mindlin, R.D.: High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates. *International Journal of Solids and Structures* 8(7), s. 895-906, 1972.
- [77] Lee, P. C. Y., Syngellakis, S., Hou, J. P.: A two-dimensional theory for high-frequency vibrations of piezoelectric crystal plates with or without electrodes. *Journal of Applied Physics* 61(4), s. 1249-1262, 1987.
- [78] Lee, P. C. Y., Yu, J. D., Lin, W. S.: A new two-dimensional theory for vibrations of piezoelectric crystal plates with electroded faces. *Journal of Applied Physics* 83(3), s. 1213-1223, 1998.
- [79] Lee, P. C. Y., Edwards, N. P., Lin, W. S., Syngellakis, S.: Second-order theories for extensional vibrations of piezoelectric crystal plates and strips. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 49(11), s. 1497-1506, 2002.

- [80] Lee, P. C. Y., Nikodem, Z.: An approximate theory for high-frequency vibrations of elastic plates. *International Journal of Solids and Structures* 8(5), s. 581-612, 1972.
- [81] Kožešník, J.: *Teorie podobnosti a modelování*. Academia, Praha 1983.
- [82] Lee, P. C. Y.: Extensional, flexural, and width-shear vibrations of thin rectangular crystal plates. *Journal of Applied Physics* 42(11), s. 4139-4144, 1971.
- [83] Pustka, M., Nosek, J., Burianová, L.: Coupled extensional vibrations of longitudinally polarized piezoceramic strips. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 58(10), s. 2139-2145, 2011.
- [84] Mindlin, R. D.: Low frequency vibrations of elastic bars. *International Journal of Solids and Structures* 12(1), s. 27-49, 1976.
- [85] Burianová, L., Pustka, M., Nosek, J.: High-frequency extensional vibrations of piezoelectric ceramic bars polarized in the longitudinal direction. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 56(1), s. 175-181, 2009.
- [86] Bugdayci, N., Bogy, D. B.: A two-dimensional theory for piezoelectric layers used in electro-mechanical transducers I: Derivation. *International Journal of Solids and Structures* 17(12), s. 1159-1178, 1981.
- [87] Pustka, M., Linhart, J., Burianová, L.: Úvodní studium frekvenčního spektra diskových rezonátorů z piezoelektrické keramiky PCM40. Zpráva č. KFY-Pu-1/2009. KFY TU v Liberci, červen 2009.
- [88] Ewins, D. J.: *Modal testing: Theory, practice and application*. 2nd edition. Research Studies Press 2000.
- [89] Kagawa, Y., Yamabuchi, T.: Finite element approach for a piezoelectric circular rod. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics* SU-23(6), s. 379-385, 1976.
- [90] Dökmeci, M. C.: A theory of high frequency vibrations of piezoelectric crystal bars. *International Journal of Solids and Structures* 10(4), s. 401-409, 1974.
- [91] Mindlin, R. D., Deresiewicz, H.: Thickness-shear and flexural vibrations of a circular disc. *Journal of Applied Physics* 25(10), s. 1329-1332, 1954.
- [92] Nikodem, Z., Lee, P. C. Y.: Approximate theory of vibration of crystal plates at high frequencies. *International Journal of Solids and Structures* 10(2), s. 177-196, 1974.
- [93] Wang, J., Zhao, W.: The determination of the optimal length of crystal blanks in quartz crystal resonators. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 52(11), s. 2023-2030, 2005.
- [94] Pustka, M.: Frekvenční spektrum piezoelektrických rezonátorů. In: Erhart, J., Pustka, M., Půlpán, P. (eds.): *Aplikace piezoelektrických prvků v mechanických a akustických soustavách*. VÚTS, a.s., Liberec 2015, s. 27-34.
- [95] *Impedance measurement handbook. A guide to measurement technology and techniques*, 6th Edition. Keysight Technologies 2016.
- [96] Erhart, J.: soukromé sdělení.

