

Ing. Emil Ulrych, CSc. :

Výpočet deformací a napjatosti prostorových potrubních
systémů metodou konečných elementů.

(Docentská habilitační práce)

VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ
Ústřední knihovna
LIBEREC I, STUDENTSKÁ 5
PSČ 431 17

U 255 S

UNIVERZITNÍ KNIHOVNA
TECHNICKÉ UNIVERZITY V LIBERCI



3146088192

Praha, listopad 1990.

OBSAH

Přehled označení fyzikálních veličin.....	2
Úvod.....	3
Princip statického výpočtu potrubních systémů metodou konečných elementů.....	6
Matice tuhosti a matice příčinkových součinitelů.....	8
Vektor zobecněných sil.....	25
Sestavení a řešení základní soustavy pro výpočet potrubních systémů nebo příhradových konstrukcí.....	29
Výpočet sil a momentů v libovolném bodě střednice přímého prvku.....	32
Kategorizace napětí a přípustná napjatost potrubních prvků	
1. Zatížení potrubních systémů.....	34
2. Základy pro stanovení napětí.....	35
3. Kategorizace napětí.....	36
Příklady pro stanovení a vyhodnocení napjatosti přímého prvku potrubí.....	40
Závěr.....	42
Literatura.....	43
Tabulky I. až VI.	

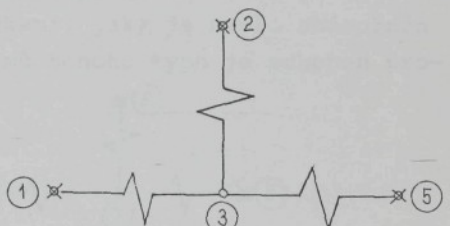
Přehled označení fyzikálních veličin

x, y, z	- pravouhlé souřadnice.....	[mm]
a_{ij}	- směrové kosíny.....	[1]
l	- délka přímých úseků.....	[mm]
R	- poloměr zakřivení střednice kolena.....	[mm]
α	- středový úhel kolena	[rad]
D	- vnější průměr trubky	[mm]
s	- tloušťka stěny trubky	[mm]
$\delta_x, \delta_y, \delta_z$	- složky posuvů	[mm]
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	- složky natočení	[rad]
F_x, F_y, F_z	- složky síly	[N]
M_x, M_y, M_z	- složky momentu	[N.mm]
L	- mechanická práce	[N.mm]
p	- přetlak media	[MPa]
q	- vnější zatížení.....	[N.mm ⁻¹]
t	- teplota	[°C]
c_{ij}	- lokální příčinkové součinitele prvků potrubí	[mm.N ⁻¹]; [mm(N.mm) ⁻¹]
δ_{ij}	- příčinkové součinitele potrubní větve ..	[mm.N ⁻¹]; [mm(N.mm) ⁻¹]
K_{ij}	- prvky tuhostní matice	[N.mm ⁻¹]; [N]
Δ_i	- složky sloupcové matice zobecněných posunutí	[mm]; [rad]
R_i	- složky sloupcové matice zobecněných sil	[N]; [N.mm]
m, n	- označení počátku a konce střednice větve	-
S	- plocha průřezu trubky	[mm ²]
J	- moment setrvačnosti průřezu trubky	[mm ⁴]
E	- modul pružnosti v tahu	[MPa]
μ	- Poissonova konstanta	[1]
α_t	- součinitel teplotní roztažnosti	[°C ⁻¹]
$\sigma_o, \sigma_r, \sigma_{\tau}$	- napětí osová, tečné, radiální	[MPa]
σ_{red}	- redukované napětí	[MPa]

Úvod.

Ke statickému řešení potrubních systémů (nebo příhradových konstrukcí) lze dospět i bez použití metody konečných elementů. Ve stavařské staticce se již dávno prováděl výpočet rámových konstrukcí např. metodou přenosových matic či přímou deformační metodou. K řešení deformací a napjatosti potrubních systémů byla ve SVŮSS koncem šedesátých let vyvinuta metoda, vhodná pro numerický výpočet na počítačích s omezenou paměťovou kapacitou (viz lit [1,10]), kterou jsme nazvali "met⁰dou postupných inverzí". Program pro realizaci uvedené metody, vypracovaný pro počítač ZUSE Z-23 se tehdy velmi osvědčil a zkušenosti, získané s jeho provozováním, se staly důležitým podkladem pro vývoj dalších algoritmů pro statický výpočet potrubí na středních a posléze na personálních počítačích. Z pedagogického hlediska je tudíž vhodné se o zmíněné metodě "postupných inverzí" alespoň stručně zmínit.

Princip zmíněné metody vysvětlíme na jednoduchém příkladě potrubního systému o třech větvích, schématicky znázorněného na obr. 0.1.



Obr. 0.1.

Označíme-li $[\delta_{ij}]^{m,n}$ matici příčinkových součinitelů větve m , n , $[X_i]^m$ vektor reakcí v bodě m , $[\bar{\Delta}_i]^m$ vektor posuvů v bodě m a $[\Delta_i]^3$ neznámý vektor posuvů v uzlu 3, lze deformační výminky v uzlu 3 vyjádřit vztahy

$$[\delta_{ij}]^{13} [X_i]^1 = ([\bar{\Delta}_i]^1 - [\Delta_i]^3), \quad (i, j = 1, \dots, 6) \quad (0.1)$$

$$[\delta_{ij}]^{23} [X_i]^2 = ([\bar{\Delta}_i]^2 - [\Delta_i]^3) \quad (0.2)$$

$$[\delta_{ij}]^{35} [X_i]^3 = ([\bar{\Delta}_i]^3 + [\Delta_i]^3) \quad (0.3)$$

Rovnice (0.1) a (0.2) invertujeme. Označíme-li

$$[d_{ij}] = ([\delta_{ij}]^{13})^{-1} + ([\delta_{ij}]^{23})^{-1} \quad (0.4)$$

$$[\bar{\Delta}_i] = [d_{ij}] ([\delta_{ij}]^{13})^{-1} [\bar{\Delta}_i]^1 + ([\delta_{ij}]^{23})^{-1} [\bar{\Delta}_i]^2, \quad (0.5)$$

Pak při respektování statické výminky rovnováhy v uzlu 3

$$[X_i]^1 + [X_i]^2 = [X_i]^3 \quad (0.6)$$

lze dospět ke vztahu

$$[d_{ij}]^{-1} [X_i]^3 = [\bar{\Delta}_i] - [\bar{\Delta}_i]^3 \quad (0.7)$$

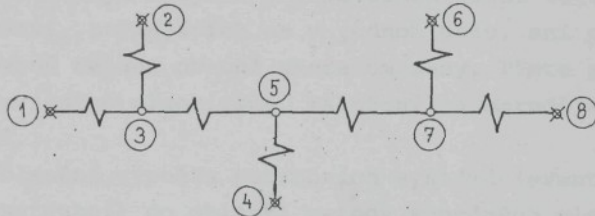
Fyzikální význam poslední rovnice vyplývá ze srovnání s rovnicemi (0.1) event. (0.2). Rovnice (0.7) představuje deformační výminku myšlené redukované (fiktivní) větve, jejíž účinek na větve 35 (v uzlu 3) je ekvivalentní výslednému účinku skutečných větví 13 a 23 v témž bodě.

Sloučením rovnic (0.3) a (0.7) obdržíme posléze rovnici pro neznámý vektor $[X_i]^3$:

$$([d_{ij}]^{-1} + [\delta_{ij}]^{35}) [X_i]^3 = [\bar{\Delta}_i] + [\bar{\Delta}_i]^3 \quad (0.8)$$

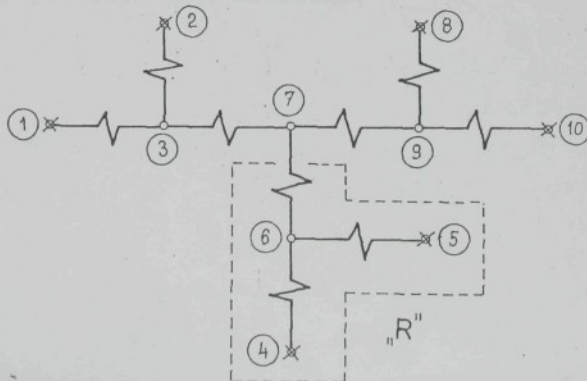
Řešením poslední rovnice a postupným zpětným dosazením do (0.7), (0.1), (0.2) dostaneme zbývající neznámé reakce, jakož i posuvy bodu 3.

Je zřejmé, že analogickým opakováním těchto operací lze vyřešit každý otevřený potrubní systém, tvořený jednou hlavní sběrnou a jednoduchými odbočkami, jaký je např. znázorněn na obr. (0.2). Výpočet systémů tohoto typu je schopen pro-



obr. 0.2

vádět automaticky zmíněný algoritmus, založený na popsané metodě. Ke komplikacím však dochází již v případech, jestliže se některá z odboček dále větví (viz obr. 0.3)



obr. 0.3

V tomto případě je nutné nejprve určit tzv. redukovanou matici vyznačeného subsystému "R", vložit tuto matici do hlavního systému a po vyřešení reakcí provést jejich zpětné dosazení do vedlejšího systému. U složitějších systémů vede tento způsob ke komplikacím v práci zadavatele i operátora a je na újmu automatického průběhu výpočtu.

Konečně v případech, kdy daný potrubní systém tvoří uzavřené obvody (což je u složitých systémů běžné), je přímé řešení danou metodou zcela nemožné (je možné pouze přibližné řešení metodou postupných aproximací, které může být v některých případech velmi pomalé a obtížné).

Zvážení uvedených nevýhod spolu s rostoucími požadavky zákazníků na řešení stále obecnějších a rozsáhlejších systémů vedly posléze k vývoji nového programu pro střední počítač, budovaného na kvalitativně vyšší bázi.

Základní ideou pro vývoj nového algoritmu pro výpočet posuvů a reakcí rozvětvených potrubních systémů byl požadavek neomezených možností vzájemné vazby mezi jednotlivými stavebními prvky potrubí. Předpokládá se, že každá větev systému může být spojena s libovolnou jinou větví, přičemž počet větví, stýkajících se v jednom uzlu, ani počet uzavřených obvodů nejsou obecně shora omezeny. Těmto požadavkům vyhovuje jedině algoritmus, založený na metodě konečných elementů.

Začlenění výpočtu potrubních systémů (event. příhradových konstrukcí) do oblasti metody konečných elementů přináší však i řadu dalších výhod - jak z hlediska teoretického řešení, tak pro algoritmizaci - a proto jejich zahrnutí do metody konečných elementů pokládáme za užitečné z aplikačního i pedagogického hlediska.

Princip statického výpočtu potrubních systémů
metodou konečných elementů

V následujících úvahách se zaměříme na popis metody řešení prostorových konstrukcí, jejichž základním stavebním prvkem je jednorozměrný makroelement. Obecně se jedná o konstrukční prvek, jehož délkový rozměr (měřený podél střednice, která může být obecně zakřivená) je zpravidla řádově větší, než ostatní dva rozměry (což ovšem není podmínkou). Z hlediska metody konečných elementů se jedná o prvek, který má 2 stykové body, přičemž v každém stykovém bodě je definováno 6 složek zobecněných posunutí - t. j. v daném případě 3 složky posuvů $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ a 3 složky natočení $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$. Jednorozměrný makroelement je v technické praxi realizován "prutem" či "nosníkem" nebo "potrubní větví", čímž se rozumí část potrubí mezi dvěma uzly. Zde je třeba upozornit, že k statickému řešení potrubních systémů lze aplikovat i jiný postup, takový, že každou potrubní větev rozdělíme na řadu krátkých úseků, které tvoří základní elementy. Z hlediska technických aplikací se však tento postup jeví jako méně vhodný, a proto se jím nebudeme dále zabývat.

