



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Frekvenční spektrum podélně polarizovaných
rezonátorů z piezoelektrické keramiky

Ing. Martin Pustka

Frekvenční spektrum podélně polarizovaných rezonátorů z piezoelektrické keramiky

Disertační práce

Školitel: Prof. Ing. Jaroslav Nešek, CSc.

Hlavní práce a přílohy

Podobná práce: 51
Počet příloh: 3
Počet stránek: 36
Počet tabulek: 5
Počet vzorců: 141

UNIVERZITNÍ KNIHOVNA
TECHNICKÉ UNIVERZITY V LIBERCI



3146134551

2005

Martin Pustka

Frekvenční spektrum podélně polarizovaných rezonátorů z piezoelektrické keramiky

Ing. Martin Pustka

Studijní program : P 2612 Elektrotechnika a informatika

Studijní obor : 2612V045 Technická kybernetika

Pracoviště : katedra elektrotechniky

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Technická univerzita v Liberci

Hálkova 6, 461 17 Liberec 1

Školitel : Prof. Ing. Jaroslav Nosek, CSc.

Rozsah práce a příloh

Počet stran: 91

Počet příloh: 3

Počet obrázků: 36

Počet tabulek: 5

Počet vzorců: 144

červenec 2005

Anotace

Frekvenční spektrum podélně polarizovaných rezonátorů z piezoelektrické keramiky

Ing. Martin Pustka

Při návrhu piezoelektrických rezonátorů je nutné podrobně studovat frekvenční spektrum kmitů piezoelektrického elementu, zejména pak vliv rozměrů na rozložení a amplitudy rezonančních frekvencí. Pro analýzu se obvykle využívá analytického popisu vázaných kmitů, vycházejícího z Mindlinovy nebo Leea dvourozměrné aproximační teorie pro kmity piezoelektrických desek.

Práce se zabývá řešením vázaných kmitů rezonátorů ve tvaru tenkých úzkých destiček s pravoúhlým průřezem, vyrobených z piezoelektrické keramiky a polarizovaných ve směru své délky. Z Leea dvourozměrných aproximačních rovnic jsou pomocí metody rozvoje veličin do řady šířkové souřadnice a metody průměrování přes tloušťkovou souřadnici odvozeny dva systémy jednorozměrných aproximačních rovnic, popisující vázané podélné, šířkově rozpínavé a symetrické šířkově střížné kmity. Soustavy rovnic jsou doplněny okrajovými podmínkami, respektujícími vliv budícího elektrického pole působícího ve směru délky pásu.

Oba systémy rovnic jsou použity pro výpočet frekvenčních spekter kmitů piezoelektrických rezonátorů z tvrdé a měkké PZT keramiky a pro určení vlastních tvarů kmitů. Teoretické výsledky jsou porovnány s naměřenými hodnotami a jejich poměrná odchylka je v řádu jednotek procent. Přesnost výpočtu odpovídá běžné toleranci rezonanční frekvence rezonátorů z piezoelektrické keramiky.

Výsledné vztahy lze použít pro libovolný materiál se symetrií odpovídající třídě 6mm. Odvození jednorozměrných aproximačních rovnic vychází z předpokladu lineárního chování piezoelektrického rezonátoru. Při jejich praktickém použití je nutné zohlednit nelineární vlastnosti piezoelektrické keramiky a velký rozptyl materiálových parametrů.

Klíčová slova: piezoelektrický rezonátor, frekvenční spektrum, piezoelektrická deska, PZT keramika

Annotation

Frequency Spectrum of Piezoceramic Resonators Polarized in Longitudinal Direction

Martin Pustka, M.Sc.

In the piezoelectric resonator design, it is necessary to study the frequency spectrum of vibrations of the piezoelectric element in detail, particularly the influence of dimensions on the resonant frequencies. The analytical description of coupled vibrations, based on Mindlin's or Lee's two-dimensional piezoelectric plate theories, is usually used for the analysis.

This Ph.D. Thesis deals with the solution of coupled vibrations of resonators with a shape of thin narrow plates with rectangular cross section, manufactured from piezoelectric ceramics and polarized in longitudinal direction. Two systems of one-dimensional approximative equations for coupled length-extensional, width-stretch and symmetric width-shear vibrations are deduced from Lee's two-dimensional equations using the method of expanding in series of the width coordinate and method of averaging through the thickness. These systems are completed by the boundary conditions respecting the case of electrically forced vibrations of the plate.

The equations are used to calculate the frequency spectrum of vibrations for piezoelectric resonators of hard and soft PZT ceramics and for the determination of mode shapes. The theoretical results are compared with experimental data and the relative deviation is of the order of several per cent. The calculation accuracy corresponds to the usual tolerance of resonant frequency of piezoceramic resonators.

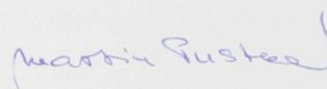
The resulted equations can be used for any piezoelectric material with the symmetry class $6mm$. The derivation of one-dimensional approximate equations assumes the linear behavior of the piezoelectric resonator. Using the equations it is necessary to take into account the nonlinear properties of piezoelectric ceramics and the high scattering range of its material constants.

Keywords: piezoelectric resonator, frequency spectrum, piezoelectric plate,
PZT ceramics

Prohlášení

Místopřísežně prohlašuji, že jsem disertační práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury.

V Liberci 30. července 2005



Ing. Martin Pustka

Obsah

Seznam použitých symbolů	8
1 Úvod	13
1.1 Úvodní stav problematiky	13
1.2 Úvodní práce	16
2 Klasické vlnění v piezoelektrických látkách	18
2.1 Tricenné rovnice piezoelektriky	18
2.2 Vlnění v ohraňovacím prostředí	20
2.3 Vlnění v nekonečně rozšířených deskách	21
2.4 Deska s nekonečným směrem šíření	23
2.5 Vlnění v ohraňovacích deskách	24
3 Aproximační řešení kmitů piezoelektrických desek	26
3.1 Dvoucentrální aproximační teorie	26
3.2 Dvoucentrální teorie vyvolávající rovnice do řady trigonometrických funkcí	28
3.3 Modifikace dvoucentrální teorie vyvolávající rovnice do řady trigonometrických funkcí	30
3.4 Okrajové podmínky řešení	32
4 Aproximační řešení kmitů piezoelektrických tyčinek	34
4.1 Podíl na kmitu podél polárního směru tyčinky	34
4.1.1 Vlnění rovnice	35
4.1.2 Tyčinka bez ohraňování	37
4.1.3 Tyčinka s elektrickou izolací harmonického ohraňování	37
4.1.4 Tyčinka s elektrickým ohraňováním	38
4.1.5 Vliv okrajových podmínek	38
4.2 Jednosměrný pohyb kmitů tyčinky ohraňované do řady trigonometrických funkcí	39
4.2.1 Ohraňování nekonečnou řadou dvoucentrální rovnice	39
4.2.2 Ohraňování vlnové rovnice	40
4.2.3 Vlnové rovnice, ohraňování vlnové rovnice a symetrické ohraňování	41
5 Frekvenční spektrum vázaných kmitů	51
5.1 Experimentální měření	52
5.2 Výpočet rezonančních kmitů	58
5.2.1 Dispersní kmitky nekonečného směru	59
5.2.2 Frekvenční kmitky	61
5.3 Vlnění vlny kmitů	64

Poděkování

Děkuji školiteli Prof. Ing. Jaroslavu Noskovi, CSc. za odborné vedení během přípravy této práce a Doc. Mgr. Lidmile Burianové, CSc. za poskytnutí experimentálních dat. Dále děkuji Doc. Mgr. Jiřímu Erhartovi, Ph.D. a Prof. RNDr. Ing. Miloslavu Koškovi, CSc. za cenné rady a připomínky.

Obsah

Seznam použitých symbolů	9
1 Úvod	13
1.1 Současný stav problematiky	13
1.2 Cíle disertační práce	16
1.3 Členění práce	16
2 Elastické vlnění v piezoelektrických látkách	18
2.1 Třírozměrné rovnice piezoelektřiny	18
2.2 Vlnění v ohraničeném prostředí	20
2.3 Vlnění v nekonečně rozlehlých deskách	21
2.4 Deska s nekonečně malou šířkou	24
2.5 Vlnění v ohraničených deskách	24
3 Aproximační řešení kmitů piezoelektrických desek	26
3.1 Dvourozměrné aproximační teorie	26
3.2 Dvourozměrná teorie využívající rozvoje do řady trigonometrických funkcí . .	28
3.3 Modifikace dvourozměrné teorie využívající rozvoje do řady trigonometrických funkcí	30
3.4 Okrajové podmínky řešení	32
4 Aproximační řešení kmitů piezoelektrických pásků	34
4.1 Podélné kmity podélně polarizované tyčinky	34
4.1.1 Vlnové rovnice	35
4.1.2 Tyčinka bez elektrod	37
4.1.3 Tyčinka s elektrodami buzená harmonickým napětím	37
4.1.4 Tyčinka se zkratovanými elektrodami	38
4.1.5 Vliv okrajových podmínek na hodnotu rezonanční frekvence	38
4.2 Jednorozměrný popis kmitů odvozený rozvojem do řady šířkové souřadnice . .	39
4.2.1 Omezení nekonečného rozvoje dvourozměrných rovnic	39
4.2.2 Jednorozměrné vlnové rovnice	41
4.2.3 Vázané podélné, šířkově rozpínavé a symetrické šířkově střižné kmity .	44
4.3 Jednorozměrný popis kmitů odvozený průměrováním přes tloušťkovou souřadnici	47
4.3.1 Omezení nekonečného rozvoje dvourozměrných rovnic	47
4.3.2 Jednorozměrné vlnové rovnice	49
4.3.3 Vázané podélné, šířkově rozpínavé a symetrické šířkově střižné kmity .	52
5 Frekvenční spektrum vázaných kmitů	57
5.1 Experimentální hodnoty	57
5.2 Výpočet frekvenčních křivek	58
5.2.1 Disperzní křivky nekonečného pásku	58
5.2.2 Frekvenční křivky	61
5.3 Vlastní tvary kmitů	64

5.4 Porovnání metod výpočtu	68
5.5 Praktické použití aproximačních rovnic	71
6 Závěr	72
Literatura	74
Přehled publikovaných prací	77
A Materiálové konstanty piezoelektrické keramiky	78
B Naměřené rezonanční frekvence	79
C Teoretické vlastní tvary kmitů	80

Seznam použitých symbolů

a	tloušťkový nebo šířkový rozměr	m
A	plocha elektrod	m ²
A_i, A_{ij}	amplituda	m
b	tloušťkový nebo šířkový rozměr	m
B_i	amplituda	m
B_{mn}	integrační konstanta	1
c	délkový rozměr	m
c'	lineární kombinace složek tenzoru elastického modulu	Pa
c_n	integrační konstanta	1
$c_{ijkl}, c_{\lambda\mu}$	složky tenzoru elastického modulu	Pa
$c_{ijkl}^E, c_{\lambda\mu}^E$	složky tenzoru elastického modulu při konstantní intenzitě elektrického pole	Pa
$c_{ijkl}^P, c_{\lambda\mu}^P$	modifikované složky tenzoru elastického modulu	Pa
$c_{ijkl}^{(n)}, c_{\lambda\mu}^{(n)}$	modifikované složky tenzoru elastického modulu	Pa
$c_{ijkl}^{(d)}, c_{\lambda\mu}^{(d)}$	modifikované složky tenzoru elastického modulu	Pa
$c_{ijkl}^*, c_{\lambda\mu}^*$	modifikované složky tenzoru elastického modulu	Pa
$\bar{c}_{ijkl}, \bar{c}_{\lambda\mu}$	modifikované složky tenzoru elastického modulu	Pa
$\bar{c}_{ijkl}^n, \bar{c}_{\lambda\mu}^n$	modifikované složky tenzoru elastického modulu	Pa
$\tilde{c}_{ijkl}, \tilde{c}_{\lambda\mu}$	modifikované složky tenzoru elastického modulu	Pa
$\tilde{c}_{ijkl}, \tilde{c}_{\lambda\mu}$	poměrné složky tenzoru elastického modulu	1
$\hat{c}_{ijkl}, \hat{c}_{\lambda\mu}$	poměrné složky tenzoru elastického modulu	1
$\hat{c}_{ijkl}^n, \hat{c}_{\lambda\mu}^n$	poměrné složky tenzoru elastického modulu	1
$\hat{c}_{ijkl}^{(n)}, \hat{c}_{\lambda\mu}^{(n)}$	poměrné složky tenzoru elastického modulu	1
$\check{c}_{ijkl}^n, \check{c}_{\lambda\mu}^n$	poměrné složky tenzoru elastického modulu	1
C	křivka obepínající obvod desky	
$d^{(n)}$	povrchová hustota náboje	Cm ⁻²
$d_i^{(n)}, \bar{d}_i^{(n)}$	složky průměrného elektrického posunutí	Cm ⁻²
$d_{ikl}, d_{i\lambda}$	složky tenzoru piezoelektrického koeficientu	mV ⁻¹
D	disperzní matice	
$D^{(n)}$	povrchová hustota náboje	Cm ⁻²
D_i	složky elektrického posunutí	Cm ⁻²
$D_i^{(p)}$	složky elektrického posunutí v piezoelektrické látce	Cm ⁻²
$D_i^{(v)}$	složky elektrického posunutí ve vakuu	Cm ⁻²
$D_i^{(n)}, \bar{D}_i^{(n)}$	složky dvourozměrného elektrické posunutí	Cm ⁻²
$D_i^{(mn)}, \bar{D}_i^{(mn)}$	složky jednorozměrného elektrické posunutí	Cm ⁻²

$\mathcal{D}^{(mn)}$	povrchová hustota náboje	Cm^{-2}
$e_{ikl}, e_{i\lambda}$	složky tenzoru piezoelektrického modulu	Cm^{-2}
$e_{ikl}^{(n)}, e_{i\lambda}^{(n)}$	modifikované složky tenzoru piezoelektrického modulu	Cm^{-2}
$e_{ikl}^{(d)}, e_{i\lambda}^{(d)}$	modifikované složky tenzoru piezoelektrického modulu	Cm^{-2}
$\bar{e}_{ikl}, \bar{e}_{i\lambda}$	modifikované složky tenzoru piezoelektrického modulu	Cm^{-2}
$\bar{e}_{ikl}^n, \bar{e}_{i\lambda}^n$	modifikované složky tenzoru piezoelektrického modulu	Cm^{-2}
$\tilde{e}_{ikl}^n, \tilde{e}_{i\lambda}^n$	modifikované složky tenzoru piezoelektrického modulu	Cm^{-2}
$\hat{e}_{ikl}, \hat{e}_{i\lambda}$	poměrné složky tenzoru piezoelektrického modulu	1
$\hat{e}_{ikl}^n, \hat{e}_{i\lambda}^n$	poměrné složky tenzoru piezoelektrického modulu	1
$\check{e}_{ikl}^n, \check{e}_{i\lambda}^n$	poměrné složky tenzoru piezoelektrického modulu	1
E_i	složky intenzity elektrického pole	Vm^{-1}
$E_i^{(n)}, \bar{E}_i^{(n)}$	složky dvourozměrné intenzity elektrického pole	Vm^{-1}
f, f_n	frekvence	Hz
f_A, f_B	rezonanční frekvence	Hz
$F_i^{(n)}$	složky elastického napětí na povrchu desky	Pa
$\mathcal{F}_i^{(mn)}$	složky elastického napětí na povrchu desky	Pa
G_n	matematická funkce použitá pro rozvoj veličin v řadu	
$H_i^{(n)}$	složky elastického napětí na povrchu desky	Pa
j	imaginární jednotka	1
k	vlnový vektor	m^{-1}
$k_{i\lambda}$	koeficient elektromechanické vazby	1
L_1, L_2	integrační konstanta	1
M	matice okrajových podmínek	
M_{ij}	složky matice okrajových podmínek	1
n_i	normálový vektor	1
s_n	integrační konstanta	1
$s_{ijkl}^E, s_{\lambda\mu}^E$	složky tenzoru elastického koeficientu při konstantní intenzitě elektrického pole	Pa^{-1}
S_{ij}, S_λ	složky tenzoru deformace	1
S_{ij}^d, S_λ^d	složky tenzoru deformace	1
$S_{ij}^{(n)}, S_\lambda^{(n)}$	složky dvourozměrného tenzoru deformace	1
$\bar{S}_{ij}^{(n)}, \bar{S}_\lambda^{(n)}$		
t	čas	s
$t_i, t_i^{(n)}$	složky elastického napětí na povrchu desky	Pa
T_{ij}, T_λ	složky tenzoru elastického napětí	Pa
$T_{ij}^{(n)}, T_\lambda^{(n)}$	složky dvourozměrného tenzoru elastického napětí	Pa
$\bar{T}_{ij}^{(n)}, \bar{T}_\lambda^{(n)}$		

$T_{ij}^{(mn)}, T_{\lambda}^{(mn)}, \bar{T}_{ij}^{(mn)}, \bar{T}_{\lambda}^{(mn)}$	složky jednorozměrného tenzoru elastického napětí	Pa
u_i	složky mechanického posunutí	m
$u_i^{(n)}$	složky dvourozměrného mechanického posunutí	m
$u_i^{(mn)}$	složky jednozměrného mechanického posunutí	m
$u_{i0}, u_{i0}^{(n)}$	okrajová hodnota mechanického posunutí	m
v	fázová rychlost vlny	ms^{-1}
$v_i^{(n)}$	složky průměrného mechanického posunutí	m
V	objem	m^3
x_i	prostorová souřadnice	m
α_1, α_2	korekční činitel	1
α_i, α_{ij}	poměrná amplituda	1
β_i	směrový kosinus	1
$\bar{T}_{ij}$	piezoelektrický Christoffelův tenzor	Pa
δ_{ij}	Kroneckerův symbol	1
$\delta_A, \delta_B, \delta_{AB}$	poměrná odchylka frekvencí	1
ε_{ij}	složky tenzoru permitivity	Fm^{-1}
ε_{ij}^S	složky tenzoru permitivity při konstantní deformaci	Fm^{-1}
$\varepsilon_{ij}^S(r)$	složky tenzoru relativní permitivity při konstantní deformaci	1
ε_{ij}^T	složky tenzoru permitivity při konstantním elastickém napětí	Fm^{-1}
$\varepsilon_{ij}^{(n)}$	modifikované složky tenzoru permitivity	Fm^{-1}
$\bar{\varepsilon}_{ij}$	modifikované složky tenzoru permitivity	Fm^{-1}
$\bar{\varepsilon}_{ij}^n$	modifikované složky tenzoru permitivity	Fm^{-1}
$\tilde{\varepsilon}_{ij}^n$	modifikované složky tenzoru permitivity	Fm^{-1}
$\hat{\varepsilon}_{ij}$	modifikované nebo poměrné složky tenzoru permitivity	$\text{Fm}^{-1}, 1$
$\hat{\varepsilon}_{ij}^n$	poměrné složky tenzoru permitivity	1
$\check{\varepsilon}_{ij}^n$	poměrné složky tenzoru permitivity	1
ζ, ζ_n	vlnové číslo ve směru tloušťky nebo šířky	m^{-1}
η, η_1	poměrná prostorová souřadnice	1
λ	vlnová délka	m
λ_n	vlnový parametr	1
ξ, ξ_n	vlnové číslo ve směru šíření vlny	m^{-1}
$\bar{\xi}, \bar{\xi}_n$	poměrné vlnové číslo	1
ρ	hustota	kg m^{-3}
$\sigma, \sigma^{(n)}$	povrchová hustota náboje	Cm^{-2}
$\sigma_{ij}^{(n)}, \sigma_{\lambda}^{(n)}, \bar{\sigma}_{ij}^{(n)}, \bar{\sigma}_{\lambda}^{(n)}$	složky průměrného elastického napětí	Pa

1 Úvod

Piezoelektrické rezonátory jsou důležitým stavebním prvkem řady moderních zařízení. Vedle tradičních aplikací v oscilačních a filtračních elektrických obvodech [1] nebo budičích akustického signálu [2] nacházejí stále větší uplatnění jako rezonanční snímače neelektrických veličin [3], základní součást piezoelektrických aktuátorů [4] a ultrazvukových motorů [5] nebo v piezoelektrických transformátorech [6]. Nově se objevují i technická řešení kombinující více rezonančních struktur s různou funkcí [7].

Pojmem piezoelektrický rezonátor rozumíme element z piezoelektricky aktivního materiálu (nejčastěji ve tvaru destičky, tyčinky nebo prstence), který je na vhodných plochách opatřen určitou konfigurací elektrod a kmitá některým vlastním módem kmitu. Mechanická deformace je vyvolána harmonickým elektrickým polem o frekvenci blízké některé vlastní frekvenci rezonátoru, přiloženým na elektrody. Kmitající rezonátor má současně charakter elektrického oscilačního obvodu. Vzájemná dualita mechanických a elektrických kmitů je významná při výpočtu frekvenčních spekter z rovnic popisujících elastické kmitý tělesa a možností jejich experimentálního určení měření obvodových parametrů.

Piezoelektrický rezonátor může kmitat řadou jednoduchých nebo vzájemně vázaných módů kmitů různých řádů. Vlivem anizotropních vlastností materiálu a přítomnosti elektrického pole dochází k silné vazbě různých módů a výsledné spektrum kmitů je poměrně komplikované. V aplikacích se využívá obvykle pouze jediný mód, případně kombinace několika časově a prostorově posunutých módů kmitů. Podstatou návrhu piezoelektrického rezonátoru je určení základních modálních parametrů - vlastní (rezonanční) frekvence a vlastního tvaru kmitu. U rezonátorů určených pro použití v radiotechnice nebo akustice je zásadní velikost a stabilita rezonanční frekvence a vzájemná vazba nebo odstup sousedních módů kmitů. U rezonátorů používaných pro aktuátory je vedle rezonanční frekvence určující také další modální parametr, vlastní tvar kmitu, důležitý pro optimální činnost zařízení. Čistota módu kmitu je velmi významná při použití rezonátoru v širokém teplotním rozsahu. Každý z módů má svou vlastní teplotní závislost [8] a v určité teplotní oblasti se může vazba kmitů nepříznivě projevit.

Rostoucí význam piezoelektrických rezonátorů v technické praxi klade nároky na přesnost jejich provedení. Nejdůležitější etapa návrhu spočívá v optimalizaci modálních parametrů piezoelektrického elementu podle požadavků budoucí aplikace. Hlavními faktory ovlivňujícími módy kmitů jsou tvar a rozměry rezonátoru a elektrod, použitý materiál a orientace krystalového řezu. Vhodnou kombinací těchto veličin je možné zvýraznit požadovaný mód kmitu a potlačit blízké nežádoucí módy. V průběhu konstrukce rezonátoru je nutné provést úplnou a přesnou analýzu spektra kmitů pro různé hodnoty geometrických a materiálových parametrů. Obvyklým postupem je analytické řešení rovnic, vycházejících z aproximací teorií vyšších řádů popisujících kmitý piezoelektrických desek [1], často doplněné matematickým modelováním pomocí metody konečných prvků [9].

1.1 Současný stav problematiky

Piezoelektrický rezonátor je prostorově ohraničené těleso s nekonečným počtem stupňů volnosti. Při jeho kmitání vznikají obecně třírozměrné stojaté vlny, které lze popsat soustavou čtyř parciálních diferenciálních rovnic pro mechanická posunutí a elektrický potenciál. Přesné analytické řešení tohoto problému není možné vyjádřit ve tvaru konečného počtu

matematických funkcí, a proto je nutné při výpočtu vycházet z některé z aproximačních metod.

Nejjednodušší aproximací, běžně používanou ve starších publikacích [10], je popis kmitání pomocí jednoduché vlnové rovnice, závisící pouze na jedné prostorové proměnné a čase. Tento způsob uvažuje jediný rozměr tělesa a zcela zanedbává vazbu s jinými módy kmitů. Rovnice jsou platné pouze v úzkém rozsahu frekvencí a popisují jenom nejnížší podélné nebo ohybové módy. Nesoulad mezi vypočtenými a naměřenými hodnotami je pak odstraněn zavedením korekčních členů do teoretických vztahů pro rezonanční frekvence. Velikost těchto korekčních členů bývá obvykle stanovena experimentálně. Určité zpřesnění přineslo respektování vazby kmitů zahrnutím dalších módů do soustavy vlnových rovnic [11].

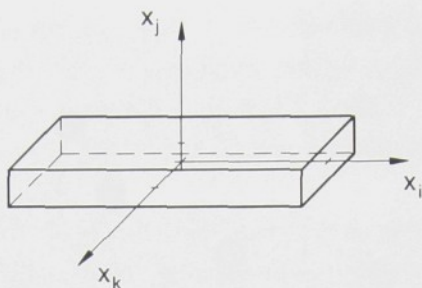
Zcela nový přístup znamenala Mindlinova teorie dvourozměrných aproximačních rovnic popisující vlnění v nekonečně rozlehlých tenkých deskách. Tento postup, odvozený původně pro elastické izotropní desky [12], [13], tvoří základ moderní teorie analytického řešení kmitů prostorově ohraničených piezoelektrických rezonátorů. Základní myšlenkou je nahrazení skutečného rozložení veličin ve směru tloušťky nekonečnou řadou matematických funkcí. Vhodným omezením nekonečné řady lze získat aproximační rovnice zahrnující vyšší módy kmitů a velmi přesně charakterizující chování rezonátoru až do frekvence, odpovídající přibližně mezní frekvenci nejnížšího nezahrnutého módu. Tyto vlnové rovnice spolu s okrajovými podmínkami na hraničních plochách tvoří úplnou soustavu popisující vázané kmity rezonátoru, jejíž řešení je možné vyjádřit v uzavřeném tvaru analytických funkcí.

Rozšíření původní Mindlinovy aproximace do oblasti kmitů piezoelektrických desek a jejímu dalšímu zpřesnění např. zahrnutím hmotnostního vlivu elektrod byla a je věnována velká řada publikací. Mezi nejvýznamější patří Tierstenova monografie [14] nebo souhrnná práce Zelenkova [1], z poslední doby pak zejména práce publikované Leem a jeho spolupracovníky [15], [16]. Většina aproximačních metod vychází z předpokladu lineárního popisu piezoelektrických kmitů a zanedbání vnitřních ztrát v rezonátoru. Přestože bylo publikováno množství prací popisujících nelineární elektroelastické rovnice [17] nebo lineární rovnice respektující mechanické tlumení a elektrické ztráty [18], nebylo dosud formulováno podobné řešení pro kmity rezonátorů konečných rozměrů.

Problematika řešení vázaných kmitů je do určité míry zjednodušena následujícími předpoklady. Rezonátor je obvykle těleso jednoduchých geometrických tvarů, jehož plochy uvažujeme mechanicky volné. Tyto plochy jsou buď bez elektrod, nebo pokryty nekonečně tenkými dokonale vodivými elektrodami, na které je přiložen harmonický potenciál. Amplituda deformací je malá a lze ji popsat lineárními vztahy, kmitání rezonátoru považujeme za netlumené. Naším cílem je získat pouze řešení ustálených vynucených kmitů, a proto neuvažujeme počáteční podmínky ani s nimi spojené přechodové jevy. Vzhledem ke složitosti matematického popisu prostorového kmitání se vychází ze zjednodušující úvahy, že šíření vlnění závisí pouze na jedné prostorové souřadnici (straight-crested wave). V případě rezonátorů vyrobených z materiálů s nízkým koeficientem elektromechanické vazby (např. křemen) lze dále zanedbat piezoelektrické vlastnosti látky a řešení převést na problém čistě elastických kmitů anizotropních desek. Takové zjednodušení však nelze použít pro materiály s vysokým koeficientem elektromechanické vazby (např. piezoelektrická keramika), kdy jsou módy kmitů významně ovlivněny přítomností elektrického pole [19]. Tento vliv je výrazný zejména u rezonátorů kmitajících ve směru působícího elektrického pole [20].

Popis kmitů tenkých úzkých piezoelektrických destiček (viz obr. 1.1), označovaných také

termínem *pásek* (strip), lze dále upravit zavedením jednorozměrné aproximace. Předpokládáme-li, že šířka a tloušťka pásku je malá ve srovnání s délkovým rozměrem, můžeme v obou těchto směrech nahradit skutečná rozložení veličin jejich průměrnou hodnotou nebo řadou diskrétních hodnot. Získáme tak jednorozměrné aproximované veličiny, které jsou funkcemi již pouze jedné souřadnice a času.



Obr. 1.1: Páskový rezonátor umístěný v souřadném systému

Řešením vázaných kmitů páskových rezonátorů s pravoúhlým průřezem pomocí jednorozměrné teorie se poprvé zabýval Lee [21], který odvodil aproximační rovnice popisující vázané podélné, plošně střížné a ohybové kmity rezonátorů s monoklinickou symetrií při zanedbání piezoelektrického jevu. Posunutí ve směru šířky rozvedl do mocninné řady šířkové souřadnice. Vzhledem k malé tloušťce pásku ve srovnání s ostatními rozměry nahradil hodnoty elastického napětí a posunutí ve směru tloušťky jejich středními hodnotami. Výsledné vztahy použil pro výpočet vázaných lichých řádů podélných kmitů, šířkově střížného kmitu a sudých řádů ohybových kmitů. Tyto rovnice aplikoval Zelenka [22] pro výpočet vázaných lichých ohybových, sudých podélných a šířkově střížného kmitu křemenných NT rezonátorů.

Odlisný postup odvození jednorozměrných rovnic použili Lee a Wang v práci [23]. Veličiny ve směru tloušťkové i šířkové souřadnice rozvinuli do řady trigonometrických funkcí a získali obecné rovnice popisující čtyři skupiny vázaných kmitů rezonátorů s monoklinickou symetrií se zahrnutím vlivu elektrického pole.

Vázanými kmity rezonátorů s hexagonální symetrií třídy $6mm$ se zabývali například Zelenka [24], Lee et al. [25] a Yang [26]. V praxi jsou používána dvě provedení páskových rezonátorů s touto symetrií. První provedení má krystalografickou osu c (nebo směr polarizace v případě piezoelektrické keramiky) rovnoběžnou s délkou pásku a elektrody jsou umístěny na plochách kolmých k délce. V druhém případě je osa c rovnoběžná s tloušťkou a elektrody jsou na plochách kolmých k tloušťce.

Pro první případ stanovil Zelenka [24] úpravou vztahů [23] řešení vázaných podélných, šířkově rozpínavých a symetrických šířkově střížných kmitů pro případ ustálených kmitů rezonátoru bez elektrod při respektování piezoelektrických vlastností látky.

Lee et al. [25] a Yang [26] se věnovali popisu kmitů druhého provedení rezonátoru. Lee podobně jako v [21] nahradil veličiny ve směru tloušťky jejich průměrnými hodnotami, přičemž šířkové veličiny rozvedl do řady trigonometrických funkcí. Tímto postupem získal rovnice vázaných podélných, šířkově rozpínavých a symetrických šířkově střížných kmitů. Yang použil rozvoje posunutí a potenciálu do dvojité mocninné řady tloušťkové a šířkové souřadnice a odvodil obecné rovnice roztažných a ohybových kmitů.

1.2 Cíle disertační práce

Předložená práce se zabývá odvozením rovnic pro popis vázaných kmitů podélně polarizovaných páskových rezonátorů z piezoelektrické keramiky. Ucelené řešení tohoto problému, popisující reálný případ kmitů buzených harmonickým elektrickým polem, dosud nebylo publikováno.

Řešení navazuje na Zelenkovu práci [24]. V této publikaci není uvedeno odvození výsledných rovnic a neobsahuje ani ověření teoretických vztahů výpočtem a porovnáním s experimentem. Je proto vhodné vyjít z původních prací [15] a [23] a provést znovu úplné odvození těchto rovnic. Ty je pak nutné doplnit okrajovými podmínkami, které respektují způsob elektrického buzení kmitů rezonátoru.

Popis stejné skupiny vázaných kmitů lze získat také druhou metodou průměrování přes tloušťkovou souřadnici. Použitím stejné myšlenky jako v předchozím případě je možné přizpůsobit postup řešení [25] a získat vlnové rovnice kmitů podélně polarizovaných rezonátorů, které budou doplněny o příslušné okrajové podmínky. Opět je třeba vyjít z původní dvourozměrné aproximace [16].

Obě soustavy vlnových rovnic, získané různým postupem aproximace, by měly shodně popisovat chování reálného rezonátoru. Je proto nutné navzájem porovnat jejich řešení, například ve formě závislosti rezonanční frekvence na rozměrech rezonátoru. Důležité bude i porovnání teoretických výsledků s naměřenými hodnotami. Ověření odvozených vztahů bude provedeno pro případ páskových rezonátorů z piezoelektrické PZT keramiky APC 841 a APC 856.

Je třeba si uvědomit, že podélně polarizované piezokeramické pásky představují specifické provedení rezonátoru. Vzhledem k jeho tvaru a způsobu buzení je činitel jakosti při rezonanci nízký. Značná délka spolu s malou plochou elektrod jsou příčinou velmi nízké statické kapacity a elektrické pole uvnitř rezonátoru je silně nehomogenní. Vlastnosti piezoelektrické keramiky jsou nelineární a její materiálové konstanty jsou výrobcem zaručovány v toleranci několika procent [27]. Některé teoreticky popsitelné módy kmitů nelze vybudit, nebo je nutné použít vyšší nelineární úrovně budícího napětí. Získané rovnice proto budou zřejmě pouze lineární aproximací reálného nelineárního stavu.

1.3 Členění práce

Řešení vázaných módů piezoelektrických rezonátorů představuje komplexní problém, vyžadující znalosti z oblasti mechanického a elektrického kmitání, šíření vlnění v neomezeném a ohraničeném piezoelektrickém prostředí a zejména problematiky kmitání tenkých desek. Tomu také odpovídá členění práce.

Kapitola 2 je věnována elastickému vlnění v piezoelektrických látkách. Jsou popsány základní případy šíření vln v neohraničeném a ohraničeném prostředí a uvedeny výchozí třírozměrné rovnice piezoelektřiny, charakterizující vzájemnou souvislost mechanického a elektromagnetického vlnění při kvazistatické aproximaci. Rovnice jsou doplněny okrajovými podmínkami pro jednotlivé případy mechanického a elektrického upnutí. Dále je zmíněna problematika módů kmitů nekonečně rozlehlé desky, která je důležitá při formulaci aproximačních rovnic.

V kapitole 3 je obecně popsán základní princip a postup nahrazení třírozměrných rovnic jejich dvourozměrnou aproximací. Konkrétně je uvedeno odvození nekonečného systému

dvourozměrných aproximačních rovnic, vzniklých rozvojem posunutí a potenciálu do řady trigonometrických funkcí, a jejich novější modifikace. Jednoznačnost řešení aproximačního systému s konečných počtem prvků je určena zavedením okrajových podmínek.

Stěžejní částí práce je kapitola 4, která obsahuje odvození vztahů popisujících kmity podélně polarizovaných páskových rezonátorů při různém způsobu aproximace. Nejdříve je proveden jednoduchý popis podélných kmitů pomocí vlnové rovnice uvažující pouze jeden stupeň volnosti. V dalších částech kapitoly jsou z obecných dvourozměrných rovnic postupně pomocí metody rozvoje do řady funkcí šířkové souřadnice a metody průměrování přes tloušťkovou souřadnici odvozeny jednorozměrné rovnice vázaných kmitů pásku. Všechna řešení jsou doplněna okrajovými podmínkami a tvoří ucelené systémy použitelné pro výpočet modálních parametrů rezonátoru.

Výsledné soustavy aproximačních rovnic jsou v kapitole 5 použity pro určení frekvenčních křivek a teoretických tvarů kmitů páskových rezonátorů. Výsledky získané oběma metodami výpočtu jsou porovnány vzájemně a také s experimentálními hodnotami. V závěru této části jsou diskutována některá omezení, týkající se praktického použití odvozených rovnic pro stanovení frekvenčních spekter rezonátorů z piezoelektrické keramiky.

Kapitola 6 obsahuje shrnutí výsledků práce a závěr.

V textu je střídavě používáno tenzorového a maticového značení [28] složek fyzikálních veličin a materiálových konstant. Podobně jako v jiné literatuře z této oblasti budeme v obecných vztazích používat úplného tenzorového značení s indexy psanými latinkou, v rovnicích odvozených pro konkrétní krystalovou symetrii pak použijeme zkráceného maticového značení s řeckými indexy. V rovnicích budeme důsledně užívat konvence Einsteinova sumačního pravidla, podle něhož znamená opakování indexu ve výrazu sumaci přes všechny tři hodnoty tohoto indexu.

2 Elastické vlnění v piezoelektrických látkách

Popis vázaných kmitů piezoelektrických rezonátorů souvisí s problémem šíření elastického vlnění v piezoelektrickém ohraničeném prostředí. V piezoelektrické látce dochází vlivem vzájemné závislosti mechanických a elektrických veličin k vazbě mezi elastickým a elektromagnetickým vlněním. Výsledné rozložení elastických a elektrických polí uvnitř rezonátoru lze získat pouze současným řešením Newtonových pohybových rovnic a Maxwellových rovnic při kvazistatické aproximaci.

2.1 Třírozměrné rovnice piezoelektřiny

V neohraničeném prostředí nebo v tělese, jehož všechny rozměry jsou mnohem větší v porovnání s vlnovou délkou šířícího se rozruchu, se obecně šíří vlnění složené ze tří rovinných elastických vln, jejichž polarizace (určené směrem posunutí částic) jsou navzájem kolmé. Směry posunutí částic nejsou v obecném případě rovnoběžné nebo kolmé na směr šíření vlnění. Vlnu s polarizací nejbližší směru šíření nazýváme vlnou kvazipodélnou, zbylé dvě vlnami kvazipříčnými. Vlny postupují se stejnou frekvencí jedním směrem s obecně různou rychlostí, která závisí také na směru šíření. Rychlost kvazipříčné vlny je vždy nižší než rychlost kvazipodélné vlny. V piezoelektrickém prostředí jsou mechanické výchylky vázány s elektromagnetickým polem, takže elektrický potenciál a doprovodné elektrické pole jsou součástí elastické vlny. Postupující elektrické pole má povahu podélné vlny, jejíž vlnoplochy jsou ekvipotenciálami a která tvoří čtvrtou složku postupujícího vlnění.

Popis kmitání piezoelektrických těles vychází z lineární teorie piezoelektřiny [14]. Za předpokladu nekonečně malých deformací je elastické chování látky určeno Hookovým zákonem. Protože elastické vlny postupují pevnou látkou rychlostí 10^4 - až 10^5 -krát nižší než elektromagnetické vlnění [29], můžeme magnetickou část energie spojené s mechanickým kmitáním zanedbat. Elektrické pole v látce má vzhledem k elektromagnetickému vlnění kvazistatický charakter a lze ho popsat Maxwellovými rovnicemi pro stacionární elektrické pole.

Za těchto předpokladů můžeme vlnění v piezoelektrických látkách popsat následující skupinou rovnic [14]:

a) algebraické rovnice (lineární piezoelektrické rovnice)

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k, \\ D_i &= e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ik}^S E_k, \end{aligned} \quad (2.1)$$

b) divergenční rovnice (elastické pohybové rovnice a nábojová rovnice elektrostatiky)

$$\begin{aligned} T_{ij,i} &= \rho \ddot{u}_j, \\ D_{i,i} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

c) gradientní rovnice (vztahy mezi deformací a mechanickým posunutím a mezi intenzitou elektrického pole a elektrickým potenciálem)

$$\begin{aligned} S_{kl} &= \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}), \\ E_k &= -\varphi_{,k}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde T_{ij} , S_{kl} , E_k a D_i jsou po řadě složky elastického napětí, deformace, intenzity elektrického pole a elektrického posunutí, u_j a φ jsou složky mechanického posunutí a elektrický potenciál.

Materiálovými vlastnostmi látky jsou elastický modul při konstantní intenzitě elektrického pole c_{ijkl}^E , piezoelektrický modul e_{ikl} , permitivita při konstantní deformaci ε_{ik}^S a hustota ρ . Symbol vyskytující se v indexu veličiny za čárkou značí parciální derivaci této veličiny podle odpovídající souřadnice.