Příloha A

Piezoelektrické rovnice v kartézských souřadnicích

V této příloze jsou uvedeny rovnice lineární piezoelektriny vyjádřené v kartézských souřadnicích (obr. A.1). Algebraické rovnice (A.1) jsou platné pro keramický element s materiálovou symetrií odpovídající třídě $6mm$, který je polarizovaný v axiálním směru (polární osa je shodná s osou x_3).



Obr. A.1: Kartézská soustava souřadnic

a) algebraické rovnice (lineární piezoelektrické rovnice)

$$\begin{aligned}
T_1 &= c_{11}^E S_1 + c_{12}^E S_2 + c_{13}^E S_3 - e_{31} E_3, \\
T_2 &= c_{12}^E S_1 + c_{11}^E S_2 + c_{13}^E S_3 - e_{31} E_3, \\
T_3 &= c_{13}^E S_1 + c_{13}^E S_2 + c_{33}^E S_3 - e_{33} E_3, \\
T_4 &= c_{55}^E S_4 - e_{15} E_2, \\
T_5 &= c_{55}^E S_5 - e_{15} E_1, \\
T_6 &= c_{66}^E S_6, \\
D_1 &= e_{15} S_5 + \varepsilon_{11}^S E_1, \\
D_2 &= e_{15} S_4 + \varepsilon_{11}^S E_2, \\
D_3 &= e_{31} S_1 + e_{31} S_2 + e_{33} S_3 + \varepsilon_{33}^S E_3,
\end{aligned} \tag{A.1a}$$

nebo

$$\begin{aligned}
S_1 &= s_{11}^E T_1 + s_{12}^E T_2 + s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3, \\
S_2 &= s_{12}^E T_1 + s_{11}^E T_2 + s_{13}^E T_3 + d_{31} E_3, \\
S_3 &= s_{13}^E T_1 + s_{13}^E T_2 + s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3, \\
S_4 &= s_{55}^E T_4 + d_{15} E_2, \\
S_5 &= s_{55}^E T_5 + d_{15} E_1, \\
S_6 &= s_{66}^E T_6, \\
D_1 &= d_{15} T_5 + \varepsilon_{11}^T E_1, \\
D_2 &= d_{15} T_4 + \varepsilon_{11}^T E_2, \\
D_3 &= d_{31} T_1 + d_{31} T_2 + d_{33} T_3 + \varepsilon_{33}^T E_3,
\end{aligned} \tag{A.1b}$$

b) divergenční rovnice (elastické pohybové rovnice a nábojová rovnice elektrostatiky)

$$\begin{aligned}
T_{1,1} + T_{6,2} + T_{5,3} &= \rho \ddot{u}_1, \\
T_{6,1} + T_{2,2} + T_{4,3} &= \rho \ddot{u}_2, \\
T_{5,1} + T_{4,2} + T_{3,3} &= \rho \ddot{u}_3, \\
D_{1,1} + D_{2,2} + D_{3,3} &= 0,
\end{aligned} \tag{A.2}$$

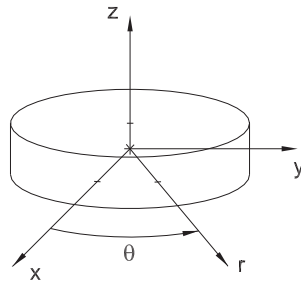
c) gradientní rovnice (vztahy mezi deformací a mechanickým posunutím a mezi intenzitou elektrického pole a elektrickým potenciálem)

$$\begin{aligned}
 S_1 &= u_{1,1} , \\
 S_2 &= u_{2,2} , \\
 S_3 &= u_{3,3} , \\
 S_4 &= u_{2,3} + u_{3,2} , \\
 S_5 &= u_{1,3} + u_{3,1} , \\
 S_6 &= u_{1,2} + u_{2,1} , \\
 E_1 &= -\varphi_{,1} , \\
 E_2 &= -\varphi_{,2} , \\
 E_3 &= -\varphi_{,3} .
 \end{aligned}
 \tag{A.3}$$

Příloha B

Piezoelektrické rovnice ve válnových souřadnicích

V této příloze jsou uvedeny rovnice lineární piezoelektriny vyjádřené ve válcových souřadnicích (obr. B.1). Algebraické rovnice (B.1) jsou platné pro keramický element s materiálovou symetrií odpovídající třídě $6mm$, který je polarizovaný v axiálním směru (polární osa je shodná s osou $z \equiv x_3$). V literatuře je obvyklé nahrazovat index z číslicí 3 (např. S_3 místo S_{zz} , $T_{\theta 3}$ místo $T_{\theta z}$).