Prvním nezbytným krokem, nutným k realizaci statického výpočtu potrubních systémů nebo příhradových konstrukcí je stanovení

matice tuhosti jednorozměrného makroelementu.

K objasnění použité symboliky sestavme nejprve sloupcové matice $\underline{u}^e$ a $\underline{F}^e$, vytvořené ze složek zobecněných posunutí, event. zobecněných sil v obou stykových bodech

e-tého elementu (t.j. větve m, n). Jedná se o sloupcevé matice (vektory) typu $[12 \times 1]$, které se skládají ze dvou subvektorů typu $[6 \times 1]$:

$$\underline{u}^e = \begin{bmatrix} \underline{u}_m^e \\ \underline{u}_n^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix}_m^e, \quad \underline{F}^e = \begin{bmatrix} \underline{F}_m^e \\ \underline{F}_n^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}_n^e \quad (1)$$

Jak patrně, odpovídají složkám posuvů $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ ve směrech souřadných os složky sil X, Y, Z a složkám natočení $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ okolo souřadných os momenty M_x, M_y, M_z .

Matice tuhosti e-té větve

$$\underline{k}^e = [k_{ij}]_{mn}$$

je typu $[12 \times 12]$ a skládá se ze 4 submatic typu $[6 \times 6]$

$$\underline{k}^e = \left\{ \begin{bmatrix} k_{ij} \end{bmatrix}_{11}, \begin{bmatrix} k_{ij} \end{bmatrix}_{12}, \begin{bmatrix} k_{ij} \end{bmatrix}_{21}, \begin{bmatrix} k_{ij} \end{bmatrix}_{22} \right\}^e; \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \dots, 6 \\ j = 1, 2, 3, \dots, 6 \end{matrix} \quad (2)$$

Obecný prvek matice tuhosti - $[k_{ij}]_{mn}$ - má význam síly v bodě $\underline{m}$, vyvolané jednotkovým posunutím v bodě $\underline{n}$. Pro objasnění uvedeme několik příkladů:

- $[k_{11}]_{11}$ značí složku síly $[F_1]_1 = [X]_1$, vyvolanou jednotkovým posunutím $[u_1]_1 = [\delta_x]_1$.
- $[k_{11}]_{12}$ značí složku síly $[F_1]_1 = [X]_1$, vyvolanou jednotkovým posunutím $[u_1]_2 = [\delta_x]_2$.
- $[k_{14}]_{12}$ značí složku síly $[F_1]_1 = [X]_1$, vyvolanou jednotkovým posunutím $[u_4]_2 = [\varphi_x]_2$.
- $[k_{42}]_{12}$ značí složku síly $[F_4]_1 = [M_x]_1$, vyvolanou jednotkovým posunutím $[u_2]_2 = [\delta_y]_2$.

Význam ostatních složek je analogický. Složky submatice $[k_{ij}]_{mn}$ se vyznačují speciálními symetrickými vlastnostmi, které jsou důsledkem Maxwellovy věty o vzájemnosti posuvů. Tyto vlastnosti lze vyjádřit vztahy :

$$\begin{aligned} [k_{ij}]_{mn} &= [k_{ji}]_{mn} \dots \dots \text{pro } m = n, & m, n = 1, 2 \\ [k_{ij}]_{mn} &= [k_{ji}]_{nm} \dots \dots \text{pro } m \neq n, \end{aligned} \quad (3)$$

a matice tuhosti je tedy symetrická.

Pro další šetření je nezbytné stanovení prvků matice tuhosti v závislosti na geometrických parametrech daného prutu (větve).

Matice tuhosti a matice příčinkových součinitelů.

Úvodem tohoto odstavce je třeba se alespoň zmínit o některých specifických zvláštnostech, které sebou přinášejí řešení příhradových konstrukcí nebo potrubních systémů.

Stavebními prvky příhradových konstrukcí jsou různé typy normalizovaných válcovaných profilů, jejichž průřez je charakterizován momenty setrvačnosti J_x , J_z vzhledem k centrálním osám setrvačnosti a tuhostí v kroucení J_k . Respektuje-li se ve výpočtu i osová deformace prutu, je třeba jako další parametr průřezu brát v úvahu i jeho plochu S .

Přechod k problematice potrubních systémů představují trubkové příhradové konstrukce. Symetrie mezikruhového průřezu vede ke zjednodušení vztahů pro parametry průřezu. Pak platí :

$$\begin{aligned} J_x = J_y &= \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) ; J_k = 2J_x , \\ S &= \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) , \end{aligned} \quad (4)$$

kde D je vnější a d vnitřní průměr trubky.

Stavebními elementy příhradových konstrukcí jsou převážně prismatické pruty a jejich matici tuhosti lze stanovit dále popsaným postupem pro přímý jednorozměrný makroelement.

K silovým účinkům, působícím na příhradové konstrukce, patří jednak osamělé síly, jejichž účinek se nejčastěji zavádí ve styčnicích, jednak spojitě obložení, vyvolané především

vlastní tíhou, tlakem větru atp. Při výsledné kontrole jednotlivých elementů je třeba často přihlížet i k problémům stability (u stlačovaných prutů kontrola na vzpěr či kombinace ohybu a vzpěru).

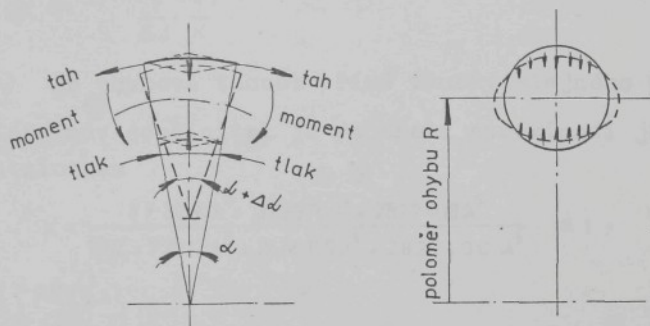
Potrubní systémy se od prostých příhradových konstrukcí liší především podstatně složitějším tvarem střednice. Základním výpočetním elementem potrubních systémů je větev, tj. část potrubí mezi dvěma uzly, nebo mezi uzlem a zakotvením. Fyzicky je větev tvořena posloupností základních stavebních prvků potrubí, k nimž především patří :

- 1) „Přímé prvky“ , t.j. úseky tvořené jen rovnou trubkou
- 2) „Ohyby“ či „kolena“ , t.j. úseky trubky, jejichž střednice má tvar kruhového oblouku. Koleno může být v prostoru různě orientováno vzhledem k základnímu souřadnému systému x, y, z . K jednoznačnému určení polohy kolena v prostoru se ve výpočtářské praxi osvědčilo zavedení lokálního souřadného systému „ ntb “ , t.j. systému, jehož osy určují směr normály, tečny a binormály střednice kolena. Systém ntb lze převést v základní systém xyz úhlovou transformací (natočením), která bude blíže popsána v dalších úvahách. Z technologického hlediska rozlišujeme dále kolena hladká, záhybová nebo segmentová.

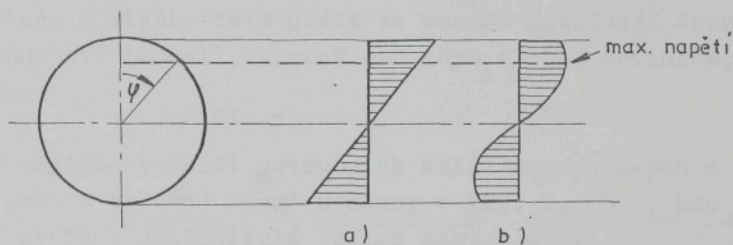
S problémem ohybu zakřivené trubky v rovině jejího zakřivení se poprvé zabýval Kármán [6] a odtud se součinitel ohybové tuhosti K této trubky často nazývá „Kármánův součinitel“. V uvedené práci Kármán zjistil, že ohybové napětí, rovnoběžné s osu trubky, vyvolává složku kolmou k této ose, která při ohybovém momentu zvětšujícím křivost, stlačuje vnější a vnitřní část trubky a způsobuje zploštění. Viz obr. 1.

To má za následek, že předpoklad přímkového rozdělení u ohnuté trubky resp. kolena neplatí, poněvadž maximální podélné napětí (vyvolané ohybovým momentem) se blíží k neutrální ose - viz obr. 2.

Naznačené rozdělení napětí a deformace průřezu trubky zmenšuje odpor ohnuté trubky proti ohybu, takže stanovenému prohnutí na jejím konci přísluší menší ohybový moment než trubky přímé stejného průřezu a stejné délky. Z tohoto



Obr.1 Ohyb trubky, namáhaný ohybovým momentem



Obr.2 Rozložení podélného napětí: a) v přímé trubce
b) v ohybu trubky

důvodu lze ohybovou tuhost zakřivené trubky vyjádřit vzorcem

$$\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{K},$$

kde $\frac{1}{EJ}$ je ohybová tuhost přímé trubky stejného průřezu.

Kármánův součinitel je po třetí aproximaci jeho řešení dán zlomkem

$$K = \frac{3 + 3280\lambda^2 + 329375\lambda^4 + 2822400\lambda^6}{252 + 73912\lambda^2 + 2446175\lambda^4 + 2822400\lambda^6} \approx 1, \quad (5)$$

kde $\lambda = sR/r_s^2$,

s - tloušťka stěny trubky,

R - poloměr zakřivení střednice ohnuté trubky,

r_s - střední poloměr průřezu trubky,

E - modul pružnosti materiálu trubky v tahu.

Problémem tuhosti a také napjatosti ohnuté trubky se později zabývala celá řada autorů. Nejznámější je to práce autorů Clarka a Reissnera [7], kteří se zabývali touto trubkou namáhanou ohybovým momentem v rovině jejího zakřivení i v rovině kolmé. Výsledky této práce se vesměs používají dosud. Součinitel ohybové tuhosti, platný pro ohyb v obou rovinách, je dán vzorcem

$$K = \lambda / 1,65 \approx 1.$$

Součinitelé ohybové tuhosti potrubních kolen segmentových a záhybových jsou v obdobné formě uvedeny v lit. č. [8], kde jsou rovněž uvedeny součinitelé jejich napjatosti.

3) „Tuhé prvky“, mezi které patří zejména armatury, tvořené tlustostěnnými odlitky nebo výkovky.

Tuhost těchto částí je obvykle o řád vyšší, než tuhost ostatních prvků na trase potrubní větve. Při řešení deformací a napjatosti systému jako celku považujeme tyto části za dokonale tuhé.

Pracuje-li potrubní systém za vyšších teplot, pak rozhodující složkou zatížení je zpravidla zatížení, vyvolané teplotní dilatací - (pro ilustraci uvádíme, že zahřejeme-li oboustranně vetknutou trubku o 1°C , vzroste napětí cca o 2,5 MPa). Dále je třeba respektovat zatížení od vlastní tíhy a od přetlaku pracovního média.

Tuhost prutů (základních stavebních prvků příhradových konstrukcí) se vyjadřuje obvykle přímo pomocí matice tuhosti $\underline{k} = [k_{ij}]$, jejíž definice byla již popsána. Ke stanovení tuhosti potrubní větve je však vhodnější vycházet z pojmu poddajnosti jednotlivých stavebních prvků. Poddajnost jednorozměrného makroelementu je charakterizována maticí příčinkových součinitelů

$$\underline{c} = [c_{ij}] .$$

Fyzikální význam prvků matice příčinkových součinitelů je opačný, než význam prvků matice tuhosti k_{ij} , tj. c_{ij} značí i -tou složku vektoru zobecněných posunutí, vyvolanou j -tou složkou zobecněné síly. Pojmy tuhost a poddajnost jsou komplementární a vzájemně transformovatelné podle vztahu

$$[k_{ij}] = [c_{ij}]^{-1} \quad (6)$$

tj. matice tuhosti je inverzní vzhledem k matici příčinkových součinitelů.