Systém 22 rovnic (2.1) až (2.3) pro 22 neznámých lze postupným vzájemným dosazováním zjednodušit na soustavu čtyř diferenciálních pro čtyři neznámé u_j a φ

$$\begin{aligned} c_{ijkl}^E u_{k,li} + e_{kij} \varphi_{,ki} &= \rho \ddot{u}_j, \\ e_{ikl} u_{k,li} - \varepsilon_{ik}^S \varphi_{,ki} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Soustava vlnových rovnic (2.4) představuje přesné třírozměrné rovnice pro popis šíření elastických vln v piezoelektrickém neohraničeném prostředí. Pojmeme třírozměrné rovnice rozumíme skutečnost, že jejich proměnné jsou funkcí tří prostorových souřadnic a času. Řešením této soustavy je postupné vlnění, jehož složky můžeme předpokládat ve tvaru [31]

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_i e^{[jk(\beta_l x_l - vt)]}, \\ \varphi &= \alpha_4 e^{[jk(\beta_l x_l - vt)]}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

kde α_i a α_4 jsou amplitudy mechanického posunutí a elektrického potenciálu, v je rychlost šíření vlny, β_l jsou směrové kosiny určující směr šíření vzhledem k souřadným osám x_l , j je imaginární jednotka a

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (2.6)$$

je vlnový vektor vlny s kruhovou frekvencí ω , svázaný s její vlnovou délkou λ vztahem

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.7)$$

Uvažované řešení (2.5) dosadíme do soustavy (2.4). Vyjádříme-li z poslední rovnice (2.4) potenciál φ a dosadíme jej do zbylých rovnic (2.4), získáme soustavu lineárních rovnic

$$(\bar{T}_{jk} - \rho v^2 \delta_{jk}) \alpha_k = 0, \quad (2.8)$$

kde

$$\bar{T}_{jk} = \left(c_{ijkl}^E + \frac{(e_{mij} \beta_m e_{nkl} \beta_n)}{\varepsilon_{jk}^S \beta_j \beta_k} \right) \beta_j \beta_k \quad (2.9)$$

je piezoelektrický Christoffelův tenzor a

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{pro } j = k, \\ 0 & \text{pro } j \neq k \end{cases} \quad (2.10)$$

je Kroneckerův symbol.

Rovnice (2.8) má netriviální řešení, pokud je determinant soustavy roven nule, tedy

$$|\bar{T}_{jk} - \rho v^2 \delta_{jk}| = 0. \quad (2.11)$$

Řešením této kubické rovnice získáme tři kladné rychlosti v_n , $n = 1, 2, 3$, které odpovídají rychlostem jednotlivých elastických vln. Ke každé rychlosti získáme dosazením do (2.8)

trojici amplitud $\alpha_k^{(n)}$, $k = 1, 2, 3$, které definují směr výchylky a jsou složkami polarizačního vektoru $\alpha^{(n)}$ vlny. Amplitudy $\alpha_4^{(n)}$ odpovídající elektrické vlně jsou lineární kombinací složek $\alpha_k^{(n)}$. Protože tenzor $\bar{T}_{jk}$ je symetrický, jsou polarizace vln $\alpha^{(n)}$ tvořící jeho vlastní vektory navzájem kolmé [32].

Výsledné řešení soustavy (2.4) ve formě postupného vlnění je superpozicí dílčích řešení (2.5)

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{n=1}^3 B_n \alpha_i^{(n)} e^{jk(\beta_l x_l - vt)}, \\ \varphi &= \sum_{n=1}^3 B_n \alpha_4^{(n)} e^{jk(\beta_l x_l - vt)}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

kde váhové koeficienty B_n můžeme určit z podmínek popisujících například intenzitu vlnění. Jak je zřejmé z (2.12), jsou celkové výchylky šířícího se rozruchu dány součtem výchylek jednotlivých vln. Protože v neohraničeném prostředí nemůžeme definovat okrajové podmínky, lze vyjádřit amplitudy α_i a váhové konstanty B_n pouze ve formě poměrných hodnot.

Pro zjednodušení zápisu vynecháme v dalším textu horní indexové označení materiálových konstant a c_{ijkl}^E nahradíme symbolem c_{ijkl} , ε_{ij}^S pak symbolem ε_{ij} .

2.2 Vlnění v ohraničeném prostředí

Druh vlnění, které vzniká v tělese konečných rozměrů, obecně závisí na tvaru tělesa a jeho rozměrech ve srovnání s vlnovou délkou šířícího se rozruchu a na způsobu buzení kmitů. V našem případě piezoelektrických rezonátorů s objemovou akustickou vlnou se zaměříme pouze na vlnění, šířící se celým objemem tělesa.

Při vlnění v ohraničeném piezoelektrickém prostředí, tedy s jednou a více hraničními plochami, dochází na rozhraní k odrazům vlnění a vazbě různých módů kmitů. V případě piezoelektrického elementu umístěného ve vakuu předpokládáme úplný odraz vlnění směrem do piezoelektrického prostředí. Dopadající rovinná vlna může obecně vyvolat tři odražené vlny s odlišnou polarizací (jednu kvazipodélnou a dvě kvazipříčné) se stejnou frekvencí.

U prostorově omezeného elementu musíme rovnice popisující šíření vlnění (2.4) řešit současně s okrajovými podmínkami. Tyto podmínky jsou pro piezoelektrické látky dvojího druhu - mechanické a elektrické [14]. Uvažujme rezonátor umístěný vhodně v souřadném systému os tak, že hraniční plocha, oddělující těleso rezonátoru od okolního prostředí, je shodná s rovinou $x_i = \text{konst}$. Při návrhu obvykle předpokládáme rezonátor s mechanicky volnými plochami umístěný ve vakuu.

Z podmínky mechanicky volného povrchu, na který nepůsobí žádné vnější síly, vyplývá, že složky elastického napětí na hraniční ploše jsou nulové a mechanická okrajová podmínka má tvar

$$T_{i1} = T_{i2} = T_{i3} = 0 \quad \text{pro } x_i = \text{konst}. \quad (2.13)$$

Elektrické okrajové podmínky můžeme rozlišovat pro dva různé případy. Povrch rezonátoru je buď bez elektrod, nebo pokrytý dokonale vodivými nehmotnými elektrodami, na které je přiložen elektrický potenciál.

V prvním případě splňuje elektrická okrajová podmínka případ spojitosti normálové složky elektrického posunutí v piezoelektrické látce a v okolním prostředí a má tvar

$$D_i^{(p)} = D_i^{(v)} \quad \text{pro } x_i = \text{konst.}, \quad (2.14)$$

kde indexem p je označeno piezoelektrické prostředí a indexem v vakuum nad povrchem. Při praktickém výpočtu uvažujeme permitivitu piezoelektrického prostředí mnohonásobně vyšší než permitivitu vakua, elektrické pole ve vakuu zanedbáváme a okrajová podmínka má zjednodušený tvar

$$D_i = 0 \quad \text{pro } x_i = \text{konst.} \quad (2.15a)$$

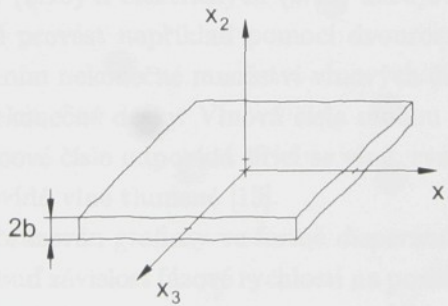
U pokoveného povrchu vyžadujeme spojitý potenciál na celé ploše elektrody

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{pro } x_i = \text{konst.}, \quad (2.15b)$$

kde hodnota přiloženého potenciálu φ_0 může být nulová, nebo může nabývat konečných hodnot.

2.3 Vlnění v nekonečně rozlehlých deskách

Uvažujme nekonečně rozlehlou tenkou desku z piezoelektrického materiálu, umístěnou v souřadném systému os podle obr. 2.1. Tloušťka desky je rovnoběžná s osou x_2 a deska je ohraničená rovinami $x_2 = \pm b$. Počátek souřadné soustavy leží ve střední rovině desky. Postupné vlnění se šíří ve směru kolmém na osu x_2 , v našem případě předpokládáme směr šíření vlnění rovnoběžný s osou x_3 . Rovinu x_2x_3 , kolmou na směr šíření a na hraniční roviny, označme jako sagitální rovinu.



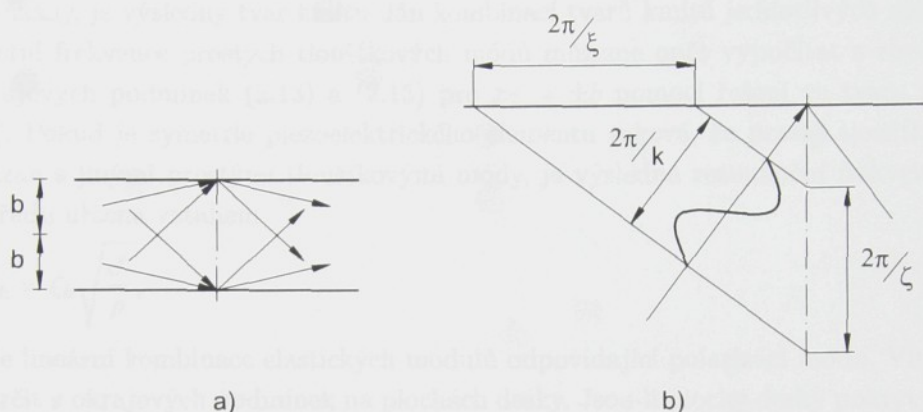
Obr. 2.1: Nekonečně rozlehlá tenká deska umístěná v souřadném systému

Postupující elastické vlnění si můžeme představit jako soubor mnoha jeho složek, které se šíří ve směru osy x_3 střídavým odražením od hraničních rovin $x_2 = \pm b$. Schématicky je tento pohyb znázorněn na obr. 2.2a. Tyto složky mají charakter podélné nebo příčné vlny. Podélné vlny jsou polarizovány v sagitální rovině, příčné vlny jsou polarizovány buď v sagitální rovině (příčné vertikální vlny) nebo v rovině kolmé na sagitální rovinu (příčné horizontální vlny). Jednotlivé složky vlnění představují *módy kmitů* (*kmity*) nekonečně rozlehlé desky.

Prostor omezený dvěma hraničními rovinami se chová jako vlnovod, ve kterém dochází k disperzi vlnění [33]. Rychlost vlny ve směru šíření vlnění (*fázová rychlost*) závisí na vlnové délce ve směru šíření. Na obr. 2.2b je schématicky zobrazena složka příčného vektikálního vlnění dopadajícího na rozhraní. Vlnový vektor k můžeme rozložit na složku ve směru šíření

vlny ξ a kolmo na směr šíření ζ , kterým odpovídají složky vlnových délek $2\pi/\xi$ a $2\pi/\zeta$. Vlnová délka $2\pi/\xi$ je větší než hodnota $2\pi/k$, a proto je fázová rychlost vlny ve směru šíření deskou větší než fázová rychlost vlny v neohrazeném prostředí. Pokud dopadající vlna vyvolá odraženou vlnu jiné polarizace, jsou tyto vlny navzájem vázané (viz obr. 2.2a). Z hlediska matematického popisu vlnění je jejich vazba důsledkem okrajových podmínek.

Není-li daný mód vázán s jinými prostřednictvím anizotropních vlastností látky nebo vazbou na rozhraní, může se šířit deskou svou fázovou rychlostí nezávisle na všech ostatních módech.



Obr. 2.2: Šíření vlnění uvnitř nekonečné desky

Vzhledem k disperzi prostředí není fázová rychlost šíření vázána s jeho frekvencí a vlnovým číslem ξ jednoduchým vztahem podobným (2.6), ale jejich poměr je určen složitou disperzní závislostí. Tento problém lze popsat třírozměrnými rovnicemi piezoelektriny (2.4) při zavedení mechanických (2.13) a elektrických (2.15) okrajových podmínek na plochách $x_2 = \pm b$. Řešení je možné provést například pomocí dvourozměrných stojatých vln [14]. Pro danou frekvenci je řešením nekonečné množství vlnových čísel ξ_n , které odpovídají jednotlivým módům kmitů nekonečné desky. Vlnová čísla mohou být reálná, ryze imaginární nebo komplexní. Reálné vlnové číslo odpovídá šířící se vlně, ryze imaginární nešířící se vlně a komplexní hodnota odpovídá vlně tlumené [13].

Výsledek je obvykle zobrazován graficky ve formě *disperzních křivek* (viz obr. 5.1, 5.2). Disperzní křivky vyjadřují buď závislost fázové rychlosti na poměru vlnového čísla ξ a tloušťky desky, nebo častěji závislost frekvence vlnění na tomto poměru. Fyzikálně lze tyto křivky interpretovat jako frekvenční závislost poměru podélné a příčné deformace desky [29]. Každý mód kmitu má svou vlastní závislost frekvence a vlnového čísla, které odpovídá jedna disperzní křivka ve frekvenčním spektru.

Analýzou disperzní závislosti získáme několik důležitých poznatků [12]. Pro každou vlnovou délku ve směru šíření vlnění je řešením soustavy nekonečné množství módů kmitů s různou frekvencí. Při jedné frekvenci se deskou může šířit pouze konečný počet módů, jejichž vlnové délky ve směru šíření jsou v určitém poměru k tloušťce desky. Zároveň však existuje nekonečné množství nešířících se nebo tlumených módů kmitů. Módy vyšších řádů se deskou začínají šířit tehdy, pokud jejich frekvence překročí určitou hodnotu *mezní frekvence*. Pokud poměr tloušťky desky $2b$ a vlnové délky $2\pi/\xi$ přesáhne jistou limitní hodnotu, získává mód vlnění charakter povrchové akustické vlny.

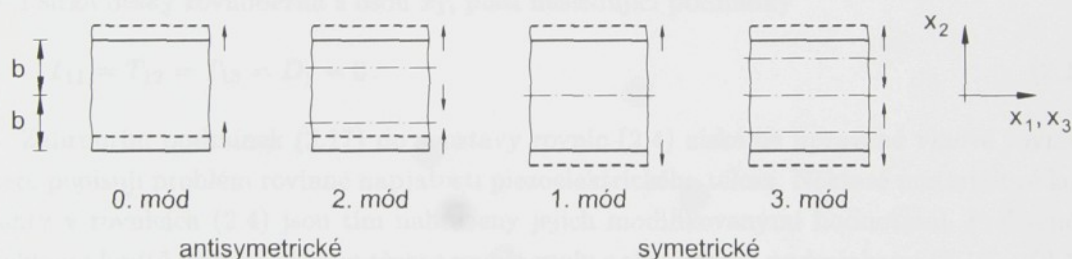
Věnujme dále pozornost krajnímu případu módů s vlnovým číslem $\xi = 0$. Tyto módy,

označované jako prosté tloušťkové módy, představují stojaté vlny ve směru tloušťky desky, pro které jsou všechny veličiny závislé pouze na tloušťkové souřadnici. Rozlišujeme dva typy prostých tloušťkových módů. Prvním jsou prosté tloušťkově rozpínavé módy, které představují podélné vlny a jsou charakterizovány posunutím kolmým na plochy desky. Druhým typem jsou prosté tloušťkově střížné módy, tedy příčné vlny charakterizované posunutím rovnoběžným s plochami desky. Základní tvary kmitů jsou zobrazeny na obr. 2.3 a obr. 2.4. Symetrie módu souvisí se symetrií posunutí vůči střední rovině desky (x_1x_3), řád módu určuje počet uzlových rovin rovnoběžných se střední rovinou. Pokud jsou prosté tloušťkové kmity vázány, je výsledný tvar kmitu dán kombinací tvarů kmitů jednotlivých módů.

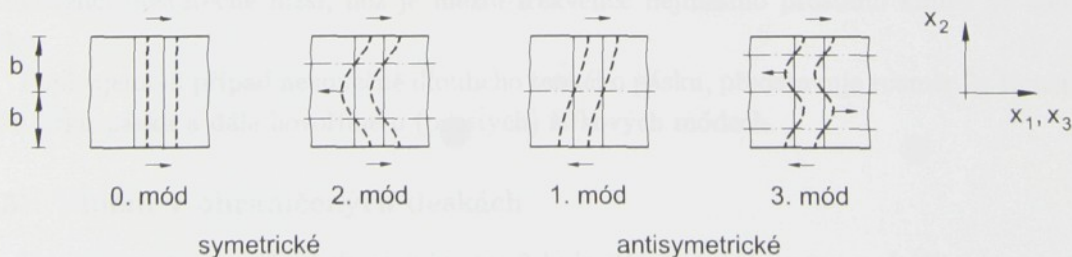
Vlastní frekvence prostých tloušťkových módů můžeme opět vypočítat z rovnice (2.8) a z okrajových podmínek (2.13) a (2.15) pro $x_2 = \pm b$ pomocí řešení ve tvaru stojatých vln [14]. Pokud je symetrie piezoelektrického elementu taková, že prostý tloušťkový mód není vázán s jinými prostými tloušťkovými módy, je výsledná rezonanční frekvence módu h -tého řádu určena vztahem

$$\omega_h = \zeta_h \sqrt{\frac{c'}{\rho}}, \quad (2.16)$$

kde c' je lineární kombinace elastických modulů odpovídající polarizaci módu. Vlnové číslo ζ_h lze určit z okrajových podmínek na plochách desky. Jsou-li plochy desky pokryty elektrodami a kmitání je vyvoláno přiloženým elektrickým napětím, projevuje se vliv elektrického pole uvnitř desky a frekvence vyšších řádů prostých tloušťkových módů piezoelektrických desek nejsou harmonickými násobky základního módu. Jejich poměr závisí na velikosti odpovídajícího koeficientu elektromechanické vazby [34].



Obr. 2.3: Prosté tloušťkově rozpínavé módy nekonečně rozlehlé desky



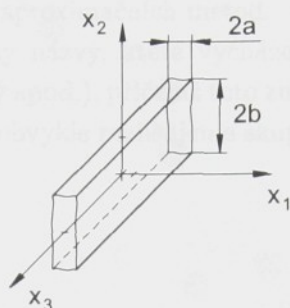
Obr. 2.4: Prosté tloušťkově střížné módy nekonečně rozlehlé desky

Frekvence prostých tloušťkových módů určují mezní frekvenci šíření módů kmitů odpovídajícího řádu. Jak uvidíme dále, mají některé módy mezní frekvenci i při nenulovém vlnovém čísle $\xi \neq 0$. Pokud je frekvence módu nižší než mezní, je jeho vlnové číslo ξ komplexní a nešíří se. Módy s frekvencí vyšší než mezní mají vlnové číslo ξ reálné a postupují ve směru

šíření vlnění. Módy 0. řádu nemají mezní frekvenci a deskou se mohou šířit již od nulové frekvence. Symetrické módy kmitů přispívají k roztažným deformacím desky, antisymetrické módy pak k ohybovým deformacím desky [12].

2.4 Deska s nekonečně malou šířkou

Postup řešení kmitů nekonečně rozlehlé desky můžeme použít také pro případ nekonečně dlouhé desky s (nekonečně) malou šířkou (viz obr. 2.5), tedy ve tvaru velmi tenkého nekonečného pásku [14].



Obr. 2.5: Velmi úzká nekonečně dlouhá deska umístěná v souřadném systému

Za předpokladu velmi malé šířky ($a \ll b$) uvažujeme, že složky elastického napětí a elektrického posunutí ve směru šířky jsou nulové a ostatní veličiny nezávisí na šířkové souřadnici. Je-li šířka desky rovnoběžná s osou x_1 , platí následující podmínky

$$T_{11} = T_{12} = T_{13} = D_1 = 0. \quad (2.17)$$

Zahrnutím podmínek (2.17) do soustavy rovnic (2.4) získáme upravené vlnové rovnice, které popisují problém rovinné napjatosti piezoelektrického tělesa. Některé materiálové konstanty v rovnicích (2.4) jsou tím nahrazeny jejich modifikovanými hodnotami. Frekvenční spektrum kmitů určíme řešením těchto rovnic spolu s okrajovými podmínkami (2.13) a (2.15) na plochách $x_2 = \pm b$ stejným postupem jako v případě nekonečně rozlehlé desky. Vzhledem k zanedbání šířkového rozměru desky můžeme uvedené vztahy použít pro popis kmitů o frekvenci dostatečně nižší, než je mezní frekvence nejnižšího prostého kmitu ve směru šířky.

Popisujeme-li případ nekonečně dlouhého tenkého pásku, představuje rozměr $2a$ tloušťku a $2b$ šířku pásku a dále hovoříme o (prostých) šířkových módech.

2.5 Vlnění v ohrazených deskách

V prostorově ohrazené desce (viz obr. 3.1) je šíření vlnění omezeno dalšími hranicemi na hranách kolmých k plochám $x_2 = \pm b$. Módy kmitů, které se mohou šířit v nekonečné desce, se vyskytují i v ohrazené desce. Při odrazech vlnění na hranicích desky vznikají třírozměrné stojaté vlny a pro každý mód nekonečné desky existují v konečné desce také jeho vyšší harmonické.

Všechny kmity jsou vzájemně vázány při odrazech na rozhraních a narozdíl od nekonečné desky nemohou existovat nezávislé módy. Protože se módy vyšších řádů šíří deskou

až od určité mezní frekvence, jsou sice vysokofrekvenční kmity ovlivněny vazbou s nižšími módy kmitů, ale pro nízkofrekvenční kmity je vazba s vyššími módy kmitů slabá. Tato skutečnost je významná při formulaci aproximační rovnic.

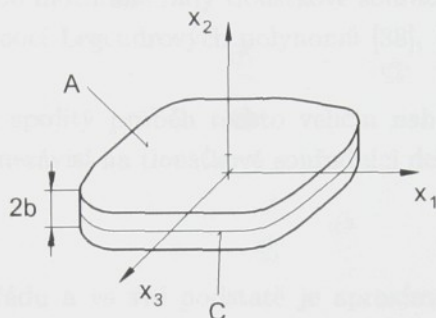
Mód kmitu ohraničené desky je dán kombinací jednotlivých módů kmitu nekonečné desky. Kmitání je popsáno vlnovými rovnicemi (2.4), jejichž řešení musí vyhovovat mechanickým a elektrickým okrajovým podmínkám (2.13), (2.15) na všech hraničních plochách rezonátoru. Řešení této soustavy lze analyticky vyjádřit v uzavřeném tvaru konečného počtu matematických funkcí pouze pro případ nekonečných desek nebo pro ohraničené desky se specifickými poměry rozměrů. Pro popis kmitů deskového rezonátoru obecných rozměrů je proto nutné použít některou z aproximačních metod.

Jednotlivé módy jsou značeny názvy, které vycházejí z jejich vlastního tvaru kmitu (např. tloušťkově střížný, obrysový apod.), přičemž toto značení nebývá v literatuře jednotné. Při studiu páskových rezonátorů obvykle rozlišujeme skupiny kmitů roztažných, ohybových a torzních.

3 Aproximační řešení kmitů piezoelektrických desek

V této kapitole se zaměříme na princip a odvození dvourozměrných aproximačních rovnic, popisujících kmity rezonátorů ve tvaru prostorově ohraničené desky.

Uvažujme ohraničenou piezoelektrickou desku obecného tvaru, umístěnou v souřadné soustavě tak, že její tloušťka $2b$ je rovnoběžná s osou x_2 a počátek souřadné soustavy leží ve střední rovině desky (viz obr. 3.1). Hraniční povrchy kolmé na osu x_2 nazýváme *plochy*, hraniční povrchy rovnoběžné s osou x_2 potom *hrany*. Obsah obou ploch desky označme A . Hrany desky obepíná křivka C , která je průsečíkem hran s rovinou $x_2 = 0$. Pro případ buzení ve směru kolmém na osu x_2 [35] předpokládejme plochy bez elektrod.



Obr. 3.1: Ohraničená piezoelektrická deska umístěná v souřadném systému

K vyjádření diferenciálních rovnic popisujících pohyb piezoelektrického tělesa o objemu V uzavřeném plochou S můžeme využít variačního principu pro lineární piezoelektrické kontinuum [36], který je modifikací principu virtuálních prací analytické mechaniky [37]. Variační rovnice vyjadřují dynamickou rovnováhu systému a mají tvar

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_V [(T_{ij,i} - \rho \ddot{u}_j) \delta u_j + D_{i,i} \delta \varphi] dV + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S [(t_j - n_i T_{ij}) \delta u_j + (\sigma - n_i D_i) \delta \varphi] dS = 0, \quad (3.1)$$

kde t_j je elastické napětí na povrchu elementu, σ je hustota povrchového náboje a n_i je jednotkový vektor směřující vně plochy S . δu_j a $\delta \varphi$ jsou libovolné variace posunutí a potenciálu, které jsou v časech t_0 a t_1 nulové. Protože variační rovnice platí pro libovolný objem a plochu tělesa, můžeme objemovou a plošnou část rovnice (3.1) uvažovat odděleně.

3.1 Dvourozměrné aproximační teorie

Výchozí metodou, používanou pro odvození vztahů popisujících kmity ohraničených piezoelektrických rezonátorů, je teorie dvourozměrné aproximace využívající rovnic získaných rozvojem vybraných veličin v řadu. Tento postup, poprvé použitý Mindlinem pro řešení čistě elastických kmitů izotropních desek [12], byl postupně rozšířen i do oblasti kmitání piezoelektrických anizotropních desek. Základní myšlenka spočívá v nahrazení skutečného rozložení veličin ve směru tloušťky desky (mechanického posunutí a elektrického posunutí nebo mechanického posunutí a potenciálu) nekonečnou řadou matematických funkcí $G_n(x_2)$. V dalším textu budeme uvažovat mechanické posunutí u_j a potenciál φ , které rozvineme

do nekonečné řady

$$u_j(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_j^{(n)} G_n(x_2), \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)} G_n(x_2), \quad (3.2)$$

kde

$$u_j^{(n)} = u_j^{(n)}(x_1, x_3, t), \quad \varphi^{(n)} = \varphi^{(n)}(x_1, x_3, t) \quad (3.3)$$

jsou dvourozměrné složky posunutí a potenciálu, závislé pouze na souřadnicích x_1, x_3 a čase t . Horní index v závorce nevyjadřuje mocninu, ale pouze určuje řád složky. Vedle původního Mindlinova rozvoje veličin do mocninné řady tloušťkové souřadnice [12], [14] je v literatuře používáno také rozvoje pomocí Legendrových polynomů [38], [39] nebo trigonometrických funkcí [15], [16].

Rozvinutím do řady je spojitý průběh těchto veličin nahrazen nekonečným součtem diskrétních průběhů, které nezávisí na tloušťkové souřadnici desky. Člen

$$u_j^{(n)}(x_1, x_3, t) G_n(x_2) \quad (3.4)$$

určuje tvar kmitu n -tého řádu a ve své podstatě je aproximací odpovídajícího prostého tloušťkového módu nekonečně rozlehlé desky. Vzhledem k tomu, že módy vyšších řádů se šíří deskou až od určité mezní frekvence, předpokládáme, že v určitém rozsahu frekvencí je jejich vliv na frekvenční spektrum desky zanedbatelný. Můžeme proto uvažovat pouze konečný počet N členů řady a vyloučením veličin vyšších řádů z rozvoje definovat aproximační rovnice N -tého řádu, které popisují pouze konečný počet módů desky. Taková aproximace, nahrazující reálnou desku tělesem s konečným počtem stupňů volnosti, je teoreticky platná až do mezní frekvence nejnižšího neuvažovaného módu.

Postup odvození aproximačních rovnic spočívá v dosazení nekonečných rozvojų posunutí a potenciálu (3.2) do objemové části rovnice vyjadřující variační princip (3.1). Úpravou získáme dvourozměrné aproximační rovnice, které nahrazují soustavu třírozměrných rovnic (2.1)–(2.4). Pro praktické použití je dále nutné omezit počet členů aproximačních rovnic. Toto omezení obvykle není možné provést prostým zanedbáním členů vyšších řádů, ale je třeba přihlédnout i k dalším fyzikálním předpokladům, protože některé veličiny nižších řádů mohou v rozvoji záviset na posunutí a potenciálu vyššího řádu.

Aproximační dvourozměrné rovnice s omezeným počtem členů představují pouze přibližný popis kmitů desky. V dalším kroku je nutné porovnat řešení těchto rovnic s přesným řešením třírozměrných rovnic (2.4), což je možné pro případ nekonečně rozlehlých desek. Případný nesoulad obou řešení je odstraněn zavedením korekčních členů do aproximačních rovnic.

Nakonec je třeba prokázat jednoznačnost a ortogonalitu řešení dvourozměrného systému s konečným počtem členů. Protože se zabýváme pouze řešením ustálených vynucených kmitů, nebudeme uvažovat počáteční podmínky a problém jednoznačnosti řešení omezíme pouze na stanovení jeho okrajových podmínek. Ty můžeme určit dosazením rozvojų (3.2) do plošné části variační rovnice (3.1). Ortogonalita řešení tohoto systému byla prokázána např. v [14] a proto se jí nebudeme dále zabývat.

Výsledné dvourozměrné aproximační rovnice spolu s okrajovými podmínkami představují úplnou soustavu popisující vázané kmitý rezonátoru v určitém frekvenčním rozsahu.

Řešení soustavy je možné vyjádřit v uzavřeném tvaru konečného počtu analytických funkcí. To, které módy vázaných kmitů jsou v popisu zahrnuty a které ne, závisí pouze na stupni aproximace a požadované přesnosti výpočtu. Pokud je pro naši aplikaci nevýznamná vazba některých módů kmitů nebo je není nutné brát v úvahu, můžeme aproximované rovnice dále zjednodušit zanedbáním členů odpovídajících těmto módům.

V dalším textu se budeme zabývat dvourozměrnými aproximačními rovnicemi, odvozenými Leem pomocí rozvoje tloušťkových veličin do řady trigonometrických funkcí [15] a jejich novější variantou [16].

3.2 Dvourozměrná teorie využívající rozvoje do řady trigonometrických funkcí

V souladu s [15] rozvíjíme mechanické posunutí u_j a elektrický potenciál φ do nekonečné řady trigonometrických funkcí

$$\begin{aligned} u_j(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_j^{(n)} \cos \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right], \\ \varphi(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)} \cos \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

kde $\eta = x_2/b$. Základní tvary kmitů pro $n = 0, 1, 2$ jsou schématicky znázorněny na obr. 3.2 pro námi uvažovaný případ šíření vlnění ve směru x_3 . Vzhledem k symetrii vůči střední rovině x_1x_3 přispívají složky posunutí $u_j^{(n)}$ k roztažným kmitům desky pro $(j + n)$ liché a k ohybovým kmitům desky pro $(j + n)$ sudé.

Dosazením rozvojů (3.5) do rovnice pro objemovou část variančního principu (3.1), nahrazením $dV = b d\eta dA$ a integrací přes η v mezích od -1 do 1 získáme vztah

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_A b \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(T_{ij,i}^{(n)} - \frac{n\pi}{2b} \bar{T}_{2j}^{(n)} + \frac{1}{b} F_j^{(n)} - (1 + \delta_{n0}) \rho \ddot{u}_j^{(n)} \right) \delta u_j^{(n)} + \right. \\ \left. + \left(D_{i,i}^{(n)} - \frac{n\pi}{2b} \bar{D}_2^{(n)} + \frac{1}{b} D^{(n)} \right) \delta \varphi^{(n)} \right] dS = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

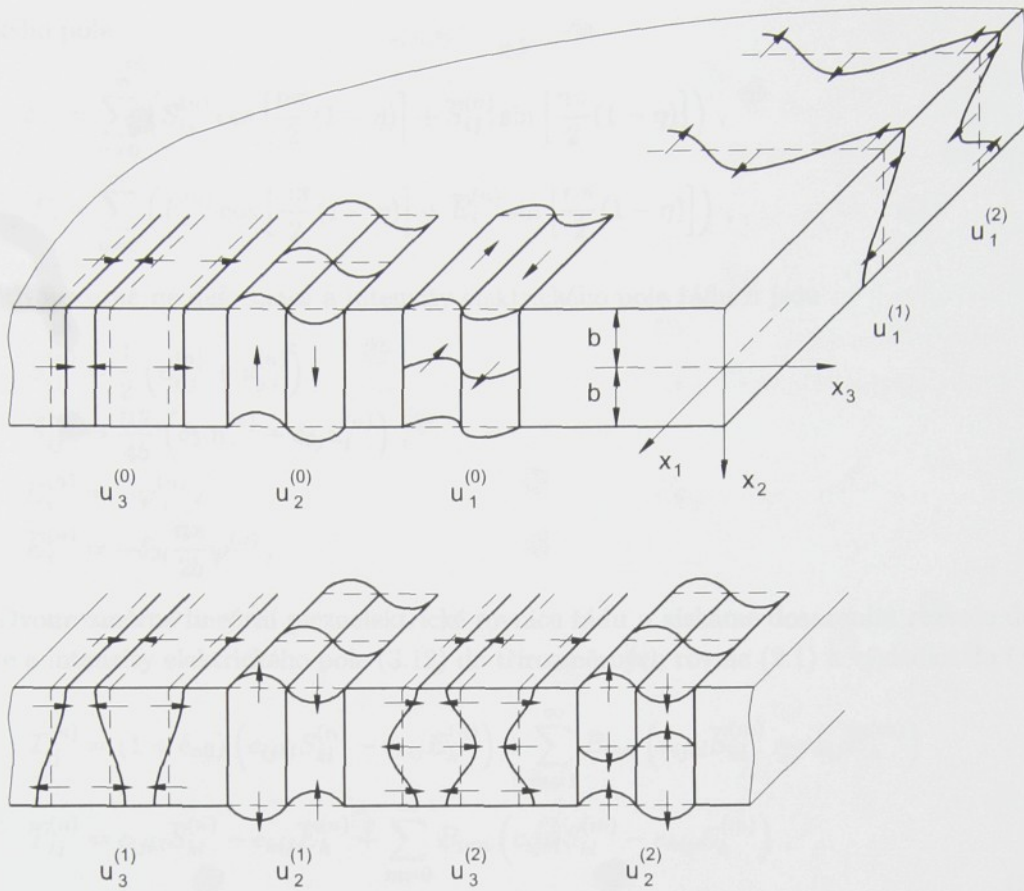
Při výpočtu bylo použito následujících identit:

$$\int_{-1}^1 \sin \left[\frac{m\pi}{2} (1 - \eta) \right] \sin \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right] d\eta = \delta_{mn} - \delta_{m0} \delta_{n0}, \quad (3.7)$$

$$\int_{-1}^1 \cos \left[\frac{m\pi}{2} (1 - \eta) \right] \cos \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right] d\eta = \delta_{mn} + \delta_{m0} \delta_{n0}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sin \left[\frac{m\pi}{2} (1 - \eta) \right] \cos \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right] d\eta = \\ = B_{mn} = \begin{cases} \frac{4m}{(m^2 - n^2)\pi} & \text{pro } m + n \text{ liché,} \\ 0 & \text{pro } m + n \text{ sudé.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Složky n -tého řádu elastického napětí $T_{ij}^{(n)}$, $\bar{T}_{ij}^{(n)}$, elektrického posunutí $D_i^{(n)}$, $\bar{D}_i^{(n)}$, elastického napětí působícího na plochy desky $F_j^{(n)}$ a povrchové hustoty náboje $D^{(n)}$ ve vari-



Obr. 3.2: Složky posunutí vln šířících se ve směru x_3

ančním vztahu (3.6) jsou definovány

$$\begin{aligned}
 T_{ij}^{(n)} &= \int_{-1}^1 T_{ij} \cos \left[\frac{n\pi}{2}(1-\eta) \right] d\eta, \\
 \bar{T}_{ij}^{(n)} &= \int_{-1}^1 T_{ij} \sin \left[\frac{n\pi}{2}(1-\eta) \right] d\eta, \\
 D_i^{(n)} &= \int_{-1}^1 D_i \cos \left[\frac{n\pi}{2}(1-\eta) \right] d\eta, \\
 \bar{D}_i^{(n)} &= \int_{-1}^1 D_i \sin \left[\frac{n\pi}{2}(1-\eta) \right] d\eta, \\
 F_j^{(n)} &= T_{2j}(b) - (-1)^n T_{2j}(-b), \\
 D^{(n)} &= D_2(b) - (-1)^n D_2(-b).
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pro libovolné variace $\delta u_j^{(n)}$ a $\delta \varphi^{(n)}$ vede (3.6) na dvourozměrné divergenční rovnice řádu n

$$\begin{aligned}
 T_{ij,i}^{(n)} - \frac{n\pi}{2b} \bar{T}_{2j}^{(n)} + \frac{1}{b} F_j^{(n)} &= (1 + \delta_{n0}) \rho \ddot{u}_j^{(n)}, \\
 D_{i,i}^{(n)} - \frac{n\pi}{2b} \bar{D}_2^{(n)} + \frac{1}{b} D^{(n)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dosazením (3.5) do gradientních vztahů (2.3) získáme rozvoj deformace a intenzity elek-

trického pole

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(S_{ij}^{(n)} \cos \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right] + \bar{S}_{ij}^{(n)} \sin \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right] \right), \\ E_i &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(E_i^{(n)} \cos \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right] + \bar{E}_i^{(n)} \sin \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right] \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

kde dvourozměrné deformace a intenzity elektrického pole řádu n jsou

$$\begin{aligned} S_{ij}^{(n)} &= \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^{(n)} + u_{j,i}^{(n)} \right), \\ \bar{S}_{ij}^{(n)} &= \frac{n\pi}{4b} \left(\delta_{2i} u_j^{(n)} + \delta_{2j} u_i^{(n)} \right), \\ E_i^{(n)} &= -\varphi_{,i}^{(n)}, \\ \bar{E}_i^{(n)} &= -\delta_{2i} \frac{n\pi}{2b} \varphi^{(n)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dvourozměrné lineární piezoelektrické rovnice řádu n získáme dosazením rozvoje deformace a intenzity elektrického pole (3.12) do třírozměrných rovnic (2.1) a výsledku do (3.10)

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(n)} &= (1 + \delta_{n0}) \left(c_{ijkl} S_{kl}^{(n)} - e_{kij} E_k^{(n)} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \left(c_{ijkl} \bar{S}_{kl}^{(m)} - e_{kij} \bar{E}_k^{(m)} \right), \\ \bar{T}_{ij}^{(n)} &= c_{ijkl} \bar{S}_{kl}^{(n)} - e_{kij} \bar{E}_k^{(n)} + \sum_{m=0}^{\infty} B_{nm} \left(c_{ijkl} S_{kl}^{(m)} - e_{kij} E_k^{(m)} \right), \\ D_i^{(n)} &= (1 + \delta_{n0}) \left(e_{ijk} S_{jk}^{(n)} + \varepsilon_{ij} E_j^{(n)} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \left(e_{ijk} \bar{S}_{jk}^{(m)} + \varepsilon_{ij} \bar{E}_j^{(m)} \right), \\ \bar{D}_i^{(n)} &= e_{ijk} \bar{S}_{jk}^{(n)} + \varepsilon_{ij} \bar{E}_j^{(n)} + \sum_{m=0}^{\infty} B_{nm} \left(e_{ijk} S_{jk}^{(m)} + \varepsilon_{ij} E_j^{(m)} \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Postupným dosazením vztahů (3.11), (3.13) a (3.14) získáme nekonečný počet dvourozměrných vlnových rovnic, které tvoří aproximaci přesných trojrozměrných vlnových rovnic (2.4).

Protože členy $T_{ij}^{(n)}$, $\bar{T}_{ij}^{(n)}$, $D_i^{(n)}$, $\bar{D}_i^{(n)}$, $S_{ij}^{(n)}$, $\bar{S}_{ij}^{(n)}$, $E_i^{(n)}$ a $\bar{E}_i^{(n)}$ tvoří pouze výslednice jednotlivých veličin, nelze vyjádřit hodnotu elastického napětí, elektrického potenciálu, deformace a intenzity elektrického pole v libovolném místě desky. To je možné pouze pro složky posunutí $u_i^{(n)}$ a potenciálu $\varphi^{(n)}$.

3.3 Modifikace dvourozměrné teorie využívající rozvoje do řady trigonometrických funkcí

V práci [16] uvedl Lee et al. zpřesnění předchozí dvourozměrné teorie, kterou dále upravil pro případ piezoelektrických desek bez elektrod v [25]. Do rozvoje posunutí zahrnul člen $u_{2,j}^{(0)} x_2$, který představuje antisymetrické posunutí odpovídající ohybové deformaci desky, které je lineární funkcí tloušťkové souřadnice x_2 . Výhodou této aproximace je skutečnost, že i po omezení členů řady velmi přesně aproximuje třírozměrné rovnice a není tedy nutné uvažovat korekční členy.

Rozvoj (3.5) je nyní nahrazen vztahy

$$\begin{aligned} u_j(x_1, x_2, x_3, t) &= -u_{2,j}^{(0)}x_2 + \sum_{n=0}^{\infty} u_j^{(n)} \cos \left[\frac{n\pi}{2}(1-\eta) \right], \\ \varphi(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)} \cos \left[\frac{n\pi}{2}(1-\eta) \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Stejným postupem jako v předchozím odstavci můžeme odvodit složky n -tého řádu elastického napětí $T_{ij}^{(n)}$, $\bar{T}_{ij}^{(n)}$, elektrického posunutí $D_i^{(n)}$, $\bar{D}_i^{(n)}$, elastického napětí působícího na plochy desky $F_j^{(n)}$ a povrchové hustoty náboje $D^{(n)}$, které jsou shodně popsány rovnicemi (3.10), dále dvourozměrné divergenční rovnice řádu n

$$\begin{aligned} T_{ij,i}^{(0)} + \frac{1}{b}F_j^{(0)} &= 2\rho\ddot{u}_j^{(0)}, \\ T_{ij,i}^{(n)} - \frac{n\pi}{2b}\bar{T}_{2j}^{(n)} + \frac{1}{b}F_j^{(n)} &= \rho\ddot{u}_j^{(n)} - \rho b c_n \ddot{u}_{2,j}^{(0)} \quad \text{pro } n \geq 1, \\ D_{i,i}^{(n)} - \frac{n\pi}{2b}\bar{D}_2^{(n)} + \frac{1}{b}D^{(n)} &= 0 \quad \text{pro } n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

a rozvoj deformace a intezity elektrického pole

$$\begin{aligned} S_{ij} &= S_{ij}^d \eta + \sum_{n=0}^{\infty} \left(S_{ij}^{(n)} \cos \left[\frac{n\pi}{2}(1-\eta) \right] + \bar{S}_{ij}^{(n)} \sin \left[\frac{n\pi}{2}(1-\eta) \right] \right), \\ E_i &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(E_i^{(n)} \cos \left[\frac{n\pi}{2}(1-\eta) \right] + \bar{E}_i^{(n)} \sin \left[\frac{n\pi}{2}(1-\eta) \right] \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

kde dvourozměrné deformace a intenzity elektrického pole řádu n jsou nyní definovány vztahy

$$\begin{aligned} S_{ij}^d &= -bu_{2,ij}^{(0)}, \\ S_{ij}^{(n)} &= \frac{1}{2} \left[u_{i,j}^{(n)} + u_{j,i}^{(n)} - \delta_{n0} \left(\delta_{2i}u_{2,j}^{(0)} + \delta_{2j}u_{2,i}^{(0)} \right) \right], \\ \bar{S}_{ij}^{(n)} &= \frac{n\pi}{4b} \left(\delta_{2i}u_j^{(n)} + \delta_{2j}u_i^{(n)} \right), \\ E_i^{(n)} &= -\varphi_{,i}^{(n)}, \\ \bar{E}_i^{(n)} &= -\delta_{2i} \frac{n\pi}{2b} \varphi^{(n)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dvourozměrné lineární piezoelektrické rovnice řádu n mají tvar

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(n)} &= c_n c_{ijkl} S_{kl}^d + (1 + \delta_{n0})(c_{ijkl} S_{kl}^{(n)} - e_{kij} E_k^{(n)}) + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} B_{mn} (c_{ijkl} \bar{S}_{kl}^{(m)} - e_{kij} \bar{E}_k^{(m)}), \end{aligned} \quad (3.19a)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij}^{(n)} &= s_n c_{ijkl} S_{kl}^d + (1 - \delta_{n0})(c_{ijkl} \bar{S}_{kl}^{(n)} - e_{kij} \bar{E}_k^{(n)}) + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} B_{nm} (c_{ijkl} S_{kl}^{(m)} - e_{kij} E_k^{(m)}), \end{aligned} \quad (3.19b)$$

$$\begin{aligned} D_i^{(n)} &= c_n e_{ikl} S_{kl}^d + (1 + \delta_{n0})(e_{ikl} S_{kl}^{(n)} + \varepsilon_{ik} E_k^{(n)}) + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} B_{mn} (e_{ikl} \bar{S}_{kl}^{(m)} + \varepsilon_{ik} \bar{E}_k^{(m)}), \end{aligned} \quad (3.19c)$$

$$\begin{aligned}\overline{D}_i^{(n)} &= s_n e_{ikl} S_{kl}^d + (1 - \delta_{n0})(e_{ikl} \overline{S}_{kl}^{(n)} + \varepsilon_{ik} \overline{E}_k^{(n)}) + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} B_{nm} (e_{ikl} S_{kl}^{(m)} + \varepsilon_{ik} E_k^{(m)}),\end{aligned}\quad (3.19d)$$

kde použité integrační konstanty jsou

$$\begin{aligned}B_{mn} &= \int_{-1}^1 \sin \left[\frac{m\pi}{2} (1 - \eta) \right] \cos \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right] d\eta = \\ &= \begin{cases} \frac{4m}{(m^2 - n^2)\pi} & \text{pro } m + n \text{ liché,} \\ 0 & \text{pro } m + n \text{ sudé,} \end{cases} \\ c_n &= \int_{-1}^1 \eta \cos \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right] d\eta = \\ &= \begin{cases} \frac{8}{n^2 \pi^2} & \text{pro } n \text{ liché,} \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé,} \end{cases} \\ s_n &= \int_{-1}^1 \eta \sin \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right] d\eta = \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{pro } n = 2, 4, 6, \dots \\ 0 & \text{pro } n = 0, 1, 3, \dots \end{cases}\end{aligned}\quad (3.20)$$

Postupným dosazením vztahů (3.16), (3.18) a (3.19) získáme opět nekonečný počet dvou-rozměrných vlnových rovnic, které tvoří aproximaci přesných trojrozměrných vlnových rovnic (2.4).

3.4 Okrajové podmínky řešení

Jednoznačnost řešení aproximačního systému s konečným počtem prvků je při uvažování pouze ustáleného stavu dána okrajovými podmínkami [14]. Tyto okrajové podmínky můžeme získat dosazením (3.5) do povrchové části variační rovnice (3.1). Plochu S definujeme jako celý povrch desky $S = A + A'$, $dA' = b d\eta ds$, kde s je souřadnice měřená podél křivky C obepínající obvod desky.

Definujeme-li elastická napětí a povrchové hustoty náboje n -tého řádu na hranách desky jako

$$t_i^{(n)} = \int_{-1}^1 t_i \cos \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right] d\eta, \quad (3.21a)$$

$$\sigma^{(n)} = \int_{-1}^1 \sigma \cos \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right] d\eta, \quad (3.21b)$$

získáme po dosazení

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_A \left[(t_j - n_i T_{ij}) \cos \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right] \delta u_j^{(n)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\sigma - n_i D_i) \cos \left[\frac{n\pi}{2} (1 - \eta) \right] \delta \varphi^{(n)} \right]_{-b}^b dA + \right. \\ &\quad \left. + b \oint_C \left[(t_j^{(n)} - n_i T_{ij}^{(n)}) \delta u_j^{(n)} + (\sigma^{(n)} - n_i D_i^{(n)}) \delta \varphi^{(n)} \right] ds \right\} = 0, \quad (3.22)\end{aligned}$$

kde n_i jsou normálové vektory ve směrech x_1, x_3 .

Z této rovnosti získáme okrajové podmínky na plochách desky ($x_2 = \pm b$)

$$t_j = T_{2j} \quad \text{nebo} \quad u_j = u_{j0}, \quad (3.23a)$$

$$\sigma = D_2 \quad \text{nebo} \quad \varphi = \varphi_0 \quad (3.23b)$$

a okrajové podmínky pro křivku C na hranách desky

$$t_j^{(n)} = n_a T_{aj}^{(n)} \quad \text{nebo} \quad u_j^{(n)} = u_{j0}^{(n)}, \quad a = 1, 3, \quad (3.24a)$$

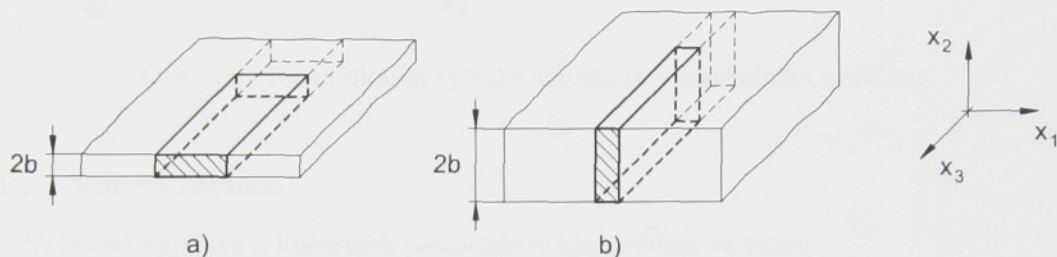
$$\sigma^{(n)} = n_a D_a^{(n)} \quad \text{nebo} \quad \varphi^{(n)} = \varphi_0^{(n)}, \quad (3.24b)$$

kde $u_{j0}, u_{j0}^{(n)}, \varphi_0$ a $\varphi_0^{(n)}$ jsou hodnoty okrajových podmínek.

Okrajové podmínky pro aproximační rovnice odvozené v kapitole 3.3 získáme dosazením (3.15) do povrchové části rovnice (3.1). Vedle výše uvedených podmínek získáme také okrajové podmínky pro posunutí $u_2^{(0)}$ a jemu odpovídající elastické napětí t_n^d , které však v další části textu nebude nutné uvažovat.

4 Aproximační řešení kmitů piezoelektrických pásků

Z dvourozměrných aproximačních rovnic pro piezoelektrickou desku můžeme odvodit jednorozměrné aproximační rovnice, popisující kmitý rezonátoru ve tvaru pásku, dvěma odlišnými způsoby. Způsob odvození souvisí s orientací pásku vzhledem k nekonečně rozlehlé piezoelektrické desce. V prvním případě je tloušťka pásku shodná s tloušťkou desky (obr. 4.1a) a rovnice získáme rozvinutím veličin ve směru šířky do řady trigonometrických funkcí. V druhém případě je šířka pásku shodná s tloušťkou desky (obr. 4.1b) a rovnice odvodíme integrací veličin přes tloušťkovou souřadnici pásku. Plochy desky uvažujeme v obou aproximacích mechanicky volné a bez náboje.



Obr. 4.1: Orientace pásku vzhledem k nekonečně rozlehlé desce

Při sestavování rovnic předpokládáme, že polarizovaný element z piezoelektrické keramiky má symetrii ∞mm a jeho polární osa je shodná s osou x_3 . Vlastnosti piezoelektrické keramiky lze popsat elasto-piezo-dielektrickou maticí odpovídající třídě $6mm$ [28], viz obr. 4.2.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

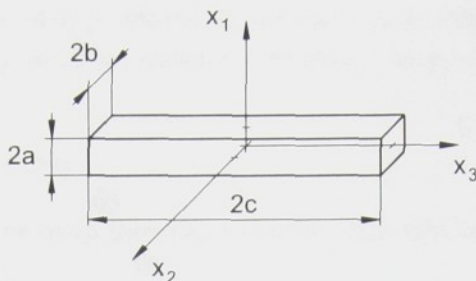
Obr. 4.2: Elasto-piezo-dielektrická matice krystalů třídy $6mm$

Piezoelektrická keramika je ve směru kolmém na směr polarizace izotropní a roztažné a ohybové kmitý rezonátoru tak nejsou vázány s torzní deformací [26]. Než se budeme věnovat popisu vázaných kmitů, zaměříme se na nejjednodušší jednorozměrnou aproximaci a páskový rezonátor nahradíme podélně kmitající tenkou dlouhou tyčinkou.

4.1 Podélné kmitý podélně polarizované tyčinky

Jako mezní případ rezonátoru ve tvaru pásku můžeme uvažovat tenkou dlouhou tyčinku polarizovanou ve směru její délky (obr. 4.3), jejíž příčné rozměry jsou velmi malé v porovnání s délkou ($a, b \ll c$). Příčné deformace lze proto zanedbat a kmitý předpokládejme za čistě

podélné, závisující pouze na souřadnici x_3 [40]. Uvažujeme tedy jediný stupeň volnosti. Vztahy pro rezonanční frekvence lze odvodit stejným způsobem jako v případě prostých tloušťkových módů nekonečně rozlehlých piezoelektrických desek [20].



Obr. 4.3: Tenká dlouhá tyčinka umístěná v souřadném systému

4.1.1 Vlnové rovnice

Při řešení vyjdeme z lineárních piezoelektrických rovnic ve tvaru

$$S_{ij} = s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{kij} E_k, \quad (4.1a)$$

$$D_i = d_{ikl} T_{kl} + \varepsilon_{ik}^T E_k, \quad (4.1b)$$

kde s_{ijkl}^E je elastický koeficient při konstantní intenzitě elektrického pole, d_{ikl} piezoelektrický koeficient a ε_{ik}^T permitivita při konstantním elastickém napětí.

Pro kmity závisící pouze na souřadnici x_3 se rovnice zjednoduší na

$$S_3 = s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3, \quad (4.2a)$$

$$D_3 = d_{33} T_3 + \varepsilon_{33}^T E_3. \quad (4.2b)$$

Z první rovnice vyjádříme elastické napětí T_3 , které zároveň dosadíme i do druhé rovnice. Dostaneme lineární piezoelektrické rovnice v upraveném tvaru

$$T_3 = \frac{1}{s_{33}^E} S_3 - \frac{d_{33}}{s_{33}^E} E_3, \quad (4.3a)$$

$$D_3 = \frac{d_{33}}{s_{33}^E} S_3 + \left(\varepsilon_{33}^T - \frac{(d_{33})^2}{s_{33}^E} \right) E_3. \quad (4.3b)$$

Pomocí vztahů (2.2) a (2.3) získáme pohybovou a elektrickou rovnici

$$\frac{1}{s_{33}^E} u_{3,33} + \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \varphi_{,33} = \rho \ddot{u}_3, \quad (4.4a)$$

$$\frac{d_{33}}{s_{33}^E} u_{3,33} - \left(\varepsilon_{33}^T - \frac{(d_{33})^2}{s_{33}^E} \right) \varphi_{,33} = 0, \quad (4.4b)$$

které můžeme dále upravit na tvar

$$\frac{1}{s_{33}^E} u_{3,33} + \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \varphi_{,33} = \rho \ddot{u}_3, \quad (4.5a)$$

$$u_{3,33} - d_{33} \left(\frac{1 - (k_{33})^2}{(k_{33})^2} \right) \varphi_{,33} = 0, \quad (4.5b)$$

kde k_{33} je koeficient elektromechanické vazby

$$(k_{33})^2 = \frac{(d_{33})^2}{s_{33}^E \varepsilon_{33}^T}. \quad (4.6)$$

Z diferenciálních rovnic (4.5) je zřejmé, že posunutí u_3 je vázáno s elektrickým potenciálem φ . Po dosazení (4.5b) do (4.5a) získáme výslednou vlnovou rovnici, popisující podélné kmity rezonátoru

$$\frac{1}{s_{33}^E(1 - (k_{33})^2)} u_{3,33} = \rho \ddot{u}_3. \quad (4.7)$$

Z rovnice (4.5b) můžeme dvojí integrací vyjádřit vztah pro φ

$$\varphi = \frac{1}{d_{33}} \left(\frac{(k_{33})^2}{1 - (k_{33})^2} \right) u_3 + L_1 x_3 + L_2, \quad (4.8)$$

kde L_1 a L_2 jsou integrační konstanty.

Pro případ elektricky buzených kmitů předpokládejme jako řešení vlnové rovnice lineární kombinaci antisymetrických stojatých vln

$$u_3(x_3, t) = \sum_h A_h \sin(\xi_h x_3) e^{j\omega t}, \quad (4.9)$$

kde ξ_h je vlnové číslo pro h -tý řád kmitu. Symetrická řešení ve tvaru $\cos(\xi_h x_3)$ neuvažujeme, protože (jak bychom viděli dále) nevyhovují okrajovým podmínkám a symetrické podélné kmity nelze elektricky vybudit.

Dosadíme-li h -té řešení (4.9) do vlnové rovnice (4.7), získáme po úpravě obecný vztah pro rezonanční frekvenci podélných kmitů tyčinky

$$f_h = \frac{\xi_h}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho s_{33}^E(1 - (k_{33})^2)}}. \quad (4.10)$$

Člen $s_{33}^D = s_{33}^E(1 - (k_{33})^2)$ je elastický koeficient při konstantním elektrickém posunutí. Vlnové číslo ξ_h určíme z okrajových podmínek. Pro mechanicky volné kmity (na koncích tyčinky nepůsobí žádné síly) uvažujeme elastické okrajové podmínky ve tvaru

$$T_3 = \frac{1}{s_{33}^E} u_{3,3} + \frac{d_{33}}{s_{33}^E} \varphi_{,3} = 0 \quad \text{pro } x_3 = \pm c. \quad (4.11)$$

Elektrické okrajové podmínky závisí na uspořádání elektrod a velikosti budicího elektrického pole. Prakticky rozlišujeme následující okrajové podmínky:

a) rezonátor bez elektrod - elektrické posunutí D_3 na koncích tyčinky je nulové, úpravou (4.3b) získáme

$$D_3 = \frac{d_{33}}{s_{33}^E} u_{3,3} - \left(\varepsilon_{33}^T - \frac{(d_{33})^2}{s_{33}^E} \right) \varphi_{,3} = 0 \quad \text{pro } x_3 = \pm c, \quad (4.12a)$$

b) rezonátor opatřený elektrodami a buzený harmonickým napětím - na elektrody je přiložen potenciál

$$\varphi = \varphi_0 e^{j\omega t} \quad \text{pro } x_3 = \pm c, \quad (4.12b)$$

c) rezonátor se zkratovanými elektrodami - elektrický potenciál mezi elektrodami je nulový,

$$\varphi = 0 \quad \text{pro } x_3 = \pm c. \quad (4.12c)$$

Věnujme se nyní řešení jednotlivých případů.

4.1.2 Tyčinka bez elektrod

Z elektrické okrajové podmínky (4.12a) vyjádříme $\varphi_{,3}$ a dosadíme do elastické okrajové podmínky (4.11), po úpravě získáme vztah

$$\frac{1}{s_{33}^E} \left(\frac{1}{1 - (k_{33})^2} \right) u_{3,3} = 0 \quad \text{pro } x_3 = \pm c. \quad (4.13)$$

Do této rovnice dosadíme uvažované h -té řešení (4.9) a obdržíme výraz

$$\frac{1}{s_{33}^E} \left(\frac{1}{1 - (k_{33})^2} \right) A_h \xi_h \cos(\xi_h c) = 0. \quad (4.14)$$

Pro nenulová ξ_h je řešením (4.14)

$$\xi_h c = \frac{h\pi}{2}, \quad h = 1, 3, 5, \dots \quad (4.15)$$

Dosazením do (4.10) získáme vztah pro rezonanční frekvenci tyčinky bez elektrod

$$f_h = \frac{h}{4c} \sqrt{\frac{1}{\rho s_{33}^E (1 - (k_{33})^2)}}, \quad h = 1, 3, 5, \dots \quad (4.16)$$

4.1.3 Tyčinka s elektrodami buzená harmonickým napětím

Dosazením za φ ze vztahu (4.8) do rovnic (4.11) a (4.12b) obdržíme upravené okrajové podmínky

$$\frac{1}{s_{33}^E} \left(\frac{1}{1 - (k_{33})^2} \right) u_{3,3} + \frac{d_{33}}{s_{33}^E} L_1 = 0 \quad \text{pro } x_3 = \pm c, \quad (4.17a)$$

$$\frac{1}{d_{33}} \left(\frac{(k_{33})^2}{1 - (k_{33})^2} \right) u_3 \pm L_1 c + L_2 = \pm \varphi_0 e^{j\omega t} \quad \text{pro } x_3 = \pm c, \quad (4.17b)$$

pro h -té řešení (4.9) mají tyto rovnice tvar

$$\frac{1}{s_{33}^E} \left(\frac{1}{1 - (k_{33})^2} \right) \xi_h A_h \cos(\xi_h c) e^{j\omega t} + \frac{d_{33}}{s_{33}^E} L_1 = 0 \quad \text{pro } x_3 = \pm c, \quad (4.18a)$$

$$\pm \frac{1}{d_{33}} \left(\frac{(k_{33})^2}{1 - (k_{33})^2} \right) A_h \sin(\xi_h c) e^{j\omega t} \pm L_1 c + L_2 = \pm \varphi_0 e^{j\omega t} \quad \text{pro } x_3 = \pm c. \quad (4.18b)$$

Řešením rovnice (4.18b) pro $x_3 = \pm c$ získáme integrační konstanty

$$L_2 = 0, \quad L_1 = \left[\frac{\varphi_0}{c} - \frac{A_h}{d_{33} c} \left(\frac{(k_{33})^2}{1 - (k_{33})^2} \right) \sin(\xi_h c) \right] e^{j\omega t}, \quad (4.19)$$

které dále dosadíme do rovnice (4.18a) a získáme vztah

$$A_h \left[\frac{1}{(1 - (k_{33})^2)} \xi_h \cos(\xi_h c) - \frac{1}{c} \left(\frac{(k_{33})^2}{1 - (k_{33})^2} \right) \sin(\xi_h c) \right] = -d_{33} \frac{\varphi_0}{c}. \quad (4.20)$$

Nehomogenní rovnice (4.20) popisuje závislost amplitudy h -tého antisymetrického módu na budícím napětí. Antisymetrické módy jsou vybudeny přiložením střídavého elektrického pole φ_0/c na elektrody. Při rezonanci bezeztrátového rezonátoru je amplituda oscilací nekonečná ($A_h \rightarrow \infty$) [41] a člen v hranaté závorce musí být roven nule. Po úpravě získáme vztah [20]

$$\operatorname{tg}(\xi_h c) = \frac{\xi_h c}{(k_{33})^2}. \quad (4.21)$$

Z transcendentní rovnice (4.21) můžeme vypočítat odpovídající vlnové číslo ξ_h , které dosadíme do vztahu (4.10) pro rezonanční frekvenci. V případě buzení elektrickým polem ve směru polarizace tyčinky nejsou vyšší harmonické frekvence celočíselnými násobky základní frekvence, ale jejich poměr závisí na velikosti koeficientu elektromechanické vazby k_{33} .

4.1.4 Tyčinka se zkratovanými elektrodami

Při zkratovaných elektrodách je elektrické pole E_3 v rezonátoru nulové. Můžeme proto uvažovat $k_{33} = 0$ a řešení převést na problém čistě elastických kmitů.

Po dosazení (4.12c) za φ_0 do (4.18b) dostaneme pro $k_{33} = 0$ integrační konstanty

$$L_1, L_2 = 0, \quad (4.22)$$

které dále dosadíme do (4.18a) a obdržíme rovnici

$$\frac{1}{s_{33}^E} A_h \xi_h \cos(\xi_h c) = 0, \quad (4.23)$$

která má pro nenulová ξ_h řešení

$$\xi_h c = \frac{h\pi}{2}, \quad h = 1, 3, 5, \dots \quad (4.24)$$

Dosazením za ξ_h do (4.10) získáme výraz pro rezonanční frekvenci tyčinky se zkratovanými elektrodami

$$f_h = \frac{h}{4c} \sqrt{\frac{1}{\rho s_{33}^E}}, \quad h = 1, 3, 5, \dots \quad (4.25)$$

Tento vztah odpovídá rezonanční frekvenci čistě elastických kmitů tyčinky.

4.1.5 Vliv okrajových podmínek na hodnotu rezonanční frekvence

Abychom zjistili vliv okrajových podmínek na velikost rezonanční frekvence podélně kmitající tyčinky, provedeme pro jednotlivé případy výpočet pomocí vztahu (4.10). Uvažujme tyčinku o délce $2c = 0,014$ m z piezoelektrické keramiky APC 841, jejíž materiálové konstanty jsou uvedeny v příloze A.

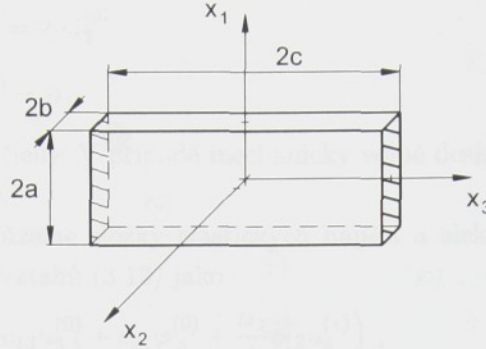
Výpočtem získáme následující hodnoty

- a) rezonátor bez elektrod: $f_1 = 140\,122$ Hz,
- b) rezonátor opatřený elektrodami a buzený harmonickým napětím: $f_1 = 107\,785$ Hz,
- c) rezonátor se zkratovanými elektrodami: $f_1 = 102\,739$ Hz.

Jak je patrné z tohoto srovnání, je v případě rezonátoru kmitajícího ve směru působícího elektrického pole vypočtená hodnota rezonanční frekvence silně závislá na uvažovaných elektrických okrajových podmínkách.

4.2 Jednorozměrný popis kmitů odvozený rozvojem do řady šířkové souřadnice

Uvažujme páskový rezonátor o šířce $2a$, tloušťce $2b$ a délce $2c$ (obr. 4.4), který je vůči nekonečně rozlehlé desce orientován podle obr. 4.1a.



Obr. 4.4: Páskový rezonátor umístěný v souřadném systému

Protože je šířka rezonátoru obvykle podstatně menší než délka, můžeme nahradit skutečné rozložení posunutí a elektrického potenciálu nekonečnou řadou funkcí také ve směru šířkové souřadnice. Vyjdeme tedy z tohoto předpokladu a provedeme nejprve rozvoj veličin ve směru tloušťky a posléze ve směru šířky do řady trigonometrických funkcí. Použijeme přitom Leeho nekonečné řady dvourozměrných aproximačních rovnic [15] popsané v kapitole 3.2, kterou pro naše účely nejprve vhodně omezíme.

4.2.1 Omezení nekonečného rozvoje dvourozměrných rovnic

Při omezení nekonečné řady předpokládejme, že námi odvozená aproximace bude popisovat kmity o frekvenci nižší než je mezní frekvence nejnižšího prostého tloušťkového kmity ve směru tloušťky pásku. Protože je tloušťka pásku malá ve srovnání s ostatními rozměry, bude tato nejnižší frekvence zřejmě dostatečně vysoká. Za tohoto předpokladu provedeme aproximaci 0. řádu a nahradíme posunutí a potenciál ve směru tloušťky rovnoměrným rozložením [23], [24]. Tato aproximace je platná pro nízkofrekvenční roztažné kmity desky s velkou vlnovou délkou vzhledem k tloušťce desky [12]. Uvažujeme

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} &= u_3^{(n)} = 0, \quad \varphi^{(n)} = 0 \quad \text{pro } n > 0, \\ u_2^{(n)} &= 0 \quad \text{pro } n > 1, \\ T_2^{(0)} &= 0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

a zanedbáme $T_{ij}^{(n)}$, $\bar{T}_{ij}^{(n)}$, $D_i^{(n)}$, $\bar{D}_i^{(n)}$ pro $n > 0$. Ostatní členy předpokládejme nenulové. Prosté prodloužení desky ve směrech x_1 a x_3 (definované posunutími $u_1^{(0)}$ a $u_3^{(0)}$) je svázáno s příčným zkrácením ve směru x_2 , jak je patrné ze vztahů (4.29). Nenulovou tloušťkovou deformaci desky umožníme za předpokladu nulového elastického napětí $T_2^{(0)}$ a nenulové deformace $u_2^{(1)}$. Rovnice (3.14) mají po omezení tvar

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(0)} &= 2 \left(c_{ijkl} S_{kl}^{(0)} - e_{kij} E_k^{(0)} \right) + \alpha_1 B_{10} \left(c_{ijkl} \bar{S}_{kl}^{(1)} - e_{kij} \bar{E}_k^{(1)} \right), \\ D_k^{(0)} &= 2 \left(e_{kij} S_{ij}^{(0)} + \varepsilon_{kl} E_l^{(0)} \right) + \alpha_1 B_{10} \left(e_{kij} \bar{S}_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{kl} \bar{E}_l^{(1)} \right), \end{aligned} \tag{4.27}$$

a divergenční rovnice (3.11) se zjednoduší na

$$T_{1,1}^{(0)} + T_{5,3}^{(0)} + \frac{1}{b} F_1^{(0)} = 2\rho \ddot{u}_1^{(0)}, \quad (4.28a)$$

$$T_{6,1}^{(0)} + T_{4,3}^{(0)} + \frac{1}{b} F_2^{(0)} = \frac{2\rho}{(\alpha_2)^2} \ddot{u}_2^{(0)}, \quad (4.28b)$$

$$T_{5,1}^{(0)} + T_{3,3}^{(0)} + \frac{1}{b} F_3^{(0)} = 2\rho \ddot{u}_3^{(0)}, \quad (4.28c)$$

$$D_{1,1}^{(0)} + D_{3,3}^{(0)} + \frac{1}{b} D^{(0)} = 0, \quad (4.28d)$$

kde α_1, α_2 jsou korekční členy. V případě mechanicky volné desky bez povrchového náboje položíme $F_i^{(0)} = D^{(0)} = 0$.

Pro symetrii $6mm$ můžeme složky elastických napětí a elektrického posunutí 0. řádu vyjádřit z (4.27) pomocí vztahů (3.13) jako

$$T_1^{(0)} = 2 \left(c_{11} u_{1,1}^{(0)} + c_{13} u_{3,3}^{(0)} + e_{31} \varphi_{,3}^{(0)} + \frac{\alpha_1}{b} c_{12} u_2^{(1)} \right), \quad (4.29a)$$

$$T_2^{(0)} = 2 \left(c_{12} u_{1,1}^{(0)} + c_{23} u_{3,3}^{(0)} + e_{32} \varphi_{,3}^{(0)} + \frac{\alpha_1}{b} c_{22} u_2^{(1)} \right) = 0, \quad (4.29b)$$

$$T_3^{(0)} = 2 \left(c_{13} u_{1,1}^{(0)} + c_{33} u_{3,3}^{(0)} + e_{33} \varphi_{,3}^{(0)} + \frac{\alpha_1}{b} c_{23} u_2^{(1)} \right), \quad (4.29c)$$

$$T_4^{(0)} = 2 c_{44} u_{2,3}^{(0)}, \quad (4.29d)$$

$$T_5^{(0)} = 2 \left(c_{55} u_{3,1}^{(0)} + c_{55} u_{1,3}^{(0)} + e_{15} \varphi_{,1}^{(0)} \right), \quad (4.29e)$$

$$T_6^{(0)} = 2 c_{66} u_{2,1}^{(0)}, \quad (4.29f)$$

$$D_1^{(0)} = 2 \left(e_{15} u_{3,1}^{(0)} + e_{15} u_{1,3}^{(0)} - \varepsilon_{11} \varphi_{,1}^{(0)} \right), \quad (4.29g)$$

$$D_2^{(0)} = 2 e_{24} u_{2,3}^{(0)}, \quad (4.29h)$$

$$D_3^{(0)} = 2 \left(e_{31} u_{1,1}^{(0)} + e_{33} u_{3,3}^{(0)} + \frac{\alpha_1}{b} e_{32} u_2^{(1)} - \varepsilon_{33} \varphi_{,3}^{(0)} \right). \quad (4.29i)$$

Z rovnice (4.29b) vyjádříme člen

$$\frac{\alpha_1}{b} u_2^{(1)} = -\frac{1}{c_{22}} \left(c_{12} u_{1,1}^{(0)} + c_{23} u_{3,3}^{(0)} + e_{32} \varphi_{,3}^{(0)} \right) \quad (4.30)$$

a dosadíme jej do (4.29a,c,i). Získáme tak upravené rovnice

$$T_1^{(0)} = 2 \left(\bar{c}_{11} u_{1,1}^{(0)} + \bar{c}_{13} u_{3,3}^{(0)} + \bar{e}_{31} \varphi_{,3}^{(0)} \right), \quad (4.31a)$$

$$T_3^{(0)} = 2 \left(\bar{c}_{13} u_{1,1}^{(0)} + \bar{c}_{33} u_{3,3}^{(0)} + \bar{e}_{33} \varphi_{,3}^{(0)} \right), \quad (4.31b)$$

$$T_4^{(0)} = 2 c_{44} u_{2,3}^{(0)}, \quad (4.31c)$$

$$T_5^{(0)} = 2 \left(c_{55} u_{3,1}^{(0)} + c_{55} u_{1,3}^{(0)} + e_{15} \varphi_{,1}^{(0)} \right), \quad (4.31d)$$

$$T_6^{(0)} = 2 c_{66} u_{2,1}^{(0)}, \quad (4.31e)$$

$$D_1^{(0)} = 2 \left(e_{15} u_{3,1}^{(0)} + e_{15} u_{1,3}^{(0)} - \varepsilon_{11} \varphi_{,1}^{(0)} \right), \quad (4.31f)$$

$$D_2^{(0)} = 2 e_{24} u_{2,3}^{(0)}, \quad (4.31g)$$

$$D_3^{(0)} = 2 \left(\bar{e}_{31} u_{1,1}^{(0)} + \bar{e}_{33} u_{3,3}^{(0)} - \bar{\varepsilon}_{33} \varphi_{,3}^{(0)} \right), \quad (4.31h)$$

kde

$$\bar{c}_{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu} - \frac{c_{2\mu} c_{\lambda 2}}{c_{22}}, \quad \bar{e}_{3\lambda} = e_{3\lambda} - \frac{e_{32} c_{\lambda 2}}{c_{22}}, \quad \bar{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33} + \frac{e_{32} e_{32}}{c_{22}}. \quad (4.32)$$

4.2.2 Jednorozměrné vlnové rovnice

Stejným způsobem jako v kapitole 3.2 nyní provedeme rozvoj mechanického posunutí a potenciálu ve směru šířky. Dvourozměrné veličiny $u_i^{(0)}$ a $\varphi^{(0)}$ rozvineme do řady trigonometrických funkcí

$$\begin{aligned} u_i^{(0)}(x_1, x_3, t) &= \sum_{r=0}^{\infty} u_i^{(0r)}(x_3, t) \cos \left[\frac{r\pi}{2}(1 - \eta_1) \right], \quad r = 0, 1, 2, \dots, \\ \varphi^{(0)}(x_1, x_3, t) &= \sum_{r=0}^{\infty} \varphi^{(0r)}(x_3, t) \cos \left[\frac{r\pi}{2}(1 - \eta_1) \right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

kde $\eta_1 = x_1/a$. Veličiny $u_i^{(0r)}$, $\varphi^{(0r)}$ představují jednorozměrnou aproximaci třírozměrných posunutí a potenciálu, které mají své rozložení přes tloušťku aproximováno rovnoměrným módem 0. řádu, ve směru šířky pak trigonometrickou funkcí r -tého řádu a jsou funkcí pouze souřadnice x_3 a času.

Dosazením rozvoje (4.33) do (4.28), vynásobením těchto rovnic členem $\cos \left[\frac{r\pi}{2}(1 - \eta_1) \right]$ a integrací přes η_1 v mezích od -1 do 1 získáme jednorozměrné divergenční rovnice

$$T_{5,3}^{(0s)} - \frac{s\pi}{2a} \bar{T}_1^{(0s)} + \frac{1}{a} \mathcal{F}_1^{(0s)} = \frac{2\rho}{(\alpha_2)^{2\delta_{0s}}} (1 + \delta_{s0}) \ddot{u}_1^{(0s)}, \quad (4.34a)$$

$$T_{4,3}^{(0s)} - \frac{s\pi}{2a} \bar{T}_6^{(0s)} + \frac{1}{a} \mathcal{F}_2^{(0s)} = 2\rho(1 + \delta_{s0}) \ddot{u}_2^{(0s)}, \quad (4.34b)$$

$$T_{3,3}^{(0s)} - \frac{s\pi}{2a} \bar{T}_5^{(0s)} + \frac{1}{a} \mathcal{F}_3^{(0s)} = \frac{2\rho}{(\alpha_2)^{2\delta_{0s}}} (1 + \delta_{s0}) \ddot{u}_3^{(0s)}, \quad (4.34c)$$

$$D_{3,3}^{(0s)} - \frac{s\pi}{2a} \bar{D}_1^{(0s)} + \frac{1}{a} \mathcal{D}^{(0s)} = 0, \quad (4.34d)$$

kde složky jednorozměrného elastického napětí $T_\lambda^{(0s)}$, $\bar{T}_\lambda^{(0s)}$, elektrického posunutí $D_i^{(0s)}$, $\bar{D}_i^{(0s)}$, elastického napětí na povrchu $\mathcal{F}_i^{(0s)}$ a povrchové hustoty náboje $\mathcal{D}^{(0s)}$ jsou

$$T_\lambda^{(0s)} = \int_{-1}^1 T_\lambda^{(0)} \cos \left[\frac{s\pi}{2}(1 - \eta_1) \right] d\eta_1, \quad (4.35a)$$

$$\bar{T}_\lambda^{(0s)} = \int_{-1}^1 T_\lambda^{(0)} \sin \left[\frac{s\pi}{2}(1 - \eta_1) \right] d\eta_1, \quad (4.35b)$$

$$D_i^{(0s)} = \int_{-1}^1 D_i^{(0)} \cos \left[\frac{s\pi}{2}(1 - \eta_1) \right] d\eta_1, \quad (4.35c)$$

$$\bar{D}_i^{(0s)} = \int_{-1}^1 D_i^{(0)} \sin \left[\frac{s\pi}{2}(1 - \eta_1) \right] d\eta_1, \quad (4.35d)$$

$$\mathcal{F}_i^{(0s)} = T_{1i}^{(0)}(a) - (-1)^s T_{1i}^{(0)}(-a), \quad (4.35e)$$

$$\mathcal{D}^{(0s)} = D_1^{(0)}(a) - (-1)^s D_1^{(0)}(-a). \quad (4.35f)$$

Hrany $x_1 = \pm a$ uvažujeme opět mechanicky volné a bez povrchového náboje, v tomto

případě je $\mathcal{F}_i^{(0s)} = \mathcal{D}^{(0s)} = 0$. Při odvození předchozích vztahů bylo použito těchto identit:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \sin \left[\frac{r\pi}{2}(1 - \eta_1) \right] \sin \left[\frac{s\pi}{2}(1 - \eta_1) \right] d\eta_1 &= \delta_{rs} - \delta_{r0}\delta_{s0}, \\
\int_{-1}^1 \cos \left[\frac{r\pi}{2}(1 - \eta_1) \right] \cos \left[\frac{s\pi}{2}(1 - \eta_1) \right] d\eta_1 &= \delta_{rs} + \delta_{r0}\delta_{s0}, \\
\int_{-1}^1 \sin \left[\frac{r\pi}{2}(1 - \eta_1) \right] \cos \left[\frac{s\pi}{2}(1 - \eta_1) \right] d\eta_1 &= \\
&= B_{rs} = \begin{cases} \frac{4r}{(r^2 - s^2)\pi} & \text{pro } r + s \text{ liché,} \\ 0 & \text{pro } r + s \text{ sudé.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Jako postačující pro popis vázaných kmitů předpokládáme aproximaci druhého řádu a uvažujeme prosté omezení [23]

$$u_i^{(0s)} = \varphi^{(0s)} = 0 \quad \text{pro } s > 2 \tag{4.37}$$

a zanedbejme $T_{ij}^{(0s)}$, $\bar{T}_{ij}^{(0s)}$, $D_i^{(0s)}$, $\bar{D}_i^{(0s)}$ pro $s > 2$.

K roztažným deformacím pásku přispívají pouze módy symetrické vůči jeho středním rovinám, tedy k rovinám x_1x_3 a x_2x_3 . Tuto podmínku splňují veličiny

$$u_1^{(01)}, u_2^{(00)}, u_2^{(02)}, u_3^{(00)}, u_3^{(02)}, \varphi^{(00)}, \varphi^{(02)}. \tag{4.38}$$

Dosazením (4.29) do vztahů (4.35) dostaneme s pomocí (4.36) následující jednorozměrné rovnice obsahující členy (4.38)

$$T_3^{(00)} = 4 \left(\bar{c}_{33} u_{3,3}^{(00)} + \frac{\alpha_1}{a} \bar{c}_{13} u_1^{(01)} + \bar{e}_{33} \varphi_{,3}^{(00)} \right), \tag{4.39a}$$

$$T_4^{(00)} = 4 c_{44} u_{2,3}^{(00)}, \tag{4.39b}$$

$$T_5^{(01)} = 2 \left(c_{55} u_{1,3}^{(01)} + \frac{8}{3a} c_{55} u_3^{(02)} + \frac{8}{3a} e_{15} \varphi^{(02)} \right), \tag{4.39c}$$

$$T_3^{(02)} = 2 \left(\bar{c}_{33} u_{3,3}^{(02)} - \frac{2}{3a} \bar{c}_{13} u_1^{(01)} + \bar{e}_{33} \varphi_{,3}^{(02)} \right), \tag{4.39d}$$

$$T_4^{(02)} = 2 c_{44} u_{2,3}^{(02)}, \tag{4.39e}$$

$$\bar{T}_1^{(01)} = \frac{\pi}{a} \bar{c}_{11} u_1^{(01)} + \frac{8\alpha_1}{\pi} \left(\bar{c}_{13} u_{3,3}^{(00)} + \bar{e}_{31} \varphi_{,3}^{(00)} \right) - \frac{8}{3\pi} \left(\bar{c}_{13} u_{3,3}^{(02)} + \bar{e}_{31} \varphi_{,3}^{(02)} \right), \tag{4.39f}$$

$$\bar{T}_5^{(02)} = c_{55} \left(\frac{16}{3\pi} u_{1,3}^{(01)} + \frac{2\pi}{a} u_3^{(02)} \right) + \frac{2\pi}{a} e_{15} \varphi^{(02)}, \tag{4.39g}$$

$$\bar{T}_6^{(02)} = \frac{2\pi}{a} c_{66} u_2^{(02)}, \tag{4.39h}$$

$$D_3^{(00)} = 4 \left(\bar{e}_{33} u_{3,3}^{(00)} + \frac{\alpha_1}{a} \bar{e}_{31} u_1^{(01)} - \bar{\varepsilon}_{33} \varphi_{,3}^{(00)} \right), \tag{4.39i}$$

$$D_3^{(02)} = 2 \left(\bar{e}_{33} u_{3,3}^{(02)} - \frac{2}{3a} \bar{e}_{31} u_1^{(01)} - \bar{\varepsilon}_{33} \varphi_{,3}^{(02)} \right), \tag{4.39j}$$

$$\bar{D}_1^{(02)} = 2 \left(-\frac{4}{3\pi} e_{15} u_{1,3}^{(01)} + \frac{\pi}{a} e_{15} u_3^{(02)} - \frac{\pi}{a} \varepsilon_{11} \varphi^{(02)} \right). \tag{4.39k}$$

Jak je zřejmé, neobsahují rovnice (4.39) jiné členy než (4.38). Roztažné kmitu uvažovaných páskových rezonátorů tedy nejsou vázány s jinými druhy kmitů.

Hodnoty korekčních členů α_1 a α_2 lze určit porovnáním řešení kmitů nekonečně rozlehlé desky, získaného pomocí třírozměrných rovnic (2.4) a touto dvourozměrnou aproximací. Člen α_1 přizpůsobuje aproximované řešení přesnému pro nízké frekvence a malá vlnová čísla ξ a má hodnotu $\alpha_1 = \pi/\sqrt{8}$. Korekční člen α_2 slouží k přizpůsobení řešení pro vysoké frekvence a velká vlnová čísla, kdy se fázová rychlost vlny blíží rychlosti povrchové akustické vlny ve stejném směru. Rychlost povrchové akustické vlny na povrchu piezokeramického tělesa můžeme vypočítat např. postupem uvedeným v [42]. Hodnota α_2 je obvykle blízká jedné, a proto v souladu s [23] člen $(\alpha_2)^2$ v rovnicích (4.34) zanedbáme.

Protože uvažujeme případ buzení kmitů elektrickým polem ve směru x_3 , vyloučíme z rovnic (4.39) členy s koeficientem e_{15} .

Po dosazení (4.39) do jednorozměrných pohybových a elektrických rovnic (4.34) odpovídajících členům (4.38) obdržíme vlnové rovnice, popisující roztažné módy rezonátoru

$$c_{44}u_{2,33}^{(00)} = \rho\ddot{u}_2^{(00)}, \quad (4.40a)$$

$$c_{44}u_{2,33}^{(02)} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 c_{66}u_2^{(02)} = \rho\ddot{u}_2^{(02)}, \quad (4.40b)$$

$$\bar{c}_{33}u_{3,33}^{(00)} + \frac{\pi}{\sqrt{8}a}\bar{c}_{13}u_{1,3}^{(01)} + \bar{e}_{33}\varphi_{,33}^{(00)} = \rho\ddot{u}_3^{(00)}, \quad (4.40c)$$

$$c_{55}u_{1,33}^{(01)} - \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \bar{c}_{11}u_1^{(01)} - \frac{2\pi}{\sqrt{8}a}\bar{c}_{13}u_{3,3}^{(00)} + \frac{2}{3a}(\bar{c}_{13} + 4c_{55})u_{3,3}^{(02)} - \frac{2\pi}{\sqrt{8}a}\bar{e}_{31}\varphi_{,3}^{(00)} + \frac{2}{3a}\bar{e}_{31}\varphi_{,3}^{(02)} = \rho\ddot{u}_1^{(01)}, \quad (4.40d)$$

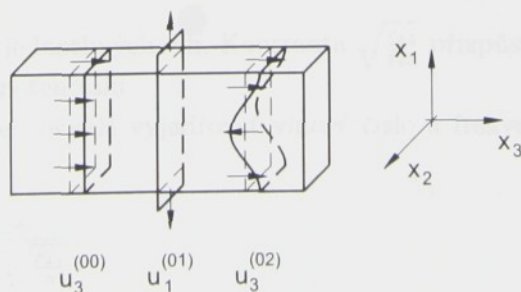
$$\bar{c}_{33}u_{3,33}^{(02)} - \frac{2}{3a}(\bar{c}_{13} + 4c_{55})u_{1,3}^{(01)} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 c_{55}u_3^{(02)} + \bar{e}_{33}\varphi_{,33}^{(02)} = \rho\ddot{u}_3^{(02)}, \quad (4.40e)$$

$$\bar{e}_{33}u_{3,33}^{(00)} + \frac{\pi}{\sqrt{8}a}\bar{e}_{31}u_{1,3}^{(01)} - \bar{\varepsilon}_{33}\varphi_{,33}^{(00)} = 0, \quad (4.40f)$$

$$\bar{e}_{33}u_{3,33}^{(02)} - \frac{2}{3a}\bar{e}_{31}u_{1,3}^{(01)} - \bar{\varepsilon}_{33}\varphi_{,33}^{(02)} + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \varepsilon_{11}\varphi^{(02)} = 0. \quad (4.40g)$$

Rovnice (4.40g) se liší od tvaru uvedeného Zelenkou [24] polovičními číselnými koeficienty u členů $u_{3,33}^{(02)}$ a $\varphi_{,33}^{(02)}$. Odlišnost je způsobena chybným odvozením jednorozměrného elektrického posunutí $D_3^{(02)}$ v [24].

Soustavu rovnic (4.40) lze rozložit na dvě nezávislé části. Rovnice (4.40a,b) popisují příčné módy $u_2^{(00)}$ a $u_2^{(02)}$, které nejsou vázány s elektrickým polem ve směru x_3 . Rovnice (4.40c-g) popisují podélné kmity $u_3^{(00)}$, šířkově rozpínavé kmity $u_1^{(01)}$ a šířkově střížné kmity druhého řádu $u_3^{(02)}$, které mohou být piezoelektricky vybuzeny potenciálem přiloženým na elektrody. Vlastní tvary těchto kmitů jsou znázorněny na obr. 4.5.



Obr. 4.5: Podélné $u_3^{(00)}$, šířkově rozpínavé $u_1^{(01)}$ a symetrické šířkově střížné kmity $u_3^{(02)}$

4.2.3 Vázané podélné, šířkově rozpínavé a symetrické šířkové střižné kmity

Soustavu vázaných rovnic (4.40c-g) můžeme dále upravit. Protože, jak uvidíme dále, není posunutí $u_1^{(01)}$ vázáno okrajovými podmínkami s potenciálem $\varphi^{(00)}$, zanedbáme v (4.40d) člen $\frac{2\pi}{\sqrt{8a}}\bar{e}_{31}\varphi_{,3}^{(00)}$. Z rovnice (4.40f) vyjádříme druhou derivaci potenciálu $\varphi_{,33}^{(00)}$

$$\varphi_{,33}^{(00)} = \frac{\bar{e}_{33}}{\bar{e}_{33}} u_{3,33}^{(00)} + \frac{\pi}{\sqrt{8a}} \frac{\bar{e}_{31}}{\bar{e}_{33}} u_{1,3}^{(01)} \quad (4.41)$$

a dosadíme jej do (4.40c). Získáme upravenou soustavu pohybových rovnic

$$c_{33}^* u_{3,33}^{(00)} + \frac{\pi}{\sqrt{8a}} c_{13}^* u_{1,3}^{(01)} = \rho \ddot{u}_3^{(00)}, \quad (4.42a)$$

$$c_{55} u_{1,33}^{(01)} - \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \bar{c}_{11} u_1^{(01)} - \frac{2\pi}{\sqrt{8a}} \bar{c}_{13} u_{3,3}^{(00)} + \frac{2}{3a} (\bar{c}_{13} + 4c_{55}) u_{3,3}^{(02)} + \frac{2}{3a} \bar{e}_{31} \varphi_{,3}^{(02)} = \rho \ddot{u}_1^{(01)}, \quad (4.42b)$$

$$\bar{c}_{33} u_{3,33}^{(02)} - \frac{2}{3a} (\bar{c}_{13} + 4c_{55}) u_{1,3}^{(01)} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 c_{55} u_3^{(02)} + \bar{e}_{33} \varphi_{,33}^{(02)} = \rho \ddot{u}_3^{(02)}, \quad (4.42c)$$

$$\bar{e}_{33} u_{3,33}^{(02)} - \frac{2}{3a} \bar{e}_{31} u_{1,3}^{(01)} - \bar{e}_{33} \varphi_{,33}^{(02)} + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \varepsilon_{11} \varphi^{(02)} = 0, \quad (4.42d)$$

kde modifikované elastické moduly jsou

$$c_{\lambda 3}^* = \bar{c}_{\lambda 3} + \frac{\bar{e}_{33} \bar{e}_{3\lambda}}{\bar{e}_{33}}. \quad (4.43)$$

V případě uvažovaných roztažných kmitů bude podélné posunutí uprostřed pásku nulové a řešení rovnic (4.42) proto předpokládáme jako lineární kombinaci stojatých vln ve tvaru [23]

$$\begin{aligned} u_3^{(00)} &= \sum_{n=1}^4 A_{1n} \sin(\xi_n x_3) e^{j\omega t}, \\ u_1^{(01)} &= \sum_{n=1}^4 A_{2n} \cos(\xi_n x_3) e^{j\omega t}, \\ u_3^{(02)} &= \sum_{n=1}^4 A_{3n} \sin(\xi_n x_3) e^{j\omega t}, \\ \varphi^{(02)} &= \sqrt{\frac{c_{44}}{\bar{e}_{33}}} \sum_{n=1}^4 A_{4n} \sin(\xi_n x_3) e^{j\omega t}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

kde A_{in} jsou amplitudy jednotlivých vln. Konstanta $\sqrt{\frac{c_{44}}{\bar{e}_{33}}}$ přizpůsobuje velikost amplitudy jednotkám elektrického potenciálu.

Pro účely výpočtu je obvyklé vyjadřovat vlnové číslo a frekvenci ve tvaru poměrných hodnot

$$\bar{\xi} = \xi \frac{2b}{\pi}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\frac{\pi}{2b} \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}}. \quad (4.45)$$

Poměrné vlnové číslo $\bar{\xi}$ vyjadřuje převrácený poměr poloviny vlnové délky ve směru šíření vlnění ku tloušťce desky. Ω je poměr frekvence vlnění ke frekvenci nejnižšího prostého

tloušťkového kmitu desky, v našem případě jednorozměrné aproximace se jedná o prostý tloušťkově střižný kmit v rovině x_2x_3 .

Dosažením řešení (4.44) do vlnových rovnic (4.42) a použitím vztahu (4.45) získáme soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{D} \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{3n} \\ A_{4n} \end{pmatrix} = 0, \quad (4.46)$$

kde matice koeficientů $\mathbf{D}$ má tvar

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_{33}\bar{\xi}_n^2 - \Omega^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{b}{a}\tilde{c}_{13}\bar{\xi}_n & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\frac{b}{a}\hat{c}_{13}\bar{\xi}_n & \hat{c}_{55}\bar{\xi}_n^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\hat{c}_{11} - \Omega^2 & -\frac{4}{3\pi}\frac{b}{a}(\hat{c}_{13} + 4\hat{c}_{55})\bar{\xi}_n & -\frac{4}{3\pi}\frac{b}{a}\hat{e}_{31}\bar{\xi}_n \\ 0 & -\frac{4}{3\pi}\frac{b}{a}(\hat{c}_{13} + 4\hat{c}_{55})\bar{\xi}_n & \hat{c}_{33}\bar{\xi}_n^2 + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2\hat{c}_{55} - \Omega^2 & \hat{e}_{33}\bar{\xi}_n^2 \\ 0 & -\frac{4}{3\pi}\frac{b}{a}\hat{e}_{31}\bar{\xi}_n & \hat{e}_{33}\bar{\xi}_n^2 & -\bar{\xi}_n^2 - 4\left(\frac{b}{a}\right)^2\hat{e}_{11} \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

a poměrné materiálové konstanty jsou

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{\lambda\mu} &= \frac{c_{\lambda\mu}^*}{c_{44}}, \quad \hat{c}_{\lambda\mu} = \frac{\bar{c}_{\lambda\mu}}{c_{44}}, \quad \hat{c}_{55} = \frac{c_{55}}{c_{44}}, \\ \hat{e}_{j\lambda} &= \frac{\bar{e}_{j\lambda}}{\sqrt{c_{44}\bar{\epsilon}_{33}}}, \quad \hat{e}_{11} = \frac{\epsilon_{11}}{\bar{\epsilon}_{33}}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Soustava rovnic (4.46) má netriviální řešení pro nenulová A_{in} , pokud je determinant matice koeficientů $\mathbf{D}$ nulový. Determinant je rovnicí čtvrtého řádu pro $\bar{\xi}$ a představuje disperzní závislost $\Omega/\bar{\xi}$ nekonečného pásku. Pro dané Ω jsou jejím řešením čtyři poměrná vlnová čísla $\bar{\xi}_n$, odpovídající jednotlivým módům. Tuto disperzní závislost obvykle zapisujeme symbolicky ve tvaru

$$D\left(\Omega, \frac{b}{a}, \bar{\xi}\right) = 0. \quad (4.49)$$

Pro každou hodnotu $\bar{\xi}_n$, lze vypočítat čtveřici poměrných amplitud vztažených například k amplitudě A_{3n}

$$\alpha_{in} = \frac{A_{in}}{A_{3n}}. \quad (4.50)$$

Poměrná vlnová čísla $\bar{\xi}_n$ musí zároveň odpovídat okrajovým podmínkám na koncích ohraničeného pásku pro $x_3 = \pm c$. Uvažujme následující okrajové podmínky pro mechanicky

volný pássek s elektrodami, na které je přiložen elektrickým potenciál:

$$T_3^{(00)} = 4 \left(\bar{c}_{33} u_{3,3}^{(00)} + \frac{\pi}{\sqrt{8a}} \bar{c}_{13} u_1^{(01)} + \bar{e}_{33} \varphi_{,3}^{(00)} \right) = 0, \quad (4.51a)$$

$$T_5^{(01)} = 2c_{55} \left(u_{1,3}^{(01)} + \frac{8}{3a} u_3^{(02)} \right) = 0, \quad (4.51b)$$

$$T_3^{(02)} = 2 \left(\bar{c}_{33} u_{3,3}^{(02)} - \frac{2}{3a} \bar{c}_{13} u_1^{(01)} + \bar{e}_{33} \varphi_{,3}^{(02)} \right) = 0, \quad (4.51c)$$

$$D_3^{(02)} = 2 \left(\bar{e}_{33} u_{3,3}^{(02)} - \frac{2}{3a} \bar{e}_{31} u_1^{(01)} - \bar{\varepsilon}_{33} \varphi_{,3}^{(02)} \right) = 0, \quad (4.51d)$$

$$\varphi^{(00)} = \pm \varphi_0 e^{j\omega t}. \quad (4.51e)$$

Potenciál $\varphi^{(00)}$ můžeme vyjádřit dvojí integrací rovnice (4.40f)

$$\varphi^{(00)} = \frac{\bar{e}_{33}}{\bar{\varepsilon}_{33}} u_3^{(00)} + \frac{\pi}{\sqrt{8a}} \frac{\bar{e}_{31}}{\bar{\varepsilon}_{33}} u_1^{(01)} x_3 + L_1 x_3 + L_2, \quad (4.52)$$

kde integrační konstanty L_1, L_2 určíme z okrajové podmínky (4.51e) pro $x_3 = \pm c$

$$L_2 = 0, \quad L_1 = \frac{\varphi_0}{c} - \frac{1}{c} \frac{\bar{e}_{33}}{\bar{\varepsilon}_{33}} u_3^{(00)}(c) - \frac{\pi}{\sqrt{8a}} \frac{\bar{e}_{31}}{\bar{\varepsilon}_{33}} u_1^{(01)}(c). \quad (4.53)$$

Dosazením (4.53) do (4.52) a výsledku do (4.51a) získáme upravené okrajové podmínky

$$T_3^{(00)} = 4 \left(c_{33}^* u_{3,3}^{(00)} - \frac{1}{c} \frac{(\bar{e}_{33})^2}{\bar{\varepsilon}_{33}} u_3^{(00)} + \frac{\pi}{\sqrt{8a}} \bar{c}_{13} u_1^{(01)} \right) = -4\bar{e}_{33} \frac{\varphi_0}{c}, \quad (4.54a)$$

$$T_5^{(01)} = 2c_{55} \left(u_{1,3}^{(01)} + \frac{8}{3c} u_3^{(02)} \right) = 0, \quad (4.54b)$$

$$T_3^{(02)} = 2 \left(\bar{c}_{33} u_{3,3}^{(02)} - \frac{2}{3a} \bar{c}_{13} u_1^{(01)} + \bar{e}_{33} \varphi_{,3}^{(02)} \right) = 0, \quad (4.54c)$$

$$D_3^{(02)} = 2 \left(\bar{e}_{33} u_{3,3}^{(02)} - \frac{2}{3a} \bar{e}_{31} u_1^{(01)} - \bar{\varepsilon}_{33} \varphi_{,3}^{(02)} \right) = 0. \quad (4.54d)$$

Po dosazení řešení (4.44) do okrajových podmínek (4.54) získáme nehomogenní soustavu lineárních rovnic pro čtyři neznámé amplitudy A_{3n}

$$\begin{pmatrix} M_{1n} \\ M_{2n} \\ M_{3n} \\ M_{4n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \\ A_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{e}_{33}}{c_{44}} \frac{2}{\pi} \frac{b}{c} \varphi_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

kde n -tý sloupec matice okrajových podmínek $\mathbf{M}$ má tvar

$$\begin{aligned} M_{1n} &= \left[\bar{c}_{33} \bar{\xi}_n \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) - \left(\frac{2b}{\pi c} \right) (\bar{c}_{33} - \hat{c}_{33}) \sin \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) \right] \alpha_{1n} + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{b}{a} \hat{c}_{13} \alpha_{2n} \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right), \\ M_{2n} &= \left(\bar{\xi}_n \alpha_{2n} - \frac{16b}{3\pi a} \right) \sin \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right), \\ M_{3n} &= \left(\hat{c}_{33} \bar{\xi}_n - \frac{4}{3\pi} \frac{b}{a} \hat{c}_{13} \alpha_{2n} + \hat{e}_{33} \alpha_{4n} \bar{\xi}_n \right) \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right), \\ M_{4n} &= \left(\hat{e}_{33} \bar{\xi}_n - \frac{4}{3\pi} \frac{b}{a} \hat{e}_{31} \alpha_{2n} - \alpha_{4n} \bar{\xi}_n \right) \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Nenulová pravá strana rovnice představuje budící elektrické pole. V případě rezonance musí být determinant matice okrajových podmínek $\mathbf{M}$ nulový a tuto závislost opět vyjádříme symbolicky jako

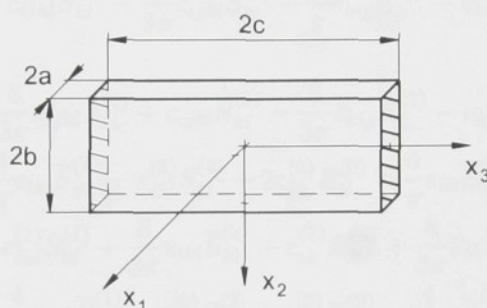
$$M\left(\Omega, \frac{c}{b}\right) = 0. \quad (4.57)$$

Tato závislost představuje frekvenční rovnici, jejíž kořeny určují vlastní poměrnou frekvenci Ω jako funkci poměru rozměrů páskového rezonátoru b/a , při definovaném poměru c/b .

Rovnice (4.49) a (4.57) tvoří úplný systém vztahů pro popis vázaných kmitů podélně polarizovaných keramických rezonátorů.

4.3 Jednorozměrný popis kmitů odvozený průměrováním přes tloušťkovou souřadnici

Nyní uvažujme, že páskový rezonátor o šířce $2b$, tloušťce $2a$ a délce $2c$ (obr. 4.6) je vůči nekonečně rozlehle desce orientován podle obr. 4.1b.



Obr. 4.6: Páskový rezonátor umístěný v souřadném systému

Následující způsob odvození jednorozměrných rovnic vychází z předpokladu, že tloušťka pásku je malá ve srovnání s vlnovou délkou šířící se vlny a ostatními rozměry pásku, a tedy posunutí a potenciál se podél tloušťky pásku příliš nemění. Můžeme je tak nahradit jejich středními hodnotami, které získáme integrací přes tloušťku pásku $2a$. Vyjdeme z novější modifikace Leeho nekonečné řady dvourozměrných aproximačních rovnic [16] popsané v kapitole 3.3, kterou opět nejdříve vhodně omezíme.

4.3.1 Omezení nekonečného rozvoje dvourozměrných rovnic

Předpokládejme, že pro řešení našeho problému vázaných kmitů je postačující aproximace druhého řádu. Pro její stanovení využijeme postupu, který uvedl Lee et al. v [25]. Uvažujme následující omezení

$$u_j^{(n)} = 0 \quad \text{pro } n > 4, \quad (4.58a)$$

$$\varphi^{(n)} = 0 \quad \text{pro } n > 2, \quad (4.58b)$$

$$\bar{T}_{j2}^{(n)} = 0, \quad u_j^{(n)} \neq 0 \quad \text{pro } n = 3, 4 \quad (4.58c)$$

a zanedbejme $T_{ij}^{(n)}$, $\bar{T}_{ij}^{(n)}$, $D_i^{(n)}$, $\bar{D}_i^{(n)}$ a $S_{ij}^{(n)}$ pro $n > 2$. Některé veličiny nižších řádů závisí na vyšších posunutích $u_j^{(3)}$, $u_j^{(4)}$. Abychom umožnili volný průběh těchto posunutí, položíme

jím odpovídající složky napětí $\bar{T}_{2j}^{(3)}$ a $\bar{T}_{2j}^{(4)}$ rovny nule. Dosazením (3.19b) do vztahu (4.58c) a použitím (3.18) získáme vztahy pro deformace vyšších řádů

$$\begin{aligned}\bar{S}_{2j}^{(3)} &= (1 + \delta_{2j}) \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{3} \frac{c_{2jkl}}{c_{2j2j}} S_{kl}^{(0)} - \frac{3}{5} \frac{c_{2jkl}}{c_{2j2j}} S_{kl}^{(2)} + \frac{1}{3} \frac{e_{k2j}}{c_{2j2j}} E_k^{(0)} + \frac{3}{5} \frac{e_{k2j}}{c_{2j2j}} E_k^{(2)} \right), \\ \bar{S}_{2j}^{(4)} &= (1 + \delta_{2j}) \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{2} \frac{c_{2jkl}}{c_{2j2j}} S_{kl}^d - \frac{8}{15} \frac{c_{2jkl}}{c_{2j2j}} S_{kl}^{(1)} + \frac{8}{15} \frac{e_{k2j}}{c_{2j2j}} E_k^{(1)} \right).\end{aligned}\quad (4.59)$$

Dosazením těchto rovnic do (3.19) získáme při zanedbání všech ostatních deformací třetího a čtvrtého řádu aproximované lineární piezoelektrické rovnice druhého řádu

$$T_{ij}^{(0)} = 2c_{ijkl}^{(0)} S_{kl}^{(0)} + \frac{4}{\pi} c_{ijkl} \bar{S}_{kl}^{(1)} - c_{ijkl}^{(3)} S_{kl}^{(2)} - 2e_{kij}^{(0)} E_k^{(0)} - \frac{4}{\pi} e_{kij} \bar{E}_k^{(1)} + e_{kij}^{(3)} E_k^{(2)}, \quad (4.60a)$$

$$T_{ij}^{(1)} = \frac{8}{\pi^2} c_{ijkl}^{(d)} S_{kl}^d + c_{ijkl}^{(1)} S_{kl}^{(1)} + \frac{8}{3\pi} c_{ijkl} \bar{S}_{kl}^{(2)} - e_{kij}^{(1)} E_k^{(1)} - \frac{8}{3\pi} e_{kij} \bar{E}_k^{(2)}, \quad (4.60b)$$

$$T_{ij}^{(2)} = -c_{ijkl}^{(3)} S_{kl}^{(0)} - \frac{4}{3\pi} c_{ijkl} \bar{S}_{kl}^{(1)} + c_{ijkl}^{(2)} S_{kl}^{(2)} + e_{kij}^{(3)} E_k^{(0)} + \frac{4}{3\pi} e_{kij} \bar{E}_k^{(1)} - e_{kij}^{(2)} E_k^{(2)}, \quad (4.60c)$$

$$\bar{T}_{ij}^{(1)} = \frac{4}{\pi} c_{ijkl} S_{kl}^{(0)} + c_{ijkl} \bar{S}_{kl}^{(1)} - \frac{4}{3\pi} c_{ijkl} S_{kl}^{(2)} - \frac{4}{\pi} e_{kij} E_k^{(0)} - e_{kij} \bar{E}_k^{(1)} + \frac{4}{3\pi} e_{kij} E_k^{(2)}, \quad (4.60d)$$

$$\bar{T}_{ij}^{(2)} = \frac{2}{\pi} c_{ijkl} S_{kl}^d + \frac{8}{3\pi} c_{ijkl} S_{kl}^{(1)} + c_{ijkl} \bar{S}_{kl}^{(2)} - \frac{8}{3\pi} e_{kij} E_k^{(1)} - e_{kij} \bar{E}_k^{(2)}, \quad (4.60e)$$

$$D_i^{(0)} = 2e_{ikl}^{(0)} S_{kl}^{(0)} + \frac{4}{\pi} e_{ikl} \bar{S}_{kl}^{(1)} - e_{ikl}^{(3)} S_{kl}^{(2)} + 2\varepsilon_{ik}^{(0)} E_k^{(0)} + \frac{4}{\pi} \varepsilon_{ik} \bar{E}_k^{(1)} + \varepsilon_{ik}^{(3)} E_k^{(2)}, \quad (4.60f)$$

$$D_i^{(1)} = \frac{8}{\pi^2} e_{ikl}^{(d)} S_{kl}^d + e_{ikl}^{(1)} S_{kl}^{(1)} + \frac{8}{3\pi} e_{ikl} \bar{S}_{kl}^{(2)} + \varepsilon_{ik}^{(1)} E_k^{(1)} + \frac{8}{3\pi} \varepsilon_{ik} \bar{E}_k^{(2)}, \quad (4.60g)$$

$$D_i^{(2)} = -e_{ikl}^{(3)} S_{kl}^{(0)} - \frac{4}{3\pi} e_{ikl} \bar{S}_{kl}^{(1)} + e_{ikl}^{(2)} S_{kl}^{(2)} + \varepsilon_{ik}^{(3)} E_k^{(0)} - \frac{4}{3\pi} \varepsilon_{ik} \bar{E}_k^{(1)} + \varepsilon_{ik}^{(2)} E_k^{(2)}, \quad (4.60h)$$

$$\bar{D}_i^{(1)} = \frac{4}{\pi} e_{ikl} S_{kl}^{(0)} + e_{ikl} \bar{S}_{kl}^{(1)} - \frac{4}{3\pi} e_{ikl} S_{kl}^{(2)} + \frac{4}{\pi} \varepsilon_{ik} E_k^{(0)} + \varepsilon_{ik} \bar{E}_k^{(1)} - \frac{4}{3\pi} \varepsilon_{ik} E_k^{(2)}, \quad (4.60i)$$

$$\bar{D}_i^{(2)} = \frac{2}{\pi} e_{ikl} S_{kl}^d + \frac{8}{3\pi} e_{ikl} S_{kl}^{(1)} + e_{ikl} \bar{S}_{kl}^{(2)} + \frac{8}{3\pi} \varepsilon_{ik} E_k^{(1)} + \varepsilon_{ik} \bar{E}_k^{(2)}, \quad (4.60j)$$

kde kombinované konstanty jsou definovány jako

$$\begin{aligned}c_{ijkl}^{(3)} &= \frac{16}{5\pi^2} \left(\frac{c_{ij21}c_{21kl}}{c_{2121}} + \frac{c_{ij22}c_{22kl}}{c_{2222}} + \frac{c_{ij23}c_{23kl}}{c_{2323}} \right), \\ e_{kij}^{(3)} &= \frac{16}{5\pi^2} \left(\frac{c_{ij21}e_{k21}}{c_{2121}} + \frac{c_{ij22}e_{k22}}{c_{2222}} + \frac{c_{ij23}e_{k23}}{c_{2323}} \right), \\ \varepsilon_{ik}^{(3)} &= \frac{16}{5\pi^2} \left(\frac{e_{i21}e_{k21}}{c_{2121}} + \frac{e_{i22}e_{k22}}{c_{2222}} + \frac{e_{i23}e_{k23}}{c_{2323}} \right), \\ c_{ijkl}^{(2)} &= c_{ijkl} - \frac{9}{5} c_{ijkl}^{(3)}, \quad e_{kij}^{(2)} = e_{kij} - \frac{9}{5} e_{kij}^{(3)}, \quad \varepsilon_{ik}^{(2)} = \varepsilon_{ik} + \frac{9}{5} \varepsilon_{ik}^{(3)}, \\ c_{ijkl}^{(1)} &= c_{ijkl} - \frac{16}{45} c_{ijkl}^{(3)}, \quad e_{kij}^{(1)} = e_{kij} - \frac{16}{45} e_{kij}^{(3)}, \quad \varepsilon_{ik}^{(1)} = \varepsilon_{ik} + \frac{16}{45} \varepsilon_{ik}^{(3)}, \\ c_{ijkl}^{(0)} &= c_{ijkl} - \frac{5}{18} c_{ijkl}^{(3)}, \quad e_{kij}^{(0)} = e_{kij} - \frac{5}{18} e_{kij}^{(3)}, \quad \varepsilon_{ik}^{(0)} = \varepsilon_{ik} + \frac{5}{18} \varepsilon_{ik}^{(3)}, \\ c_{ijkl}^{(d)} &= c_{ijkl} - \frac{\pi^2}{24} c_{ijkl}^{(3)}, \quad e_{kij}^{(d)} = e_{kij} - \frac{\pi^2}{24} e_{kij}^{(3)}.\end{aligned}\quad (4.61)$$

4.3.2 Jednorozměrné vlnové rovnice

Nahrazením veličin ve směru tloušťky desky jejich středními hodnotami převedeme řešení původně prostorového problému na problém rovinné napjatosti v rovině x_2x_3 , kde kmity závisí pouze na souřadnici x_3 a ve směru x_2 jsou nahrazeny trigonometrickým rozvojem. Pro případ rovinného napětí musíme respektovat podmínky

$$\begin{aligned} T_1 &\equiv 0, \\ T_5 = T_6 &= 0 \quad \text{pro } x_1 = \pm a, \end{aligned} \quad (4.62)$$

z čehož po dosazení do (3.10) vyplývá

$$T_1^{(0)} = T_1^{(2)} = 0. \quad (4.63)$$

Tato dvourozměrná elastická napětí určíme ze vztahů (4.60) pomocí (3.18) a pro symetrii $6mm$ mají tvar

$$T_1^{(0)} = 2c_{11}^{(0)} u_{1,1}^{(0)} + 2c_{13}^{(0)} u_{3,3}^{(0)} + \frac{2}{b} c_{12} u_2^{(1)} - c_{11}^{(3)} u_{1,1}^{(2)} - c_{13}^{(3)} u_{3,3}^{(2)} + 2e_{31}^{(0)} \varphi_{,3}^{(0)} - e_{31}^{(3)} \varphi_{,3}^{(2)}, \quad (4.64)$$

$$T_1^{(2)} = -c_{11}^{(3)} u_{1,1}^{(0)} - c_{13}^{(3)} u_{3,3}^{(0)} - \frac{2}{3b} c_{12} u_2^{(1)} + c_{11}^{(2)} u_{1,1}^{(2)} + c_{13}^{(2)} u_{3,3}^{(2)} - e_{31}^{(3)} \varphi_{,3}^{(0)} + e_{31}^{(2)} \varphi_{,3}^{(2)}, \quad (4.65)$$

ze kterých při zanedbání vzájemné vazby mezi $u_{1,1}^{(0)}$ a $u_{1,1}^{(2)}$ vyjádříme

$$\begin{aligned} u_{1,1}^{(0)} &= -\frac{c_{13}^{(0)}}{c_{11}^{(0)}} u_{3,3}^{(0)} - \frac{1}{b} \frac{c_{12}}{c_{11}^{(0)}} u_2^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{c_{13}^{(3)}}{c_{11}^{(0)}} u_{3,3}^{(2)} - \frac{e_{31}^{(0)}}{c_{11}^{(0)}} \varphi_{,3}^{(0)} + \frac{1}{2} \frac{e_{31}^{(3)}}{c_{11}^{(0)}} \varphi_{,3}^{(2)}, \\ u_{1,1}^{(2)} &= \frac{c_{13}^{(3)}}{c_{11}^{(2)}} u_{3,3}^{(0)} + \frac{2}{3b} \frac{c_{12}}{c_{11}^{(2)}} u_2^{(1)} - \frac{c_{13}^{(2)}}{c_{11}^{(2)}} u_{3,3}^{(2)} + \frac{e_{31}^{(3)}}{c_{11}^{(2)}} \varphi_{,3}^{(0)} - \frac{e_{31}^{(2)}}{c_{11}^{(2)}} \varphi_{,3}^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

K roztažným deformacím desky přispívají pouze symetrické módy. Dále proto budeme uvažovat pouze následující dvourozměrná posunutí a potenciály, která zároveň splňují podmínku

$$\int_{-a}^a \left(u_1^{(0)}, u_1^{(2)}, u_2^{(1)}, u_3^{(0)}, u_3^{(2)}, \varphi^{(0)}, \varphi^{(2)} \right)_{,1} dx_1 = 0. \quad (4.67)$$

Použitím vztahů (4.66) vyjádříme z (4.60) následující rovnice odpovídající symetrii $6mm$, které obsahují členy (4.67)

$$T_3^{(0)} = 2\bar{c}_{33}^0 u_{3,3}^{(0)} + \frac{2}{b} \bar{c}_{23}^4 u_2^{(1)} - \bar{c}_{33}^3 u_{3,3}^{(2)} + 2\bar{e}_{33}^0 \varphi_{,3}^{(0)} - \bar{e}_{33}^3 \varphi_{,3}^{(2)}, \quad (4.68a)$$

$$T_5^{(0)} = 2c_{55}^{(0)} \left(u_{1,3}^{(0)} + u_{3,1}^{(0)} \right) - c_{55}^{(3)} \left(u_{1,3}^{(2)} + u_{3,1}^{(2)} \right) + 2e_{15}^{(0)} \varphi_{,1}^{(0)} - e_{15}^{(3)} \varphi_{,1}^{(2)}, \quad (4.68b)$$

$$T_4^{(1)} = c_{44}^{(1)} u_{2,3}^{(1)} + \frac{8}{3b} c_{44} u_3^{(2)} + \frac{8}{3b} e_{24} \varphi^{(2)}, \quad (4.68c)$$

$$T_3^{(2)} = -\bar{c}_{33}^3 u_{3,3}^{(0)} - \frac{2}{3b} \bar{c}_{23}^5 u_2^{(1)} + \bar{c}_{33}^2 u_{3,3}^{(2)} - \bar{e}_{33}^5 \varphi_{,3}^{(0)} + \bar{e}_{33}^2 \varphi_{,3}^{(2)}, \quad (4.68d)$$

$$T_5^{(2)} = -c_{55}^{(3)} \left(u_{1,3}^{(0)} + u_{3,1}^{(0)} \right) + c_{55}^{(2)} \left(u_{1,3}^{(2)} + u_{3,1}^{(2)} \right) - e_{15}^{(3)} \varphi_{,1}^{(0)} + e_{15}^{(2)} \varphi_{,1}^{(2)}, \quad (4.68e)$$

$$\bar{T}_2^{(1)} = \frac{4}{\pi} \bar{c}_{23}^4 u_{3,3}^{(0)} + \frac{\pi}{2b} \bar{c}_{22}^1 u_2^{(1)} - \frac{4}{3\pi} \bar{c}_{23}^5 u_{3,3}^{(2)} + \frac{4}{\pi} \bar{e}_{32}^1 \varphi_{,3}^{(0)} - \frac{4}{3\pi} \bar{e}_{32}^4 \varphi_{,3}^{(2)}, \quad (4.68f)$$

$$\bar{T}_4^{(2)} = \frac{8}{3\pi} c_{44} u_{2,3}^{(1)} + \frac{\pi}{b} c_{44} u_3^{(2)} + \frac{\pi}{b} e_{24} \varphi^{(2)}, \quad (4.68g)$$

$$\bar{T}_6^{(2)} = \frac{8}{3\pi} c_{66} u_{2,1}^{(1)} + \frac{\pi}{b} c_{66} u_1^{(2)}, \quad (4.68h)$$

$$D_3^{(0)} = 2\tilde{e}_{33}^0 u_{3,3}^{(0)} + \frac{2}{b} \tilde{e}_{32}^1 u_2^{(1)} - \tilde{e}_{33}^5 u_{3,3}^{(2)} - 2\tilde{e}_{33}^0 \varphi_{,3}^{(0)} - \tilde{e}_{33}^3 \varphi_{,3}^{(2)}, \quad (4.68i)$$

$$D_3^{(2)} = -\tilde{e}_{33}^3 u_{3,3}^{(0)} - \frac{2}{3b} \tilde{e}_{32}^4 u_2^{(1)} + \tilde{e}_{33}^2 u_{3,3}^{(2)} - \tilde{e}_{33}^3 \varphi_{,3}^{(0)} - \tilde{e}_{33}^2 \varphi_{,3}^{(2)}, \quad (4.68j)$$

$$\bar{D}_2^{(2)} = \frac{8}{3\pi} e_{24} u_{2,3}^{(1)} + \frac{\pi}{b} e_{24} u_3^{(2)} - \varepsilon_{22} \frac{\pi}{b} \varphi^{(2)}, \quad (4.68k)$$

kde modifikované materiálové konstanty jsou

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{33}^0 &= c_{33}^{(0)} - \frac{c_{13}^{(0)} c_{13}^{(0)}}{c_{11}^{(0)}} - \frac{1}{2} \frac{c_{13}^{(3)} c_{13}^{(3)}}{c_{11}^{(2)}}, \\ \tilde{c}_{33}^2 &= c_{33}^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{c_{13}^{(3)} c_{13}^{(3)}}{c_{11}^{(0)}} - \frac{c_{13}^{(2)} c_{13}^{(2)}}{c_{11}^{(2)}}, \\ \tilde{c}_{33}^3 &= c_{33}^{(3)} - \frac{c_{13}^{(0)} c_{13}^{(3)}}{c_{11}^{(0)}} - \frac{c_{13}^{(3)} c_{13}^{(2)}}{c_{11}^{(2)}}, \\ \tilde{c}_{23}^4 &= c_{23} - \frac{c_{12} c_{13}^{(0)}}{c_{11}^{(0)}} - \frac{1}{3} \frac{c_{13}^{(3)} c_{12}}{c_{11}^{(2)}}, \\ \tilde{c}_{23}^5 &= c_{23} - \frac{3}{2} \frac{c_{13}^{(3)} c_{12}}{c_{11}^{(0)}} - \frac{c_{13}^{(2)} c_{12}}{c_{11}^{(2)}}, \\ \tilde{c}_{22}^1 &= c_{22} - \frac{8}{\pi^2} \frac{c_{12} c_{12}}{c_{11}^{(0)}} - \frac{16}{9\pi^2} \frac{c_{12} c_{12}}{c_{11}^{(2)}}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{33}^0 &= e_{33}^{(0)} - \frac{c_{13}^{(0)} e_{31}^{(0)}}{c_{11}^{(0)}} - \frac{1}{2} \frac{c_{13}^{(3)} e_{31}^{(3)}}{c_{11}^{(2)}}, \\ \tilde{e}_{33}^2 &= e_{33}^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{c_{13}^{(3)} e_{31}^{(3)}}{c_{11}^{(0)}} - \frac{c_{13}^{(2)} e_{31}^{(2)}}{c_{11}^{(2)}}, \\ \tilde{e}_{33}^3 &= e_{33}^{(3)} - \frac{c_{13}^{(0)} e_{31}^{(3)}}{c_{11}^{(0)}} - \frac{c_{13}^{(3)} e_{31}^{(2)}}{c_{11}^{(2)}}, \\ \tilde{e}_{33}^5 &= e_{33}^{(3)} - \frac{c_{13}^{(3)} e_{31}^{(0)}}{c_{11}^{(0)}} - \frac{c_{13}^{(2)} e_{31}^{(3)}}{c_{11}^{(2)}}, \\ \tilde{e}_{32}^1 &= e_{32} - \frac{c_{12} e_{31}^{(0)}}{c_{11}^{(0)}} - \frac{1}{3} \frac{c_{12} e_{31}^{(3)}}{c_{11}^{(2)}}, \\ \tilde{e}_{32}^4 &= e_{32} - \frac{3}{2} \frac{c_{12} e_{31}^{(3)}}{c_{11}^{(0)}} - \frac{c_{12} e_{31}^{(2)}}{c_{11}^{(2)}}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{33}^0 &= \varepsilon_{33}^{(0)} + \frac{e_{31}^{(0)} e_{31}^{(0)}}{c_{11}^{(0)}} + \frac{1}{2} \frac{e_{31}^{(3)} e_{31}^{(3)}}{c_{11}^{(2)}}, \\ \tilde{\varepsilon}_{33}^2 &= \varepsilon_{33}^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{e_{31}^{(3)} e_{31}^{(3)}}{c_{11}^{(0)}} + \frac{e_{31}^{(2)} e_{31}^{(2)}}{c_{11}^{(2)}}, \\ \tilde{\varepsilon}_{33}^3 &= \varepsilon_{33}^{(3)} - \frac{e_{31}^{(0)} e_{31}^{(3)}}{c_{11}^{(0)}} - \frac{e_{31}^{(3)} e_{31}^{(2)}}{c_{11}^{(2)}}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Jednorozměrné pohybové a elektrické rovnice získáme integrací (3.16) přes x_1 v mezích od $-a$ do a a jejich vydělením tloušťkou $2a$. Plochy desky $x_2 = \pm b$ předpokládáme mechanicky volné a bez elektrického náboje a v rovnicích (3.16) položíme členy $F_j^{(n)}$ a $D^{(n)}$ rovny nule. Po integraci dostaneme

$$\sigma_{3j,3}^{(0)} + H_j^{(0)} = 2\rho\ddot{v}_j^{(0)}, \quad (4.72a)$$

$$\sigma_{3j,3}^{(1)} - \frac{\pi}{2b}\bar{\sigma}_{2j}^{(1)} + H_j^{(1)} = \rho\ddot{v}_j^{(1)}, \quad (4.72b)$$

$$\sigma_{3j,3}^{(2)} - \frac{\pi}{b}\bar{\sigma}_{2j}^{(2)} + H_j^{(2)} = \rho\ddot{v}_j^{(2)}, \quad (4.72c)$$

$$d_{3,3}^{(0)} + d^{(0)} = 0, \quad (4.72d)$$

$$d_{3,3}^{(1)} - \frac{\pi}{2b}\bar{d}_2^{(1)} + d^{(1)} = 0, \quad (4.72e)$$

$$d_{3,3}^{(2)} - \frac{\pi}{b}\bar{d}_2^{(2)} + d^{(2)} = 0, \quad (4.72f)$$

kde n -té složky průměrného posunutí $v_j^{(n)}$, průměrného elastického napětí $\sigma_{ij}^{(n)}$, $\bar{\sigma}_{ij}^{(n)}$, průměrného elektrického posunutí $d_k^{(n)}$, $\bar{d}_k^{(n)}$ a průměrného potenciálu $\psi^{(n)}$ jsou

$$v_j^{(n)}(x_3, t) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a u_j^{(n)}(x_1, x_3, t) dx_1, \quad (4.73a)$$

$$\sigma_{ij}^{(n)}(x_3, t) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a T_{ij}^{(n)}(x_1, x_3, t) dx_1, \quad (4.73b)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(n)}(x_3, t) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \bar{T}_{ij}^{(n)}(x_1, x_3, t) dx_1, \quad (4.73c)$$

$$d_k^{(n)}(x_3, t) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a D_k^{(n)}(x_1, x_3, t) dx_1, \quad (4.73d)$$

$$\bar{d}_k^{(n)}(x_3, t) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \bar{D}_k^{(n)}(x_1, x_3, t) dx_1, \quad (4.73e)$$

$$\psi^{(n)}(x_3, t) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \varphi^{(n)}(x_1, x_3, t) dx_1 \quad (4.73f)$$

a n -té složky elastického napětí $H_j^{(n)}$ a povrchové hustoty náboje $d^{(n)}$ na hranách $x_1 = \pm a$ jsou

$$H_j^{(n)} = \frac{1}{2a} [T_{1j}^{(n)}(a) - T_{1j}^{(n)}(-a)], \quad (4.74)$$

$$d^{(n)} = \frac{1}{2a} [D_1^{(n)}(a) - D_1^{(n)}(-a)]. \quad (4.75)$$

Dále budeme předpokládat, že hrany $x_1 = \pm a$ jsou mechanicky volné a bez náboje a položíme $H_j^{(n)} = d^{(n)} = 0$.

Dosazením (4.68) do (4.73) a použitím podmínky (4.67) získáme jednorozměrné aproximační rovnice

$$\sigma_3^{(0)} = 2\tilde{c}_{33}^0 v_{3,3}^{(0)} + \frac{2}{b}\tilde{c}_{23}^4 v_2^{(1)} - \tilde{c}_{33}^3 v_{3,3}^{(2)} + 2\tilde{e}_{33}^0 \psi_{,3}^{(0)} - \tilde{e}_{33}^3 \psi_{,3}^{(2)}, \quad (4.76a)$$

$$\sigma_5^{(0)} = 2c_{55}^{(0)} v_{1,3}^{(0)} - c_{55}^{(3)} v_{1,3}^{(2)}, \quad (4.76b)$$

$$\sigma_4^{(1)} = c_{44}^{(1)} v_{2,3}^{(1)} + \frac{8}{3b} c_{44} v_3^{(2)} + \frac{8}{3b} e_{24} \psi^{(2)}, \quad (4.76c)$$

$$\sigma_3^{(2)} = -\tilde{c}_{33}^3 v_{3,3}^{(0)} - \frac{2}{3b}\tilde{c}_{23}^5 v_2^{(1)} + \tilde{c}_{33}^2 v_{3,3}^{(2)} - \tilde{e}_{33}^5 \psi_{,3}^{(0)} + \tilde{e}_{33}^2 \psi_{,3}^{(2)}, \quad (4.76d)$$

$$\sigma_5^{(2)} = -c_{55}^{(3)} v_{1,3}^{(0)} + c_{55}^{(2)} v_{1,3}^{(2)}, \quad (4.76e)$$

$$\bar{\sigma}_2^{(1)} = \frac{4}{\pi} \tilde{c}_{23}^4 v_{3,3}^{(0)} + \frac{\pi}{2b} \tilde{c}_{22}^1 v_2^{(1)} - \frac{4}{3\pi} \tilde{c}_{23}^5 v_{3,3}^{(2)} + \frac{4}{\pi} \tilde{e}_{32}^1 \psi_{,3}^{(0)} - \frac{4}{3\pi} \tilde{e}_{32}^4 \psi_{,3}^{(2)}, \quad (4.76f)$$

$$\bar{\sigma}_4^{(2)} = \frac{8}{3\pi} c_{44} v_{2,3}^{(1)} + \frac{\pi}{b} c_{44} v_3^{(2)} + \frac{\pi}{b} e_{24} \psi^{(2)}, \quad (4.76g)$$

$$\bar{\sigma}_6^{(2)} = \frac{\pi}{b} c_{66} v_1^{(2)}, \quad (4.76h)$$

$$d_3^{(0)} = 2\tilde{e}_{33}^0 v_{3,3}^{(0)} + \frac{2}{b} \tilde{e}_{32}^1 v_2^{(1)} - \tilde{e}_{33}^5 v_{3,3}^{(2)} - 2\tilde{\varepsilon}_{33}^0 \psi_{,3}^{(0)} - \tilde{\varepsilon}_{33}^3 \psi_{,3}^{(2)}, \quad (4.76i)$$

$$d_3^{(2)} = -\tilde{e}_{33}^3 v_{3,3}^{(0)} - \frac{2}{3b} \tilde{e}_{32}^4 v_2^{(1)} + \tilde{e}_{33}^2 v_{3,3}^{(2)} - \tilde{\varepsilon}_{33}^3 \psi_{,3}^{(0)} - \tilde{\varepsilon}_{33}^2 \psi_{,3}^{(2)}, \quad (4.76j)$$

$$\bar{d}_2^{(2)} = \frac{8}{3\pi} e_{24} v_{2,3}^{(1)} + \frac{\pi}{b} e_{24} v_3^{(2)} - \varepsilon_{22} \frac{\pi}{b} \psi^{(2)}. \quad (4.76k)$$

Protože uvažujeme případ buzení kmitů elektrickým polem ve směru x_3 , vyloučíme z rovnic (4.76) členy s koeficientem e_{24} .

Po dosazení (4.76) do jednorozměrných pohybových a elektrických rovnic (4.72) pro odpovídající členy (4.67) získáme jednorozměrné vlnové rovnice popisující roztahné deformace piezokeramických pásků

$$2c_{55}^{(0)} v_{1,33}^{(0)} - c_{55}^{(3)} v_{1,33}^{(2)} = 2\rho \ddot{v}_1^{(0)}, \quad (4.77a)$$

$$-c_{55}^{(3)} v_{1,33}^{(0)} + c_{55}^{(2)} v_{1,33}^{(2)} - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 c_{66} v_1^{(2)} = \rho \ddot{v}_1^{(2)}, \quad (4.77b)$$

$$2\tilde{c}_{33}^0 v_{3,33}^{(0)} + \frac{2}{b} \tilde{c}_{23}^4 v_{2,3}^{(1)} - \tilde{c}_{33}^3 v_{3,33}^{(2)} + 2\tilde{e}_{33}^0 \psi_{,33}^{(0)} - \tilde{e}_{33}^3 \psi_{,33}^{(2)} = 2\rho \ddot{v}_3^{(0)}, \quad (4.77c)$$

$$c_{44}^{(1)} v_{2,33}^{(1)} + \frac{2}{3b} (\tilde{c}_{23}^5 + 4c_{44}) v_{3,3}^{(2)} - \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 \tilde{c}_{22}^1 v_2^{(1)} - \frac{2}{b} \tilde{c}_{23}^4 v_{3,3}^{(0)} - \frac{2}{b} \tilde{e}_{32}^1 \psi_{,3}^{(0)} + \frac{2}{3b} \tilde{e}_{32}^4 \psi_{,3}^{(2)} = \rho \ddot{v}_2^{(1)}, \quad (4.77d)$$

$$-\tilde{c}_{33}^3 v_{3,33}^{(0)} - \frac{2}{3b} (\tilde{c}_{23}^5 + 4c_{44}) v_{2,3}^{(1)} + \tilde{c}_{33}^2 v_{3,33}^{(2)} - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 c_{44} v_3^{(2)} - \tilde{e}_{33}^5 \psi_{,33}^{(0)} + \tilde{e}_{33}^2 \psi_{,33}^{(2)} = \rho \ddot{v}_3^{(2)}, \quad (4.77e)$$

$$\tilde{e}_{33}^0 v_{3,33}^{(0)} + \frac{1}{b} \tilde{e}_{32}^1 v_{2,3}^{(1)} - \frac{1}{2} \tilde{e}_{33}^5 v_{3,33}^{(2)} - \tilde{\varepsilon}_{33}^0 \psi_{,33}^{(0)} - \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{33}^3 \psi_{,33}^{(2)} = 0, \quad (4.77f)$$

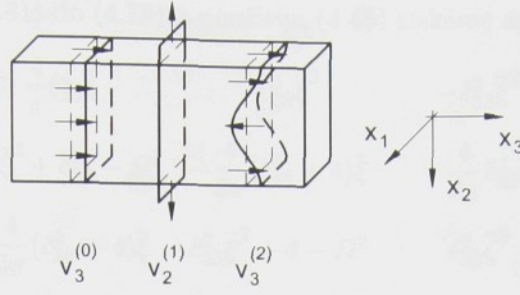
$$-\tilde{e}_{33}^3 v_{3,33}^{(0)} - \frac{2}{3b} \tilde{e}_{32}^4 v_{2,3}^{(1)} + \tilde{e}_{33}^2 v_{3,33}^{(2)} - \tilde{\varepsilon}_{33}^3 \psi_{,33}^{(0)} - \tilde{\varepsilon}_{33}^2 \psi_{,33}^{(2)} + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \varepsilon_{22} \psi^{(2)} = 0. \quad (4.77g)$$

Soustavu rovnic (4.77) lze opět rozložit na dvě nezávislé části. Rovnice (4.77a,b) představují příčné módy pásku $v_1^{(0)}$ a $v_1^{(2)}$, které nejsou vázány s elektrickým polem ve směru x_3 . Rovnice (4.77c-g) popisují podélné kmity $v_3^{(0)}$, šířkově rozpínavé kmity $v_2^{(1)}$ a šířkově střížné kmity druhého řádu $v_3^{(2)}$, které mohou být vybudeny potenciálem přiloženým na elektrody. Vlastní tvary těchto kmitů jsou znázorněny na obr. 4.7.

4.3.3 Vázané podélné, šířkově rozpínavé a symetrické šířkově střížné kmity

Rovnice (4.77c-g) podrobíme další úpravě. Posunutí $v_2^{(1)}$ není vázáno okrajovými podmínkami s potenciálem $\psi^{(0)}$ a pro jednoduchost můžeme zanedbat v (4.77d) člen $\frac{2}{b} \tilde{e}_{32}^1 \psi_{,3}^{(0)}$. Ze vztahu (4.77f) vyjádříme člen $\psi_{,33}^{(0)}$

$$\psi_{,33}^{(0)} = \frac{\tilde{e}_{33}^0}{\tilde{\varepsilon}_{33}^0} v_{3,33}^{(0)} + \frac{1}{b} \frac{\tilde{e}_{32}^1}{\tilde{\varepsilon}_{33}^0} v_{2,3}^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{e}_{33}^5}{\tilde{\varepsilon}_{33}^0} v_{3,33}^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}^3}{\tilde{\varepsilon}_{33}^0} \psi_{,33}^{(2)} \quad (4.78)$$



Obr. 4.7: Podélné $v_3^{(0)}$, šířkově rozpínavé $v_2^{(1)}$ a symetrické šířkově střížné kmity $v_3^{(2)}$

a dosadíme jej do (4.77c,e,g). Získáme tak upravené vlnové rovnice

$$2\bar{c}_{33}^0 v_{3,33}^{(0)} + \frac{2}{b} \bar{c}_{23}^4 v_{2,3}^{(1)} - \bar{c}_{33}^3 v_{3,33}^{(2)} - \bar{e}_{33}^3 \psi_{,33}^{(2)} = 2\rho \ddot{v}_3^{(0)}, \quad (4.79a)$$

$$c_{44}^{(1)} v_{2,33}^{(1)} + \frac{2}{3b} (\bar{c}_{23}^5 + 4c_{44}) v_{3,3}^{(2)} - \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 \bar{c}_{22}^1 v_2^{(1)} - \frac{2}{b} \bar{c}_{23}^4 v_{3,3}^{(0)} + \frac{2}{3b} \bar{e}_{32}^4 \psi_{,3}^{(2)} = \rho \ddot{v}_2^{(1)}, \quad (4.79b)$$

$$-\bar{c}_{33}^3 v_{3,33}^{(0)} - \frac{2}{3b} (\bar{c}_{23}^5 + 4c_{44}) v_{2,3}^{(1)} + \bar{c}_{33}^2 v_{3,33}^{(2)} - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 c_{44} v_3^{(2)} + \bar{e}_{33}^2 \psi_{,33}^{(2)} = \rho \ddot{v}_3^{(2)}, \quad (4.79c)$$

$$-\bar{e}_{33}^3 v_{3,33}^{(0)} - \frac{2}{3b} \bar{e}_{32}^4 v_{2,3}^{(1)} + \bar{e}_{33}^2 v_{3,33}^{(2)} - \bar{e}_{33}^2 \psi_{,33}^{(2)} + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \varepsilon_{22} \psi^{(2)} = 0, \quad (4.79d)$$

kde modifikované konstanty jsou

$$\begin{aligned} \bar{c}_{33}^0 &= \bar{c}_{33}^0 + \frac{\bar{e}_{33}^0 \bar{e}_{33}^0}{\bar{\varepsilon}_{33}^0}, \\ \bar{c}_{33}^2 &= \bar{c}_{33}^2 + \frac{1}{2} \frac{\bar{e}_{33}^5 \bar{e}_{33}^5}{\bar{\varepsilon}_{33}^0}, \\ \bar{c}_{33}^3 &= \bar{c}_{33}^3 + \frac{\bar{e}_{33}^0 \bar{e}_{33}^5}{\bar{\varepsilon}_{33}^0}, \\ \bar{c}_{23}^4 &= \bar{c}_{23}^4 + \frac{\bar{e}_{33}^0 \bar{e}_{32}^1}{\bar{\varepsilon}_{33}^0}, \\ \bar{c}_{23}^5 &= \bar{c}_{23}^5 + \frac{3}{2} \frac{\bar{e}_{33}^5 \bar{e}_{32}^1}{\bar{\varepsilon}_{33}^0}, \\ \bar{e}_{33}^2 &= \bar{e}_{33}^2 + \frac{1}{2} \frac{\bar{e}_{33}^5 \bar{e}_{33}^3}{\bar{\varepsilon}_{33}^0}, \\ \bar{e}_{33}^3 &= \bar{e}_{33}^3 + \frac{\bar{e}_{33}^0 \bar{e}_{33}^3}{\bar{\varepsilon}_{33}^0}, \\ \bar{e}_{32}^4 &= \bar{e}_{32}^4 + \frac{3}{2} \frac{\bar{e}_{32}^1 \bar{e}_{33}^3}{\bar{\varepsilon}_{33}^0}, \\ \bar{e}_{33}^2 &= \bar{e}_{33}^2 - \frac{1}{2} \frac{\bar{e}_{33}^3 \bar{e}_{33}^3}{\bar{\varepsilon}_{33}^0}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Řešení rovnic (4.79) uvažujeme ve tvaru jednotlivých stojatých vln [25]

$$\begin{aligned} v_3^{(0)} &= A_1 \sin(\xi x_3) e^{j\omega t}, \\ v_2^{(1)} &= A_2 \cos(\xi x_3) e^{j\omega t}, \\ v_3^{(2)} &= A_3 \sin(\xi x_3) e^{j\omega t}, \\ \psi^{(2)} &= \sqrt{\frac{c_{44}}{\varepsilon_{33}}} A_4 \sin(\xi x_3) e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Dosazením řešení (4.81) do (4.79) a použitím (4.45) získáme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 2\hat{c}_{33}^0\bar{\xi}^2 - 2\Omega^2 & \frac{4}{\pi}\hat{c}_{23}^4\bar{\xi} & -\hat{c}_{33}^3\bar{\xi}^2 & -\hat{e}_{33}^3\bar{\xi}^2 \\ \frac{4}{\pi}\hat{c}_{23}^4\bar{\xi} & \hat{c}_{44}^{(1)}\bar{\xi}^2 + \hat{c}_{22}^1 - \Omega^2 & -\frac{4}{3\pi}(\hat{c}_{23}^5 + 4)\bar{\xi} & -\frac{4}{3\pi}\hat{e}_{32}^4\bar{\xi} \\ -\hat{c}_{33}^3\bar{\xi}^2 & -\frac{4}{3\pi}(\hat{c}_{23}^5 + 4)\bar{\xi} & \hat{c}_{33}^2\bar{\xi}^2 + 4 - \Omega^2 & \hat{e}_{33}^2\bar{\xi}^2 \\ -\hat{e}_{33}^3\bar{\xi}^2 & -\frac{4}{3\pi}\hat{e}_{32}^4\bar{\xi} & \hat{e}_{33}^2\bar{\xi}^2 & -\hat{e}_{33}^2\bar{\xi}^2 - 4\hat{e}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.82)$$

kde poměrné materiálové konstanty jsou

$$\begin{aligned} \hat{c}_{\lambda\mu}^n &= \frac{\bar{c}_{\lambda\mu}^n}{c_{44}}, \quad \check{c}_{\lambda\mu}^n = \frac{\tilde{c}_{\lambda\mu}^n}{c_{44}}, \quad \hat{c}_{44}^{(1)} = \frac{c_{44}^{(1)}}{c_{44}}, \\ \hat{e}_{i\lambda}^n &= \frac{\bar{e}_{i\lambda}^n}{\sqrt{c_{44}\varepsilon_{33}}}, \quad \check{e}_{i\lambda}^n = \frac{\tilde{e}_{i\lambda}^n}{\sqrt{c_{44}\varepsilon_{33}}}, \\ \hat{\varepsilon}_{33}^2 &= \frac{\bar{\varepsilon}_{33}^2}{\varepsilon_{33}}, \quad \hat{\varepsilon}_{22} = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Soustava rovnic (4.82) má netriviální řešení pro nenulová A_n , pokud je determinant matice koeficientů nulový. Tuto disperzní závislost opět vyjádříme symbolicky

$$D(\Omega, \bar{\xi}) = 0. \quad (4.84)$$

Pro každou hodnotu $\bar{\xi}_n$ můžeme vypočítat čtveřici poměrných amplitud vztažených např. k amplitudě A_3

$$\alpha_n = \frac{A_n}{A_3}. \quad (4.85)$$

Poměrná vlnová čísla $\bar{\xi}_n$ musí odpovídat okrajovým podmínkám na koncích ohraničeného pásu pro $x_3 = \pm c$. Uvažujme okrajové podmínky ve tvaru

$$\sigma_3^{(0)} = 2\hat{c}_{33}^0 v_{3,3}^{(0)} + \frac{2}{b}\hat{c}_{23}^4 v_2^{(1)} - \hat{c}_{33}^3 v_{3,3}^{(2)} + 2\hat{e}_{33}^0 \psi_{,3}^{(0)} - \hat{e}_{33}^3 \psi_{,3}^{(2)} = 0, \quad (4.86a)$$

$$\sigma_4^{(1)} = c_{44}^{(1)} v_{2,3}^{(1)} + \frac{8}{3b} c_{44} v_3^{(2)} = 0, \quad (4.86b)$$

$$\sigma_3^{(2)} = -\hat{c}_{33}^3 v_{3,3}^{(0)} - \frac{2}{3b}\hat{c}_{23}^5 v_2^{(1)} + \hat{c}_{33}^2 v_{3,3}^{(2)} - \hat{e}_{33}^5 \psi_{,3}^{(0)} + \hat{e}_{33}^2 \psi_{,3}^{(2)} = 0, \quad (4.86c)$$

$$d_3^{(2)} = -\hat{e}_{33}^3 v_{3,3}^{(0)} - \frac{2}{3b}\hat{e}_{32}^4 v_2^{(1)} + \hat{e}_{33}^2 v_{3,3}^{(2)} - \hat{\varepsilon}_{33}^3 \psi_{,3}^{(0)} - \hat{\varepsilon}_{33}^2 \psi_{,3}^{(2)} = 0, \quad (4.86d)$$

$$\psi^{(0)} = \pm \psi_0 e^{j\omega t}. \quad (4.86e)$$

Dvojí integrací rovnice (4.77f) vyjádříme potenciál $\psi^{(0)}$

$$\psi^{(0)} = \frac{\hat{e}_{33}^0}{\hat{\varepsilon}_{33}^0} v_3^{(0)} + \frac{1}{b} \frac{\hat{e}_{32}^1}{\hat{\varepsilon}_{33}^0} v_2^{(1)} x_3 - \frac{1}{2} \frac{\hat{e}_{33}^5}{\hat{\varepsilon}_{33}^0} v_3^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{\hat{\varepsilon}_{33}^3}{\hat{\varepsilon}_{33}^0} \psi^{(2)} + L_1 x_3 + L_2, \quad (4.87)$$

kde integrační konstanty L_1, L_2 určíme řešením okrajové podmínky (4.86e) pro $x_3 = \pm c$

$$\begin{aligned} L_2 &= 0, \\ L_1 &= \frac{\psi_0}{c} - \frac{1}{c} \frac{\hat{e}_{33}^0}{\hat{\varepsilon}_{33}^0} v_3^{(0)}(c) - \frac{1}{b} \frac{\hat{e}_{32}^1}{\hat{\varepsilon}_{33}^0} v_2^{(1)}(c) + \frac{1}{2c} \frac{\hat{e}_{33}^5}{\hat{\varepsilon}_{33}^0} v_3^{(2)}(c) + \frac{1}{2c} \frac{\hat{\varepsilon}_{33}^3}{\hat{\varepsilon}_{33}^0} \psi^{(2)}(c). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Dosazením (4.87) do (4.86a-d) získáme upravené okrajové podmínky

$$\begin{aligned} \sigma_3^{(0)} &= 2\bar{c}_{33}^0 v_{3,3}^{(0)} - \frac{2}{c} (\bar{c}_{33}^0 - \tilde{c}_{33}^0) v_3^{(0)} + \frac{2}{b} \tilde{c}_{23}^4 v_2^{(1)} - \bar{c}_{33}^3 v_{3,3}^{(2)} + \\ &+ \frac{1}{c} (\bar{c}_{33}^3 - \tilde{c}_{33}^3) v_3^{(2)} - \bar{e}_{33}^3 \psi_{,3}^{(2)} + \frac{1}{c} (\bar{e}_{33}^3 - \tilde{e}_{33}^3) \psi^{(2)} = -2\tilde{e}_{33}^0 \frac{\psi_0}{c}, \end{aligned} \quad (4.89a)$$

$$\sigma_4^{(1)} = c_{44}^{(1)} v_{2,3}^{(1)} + \frac{8}{3b} c_{44} v_3^{(2)} = 0, \quad (4.89b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_3^{(2)} &= -\bar{c}_{33}^3 v_{3,3}^{(0)} + \frac{1}{c} (\bar{c}_{33}^3 - \tilde{c}_{33}^3) v_3^{(0)} - \frac{2}{3b} \tilde{c}_{23}^5 v_2^{(1)} + \bar{c}_{33}^2 v_{3,3}^{(2)} - \\ &- \frac{1}{c} (\bar{c}_{33}^2 - \tilde{c}_{33}^2) v_3^{(2)} + \bar{e}_{33}^2 \psi_{,3}^{(2)} - \frac{1}{c} (\bar{e}_{33}^2 - \tilde{e}_{33}^2) \psi^{(2)} = \tilde{e}_{33}^5 \frac{\psi_0}{c}, \end{aligned} \quad (4.89c)$$

$$\begin{aligned} d_3^{(2)} &= -\bar{e}_{33}^3 v_{3,3}^{(0)} + \frac{1}{c} (\bar{e}_{33}^3 - \tilde{e}_{33}^3) v_3^{(0)} - \frac{2}{3b} \tilde{e}_{32}^4 v_2^{(1)} + \bar{e}_{33}^2 v_{3,3}^{(2)} - \\ &- \frac{1}{c} (\bar{e}_{33}^2 - \tilde{e}_{33}^2) v_3^{(2)} - \bar{\varepsilon}_{33}^2 \psi_{,3}^{(2)} + \frac{1}{c} (\bar{\varepsilon}_{33}^2 - \tilde{\varepsilon}_{33}^2) \psi^{(2)} = \tilde{\varepsilon}_{33}^3 \frac{\psi_0}{c}. \end{aligned} \quad (4.89d)$$

Úplné řešení vázaných kmitů je dáno lineární kombinací čtyřech dílčích stojatých vln

$$\begin{aligned} v_3^{(0)} &= \sum_{n=1}^4 \alpha_{1n} B_n \sin(\xi_n x_3) e^{j\omega t}, \\ v_2^{(1)} &= \sum_{n=1}^4 \alpha_{2n} B_n \cos(\xi_n x_3) e^{j\omega t}, \\ v_3^{(2)} &= \sum_{n=1}^4 \alpha_{3n} B_n \sin(\xi_n x_3) e^{j\omega t}, \\ \psi^{(2)} &= \sqrt{\frac{c_{44}}{\varepsilon_{33}}} \sum_{n=1}^4 \alpha_{4n} B_n \sin(\xi_n x_3) e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Dosadíme-li celkové řešení (4.90) do okrajových podmínek (4.89), získáme soustavu nehomogenních lineárních rovnic pro čtyři neznámé amplitudy B_n

$$\begin{pmatrix} M_{1n} \\ M_{2n} \\ M_{3n} \\ M_{4n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{\tilde{e}_{33}^0}{c_{44}} \frac{2}{\pi} \frac{b}{c} \psi_0 \\ 0 \\ \frac{\tilde{e}_{33}^5}{c_{44}} \frac{2}{\pi} \frac{b}{c} \psi_0 \\ \frac{\tilde{\varepsilon}_{33}^3}{c_{44}} \frac{2}{\pi} \frac{b}{c} \psi_0 \end{pmatrix}, \quad (4.91)$$

kde n -tý sloupec matice $\mathbf{M}$ má tvar

$$\begin{aligned}
M_{1n} &= \left[\hat{c}_{33}^0 \bar{\xi}_n \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) - \left(\frac{2b}{\pi c} \right) (\hat{c}_{33}^0 - \check{c}_{33}^0) \sin \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) \right] \alpha_{1n} + \\
&\quad + \frac{2}{\pi} \check{c}_{23}^4 \alpha_{2n} \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[\hat{c}_{33}^3 \bar{\xi}_n \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) - \left(\frac{2b}{\pi c} \right) (\hat{c}_{33}^3 - \check{c}_{33}^3) \sin \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) \right] - \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[\hat{e}_{33}^3 \bar{\xi}_n \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) - \left(\frac{2b}{\pi c} \right) (\hat{e}_{33}^3 - \check{e}_{33}^3) \sin \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) \right] \alpha_{4n}, \\
M_{2n} &= \left(\hat{c}_{44}^{(1)} \alpha_{2n} \bar{\xi}_n - \frac{16}{3\pi} \right) \sin \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right), \\
M_{3n} &= - \left[\hat{c}_{33}^3 \bar{\xi}_n \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) - \left(\frac{2b}{\pi c} \right) (\hat{c}_{33}^3 - \check{c}_{33}^3) \sin \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) \right] \alpha_{1n} - \\
&\quad - \frac{4}{3\pi} \check{c}_{23}^5 \alpha_{2n} \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) + \\
&\quad + \left[\hat{c}_{33}^2 \bar{\xi}_n \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) - \left(\frac{2b}{\pi c} \right) (\hat{c}_{33}^2 - \check{c}_{33}^2) \sin \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) \right] + \\
&\quad + \left[\hat{e}_{33}^2 \bar{\xi}_n \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) - \left(\frac{2b}{\pi c} \right) (\hat{e}_{33}^2 - \check{e}_{33}^2) \sin \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) \right] \alpha_{4n}, \\
M_{4n} &= - \left[\hat{e}_{33}^3 \bar{\xi}_n \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) - \left(\frac{2b}{\pi c} \right) (\hat{e}_{33}^3 - \check{e}_{33}^3) \sin \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) \right] \alpha_{1n} + \\
&\quad - \frac{4}{3\pi} \check{e}_{32}^4 \alpha_{2n} \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) + \\
&\quad + \left[\hat{e}_{33}^2 \bar{\xi}_n \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) - \left(\frac{2b}{\pi c} \right) (\hat{e}_{33}^2 - \check{e}_{33}^2) \sin \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) \right] - \\
&\quad - \left[\hat{e}_{33}^3 \bar{\xi}_n \cos \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) - \left(\frac{2b}{\pi c} \right) (\hat{e}_{33}^3 - \check{e}_{33}^3) \sin \left(\bar{\xi}_n \frac{\pi c}{2b} \right) \right] \alpha_{4n}
\end{aligned} \tag{4.92}$$

a poměrná relativní permitivita je

$$\check{\epsilon}_{33}^2 = \frac{\check{\epsilon}_{33}^2}{\epsilon_{33}}. \tag{4.93}$$

V případě rezonance je determinant matice okrajových podmínek $\mathbf{M}$ nulový a symbolická závislost

$$M \left(\Omega, \frac{c}{b} \right) = 0 \tag{4.94}$$

představuje frekvenční rovnici, jejíž kořeny určují vlastní poměrnou frekvenci Ω jako funkci poměru rozměrů c/b rezonátoru.

Rovnice (4.84) a (4.94) opět tvoří úplný systém vztahů pro popis vázaných kmitů podélně polarizovaných keramických rezonátorů.

5 Frekvenční spektrum vázaných kmitů

Teoretický popis vázaných kmitů odvozený v předchozí kapitole je použit pro výpočet frekvenčních spekter rezonátorů z piezoelektrické PZT keramiky APC 841 a APC 856 výrobce APC International, Ltd. APC 841 představuje „tvrdou“ (hard) keramiku, která má obecně vysoký činitel mechanické jakosti a je přednostně určena pro použití v rezonátorech a výkonových aplikacích. Většina následujících výpočtů a analýz je proto provedena pro tento materiál. „Měkká“ (soft) keramika APC 856 má mechanický činitel jakosti nízký a není příliš vhodná pro rezonanční aplikace. Výsledná frekvenční spektra pro rezonátory z APC 856 jsou uvedena pouze pro doplnění. Materiálové konstanty použité k výpočtu jsou uvedeny v tab. A.1 [43] a tab. A.2 [44] v příloze A.

Frekvenční spektrum vázaných kmitů podélně polarizovaných piezoelektrických rezonátorů získáme současným řešením aproximačních rovnic (4.49) a (4.57), získaných rozvinutím veličin ve směru šířky do řady trigonometrických funkcí, nebo rovnic (4.84) a (4.94), odvozených metodou průměrování veličin přes tloušťkovou souřadnici pásku. Abychom odlišili výsledky určené jednotlivými způsoby výpočtu, označíme hodnoty frekvencí vypočtených z rovnic (4.49) a (4.57) indexem A , hodnoty získané řešením rovnic (4.84) a (4.94) pak indexem B . Poměrná frekvence popsaná vztahem (4.45) je pro jednotlivé metody definována odlišně, v prvním případě označuje proměnná $2b$ tloušťku, ve druhém případě šířku pásku.

5.1 Experimentální hodnoty

Vypočtené frekvenční spektrum páskových rezonátorů je dále porovnáno s naměřenými hodnotami rezonančních frekvencí [45]. Pro určení experimentálních hodnot byly použity vzorky podélně polarizovaných páskových rezonátorů z APC 841 a APC 856 o původní délce 14 mm, tloušťce 1 mm a šířce 7 mm. Na plochách kolmých k délce pásku byly naneseny elektrody opatřené drátkovými přívody. Hmotnost ani kapacita elektrod vzorku nebyly stanoveny. V průběhu měření byly pásky postupně broušením zužovány po několika desetinách mm.

Pro každý rozměr vzorku bylo pomocí impedančního analyzátoru HP 4192 stanoveno spektrum jeho rezonančních frekvencí při budičím napětí 1 V v souladu s normou [46]. Z naměřené frekvenční závislosti impedance byly odečteny hodnoty rezonanční frekvence odpovídající nulové fázi impedance, v případě silně tlumených kmitů pak frekvence odpovídající minimální hodnotě impedance. Naměřené hodnoty pro oba materiály jsou shrnuty v tab. B.1 a B.2 v příloze B. Sloupce v tabulkách přísluší odpovídajícím si módům kmitů. Vzhledem k nízkému činiteli jakosti samotného rezonátoru byly některé kmity silně zatlumeny a indentifikace módů ve spektru byla obtížná. Řadu kmitů se nepodařilo vybudit vůbec, zejména v případě rezonátorů z keramiky APC 856. Velké tlumení se projevuje zejména u nejvyšších měřených módů.

Vzorky použité v této práci pro experimentální ověření teoretických vztahů jsou ze stejné výrobní série jako vzorky, které byly použity při měření materiálových konstant [43], [44]. Tím je zaručena co největší shoda vypočtených a naměřených hodnot.

5.2 Výpočet frekvenčních křivek

Požadovaným výsledkem řešení vázaných kmitů je obvykle závislost rezonanční frekvence rezonátoru na velikosti jeho rozměrů. Graficky je pak výsledek vyjádřen ve formě *frekvenčních křivek*, které zobrazují závislost poměrné frekvence Ω na poměru vybraných rozměrů rezonátoru.

Postup stanovení frekvenčních křivek spočívá v hledání hodnot poměrných frekvencí Ω ze zvoleného intervalu, které vyhovují současně oběma soustavám rovnic (4.49) a (4.57), resp. (4.84) a (4.94). Vzhledem k odlišné definici Ω je analyzovaný interval frekvence pro obě metody jednorozměrné aproximace různý. Výpočet se opakuje s vhodným krokem v požadovaném rozmezí poměrů rozměrů rezonátorů.

V případě použití rovnic (4.84) a (4.94) nezávisí výpočet na tloušťce pásku a výsledkem řešení je závislost poměrné frekvence na poměru délky a šířky rezonátoru. Soustava rovnic (4.49) a (4.57) závisí na všech rozměrech pásku, a proto je při výpočtu nutné volit jeden z poměrů tloušťky k šířce nebo délky k tloušťce jako pevný. V našem případě volíme vzhledem k velikosti měřených vzorků konstantní poměr délky a tloušťky pásku 14/1 a měníme hodnoty poměru tloušťky k šířce, resp. délky k šířce.

5.2.1 Disperzní křivky nekonečného pásku

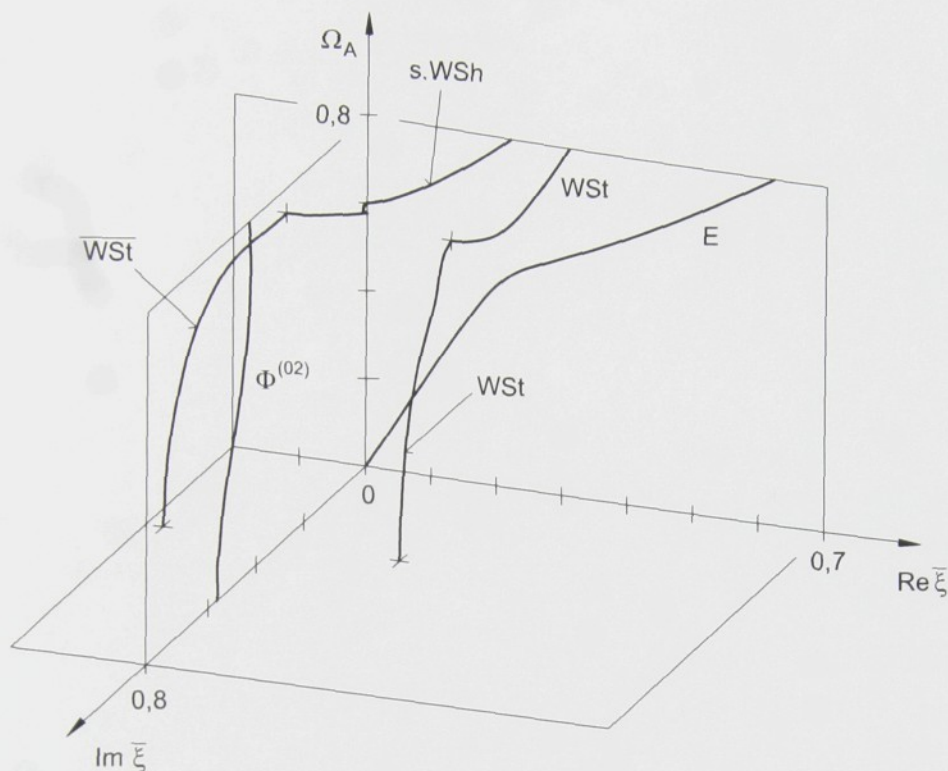
Řešením disperzních vztahů (4.49), resp. (4.84) získáme pro danou hodnotu Ω čtyři vlnová čísla $\bar{\xi}_n$, odpovídající jednotlivým módům kmitů nekonečně dlouhého páskového rezonátoru. Výsledek řešení je graficky zobrazen ve tvaru disperzních křivek na obr. 5.1 a 5.2. Rovnice (4.49) je funkcí poměru tloušťky a šířky, a proto je závislost vlnových čísel na frekvenci různá pro různé hodnoty tohoto poměru. Rovnice (4.84) na rozměrech nezávisí a disperzní závislost je stejná v celém intervalu poměrů délky a šířky. Charakter disperzních křivek je stejný pro oba způsoby výpočtu, a proto je můžeme popisovat současně.

Obr. 5.1 a 5.2 obsahují čtyři disperzní křivky, náležící jednotlivým módům kmitu. Označeny jsou písmeny souvisejícími s jejich anglickým pojmenováním - podélný mód E (extensional), šířkově rozpínavý mód WSt (width-stretch) a symetrický šířkově střížný mód s.WSh (width-shear). Křivka Φ představuje mód příslušející elektrickému poli. Protože je závisle proměnnou disperzních vztahů druhá mocnina vlnového čísla $(\bar{\xi}_n)^2$, mají tyto rovnice také další řešení, která získáme zrcadlením disperzních křivek podle rovin $\text{Re } \bar{\xi} = 0$ a $\text{Im } \bar{\xi} = 0$.

Disperzní rovnice popisují aproximaci druhého řádu a jejich řešením jsou reálné, ryze imaginární nebo komplexně sdružené hodnoty vlnových čísel $\bar{\xi}_n$ [39]. Tomu odpovídají reálné, ryze imaginární a komplexní větve disperzních křivek. Z průběhu disperzních křivek můžeme určit charakter módů při zvolené frekvenci kmitání. Hodnotu normalizované fázové rychlosti $\Omega/\bar{\xi}_n$ příslušné vlny při dané frekvenci odečteme ze směrnice přímky, spojující odpovídající bod na křivce s počátkem grafu.

Identifikaci disperzních křivek můžeme provést porovnáním mezních frekvencí módů při nulovém vlnovém čísle $\bar{\xi}$. Mezní frekvence odpovídají frekvencím prostých šířkových kmitů nekonečně dlouhého tenkého pásku, uvedeného v kap. 2.4. Vyjdeme přitom z obr. 5.2, který popisuje šíření kmitů pásku orientovaného podle obr. 2.5.

Nejnižší podélný mód (E), představující 0. šířkově střížný mód nekonečně dlouhého pásku, nemá mezní frekvenci a jeho disperzní křivka vychází z počátku. Vlnové číslo podélného kmitu je pro všechny frekvence reálné a vzhledem k ostatním módům postupuje



Obr. 5.1: Disperzní křivky podélných (E), šířkově rozpínavých (WSt) a symetrických šířkově střižných (s.WSh) módů nekonečného pásku z APC 841 s poměrem tloušťky a šířky 1/3,5

páskem nejpomalejší rychlostí.

Mezní frekvencí šířkově rozpínavého kmitu (WSt) je frekvence prostého šířkově rozpínavého módu 1. řádu, mezní frekvenci symetrického šířkově střižného kmitu (s.WSh) pak frekvence prostého šířkově střižného módu 2. řádu. Jejich hodnoty získáme řešením rovnic (2.4) při zahrnutí podmínek

$$\begin{aligned} T_2 = T_4 = D_2 = 0 & \quad \text{pro } x_2 = \pm b, \\ T_1 = T_5 = T_6 = D_1 = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Prosté šířkové kmity závisí pouze na šířkové souřadnici a uvažujeme je ve tvaru stojatých vln, jejichž posunutí jsou symetrická vůči střední rovině pásku ($x_1 x_3$)

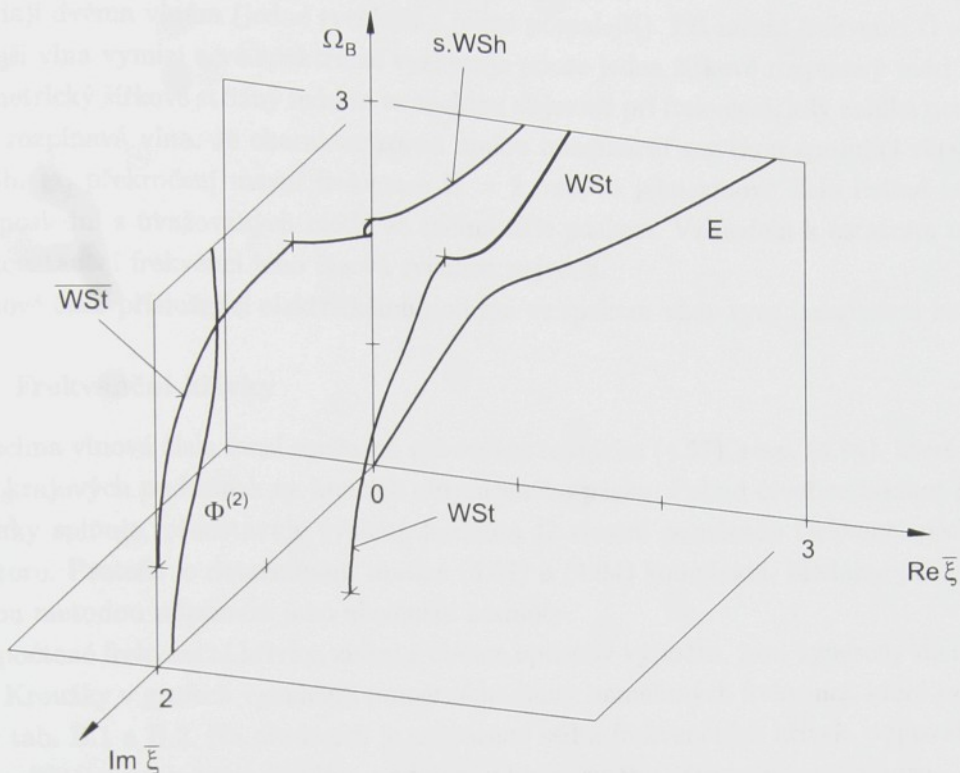
$$\begin{aligned} u_2 &= A_2 \sin(\zeta_2 x_2) e^{j\omega t} & \text{pro symetrickou šířkově rozpínavou vlnu,} \\ u_3 &= A_3 \cos(\zeta_3 x_2) e^{j\omega t} & \text{pro symetrickou šířkově střižnou vlnu.} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dosazením řešení (5.2) do rovnic (2.4) získáme při zavedení podmínek (5.1) frekvenci prostých symetrických šířkově střižných kmitů pásku

$$\omega = \frac{m\pi}{2b} \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}, \quad m \text{ sudé} \quad (5.3)$$

a frekvenci prostých symetrických šířkově rozpínavých kmitů

$$\omega = \frac{n\pi}{2b} \sqrt{\frac{c_{11}^P}{\rho}}, \quad n \text{ liché}, \quad (5.4)$$



Obr. 5.2: Disperzní křivky podélných (E), šířkově rozpínavých (WSt) a symetrických šířkově střížných (s.WSh) módů nekonečného pásku z APC 841

kde

$$c_{11}^P = c_{11} - \frac{(c_{12})^2}{c_{11}}. \quad (5.5)$$

V bezrozměrném tvaru vyjádříme mezní frekvenci symetrického šířkově střížného módu (s.WSh, $m = 2$) pomocí (4.45) jako

$$\Omega = 2 \quad (5.6)$$

a mezní frekvenci základního šířkově rozpínavého kmitu (WSt, $n = 1$) hodnotou

$$\Omega = \sqrt{\frac{c_{11}^P}{c_{44}}}. \quad (5.7)$$

Pro piezoelektrickou keramiku APC 841 je $\sqrt{\frac{c_{11}^P}{c_{44}}} = 1,92$ a mezní frekvence základního šířkově rozpínavého kmitu je nižší než v případě šířkově střížného kmitu druhého řádu. Stejný výsledek platí i pro APC 856.

Vlnové číslo šířkově rozpínavých kmitů je pro nízké frekvence komplexní a ve spektru je mód zastoupen dvěma komplexně sdruženými větvemi [47] WSt a $\overline{\text{WSt}}$. V této frekvenční oblasti je šířkově rozpínavý mód tlumený. Frekvence, při které imaginární složka vlnového čísla nabývá nulové hodnoty, je mezní frekvencí šíření těchto kmitů při nenulovém vlnovém

čísle $\bar{\xi}$. Po jejím překročení je mód charakterizován dvěma reálnými vlnovými čísly, která odpovídají dvěma vlnám (jedné rychlejší a jedné pomalejší). Při mezní frekvenci $\Omega = \sqrt{\frac{c_{11}^P}{c_{44}}}$ pomalejší vlna vymizí a ve spektru se vyskytuje pouze jeden šířkově rozpínavý mód kmitu.

Symetrický šířkově střížný mód se ve spektru objevuje při frekvenci, kdy zaniká pomalejší šířkově rozpínavá vlna. Je charakterizován malou imaginární smyčkou spojující větve $\overline{WSt}$ a $s.WSh$. Po překročení mezní frekvence $\Omega = 2$ nabývá jeho vlnové číslo reálné hodnoty a jako poslední z uvažovaných módů se začíná šířit páskem. Vzhledem k ostatním módům je při konstantní frekvenci jeho fázová rychlost největší.

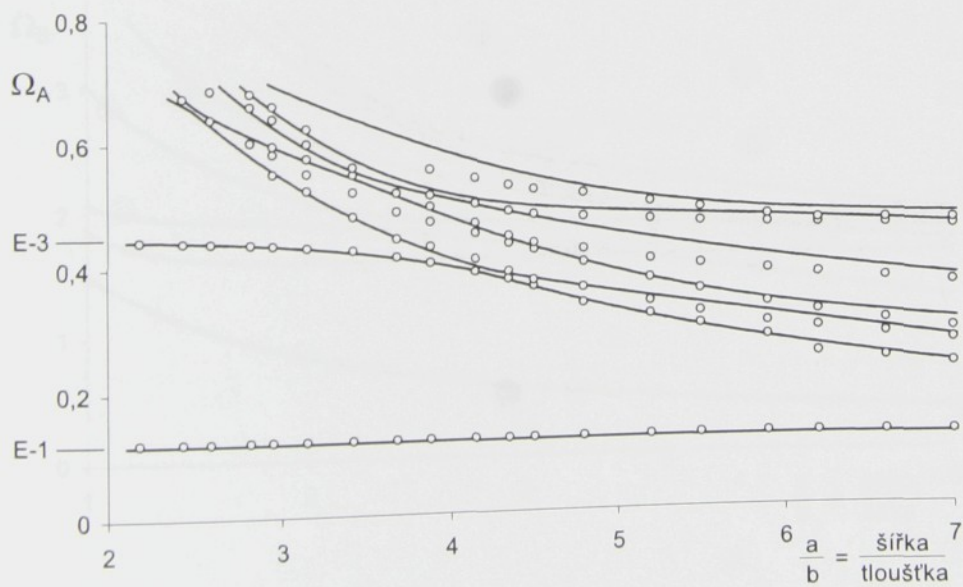
Vlnové číslo příslušející elektrickému poli má ve spektru vždy ryze imaginární hodnotu.

5.2.2 Frekvenční křivky

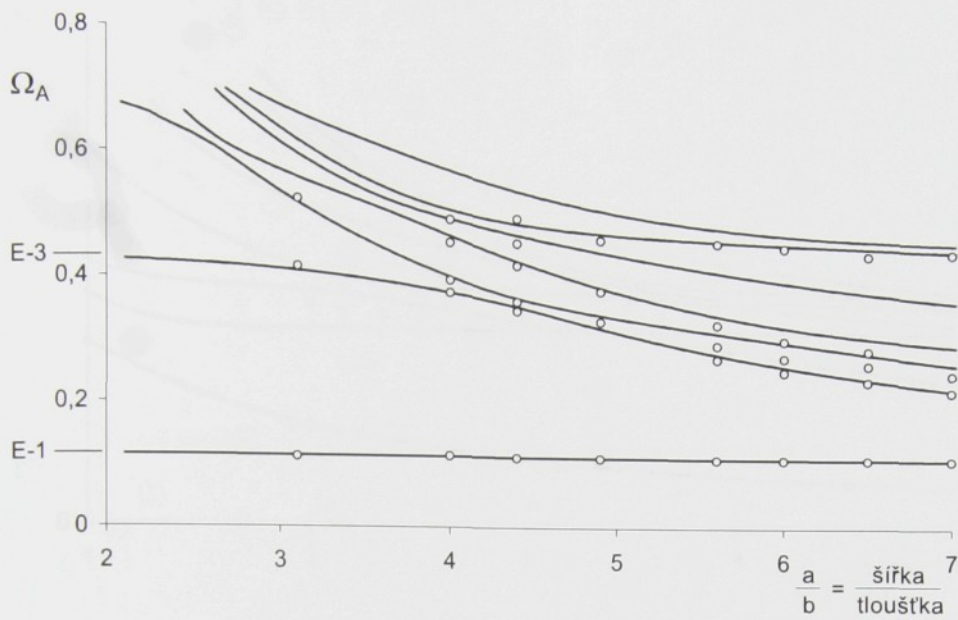
Všechna vlnová čísla musí současně vyhovovat rovnicím (4.57), resp. (4.94), které vyplývají z okrajových podmínek na koncích ohraničeného pásku. Pokud čtveřice hodnot $\bar{\xi}_n$ tyto podmínky splňuje, představuje zvolená hodnota Ω vlastní poměrnou frekvenci páskového rezonátoru. Protože je determinant matice (4.57) a (4.94) komplexní, hledáme při výpočtu vhodnou metodou minimum jeho absolutní hodnoty.

Vypočtené frekvenční křivky, získané oběma způsoby výpočtu, jsou vyneseny na obr. 5.3 až 5.6. Kroužky v grafech vyznačují poměrné hodnoty naměřených frekvencí, které jsou uvedeny v tab. B.1 a B.2. Na obrázcích je zobrazeno sedm frekvenčních křivek, odpovídajících sedmi nejnižším roztažným módům podélně polarizovaného páskového rezonátoru.

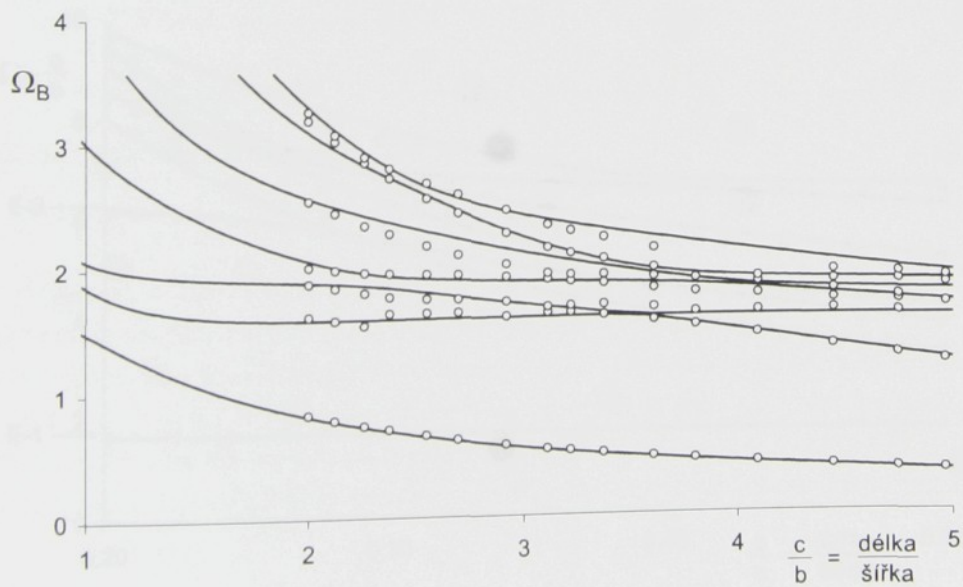
Stejně vypočtené a naměřené hodnoty jsou dále vyneseny v obr. 5.7 a 5.8 v souřadných jednotkách b/c a $\Omega_B c/b$, které jsou užívány v některých publikacích [21].



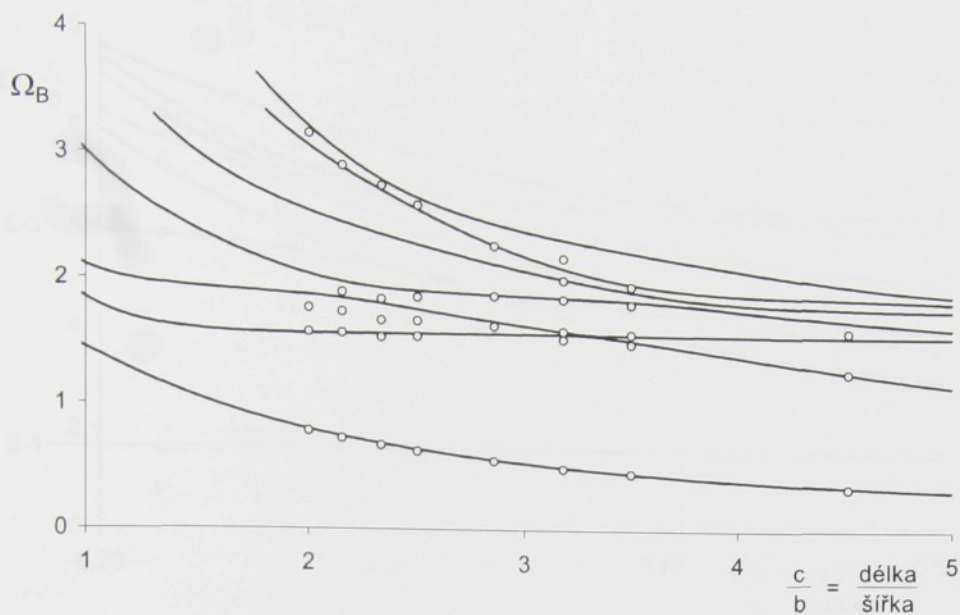
Obr. 5.3: Porovnání vypočtených a naměřených hodnot rezonančních frekvencí vázaných kmitů páskových rezonátorů z APC 841 s poměrem délky a tloušťky 14/1



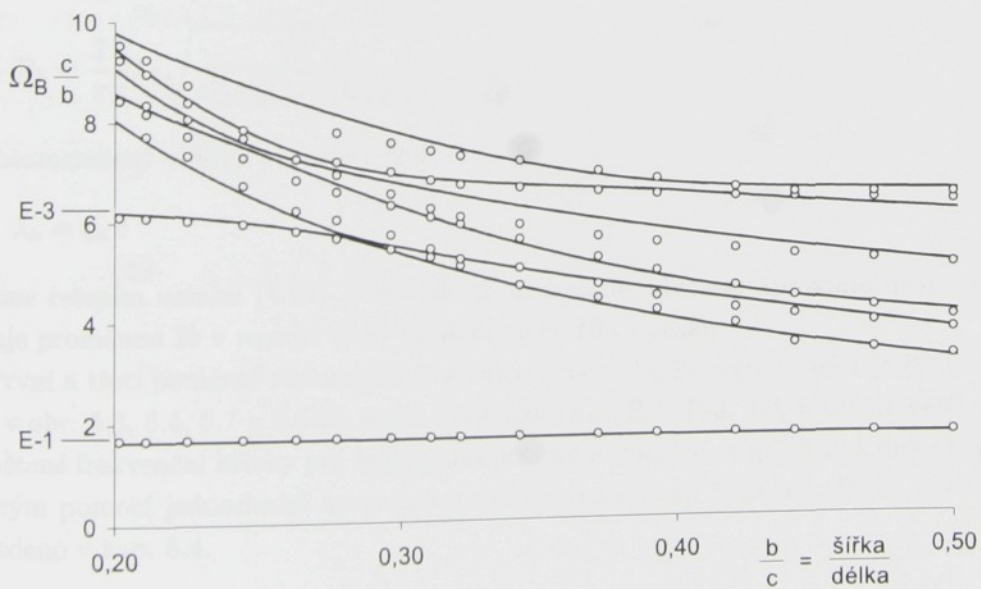
Obr. 5.4: Porovnání vypočtených a naměřených hodnot rezonančních frekvencí vázaných kmitů páskových rezonátorů z APC 856 s poměrem délky a tloušťky 14/1



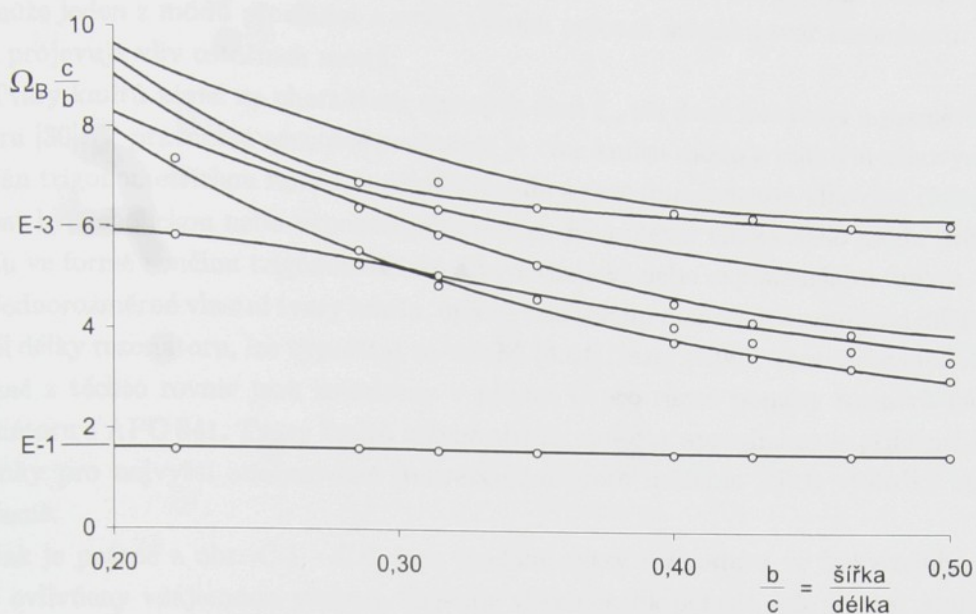
Obr. 5.5: Porovnání vypočtených a naměřených hodnot rezonančních frekvencí vázaných kmitů páskových rezonátorů z APC 841



Obr. 5.6: Porovnání vypočtených a naměřených hodnot rezonančních frekvencí vázaných kmitů páskových rezonátorů z APC 856



Obr. 5.7: Porovnání vypočtených a naměřených hodnot rezonančních frekvencí vázaných kmitů páskových rezonátorů z APC 841



Obr. 5.8: Porovnání vypočtených a naměřených hodnot rezonančních frekvencí vázaných kmitů páskových rezonátorů z APC 856

Rovnici definující vlastní frekvenci podélných kmitů tenké dlouhé tyčinky (4.10) můžeme s pomocí vztahu (4.45) vyjádřit v bezrozměrném tvaru

$$\Omega_h = \frac{2b}{\pi c} \lambda_h \sqrt{\frac{1}{c_{44}^E s_{33}^E (1 - (k_{33})^2)}}, \quad (5.8)$$

kde bezrozměrný vlnový parametr [20]

$$\lambda_h = \xi_h c \quad (5.9)$$

získáme řešením vztahu (4.21). V závislosti na metodě odvození aproximačních rovnic vyjadřuje proměnná $2b$ v rovnici (5.8) tloušťku nebo šířku pásu.

První a třetí poměrné rezonanční frekvence tenké tyčinky, vypočtené z (5.8), jsou vynešeny v obr. 5.3, 5.4, 5.7 a 5.8 na svislé ose a označeny E-1, E-3. Jak můžeme vidět, blíží se vypočtené frekvenční křivky pro malé poměry šířky k tloušťce, resp. šířky k délce hodnotám určeným pomocí jednoduché aproximace rezonátoru tenkou tyčinkou. Bližší porovnání je provedeno v kap. 5.4.

5.3 Vlastní tvary kmitů

Pojmem vlastní (modální) tvar kmitu označujeme poměrné výchylky všech bodů tělesa kmitajícího při rezonanční frekvenci [48]. U ohraničeného tělesa kmitajícího vázanými kmity kmitajícího při rezonanční frekvenci [48]. U ohraničeného tělesa kmitajícího jako celku. Modální tvar je nutné rozlišovat tvar kmitu *jednotlivého módu* a tvar kmitu *tělesa* jako celku. Modální tvar tělesa je dán kombinací tvarů kmitu všech jednotlivých módů. V našem případě rezonátoru se třemi stupni volnosti je tvar kmitu určen součtem tvarů tří uvažovaných módů (podélného,

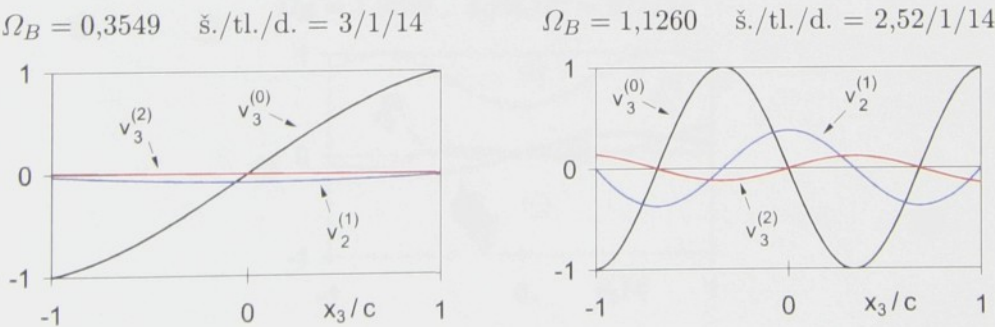
tloušťkově rozpínavého a symetrického tloušťkově střížného), které jsou všechny dále vázány s módem elektrického pole. Tvar kmitu tělesa je obecně složitý, při určitém poměru rozměrů ale může jeden z módů převládat a svým tvarem určovat modální tvar rezonátoru. Vždy se však projevuje vliv ostatních módů.

Tvary kmitů závisí na charakteru vlnových čísel $\bar{\xi}_n$ při dané frekvenci a rozměrech rezonátoru [39]. V pravoúhlé soustavě souřadnic je tvar kmitu módu s reálným vlnovým číslem popsán trigonometrickou funkcí, v případě módu s ryze imaginárním vlnovým číslem jej lze popsat hyperbolicou nebo exponenciální funkcí. Komplexní vlnové číslo módu určuje tvar kmitu ve formě součinu trigonometrické a hyperbolické nebo exponenciální funkce.

Jednorozměrné vlastní tvary kmitu, určené rozložením poměrných amplitud dílčích módů podél délky rezonátoru, lze vypočítat ze vztahů (4.44), resp. (4.90). Teoretické modální tvary získané z těchto rovnic jsou zobrazeny v příloze C pro různé poměry rozměrů páskového rezonátoru z APC 841. Tvary kmitů určené oběma způsoby aproximace se příliš neliší (až na výjimky pro nejvyšší analyzované frekvence), a proto můžeme jejich výsledky zpracovat současně.

Jak je patrné z obr. C.1 - C.6, jsou modální tvary rezonátoru ve frekvenčním spektru silně ovlivněny vzájemnou vazbou. Existuje však několik oblastí, kde je tvar kmitu určen jedním dominantním módem. V analyzované frekvenčním intervalu se objevují módy převážně podélné E- n (obr. 5.9), hranové (edge) Eg- n (obr. 5.11) a základní šířkově rozpínavé WSt (obr. 5.12). Úseky frekvenčních křivek s těmito dominantními kmitu jsou přibližně vyznačeny šipkami na obr. 5.13 a 5.14, kde číslo n u písmenného označení módu označuje jeho řád.

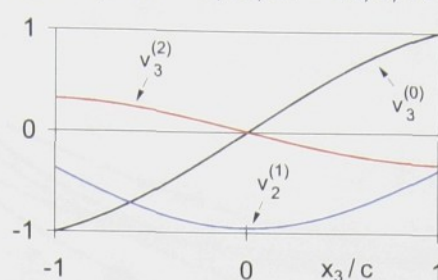
Nejnižší kmitu rezonátorů v námi uvažované oblasti jsou vždy převážně podélné E-1, s rostoucí šířkou mírně roste vazba s ostatními módy kmitů. V případě čtvercového pásku (šířka je rovna délce) je základní podélný kmit silně vázán se základním šířkově rozpínavým kmitem (viz obr. 5.10) a výsledná deformace odpovídá obrysovým kmitům destičky [10]. Převážně podélné kmitu třetího řádu se ve spektru objevují při malých hodnotách šířky, kdy se tvar pásku blíží případu tenké tyčinky, a také pro větší poměry šířky a délky (přibližně větší než 1/2).



Obr. 5.9: Tvary kmitů převážně podélných módů E-1, E-3 páskových rezonátorů z APC 841

Dalším dominantním tvarem kmitu jsou hranové (edge) módy [49], jejichž největší deformace je soustředěna na okrajích (hranách) pásku (viz obr. 5.11). Exponenciální útlum výchylek směrem ke středu pásku spojený s harmonickými oscilacemi je důsledkem komplexního charakteru vlnového čísla šířkově rozpínavého módu [47]. Hranové módy mají sudý

$$\Omega_B = 1,4954 \quad \text{š./tl./d.} = 14/1/14$$

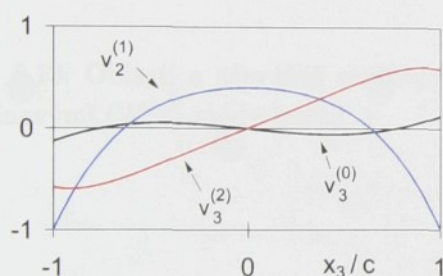


Obr. 5.10: Tvar kmitu obrysového módu páskových rezonátorů z APC 841

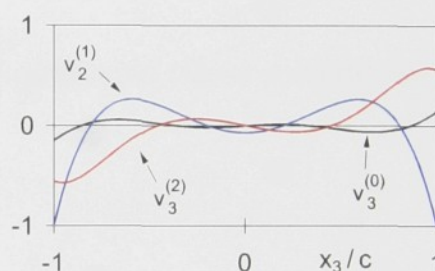
počet uzlových bodů.

Poslední z významných modálních tvarů je určen základním šířkově rozpínavým módem kmitu (obr. 5.12). Zde převládá rovnoměrná výchylka ve směru kolmém na délku tyčinky bez uzlového bodu.

$$\Omega_B = 1,5906 \quad \text{š./tl./d.} = 6/1/14$$

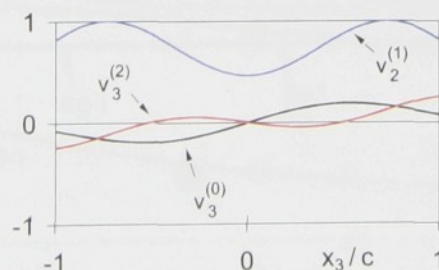


$$\Omega_B = 1,6082 \quad \text{š./tl./d.} = 3/1/14$$



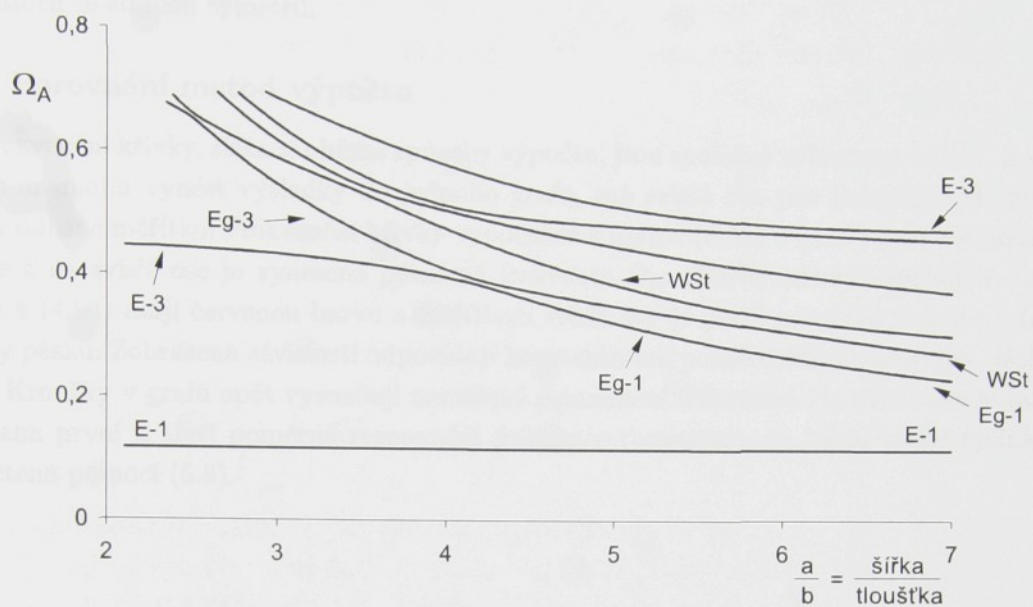
Obr. 5.11: Tvary kmitů převážně hranových módů Eg-1, Eg-3 páskových rezonátorů z APC 841

$$\Omega_B = 1,9049 \quad \text{š./tl./d.} = 8/1/14$$

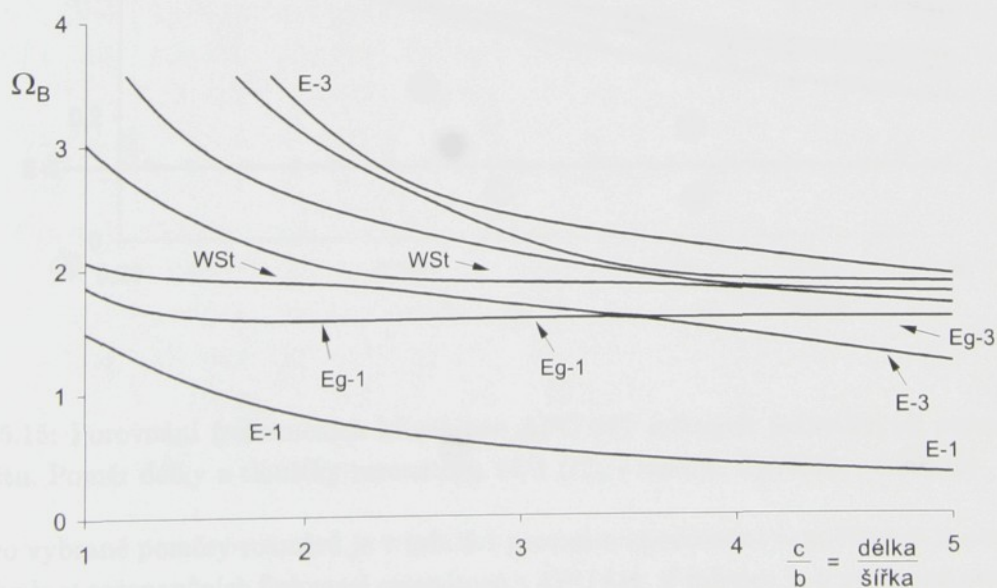


Obr. 5.12: Tvar kmitu převážně základního šířkově rozpínavého módu WSt páskových rezonátorů z APC 841

Jak je zřejmé např. z obr. 5.13, mění se s rostoucí šířkou původně převážně podélné tvary kmitu vlivem vazby s ostatními módy na složitější tvar. Zároveň se ve spektru snižuje odstup sousedních rezonančních frekvencí.



Obr. 5.13: Oblasti s převážně podélnými (E- n), hranovými (Eg- n) a základními šířkově rozpínavými (WSt) módy kmitů

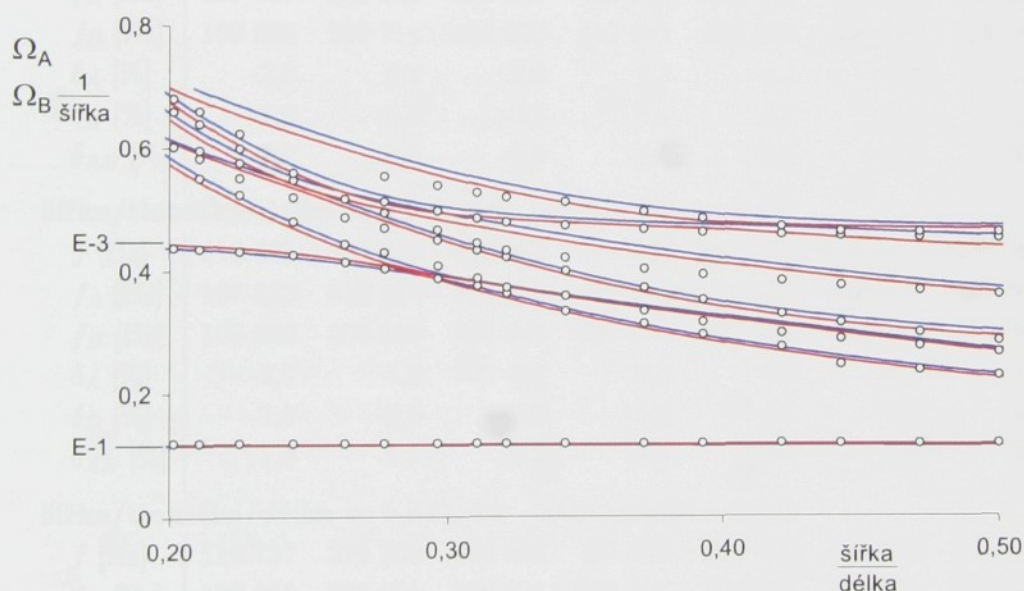


Obr. 5.14: Oblasti s převážně podélnými (E- n), hranovými (Eg- n) a základními šířkově rozpínavými (WSt) módy kmitů

Uvedené dominantní tvary kmitů a jejich poloha ve frekvenčním spektru byly dříve publikovány Leem et al. [25] také pro případ roztažných kmitů příčně polarizovaných páskových rezonátorů se stejnou symetrií.

5.4 Porovnání metod výpočtu

Frekvenční křivky, získané oběma způsoby výpočtu, jsou společně zobrazeny na obr. 5.15. Abychom mohli vynést výsledky do jednoho grafu, má svislá osa pro jednotlivé skupiny křivek odlišné měřítko. Frekvenční křivky vypočtené z rovnic (4.49) a (4.57) jsou zobrazeny modře a na svislé ose je vynesena poměrná frekvence Ω_A . Křivky určené řešením rovnic (4.84) a (4.94) mají červenou barvu a měřítkem svislé osy je podíl poměrné frekvence Ω_B a šířky pásku. Zobrazené závislosti odpovídají konstantnímu poměru délky a tloušťky pásku 14/1. Kroužky v grafu opět vyznačují naměřené rezonanční frekvence. Na svislé ose je také vynesena první a třetí poměrná rezonanční frekvence rezonátoru ve tvaru tenké tyčinky, vypočtená pomocí (5.8).



Obr. 5.15: Porovnání frekvenčních křivek pro APC 841 určených jednotlivými metodami výpočtu. Poměr délky a tloušťky rezonátoru 14/1 (Ω_A - modrá, Ω_B /šířka - červená)

Pro vybrané poměry rozměrů je v tab. 5.1 provedeno porovnání vypočtených a naměřených hodnot rezonančních frekvencí rezonátorů z APC 841. V tabulce jsou postupně uvedeny následující hodnoty: naměřená frekvence f , vypočtené frekvence f_A a f_B , poměrné odchylky naměřené a vypočtené hodnoty δ_A a δ_B a poměrná odchylka hodnot vypočtených jednotlivými metodami δ_{AB} . Údaje tabulky ještě doplníme hodnotami první a třetí rezonanční frekvence tenké tyčinky, vypočtenými ze vztahu (4.10): $f_1 = 107\,785$ Hz, $f_3 = 412\,855$ Hz.

Maximální rozdíl ekvivalentních frekvencí f_A a f_B je v uvedeném rozmezí rozměrů necelá 4 %, obvyklá odchylka se pak pohybuje v oblasti 1-2 %. Obecně lze konstatovat, že tento

šířka/tloušťka/délka = 2,95/1/14 (šířka/délka = 0,21)									
f [Hz]	111 118	402 200	508 900	538 600	550 200	590 800	609 500		
f_A [Hz]	108 086	401 516	513 201	550 122	579 659	604 858	640 763		
f_B [Hz]	109 198	407 101	503 189	545 930	568 739	593 927	626 029		
δ_A [%]	-2,7	-0,2	0,8	2,1	5,4	2,4	5,1		
δ_B [%]	-1,7	1,2	-1,1	1,4	3,4	0,5	2,7		
δ_{AB} [%]	1,0	1,4	-2,0	-0,8	-1,9	-1,8	-2,3		
šířka/tloušťka/délka = 3,42/1/14 (šířka/délka = 0,24)									
f [Hz]	110 919	393 600	443 700	480 300	506 100	517 100			
f_A [Hz]	107 994	390 162	443 052	501 387	512 186	529 724			
f_B [Hz]	109 144	396 199	434 145	494 736	500 646	518 108			
δ_A [%]	-2,6	-0,9	-0,1	4,4	1,2	2,4			
δ_B [%]	-1,6	0,7	-2,2	3,0	-1,1	0,2			
δ_{AB} [%]	1,1	1,5	-2,0	-1,3	-2,3	-2,2			
šířka/tloušťka/délka = 4,15/1/14 (šířka/délka = 0,30)									
f [Hz]	110 777	358 900	378 100	416 600	431 900	460 900	499 200		
f_A [Hz]	107 717	359 333	367 087	426 068	459 481	468 342	525 662		
f_B [Hz]	109 006	357 711	363 938	419 097	448 056	458 465	515 181		
δ_A [%]	-2,8	0,1	-2,9	2,3	6,4	1,6	5,3		
δ_B [%]	-1,6	-0,3	-3,7	0,6	3,7	-0,5	3,2		
δ_{AB} [%]	1,2	-0,5	-0,9	-1,6	-2,5	-2,1	-2,0		
šířka/tloušťka/délka = 4,8/1/14 (šířka/délka = 0,34)									
f [Hz]	110 525	309 600	332 800	371 000	390 600	439 700	475 200		
f_A [Hz]	107 532	313 274	334 227	372 163	425 330	450 528	485 695		
f_B [Hz]	108 840	308 098	331 943	365 018	414 996	443 494	473 665		
δ_A [%]	-2,7	1,2	0,4	0,3	8,9	2,5	2,2		
δ_B [%]	-1,5	-0,5	-0,3	-1,6	6,2	0,9	-0,3		
δ_{AB} [%]	1,2	-1,7	-0,7	-1,9	-2,4	-1,6	-2,5		
šířka/tloušťka/délka = 5,5/1/14 (šířka/délka = 0,39)									
f [Hz]	110 737	275 200	294 000	327 900	366 200	430 200	451 100		
f_A [Hz]	107 255	272 661	306 721	329 427	394 777	441 575	459 389		
f_B [Hz]	108 632	267 660	303 239	321 716	385 891	434 761	446 559		
δ_A [%]	-3,1	-0,9	4,3	0,5	7,8	2,6	1,8		
δ_B [%]	-1,9	-2,7	3,1	-1,9	5,4	1,1	-1,0		
δ_{AB} [%]	1,3	-1,8	-1,1	-2,3	-2,3	-1,5	-2,8		

Tab. 5.1: Porovnání vypočtených a naměřených rezonančních frekvencí páskových rezonátorů z APC 841

rozdíl je největší pro vyšší frekvenční křivky a roste také se šířkou pásku. Výsledky obou metod se pro malé poměry šířky k tloušťce blíží hodnotám určeným rovnicí (4.10). Teoretická rezonanční frekvence nejnižšího podélného kmitu v analyzované oblasti téměř nezávisí na poměru šířky a délky, s rostoucí šířkou její velikost mírně klesá. Odchylka hodnot f_A a f_B od frekvence f_1 se pohybuje okolo 1 %, přičemž pro velmi malé šířky je hodnotě f_1

šířka/tloušťka/délka = 6,2/1/14 (šířka/délka = 0,44)

f [Hz]	110 171	229 600	268 600	293 100	349 400	425 000	431 500
f_A [Hz]	106 979	241 555	280 969	301 090	369 579	434 283	446 005
f_B [Hz]	108 396	236 607	277 413	292 539	361 349	421 539	438 139
δ_A [%]	-2,9	5,2	4,6	2,7	5,8	2,2	3,4
δ_B [%]	-1,6	3,1	3,3	-0,2	3,4	-0,8	1,5
δ_{AB} [%]	1,3	-2,0	-1,3	-2,8	-2,2	-2,9	-1,8

šířka/tloušťka/délka = 7/1/14 (šířka/délka = 0,50)

f [Hz]	109 776	212 800	248 000	265 500	335 800	421 000	430 200
f_A [Hz]	106 517	214 326	252 909	280 784	346 872	425 145	440 375
f_B [Hz]	108 047	209 302	249 045	272 371	338 592	408 887	435 443
δ_A [%]	-3,0	0,7	2,0	5,8	3,3	1,0	2,4
δ_B [%]	-1,6	-1,6	0,4	2,6	0,8	-2,9	1,2
δ_{AB} [%]	1,4	-2,3	-1,5	-3,0	-2,4	-3,8	-1,1

Tab. 5.1 (pokračování): Porovnání vypočtených a naměřených rezonančních frekvencí páskových rezonátorů z APC 841

bližší hodnota f_A .

Rozdíly mezi naměřenými rezonančními frekvencemi a vypočtenými hodnotami f_A , f_B jsou také v řádu jednoho procenta. Největší odchylka se projevuje u módů příslušejících páté frekvenční křivce. V převážné většině případů jsou naměřené vlastní frekvence lépe popsány teoretickými hodnotami f_B .

Z porovnání teoretických a naměřených frekvencí nelze jednoznačně určit, který způsob výpočtu přesněji aproximuje frekvenční spektrum skutečného rezonátoru. Módy kmitu jsou obvykle zatíženy tlumením, zatímco teoretické výpočty předpokládají ideální případ beze-ztrátové lineární rezonance. Vliv na rezonanční frekvenci má také hmota elektrod rezonátoru a jejich kapacita. Elektroda představuje kondenzátor připojený v sérii k rezonátoru a důsledkem tohoto zapojení je zvýšení sériové rezonanční frekvence [1]. Vzhledem k nízké kapacitě samotného rezonátoru může být účinek přídavné kapacity pro uvažované provedení rezonátoru poměrně výrazný. Vliv elektrod na rezonanční módy není v námi odvozených rovnicích zahrnut.

Neshoda mezi vypočtenými a naměřenými hodnotami je patrná zejména u základního podélného módu, který je vzhledem k ostatním módům nejméně tlumený a lze jej také nejsnáze vybudit. Naměřená frekvence E-1 je vždy vyšší než všechny teoretické hodnoty f_A , f_B a f_1 . Rozdíl může být způsoben přídavnou kapacitou elektrod a přívodů.

Způsoby odvození jednorozměrných aproximačních rovnic, uvedené postupně v kap. 4.2 a 4.3, používají podobných myšlenkových postupů a vedou na analogický popis vázaných kmitů páskového rezonátoru. Lze se tedy domnívat, že obě metody jednorozměrné aproximace uvedené v této práci jsou ekvivalentní a jejich použití vede ke stejnému výsledku.

Odlišnost mezi výslednými tvary rovnic (4.49), (4.57) a (4.84), (4.94) spočívá v míře aproximace a zanedbání vazeb různých módů kmitu. Nejlépe je rozdíl patrný z porovnání matic disperzních rovnic (4.49) a (4.84), kde nuly v první matici představují vynechané vazby mezi módy. Zjednodušení bylo způsobeno zanedbáním některých členů v rozvoji (4.33) nebo prostým omezením nekonečné řady (4.37) při odvození jednorozměrné aproximace.

Tento postup je korektní při řešení kmitů rezonátorů z materiálů s nízkým koeficientem elektromechanické vazby, v případě piezoelektrické keramiky je ale nutné uvažovat vazby módů v co největší míře. Důsledkem je pak komplikovanější vyjádření modifikovaných materiálových konstant uvedených v kap. 4.3.

Z těchto důvodů můžeme předpokládat, že aproximace vyjádřená vztahy (4.84) a (4.94) představuje přesnější popis frekvenčního spektra.

5.5 Praktické použití aproximačních rovnic

Při praktické aplikaci uvedených aproximačních vztahů je nutné vzít v úvahu vedle nelineárních vlastností rezonátoru, vnitřního tlumení a vlivu elektrod také další příčiny, které mohou nepříznivě ovlivnit výsledek výpočtu.

Dobrá shoda naměřených a vypočtených hodnot v této práci je způsobena také tím, že měřené vzorky jsou ze stejné výrobní šarže jako vzorky, ze kterých byly stanoveny materiálové konstanty. Fyzikální vlastnosti piezoelektrické keramiky jsou teplotně závislé a časově nestálé a obecně vykazují poměrně velký rozptyl. Výrobce uvádí hodnoty materiálových konstant d_{33} a ε_{33} , které přímo souvisí s námi řešeným problémem, s tolerancí $\pm 20\%$ [27].

Ve skutečnosti proto není možné dosáhnout lepší shody vypočtených a naměřených hodnot než v řádu procent. Musíme však vyjít z předpokladu, že podélně kmitající páskové rezonátory z piezoelektrické keramiky nejsou určeny pro použití v aplikacích, kde je vyžadována vysoká přesnost a stabilita rezonanční frekvence. Běžná tolerance rezonanční frekvence keramických rezonátorů je výrobcem udávána v rozmezí $\pm 5\%$ [27]. Z tohoto hlediska je tedy dosažitelná přesnost výpočtu pro praktické využití postačující.

6 Závěr

Analytické řešení kmitů rezonátorů z piezoelektrické keramiky představuje poměrně obtížnou problematiku. Struktura keramického materiálu je nehomogenní a jeho vlastnosti jsou závislé zejména na teplotě, čase, technologii výroby nebo podmínkách polarizace. Tato skutečnost se projevuje rozptylem materiálových vlastností různých vzorků téhož materiálu a silně nelineárními vlastnostmi. V případě podélně polarizovaných páskových rezonátorů buzených elektrickým polem ve směru délky je nelineární chování ještě výraznější.

Popis kmitů piezokeramických rezonátorů respektující nelineární vlastnosti je složitý a výpočetně náročný a vyžaduje znalost nelineárních konstant vyšších řádů, které v mnoha případech není možné stanovit. Obvykle se tedy přistupuje k popisu pomocí lineárních teorií, používaných úspěšně pro analýzu kmitů rezonátorů z monokrystalických materiálů. Tento postup je vyhovující pro případ velmi nízké (lineární) úrovně buzení, ale výpočet je stále zatížen chybou vyplývající z rozptylu materiálových parametrů. Z tohoto důvodu se liší vypočtená a skutečná velikost rezonanční frekvence a jejich poměrná odchylka bývá obvykle v jednotkách procent. Tato hodnota ovšem spadá do běžné tolerance rezonančních frekvencí piezokeramických rezonátorů, která je dosahována při výrobě. Popis lineárními vztahy je tedy v řadě případů postačující.

V práci je také přistoupeno k analýze kmitů piezokeramických páskových rezonátorů za pomoci lineárních vztahů. Z piezoelektrických stavových rovnic vyplývá, že roztažné kmity těchto páskových rezonátorů nejsou vázány s ohybovými módy a vlivem příčné izotropie látky ani s torzními kmity. Na jednoduché aproximaci rezonátoru kmitajícího čistě podélnými módy je pak ukázáno, že pro keramický materiál s velkým koeficientem elektro-mechanické vazby je vliv okrajových podmínek na vypočtené hodnoty velmi výrazný.

Přínosem disertační práce jsou dva ucelené systémy jednorozměrných aproximačních rovnic, popisující vázané podélné, šířkově rozpínavé a symetrické šířkově střížné kmity podélně polarizovaných páskových rezonátorů s pravoúhlým průřezem z piezoelektrické keramiky, buzené harmonickým elektrickým polem působícím ve směru délky. Vztahy byly odvozeny dvěma různými postupy z výchozí Leeho aproximační dvourozměrné teorie kmitů piezoelektrických desek. Výsledný popis představuje nahrazení rezonátoru modelem se třemi stupni volnosti, který charakterizuje jeho chování až do frekvencí přesahujících mezní frekvenci symetrického šířkově střížného módu.

První soustava, získaná z dvourozměrných rovnic rozvojem veličin do řady funkcí šířkové souřadnice, vychází z řešení uvedeného Zelenkou. Původní formulace pohybových rovnic je novým odvozením opravena na správný tvar a doplněna o odpovídající okrajové podmínky. Způsob odvození byl původně použit pro řešení kmitů křemenných rezonátorů a obsahuje tak některé zjednodušující postupy.

Nově byla formulována druhá soustava rovnic, kterou jsme odvodili využitím metody průměrování veličin přes tloušťkovou souřadnici. Oproti předchozí soustavě respektuje ve větší míře vazby mezi jednotlivými módy kmitů a můžeme předpokládat, že představuje přesnější popis uvažovaných lineárních kmitů rezonátoru.

Výsledky získané řešením obou systémů rovnic byly navzájem porovnány pro různé případy piezoelektrické keramiky a jejich odchylky jsou uvnitř tolerance rezonanční frekvence reálných rezonátorů. Z tohoto hlediska lze tyto soustavy považovat za ekvivalentní.

Oba systémy shodně popisují teoretické vlastní tvary kmitů páskových rezonátoru. V analyzované frekvenční oblasti byly identifikovány módy převážně podélné, hranové (edge) a základní šířkově rozpínavé. Stejně tvary kmitů a jejich rozložení ve frekvenčním spektru byly dříve publikovány také pro případ kmitů příčně polarizovaných páskových keramických rezonátorů.

Teoretické hodnoty byly porovnány s naměřenými rezonančními frekvencemi páskových rezonátorů z tvrdé a měkké PZT keramiky. Jejich odchylka je také v řádu jednotek procenta a splňuje výše uvedené předpoklady. Pro velmi malé hodnoty tloušťky a šířky v poměru k délce rezonátoru a také pro základní mód v širokém rozsahu poměrů šířky a délky můžeme popis kmitů nahradit jednoduchým modelem čistě podélně kmitající tyčinky.

Výsledné jednorozměrné aproximační rovnice lze použít pro analýzu kmitů rezonátorů vyrobených z libovolného piezoelektrického materiálu, jehož materiálové vlastnosti mají symetrii odpovídající třídě $6mm$ hexagonální soustavy, pokud jsou známy potřebné materiálové konstanty. U řady komerčně vyráběných druhů piezoelektrické keramiky bohužel nejsou dostupné všechny materiálové konstanty nutné pro výpočet. Při interpretaci výsledků je pak třeba přihlídnout ke vlivu nelineárních vlastností, které jsou uvedeny v této práci.

[7] Manujsingh, R., *Journal of Applied Physics*, vol. 61, no. 1, pp. 1-10, 1987.

[8] Liu, P. C. Y., *Journal of Applied Physics*, vol. 61, no. 1, pp. 11-19, 1987.

[9] Liu, P. C. Y., *Journal of Applied Physics*, vol. 61, no. 1, pp. 20-28, 1987.

[10] Liu, P. C. Y., *Journal of Applied Physics*, vol. 61, no. 1, pp. 29-37, 1987.

[11] Mindlin, R. D., *Journal of Applied Physics*, vol. 61, no. 1, pp. 38-46, 1987.

[12] Mindlin, R. D., *Journal of Applied Physics*, vol. 61, no. 1, pp. 47-55, 1987.

[13] Mindlin, R. D., *Journal of Applied Physics*, vol. 61, no. 1, pp. 56-64, 1987.

[14] Tiersten, H. F., *Journal of Applied Physics*, vol. 61, no. 1, pp. 65-73, 1987.

[15] Lee, P. C. Y., *Journal of Applied Physics*, vol. 61, no. 1, pp. 74-82, 1987.

[16] Lee, P. C. Y., *Journal of Applied Physics*, vol. 61, no. 1, pp. 83-91, 1987.

Literatura

- [1] Zelenka, J.: Piezoelectric Resonators and their Applications. Academia, Praha 1986.
- [2] Škvor, Z.: Akustika a elektroakustika. Academia, Praha 2001. ISBN 80-200-0461-0
- [3] Benes, E., Gröschl, M., Burger, W., Schmid, M.: Sensors Based on Piezoelectric Resonators. Sensors and Actuators A 48, str. 1-21, 1995.
- [4] Uchino, K.: Ferroelectric Devices. Marcel Dekker Inc., New York 2000. ISBN 0-8247-8133-3
- [5] Ueha, S., Tomikawa, Y., Kurosawa, M., Nakamura, N.: Ultrasonic Motors Theory and Applications. Clarendon Press, Oxford, UK 1993. ISBN 0-19-859376-7
- [6] Kawashima, S., Ohnishi, O., Hakamata, H., Tagami, S., Fukuoka, A., Inoue, T., Hirose, S.: Third Order Longitudinal Mode Piezoelectric Ceramic Transformer and Its Application to High-Voltage Power Inverter. In: Proceedings of 1994 IEEE Ultrasonics Symposium, str. 525-530, Cannes 1994.
- [7] Manuspiya, S., Laoratanakul, P., Uchino, K.: Integration of a Piezoelectric Transformer and an Ultrasonic Motor. Ultrasonics 41, str. 83-87, 2003.
- [8] Lee, P. C. Y., Zelenka, J.: The Frequency Temperature Dependence of Coupled Extensional, Flexural and Width-Shear Vibrations of Rotated X-Cut Quartz Plates. Journal of Applied Physics 43(8), str. 3325-3328, 1972.
- [9] Wang, J., Zhao, W., Bian, T.: A Fast Analysis of Vibrations of Crystal Plates for Resonator Design Applications. In: Proceedings of 2004 IEEE International Frequency Control Symposium and Exposition, str. 596-599, Montreal 2004.
- [10] Petržílka, V., Slavík, J. B., Šolc, I., Taraba, O., Tichý, J., Zelenka, J.: Piezoelektrina a její technické použití. Nakl. ČSAV, Praha 1960.
- [11] Mindlin, R. D.: Thickness-Shear and Flexural Vibrations of Crystal Plates. Journal of Applied Physics 22(3), str. 316-323, 1951.
- [12] Mindlin, R. D.: An Introduction to the Mathematical Theory of the Vibrations of Elastic Plates. US Army Signal Corps Engineering Laboratory, Fort Monmouth 1955.
- [13] Mindlin, R. D.: Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates. In: Proceedings of 10th Annual Symposium on Frequency Control, str. 10-49, Fort Monmouth 1956.
- [14] Tiersten, H. F.: Linear Piezoelectric Plate Vibrations. Plenum Press, New York 1969.
- [15] Lee, P. C. Y., Syngellakis, S., Hou, J. P.: A Two-Dimensional Theory for High-Frequency Vibrations of Piezoelectric Crystal Plates with or without Electrodes. Journal of Applied Physics 61(4), str. 1249-1262, 1987.
- [16] Lee, P. C. Y., Yu, J. D., Lin, W. S.: A New Two-Dimensional Theory for Vibrations of Piezoelectric Crystal Plates with Electroded Faces. Journal of Applied Physics 83(3), str. 1213-1223, 1998.

- [17] Tiersten, H. F.: Nonlinear Electroelastic Equations Cubic in the Small Field Variables. *Journal of the Acoustical Society of America* 57, str. 660-666, 1975.
- [18] Lee, P. C. Y., Liu, N. H.: Plane Harmonic Waves in an Infinite Piezoelectric Plate with Dissipation. In: *Proceedings of 2002 IEEE International Frequency Control Symposium and PDA Exhibition*, str. 162-169, New Orleans 2002.
- [19] Huang, R., Lee, P. C. Y., Lin, W. S., Yu, J. D.: Extensional, Thickness-Stretch and Symmetric Thickness-Shear Vibrations of Piezoceramic Disks. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 49(11), str. 1507-1515, 2002.
- [20] Hána, P., Burianová, L., Barošová, D., Zelenka, J.: Contribution to the Measurement of the Electromechanical Coupling Factor k_{33} of Piezoelectric Ceramics. *Ferroelectrics* 224, str. 39-46, 1999.
- [21] Lee, P. C. Y.: Extensional, Flexural and Width-Shear Vibrations of Thin Rectangular Crystal Plates. *Journal of Applied Physics* 42(11), str. 4139-4144, 1971.
- [22] Zelenka, J.: The Frequency Spectrum of NT-Cut Quartz Plates. *Czechoslovak Journal of Physics B* 32, str. 696, 1973.
- [23] Lee, P. C. Y., Wang, J.: Vibrations of AT-Cut Quartz Strips of Narrow Width and Finite Length. *Journal of Applied Physics* 75(12), str. 7681-7695, 1994.
- [24] Zelenka, J.: The Forced Vibrations of Electroded Piezoelectric Bars. In: *Proceedings of 15th European Frequency and Time Forum*, str. 345-347, Neuchâtel 2001.
- [25] Lee, P. C. Y., Edwards, N. P., Lin, W. S., Syngellakis, S.: Second-Order Theories for Extensional Vibrations of Piezoelectric Crystal Plates and Strips. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 49(11), str. 1497-1506, 2002.
- [26] Yang, J. S.: Equations for the Extension and Flexure of a Piezoelectric Beam with Rectangular Cross Section and Applications. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics* 9, str. 409-420, 1998.
- [27] <http://www.americanpiezo.com/>. Firemní stránky APC International Ltd., Mackeyville, USA, červen 2005.
- [28] Nye, J. F.: *Physical Properties of Crystals*. Clarendon Press, Oxford 1979.
- [29] Royer, D., Dieulesaint, E.: *Elastic Waves in Solids I. Free and Guided Propagation*. Springer-Verlag, Berlin 2000. ISBN 3-540-65932-3
- [30] Royer, D., Dieulesaint, E.: *Elastic Waves in Solids II. Generation, Acousto-Optic Interaction, Applications*. Springer-Verlag, Berlin 2000. ISBN 3-540-65931-5
- [31] Bálek, R., Košek, M., Taraba, O., Zelenka, J.: *Povrchové akustické vlny*. Academia, Praha 1986.
- [32] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užití matematiky I, II*. Prometheus, Praha 1995. ISBN 80-8549-72-0

- [33] Graff, K. F.: Wave Motion in Elastic Solids. Dover Publications, Inc., New York 1991. ISBN 0-486-66745-6
- [34] Nosek, J., Pustka, M.: About the Coupling Factor of the Gallium Orthophosphate (GaPO_4) and Its Influence to the Resonance - Frequency Temperature Dependences. In: Proceedings of 2003 IEEE International Frequency Control Symposium, str. 674-678, Tampa 2003.
- [35] Hatch, E. R., Ballato, A.: Lateral-Field Excitation of Quartz Plates. In: Proceedings of 1983 IEEE Ultrasonics Symposium, str. 512-515, Atlanta 1983.
- [36] Eer Nisse, E. P.: Variational Method for Electroelastic Vibration Analysis. IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, SU-14(4), str. 153-160, 1967.
- [37] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V.: Dynamika. SNTL, Praha 1989. ISBN 80-03-00164-1
- [38] Batra, R. C., Vidoli, S.: Higher-Order Piezoelectric Plate Theory Derived from a Three-Dimensional Variational Principle. AIAA Journal 40(1), str. 91-104, 2002.
- [39] Mindlin, R. D., Medick, M. A.: Extensional Vibrations of Elastic Plates. Journal of Applied Mechanics 26, str. 561-569, 1959.
- [40] Pustka, M.: Aktuátor malých posunutí. Diplomová práce. TU v Liberci 2000.
- [41] Brepta, R., Půst, L., Turek, F.: Mechanické kmitání. Sobotáles, Praha 1994. ISBN 80-901684-8-5
- [42] Richter, A., Pustka, M., Rydlo, P., Kolář, M.: Ultrasonic Piezoceramic Motor - The Computation of Travelling-Wave Velocity on the Stator Surface and Excitation by PWM Modulation with Higher Harmonic Suppression. Ceramics International 30(7), str. 1857-1861, 2004.
- [43] Burianová, L., Prokopová, M., Pustka, M., Nosek, J.: Characterization of the Hard APC 841 Ceramics. ICPR Report No. 2. TU v Liberci 2005. Vypracováno pro APC International Ltd., Mackeyville, USA.
- [44] Burianová, L., Prokopová, M., Pustka, M., Nosek, J.: Characterization of PZT Ceramics in a Wide Temperature Range. ICPR Report No. 1. TU v Liberci 2003. Vypracováno pro APC International Ltd., Mackeyville, USA.
- [45] Burianová, L.: soukromé sdělení, 2005.
- [46] IEEE Standard on Piezoelectricity. ANSI/IEEE Std 176-1987.
- [47] Watanabe, H., Nakamura, K., Shimiyu, H.: A New Type of Energy Trapping Caused By Contributions from the Complex Branches of Dispersion Curves. IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, SU-28(4), str. 265-270, 1981.
- [48] Døssing, O.: Structural Testing. Part 2 - Modal Analysis and Simulation. Brüel & Kjær, Nærum 1988.
- [49] Shaw, E. A. G.: On the Resonant Vibrations of Thick Barium Titanate Disks. Journal of the Acoustical Society of America 28(1), str. 38-50, 1956.

Přehled publikovaných prací

Pustka, M., Nosek, J.: Piezoelektrický aktuátor na bázi relaxorů PZN-PT. *Acta Electrotechnica et Informatica* 2(2), str. 29-34, 2002.

Richter, A., Pustka, M., Zelenka, J.: The Computation of Travelling-Wave Velocity on the Surface of Piezoceramic Drives. In: *Proceedings of 15th International Conference on Electrical Drives and Power Electronics*, str. 290-293, Vysoké Tatry 2003.

Nosek, J., Pustka, M.: About the Coupling Factor of the Gallium Orthophosphate (GaPO_4) and Its Influence to the Resonance - Frequency Temperature Dependences. In: *Proceedings of 2003 IEEE International Frequency Control Symposium*, str. 674-678, Tampa 2003.

Burianová, L., Pustka, M., Prokopová, M., Nosek, J.: Characterization of PZT Ceramics in a Wide Temperature Range. In: *Proceedings of the 6th International Workshop on Electronics, Control, Measurement and Signals*, str. 413-417, Liberec 2003.

Richter, A., Pustka, M., Rydlo, P., Kolář, M.: Ultrasonic Piezoceramic Motor - The Computation of Travelling-Wave Velocity on the Stator Surface and Excitation by PWM Modulation with Higher Harmonic Suppression. *Ceramics International* 30(7), str. 1857-1861, 2004.

Richter, A., Rydlo, P., Pustka, M., Kolář, M.: Pulse Driving of Piezoceramic Actuators and Their Present Technical Limitations. *Ferroelectrics* 320, str. 125-132, 2005.

Burianová, L., Hána, P., Pustka, M., Prokopová, M., Nosek, J.: Non-linear Properties of PZT ceramics in the Wide Temperature Range. *Journal of the European Ceramic Society* 25(12), str. 2405-2409, 2005.

Burianová, L., Pustka, M., Nosek, J.: Study of the Frequency Spectrum of Forced Vibrations of Piezoceramic Bars Polarized in Length Direction. Bude prezentováno na 2005 Joint IEEE International Frequency Control Symposium and PTTI Systems and Applications Meeting, Vancouver, srpen 2005.

Nosek, J., Pustka, M., Burianová, L.: The Non-Linear Equivalent Circuit of the Vibrating Y-Cut GaPO_4 Resonator. Bude prezentováno na 2005 Joint IEEE International Frequency Control Symposium and PTTI Systems and Applications Meeting, Vancouver, srpen 2005.

Nosek, J., Pustka, M.: Determination of the Electromechanical Coupling Factor of the Gallium Orthophosphate (GaPO_4). *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, v tisku.

Pustka, M., Burianová, L., Nosek, J.: Coupled Extensional Vibrations of Longitudinally Polarized Piezoceramic Strips. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, zasláno do tisku.

A Materiálové konstanty piezoelektrické keramiky

elastický modul		piezoelektrický modul	
c_{11}^E	$15,2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	e_{15}	$11,5 \text{ Cm}^{-2}$
c_{12}^E	$9,2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	e_{31}	$-2,6 \text{ Cm}^{-2}$
c_{13}^E	$7,8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	e_{33}	$17,5 \text{ Cm}^{-2}$
c_{33}^E	$11,4 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	relativní permitivita	
c_{44}^E	$2,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$\varepsilon_{11}^S(r)$	730
c_{66}^E	$3,0 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$\varepsilon_{33}^S(r)$	750
elastický koeficient		koeficient elektromechanické vazby	
s_{33}^E	$15,9 \cdot 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$	k_{33}	0,68
hustota			
ρ	$7\,600 \text{ kg m}^{-1}$		

Tab. A.1: Vybrané materiálové konstanty piezoelektrické keramiky APC 841 [43]

elastický modul		piezoelektrický modul	
c_{11}^E	$11,2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	e_{15}	$13,4 \text{ Cm}^{-2}$
c_{12}^E	$5,9 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	e_{31}	$-5,2 \text{ Cm}^{-2}$
c_{13}^E	$6,3 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	e_{33}	$24,9 \text{ Cm}^{-2}$
c_{33}^E	$9,8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	relativní permitivita	
c_{44}^E	$2,2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$\varepsilon_{11}^S(r)$	1 630
c_{66}^E	$2,7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	$\varepsilon_{33}^S(r)$	2 120
elastický koeficient		koeficient elektromechanické vazby	
s_{33}^E	$19,7 \cdot 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$	k_{33}	0,67
hustota			
ρ	$7\,400 \text{ kg m}^{-1}$		

Tab. A.2: Vybrané materiálové konstanty piezoelektrické keramiky APC 856 [44]

B Naměřené rezonanční frekvence

délka = 14 mm
tloušťka = 1 mm

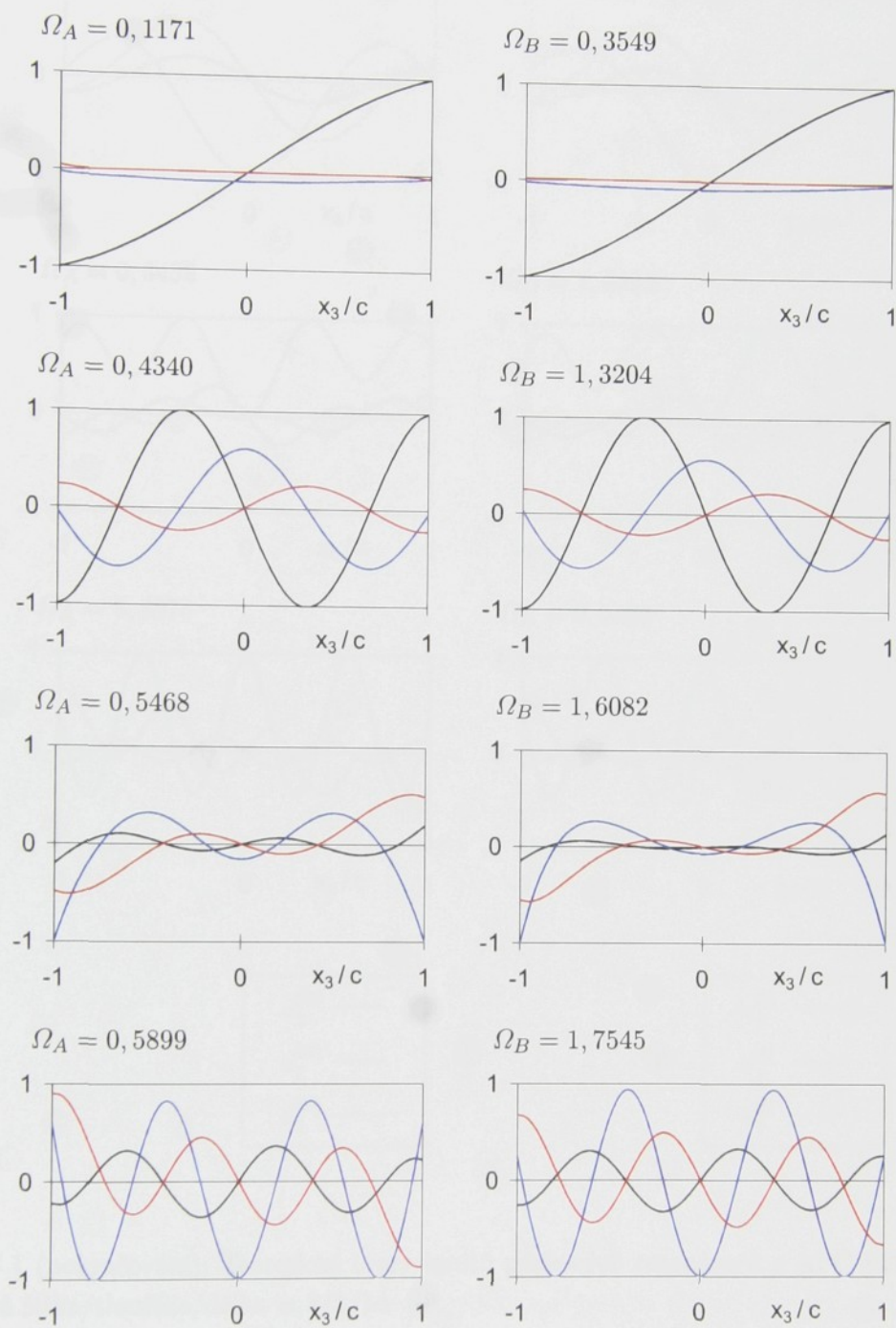
šířka [mm]	rezonanční frekvence [Hz]						
7	109 776	212 800	248 000	265 500	335 800	421 000	430 200
6,6	109 863	221 500	258 100	278 400	342 400	423 000	430 500
6,2	110 171	229 600	268 600	293 100	349 400	425 000	431 500
5,9	110 866	256 400	277 000	306 500	356 800	426 800	438 800
5,5	110 737	275 200	294 000	327 900	366 200	430 200	451 100
5,2	110 452	291 500	310 600	345 900	374 300	434 400	460 900
4,8	110 525	309 600	332 800	371 000	390 600	439 700	475 200
4,5	110 491	336 200	345 200	391 400	401 100	443 900	481 800
4,35	110 546	347 800	359 100	401 200	412 300	449 700	488 400
4,15	110 777	358 900	378 100	416 600	431 900	460 900	499 200
3,88	111 000	373 800	398 000	435 000	457 500	474 600	512 900
3,68	110 803	383 300	410 300	450 400	478 500		
3,42	110 919	393 600	443 700	480 300	506 100	517 100	
3,15	110 825	398 400	483 400	508 700	531 400	553 200	575 600
2,95	111 118	402 200	508 900	538 600	550 200	590 800	609 500
2,82	111 445	403 800		556 100		609 000	628 600
2,59	110 979	406 300		590 800		633 500	
2,43	111 252	407 800		622 600			
2,18	111 150	410 100					

Tab. B.1: Naměřené rezonanční frekvence páskových rezonátorů z APC 841 [45]

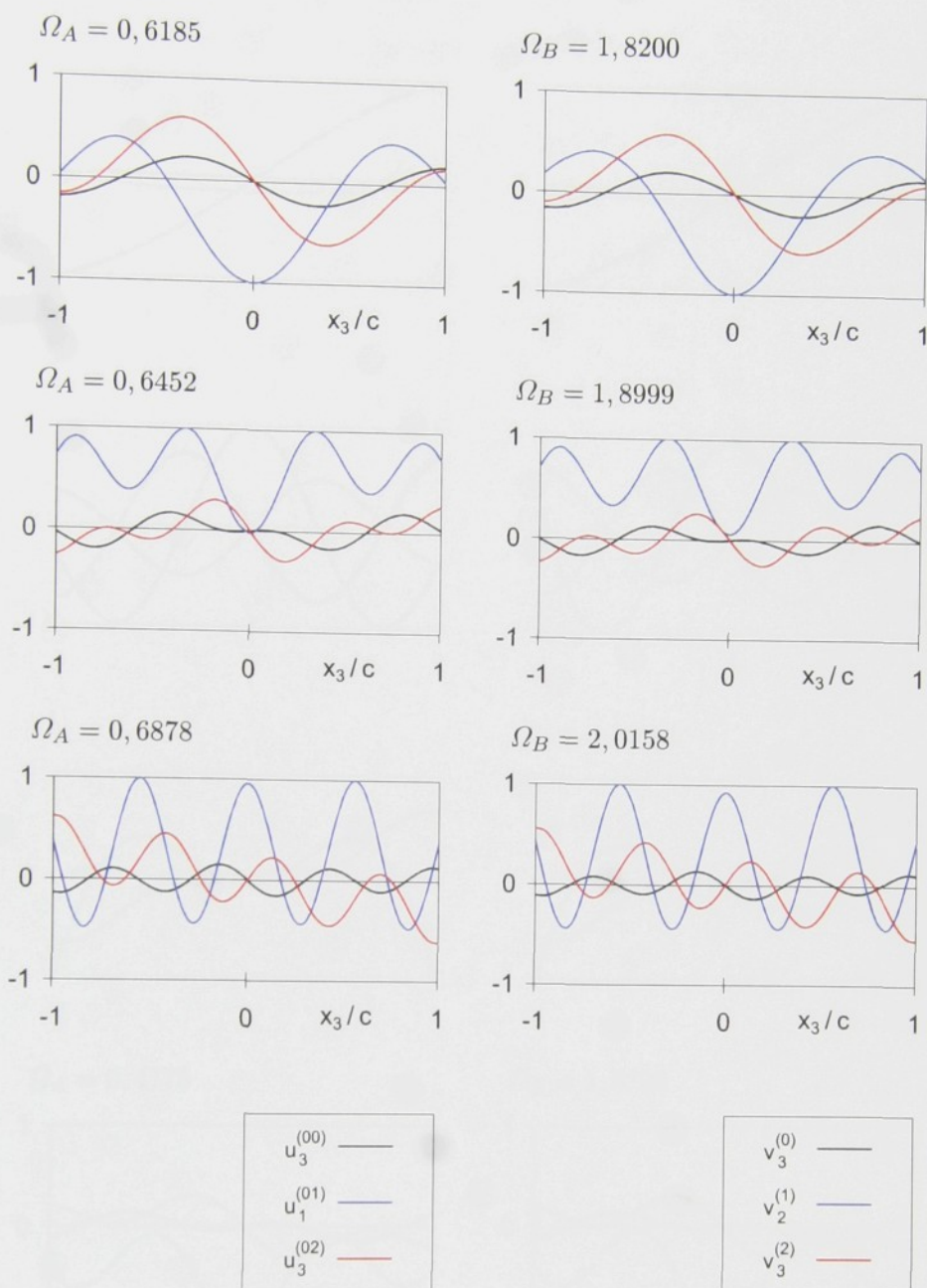
šířka [mm]	rezonanční frekvence [Hz]					
7	96 400	193 800	217 300			388 600
6,5	96 500	208 000	230 600	251 200		385 200
6	96 600	220 900	240 400	264 900		395 300
5,6	96 500	238 400	257 500	286 800		400 400
4,9	97 600		288 800	331 200		402 700
4,4	97 500	302 400	314 900	365 300	396 300	430 500
4	99 300	326 200	343 300	395 400	427 100	
3,1	97 000	358 900	451 900			