Obr. B.1: Válnová soustava souřadnic

a) algebraické rovnice (lineární piezoelektrické rovnice)

$$\begin{aligned}
T_{rr} &= c_{11}^E S_{rr} + c_{12}^E S_{\theta\theta} + c_{13}^E S_{zz} - e_{31} E_z, \\
T_{\theta\theta} &= c_{12}^E S_{rr} + c_{11}^E S_{\theta\theta} + c_{13}^E S_{zz} - e_{31} E_z, \\
T_{zz} &= c_{13}^E S_{rr} + c_{13}^E S_{\theta\theta} + c_{33}^E S_{zz} - e_{33} E_z, \\
T_{\theta z} &= 2c_{55}^E S_{\theta z} - e_{15} E_\theta, \\
T_{rz} &= 2c_{55}^E S_{rz} - e_{15} E_r, \\
T_{r\theta} &= 2c_{66}^E S_{r\theta}, \\
D_r &= 2e_{15} S_{rz} + \varepsilon_{11}^S E_r, \\
D_\theta &= 2e_{15} S_{\theta z} + \varepsilon_{11}^S E_\theta, \\
D_z &= e_{31} S_{rr} + e_{31} S_{\theta\theta} + e_{33} S_{zz} + \varepsilon_{33}^S E_z,
\end{aligned} \tag{B.1a}$$

nebo

$$\begin{aligned}
S_{rr} &= s_{11}^E T_{rr} + s_{12}^E T_{\theta\theta} + s_{13}^E T_{zz} + d_{31} E_z, \\
S_{\theta\theta} &= s_{12}^E T_{rr} + s_{11}^E T_{\theta\theta} + s_{13}^E T_{zz} + d_{31} E_z, \\
S_{zz} &= s_{13}^E T_{rr} + s_{13}^E T_{\theta\theta} + s_{33}^E T_{zz} + d_{33} E_z, \\
2S_{\theta z} &= s_{55}^E T_{\theta z} + d_{15} E_\theta, \\
2S_{rz} &= s_{55}^E T_{rz} + d_{15} E_r, \\
2S_{r\theta} &= s_{66}^E T_{r\theta}, \\
D_r &= d_{15} T_{rz} + \varepsilon_{11}^T E_r, \\
D_\theta &= d_{15} T_{\theta z} + \varepsilon_{11}^T E_\theta, \\
D_z &= d_{31} T_{rr} + d_{31} T_{\theta\theta} + d_{33} T_{zz} + \varepsilon_{33}^T E_z,
\end{aligned} \tag{B.1b}$$

b) divergenční rovnice (elastické pohybové rovnice a nábojová rovnice elektrostatiky)

$$\begin{aligned}
T_{rr,r} + \frac{1}{r} T_{r\theta,\theta} + T_{rz,z} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) &= \rho \ddot{u}_r, \\
T_{r\theta,r} + \frac{1}{r} T_{\theta\theta,\theta} + T_{\theta z,z} + \frac{2}{r} T_{r\theta} &= \rho \ddot{u}_\theta, \\
T_{rz,r} + \frac{1}{r} T_{\theta z,\theta} + T_{zz,z} + \frac{1}{r} T_{rz} &= \rho \ddot{u}_z, \\
D_{r,r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{1}{r} D_{\theta,\theta} + D_{z,z} &= 0,
\end{aligned} \tag{B.2}$$