Zavedení příčinkových součinitelů je obzvláště vhodné pro stanovení poddajnosti (a tedy i tuhosti) potrubní větve, která sestává z mnoha dílčích prvků (subelementů). Označíme-li poddajnost r -tého stavebního prvku potrubní větve jako $\underline{c}_r$

$$\underline{c}_r = [c_{ij}]_r ,$$

pak bude celková poddajnost větve dána algebraickým součtem poddajností jednotlivých stavebních prvků potrubí, tedy

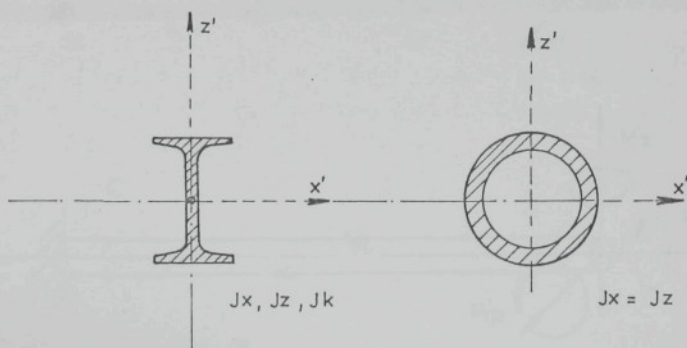
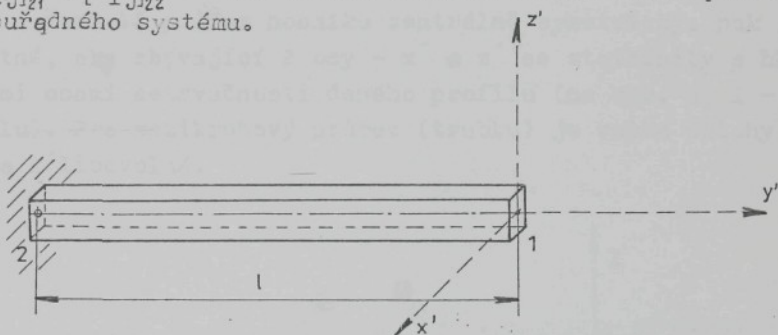
$$\underline{c} = [c_{ij}] = \sum_{r=1}^n [c_{ij}]_r . \quad (7)$$

Poddajnost jednotlivých stavebních prvků potrubí musí být ovšem při sumaci podle vztahu (7) vztažena ke společnému počátku - v daném případě k počátečnímu bodu m potrubní větve. Na základě znalosti matice $[c_{ij}]$ lze již snadno určit matici tuhosti $[k_{ij}]$ podle (6).

V opačném případě (kdybychom vyšli z matic tuhosti jednotlivých stavebních elementů) by postup, vyjádřený vztahem (7) nebyl možný.

Bylo by velmi obtížné a nepřehledné, kdybychom určovali poddajnost event. tuhost daného konstrukčního prvku pro případ jeho obecné polohy v prostoru. Podstatně jednodušší a efektivnější postup spočívá v tom, že nejprve určíme tuhost či poddajnost daného elementu v lokální souřadné soustavě x', y', z' , kterou volíme např. tak, aby se střednice přímého prvku ztotožňovala s některou osou, nebo v případě potrubního kolena - je lokální systém x', y', z' natočen tak, že se ztotožňuje se systémem „ntb“. Teprve po stanovení všech složek matice poddajnosti (či tuhosti) provedeme její transformaci do globálního systému x, y, z .

Vhodným využitím transformací lze dosáhnout ještě dalšího zjednodušení problému. Není totiž třeba počítat všech 144 prvků matice k^e podle (2). Stačí určit pouze prvky submatice $[k_{ij}]_{11}$, která odpovídá tuhosti makroelementu na jednom konci větknutého. Zbývající submatice - $[k_{ij}]_{12}$, $[k_{ij}]_{21}$, $[k_{ij}]_{22}$ - lze získat vhodnou transformací posunutím souřadného systému.

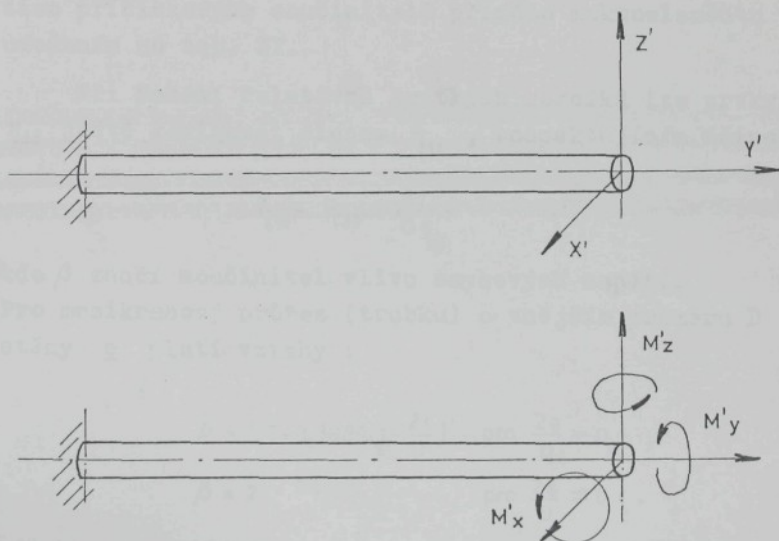


Obr.3 K odvození tuhosti a poddajnosti přímého prvku

Postup odvození matice příčinkových součinitelů, resp. matice tuhosti ukážeme na přímém prvku. Nechť je tento přímý prvek orientován podle obr. 3 tak, že jeho střednice leží v ose y' lokálního souřadného systému. Z hlediska elementární pružnosti se tedy jedná o přímý nosník, na jednom konci (v bodě 2) vetknutý, na opačném konci (v bodě 1) zatížený složkami zobecněných sil, tj. třemi složkami síly X' , Y' , Z' a třemi složkami momentu M'_x , M'_y , M'_z . (viz obr. 4)

Kladný smysl sil předpokládáme souhlasný s kladným směrem os $x'y'z'$. Kladný smysl momentů lze volit dvojím způsobem - buď podle pravidla pravotočivého nebo levotočivého šroubu. (Kladný smysl momentu M'_y souhlasí se smyslem otáčení šroubu, který postupuje v kladném směru osy y' .) Obě volby jsou v praxi stejnocenné, musí se však ve výpočtu důsledně dodržovat. Pokud nebude řečeno jinak, budeme v dalším vycházet z pravidla pravotočivého šroubu.

Není-li průřez nosníku centrálně symetrický, pak je nutné, aby zbývající 2 osy - x' a z' se ztotožnily s hlavními osami setrvačnosti daného profilu (na obr. 3 I - profilu). Pro mezikruhový průřez (trubku) je volba polohy os x' a z' libovolná.



Obr.4 Kladný smysl sil a momentů

Hledaná matice příčinkových součinitelů $[c'_{ij}]_{11}$ popisuje posuvy nosníku v bodě 1, vyvozené silami, působícími v bodě 1, přičemž označení „s čárkou“ přiřazuje tuto matici lokálnímu souřadnému systému x' , y' , z' . (Osa prutu je totožná s osou y .)

Abychom se vyhnuli v následující úvaze stálému opakování vnějších indexů 11, zavedeme pro matici příčinkových součinitelů vetknutého nosníku zjednodušené označení

$$[c'_{ij}]_{11} = [\eta'_{ij}] \quad (8)$$

Analogické označení bude platit pro matici tuhosti :

$$[k'_{ij}]_{11} = [k'_{ij}] \quad (9)$$

K objasnění fyzikálního významu jednotlivých prvků matice příčinkových součinitelů poslouží schéma, uvedené na tabulce I., kde je původní matice $[\eta'_{ij}]$ typu $[6 \times 6]$ rozdělena (ve smyslu fyzikálního významu) do 4 submatic typu $[3 \times 3]$.

Přihlížíme-li podle technické teorie ohybu pouze k deformacím, vyvozeným ohybem, tahem a kroucením, nabývá matice příčinkových součinitelů přímého makroelementu tvaru, uvedeném na tab. II.

Při řešení relativně krátkých nosníků lze prvky η'_{11} a η'_{33} ještě korigovat členem $\bar{\eta}_{11}$, respektujícím účinek smyku

$$\bar{\eta}_{11} \doteq \bar{\eta}_{33} = \frac{\beta 1}{G s}, \quad (10)$$

kde β značí součinitel vlivu smykových napětí.

Pro mezikruhový průřez (trubku) o vnějším průměru D a tloušťce stěny s platí vztahy :

$$\begin{aligned} \beta &= 1,2 + 0,8889(1 - \frac{2s}{D}) \dots \text{pro } \frac{2s}{D} > 0,1, \\ \beta &= 2 \dots \dots \dots \text{pro } \frac{2s}{D} \leq 0,1. \end{aligned}$$

Pro obdélníkový průřez je přibližně $\beta = 1,2$.

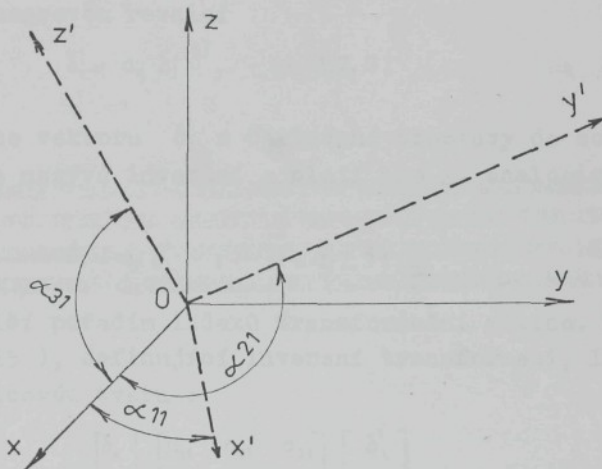
Fyzikální význam prvků matice tuhosti $[x'_{ij}]$ je vyjádřen tabulkou III. Prvky matice tuhosti přímého prvku jsou patrné z tab. IV.

Vynásobením se lze snadno přesvědčit, že platí :

$$[\eta'_{ij}][x'_{ij}] = [1]$$

a matice tuhosti je tedy inverzní vzhledem k matici příčinkových součinitelů. Poznamenejme ještě, že matice $[\eta'_{ij}]$ i $[x'_{ij}]$ jsou v důsledku Maxwellovy věty o vzájemnosti posuvů symetrické, t.j. :

$$\begin{aligned}\eta'_{ij} &= \eta'_{ji} \\ x'_{ij} &= x'_{ji} .\end{aligned}$$



Obr.5 Obecné natočení souřadného systému

V dalším přistoupíme k transformaci matic $\eta' = [\eta'_{ij}]$ a $\underline{x}' = [x'_{ij}]$ do globálního („nečárkovaného“) systému x, y, z . Vzájemná poloha obou systémů je znázorněna na obr. 5. Vztah mezi oběma systémy definuje transformační matice $\underline{a}$

$$\underline{a} \equiv [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

kde

$$a_{ij} = \cos(\widehat{x'_i, x_j}). \quad (12)$$

Tři složky posuvů $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ definují kartézský vektor posuvů $\underline{\delta}$:

$$\underline{\delta} \equiv [\delta_i] = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Transformace kartézského vektoru δ_i do čárkované soustavy je dána tenzorovou rovnicí

$$\delta'_i = a_{ij} \delta_j^{(1)}, \quad (i=1,2,3). \quad (14)$$

Transformace vektoru δ'_i z čárkované soustavy do soustavy základní se nazývá inverzní a platí pro ní analogický vztah

$$\delta_i = a_{ji} \delta'_j, \quad (i=1,2,3), \quad (15)$$

který se liší pořadím indexů transformační matice. Poslední rovnici (15), definující inverzní transformaci, lze napsat také v maticovém tvaru :

$$\begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta'_x \\ \delta'_y \\ \delta'_z \end{bmatrix} \quad (16)$$