Tab. B.2: Naměřené rezonanční frekvence páskových rezonátorů z APC 856 [45]

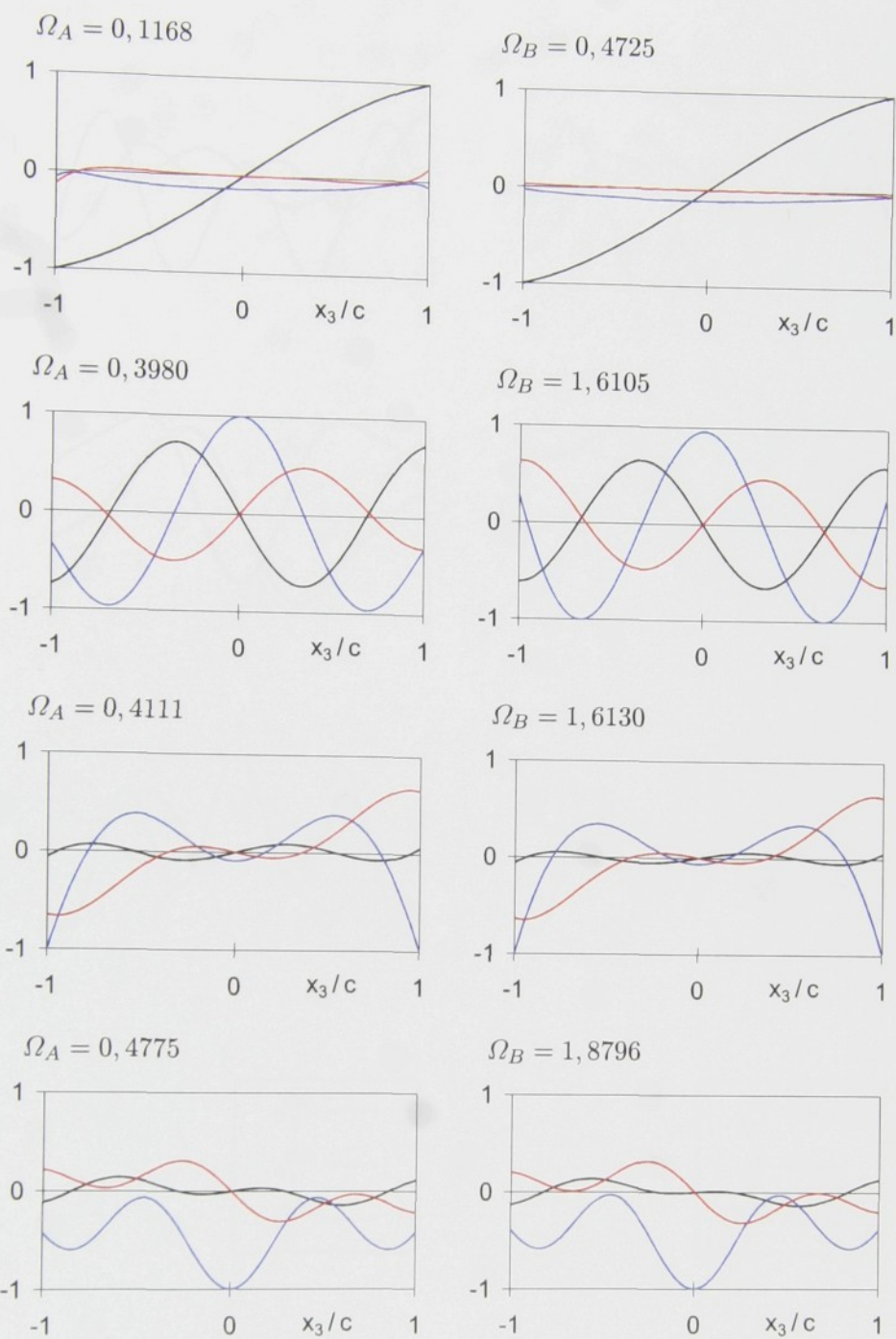
C Teoretické vlastní tvary kmitů



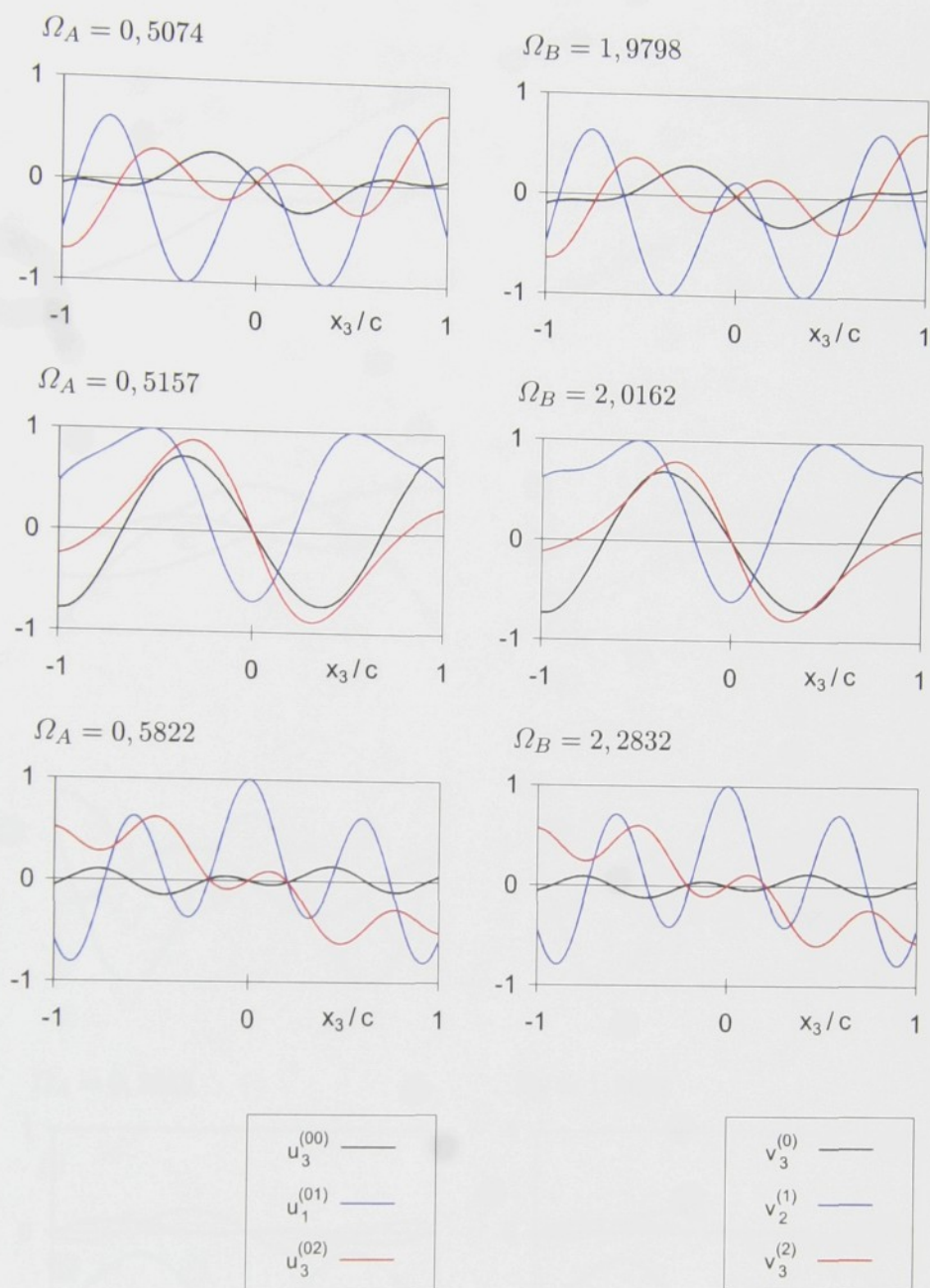
Obr. C.1: Teoretické tvary kmitů páskových rezonátorů z APC 841. Poměr rozměrů šířka/tloušťka/délka = 3/1/14



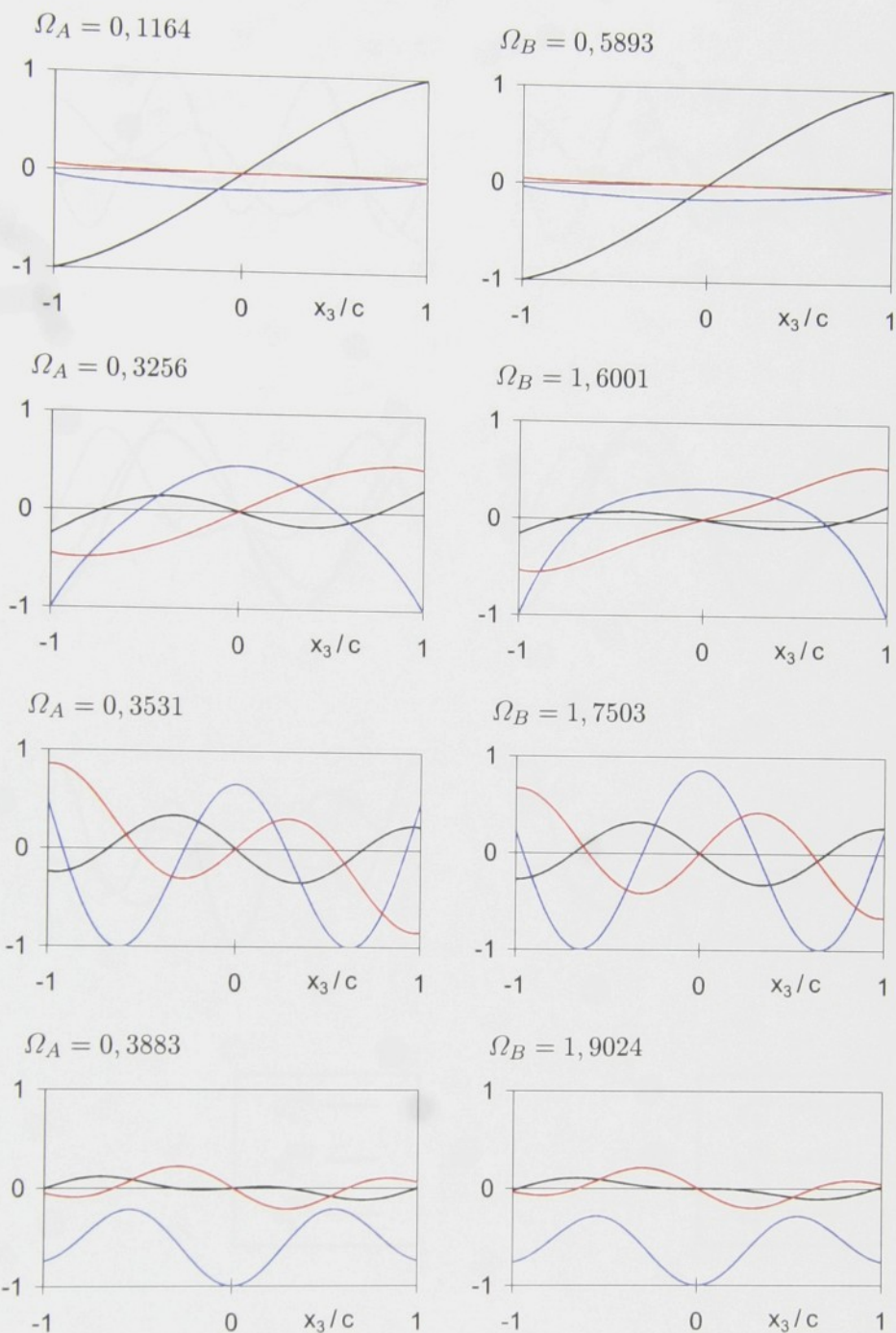
Obr. C.1 (pokračování): Teoretické tvary kmitů páskových rezonátorů z APC 841. Poměr rozměrů šířka/tloušťka/délka = 3/1/14



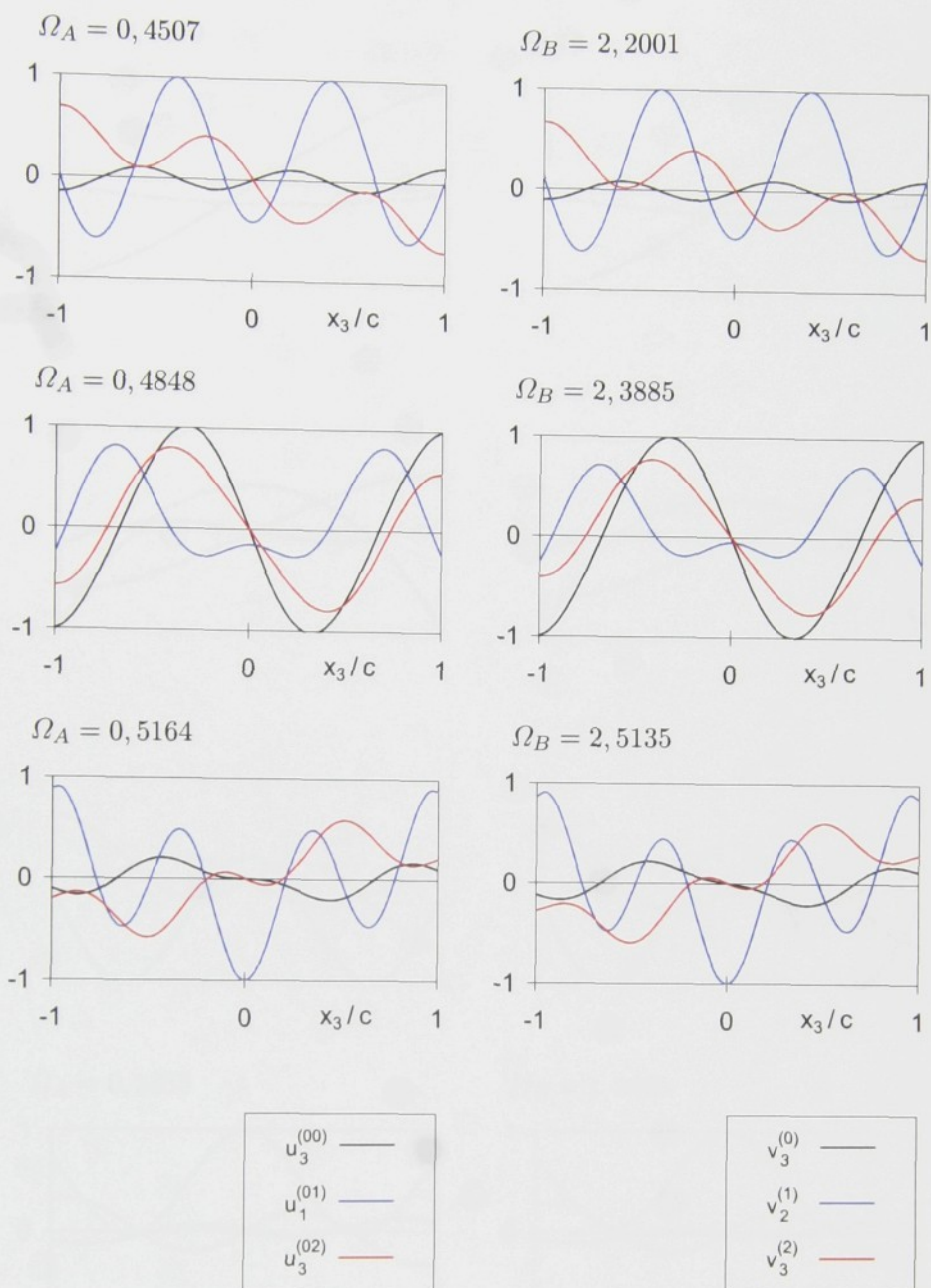
Obr. C.2: Teoretické tvary kmitů páskových rezonátorů z APC 841. Poměr rozměrů šířka/tloušťka/délka = 4/1/14



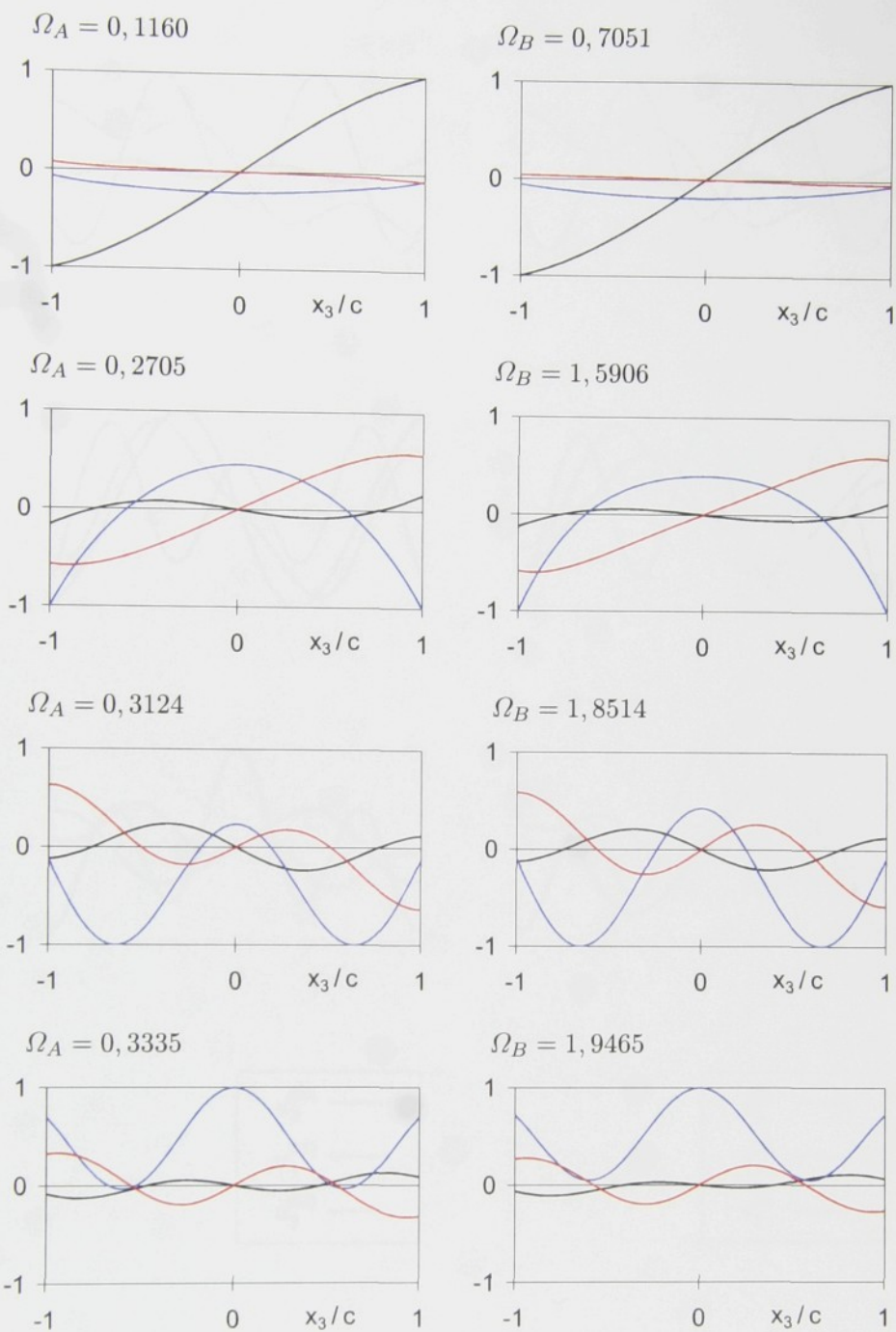
Obr. C.2 (pokračování): Teoretické tvary kmitů páskových rezonátorů z APC 841. Poměr rozměrů šířka/tloušťka/délka = 4/1/14



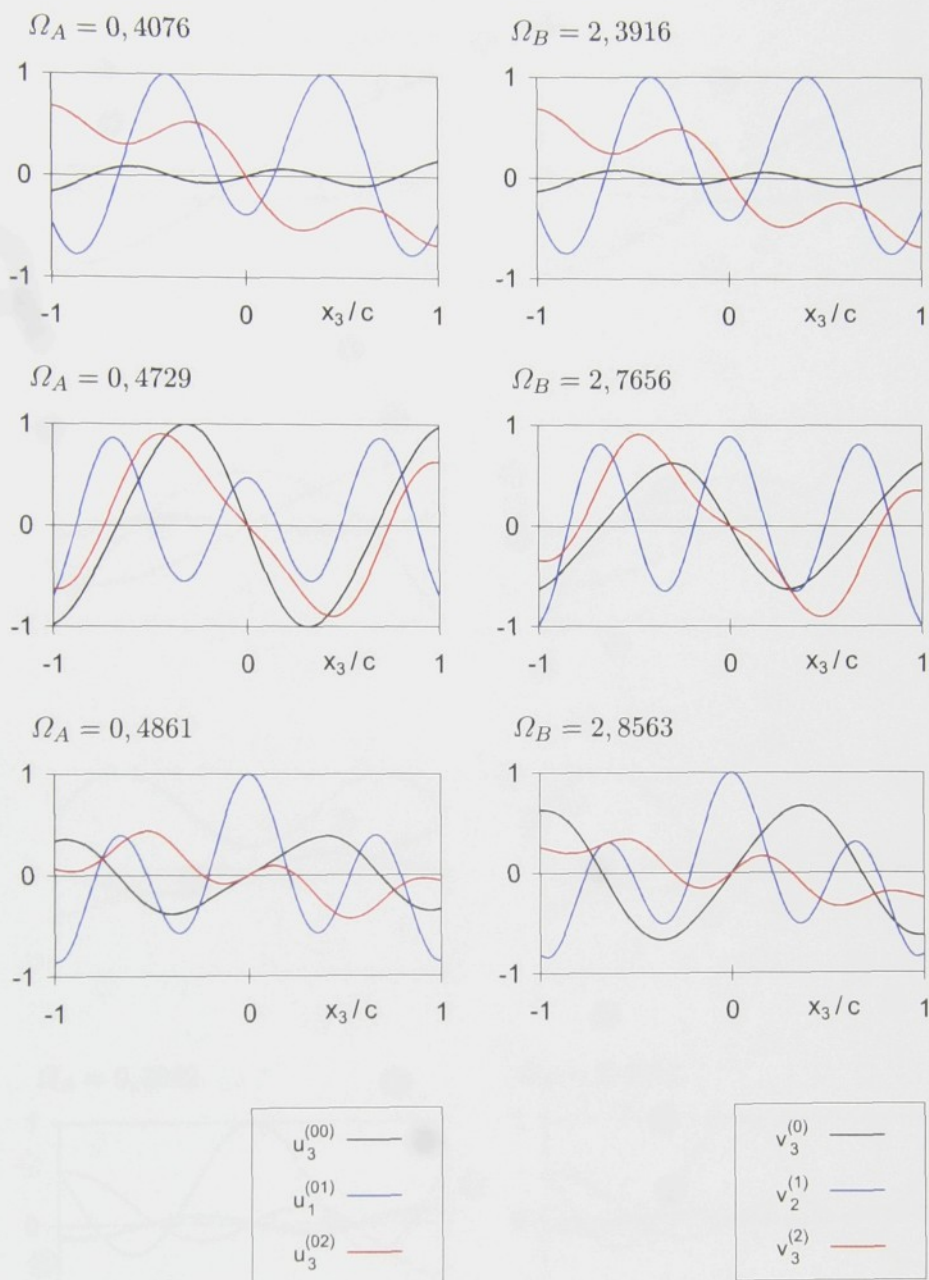
Obr. C.3: Teoretické tvary kmitů páskových rezonátorů z APC 841. Poměr rozměrů šířka/tloušťka/délka = 5/1/14



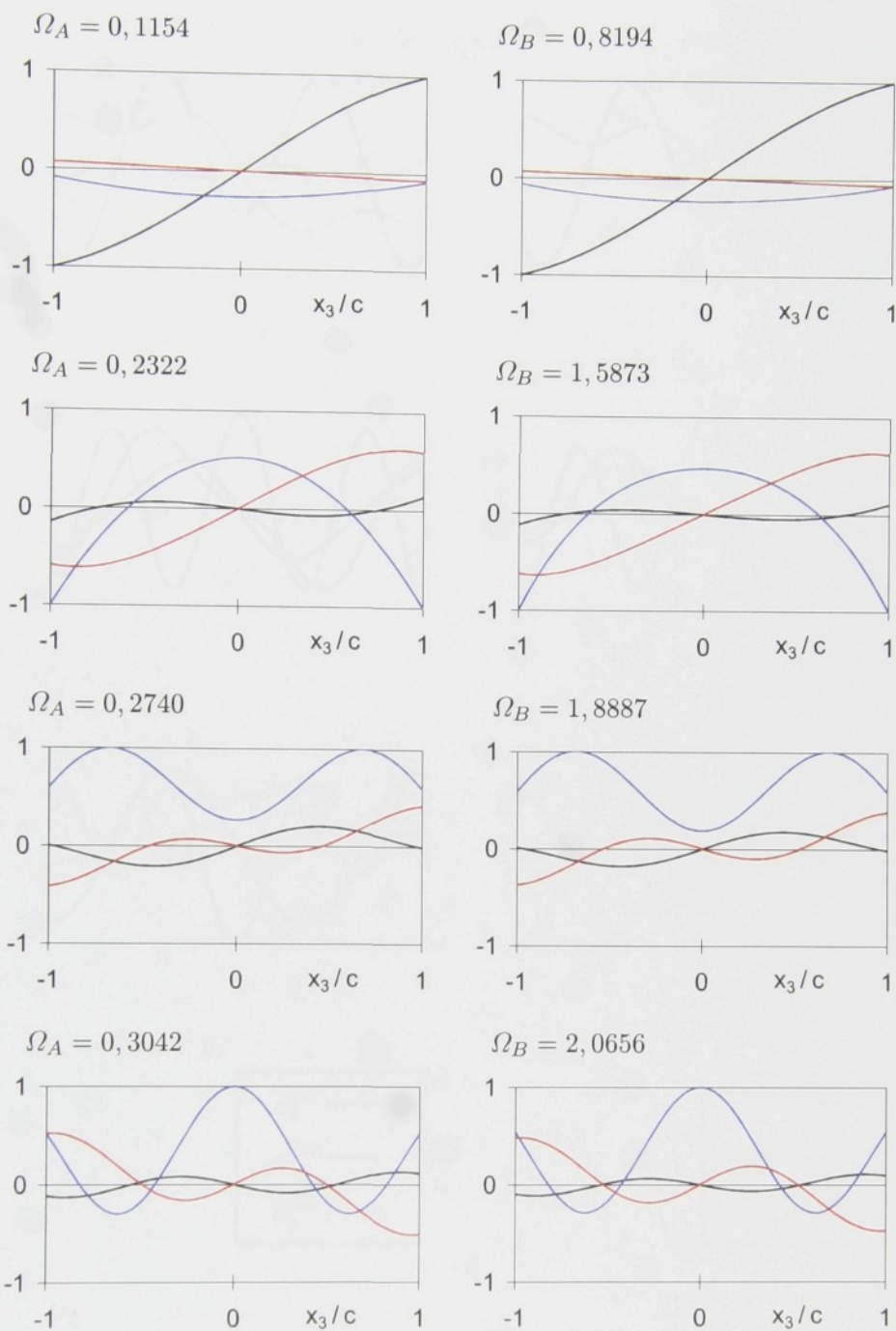
Obr. C.3 (pokračování): Teoretické tvary kmitů páskových rezonátorů z APC 841. Poměr rozměrů šířka/tloušťka/délka = 5/1/14



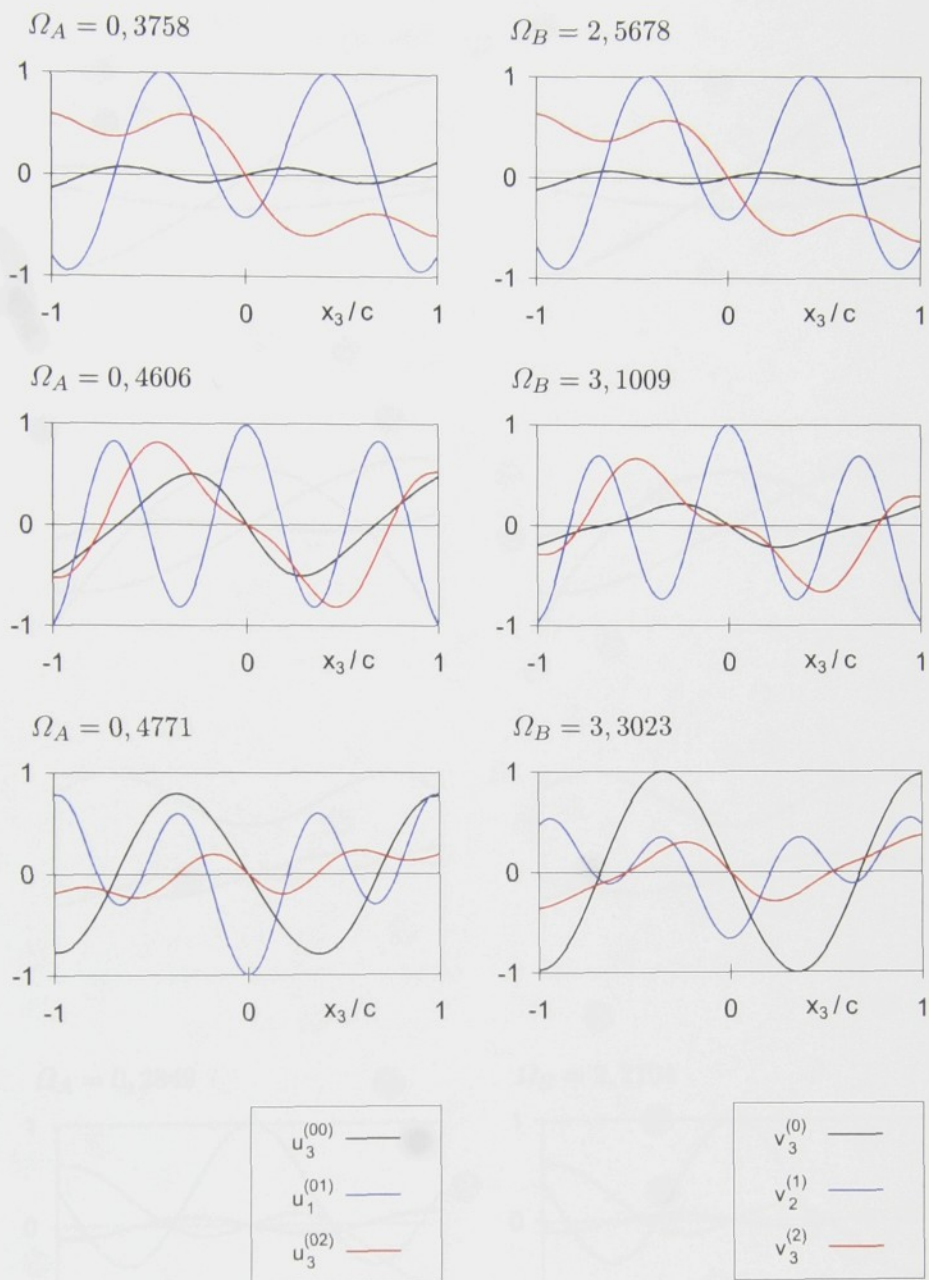
Obr. C.4: Teoretické tvary kmitů páskových rezonátorů z APC 841. Poměr rozměrů šířka/tloušťka/délka = 6/1/14



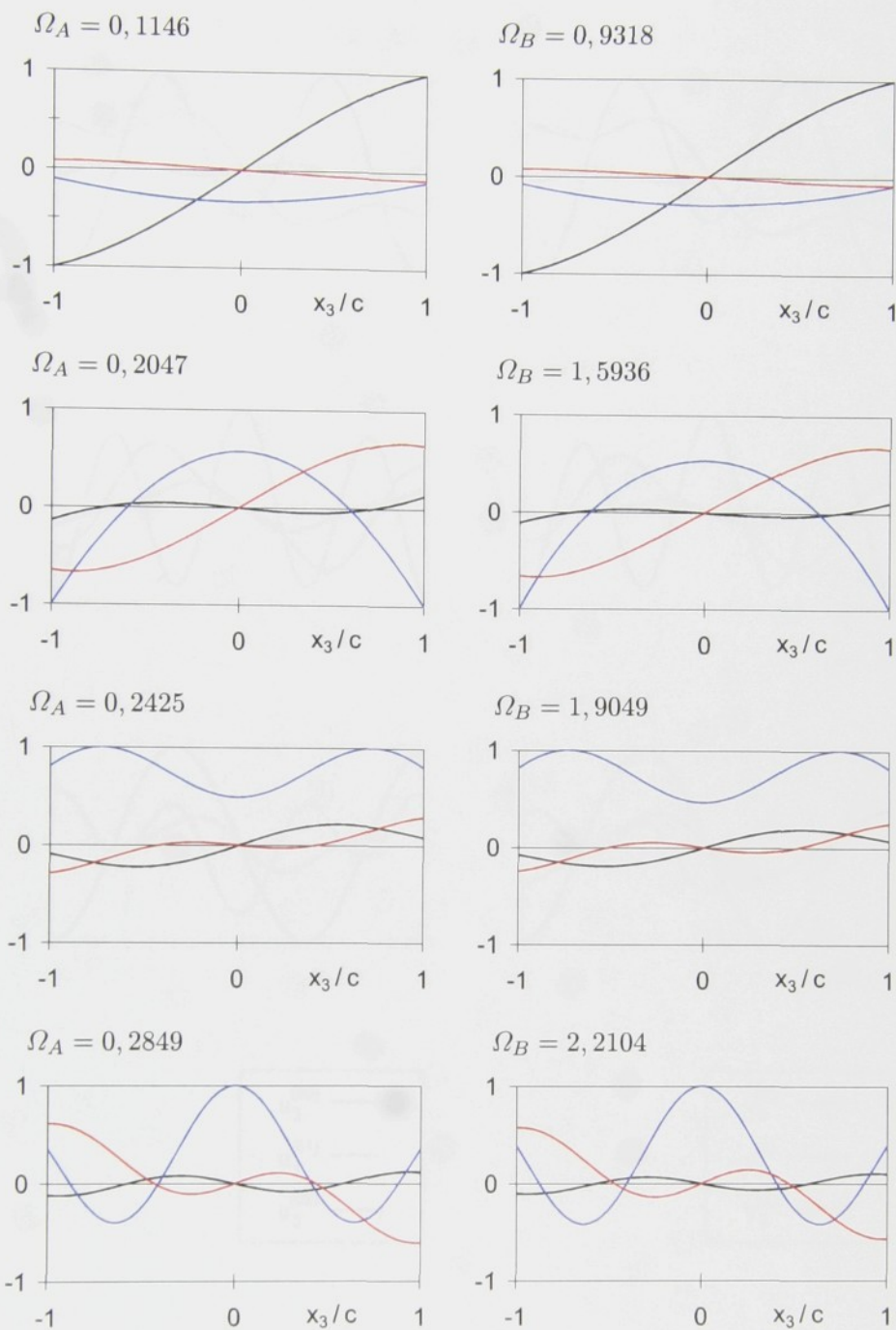
Obr. C.4 (pokračování): Teoretické tvary kmitů páskových rezonátorů z APC 841. Poměr rozměrů šířka/tloušťka/délka = 6/1/14



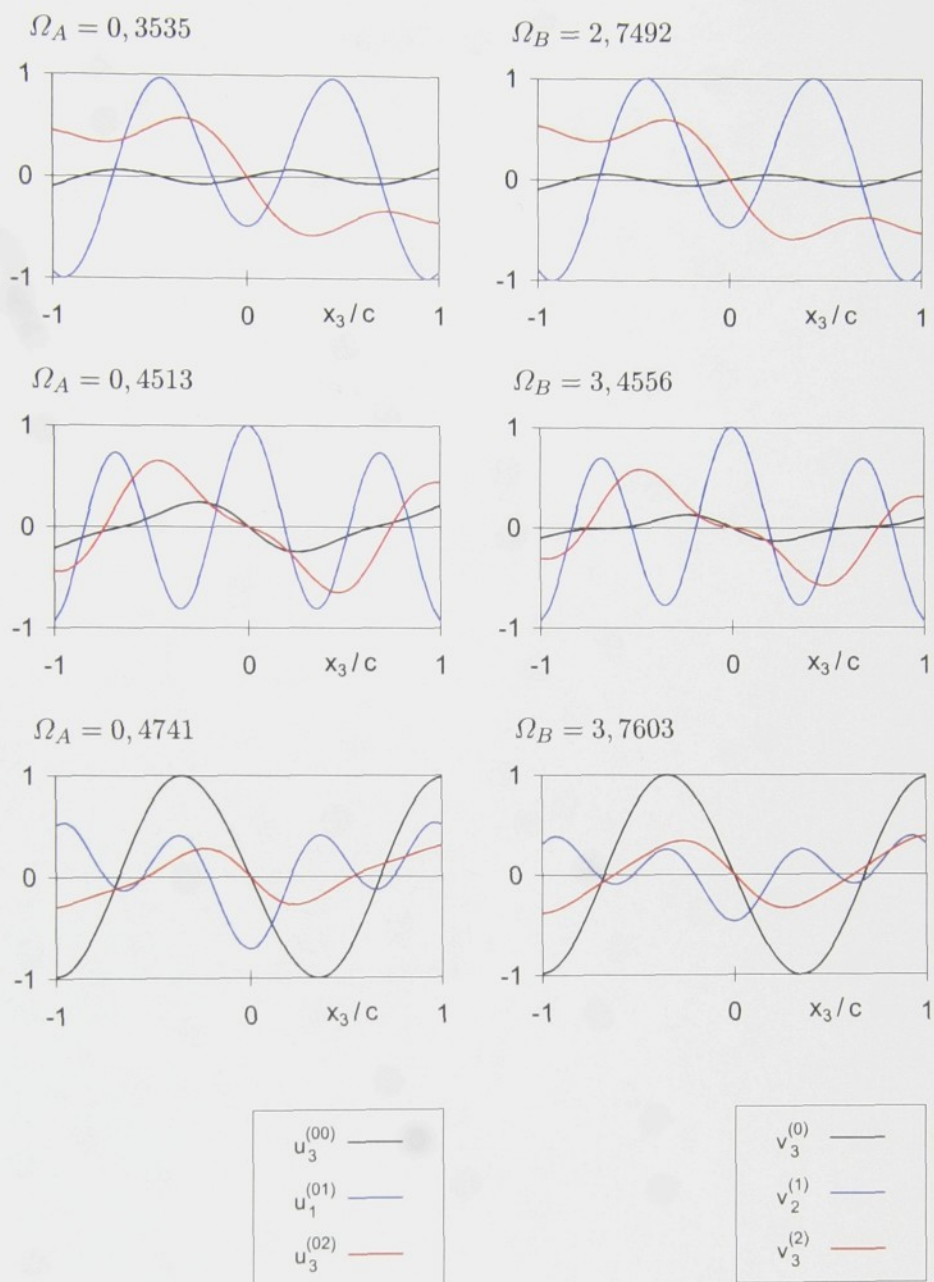
Obr. C.5: Teoretické tvary kmitů páskových rezonátorů z APC 841. Poměr rozměrů šířka/tloušťka/délka = 7/1/14



Obr. C.5 (pokračování): Teoretické tvary kmitů páskových rezonátorů z APC 841. Poměr rozměrů šířka/tloušťka/délka = 7/1/14



Obr. C.6: Teoretické tvary kmitů páskových rezonátorů z APC 841. Poměr rozměrů šířka/tloušťka/délka = 8/1/14



Obr. C.6 (pokračování): Teoretické tvary kmitů páskových rezonátorů z APC 841. Poměr rozměrů šířka/tloušťka/délka = 8/1/14