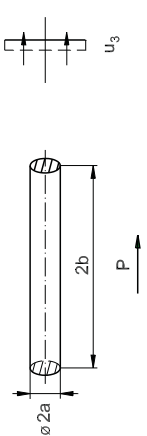
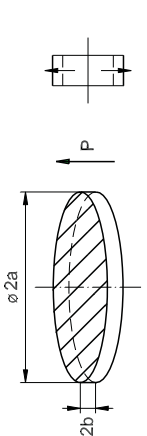
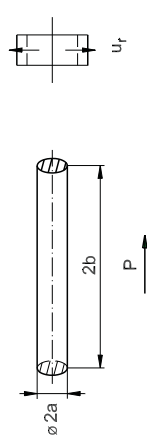
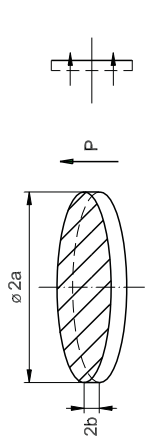
c) gradientní rovnice (vztahy mezi deformací a mechanickým posunutím a mezi intenzitou elektrického pole a elektrickým potenciálem)

$$\begin{aligned}
S_{rr} &= u_{r,r} , \\
S_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} (u_r + u_{\theta,\theta}) , \\
S_{zz} &= u_{z,z} , \\
S_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{1}{r} u_\theta \right) , \\
S_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(u_{\theta,z} + \frac{1}{r} u_{z,\theta} \right) , \\
S_{rz} &= \frac{1}{2} (u_{r,z} + u_{z,r}) , \\
E_r &= -\varphi_{,r} , \\
E_\theta &= -\frac{1}{r} \varphi_{,\theta} , \\
E_z &= -\varphi_{,z} .
\end{aligned} \tag{B.3}$$

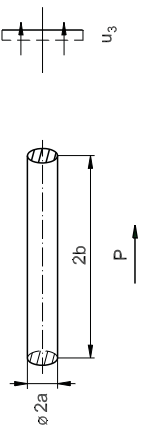
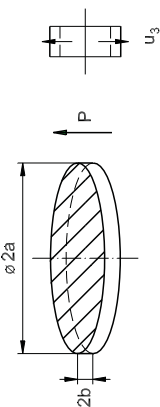
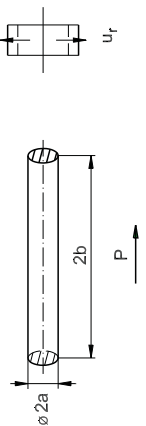
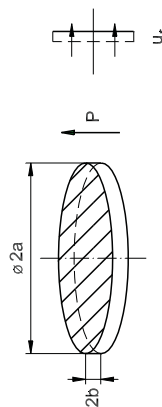
Příloha C

Základní parametry kruhových rezonátorů

V této příloze jsou souhrnně uvedeny parametry prostých módů kruhových rezonátorů odvozené v kapitole 3.1.

Mód kmitů	Poměrné vlnové číslo	Akustická rychlost	Koef. elmech. vazby
Podélné kmity tyče 	rezonance $\operatorname{tg}(\eta_r b) = \frac{\eta_r b}{k_{33}^2}$ antirezonance $\eta_a b = \frac{h\pi}{2}, h \text{ liché}$	$v_a = \sqrt{\frac{1}{\rho s_{33}^D}}$	$k_{33} = \frac{d_{33}}{\sqrt{s_{33}^E \varepsilon_{33}^T}}$
Tloušťkové kmity kruhové desky 	rezonance $\operatorname{tg}(\eta_r b) = \frac{\eta_r b}{k_t^2}$ antirezonance $\eta_a b = \frac{h\pi}{2}, h \text{ liché}$	$v_a = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}}$	$k_t = \frac{e_{33}}{\sqrt{c_{33}^D \varepsilon_{33}^S}}$
Radiální kmity tyče 	rezonance $\eta_r a \frac{J_0(\eta_r a)}{J_1(\eta_r a)} = 1 - \sigma'$ antirezonance $\eta_a a \frac{J_0(\eta_a a)}{J_1(\eta_a a)} = 1 - \sigma' - \frac{k_p'^2}{1 - k_p'^2} (1 + \sigma')$	$v_a = \sqrt{\frac{c_{11}^E}{\rho}}$	$k_p' = \frac{k_p + \sigma_p^E k_{33}}{\sqrt{(1 - (k_{33})^2) (1 - (\sigma_p^E)^2)}}$
Radiální kmity kruhové desky 	rezonance $\eta_r a \frac{J_0(\eta_r a)}{J_1(\eta_r a)} = 1 - \sigma_{12}^E$ antirezonance $\eta_a a \frac{J_0(\eta_a a)}{J_1(\eta_a a)} = 1 - \sigma_{12}^E - \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} (1 + \sigma_{12}^E)$	$v_a = \sqrt{\frac{1}{\rho s_{11}^E (1 - (\sigma_{12}^E)^2)}}$	$k_p = \frac{d_{31}}{\sqrt{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T}} \sqrt{\frac{2}{1 - \sigma_{12}^E}}$