1) Při zápisu rovnice (14) a dalších tenzorových rovnic

nebo symbolicky

$$\underline{\delta} = \tau_{\underline{a}} \underline{\delta}', \quad (17)$$

kde $\tau_{\underline{a}}$ značí matici, transponovanou vzhledem k (11)

Vektor $\underline{u}$ ²⁾ zobecněných posunutí m-tého bodu lze rozštěpit na kartézský vektor posuvů $\underline{\delta}'$ a kartézský vektor natočení $\underline{\varphi}'$

$$\underline{u}' = \begin{bmatrix} \underline{\delta}' \\ \underline{\varphi}' \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \delta'_x \\ \delta'_y \\ \delta'_z \\ \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \end{bmatrix}_m. \quad (18)$$

Protože pro oba kartézské vektory $\underline{\delta}'$ i $\underline{\varphi}'$ platí při přechodu od lokálního do globálního souřadného systému inverzní transformace (16) resp. (17), bude se vektor (sloupcová matice) zobecněných posunutí transformovat podle vztahu

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{\delta} \\ \underline{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{\underline{a}} & 0 \\ 0 & \tau_{\underline{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\delta}' \\ \underline{\varphi}' \end{bmatrix} = \tau_{\underline{t}} \underline{u}, \quad (19)$$

kde $\tau_{\underline{t}}$ značí matici, transponovanou vzhledem k matici $\underline{t}$:

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13}, 0, 0, 0 \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, 0, 0, 0 \\ a_{31}, a_{32}, a_{33}, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ 0, 0, 0, a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ 0, 0, 0, a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Za povšimnutí stojí, že rovnice (19) je analogická vztahu (17), místo transformační matice $\underline{a}$ zda však vystupuje matice $\underline{t}$.

respektujeme Einsteinovo sčítací pravidlo-sčítá se podle indexu, který se opakuje, bez uvedení sumačního znaku Σ).

2) $\underline{u}$ není skutečný fyzikální vektor, ale pouze sloupcová matice.

Uvažujme dále kartézský tenzor

$$\underline{I} = \tau_{ij} \cdot$$

Jeho transformace při pootočení souřadné soustavy je definována rovnicí

$$\tau'_{ij} = a_{jk} a_{ji} \tau_{kl}, \dots (i, j = 1, 2, 3) \quad (21)$$

kterou lze psát v maticovém tvaru

$$\underline{I}' = \underline{a} \underline{I} \underline{a}^T. \quad (22)$$

Pro inverzní transformaci - ze soustavy čárkované (lokální) do soustavy nečárkované (globální) - bude platit analogický vztah, ve kterém se změní pouze pořadí součinitelů; tedy:

$$\underline{I} = \underline{I}' \underline{a} \underline{a}^T. \quad (23)$$

Lze ukázat, že analogický vztah platí i pro transformaci matice příčinkových součinitelů nebo matice tuhosti, s tím rozdílem, že místo matice $\underline{a}$ použijeme matici $\underline{t}$, definovanou vztahem (20) a matici k ní transponovanou $\underline{t}^T$. Bude tedy platit:

$$\begin{aligned} \underline{\eta} &= \underline{t}^T \underline{\eta}' \underline{t}, \\ \underline{x} &= \underline{t}^T \underline{x}' \underline{t}, \end{aligned} \quad (24)$$

nebo ve složkové symbolice

$$\begin{aligned} [\eta_{ij}] &= [t_{ji}] [\eta'_{ij}] [t_{ij}], \\ [x_{ij}] &= [t_{ji}] [x'_{ij}] [t_{ij}]. \end{aligned}$$

Součiny prvků transformačních matic $\underline{t}$, $\underline{t}^T$ musí splňovat relaci ortogonálnosti

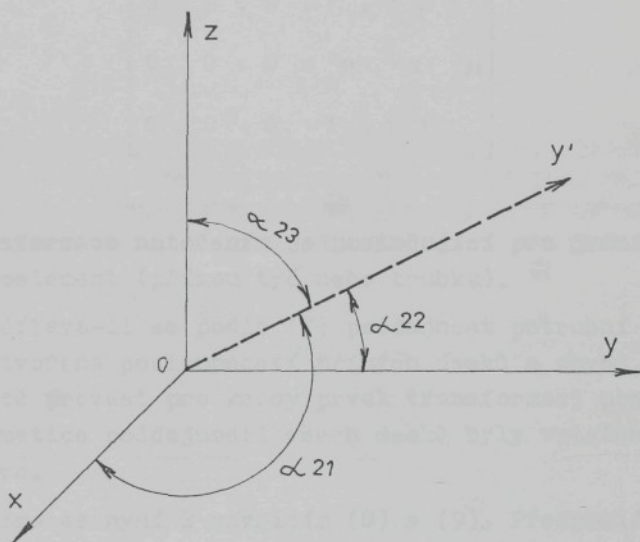
3)

$$a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i=j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

stejně jako při transformaci pravého tenzoru, což vede k

3) Nezavádíme zde Kroneckerovo delta δ_{ij} , aby nedošlo k záměně se složkami posuvů δ_i .

jistému zjednodušení algebraických operací. K dalšímu zjednodušení vede případ mezikruhového průřezu (trubky).



Obr.6 Pootočení osy y

Protože mezikruhový průřez je centrálně symetrický, bude matice poddajnosti i tuhosti invariantní vůči poloze os x' , z' - pouze osa y' zaujme novou polohu y . Jak je zřejmé z obr. 6, budou pro makroprvek, jehož střednice leží v ose y' , proměnné pouze směrové kosiny a_{2i} , kdežto směrové kosiny a_{4i} , a_{3i} budou rovny 1 a transformační matice $\underline{t}$ nabývá v tomto případě tvaru :

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Transformace natočením je postačující pro jednoprvkový makroelement (přímou tyč nebo trubku).

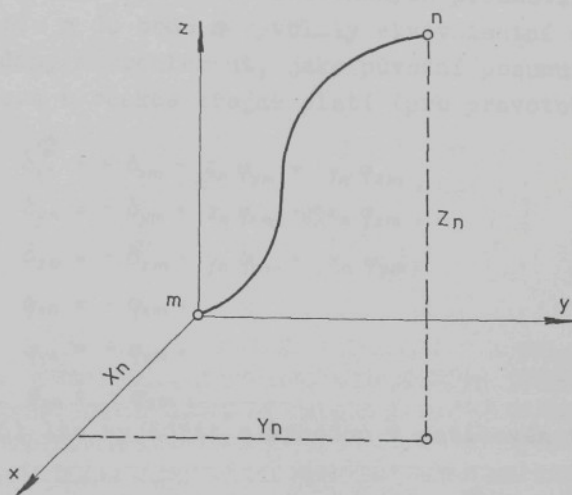
Vypočítává-li se podle (7) poddajnost potrubní větve, která je tvořena posloupností přímých úseků a ohybů, je třeba ještě provést pro každý prvek transformaci posunutím tak, aby matice poddajnosti všech úseků byly vztaženy k počátku větve.

Vrátíme se nyní k rovnicím (8) a (9). Předpokládejme, že jsme právě popsányými početními operacemi stanovili matici tuhosti typu $[6 \times 6]$

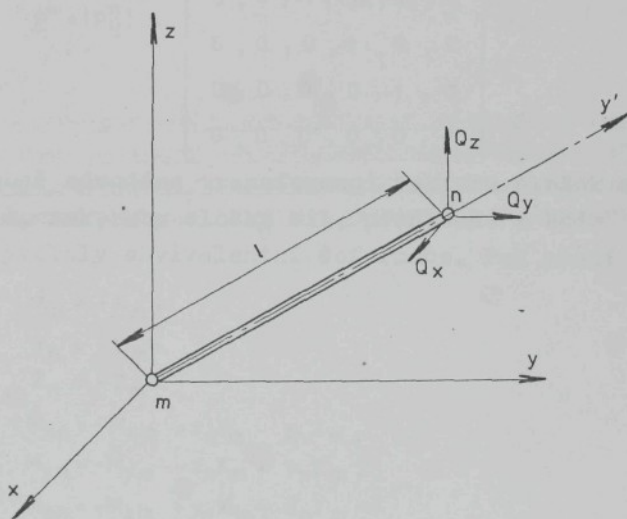
$$[k_{ij}] = [k_{ij}]_{11},$$

která definuje tuhost makroprvku, na druhém konci vetknutého. K definici úplné matice tuhosti $\underline{k}^e$ podle (2) zbývá určit ještě submatice $[k_{ij}]_{mn}$, $[k_{ij}]_{nm}$, $[k_{ij}]_{nn}$. Za tím účelem musíme ještě odvodit transformaci složek posunutí i složek sil z bodu $\underline{m}$ do bodu $\underline{n}$ uvažovaného makroelementu.

Abychom se vyhnuli rozdílům souřadnic bodů $\underline{m}$, $\underline{n}$ je velice výhodné při uvažované transformaci posunout souřadný systém tak, aby se jeho počátek ztotožnil s bodem $\underline{m}$, jak je znázorněno na obr. 7.



Obr. 7 Vzájemná poloha stykových bodů makroelementu



Obr. 8 K odvození momentu v zakotvení přímého prvku od sil, působících v bodě n

Hledejme nejprve transformaci složek zobecněných posunutí, takovou, aby složky zobecněných posunutí, transformované z bodu m do bodu n vyvolaly ekvivalentní silové účinky na daný makroelement, jako původní posunutí. Podle principu akce a reakce zřejmě platí (pro pravotočivý systém) :

$$\begin{aligned}\delta_{xn} &= -\delta_{xm} - z_n \varphi_{ym} + y_n \varphi_{zm}, \\ \delta_{yn} &= -\delta_{ym} + z_n \varphi_{xm} - x_n \varphi_{zm}, \\ \delta_{zn} &= -\delta_{zm} - y_n \varphi_{xm} + x_n \varphi_{ym}, \\ \varphi_{xn} &= -\varphi_{xm}, \\ \varphi_{yn} &= -\varphi_{ym}, \\ \varphi_{zn} &= -\varphi_{zm}.\end{aligned}\quad (26)$$

Rovnice (26) lze vyjádřit s výhodou v maticovém tvaru

$$\underline{u}_n = \underline{p}^n \underline{u}_m = [p_{ij}^n] [u_i]_m, \quad (27)$$

kde matice $\underline{p}^n$, zprostředkující transformaci složek zobecněných posunutí má tvar :

$$\underline{p}^n = [p_{ij}^n] = \begin{bmatrix} -1, 0, 0, 0, -z_n, y_n \\ 0, -1, 0, z_n, 0, -x_n \\ 0, 0, -1, -y_n, x_n, 0 \\ 0, 0, 0, -1, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, -1, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, -1 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Podobně odvodíme transformaci vektoru složek zobecněných sil, tak, aby složky sil, přenesené z bodu m do bodu n, vyvolaly ekvivalentní deformace. Pak platí :

$$\begin{aligned}X_n &= -X_m, \\ Y_n &= -Y_m, \\ Z_n &= -Z_m, \\ M_{xn} &= -M_{xm} + z_n Y_m - y_n Z_m, \\ M_{yn} &= -M_{ym} - z_n X_m + y_n Z_m, \\ M_{zn} &= -M_{zm} + y_n X_m - x_n Y_m.\end{aligned}\quad (29)$$

nebo

$$\underline{F}_n = {}^T \underline{p}^n \underline{F}_m = [p_{ji}^n] [F_i]_m, \quad (30)$$

takže transformační matice je transponovaná vzhledem k (28):

$$\tau_{\underline{p}}^n = [p_{ij}^n] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_n & -y_n & -1 & 0 & 0 \\ -z_n & 0 & x_n & 0 & -1 & 0 \\ y_n & -x_n & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Výše definované transformační matice umožňují i transformaci matic tuhosti. Mimodiagonální submatice $\underline{k}_{mn}$ vyjadřuje silové účinky v bodě m, vyvolané jednotkovými posuvy v bodě n. Obdržíme ji tedy z diagonální submatice $\underline{k}_{mm}$ pomocí transformace složek posunutí :

$$\underline{k}_{mn} = \underline{k}_{mm} \underline{p}^n = [k_{ij}]_{mm} [p_{ij}^n] \quad (32)$$

Submatice $\underline{k}_{nm}$ je transponovaná vzhledem ke $\underline{k}_{mn}$

$$\underline{k}_{nm} = \tau_{\underline{k}_{mn}} = [k_{ij}]_{mn} \quad (33)$$

Diagonální submatice $\underline{k}_{nn}$ vyjadřuje silové účinky v bodě n, vyvolané jednotkovými posuvy v témže bodě n. Z původní submatice $\underline{k}_{mm}$ jí tedy získáme transformací složek sil i posuvů :

$$\underline{k}_{nn} = \tau_{\underline{p}}^n \underline{k}_{mm} \underline{p}^n = [p_{ij}^n] [k_{ij}]_{mm} [p_{ij}^n] \quad (34)$$

Vykonají-li uzly m i n zobecněná posunutí $\underline{u}_m, \underline{u}_n$ vzniknou v uzlech (stykových bodech) síly $\underline{F}_m, \underline{F}_n$, které lze pomocí matic tuhosti vyjádřit jednoduchou rovnicí :

$$\begin{aligned} \underline{k}_{mm} \underline{u}_m + \underline{k}_{mn} \underline{u}_n &= \underline{F}_m \\ \underline{k}_{nm} \underline{u}_m + \underline{k}_{nn} \underline{u}_n &= \underline{F}_n \end{aligned} \quad (35)$$

kterou lze napsat ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} \underline{k}_{mm} & \underline{k}_{mn} \\ \underline{k}_{nm} & \underline{k}_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_m \\ \underline{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_m \\ \underline{F}_n \end{Bmatrix} \quad (36)$$

nebo

nebo

$$\underline{k}^e \underline{u}^e = \underline{F}^e, \quad (37)$$

kde $\underline{k}^e$ je hledaná matice tuhosti typu $[12 \times 12]$ jedno-rozměrného makroelementu :

$$\underline{k}^e = \begin{Bmatrix} \underline{k}_{mm}^e & \underline{k}_{mn}^e \\ \underline{k}_{nm}^e & \underline{k}_{nn}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{k}_{11}^e & \underline{k}_{12}^e \\ \underline{k}_{21}^e & \underline{k}_{22}^e \end{Bmatrix}. \quad (38)$$

Stejně jako v předchozích úvahách o metodě konečných elementů, jsou indexy 1,2 lokální, indexy m,n globální. Horní index e indikuje číslo elementu.

Vektor zobecněných sil

Mezi vnější síly, působící na příhradovou konstrukci, patří především osamělé síly, jejichž účinek zavádíme přímo do uzlů (stykových bodů). Podobně jako při řešení jiných úloh pomocí metody konečných elementů, je vhodné zavést účinek osamělých sil, působících ve stykových bodech, až při sestavování globálního vektoru pravé strany. Tak se snadno vyloučí možnost, že by byl účinek těchto sil vnesen do systému více než jedenkrát.

Vedle osamělých sil hrají důležitou roli síly od spojitého vnějšího zatížení. Sem patří především obtížení od vlastní tíhy, dále zatížení vyvolané větrem, sněhem atp. Podobně jako v předchozím odstavci se omezíme pouze na přímý prvek, realizovaný trubkou nebo tyčí stálého průřezu. Vektor zobecněných sil $\underline{F}^e$, definovaný vztahem (1), odpovídá fyzikálně účinku („akci“) oboustranně vetknutého nosníku na koncové body. Vektor zobecněných sil $\underline{F}^e$ typu $[12 \times 1]$ sestává ze dvou vektorů $\underline{F}_m^e$, $\underline{F}_n^e$ typu $[6 \times 1]$:

$$\underline{F}^e = \begin{Bmatrix} \underline{F}_m^e \\ \underline{F}_n^e \end{Bmatrix}.$$

Každý z vektorů $\underline{F}_m^e$, $\underline{F}_n^e$ se dále skládá ze dvou sub-vektorů typu $[3 \times 1]$. První z nich je kartézský vektor sil, druhý je kartézský vektor momentů.

$$\underline{F}_m^e = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_m, \quad \underline{F}_n^e = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_n. \quad (39)$$

Je-li uvažovaný makroelement (prut, nosník) v základní poloze (tj. jeho střednice se ztotožňuje s osou y) a je zatížen rovnoměrným spojitým zatížením $q_z = -q$ od vlastní tíhy (tj. proti kladnému směru osy z), nabývají vztahy (39) tvaru :

$$\underline{F}_m^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -ql/2 \\ -ql^2/12 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{F}_n^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ ql/2 \\ ql^2/12 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (40)$$

Pro jiný průběh zatížení $q = q(y)$ obdržíme silové účinky v obou zakotveních pomocí známých metod pružnosti a pevnosti, event. s pomocí statických tabulek. Pro další řešení je však nezbytné nalézt vztahy pro transformaci složek zobecněných sil v zakotvení pro obecnou polohu elementů v prostoru, při jeho obecném zatížení složkami q_x, q_y, q_z . Za tím účelem nejprve odvodíme vztahy, vyjadřující momenty ve vetknutí přímého prvku v obecné poloze, podle obr. 8 zakotveného v bodě m , v bodě n zatíženého výslednou silou $\underline{Q}$, jejíž kartézské složky jsou Q_x, Q_y, Q_z .

Viz obr. 8.

Výsledný moment $\underline{M}_m$ v zakotvení (v bodě m) je dán vektorovým součinem ramene $\underline{r}$ a síly $\underline{Q}$:

$$\underline{M}_m = \underline{r} \times \underline{Q} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = \underline{i}(r_y Q_z - r_z Q_y) + \underline{j}(r_z Q_x - r_x Q_z) + \underline{k}(r_x Q_y - r_y Q_x) = \underline{i}M_x + \underline{j}M_y + \underline{k}M_z. \quad (41)$$

Označíme-li dále

$$\begin{aligned} l_x &= l \cos(y'x) = l a_{21} = x_n, \\ l_y &= l \cos(y'y) = l a_{22} = y_n, \\ l_z &= l \cos(y'z) = l a_{23} = z_n, \end{aligned} \quad (42)$$

lze složky výsledného momentu vyjádřit ve tvaru :

$$\begin{aligned} M_x &= l_y Q_z - l_z Q_y = l (a_{22} Q_z - a_{23} Q_y) = y_n Q_z - z_n Q_y, \\ M_y &= l_z Q_x - l_x Q_z = l (a_{23} Q_x - a_{21} Q_z) = z_n Q_x - x_n Q_z, \\ M_z &= l_x Q_y - l_y Q_x = l (a_{21} Q_y - a_{22} Q_x) = x_n Q_y - y_n Q_x. \end{aligned} \quad (43)$$

Vztahy (43) lze však s výhodou vyjádřit jedinou maticovou rovnicí :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} 0 & -a_{23} & a_{22} \\ a_{23} & 0 & -a_{21} \\ -a_{22} & a_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Uvedený postup platí i pro případ spojitého obtížení. Jsou-li složky spojitého obtížení obecně q_x, q_y, q_z , pak složky síly působící na element délky dr ve vzdálenosti r od bodu m , vyvodí v zakotvení elementární momenty :

$$\begin{bmatrix} dM_x \\ dM_y \\ dM_z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 0 & -a_{23} & a_{22} \\ a_{23} & 0 & -a_{21} \\ -a_{22} & a_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} dr, \quad (45)$$

jejichž integrací od 0 do l lze určit složky výsledného momentu v zakotvení.

Pro oboustranně vetknutý nosník, rovnoměrně spojitě zatížený obtížením o složkách q_x, q_y, q_z bychom stejnou cestou dospěli ke vztahům :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_m^{(q)} = \frac{1}{2} l \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}_m^{(q)} = \frac{1}{12} l^2 \begin{bmatrix} 0 & -a_{23} & a_{22} \\ a_{23} & 0 & -a_{21} \\ -a_{22} & a_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}. \quad (46)$$

V protějším bodě zakotvení n budou z důvodů symetrie složky sil totožné, kdežto složky momentů se budou lišit pouze znaménkem, tedy

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_n^{(q)} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_m^{(q)}, \quad \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}_n^{(q)} = - \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}_m^{(q)} \quad (47)$$

Pro nosník v základní poloze bude zřejmě $a_{22} = 1$, $a_{21} = a_{23} = 0$. Položíme-li dále $q_x = q_y = 0$, $q_z = -q$, obdržíme z (46), (47) již dříve uvedené vztahy (40).

Výše uvedený, relativně jednoduchý postup pro výpočet vektoru pravé strany od vnějšího zatížení lze ovšem aplikovat pouze tehdy, když je daný makroelement tvořen pouze jedním prismatickým prvkem (jak je tomu u příhradových konstrukcí). Při vyšetřování pravé strany, vyvolané vnějším zatížením na potrubní větev, která je tvořena posloupností přímých prvků, chybů a tuhých prvků, je nutný jiný postup. V tomto případě vycházíme z tzv. fiktivních posuvů jednotlivých stavebních prvků potrubní větve, které se určí vynásobením příslušných matic příčinkových součinitelů vektorem vnějších sil (odpovídajících tzv. ekvivalentnímu zatížení). Sumací fiktivních posuvů jednotlivých stavebních prvků potrubní větve obdržíme výsledné fiktivní posuvy a vynásobením těchto posuvů maticí tuhosti získáme teprve složky vektoru pravé strany v koncových bodech m, n vyšetřované větve. V bližším je třeba odkázat na odborné publikace [1, 3, 4].

Zbývá vyšetřit vliv zatížení od teplotní dilatace, který hraje rozhodující úlohu zvláště u potrubních systémů. Výpočet provedeme za předpokladu konstantní teploty podél střednice elementu (trubky). Po zahřátí o teplotní rozdíl Δt vznikne v trubce pouze osová tlaková síla, jejíž složky v bodě m (podle obr. 8) jsou :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_m^{(t)} = -E\alpha\Delta t \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix} = -E\alpha\Delta t \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \quad (48)$$

V protějším kotevním bodě n bude mít vektor osová síla opačné znaménko.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_n^{(t)} = E \alpha \Delta t \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix} = -E \alpha \Delta t \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix}, \quad (49)$$

kde x_m, y_m, z_m značí souřadnice bodu m vzhledem k systému, majícímu počátek v bodě n .

Při vyšetřování účinku teplotní dilatace na potrubní větve, tvořenou posloupností přímých prvků a kolen je vhodnější jiný postup. Podobně, jako při vyšetřování vektoru od vnějšího zatížení, se v tomto případě nejprve určí posuvy, odpovídající teplotní dilataci větve, v bodě m vetknuté, v protějším bodě n volné. Součin matice tuhostí s vektorem fiktivních posuvů pak dává hledaný vektor zátěžných sil.

K výše popsaným silovým účinkům, přistupuje při vyšetřování deformací potrubí ještě vliv vnitřního přetlaku pracovního media. Účinek vnitřního přetlaku na globální deformaci systému je však většinou ve srovnání s ostatními účinky druhořadý a proto se jím nebudeme v této základní úvaze zabývat.

Sestavení a řešení základní soustavy pro výpočet potrubních systémů nebo příhradových konstrukcí.

Jsou-li známy matice tuhosti $\underline{k}^e$ a vektory pravých stran $\underline{F}^e$ všech větví systému, je možno přistoupit k sestavení základní soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\underline{K} \cdot \underline{\Delta} = \underline{R}, \quad (50)$$

jejíž kořeny $\underline{\Delta}$ jsou hledané posuvy stykových bodů řešené struktury. Globální matice tuhosti $\underline{K}$ a globální vektor pravé strany $\underline{\Delta}$ se vytvoří nejlépe osvědčenou metodou permutace indexů, která je podrobně popsána např. v [11].

Z tuhostních matic $\underline{k}^e$ jednotlivých elementů (v daném případě větví či prutů) se vyjímají submatice s indexy (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) a přičítají se k submaticím

(m,m) , (m,n) , (n,m) , (n,n) globální matice tuhosti $\underline{K}$.

Názorně je tento postup demonstrován na tab. V., kde je sestavena celková tuhostní matice a pravá strana jedno-
duchého systému o 4 větvích a 4 uzlech (s uzavřeným obvodem).
Jednotlivé makroelementy - v daném případě větve potrubního
systému - jsou ve schématu označeny čísly v kroužku.
Uzly 1, 2, 3, 5 jsou označeny obyčejnými číslicemi. Uzel č. 4
je úmyslně vynechán, aby se osvětlilo řešení úlohy, když
čísla uzlů netvoří přirozenou posloupnost.

Přiřazení submatice $\underline{k}_{mn}^e$ k submaticím $\underline{K}_{mn}$ celkové tu-
hostní matice je na tab. V. znázorněno šipkami. Jak patrně,
v diagonálních submaticích se tvoří součty submatic $\underline{k}_{mm}^e$
resp. $\underline{k}_{nn}^e$ se stejnými indexy. Mimodiagonální submatice se
obsazují pouze jedinou submaticí $\underline{k}_{mn}^e$ pro $m \neq n$.

Tab. V.

V tabulce V. je též uvedena tabulka elementů, která je
v dané úloze velmi jednoduchá. Obsahuje pouze číslo větve e
a odpovídající čísla m, n počátečního a koncového bodu.
Zavedeme-li novou konvenci v označení e -té větve

$$e \equiv (m,n) , \quad (51)$$

je možno proces sestavení zákl. soustavy vyjádřit obecně
následujícími přiřazovacími příkazy :

$$\begin{aligned} \underline{K}_{mm} + \underline{k}_{11}^{(mn)} &\longrightarrow \underline{K}_{mm} , \\ \underline{K}_{nn} + \underline{k}_{22}^{(mn)} &\longrightarrow \underline{K}_{nn} , \\ \underline{k}_{12}^{(mn)} &\longrightarrow \underline{K}_{mn} , \\ \underline{k}_{21}^{(mn)} &\longrightarrow \underline{K}_{nm} . \end{aligned} \quad (52)$$

"a tab. V. je též znázorněno sestavení pravé strany me-
todou permutace indexů. Tento proces je podobný procesu vy-
tváření diagonálních submatic $\underline{K}_{mm}$ levé strany. Podle (52)
lze psát analogické přiřazovací příkazy

$$\begin{aligned} \underline{R}_m + \underline{F}_1^{(mn)} &\longrightarrow \underline{R}_m , \\ \underline{R}_n + \underline{F}_2^{(mn)} &\longrightarrow \underline{R}_n , \end{aligned} \quad (53)$$

Jestliže některý z uzlů - v daném případě je to uzel 4 - v přirozené posloupnosti uzlů chybí, je třeba do diagonály dosadit jednotkovou diagonální matici, tedy

$$\underline{K}_{44} = \underline{1}$$

Matice tuhosti je - jako v ostatních úlohách metody konečných elementů - symetrická. Proto postačí vytvořit pouze matice diagonální a matice nad diagonálou.

Pásovosti globální matice tuhosti lze dosáhnout jen ve vyjimečných případech - např. tehdy, je-li potrubní systém tvořen jednou hlavní sběrnou a jednoduchými odbočkami. Řešení soustavy se v tomto případě značně zjednoduší - lze použít metody postupných inversí, popsané např. v [5]. V obecnějších případech, kdy se vyskytují v potrubním systému uzavřené obvody a rovněž prakticky u všech příhradových konstrukcí, nelze dosáhnout pásovosti tuhostní matice. S výhodou lze však využít skutečnosti, že globální matice tuhosti je velmi řídkce zaplněna nenulovými prvky. Nenulové prvky se kumulují pouze v okolí hlavní diagonály a v izolovaných blokách typu [6 x 6]. Proto je obzvláště výhodné provádět sestavení a řešení soustavy tzv. blokovou metodou. [2]

Aplikace blokové metody vyžaduje sestavení globální matice tuhosti nikoliv po sloupcích, ale po blokách, dimenze [6 x 6] resp. [12 x 12] (lit. [1]). Bloky se zapisují na disk ve formě logických vět. Takto uspořádanou soustavu lze řešit speciálním algoritmem, založeným v principu na Gaussově eliminační metodě, který se nazývá Blok - Gauss. Operandů při této eliminaci nejsou pouhá čísla (skaláry), ale submatice, totožné s operačními bloky. Eminenčně důležitou roli v tomto algoritmu hraje tzv. adresovací matice, tj. pole proměnných typu INTEGER, do nějž se zapisují čísla logických vět (stop), na kterých jsou uloženy jednotlivé operandy. Bližší údaje o tomto algoritmu, resp. jeho vývojový diagram je obsažen ve výzkumných zprávách [1,4]. Největší předností této metody je skutečnost, že umožňuje řešení řídkých soustav lineárních rovnic i na počítačích s poměrně malou kapacitou operační paměti, bez omezení šířkou pásu.

Danou soustavu je ovšem nutno před započítím řešení upravit (modifikovat) s ohledem na okrajové podmínky. Modifikace se provádí na stejném principu, jako v jiných algoritmech metody konečných elementů. Zakotvení m -tého bodu se dosáhne omezením příslušné složky posuvu. Požaduje-li se např., aby bylo $[\Delta i]_m = 0$, je třeba v globální matici tuhosti vynulovat řádek a sloupec s pořadovým číslem

$$r = 6(m - 1) + i.$$

Diagonální prvek K_{rr} se položí roven 1 a prvek pravé strany R_r se položí rovným nule. Na tomto místě je třeba upozornit, že při aplikaci blokové metody nelze použít redukce soustavy (tj. vypustit r -tý řádek a sloupec), neboť řád bloků musí zůstat zachován.

Výpočet sil a momentů v libovolném bodě střednice přímého prvku.

Po vyřešení soustavy (50) je znám vektor $\underline{\Delta}$ typu $[6N \times 1]$, určující složky zobecněných posunutí všech stykových bodů dané struktury. Pro libovolnou větev $e \equiv (m, n)$ jsou tedy známy složky zobecněných posunutí stykových bodů, které tvoří složky vektoru $\underline{u}^e$

$$\underline{u}^e = \begin{bmatrix} \underline{u}_m^e \\ \underline{u}_n^e \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Záporně vzatý součinitel tuhostní matice e -té větve $\underline{k}^e$ s vektorem $\underline{u}^e$ dává reakce uzlů m resp. n na e -tou větev (m, n) , vyvolané pouze zobecněným posunutím stykových bodů (při nezátížené větvi m, n). Označme tyto reakce jako ${}^1R^e$; pak lze psát :

$${}^1R^e = \begin{bmatrix} {}^1R_m^e \\ {}^1R_n^e \end{bmatrix} = -\underline{k}^e \underline{u}^e = - \begin{bmatrix} k_{mm}^e & k_{mn}^e \\ k_{nm}^e & k_{nn}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_m^e \\ \underline{u}_n^e \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Větvi, na obou koncích zakotvené, odpovídají reakce ${}^2R^e$, rovné záporně vzatému vektoru zobecněných sil od vnějšího zatížení a teplovní dilatace, působící na větev $e \equiv (m, n)$

$$\underline{R}^e = \begin{bmatrix} \underline{R}_m^e \\ \underline{R}_n^e \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \underline{F}_m^e \\ \underline{F}_n^e \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Reakce uzlů m, n na skutečnou větev, jejíž koncové body vykonají posuvy $\underline{u}_m^e, \underline{u}_n^e$ a která je zatížena vnějšími silami $\underline{F}^e$, obdržíme superpozicí obou účinků. Platí tedy :

$$\underline{R}^e = \underline{R}^e + \underline{R}^e = -\underline{k}^e \underline{u}^e - \underline{F}^e. \quad (57)$$

Vektor $\underline{R}^e$ má podle (1) složky

$$\underline{R}^e = \begin{bmatrix} \underline{R}_m^e \\ \underline{R}_n^e \end{bmatrix},$$

kde

$$R_m^e = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}_m^e, \quad R_n^e = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}_n^e.$$

K posouzení namáhání makroelementu (tyče, trubky) v libovolném řezu, určeném vzdáleností s od počátečního bodu m je třeba určit osovou sílu P_t , posouvající sílu T , ohybový moment $\mathcal{M}_0$ a kroutící moment $\mathcal{M}_k$. Pro přímý prvek, podrobený rovnoměrnému vnějšímu zatížení, danému složkami q_x, q_y, q_z platí :

$$P_t = (X + q_x s) a_{21} + (Y + q_y s) a_{22} + (Z + q_z s) a_{23}, \quad (58)$$

$$T = \sqrt{(X + q_x s)^2 + (Y + q_y s)^2 + (Z + q_z s)^2 - P_t^2}. \quad (59)$$

Obecný vektor momentu, v bodě ve vzdálenosti s od uzlu m je vyvolán jednak složkami reálného momentu v zakotvení, jednak účinkem vnějšího zatížení. Platí tedy :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_x \\ \mathcal{M}_y \\ \mathcal{M}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{13} & -a_{22} \\ -a_{23} & 0 & a_{21} \\ a_{22} & -a_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \frac{1}{2} s^2. \quad (60)$$

Moment krouticí M_k a moment ohybový M_o jsou dány vztahy, analogickými (58) , (59) :

$$M_k = M_{x\alpha_{21}} + M_{y\alpha_{22}} + M_{z\alpha_{23}} . \quad (61)$$

$$M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 - M_k^2} . \quad (62)$$

Uvedené vztahy umožňují určit jmenovité napětí v průřezu daného nosníku či trubky, podle vzorců klasické teorie elasticity. Únosnost skutečných konstrukcí závisí na řadě dalších parametrů, zejména je požadována dostatečná bezpečnost ve vzpěru u tlačených prutů.

Jiný postup kontroly napjatosti je třeba aplikovat u potrubních systémů, kde tvoří podstatnou složku membránové napětí od vnitřního přetlaku pracovního média. K posouzení bezpečnosti a provozuschopnosti potrubí je dále třeba provést tzv. „kategorizaci napětí“.

Kategorizace napětí a přípustná^{ny} napjatost potrubních prvků.

Dříve než přistoupíme k vlastní kategorizaci napětí potrubních prvků, povíme si něco o jejich zatížení a objasníme si některé základní pojmy, vztahující se k analýze napětí.

1. Zatížení potrubních systémů

U potrubních prvků jako jsou např. přímé trubky, ohyby, kolena, vlnové kompenzátory, armatury atd. a u konstrukčních prvků omezujících stupně volnosti potrubních uzlů, přicházejí v úvahu následující zatížení, která by měla být respektována při jejich dimenzování :

- a) vnitřní nebo vnější přetlak média,
- b) hmotnost prvků a jejich izolace, hmotnost obsahu potrubí, vnější zatížení jako jsou např. osamělé síly, tlak větru a sněhu,
- c) montážní předpětí potrubí a jeho závěsů, přídatné posuvy zakotvení, způsobené jiným strojním zařízením,
- d) reakce závěsných konstrukcí nebo jiných prvků omezujících posuvy nebo natočení potrubí (třecí síly),

- e) vibrace a v oblasti zemětřesení seismické účinky,
- f) teplotní účinky : dilatační, teplotní gradienty,
- g) cyklické zatížení.

2. Základy pro stanovení napětí

Následující názvy a charakteristiky, které se vztahují k analýze napětí, byly částečně převzaty z Codu ASME [9.] a doplněny, resp. upraveny našim požadavkům na přesnější stanovení a zhodnocení napjatosti v základních potrubních prvcích.

Konstrukční nespojitosti

- a) Gelková resp. hrubá konstrukční nespojitost je geometrická nebo materiálová diskontinuita, která je zdrojem zvýšeného napětí nebo deformace po celé touššce stěny prvku a která ovlivňuje relativně velkou část potrubního prvku nebo potrubního systému. Příklady hrubých konstrukčních nespojitostí jsou: místo připojení potrubní větve k nádobě, vzájemné spojení dvou potrubních větví skořepinového typu, potrubní ohyby, kolena.
- b) Místní konstrukční nespojitost je zdrojem zvýšeného napětí nebo deformace, která ovlivňuje poměrně malý objem materiálu a nemá významný vliv na celkové průběhy napětí a deformace potrubního prvku. Příklady: malé poloměry přechodů, redukce, svary, apod.

Zhodnocení a charakteristika napjatosti

- a) Intenzita napětí. Jedním z požadavků na provozuschopnost potrubního systému, pracujícího v elastické oblasti materiálu, je, aby intenzita vypočteného napětí, respektovaná v našem případě maximálním redukovaným napětím

$$\sigma_{red}^{(max.)}$$

nepřekročila přípustné limity. Tyto limity se liší v závislosti na kategorii napětí, ze kterých je intenzita napětí odvozena.

Vypočtené složky napětí $\sigma_0, \sigma_t, \sigma_r, \tau$

pro každý typ zatížení, kterému je potrubní prvek podroben, přidělíme jedné ze skupin následujících kategorií napětí:

primárních , sekundárních , špičkových .

Pro každou kategorii stanovíme na základě pevnostní hypotézy MMH

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_o - \sigma_t)^2 + (\sigma_o - \sigma_r)^2 + (\sigma_t - \sigma_r)^2 + 6\tau^2]} ,$$

kde σ_o - osově napětí,
 σ_t - tečné (tangenciální) napětí,
 σ_r - radiální napětí,
 τ - smykové napětí.

- b) Normální napětí je složka kolmá k uvažované rovině. Normální napětí může se skládat ze dvou složek. Jedna z nich je rovnoměrně rozdělena po tloušťce průřezu trubky, velikost složky druhé je proměnná a je závislá na poloze uvažovaného bodu průřezu (např. napjatost vzniká současným tahovým a ohybovým namáháním trubky).
- c) Smykové napětí je složka tečná k uvažované rovině.
- d) Membránové napětí je složkou normálního napětí, které je rovnoměrně rozděleno a rovno průměrné hodnotě napětí po tloušťce uvažovaného řezu.
- e) Ohybové napětí je proměnná složka normálního napětí, která je lineární po tloušťce řezu.

3. Kategorizace napětí

Charakteristickým znakem metody hodnocení napjatosti stroj částí metodou kategorizace napětí je požadavek provedení detailního výpočtu napětí prvků potrubního systému, klasifikace všech napětí a použití různých přípustných hodnot napětí pro různé druhy napjatosti. Jak již bylo dříve uvedeno, existují tři hlavní kategorie napětí: primární, sekundární, špičková. Jejich charakteristiky jsou následující:

1. Primární napětí je každé normální nebo smykové napětí silového původu. Základní charakteristikou primárního napětí je, že se samo nemůže omezit a překročí-li výrazně mez kluzu materiálu, dochází k poruše potrubí. Příklady primárního napětí jsou:

- A. Primární napětí membránové a smykové, které se dělí na
 - a) základní,
 - b) místní.

- a) Základní primární napětí tvoří složka membránového napětí a napětí smykového a je v potrubním prvku rozděleno tak, že při překročení mize kluzu nedojde k redistribuci zatížení.

Příkladem základního napětí v potrubí je napětí vyvolané např. vnitřním přetlakem media, hmotností potrubí i media a pod. trvalým mechanickým zatížením.

- b) Místní primární napětí je napětí membránové a smykové a je spojeno s účinkem diskontinuit, vyvolává velké deformace při přenosu zatížení na sousední potrubní prvky. Příkladem místního primárního napětí je účinek osamělých sil např. v místech podpor nebo závěsů potrubí.

- B. Primární napětí ohybové je to složka normálního napětí, úměrná vzdálenosti od těžiště průřezu.

2. Sekundární napětí je normální nebo smykové napětí deformačního původu. Charakteristickým znakem sekundárního napětí je, že se samo může omezit. Porucha v důsledku tohoto napětí se nedá očekávat. Jestliže napětí tohoto druhu se blíží dvojnásobku meze kluzu materiálu, může být elastická analýza neplatná a následné teplotní cykly mohou vyvolat značnou deformaci systému. Příklady sekundárních napětí jsou :

- a) obecné teplotní napětí,
- b) ohybové napětí v místě hrubé konstrukční nespojitosti.

- a) Obecné teplotní napětí :

1. Dilatační napětí.
2. Napětí vyvolané rozdílem teplot:
na vnějším a vnitřním povrchu trubky,
po obvodu trubky,
hrdla nádoby a potrubí.

Výstižným příkladem vzniku sekundárního napětí je napětí vzniklé účinkem teplotní dilatace, např. v oboustranně zakotvené trubce. Osové napětí v této trubce, stanovené na základě Hookova zákona je

$$\sigma = E \alpha \Delta t$$

Hodnota součinu (modulu pružnosti materiálu v tahu E a součinitele teplotní roztažnosti materiálu α v závislosti na

teplotě Δt) je pro uvažovaný materiál normativně dána. Volbou teploty Δt lze dosáhnout toho, že vypočtené napětí bude teoreticky rovno mezi pevností materiálu R_m . V tomto případě k poruše trubky nedojde, protože vznikem plastické deformace se napětí omezí přibližně na hodnotu meze kluzu.

Je zřejmé, že při namáhání součástí popsáním způsobem, určíme sice správnou hodnotu deformací, ale napětí vypočtené „elasticky“ jsou značně přehnána.

b) Ohybová napětí v místech hrubé konstrukční nespojitosti - zdroje: ovalita průřezu trubky, různé druhy potrubních kolen a ohybů.

3. Špičkové napětí je takový přírůstek napětí, který se přičítá k primárnímu a sekundárnímu napětí, v důsledku místních nespojitostí nebo místních teplotních napětí, zahrnující vliv koncentrací napětí, jestliže se vyskytují. Základním znakem špičkového napětí je, že nezpůsobí zjevná přetvoření a je nebezpečné jen jako možný zdroj porušení únavou nebo křehkého lomu. Příklady špičkových napětí jsou :
určitá teplotní napětí, která vyvolávají únavu, ale ne přetvoření,
napětí v místních konstrukčních nespojitostech,
povrchová napětí vyvolaná teplotním šokem.

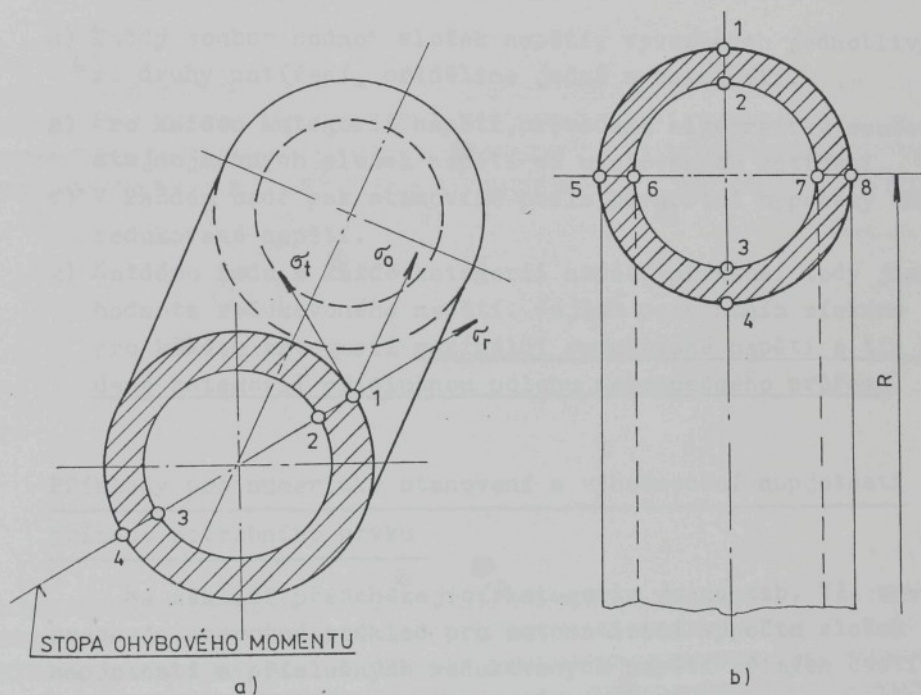
4. Celkové napětí je algebraický součet složek primárního, sekundárního a špičkového napětí. Znalost každé z těchto složek je nutná pro posouzení napjatosti potrubního prvku. Podrobná analýza napětí musí být připravena v dostatečných podrobnostech, aby bylo prokázáno splnění každého z napětových omezení při respektování klasifikace zatížení,

Určení maximálních redukovaných napětí

Jak již bylo dříve řečeno, hodnota přípustného napětí potrubních prvků se mění v závislosti na kategorii napětí a je určitým násobkem dovoleného namáhání základního. Dovolené namáhání základní je vyjádřeno poměrem hodnoty meze kluzu nebo meze pevnosti materiálu a příslušného součinitele bezpečnosti. Do výpočtu se vezme vždy hodnota nižší.

Za účelem získání maximální hodnoty redukovaného napětí a tím i určení nebezpečného průřezu prvku, budeme postupovat podle následujícího schématu.

- a) Nejdříve zvolíme hustotu řezů ve vyšetřovaném prvku.
- b) V každém zvoleném řezu určíme konkrétní body; U přímého prvku zvolíme čtyři body, ležící ve stopě ohybového momentu a u ohybu potrubí bodů osm - viz obr. 9.



Obr.9 Zvolené body průřezu pro výpočet napětí: a) přímého prvku
b) ohybu potrubí

V každém z těchto badů zavedeme ortogonální souřadnou soustavu os směru :

osovém o ,
 obvodovém t ,
 radiálním r .

V naznačených směrech působí složky napětí normálního $\sigma_o, \sigma_t, \sigma_r$ a složka napětí smykového τ .

- c) Ve zvolených bodech každého řezu vypočteme složky napětí od jednotlivých druhů zatížení.
- d) Každý soubor hodnot složek napětí, vyvozených jednotlivými druhy zatížení, přidělíme jedné z kategorií.
- e) Pro každou kategorii napětí, provedeme algebraický součet stejnojmenných složek napětí od uvažovaných zatížení.
- f) V každém bodě pak stanovíme podle pevnostní hypotézy HMMH redukované napětí.
- g) Každému bodu a každé kategorii napětí přísluší tedy jiná hodnota redukovaného napětí. Jejich porovnáním získáme pro každou kategorii maximální redukované napětí a tím i dané kategorii příslušnou polohu nebezpečného průřezu.

Příklady pro numerické stanovení a vyhodnocení napjatosti přímého potrubního prvku

Na základě předcházející kategorie je na tab. VI. vypracován podrobný podklad pro automatizaci výpočtu složek napjatosti a příslušných redukovaných napětí přímých částí potrubí, pracujícího v podcreepové oblasti.

Primární napětí základní - vzorce v příslušném sloupci této tabulky vyjadřují hodnoty středních napětí, rovnoměrně rozdělených po průřezu trubky. Napětí jsou způsobena vnitřním přetlakem media a trvalým vnějším zatížením.

Primární základní napětí + primární ohybové napětí - zahrnuje všechny složky primárního napětí, způsobeného vnitřním přetlakem a vnějším zatížením. Napětí jsou podle obrázku, uvedeného v tabulce, určena ve čtyřech bodech každého z vyšetřovaných průřezů. Všechny tyto body leží na stopě ohybového momentu. Pro všechny složky napětí, spadající do této

┌ kategorie, platí vzorce uvedené v tabulce pod hlavičkou ┐
„Napětí v bodech“.

Napětí primární + sekundární - je způsobeno vnitřním přetlakem, vnějším zatížením a tepelnou dilatací. Jeho složky jsou určeny opět ve čtyřech bodech a pro jejich vyčíslení platí stejné vzorce jako v případě celkového napětí primárního.

Obdobným způsobem a v obdobné formě bude sestavena tabulka pro automatizaci výpočtu napjatosti ohybů resp. kolen potrubí [4].

Závěr.

Popsaná metoda byla realizována ve formě původního programu, vypracovaného autorem této práce v jazyce FORTRAN IV pro počítače řady IBM 360/370 resp. EC 1030/1033. Tento program se stal po dobu téměř deseti let nejvyužívanějším algoritmem pro kontrolu reakcí, posuvů a napjatosti v ČSR. Ve SVŮSS se rozvinula pod vedením akademika J. Valenty a p. F. Nováka servisní služba pro výrobní závody a projekční organizace, která prováděla komplexní posudky namáhání, provozuschopnosti a později i životnosti složitých potrubních systémů.

Jednalo se zejména o potrubní systémy klasických i jaderných tepelných elektráren, budovaných v ČSR i exportovaných do zahraničí. Neméně významnou složku představovaly systémy chemicko-technologických komplexů, kde se mnohdy jednalo o konstrukční části, pracující za extrémních (např. teplotních) podmínek. Provedené výpočty v řadě případů ukázaly nutnost závažných konstrukčních změn, bez nichž by bylo došlo dříve či později k poškození a následné havarii životně důležitých prvků energetických či chemických zařízení. Předcházením havarijních situací nebo prodlužováním životnosti stávajících systémů se dosáhlo úspor, které lze odhadovat částkami v desítkách milionech Kčs.

Popsaná metoda spolu s původním algoritmem se staly základem pro vývoj nových, speciálních programů, z nichž budeme jmenovat alespoň:

- výpočet potrubí, uloženého v zemi (ing. A. Kanocz, CSc.)
- dynamika potrubních systémů (ing. J. Voborský, CSc.)
- životnost potrubních systémů (ing. J. Kratina, CSc.)

V roce 1987 byla autorem vypracována nová verze v jazyce FORTRAN 77, která je aktivně využívána v s. p. Sigma Modřany. Na dalších verzích podobných programů (systém PIPKA) se pracuje ve SVŮSS.

Literatura :

- [1] Ulrych E., Novák F. : Blokové schéma a výpočtové podklady pro řešení potrubních systémů na středním počítači. Výzkumná zpráva SVÚSS-74-01019
- [2] Cantin G. : Int. Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol.3, 379-388 (1971)
- [3] Piping Handbook. Mc Graw-Hill 1976.
- [4] Ulrych E., Novák F. : Klasifikace a výpočet napjatosti základních potrubních prvků. Výzkumná zpráva SVÚSS-77-02016
- [5] Novák F., Ulrych E. : Výpočet prostorových potrubních systémů na samočinných počítačích. Stojírenství 19, 1969, č. 12.
- [6] H. v. Jürgenson, Elastizität und Festigkeit im Rohrleitungsbau, Springer-Verlag Berlin, 1953.
- [7] R. A. Clark and E. Reissner, Bending of Curved Tubes, Advances in Applied Mechanics, Vol.2, pp.93-122, Acad. Press, Inc. 1951.
- [8] POWER PIPING, American National Standard Code for Pressure Piping. ANSI B 31.1, 1973.
- [9] Bezpečnost jaderných zařízení, ČSKAE 1978. Překlad Codu ASME pro kotle a tlakové nádoby.
- [10] Novák F., Ulrych E. : Automatisierung der Festigkeitsberechnung verketteter Rohrleitungssysteme. ZAMM Sonderheft, Bd 48, 1968.

Tab. I.

		X	Y	Z	M_x	M_y	M_z
δ_x		Posuvy od jednotkových sil			Posuvy od jednotkových momentů		
δ_y							
δ_z							
φ_x		Natočení od jednotkových sil			Natočení od jednotkových momentů		
φ_y							
φ_z							

Fyzikální význam matice poddajnosti

Tab. II.

$$[\eta'_{ij}] =$$

$\frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ_z}$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2} \frac{l^2}{EJ_z}$
0	$\frac{l}{ES}$	0	0	0	0
0	0	$\frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ_x}$	$\frac{1}{2} \frac{l^2}{EJ_x}$	0	0
0	0	$\frac{1}{2} \frac{l^2}{EJ_x}$	$\frac{l}{EJ_x}$	0	0
0	0	0	0	$\frac{l}{GJ_k}$	0
$-\frac{1}{2} \frac{l^2}{EJ_z}$	0	0	0	0	$\frac{l}{EJ_z}$

Matice poddajnosti (příčinkových součinitelů) přímého prvku

Tab. III.

	δ_x	δ_y	δ_z	φ_x	φ_y	φ_z
X	Síly od jednotkových posuvů			Síly od jednotkových natočení		
Y						
Z						
M_x	Momenty od jednotkových posuvů			Momenty od jednotkových natočení		
M_y						
M_z						

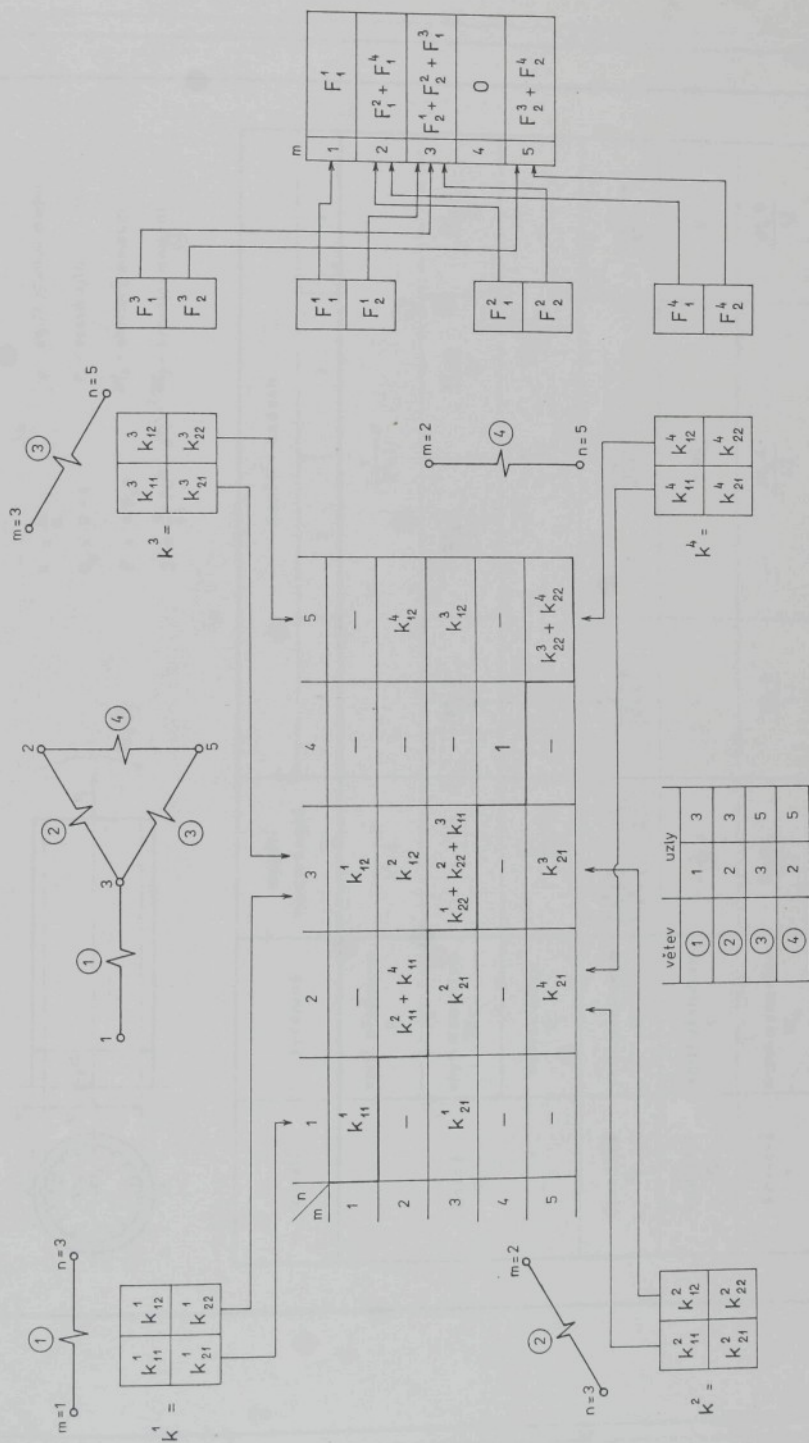
Fyzikální význam matice tuhosti

Tab. IV.

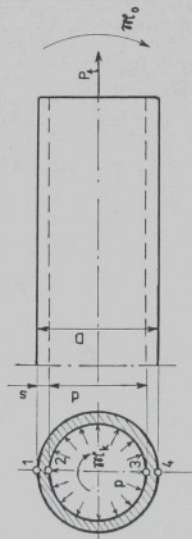
 $[a'_{ij}] =$

$\frac{12EJ_z}{l^3}$	0	0	0	0	$\frac{6EJ_z}{l^2}$
0	$\frac{ES}{l^*}$	0	0	0	0
0	0	$\frac{12EJ_x}{l^3}$	$-\frac{6EJ_x}{l^2}$	0	0
0	0	$-\frac{6EJ_x}{l^2}$	$\frac{4EJ_x}{l}$	0	0
0	0	0	0	$\frac{6J_k}{l}$	0
$\frac{6EJ_z}{l^2}$	0	0	0	0	$\frac{4EJ_z}{l}$

Matice tuhosti přímého prvku



Postup při sestavování levé a pravé strany základní rovnice $K\Delta = R$ pro řešení potrubních systémů



$k = \frac{D}{d}$
 $D_s = D - s$
 $F = \pi D_s s$
 $J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$
 p - vnitř. přetlak média
 P_t - osová síla
 M_0 - ohybový moment
 M_k - krouticí moment

Napětí	Vyvolané	Napětí membránové	Napětí v bodech			
			1	2	3	4
Osové σ_o	vnitř. přetlakem p	$\frac{1}{k^2-1} p$	$\frac{1}{k^2-1} p$			
	ohyb. momentem M_o	—	$\frac{M_o D}{2J}$	$\frac{M_o d}{2J}$	$-\frac{M_o d}{2J}$	$-\frac{M_o D}{2J}$
	osovou silou P_t	$-\frac{P_t}{F}$	$-\frac{P_t}{F}$			
Obvodové σ_t	vnitř. přetlakem p	$\left(\frac{k^2+1}{k^2-1} - \frac{1}{2}\right)p$	$\frac{2}{k^2-1} p$	$\frac{k+1}{k^2-1} p$	$\frac{2}{k^2-1} p$	
Radiální σ_r	vnitř. přetlakem p	$-\frac{1}{2} p$	0	$-p$	0	
Smykové τ	krout. momentem M_k	$\frac{M_k D_s}{4J}$	$\frac{M_k D}{4J}$	$\frac{M_k d}{4J}$	$\frac{M_k D}{4J}$	
REDUKOVANÉ NAPĚTÍ			$\sigma_{red.} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_o - \sigma_t)^2 + (\sigma_o - \sigma_r)^2 + 6\tau^2]}$			