Tab. C.1: Parametry piezokeramických kruhových rezonátorů, $\sigma_{12}^E = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}, \sigma' = \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E}, \sigma_p^E = -\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E s_{33}^E} \sqrt{\frac{2}{1 - \sigma_{12}^E}}$

Mód kmitů	Imittance	Parametry el. náhradního obvodu
	$Z = \frac{1}{j\omega\varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)} \frac{2b}{\pi a^2} \left(1 - k_{33}^2 \frac{\operatorname{tg}(\eta b)}{\eta b} \right)$	$C_0 = \varepsilon_{33}^T \frac{\pi a^2}{2b}$ $C_h' = \frac{8C_0 k_{33}^2}{h^2 \pi^2 - 8k_{33}^2}$ $L_h = \frac{b^2 \rho s_{33}^D}{2C_0 k_{33}^2}$
	$Z = \frac{1}{j\omega\varepsilon_{33}^S} \frac{2b}{\pi a^2} \left(1 - k_t^2 \frac{\operatorname{tg}(\eta b)}{\eta b} \right)$	$C_0 = \varepsilon_{33}^S \frac{\pi a^2}{2b}$ $C_h' = \frac{8C_0 k_t^2}{h^2 \pi^2 - 8k_t^2}$ $L_h = \frac{b^2 \rho}{2C_0 k_t^2 c_{33}^D}$
	$Y = j\omega\varepsilon_{33}^S \frac{\pi a^2}{2b} \left(1 + \frac{k_p'^2}{1 - k_p'^2} \frac{\eta a J_0(\eta a) - (1 - \sigma') J_1(\eta a)}{J_1(\eta a)} \right)$	$C_0 = \varepsilon_{33}^S \frac{\pi a^2}{2b}$ $C_h = \frac{2C_0 (1 + \sigma')}{(\eta_r a)^2 - (1 - (\sigma')^2)} \frac{k_p'^2}{1 - k_p'^2}$ $L_h = \frac{a^2 \rho}{2C_0 c_{11}^E (1 + \sigma')} \frac{k_p'^2}{1 - k_p'^2} \frac{1 - (\sigma')^2}{(\eta_r a)^2}$
	$Y = j\omega\varepsilon_{33}^T \frac{\pi a^2}{2b} \left(1 + \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{\eta a J_0(\eta a) - (1 - \sigma^E) J_1(\eta a)}{J_1(\eta a)} \right)$	$C_0 = \varepsilon_{33}^T \frac{\pi a^2}{2b}$ $C_h = \frac{2C_0 (1 + \sigma^E)}{(\eta_r a)^2 - (1 - (\sigma^E)^2)} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2}$ $L_h = \frac{a^2 \rho s_{11}^E (1 - \sigma_{12}^E)}{2C_0} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \frac{1 - (\sigma_{12}^E)^2}{(\eta_r a)^2}$

Tab. C.1 (pokračování): Parametry piezokeramických kruhových rezonátorů, $\sigma_{12}^E = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}$, $\sigma' = \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E}$, $\sigma_p^E = -\frac{s_{13}^E}{s_{11}^E s_{33}^E} \sqrt{\frac{2}{1 - \sigma_{12}^E}}$

Příloha D

Materiálové konstanty

$\lambda\mu$	11	12	13	33	55	66
$c_{\lambda\mu}^E$ [10^{10} Pa]	15,0	6,56	6,59	14,6	4,39	4,24
$s_{\lambda\mu}^E$ [10^{-12} Pa $^{-1}$]	9,10	−2,70	−2,90	9,50	22,8	23,6
$i\lambda$	15	31	33			
$e_{i\lambda}$ [C m $^{-2}$]	11,4	−4,32	17,4			
$d_{i\lambda}$ [10^{-12} mV $^{-1}$]	260	−78	190			
ij	11	33				
$\varepsilon_{ij}^S(r)$ [1]	1150	1260				
$\varepsilon_{ij}^T(r)$ [1]	1485	1709				
ρ [kg m $^{-3}$]	5700					

Tab. D.1: Materiálové konstanty piezoelektrické keramiky BaTiO₃ [19]

$\lambda\mu$	11	12	13	33	55	66
$c_{\lambda\mu}^E$ [10^{10} Pa]	15,1	8,88	8,97	13,1	2,50	3,12
$s_{\lambda\mu}^E$ [10^{-12} Pa $^{-1}$]	12,3	−3,74	-5,87	15,7	40,0	32,1
$i\lambda$	15	31	33			
$e_{i\lambda}$ [C m $^{-2}$]	11,8	−5,01	14,8			
$d_{i\lambda}$ [10^{-12} mV $^{-1}$]	474	−127	284			
ij	11	33				
$\varepsilon_{ij}^S(r)$ [1]	866	633				
$\varepsilon_{ij}^T(r)$ [1]	1500	1250				
ρ [kg m $^{-3}$]	7764					

Tab. D.2: Materiálové konstanty piezoelektrické keramiky NCE40 [96]

$\lambda\mu$	11	12	13	33	55	66
$c_{\lambda\mu}^E$ [10 ¹⁰ Pa]	12,9	8,26	8,85	12,1	2,04	2,30
$s_{\lambda\mu}^E$ [10 ⁻¹² Pa ⁻¹]	17,0	-4,75	-8,92	21,3	49,0	43,4
$i\lambda$	15	31	33			
$e_{i\lambda}$ [C m ⁻²]	13,7	-4,80	17,2			
$d_{i\lambda}$ [10 ⁻¹² mV ⁻¹]	669	-208	443			
ij	11	33				
$\varepsilon_{ij}^S(r)$ [1]	906	823				
$\varepsilon_{ij}^T(r)$ [1]	1940	1900				
ρ [kg m ⁻³]	7850					

Tab. D.3: Materiálové konstanty piezoelektrické keramiky NCE51 [96]

keramika	σ_{12}^E [1]	σ_{13}^E [1]	σ_p^E [1]	σ' [1]	k_{33} [1]	k_t [1]	k_p' [1]	k_p [1]
BaTiO ₃	0,30	0,31	0,53	0,44	0,50	0,40	-0,12	-0,36
NCE40	0,30	0,42	0,72	0,59	0,68	0,48	-0,19	-0,58
NCE51	0,28	0,47	0,78	0,64	0,74	0,50	-0,17	-0,65

Tab. D.4: Porovnání materiálových parametrů

Název: Spektrální vlastnosti kruhových piezokeramických rezonátorů
Autor: Martin Pustka
Vydal: VÚTS, a.s., Svárovská 619, Liberec XI-Růžodol I, 460 01 Liberec
Vytiskl: GEOPRINT s.r.o., Krajinská 1100, 460 01 Liberec 1
ISBN: 978-80-87184-88-2
Rok vydání: 2019
Vydání: první
Vazba: lepená
Počet výtisků: 100

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou.