



Určení deformace a napětí v okolí promáčkliny v ocelové troubě pomocí experimentu a výpočtu.

Diplomová práce

Studijní program: M2301 – Strojní inženýrství
Studijní obor: 3901T003 – Aplikovaná mechanika - inženýrská mechanika
Autor práce: **Aleš Hrouda**
Vedoucí práce: prof. Ing. Bohdana Marvalová, CSc.



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Aleš Hrouda**
Osobní číslo: **S16000025**
Studijní program: **M2301 Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Aplikovaná mechanika - inženýrská mechanika**
Název tématu: **Určení deformace a napětí v okolí promáčkliny v ocelové troubě pomocí experimentu a výpočtu.**
Zadávající katedra: **Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

- 1) Vyhodnoťte záznamy experimentálních měření, které byly pořízeny při kvazistatické indentaci ocelových trub v laboratoři. Jsou to záznamy síly, hloubky promáčkliny, tenzometrických měření a naskenovaných tvarů promáčeklin.
- 2) Na základě změřených materiálových parametrů simulujte pomocí MKP indentaci, proveďte elasto-plastický výpočet napětí a deformací v okolí promáčkliny a stanovte zbytková napětí a přetvoření.
- 3) Srovnajte výsledky experimentu a výpočtu a podle doporučení norem posuďte vliv promáčkliny na bezpečnost provozu potrubí.

Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Rozsah pracovní zprávy: **50 - 60**
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**
Seznam odborné literatury:

- [1] ASME B31.8 Gas Transmission and Distribution Piping Systems. ASME, 2016.
[2] PD395 - API 579-1/ASME FFS-1- Fitness-for Service. ASME.
[3] SUTTON, M. A., DENG, X., LIU, and L. YANG, Determination of Elastic-plastic Stresses and Strains from Measured Surface Strain Data. *Experimental Mechanics*. 1996, 36 (2), pp. 99-112. ISSN 1741-2765.
[4] NETO, Eduardo Alberto de Souza, Djordje PERIĆ a D. R. J. OWEN. *Computational methods for plasticity: theory and applications*. Chichester: Wiley, [2008]. (Elektronicky v knihovne)

Vedoucí diplomové práce: **prof. Ing. Bohdana Marvalová, CSc.**
Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

Datum zadání diplomové práce: **1. září 2018**
Termín odevzdání diplomové práce: **31. prosince 2019**

prof. Dr. Ing. Petr Lenfeld
děkan




doc. Ing. Iva Petříková, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 1. září 2018

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé diplomové práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum:

Podpis:

Anotace

Tato diplomová práce se zabývá elasto-plastickým chováním trouby během její indentace. Je vyvíjen MKP model, který umožní simulaci indentace trouby. Jsou vyvinuty dva algoritmy, které slouží pro vyhodnocení naměřených tenzometrických dat za pomoci kombinovaného Poissonova čísla a sekantova modulu a nebo na základě zákona tečení.

Klíčová slova

platicita, zákon tečení, sekantový modul, kombinované Poissonovo číslo, MKP model, MKP analýza, reakční síla, síť, kontaktní formulace

Anotation

The aim of this thesis is elasto-plastic behaviour of the pipeline during its indentation. It is developing numerical FEM model with ability to simulate indentation process of the pipeline. It is developed algorithm to determinated stresses from measurement data from gauges. In this thesis were used two different calculation methods. The first method is based on secant modulus and combined Poisson's ratio and second one is based on associated flow rule.

Keywords

plasticity, flow rule, secant modulus, combined Poisson's ratio, FEM model, FEM analysis, reactional force, mesh, contact formulation

Poděkování

Velké poděkování patří mé rodině, která mě podporovala po celou dobu studia na vysoké škole. Velký dík patří paní profesorce Ing. Marvalové Csc. za její rady při vzniku této diplomové práce a při její kompletaci. Dále bych chtěl poděkovat panu profesoru Dengovi za jeho rady k programování vyhodnocení naměřených tenzometrických dat. Také bych chtěl poděkovat SGS za podporu této práce.

Obsah

1	Úvod	12
2	Elasto-plastické chování materiálů	14
2.1	Tahová zkouška oceli	14
2.2	Ideálně pružně-plastický materiál	15
2.3	Materiálové modely	16
3	Metody pro vyhodnocování napětí na základě experimentálních měření	19
3.1	Vyhodnocení napětí z tenzometrického měření na základě sekantového modulu a kombinovaného Poissonova čísla	19
3.2	Vyhodnocení napětí na základě zákona tečení	22
4	Vyhodnocení experimentálního měření	25
4.1	Postup výpočtu pomocí první metody	26
4.2	Postup výpočtu pomocí druhé metody	28
4.3	Vyhodnocení prvního experimentu	30
4.4	Vyhodnocení druhého experimentu	32
5	Výpočet napětí a přetvoření pomocí MKP analýzy	35
5.1	MKP model	35
5.1.1	Geometrie	36
5.1.2	Nastavení kontaktu	36
5.1.3	MKP Síť	39
5.1.4	Materiálový model	41
5.1.5	Okrajové podmínky	42
5.1.6	Vliv okrajových podmínek na velikost reakční síly	43
5.2	Výsledky z numerické analýzy	45
5.2.1	Výsledky pro jednokrokové zatížení	46
5.3	MKP model s ložem	49
5.4	Zhodnocení výsledků	65

6	Závěr	69
A	Algoritmus pro vyhodnocení měřených deformací pomocí sekantového modulu a kombinovaného Poissonova čísla	73
B	Vývojový diagram pro vyhodnocení napětí na základě zákona tečení	74
C	Scan trouby z experimentu měření	75
D	Odvození: Elastická zóna, mezní kritérium a mezní funkce	76
E	Odvození pro vyhodnocovací metodu založenou na sekantově modulu a kombinovém Poissonově čísle	79
F	Matlab kód pro vyhodnocení na základě pravidla tečení	82
G	Matlab kód pro vyhodnocení metody založené na sekantově modulu a kombinovaném Poissonově čísle	85

Seznam použitých zkratek a symbolů

Veličiny	Jednotka	Název
C	[Pa]	tenzor tuhosti
C3D8R		hexaquad element
<i>dev</i>		deviatorická část Cauchyho tenzoru napětí
$d\varepsilon_{ij}$	[-]	složka přírůstku tenzoru přetvoření
$d\sigma_{ij}$	[Pa]	složka přírůstku tenzoru napětí
E	[Pa]	Youngův modul pružnosti v tahu
E	[-]	Green-Lagrangeův tenzor přetvoření
e_i, e_j		bázové vektory
F	[N]	vektor externích sil
F (...)		zákon tečení
H	[m]	gradient posuvů
I_1, II_2, III_3		invarianty
K_b	[N/m]	tuhostní matice těles
K_c	[N/m]	tuhostní matice kontaktních ploch
k		zpevňující funkce
N		matice bázových funkcí
N_a		bázová funkce
N_q, N_g		nové proměnné
Q		ortogonální tenzor
R	[-]	koeficient
R	[mm]	poloměr trouby
S	[Pa]	tenzor deviatorických napětí
S_{ij}	[Pa]	složka deviatorického tenzoru
sph		hydrostatická část tenzoru napětí
t	[mm]	tloušťka stěny trouby
tr		stopa tenzoru
u	[m]	vektor posuvů

z	$[-]$	faktor
$\Delta \varepsilon$	$[-]$	vektor konečného přírůstku přetvoření
$\Delta \sigma^T$	$[\text{Pa}]$	přírůstek nového zkušebního stavu
ε	$[-]$	Tenzor konečných přetvoření
ε_e	$[-]$	Tenzor elastických přetvoření
ε_p	$[-]$	Tenzor plastických přetvoření
ε_i	$[-]$	hlavní přetvoření v i-tém směru
ε_{eq}	$[-]$	ekvivaletní přetvoření
ε_z	$[-]$	zbytkové ekvivalentní přetvoření
ζ	$[-]$	vnitřní proměnné
$d\lambda$	$[-]$	faktor tečení
λ		Lagrangeův multiplikátor
ν	$[-]$	Poissonovo číslo
ν_g	$[-]$	kombinované Poissonovo číslo
σ	$[\text{Pa}]$	Cauchyho napětí v 1D
σ^T	$[\text{Pa}]$	zkušební napěťový stav
σ	$[\text{Pa}]$	tenzor Cauchyho napětí
σ_i	$[\text{Pa}]$	i-té hlavní napětí
σ_{ij}	$[\text{Pa}]$	složka Cauchyho tenzoru napětí
σ_c	$[\text{Pa}]$	nový kontaktní bod
σ_{eq}	$[\text{Pa}]$	ekvivalentní napětí
σ_z	$[\text{Pa}]$	zbytkové ekvivalentní přetvoření
ϕ		mezní funkce
Π	$[\text{J}]$	potenciální energie
$\otimes$		tenzorový součin

Kapitola 1

Úvod

Firmy zabývající se správou plynovodního potrubí pravidelně kontrolují, zda potrubí stále vyhovuje pevnostním požadavkům nebo je nutné vadný díl vyměnit. Poškození může vzniknout nesprávným zacházením či při ukládání potrubí do země. Firma Net4Gas vypsala projekt na vyhodnocení daných poškození, do kterého se katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti přihlásila.

V laboratoři katedry mechaniky, pružnosti a pevnosti byl proveden experiment na vytvoření přomáčkliny na troubě (dále jen indentace). Pomocí metody konečných prvků (MKP) byl vytvořen numerický model, pro jehož ověření je důležité srovnání s experimentem.

Model pro MKP analýzu se skládá z trouby, u které je definované elasto-plastické chování. Do trouby je v této simulaci vtlačován tuhý indenter. Vzhledem k tomu, že při zatěžování vznikají plastické deformace, je matematický model nelineární. Další nelinearitu způsobuje kontakt mezi vnikajícím tělesem a zatěžovanou troubou. MKP model byl vytvořen na základě doporučení normy API 579-1/ASME FFS-1 a to podle třetí úrovně (Level 3 assessment). Norma doporučuje provést numerickou MKP analýzu napjatosti v okolí přomáčkliny [1]. Vytvoření přomáčkliny (dentu) musí proběhnout na základě vtlačování vnikajícího tělesa (indentoru) do trouby a následného odlehčení trouby. Dodatkem této normy je možnost vyhodnotit dent na základě jeho tvaru po odlehčení. Tento výpočet spočívá ve vyhodnocení křivostí po deformaci v podélném a obvodovém směru a také na hloubce a délce přomáčkliny [2].

V druhé kapitole této práce bude popsána teorie elasto-plastického chování materiálu a budou uvedeny vybrané materiálové modely, které se používají pro popis materiálové charakteristiky. Tato kapitola má za úkol popsat základní principy v teorii plasticity.

Ve třetí kapitole budou popsány vybrané metody, které byly použity pro vyhodnocení naměřených dat ze zatěžovacího experimentu ve formě tenzome-

trických dat. V popisu těchto metod budou uvedeny základní rovnice, které budou použity pro vyhodnocení naměřených tenzometrických dat.

Čtvrtá kapitola bude zaměřena na vyhodnocení naměřených dat z experimentu na základě metod popsaných ve třetí kapitole. Přesný popis uspořádání experimentu a vyhodnocení experimentálních dat je klíčové pro posouzení správnosti vyvinutého numerického MKP modelu. Tento krok je nezbytný pro posouzení korelace výpočtu s experimentem.

Hlavní součástí této diplomové práce je vývoj MKP modelu, který bude podrobně popsán v páté kapitole. V této kapitole bude věnován i prostor pro popis použitého elementu MKP modelu a nastavení okrajových podmínek. Na konci této kapitoly bude provedeno porovnání výsledků z MKP modelu s výsledky z experimentu.

Tématu vývoje modelu se věnovali autoři článků [3], [4], [5]. Autoři v článku [3] vytvořili MKP model vtlačování indentoru do trouby, ve které byl nastaven tlak, který působil na vnitřní stěnu trouby a zkoumali jeho vliv na reakční sílu. V MKP modelu použili čtyři varianty velikosti indentoru a také 4 různá tlaková zatížení. Článek [4] shrnuje základní poznatky, které se vyskytují v simulaci vtlačování indentoru do trouby. V tomto článku jsou uvedeny vlivy okrajových podmínek na výsledné reakční síly. V tomto článku byla nastavena limitní hodnota reakční síly, při které došlo k následnému odlehčení trouby. Autor článku [6] se věnoval obecnému shrnutí problematiky týkající se vývoje MKP modelu pro vtlačování indentačního nástroje do trouby a problematice, která se věnuje vyhodnocení porušování potrubí.

Dále budou výsledky z MKP modelu vyhodnoceny dle doporučení dodatku normy ASME B31.8-2016 za pomoci určení křivosti v obvodovém a osovém směru, hloubky a délky promáčkliny [2].

Kapitola 2

Elasto-plastické chování materiálů

Slovo plastické pochází z řeckého slovesa, které znamená měnit tvar. Tato definice je aplikována na materiály, které jsou schopny změnit tvar při zatěžování a následně tento tvar udržet po odlehčení. Takové nevratné tvarování začíná obvykle po překročení určité meze. Odezva materiálu je elasto-plastická dokud není dosažena mez kluzu. To znamená, že těleso se vrátí do původního tvaru po odlehčení. [7]

Podle experimentálních pozorování je plastická deformace doprovázena velmi malou změnou objemu. Tento jev se primárně vyskytuje u kovů, kde je plastická deformace výsledkem kluzu mezi rovinami krystalických mřížek, způsobených pohybem dislokací [7].

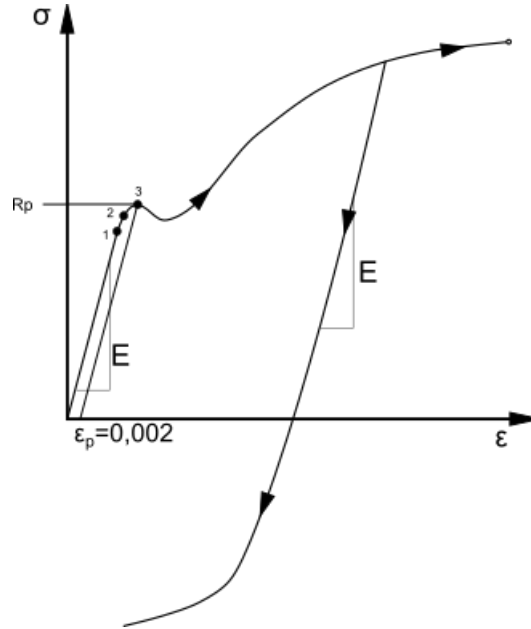
2.1 Tahová zkouška oceli

Na obrázku 2.1 je znázorněna tahová křivka typická pro tvárný kov. Je zobrazeno napětí σ v závislosti na přetvoření ε . První charakteristický bod 1 v tomto diagramu je hodnota napětí meze úměrnosti R_u . Do této hodnoty je napětí σ lineárně závislé na přetvoření ε . Tato závislost je reprezentována Hookeovým zákonem ve znění daném následující rovnicí.

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.1)$$

Na tomto obrázku je rozvněž znázorněna mez pružnosti, po odlehčení z tohoto bodu se vzorek vrátí do počátečního vzthahu. Je-li vzorek zatěžován nad napětí na mez kluzu a poté znovu odlečen, nevrátí se zpět do původního stavu. Tato skutečnost je způsobena zbytkovým přetvořením. Obecně je těžké vyhodnotit limit, do kterého přetvoření obsahuje pouze elastickou složku. Z tohoto důvodu je definována tzv. smluvní mez kluzu $R_{p0,2}$, kterou lze vidět na obrázku jako bod 3. Toto napětí odpovídá hodnotě přetvoření ε o hodnotě

0,2 %. Zatěžování nad tuto hodnotu R_e je obvykle charakterizováno tzv. zpevňovací oblastí [7].



Obrázek 2.1: Tahová zkouška pro tažný materiál [7]

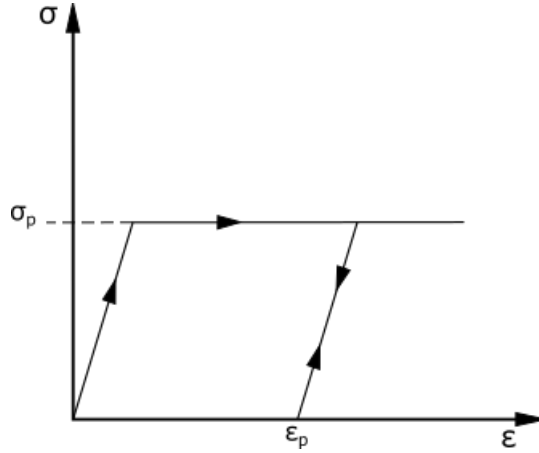
2.2 Ideálně pružně-plastický materiál

Jako ideálně pružně-plastický materiál se uvažuje takový materiál, který nevykazuje zpevňování (hardening) během deformace, ale ani jeho změkčování (softening). Chování takového materiálu je znázorněno grafem tahové zkoušky, charakterizované diagramem závislosti napětí na přetvoření obr. 2.2. Křivka, která charakterizuje průběh odlehčování je rovnoběžná s křivkou pro zatěžování. V rámci teorie plasticity se jedná o malá přetvoření, která lze popsat tenzorem konečných přetvoření, viz rovnice (2.2) [7].

$$\epsilon = \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial X^j} + \frac{\partial u^j}{\partial X^i} \right) \quad (2.2)$$

Z aditivní dekompozice celkového přetvoření ϵ na elastickou ϵ_e a plastickou část ϵ_p lze určit tenzor konečných přetvoření [7].

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \quad (2.3)$$



Obrázek 2.2: Tahová zkouška pro ideálně pružno-plastický materiál [7]

Za předpokladu lineárního chování v elastické oblasti na obr. 2.2 je napětí dáno vztahem.

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (2.4)$$

Člen ε_p reprezentuje plastické přetvoření, které lze určit při odlehčování. Zobecněním vztahu (2.4) do 3D prostoru a nelineárního elastického chování lze definovat tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ následujícím vztahem [7].

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (2.5)$$

Člen $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}_e)$ označuje funkci elastické odezvy. V tomto významu lze určit, že současné napětí $\boldsymbol{\sigma}$ nezáleží jen na současném přetvoření $\boldsymbol{\varepsilon}$, ale je závislé na historii deformace, která je dána vztahem v rovnici členem $\boldsymbol{\varepsilon}_p$. [7]

Takové parametry, které jsou závislé na historii deformace a které nelze přímo změřit, se nazývají vnitřní proměnné. Označením setu přídatných vnitřních proměnných $\boldsymbol{\xi}$ může být rovnice (2.5) zobecněna na tvar uvedený níže. [7]

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\xi}) \quad (2.6)$$

2.3 Materiálové modely

Tak jako je tomu u hyperelastických materiálů, i v teorii plasticity lze využít pro předpis závislosti napětí na přetvoření takzvané materiálové modely. V podkapitole 2.2 byl podrobně popsán ideálně pružno-plastický materiál. V této části budou uvedeny další materiálové modely pro možný popis plastického chování materiálu během zatěžování.

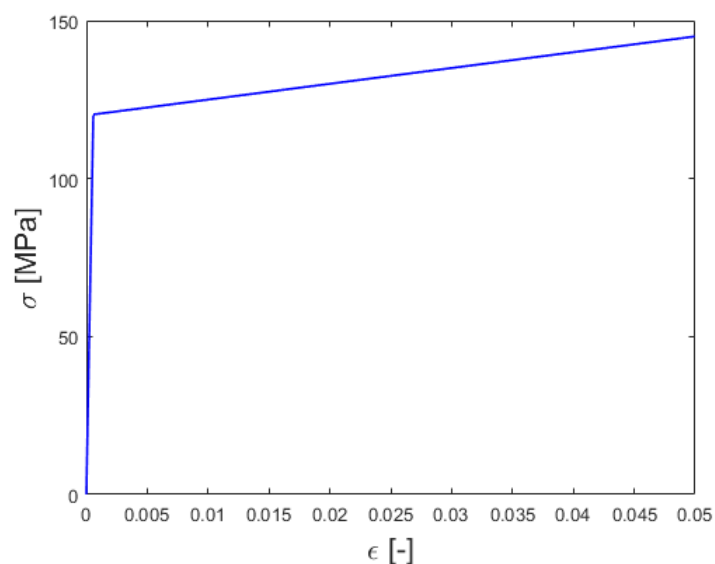
Lineárně zpevňující materiál

Typická zatěžovací křivka je bilineární závislost se sklony E_1 a E_2 , které reprezentují elastické a plastické chování materiálu. Obecně platí, že sklon E_2 má výrazně menší hodnotu než sklon E_1 . [8]

Například pro žíhanou ocel jsou hodnoty sklonu $E_2 \cong 70 \text{ MPa}$ a $E_1 = 210 \text{ GPa}$.

Předpis odezvy napětí v plastické oblasti je dán následujícím vztahem. [8]

$$\sigma = \sigma_0 + K\varepsilon \quad (2.7)$$



Lineárně zpevňující materiál

Parabolické zpevňování (Ramberg-Osgood)

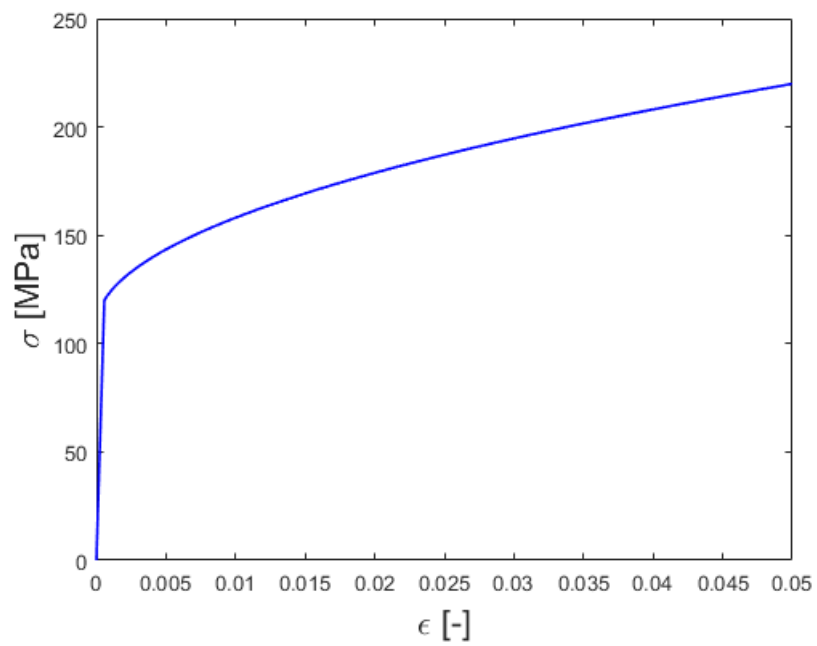
Materiálový model Ramberg-Osgood bývá obvykle používán pro kovové materiály bez výrazné meze kluzu. [8]

Tento materiálový model lépe nahrazuje zatěžovací křivku typickou pro zpevňování materiálu, která se označuje výrazem *work-hardening* [8].

Materiálový model lépe nahrazuje postupný růst napětí v plastické oblasti zatěžování.

$$\sigma = \sigma_0 + K\varepsilon^n \quad (2.8)$$

Mocnina n je takzvaný zpevňující koeficient. Jeho hodnota je vždy menší než 1. [8]



Parabolické zpevňování

Kapitola 3

Metody pro vyhodnocování napětí na základě experimentálních měření

Před provedením experimentálního zatěžování testované trouby byly na vnitřní stěnu trouby umístěny odporové tenzometry v předpokládaných směrech hlavních přetvoření. Byla předpokládána přetvoření v osovém a obdovém směru trouby. Poloha umístění tenzometrů byla určena předpokládanou polohou středu indentoru.

Tenzometry byly dvojího typu, definované hodnotou maximální povolené přetvoření 5 % a 10 %. Z naměřené odezvy tenzometrů vyplývá, že bylo překročeno napětí na mezi kluzu. Odezvu tenzometrů nad mezi kluzu je třeba vyhodnotit.

K vyhodnocení byly použity následují dvě metody. Tyto metody jsou popsány ve člancích [9] a [10]. Jejich znění bude uvedeno v následujících dvou odstavcích. Praktickému provedení vyhodnocení dat se věnuje kapitola 4.

3.1 Vyhodnocení napětí z tenzometrického měření na základě sekantového modulu a kombinovaného Poissonova čísla

Vyhodnocení odezvy materiálu v elastické oblasti pro dvouosou napjatost platí následující vztahy pro hlavní napětí σ_1 a σ_2 :

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \quad (3.1)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \quad (3.2)$$

Na základě deformační energie pro změnu tvaru jsou porovnávány víceosé napjatosti. V elastické oblasti je ekvivalentní napětí nižší než mez kluzu R_e . Následující vztah je von Mises kritérium.

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3 \quad (3.3)$$

Předpis v rovnici (3.3) platí pro 3D napjatost. V případě dvouosé napjatosti platí vztah:

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \quad (3.4)$$

Předpokládáme, že pro víceosou napjatost je ekvivalentní napětí σ_{eq} a ekvivalentní přetvoření ε_{eq} svázány vztahem (3.5). Jedná se o podobnou závislost jako v případě jednoosové napjatosti.

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\sigma_{eq}}{E} \quad (3.5)$$

Předpokládáme, že v naší troubě vzniká dvouosá napjatost určená hlavními napětími a to napětím osovým a obvodovým. Skutečné přetvoření je však tříosé. Ekvivalentní přetvoření ε_{eq} určíme z následujícího vztahu.

$$z\varepsilon_{eq}^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2\varepsilon_3 \quad (3.6)$$

Součinitel z v předešlé rovnici (3.6) odvodíme z jednoosé napjatosti. [9]

$$\sigma_1 = \sigma_{eq}; \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (3.7)$$

Pro hlavní složky přetvoření platí následující vztahy.

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_1; \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1 \quad (3.8)$$

Kdy z je dáno následujícím tvarem. Celé odvození pro z je uvedeno v příloze E.

$$z = (1 + \nu)^2. \quad (3.9)$$

Dosazením z do rovnice (3.6) je ekvivalentní přetvoření určeno vztahem níže.

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{1 + \nu} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2\varepsilon_3}. \quad (3.10)$$

Pro hlavní složku přetvoření ε_3 při dvouosé napjatosti platí následující vztah.

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (3.11)$$

Dosažením ε_3 do rovnice 3.10 dostaneme ε_{eq} jako:

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{N_q(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + N_g\varepsilon_1\varepsilon_2}, \quad (3.12)$$

kde nové proměnné N_q a N_g závisí na Poissonově čísle

$$N_q = \frac{1 - \nu(1 - \nu)}{(1 - \nu^2)^2} \quad (3.13)$$

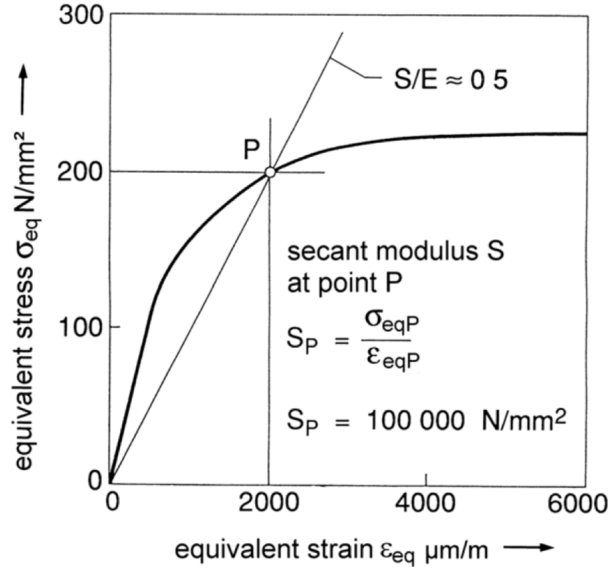
a

$$N_g = \frac{-1 + \nu(4 - \nu)}{(1 - \nu^2)^2}. \quad (3.14)$$

V elastické oblasti je Poissonovo číslo ν konstatní (pro ocel $\nu = 0,3$). Proměnné N_q a N_g jsou také konstatní s hodnotami ($N_q = 0,954$ a $N_g = 0,133$).

Po překročení meze kluzu R_e přestává platit Hookeův zákon. Pro ekvivalentní přetvoření platí $\varepsilon_{eq} > \varepsilon_{elast}$. V celkovém přetvoření se vyskytuje plastická složka přetvoření. Tahová křivka může být popsána nelineární funkcí. [9]

$$\sigma_{eq} = \sigma(\varepsilon_{eq}) \quad (3.15)$$



Obrázek 3.1: Definice sekantového modulu na tahové křivce, převzato z [9]

Na grafu 3.1 je znázorněna geometrická reprezentace sekantového modulu (*secant modulus*). Tento modul je vyhodnocen pro každou hodnotu přetvoření v plastické oblasti. Pro ekvivalentní deformaci poté platí následující vztah.

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\sigma_{eq}}{S} \quad (3.16)$$

V plastické oblasti je použito tzv. kombinované Poissonovo číslo ν_g (combined Poisson ratio), které leží v intervalu $\nu \leq \nu_g \leq 0,5$, kde pro velké plastické deformace se jeho hodnota blíží 0,5. [9]

$$\nu_g = 0,5 - (0,5 - \nu) \frac{S}{E} \quad (3.17)$$

V plastické oblasti se hlavní napětí vyhodnotí z následujících vztahů:

$$\sigma_1 = \frac{S}{1 - \nu_g^2} (\varepsilon_1 + \nu_g \varepsilon_2) \quad (3.18)$$

$$\sigma_2 = \frac{S}{1 - \nu_g^2} (\varepsilon_2 + \nu_g \varepsilon_1). \quad (3.19)$$

3.2 Vyhodnocení napětí na základě zákona tečení

Další metodou, která byla použita pro vyhodnocení tenzometrických dat, je metoda založená na zákonu tečení. V této části bude vysvětlen postup výpočtu pro vyhodnocení naměřených tenzometrických dat.

Pro případ zatěžování trouby uvažujeme na vnitřní stěně dvouosou napjatost. Tenzometry jsou přilepeny na vnitřní stěně trouby ve směrech předpokládaných hlavních napětí σ_1 a σ_2 , hlavní napětí σ_3 je rovno nule. Pomocí tenzometrů jsou měřena přetvoření ε_1 a ε_2 v hlavních směrech. Napjatost je z hlediska přetvoření tříosá. Hlavní přetvoření ε_3 lze dopočítat podle vztahu (3.11) uvedeného na straně 20.

Po určení hlavních přetvoření je nutné vypočítat přírůstek napětí $\Delta\sigma$ v těchto hlavních směrech dle následujících vztahů.

$$d\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (d\varepsilon_1 + \nu d\varepsilon_2) \quad (3.20)$$

$$d\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (d\varepsilon_2 + \nu d\varepsilon_1) \quad (3.21)$$

Napěťový přírůstek $\Delta\sigma^T$ je přičten k předchozímu napěťovému stavu σ . Tento napěťový stav se nazývá zkušební napěťový stav, ze kterého je nutné určit, zda daná napjatost leží v elastické oblasti nebo zda byla překročena mez kluzu. [10] V našem případě zkušební napěťový vztah představuje víceosou

rovinou napjatost, pro kterou vypočítáme ekvivalentní napjatost podle von Mises. Pro výpočet ekvivalentního napětí σ_{eq} je v této metodě použito HMM kritérium určené vztahem (3.22).

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}} \quad (3.22)$$

Výpočet deviatorický napětí je uveden v příloze D podle vztahu D.5 na straně 77. Výpočtené ekvivalentní napětí je porovnáno s napětím na mezi kluzu. Pokud je ekvivalentní napětí σ_{eq} menší než napětí na mezi kluzu R_e , tak se daná napjatost nachází v elastické oblasti. V opačném případě je nutné určit, zda se předchozí napěťový stav nacházel v elastické oblasti nebo už byla překročena mez kluzu. [10]

Pokud se předchozí napěťový stav nacházel v elastické oblasti musí být určen koeficient R . Hodnota tohoto koeficientu R se pohybuje v rozmezí hodnot $<0,1>$. Hodnota koeficientu R je určena iteračně z rovnice (3.23).

$$F(\boldsymbol{\sigma}_c, \boldsymbol{\varepsilon}_p, k) = 0 \quad (3.23)$$

Tenzor $\boldsymbol{\sigma}_c$ je určen následujícím vztahem. [10]

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \boldsymbol{\sigma} + R \Delta \boldsymbol{\sigma}^T \quad (3.24)$$

V případě, že předchozí napěťový vztah ležel v plastické oblasti je nutné určit součin přírůstku deviatorických napětí s tenzorem deviatorických napětí z předešlého napěťového stavu. Pro případ, že výsledný součin je větší nebo roven nule, pak koeficient R má nulovou hodnotu. V opačném případě je nutné koeficient R určit dle rovnice (3.23). Dále je vypočtena hodnota ekvivalentního přetvoření podle následujícího vztahu.

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} \quad (3.25)$$

Indexy i a j nabývají hodnot 1, 2 a 3.

Po vypočtení koeficientu R jsou z nového napěťového stavu vypočteny deviatorické složky napětí. Plastický součinitel je vypočten z Prantlových-Reusových rovnic, tyto rovnice jsou uvedeny v příloze E. [10].

$$d\lambda = \frac{\frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot [(S_{xx} + \nu S_{yy})d\varepsilon_{xx} + (S_{yy} + \nu S_{xx})d\varepsilon_{yy} + 2(1-\nu)S_{xy}d\varepsilon_{xy}]}{\frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot [S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + 2\nu S_{xx}S_{yy} + 2(1-\nu)S_{xy}^2] + \frac{4}{9}\sigma_{eff}^2 \frac{d\sigma}{\varepsilon_p}} \quad (3.26)$$

Hodnota přírůstku plastického přetvoření je vypočtena z plastického násobku a tenzoru deviatorických napětí dle následujícího vztahu. [10]

$$d\varepsilon_p = d\lambda \mathbf{S} \quad (3.27)$$

Tenzometry měří celou složku přírůstku přetvoření (elastickou a plastickou), pro další krok je nutné od celkové složky přírůstku přetvoření odečíst plastickou část. Pro určení nového napětového stavu je důležitá elastická složka přírůstku přetvoření. Tato metoda předpokládá elastický přírůstek napětí. Nový napětový stav je určen následujícím vztahem.

$$\boldsymbol{\sigma}^N = \boldsymbol{\sigma}_c + \mathbf{C}d\boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (3.28)$$

V dalším kroku je vypočteno ekvivalentní plastické přetvoření. Hodnota tohoto ekvivalentního přetvoření se dosadí do předpisu $\sigma(\varepsilon_p)$, který popisuje funkci zpevňování materiálu i . Dosazením ekvivalentního plastického přetvoření ε_p do tohoto předpisu získáme novou hodnotu meze kluzu.

V této metodě je použita zpětná vazba, tzn. že po vypočtení nového napětového stavu se ověří, zda daný napětový vztah skutečně leží na mezní ploše. Pokud tomu tak není, je nová mez kluzu vydělena hodnotou ekvivalentního napětí pro nový napětový stav. Tento podíl je označen součinitelem β . Po určení koeficientu β je daný napětový stav vynásoben tímto koeficientem. [10]

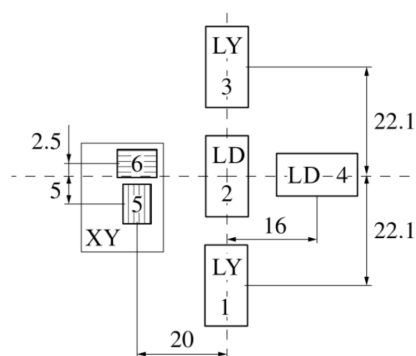
Kapitola 4

Vyhodnocení experimentálního měření

V kapitole 3 byla uvedena teorie k vyhodnocování napětí z naměřených tenzometrických dat. V laboratoři katedry aplikované mechaniky, pružnosti a pevnosti byl proveden experiment vtlačování indentoru do plynovodní trouby, viz obr. 4.1. Na vnitřní ploše trouby, v místě předpokládaného středu indentoru byly přilepeny odporové tenzometry. Jejich rozložení lze vidět na obr. 4.2.



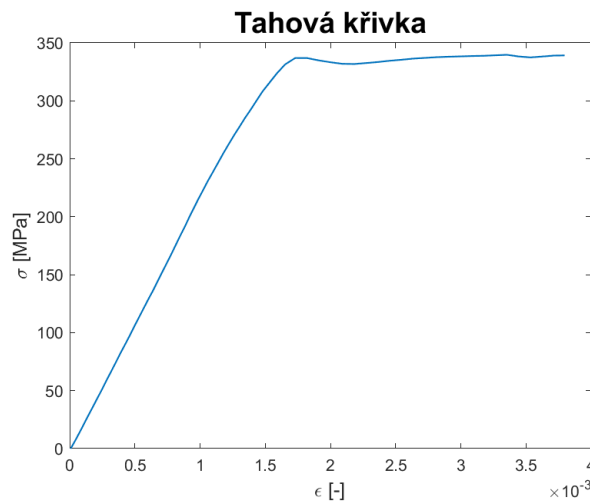
Obrázek 4.1: Experiment, převzato z [12]



Obrázek 4.2: Rozložení tenzometrů pod indentorem pro první experiment, převzato z [13]

Byly provedeny dva experimenty. U prvního experimentu byla nastavena hodnota maximálního posuvu lože 60 mm, následně byla trouba odlehčena. U druhého experimentu byl posuv lože stupňovitý. Zatížení proběhlo v sedmi krocích. Každý krok představuje vtlačení indentoru o danou hodnotu posuvu a následné odlehčení. Během indentace byla měřena reakční síla, silové čidlo

bylo umístěno nad indentorem. Tato reakční síla byla nastavena na maximální přípustnou hodnotu. Tato maximální přípustná síla byla různá pro každý krok zatížení. Při rovnosti reakční síly s maximální přípustnou hodnotou došlo k postupnému odlehčení trouby. V prvním kroku indentace byla maximální hodnota reakční síly rovna 30 kN. V každém následujícím měření byla přípustná hodnota reakční síly zvýšena o 30 kN.



Obrázek 4.3: Tahová křivka

4.1 Postup výpočtu pomocí první metody

V podkapitole 3.1 byla popsána teorie k vyhodnocovací metodě napětí v plastické oblasti. V tomto odstavci bude uveden postup, jak byl naprogramován vyhodnocovací algoritmus v prostředí softwaru Matlab.

V prvním kroku bylo vytvořeno vektorové pole ε_{eq} s počáteční hodnotou přetvoření na mezi kluzu R_e . V dalším kroku bylo nutné vyhodnotit průběh sekantového modulu v závislosti na zvyšujícím se přetvoření, průběh pro případ použitého materiálu je na obrázku 4.4. Následně bylo výpočítáno kombinované Poissonovo číslo podle rovnice (3.17) na straně 22. Na obrázku 4.5 je zobrazen průběh kombinovaného Poissonového čísla.

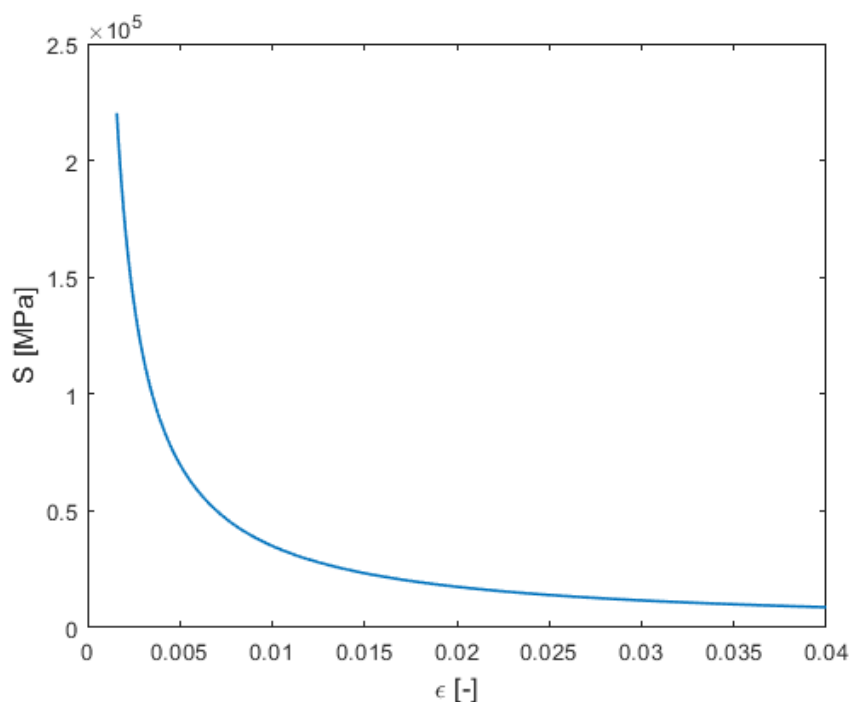
Z naměřených tenzometrických dat byly vypočteny hodnoty $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Pro snazší přehlednost bude tento vektor označen písmenem **A**. Poté byl vypočten vektor hodnot $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, který je označen písmenem **B**. Poté byla řešena rovnice (4.1) na straně 27.

Výsledkem této rovnice bylo nalezení odpovídající pozice přetvoření z naměřených dat. Tímto způsobem bylo vytvořeno pole hodnot, ve kterých

byla uložena pozice přetvoření ε_1 a ε_2 . Tato pozice byla použita pro nalezení odpovídajícího sekantova čísla S a kombinovaného Poissonova čísla ν_g .

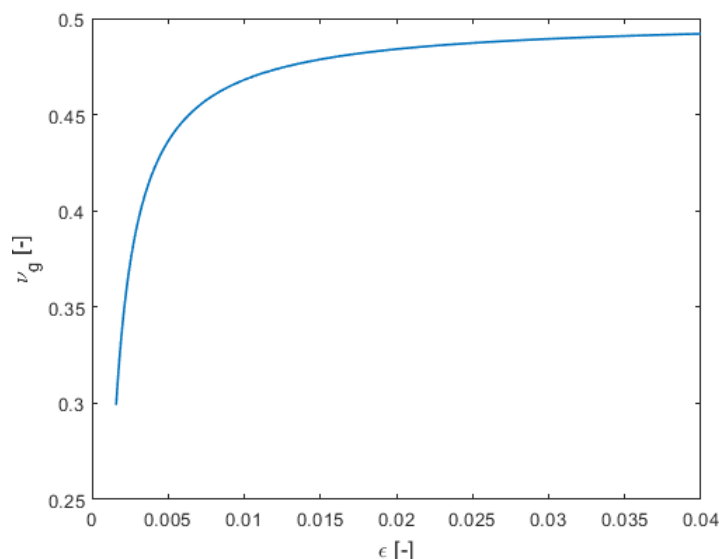
V dalším cyklu byla vypočtena hlavní napětí σ_1 a σ_2 podle rovnice (3.18) a (3.19) uvedených na straně 22. V posledním kroku došlo k vyhodnocení ekvivalentního napětí podle rovnice (3.4) na straně 20. V příloze A je přiložen vývojový diagram pro toto vyhodnocení.

$$0 = N_q \mathbf{A} + N_g \mathbf{B} - \varepsilon_{eq} \quad (4.1)$$



Obrázek 4.4: Průběh sekantového modulu

U sekantového modulu dochází k jeho poklesu se vzrůstající hodnotou přetvoření.



Obrázek 4.5: Průběh kombinovaného Poissonova čísla

Kombinované Poissonovo číslo na rozdíl od sekantova modulu roste se vzrůstající hodnotou přetvoření.

4.2 Postup výpočtu pomocí druhé metody

Vyhodnocovací algoritmus byl naprogramován podle vývojového algoritmu uvedeného v článku [10]. Nejdříve je nutné iniciovat počáteční napěťový stav a hodnoty plastického a ekvivalentního přetvoření. Z vektoru naměřených přetvoření je určen přírůstek hlavních přetvoření

$$d\varepsilon_i = \varepsilon_i(j) - \varepsilon_i(j-1), j = 1, 2. \quad (4.2)$$

Daná napjatost je dvouosá z pohledu napětí, ale z pohledu přetvoření se jedná o tříosou napjatost přírůstek třetího hlavního přetvoření se určí ze vztahu (3.11) uvedeného na straně 20. Po určení přírůstků hlavních přetvoření je vypočten zkušební napěťový stav σ^T [10]. Daný napěťový stav reprezentuje dvouosou napjatost, kterou je nutné převést na jednoosou napjatost, kterou lze porovnat s napětím na mezi kluzu R_e . Pro převod dvouosé napjatosti je použito HMM kritérium uvedeného v rovnici (3.22) na straně 23. Vypočtené ekvivalentní přetvoření je porovnáno s mezí kluzu R_e . Pro případ, že dané ekvivalentní napětí je menší než mez kluzu, pak je daná napjatost v elastické oblasti. Zkušební napěťový stav odpovídá skutečnému napěťovému stavu. K vektoru elastických přetvoření je přičten vektor přírůstku přetvoření.

Pro případ, že ekvivalentní napětí je větší než mez kluzu, je nutné ověřit zda předchozí napěťový stav byl v elastické oblasti. Pokud předchozí napěťový stav ležel v elastické oblasti je nutné určit koeficient R z rovnice (3.23) uvedené na straně 23.

Pokud předchozí napěťový stav ležel v plastické oblasti je ověřen negativní plastický tok, výpočet směru plastického toku je uveden ve vztahu (4.3).

$$\Delta S_{ij}^T(L) \cdot S_{ij}(L - 1) \quad (4.3)$$

Člen $\Delta S_{ij}^T(L)$ je přírůstek deviatorických napětí ze zkušebního napěťového stavu a S_{ij} jsou deviatorická napětí z předchozího napěťového stavu. Pro případ, že daný součin je větší nebo roven 0, koeficient R má nulovou hodnotu. V opačném případě je vypočtena jeho hodnota podle vztahu (3.23) uvedeného na straně 23.

Po určení koeficientu R je vypočtena hodnota ekvivalentního přetvoření ε_{eq} podle vztahu 3.25 uvedeného na straně 23 a je vypočten nový napěťový stav podle vztahu (3.24) na straně 23. Z nového napěťového vztah je vypočten tenzor deviatorických napětí. Z tohoto tenzoru je vypočten plastický násobek. Tímto násobkem se vynásobí tenzor deviatorických napětí. Z tohoto součinu je vypočten tenzor plastických deformací. Od tenzoru přírůstků hlavních přetvoření přetvoření je tento tenzor odečten. Tímto způsobem získáme tenzor elastických přetvoření. Nový napěťový vztah je určen vztahem (3.28) uvedený na straně 24.

K tenzoru plastických přetvoření je přičten přírůstek plastických přetvoření. Z tohoto součtu je vypočteno ekvivalentní plastické přetvoření, jehož hodnota je dosazena do funkce popisující zpevnování materiálu. Z této vypočtené hodnoty napětí se asociuje nová hodnota meze kluzu. K tenzoru elastických přetvoření je přičten přírůstek tenzoru elastických přetvoření.

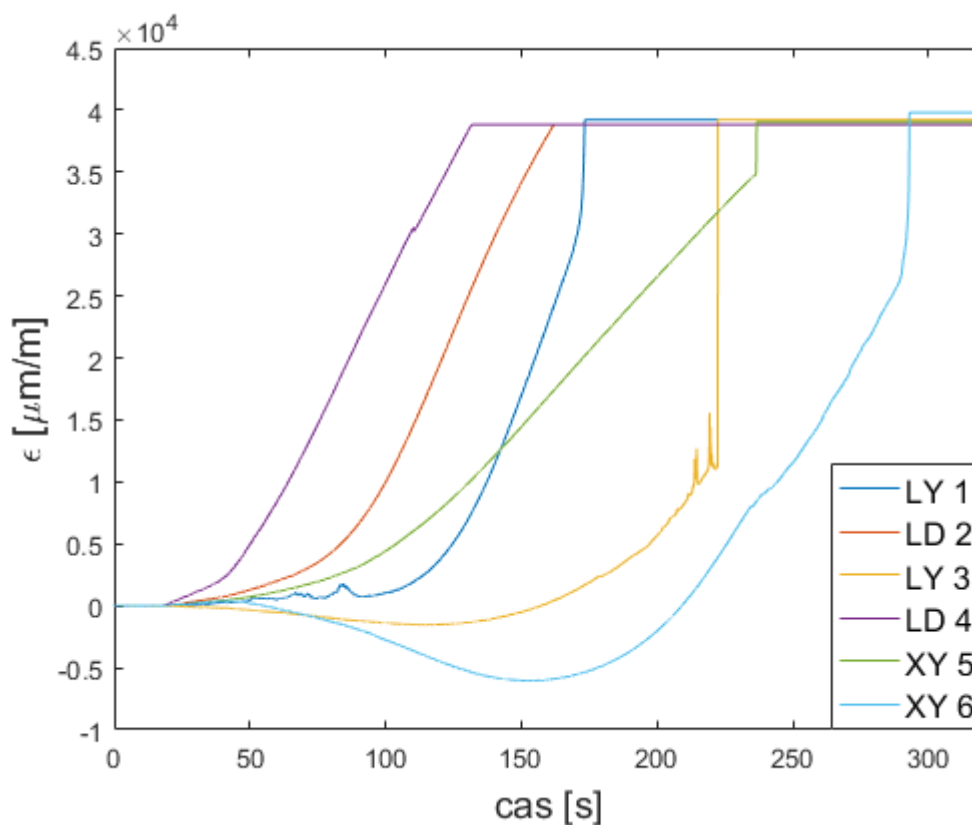
Následně je ověřeno pomocí zákona tečení, zda vypočtený napěťový stav skutečně leží na nové mezní ploše. Pokud tomu tak není, je určen koeficient β podle následujícího vztahu.

$$\beta = \frac{\sigma_{Flow}}{\sigma_{eq}} \quad (4.4)$$

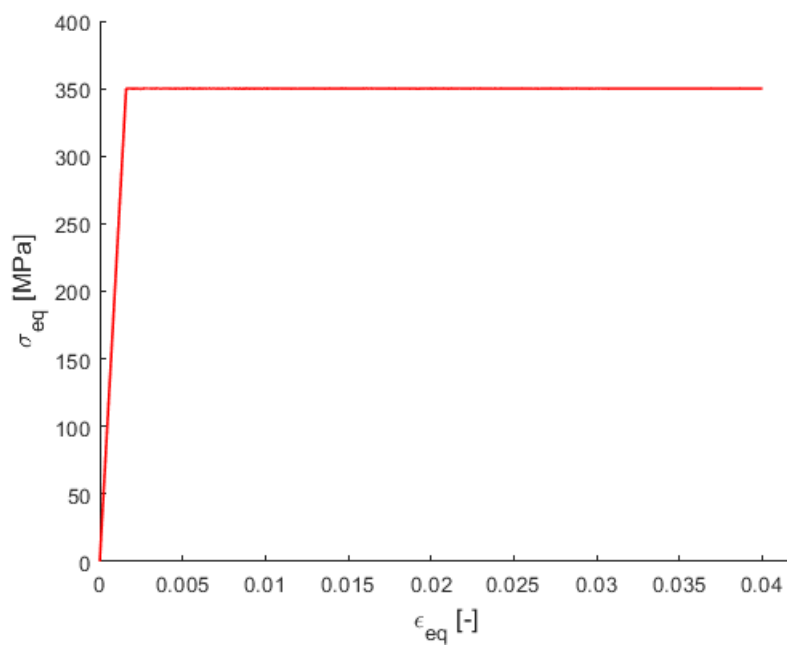
Kde σ_{Flow} je nově asociovaná mez kluzu. Nový napěťový stav se tímto koeficientem β vynásobí a vypočtený tenzor je skutečný napěťový stav.

4.3 Vyhodnocení prvního experimentu

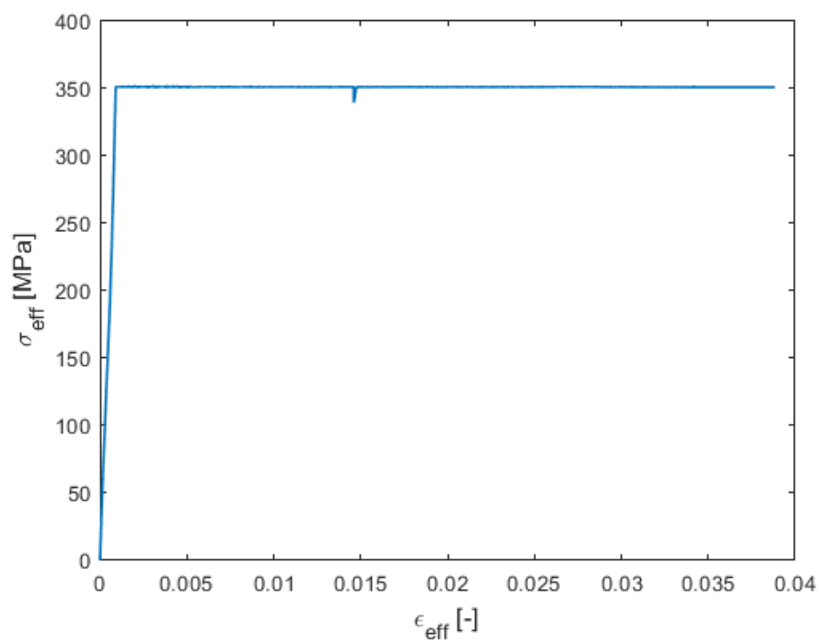
Graf na obrázku 4.6 ukazuje záznam signálu tenzometrů z měřicí karty. Během měření byla zaznamenávána spolu s tenzometrickými daty také reakční síla a poloha loženě. Měřicí karta zaznamenává čas experimentu. Pomocí tohoto parametru lze naměřená data porovnat. Pro vyhodnocení experimentu byly vybrány hodnoty přetvoření z tenzometrů LY 1 a LD 2. U ostatních tenzometrů došlo k překročení jejich měřeného rozsahu. Vyhodnocení tohoto experimentu proběhlo pomocí dvou různých metod. Každá metoda byla podrobně popsána v kapitole 3.



Obrázek 4.6: Naměřená tenzometrická přetvoření



Obrázek 4.7: Vyhodnocení prvního experimentu pomocí sekantova modulu a kombinovaného Poissonova čísla

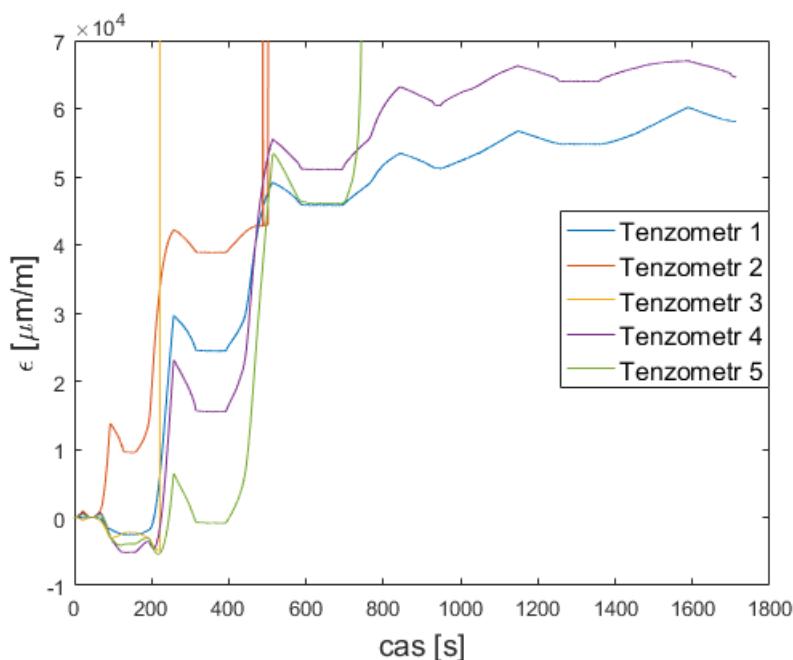


Obrázek 4.8: Vyhodnocení prvního experimentu pomocí zákona tečení

Z obrázků 4.7 a 4.8 vychází pro obě dvě vyhodnocovací metody stejný průběh napětí. Ovšem u vyhodnocení pomocí zákona tečení dochází při přetvoření $\varepsilon = 0,015$ k mírnému poklesu napětí, ovšem tento pokles napětí je jen skokový. Tento pokles může být způsoben numerickou chybou. Pro obě metody vycházejí stejná zbytková napětí. Zbytkové napětí σ_z je rovna 350 MPa. Tyto metody se liší v hodnotou ekvivalentního zbytkového přetvoření. U první metody je hodnota ekvivalentního zbytkového přetvoření rovna 0,04 a u druhé metody je tato hodnota rovna 0,038. Rozdíl pro zbytkové ekvivalentní přetvoření je 5 %.

4.4 Vyhodnocení druhého experimentu

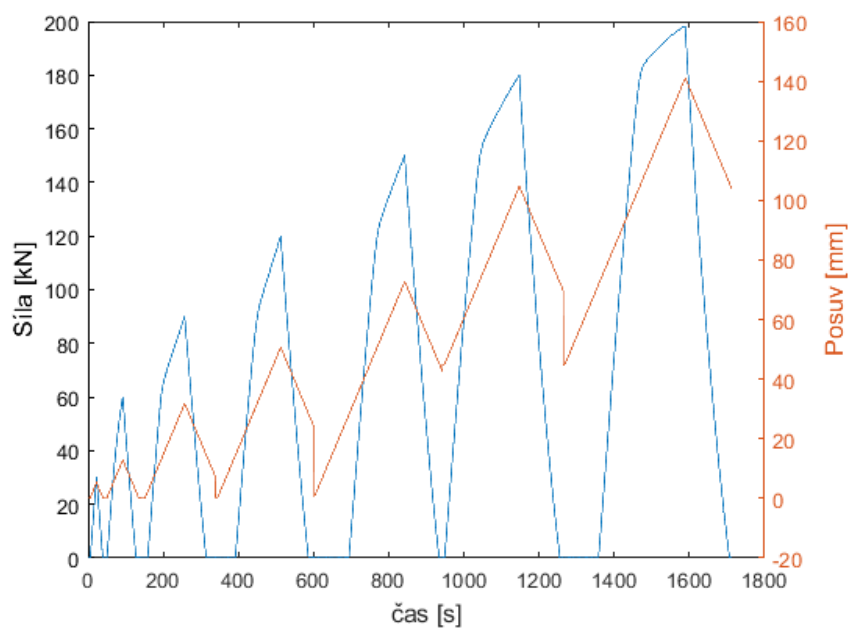
Pro tento experiment byly použity odporové tenzometry s maximální hodnotou přetvoření 5 % a 10 %, jejich rozložení je na obrázku 4.10. Na obrázku 4.9 jsou zobrazena naměřená tenzometrická přetvoření v časové oblasti. Pro vyhodnocení byly vybrány tenzometry 1 a 4. V tomto experimentu byly použity dva typy tenzometrů do hodnot přetvoření 5 % a 10 %. Měřený rozsah u 5% tenzometrů byl překročen krátce (po 800 vteřinách) po začátku měření. Tento experiment byl vyhodnocen pomocí zákona tečení.



Obrázek 4.9: Naměřená tenzometrická přetvoření

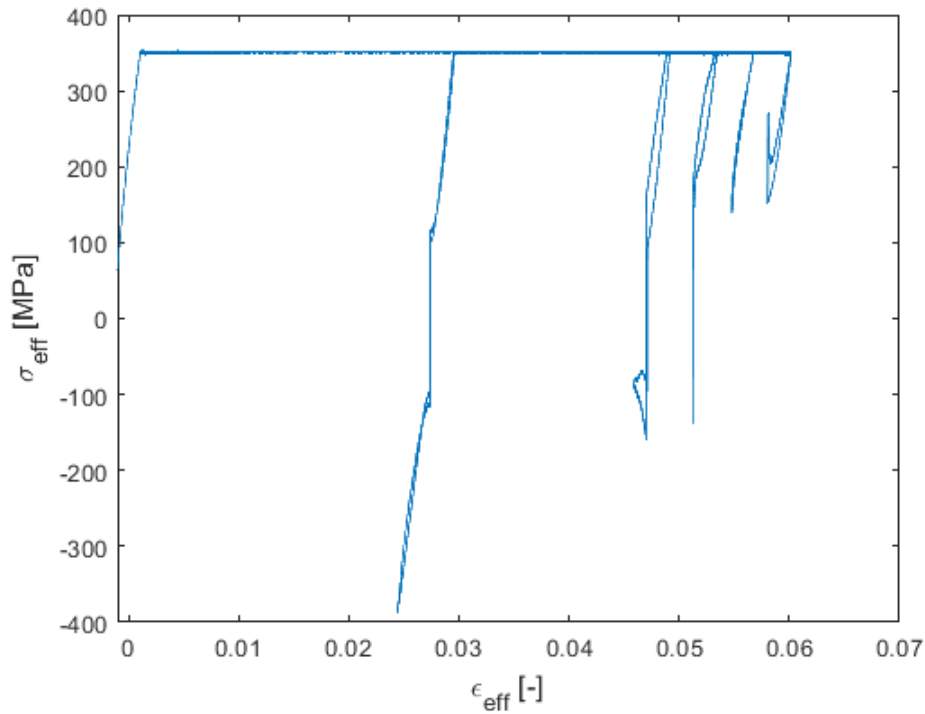


Obrázek 4.10: Rozložení tenzometrů na druhé troubě



Obrázek 4.11: Průběh síly a posuvu při druhém experimentu

Průběh zatěžování je na obrázku 4.11. Při druhém experimentu byla deformována trouba o průměru 530 mm a tloušťce stěny 8 mm. Zatížení probíhalo v krocích, kdy maximální dosažená hodnota síly byla v každém kroku navýšena o 30 kN vůči předchozímu cyklu. Vždy po dosažení žádané síly působící na indenter následovalo odlehčení do odlehnutí (síla 0 kN) a opětovné zatížení. Při zatížení 200 kN bylo měření ukončeno vzhledem k maximálnímu dosaženému vysunutí pístnice.



Obrázek 4.12: Vyhodnocení druhého experimentu pomocí zákona tečení

Na obrázku 4.12 je ekvivalentní napětí v elasto-plastické oblasti vyhodnocené z údajů tenzometrů pomocí metody založené na zákoně tečení. Tímto způsobem lze zmapovat celou historii zatěžování. Na tomto obrázku lze pozorovat průběh zatěžování a odlehčování. Ekvivalentní zbytkové napětí σ_z pro druhý experiment je rovno 350 MPa a hodnota ekvivalentního zbytkového přetvoření je 0,06.

Kapitola 5

Výpočet napětí a přetvoření pomocí MKP analýzy

Obecným trendem je snaha nahradit drahé experimenty numerickými simulacemi. V této diplomové práci byl vytvořen MKP model indentace trouby, který byl porovnán s experimentálním měřením.

5.1 MKP model

Pro simulaci experimentu byl vytvořen MKP model v softwaru Comsol multiphysics ve verzi 5. 3a. V prvním stádiu byl vytvořen zjednodušený MKP model, u něhož se vytvořená geometrie skládala ze dvou součástí. První součást je těleso plynovodního potrubí a druhá součást je model indentoru. Obě tyto součásti jsou spolu ve vzájemném kontaktu.

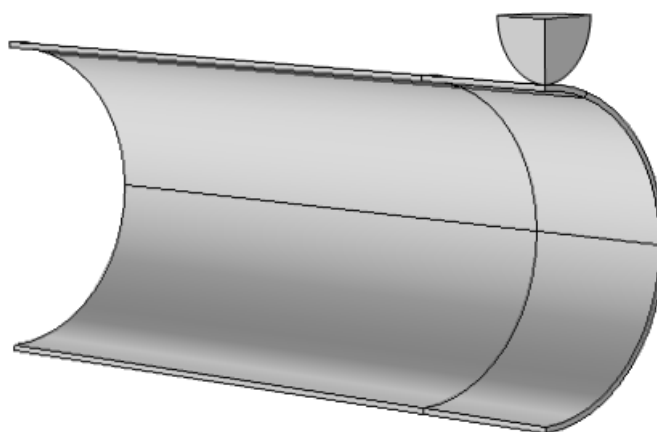
Po zjištění, že okrajové podmínky ovlivňují výsledky MKP analýzy, byl vytvořen nový MKP model. Tento model dostatečně reprezentuje provedený experiment. Druhý vyvívutý MKP model se lišil ve způsobu tuhého uložení tělesa trouby. V tomto modelu byl mezi tělesem lože a troubou definován kontakt. MKP model byl vytvořen na základě doporučení normy API 579-1/ASME FFS-1 2007 úroveň 3 (Level 3 Assessment) [1]. Podle odstavce 12.4.4.3 musí MKP analýza simulovat deformační proces, který způsobil poškození a určit velikost vzniklé trvalé plastické deformace. Proces deformace v sobě musí zahrnovat geometrické a materiálové nelinearity a obsahovat kontaktní prvky. Analýza musí zahrnovat zatížení, které danou deformaci vyvolává [1]. Náš MKP model podmínky této normy splňuje.

5.1.1 Geometrie

Geometrie byla vytvořena v CAD modeláři, který je součástí softwaru Comsol multiphysics. Model geometrie byl vytvořen parametricky. Parametry geometrie modelu byly, poloměr R a tloušťky trouby t . Délka trouby byla 3360 mm. Tabulka 5.1 ukazuje jaké dvě sady parametru byly pro výpočet použity. Poloměr indentoru měl hodnotu 100 mm. Z hlediska symetrie geometrie a zatížení bylo možné zredukovat velikost modelu na model čtvrtinový, viz obrázek 5.1.

Tabulka 5.1: Parametry modelu

Poloměr	tloušťka
R [mm]	t[mm]
265	9,5
265	8



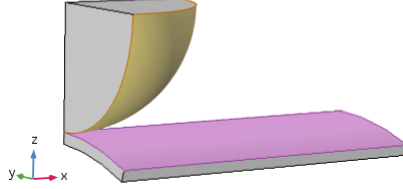
Obrázek 5.1: Vytvořený model

5.1.2 Nastavení kontaktu

V této simulaci se vyskytuje kontakt mezi indentorem a troubou. Software Comsol multiphysics nabízí výběr ze dvou kontaktních formulací. První formulací je tzv. Penalizační metoda (Penalty method) a druhá je metoda smíšených Lagrangeových multiplikátorů (Augmented Lagrange). Mezi kontaktními plochami v této analýze nebylo definováno tření.

Obě metody se liší ve formulaci potenciální energie kontaktních ploch. Penalizační metoda je vhodná pro řešení problémů kontaktů se třením [11].

Lagrangeova metoda je dobře známá pro svou přesnost a je založena na použití Lagrangeových multiplikátorů. Hlavní nevýhodou Lagrangeovy metody je to, že může vést ke špatné konvergenci řešení soustavy. [11]



Obrázek 5.2: Výběr kontaktních ploch

Na obrázku 5.2 je zobrazen výběr kontaktních ploch. Kontaktní plocha u indentoru byla vybrána jako *source* plocha a vnější plášť trouby byl nastaven jako *destination* plocha. Těleso, u kterého je plocha nastavena jako *source*, je uvažováno jako tuhé.

Penalizační metoda

Penalizační metoda v sobě zahrnuje přidání penalizačního členu. Tento člen pomáhá vyrovnat nežádoucí penetrace těles během numerické simulace. V problémech kontaktů se penalizační člen projevuje v celkové tuhostní matici soustavy. Výsledek matice vychází z představy, že jedno těleso imaginárně penetruje druhé. [11]

Tuhostní matice kontaktních elementů je přičtena k tuhostní matici těles, které jsou ve vzájemném kontaktu. Přírůstková rovnice konečného prvku se vyskytuje v následujícím tvaru

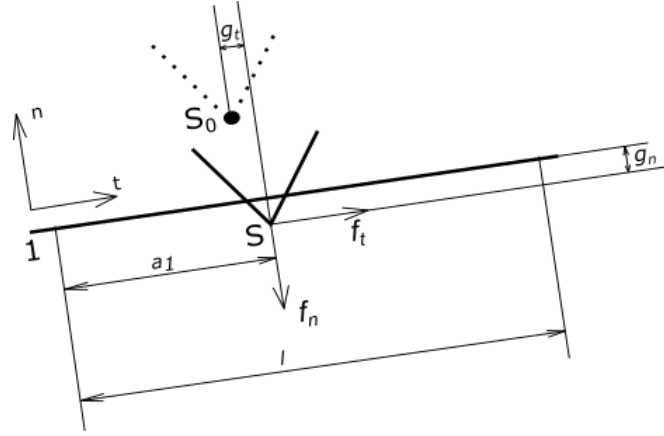
$$[\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_c]\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (5.1)$$

kde $\mathbf{K}_b$ je tuhostní matice kontaktních těles, $\mathbf{K}_c$ je tuhostní matice kontaktních elementů, $\mathbf{u}$ je vektor posuvů a $\mathbf{F}$ je vektor externích sil [11].

Velikost kontaktní plochy je neznámá, proto je tato tuhostní matice nelineární. Obrázek 5.3 znázorňuje kontaktní element v dvoudimenzionální aplikaci. Zahrnuje bod S_0 a hlavní křivku, která spojuje uzly 1 a 2. S_0 představuje uzel před aplikací přírůstku síly a S představuje uzel po aplikaci zatížení.

Tangenciální síla ke kontaktní ploše je rovna velikosti třecí síly, odkud plyne první variace potenciální energie kontaktního elementu [11].

$$\delta\Pi_c = f_n\delta g_n + f_t g_n \delta g_t + \text{sgn}(g_t)\mu_d k_n g_n \delta g_t \quad (5.2)$$

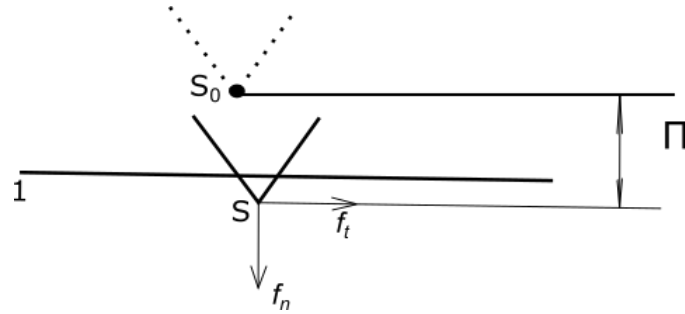


Obrázek 5.3: Kontaktní element-Penalty [11]

Člen k_n představuje penalizační člen použitý k vyjádření vztahu mezi kontaktní silou a penetrací v normálovém směru. Člen k_t představuje penalizační člen vyjadřující pro tečný směr. Člen g_n představuje penetraci v normálovém směru a g_t představuje penetraci v tangenciálním směru. [11]

Metoda Lagrangeových multiplikátorů

Kontaktní síly jsou vyjádřeny pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Tato metoda může být rozdělena od Penalizační metody použita na typy kontaktů *sticking friction*, *sliding friction* a na *frictionless* kontakt. [11]



Obrázek 5.4: Kontaktní element- Lagrangeova metoda

Kontaktní problém obsahuje minimalizaci potenciální energie Π . [11]

$$\Pi(u, \Lambda) = \Pi_b + \lambda^T g + \frac{1}{2} g^T k g, \quad (5.3)$$

kde

$$\Lambda^T = \begin{bmatrix} \lambda_n^1 & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^k \\ \lambda_t^1 & \lambda_t^2 & \dots & \lambda_t^k \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

kde λ_n představuje Lagrangeovy multiplikátory v normálovém směru, λ_t představuje lagrangeovy multiplikátory v tangenciálním směru.

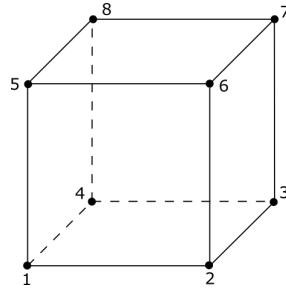
$$g = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \dots & g_n^k \\ g_t^1 & g_t^2 & \dots & g_t^k \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

5.1.3 MKP Síť

Vytvořená síť trouby se skládá z lineárních hexaquad elementů. Síť indentoru je tvořena lineárními hexatetra elementy.

Element hexaquad

Hlavním elementem použitým v tomto MKP modelu je element hexaquad C3D8R. Jeho podoba je zobrazena na obrázku 5.5.



Obrázek 5.5: MKP element C3D8R

U elementu tohoto typu může nastat locking. Existují dva typy locking (*volumetric* a *shear* locking). Je nutné se locking vyvarovat použitím například redukční integrace nebo metodou nekompatibilních módů [15]. I při použití metod, které zabraňují locking, tento element vykazuje tyto nedostatky:

- Tuhost elementu při ohybu může být nedostatečná. [14]
- Napětí a přetvoření jsou nejpřesnější v integračních bodech. Integrační bod elementu C3D8R je v těžišti tohoto elementu. Je nutné použít dostatečně malé elementy, aby byla správně určena koncentrace napětí na hranicích struktur. [14]
- Pro tento element existuje 12 nulových energetických módů, které vedou k hourglass módu. Z tohoto důvodu musí mít element kontrolu těchto módů. [14]

Vytvoření MKP sítě

V MKP simulaci hraje MKP síť důležitou roli, dle statistik vytvoření sítě zabere okolo 30 % celkového času analýzy. Z tohoto důvodu je nutné jí věnovat čas, aby co nejvěrněji reprezentovala řešený problém.

V tomto odstavci bude popsán postup na odladění MKP sítě. V prvním kroku se model nasítuje hrubou sítí a spustí se výpočet. Po dokončení výpočtu se vyhodnotí kontaktní tlak v oblasti zájmu, následně se síť zjemní o polovinu a analýza se spustí znovu. Pokud se kontaktní tlak mezi indentorem a troubou změnil o více jak 5 %, musí být síť znovu zjemněna. Při použití mapované sítě je definována distribuce elementů podél hrany a následně vytvořená plošná síť je distribuována podél tělesa.

Ladění sítě proběhlo ve dvou krocích. Nejprve byla síť zjemňována v axiálním směru. Poté byla síť zjemňována v radiálním směru. Celkový čas na odladění MKP sítě probíhal v rozmezí 200 výpočetních hodin.

Důležitou roli v této simulaci hrála formulace kontaktu mezi troubou a indentorem. Při prvních výpočtech byla formulace nastavena na Penalizační metodu. V dalším testování byla formulace změněna na Augmented Lagrange (metoda Lagrangeových multiplikátorů).

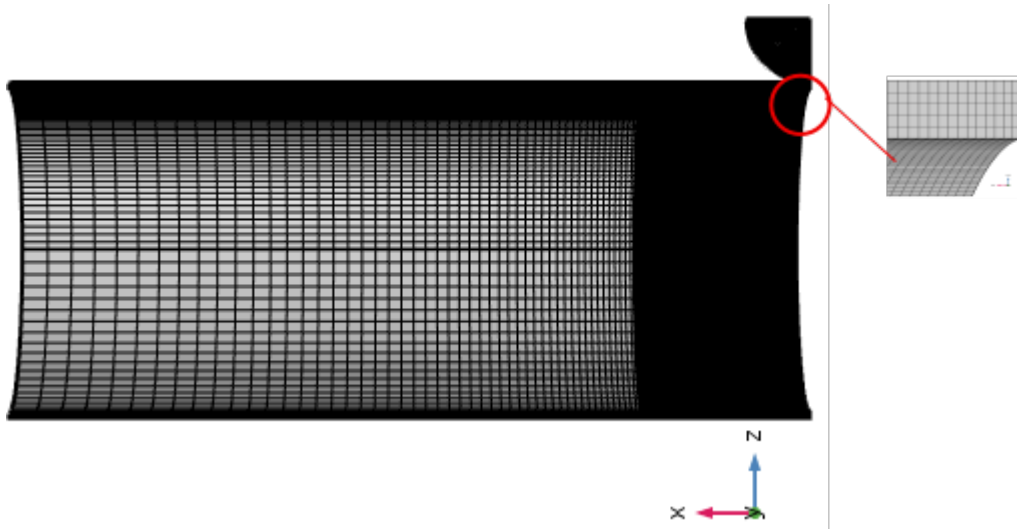
Tabulka 5.2: Porovnání kontaktních tlaků a výpočetních tlaků

Počet elementů	Penalty		Augmented Lagrange	
	Výpočetní čas	Kontaktní tlak [MPa]	Výpočetní čas	Kontaktní tlak [MPa]
66805	13 min 31 s	0	46 min 1 s	251
80805	19 min 26 s	0	1 hod 5 min 46 s	314
91305	24 min 14 s	23	1 hod 29 min	350
94805	33 min 46 s	469	1 hod 39 min 31 s	450
142805	1 hod 24 min 54 s	786	3 hod 25 min 20 s	600
161305	1 hod 43 min	776	4 hod 16 min 11 s	761

V tabulce 5.2 jsou uvedeny výsledky pro jednotlivé kontaktní formulace. V prvním sloupci je uveden počet elementů celé MKP sítě. V dalších dvou sloupcích je uveden výpočetní čas a výsledný kontaktní tlak pro penalizační metodu. V posledních dvou sloupcích je toto vyhodnoceno pro metodu Lagrangeových multiplikátorů.

Výsledky z tabulky 5.2 lze interpretovat tak, že MKP síť u Penalizační metody musí být velmi jemná. Výhodou penalizační formulace je, že výpočet při velmi jemné síti je rychlejší než u metody Lagrangeových multiplikátorů.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů podávala informaci o kontaktním tlaku již při hrubší síti, ale její nevýhodou je časová náročnost. Při použití velmi jemné sítě trval výpočet déle než 6 hodin. U penalizační metody byl výpočetní čas dvakrát rychlejší. Pro obě dvě metody vychází kontaktní tlak v rozmezí 770-780 MPa. V dalších výpočtech bude použita síť s 161305 elementy a nastavenou kontaktní metodou Lagrangeových multiplikátorů. Podél stěny trouby bylo 5 elementů.



Obrázek 5.6: Použitá MKP síť

Na obrázku 5.6 je zobrazena vytvořená MKP síť a souřadnicový systém modelu, na tomto obrázku je i detail sítě v okolí indentace. Tato síť je velmi jemná v oblasti indentace. V oblasti, kde neprobíhá indentace je MKP síť hrubší. Podobnou síť vytvořili i autoři článku [3].

5.1.4 Materiálový model

Při prvních výpočtech byl použit ideálně pružno-plastický materiál s mezí kluzu $R_e = 350 \text{ MPa}$, s hodnotou Youngova modul pružnosti 210 GPa a Poissonovým číslem 0,3. Následně byla do MKP analýzy vložena tahová křivka, která se vkládá ve skutečných napětích σ_s a přetvořeních ε_s . Pro převod inženýrských napětí a přetvoření na skutečná napětí a přetvoření platí vztahy:

$$\varepsilon_s = \ln(1 + \varepsilon_l) \quad (5.6)$$

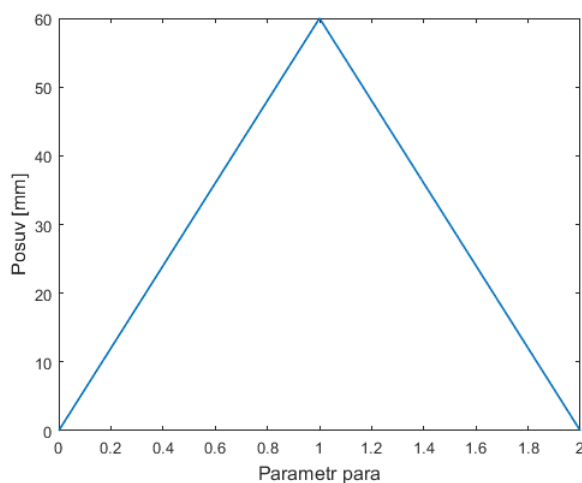
$$\sigma_s = \sigma_i(1 + \varepsilon_l). \quad (5.7)$$

Comsol multiphysics má předdefinované některé materiálové modely plasticity a též umožňuje uživateli nadefinování vlastního materiálového modelu.

Plasticita lze definovat dvěma způsoby. První způsob je vložení tahové křivky a ve druhém způsobu si výpočtář může nadefinovat vlastní předpis plastické odezvy materiálu. Postup pro definici vlastní plasticity je pro oba případy stejný. U vložení tahové křivky je jednodušší zápis. Do interpolované funkce se vloží tahová křivka a v definici plasticity se v nastavení pro *Isotropic hardening model* zvolí *User defined*. Předpis je ve tvaru následovně *název funkce(solid.epe)*. Tento způsob definice plasticity byl použit v tomto případě.

5.1.5 Okrajové podmínky

Vytvořený MKP model má dvě roviny symetrie (rovina XZ a rovina YZ). Na horní plochu indetoru byl předepsán posuv v ose z a v ostatních směrech došlo k zamezení posuvu. Posuv indetoru byl řízen pomocí funkce, která byla funkcí argumentu *para*, viz obrázek 5.7. Pro tento parametr byl nastaven interval od 0 do 2 s definovaným krokem $h=0,1$. U nastavení posuvu je důležité nastavit správný směr posuvu.



Obrázek 5.7: Průběh posuvu indetoru

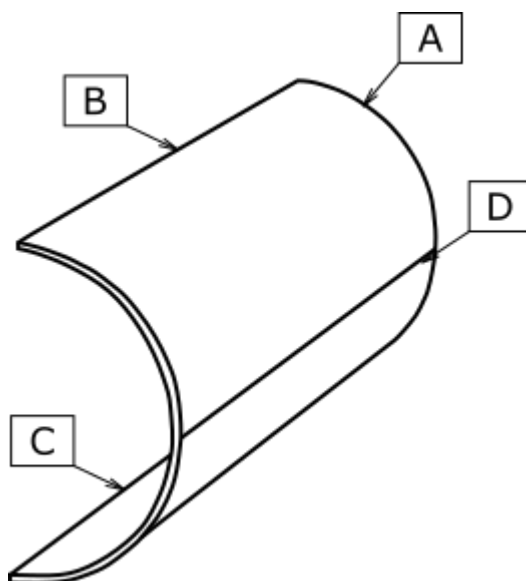
Na spodní hraně trouby došlo k zamezení posuvu ve vertikálním směru, ostatní směry posuvů byly ponechny volné. Software Comsol neumožňuje automatické vložení tzv. weak springs (dále jen pružiny) pro zlepšení konvergence. Z toho důvodu se tyto pružiny přidávají jako okrajové podmínka. Tyto pružiny byly definovány na hranu D, viz obrázek 5.8. Pružiny byly přidány do směrů, ve kterých na spodní hraně nedošlo k zamezení posuvů. Tyto pružiny

nesmí být příliš tuhé, aby neovlivnily výsledky analýzy. Nezatěžovaný konec trouby byl vetknut. Podle článku [3] toto vetknutí představuje předpis pro nekonečně dlouhou troubu.

5.1.6 Vliv okrajových podmínek na velikost reakční síly

Na tuto simulaci byly napsány vědecké publikace [3] a [4], ale každá z nich se liší definicí okrajových podmínek na spodní hraně a na nezatěžovaném konci trouby. Z tohoto důvodu byla vytvořena analýza na vliv okrajových podmínek. Následně došlo k porovnání reakčních sil. Touto studií se zabývali autoři v článku [4]. Je důležité zmínit, že jednotlivé studie se od sebe lišily pouze v nastavení okrajových podmínek. MKP síť a kontaktní formulace byly pro všechny uvedené analýzy nastaveny stejně.

Na obrázku 5.8 jsou znázorněny okrajové podmínky, které byly pro troubu nastaveny. Celkem bylo vytvořeno 5 variant nastavení okrajových podmínek, které se lišily od původního nastavení okrajových podmínek. Jejich nastavení je v tabulce 5.3. Hodnota 0 znamená, že posuv v daném směru byl zamezen. X znamená, že posuv v daném směru byl ponechán volný.



Obrázek 5.8: Znázornění okrajových podmínek, které byly změněny

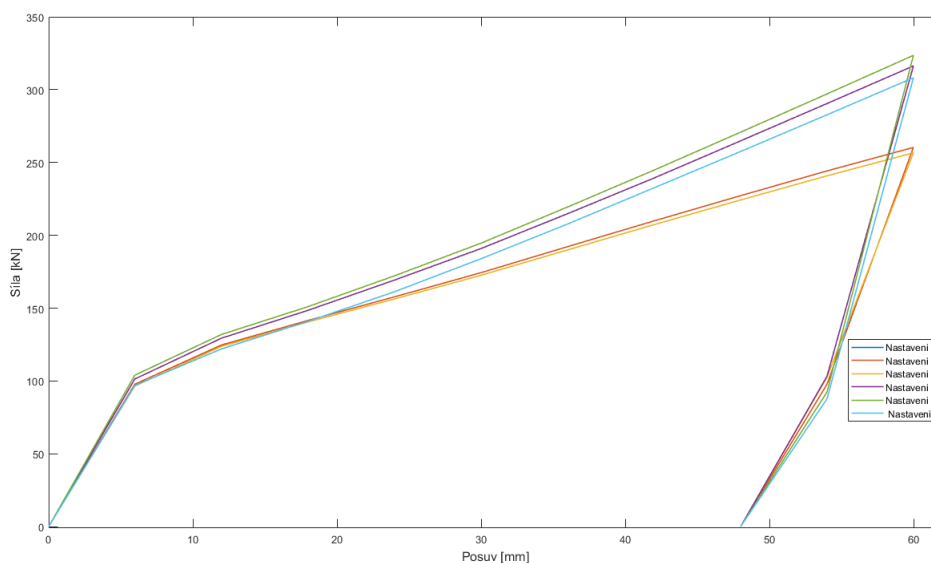
Na obrázku 5.9 je zobrazen průběh výsledné reakční síly na indenter v závislosti na posuvu. Obrázek podává informaci, že vypočtené reakční síly se pro nastavení 1-3 se od sebe neliší, to samé platí pro nastavení 4-6.

Nastavení 4 ovšem neodpovídá realnému experimentu. Trouba byla na spodní ploše podepřena, což v této analýze nebylo zohledněno. V nastavení

Tabulka 5.3: Nastavení okrajových podmínek

	směr	Nastavení 1	Nastavení 2	Nastavení 3	Nastavení 4	Nastavení 5
A	x	0	0	X	0	0
	y	0	0	X	0	0
	z	0	0	0	0	0
B	Symetrie v rovině XZ					$\nu_{stat} = 0,2$
C	Symetrie v rovině XZ					
	x	0	0	X	X	0
	y	0	0	X	X	0
	z	0	0	X	0	0
D	Weak springs					
		NE	ANO	ANO	NE	ANO

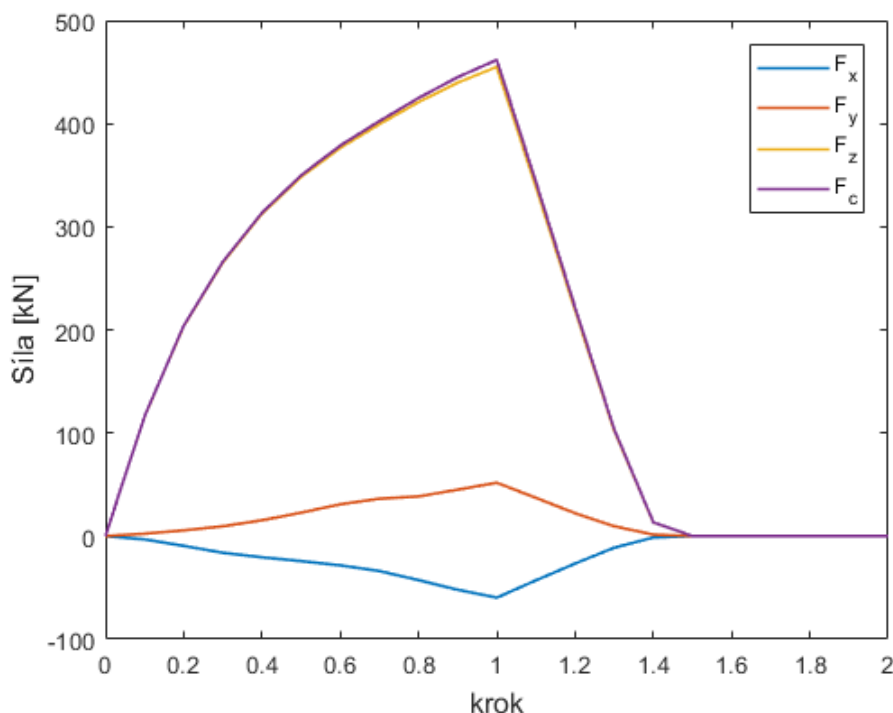
5 bylo přidáno tření mezi indentorem a troubou, okrajové podmínky byly stejné jakood nastavení 6. Nastavení 6 představuje nastavení, pro které byla odladěna MKP síť.



Obrázek 5.9: Výsledek pro různá nastavení okrajových podmínek

Na obrázku 5.9 je vyhodnocena pouze reakční síla ve vertikálním směru tzn. ve směru osy zatěžování. Je nutné ověřit zda síly v ostatních směrech nemají vliv na výslednou reakční sílu. Na obrázku 5.10 je znázorněn průběh reakčních sil i v ostatních směrech kolmých na směr zatěžování. Obrázek 5.10 podává informaci o celkové reakční síle na indentor. Hlavní složkou celkové

reakční síly je reakční síla ve směru osy zatěžování a vliv ostatních složek reakcí může být zanedbán.



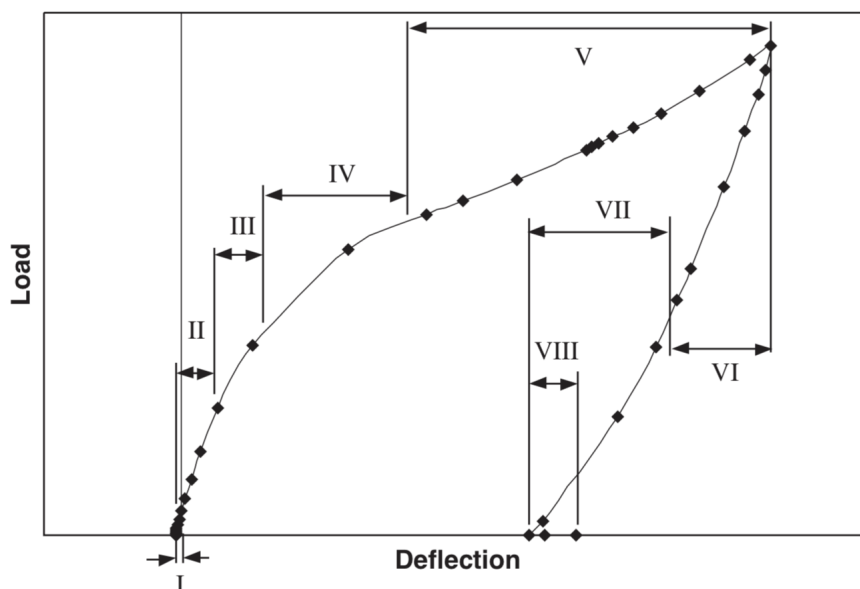
Obrázek 5.10: Reakční síly a jejich vliv na celkovou reakční sílu

5.2 Výsledky z numerické analýzy

V této kapitole budou zhodnoceny výsledky z MKP analýzy. Tyto výsledky budou porovnány s výsledky z provedených experimentů. Na obrázku 5.11 je zobrazen charakteristický průběh síly na posuvu při indentaci trouby uvedený v článku [3]. Průběh síly v závislosti na posunu lze rozdělit podle článku [4] do 8 fází:

- Fáze I: při aplikaci tlaku dochází k radiální expanzi trouby.
- Fáze II: při první aplikaci radiální síly, elastický posuv válce vede až k první mezi. Prohnutí se nejprve vyskytuje pod indentačním nástrojem na vnější ploše trouby.
- Fáze III: při pokračování indentace postupuje průhyb skrz tloušťku stěny. Na konci této fáze trouba plně dosáhla své plastické kapacity v podélném směru.

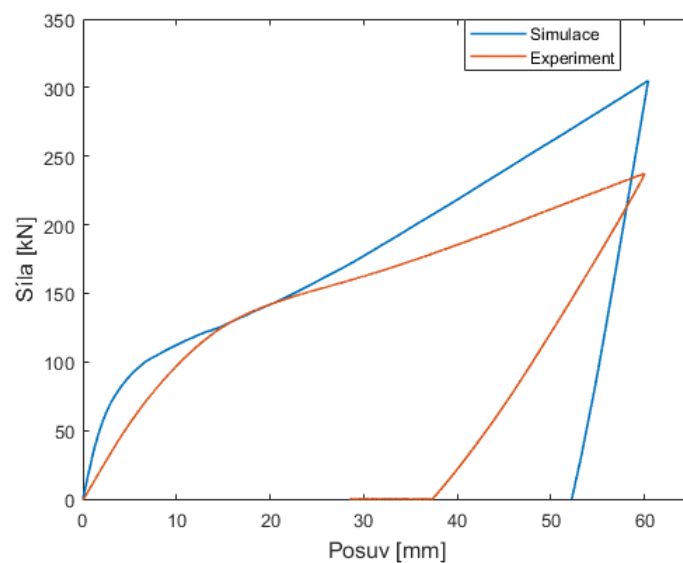
- Fáze IV: začátek plastické deformace v příčném směru výrazně ovlivňuje tuhost trouby.
- Fáze V: při růstu posuv indentoru dochází opět ke zvyšování tuhosti.
- Fáze VI: v této fázi dochází k odlehčování indentačního nstroje a to vede k elastickému zotavení.
- Fáze VII: při poklesu indentační síly počáteční tlak dále vytlačuje dent.
- Fáze VIII: deformace odpovídá uvolnění počátečního tlaku, která vede ke zvýšení konečné hloubky dentu.



Obrázek 5.11: Charakteristický průběh síly v závislosti na posuvu [3]

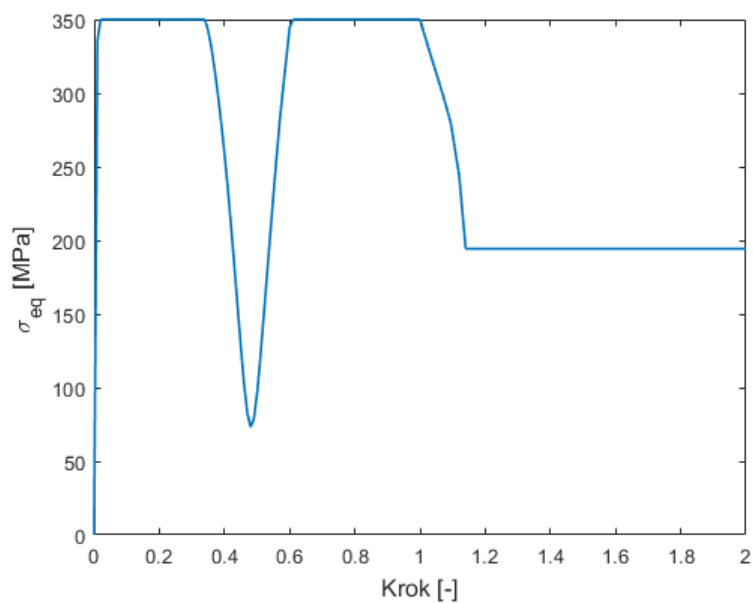
5.2.1 Výsledky pro jednokrokové zatížení

Pro správnost nastavení MKP analýzy je vhodné výsledky z numerické analýzy porovnat s provedeným experimentem. Následující odstavec se zabývá srovnáním výsledků z numerické MKP analýzy s výsledky z experimentálního měření.



Obrázek 5.12: Výsledná reakční síla působící na indentor

Na obrázku 5.12 je vypočítaný průběh reakční síly. Porovnání s experimentálně zjištěnou silou dokazuje, že daný numerický model s experimentem nekoreluje. Výsledek pro nastavené okrajové podmínky neodpovídá odezvě z provedeného experimentu. Je tedy nutné změnit definici MKP modelu a nastavení okrajových podmínek.

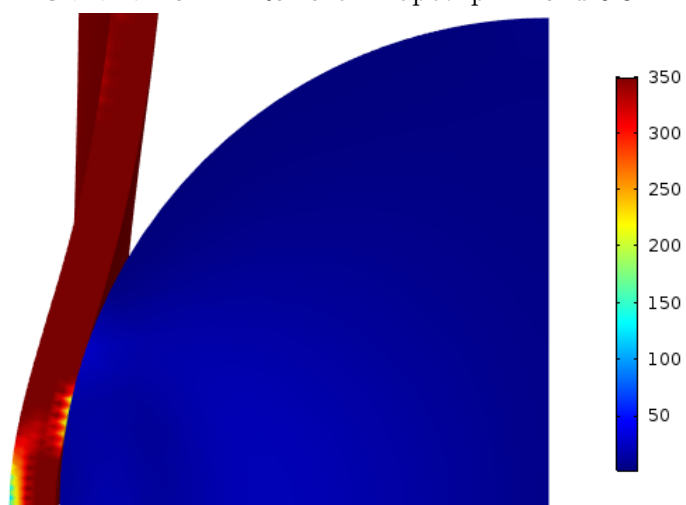


Obrázek 5.13: Průběh napětí bodu na vnitřní ploše pod indentorem

Na obrázku 5.13 je zobrazen průběh ekvivalentního napětí na parametru para. V intervalu $\langle 0,31;0,52 \rangle$ dochází k poklesu napětí.



Obrázek 5.14: Rozložení napětí při kroku 0.31



Obrázek 5.15: Rozložení napětí při kroku 0.5



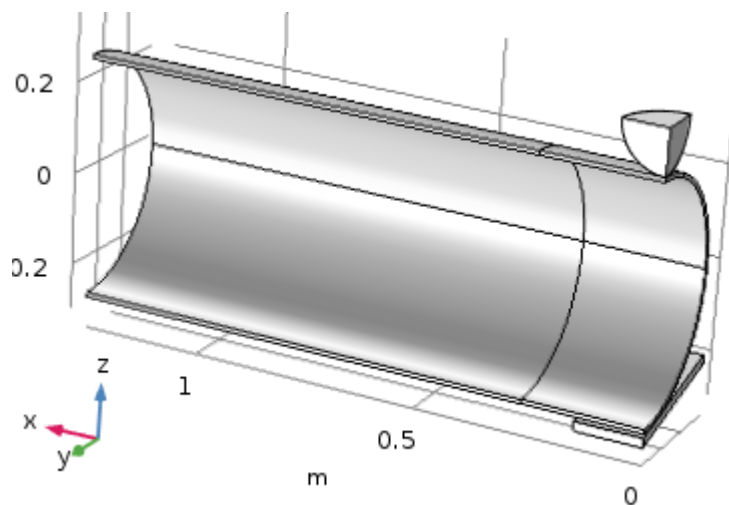
Obrázek 5.16: Rozložení napětí při kroku 0.6

Na obrázku 5.14-5.16 je zobrazen průběh napětí podél stěny trouby. Při kroku 0,5 dochází k výraznému poklesu ekvivalentního napětí na vnitřní ploše trouby. Modré těleso na těchto obrázcích je vnikající těleso. Důvodem tohoto poklesu napětí je zmenšení kontaktní plochy mezi indentorem a troubou, pravděpodobně odlehnutí. Při dalším zvyšování kroku dochází opět ke zvýšení kontaktní plochy a následnému zvýšení napětí na vnitřní ploše trouby, viz obrázek 5.16.

5.3 MKP model s ložem

Zjednodušený MKP model nezahrnuje skutečnou podobu reálného experimentu. Z analýzy zabývající se vlivem okrajových podmínek na výsledek reakční síly mezi indentorem a troubou vychází, že na výsledek reakční síly mají okrajové podmínky vliv.

Z toho důvodu byl vytvořen nový MKP model. Do geometrie modelu bylo namodelováno tuhé lože. Lože mělo sklon 15° od spodní hrany trouby a délku 300 mm. Ukázka vytvořené geometrie je na obrázku 5.17.



Obrázek 5.17: Geometrie MKP modelu s ložem

Přidáním tuhého lože vznikl další kontakt mezi troubou a ložem. Formulace pro tento kontakt byla nastavena na penalizační metodu. Kontakt mezi indentorem a troubou byl nastaven na kontaktní formulaci pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Oba nastavené kontakty byly bez definovaného tření.

Okrajové podmínky

Při této numerické simulaci došlo ke změně okrajových podmínek. Nezatěžovaný konec a spodní hrana trouby byly ponechány volně. Na hranu D z obrázku 5.8 byly nastaveny pružiny pro zlepšení konvergence ve všech směrech (x , y a z). Jejich tuhost byla rovna 1 N/m .

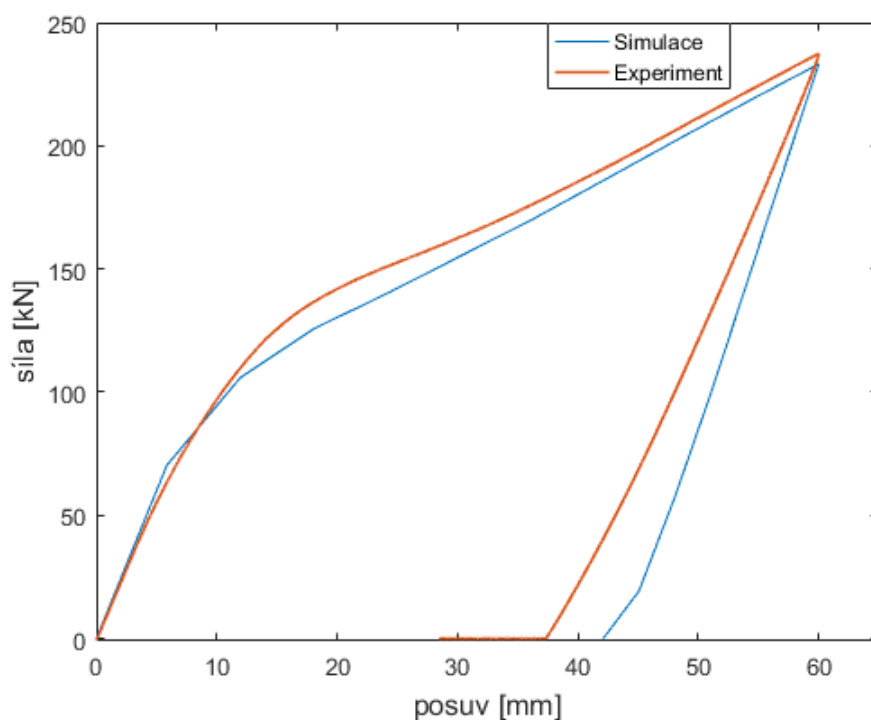
Daný čtvrtinový model obsahuje dvě roviny symetrie, které jsou stejné jako u zjednodušeného MKP modelu. Tento MKP model byl vypočítán pro dvě varianty okrajových podmínek, které byly nastaveny pro tuhý indentor a tuhé lože.

U první varianty okrajových podmínek byl na horní plochu předepsán posuv v ose z a ostatní posuvy byly zamezeny. Spodní plocha tuhého lože byla zafixována.

U druhé varianty, která odpovídala experimentu. Byl na tuhé lože definován posuv ve směru z a ostatní směry byly ponechány volně. U indentoru došlo k zamezení posuvů ve všech směrech.

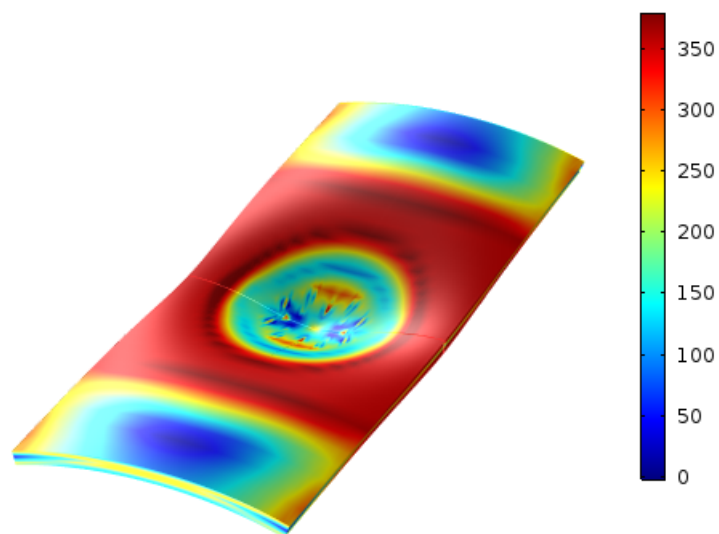
Výsledky simulace prvního experimentu s první variantou nastavení okrajových podmínek

V tomto odstavci budou uvedeny výsledky numerické simulace pro první experiment s nastavenou první variantou okrajových podmínek. Na horní hranu indentoru byl předepsán posuv v ose z a v ostatních směrech byl posuv zamezen. Pro spodní plochu lože byl zamezen posuv ve všech směrech. Tyto okrajové podmínky neodpovídají zcela realitě, jelikož v provedeném experimentu bylo lože řízeno posuvem a indentor byl ve statické poloze.

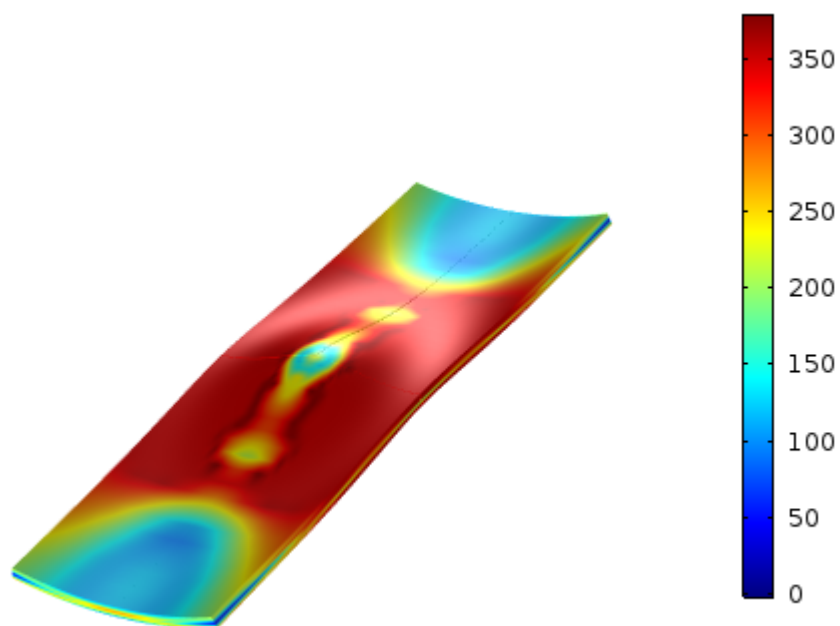


Obrázek 5.18: Průběh síly v závislosti na poloze indentoru

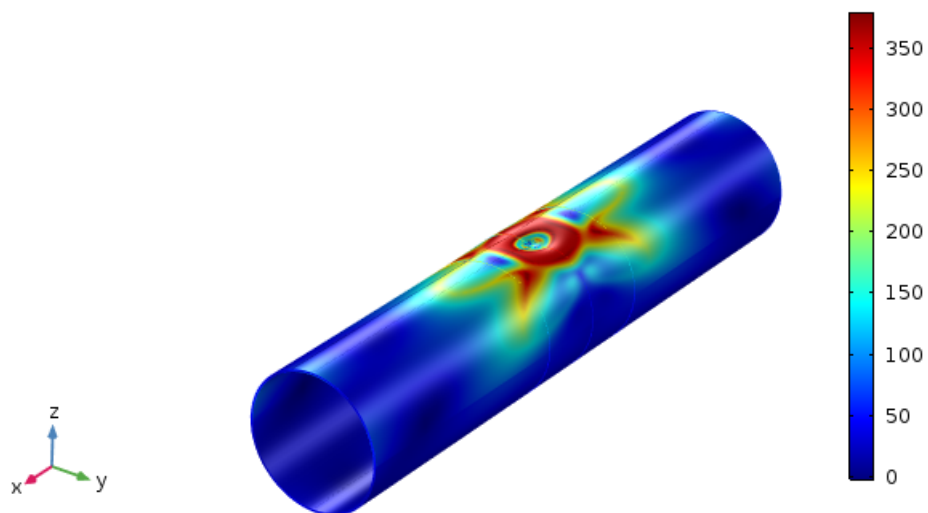
Obrázek 5.18 porovnává velikost reakčních sil MKP simulace s provedeným experimentem. Maximální reakční síla v provedeném experimentu byla 237 kN a v numerické simulaci vychází maximální reakční síla 233 kN. Výsledky se od sebe liší o hodnotu 1,7 %. Pro porovnání dat z MKP modelu dochází k dobré korelaci.



Obrázek 5.19: Ekvivaletní zbytková napětí von Mises na vnější ploše trouby

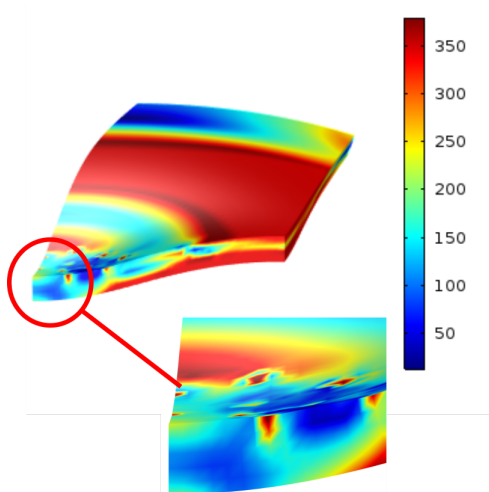


Obrázek 5.20: Ekvivalentní zbytková napětí von Mises na vnitřní ploše trouby



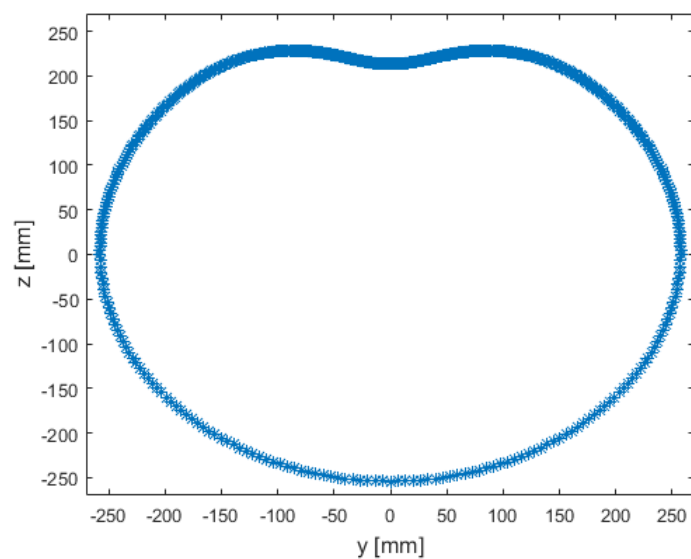
Obrázek 5.21: Ekvivaletní zbytková napětí von Mises v celé troubě

Na obrázcích 5.19, 5.20 a 5.21 je zobrazen průběh ekvivalentních zbytkových napětí σ_{eq} podle von Mises. V oblasti pod indentorem není σ_{eq} rovna maximálnímu napětí použitého materiálu. Uvedená škála ekvivalentního napětí je v MPa.

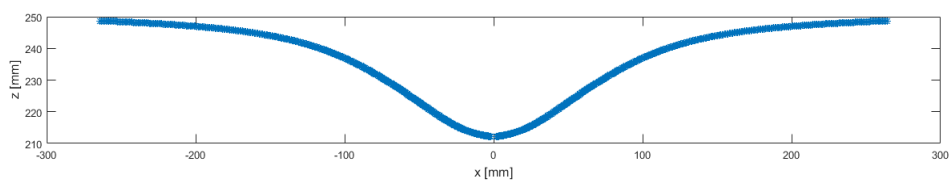


Obrázek 5.22: Rozložení napětí v tloušťce trouby s detailním pohledem

Na obrázku 5.22 je zobrazeno zbytkové ekvivalentní napětí v tloušťce trouby. Uvedená stupnice je v MPa.

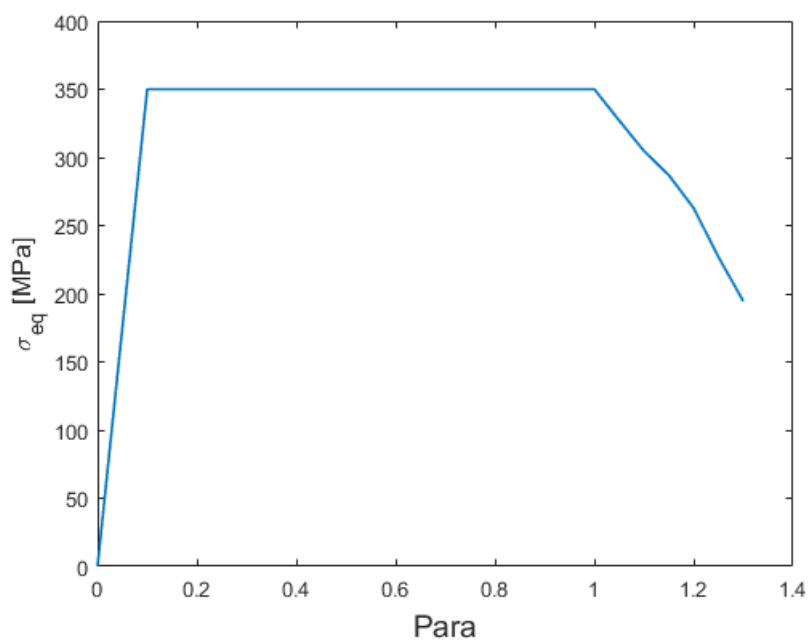


Obrázek 5.23: Deformace trouby v obvodovém směru

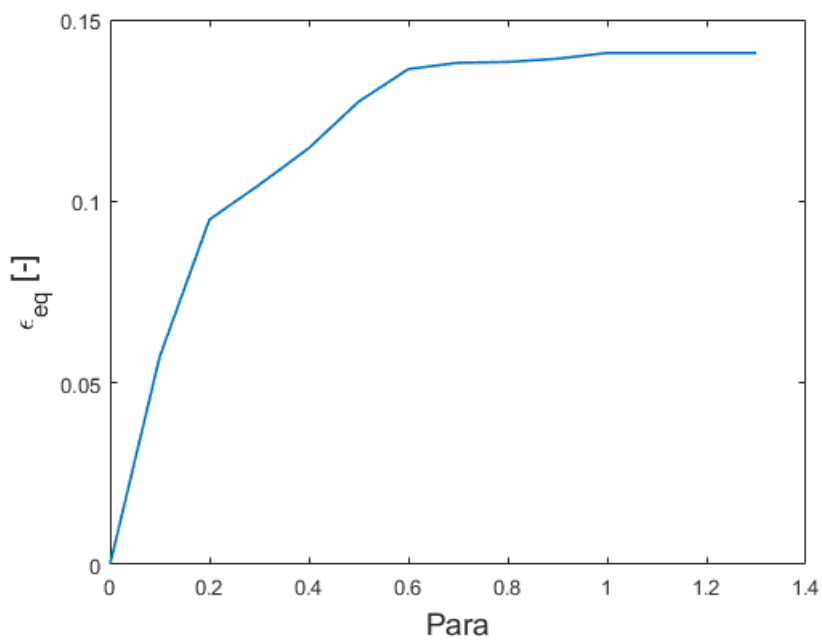


Obrázek 5.24: Deformace trouby v podélném směru

Na obrázku 5.23 je deformace trouby v obvodovém směru. Z tohoto směru se následně určí křivost k_1 . Na obrázku 5.24 je deformace v osovém směru trouby, v tomto směru se určí křivost k_2 . Z charakteru vytvořeného dentu jsou křivosti k_1 a k_2 záporné. U deformované trouby lze vyhodnotit tvar vzniklého dentu po odtížení bez tlakového působení. Dodatek normy [2] definuje možnost pomocí křivostí vyhodnotit zbytkové přetvoření ε_{eq} .



Obrázek 5.25: Průběh ekvivaletního napětí podle von Mises



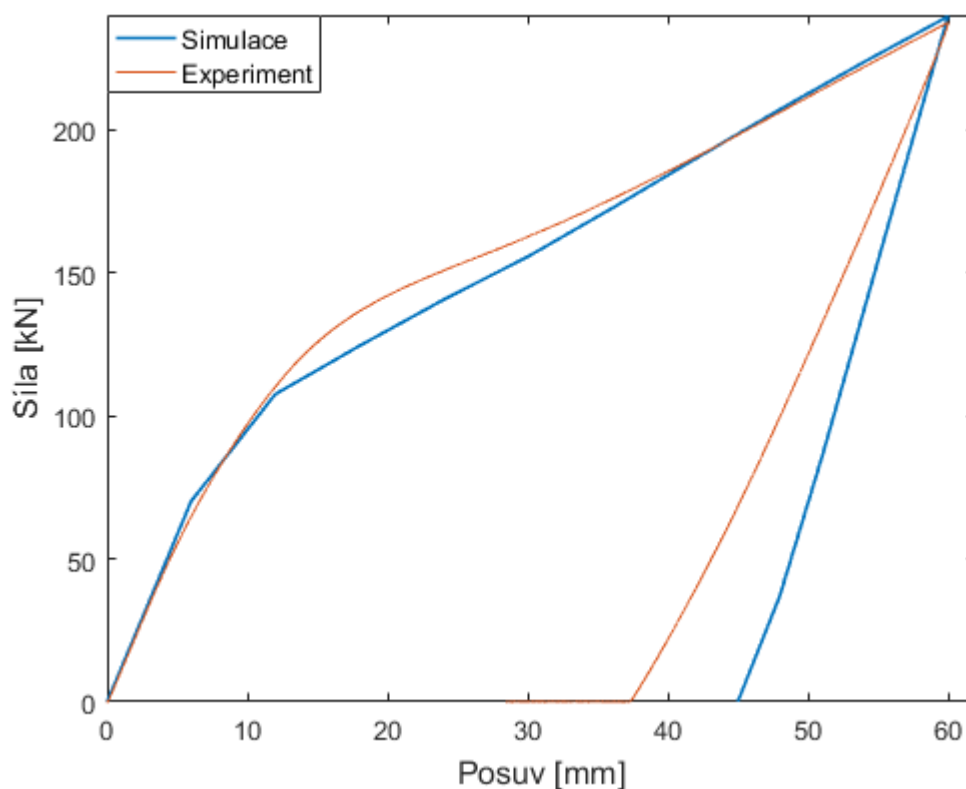
Obrázek 5.26: Průběh ekvivaletního přetvoření von Mises

Na obrázku 5.25 je zobrazen průběh napětí bodu pod indentorem na vnitřní straně. Ekvivalentní zbytkové napětí je 194,5 MPa. Na obrázku 5.26 je uveden průběh ekvivalentního přetvoření vypočítaný v Gaussově bodě.

Hodnota zbytkového přetvoření je rovna 0,148. Vyhodnocení ekvivalentního napětí a přetvoření proběhlo v Gaussově integračním bodě elementu. Pro lineární prvky je doporučení napětí a přetvoření počítat v Gaussově integračním bodě elementu.

Výsledky pro první experiment pro druhou variantu okrajových podmínek

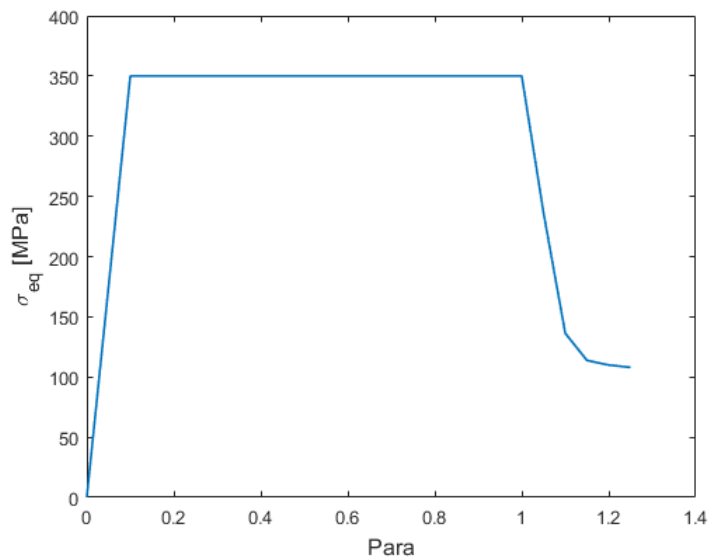
V tomto odstavci budou uvedeny výsledky pro druhou variantu nastavení okrajových podmínek. Tak jako v provedeném experiment bylo lože posouváno a indenter byl ve statické poloze. Tyto okrajové podmínky zcela odpovídají provedenému experimentu.



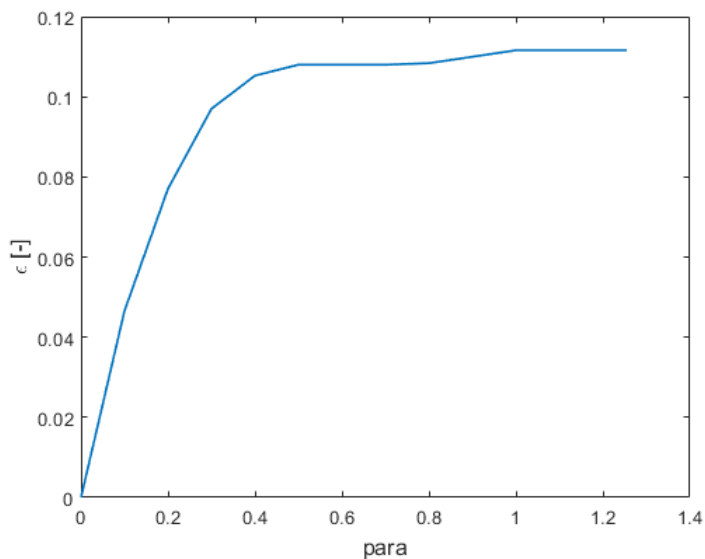
Obrázek 5.27: Porovnání reakční síly mezi MKP simulací a experimentem

Na obrázku 5.27 je uvedeno porovnání reakčních sil působících na indenter. Reakční síla z numerické simulace je porovnávána s reakční silou, která byla měřena v průběhu experimentu. Maximální reakční síla vypočtena z numerické simulace je 239,5 kN, rozdíl mezi reakční silou naměřenou během experimentu a reakční silou vypočtenou z numerické analýzy je 0,88%. U

nastavení těchto okrajových podmínek nebyl předpokládán velký rozdíl u reakční síly, jelikož soustava má stejnou tuhost. Z toho důvodu byla očekávána stejná odezva reakční síly. K odlehnutí indentoru u numerické simulace dochází na hodnotě 45 mm ovšem u provedeného experimentu dojde k odlehnutí při hodnotě posuvu 35 mm.



Obrázek 5.28: Průběh ekvivalentního napětí von Mises

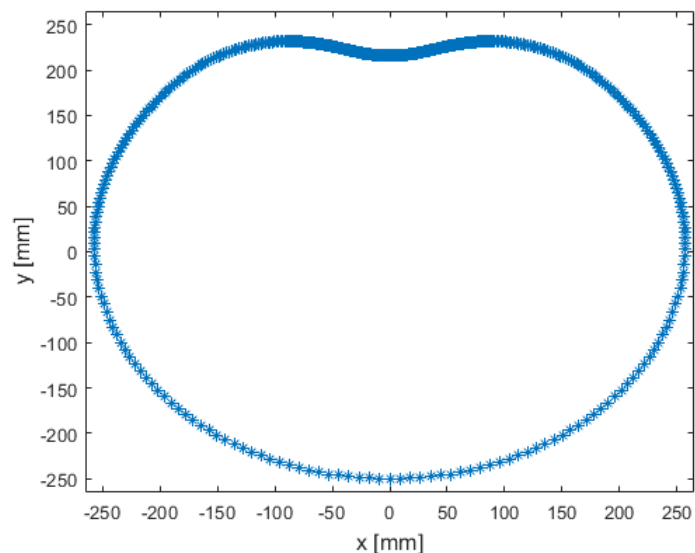


Obrázek 5.29: Průběh ekvivalentního přetvoření von Mises

Na obrázku 5.28 je uveden průběh ekvivalentního napětí podle HMM kritéria. Hodnota zbytkového napětí je rovna 108 MPa. Průběh napětí byl

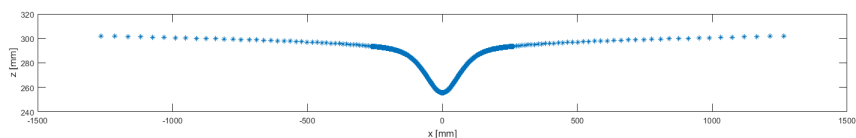
počítán v bodě bod indentorem na vnitřní straně trouby.

Na obrázku 5.29 je zobrazen průběh ekvivaletního napětí v bodě pod indentorem na vnitřní ploše trouby. Hodnota zbytkového přetvoření je 0,1116.



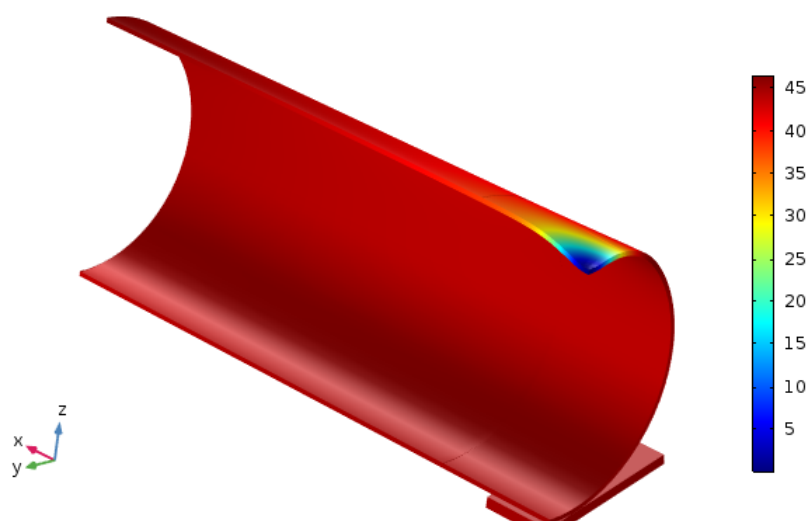
Obrázek 5.30: Deformace v obvodovém směru

Na obrázku 5.30 je zobrazen deformace trouby po odlehčení v obvodovém směru.



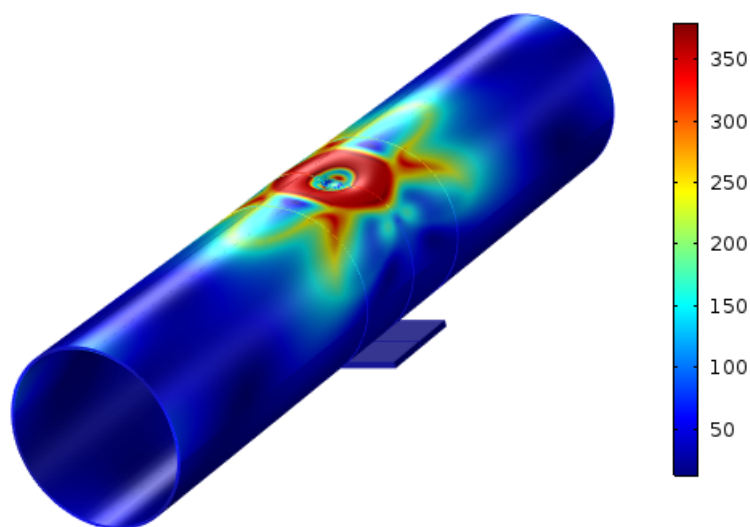
Obrázek 5.31: Deformace v obvodovém směru trouby

Na obrázku 5.31 je zobrazena deformace trouby po odlehčení v obvodovém směru Hloubka dentu je 46,4 mm. Při tomto způsobu zatěžování dochází k průhybu celé trouby v celé délce



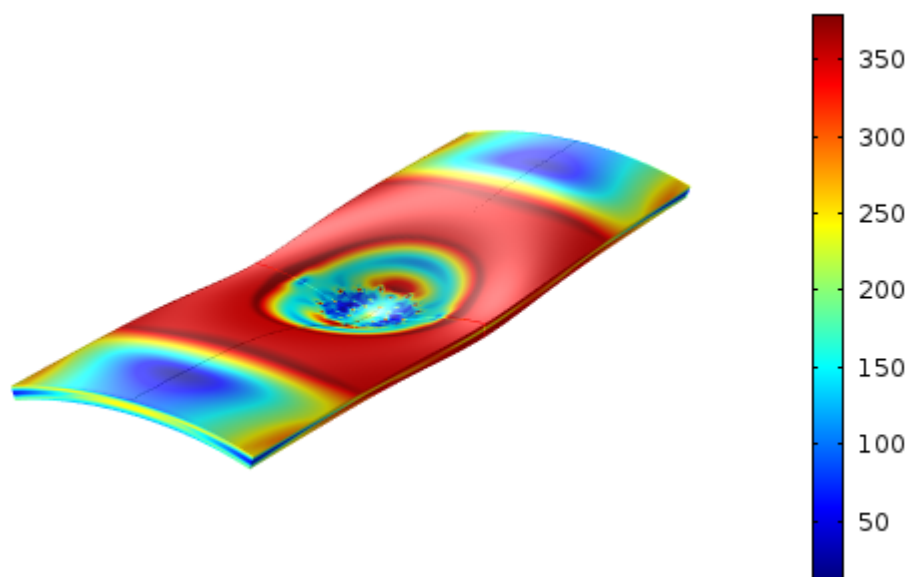
Obrázek 5.32: Posuv po odhlehčení indentoru

Na obrázku 5.32 jsou zobrazen posuv celé trouby po jejím odlehčení. Daná škála je uvedena v milimetrech. Hodnota posuvu, při které došlo došlo k odlehčení trouby je 46,4 mm.

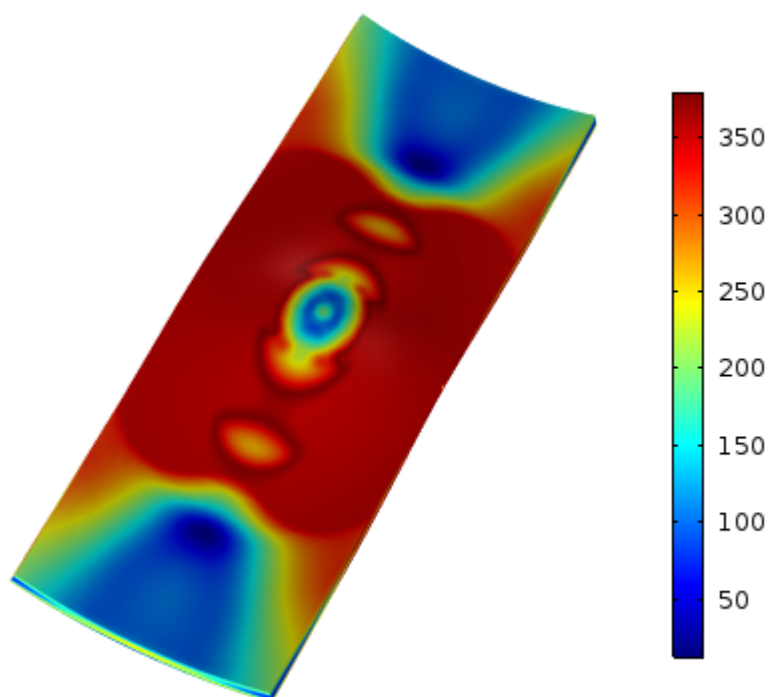


Obrázek 5.33: Rozložení ekvivalentních napětí von Mises v celé troubě

Na obrázku 5.33 je zobrazeno rozložení zbytkových napětí von Mises v celé troubě. Uvedená legenda je v MPa. Největší koncentrace napětí je v místě náhlé změny tvaru trouby.



Obrázek 5.34: Rozložení ekvivalentních napětí von Mises na vnější ploše trouby



Obrázek 5.35: Rozložení ekvivalentních napětí von Mises na vnitřní ploše trouby

Na obrázcích 5.34 a 5.35 je rozložení ekvivalentních zbytkových napětí v okolí promáčkliny.

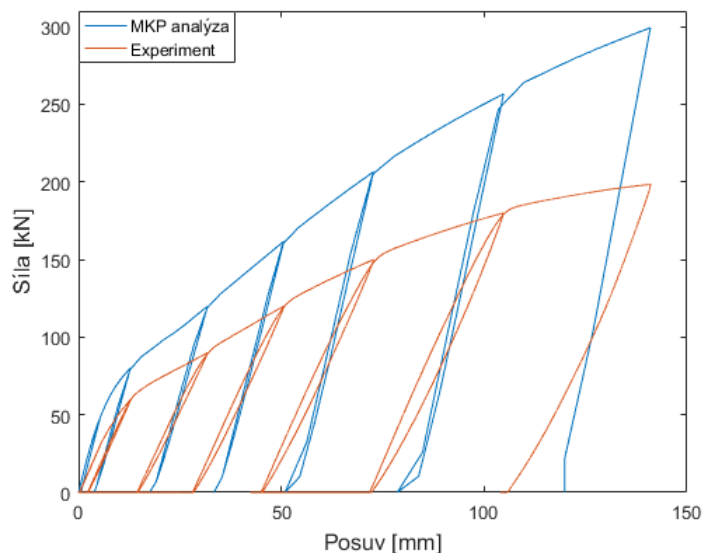
Výsledky simulace druhého experimentu

Druhý experiment byl rozdělen do sedmi kroků. Každý krok představoval posuv indentoru o předem nastavenou hodnotu. Během vtlačování indentoru do trouby byla měřena reakční síla mezi indentorem a troubou. V každém kroku byla nastavena maximální limitní hodnota reakční síly, po dovršení této hodnoty byla trouba odlehčena. Pro MKP analýzu byly odečteny hodnoty průhybů, které odpovídaly maximální hodnotě přípustného nastaveného zatížení.

Tabulka 5.4: Maximální hodnoty sil a průhybů pro jednotlivé kroky

Krok	Maximální hodnota síly [kN]	Průhybu [mm]
1	30	5,25
2	60	12,85
3	90	31,8
4	120	50,65
5	150	72,74
6	180	104,8
7	200	141

V tabulce 5.4 jsou uvedeny hodnoty maximálních průhybů, které byly v MKP analýze nastaveny.



Obrázek 5.36: Porovnání reakční síly s výsledky z experimentálního měření pro druhý experiment

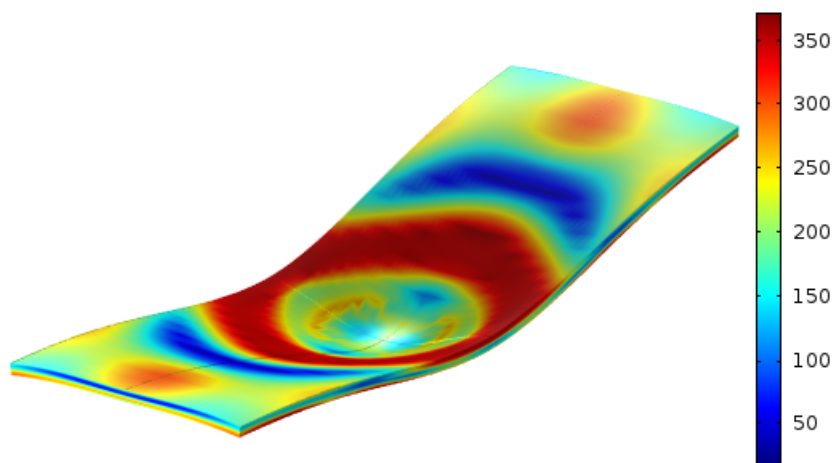
Na obrázku 5.9 je porovnání reakčních sil z numerické analýzy s výsledky z provedeného experimentu. V této analýze nedošlo ke korelaci reakčních sil vypočtených z experimentů s reakčními silami z MKP analýzy. Jelikož se reakční síly se v této analýze neshodují, nebyla vytvořena MKP simulace pro druhou variantu okrajových podmínek.

Z předchozí zkušenosti, že reakční síla je pro obě dvě sady okrajových podmínek stejná, bylo předpokládáno, že výsledek pro reakční sílu by byl stejný. Důvod, proč se numerická analýza neshoduje s experimentem může spočívat v tom, že pro tuto simulaci byl použit stejný materiál jako pro simulaci prvního experimentu. Předpokládali jsme, že by trouby mohly být vyrobeny ze stejného materiálu a že se liší pouze v tloušťce stěny t . Z výsledné reakční síly ovšem plyne, že materiálová charakteristika pro druhou troubu je odlišná než pro troubu první.

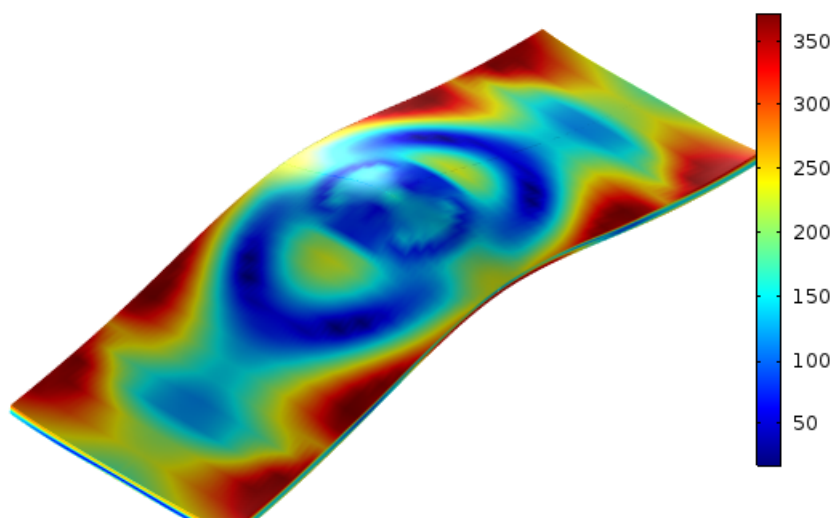
Tabulka 5.5: Vyhodnocení rozdílů mezi provedeným experimentem a MKP simulací

Krok	Reakční síla experiment	Vypočtená reakční síla	Rozdíl
	[kN]	[kN]	[%]
1	30	47,5	58,2
2	60	80,2	33,6
3	90	119,9	33,2
4	120	161,3	34,2
5	150	206,2	37,4
6	180	256,3	42,4
7	200	299	49,5

V tabulce 5.5 jsou uvedeny rozdíly reakčních sil pro jednotlivé zatížení odečtených ze záznamu experimentálního měření s výsledky z MKP simulace. Maximální rozdíl je pro sílu 30 kN rozdíl reakčních sil je 58,2%.

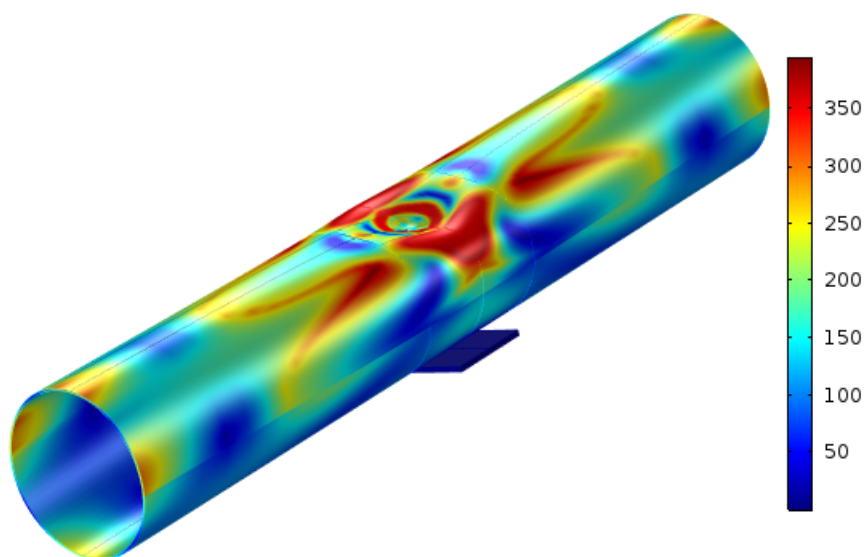


Obrázek 5.37: Rozložení zbytkových napětí výpočetných podle HMM na vnější ploše trouby



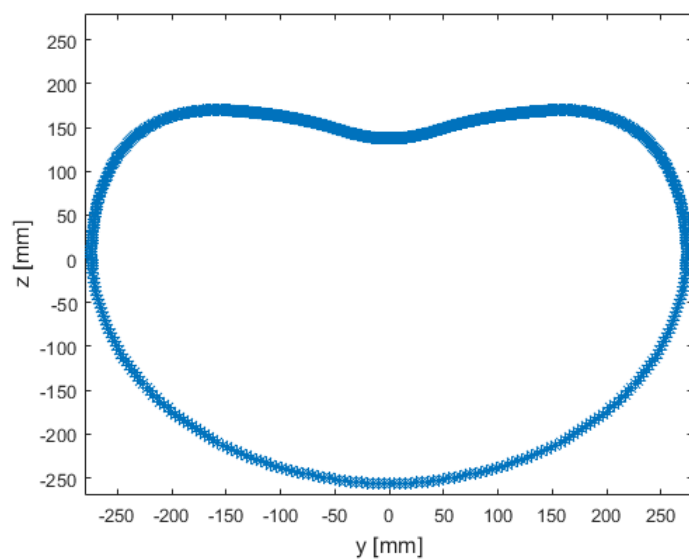
Obrázek 5.38: Rozložení zbytkových napětí výpočetných podle HMM na vnitřní ploše trouby

Na obrázcích 5.37 a 5.38 je zobrazen průběh zbytkových hlavních napětí na vnější a vnitřní ploše trouby. Zobrazená napětí jsou ekvivalentní a jsou vypočtená podle HMM kritéria. Uvedená stuopnice je v MPa.



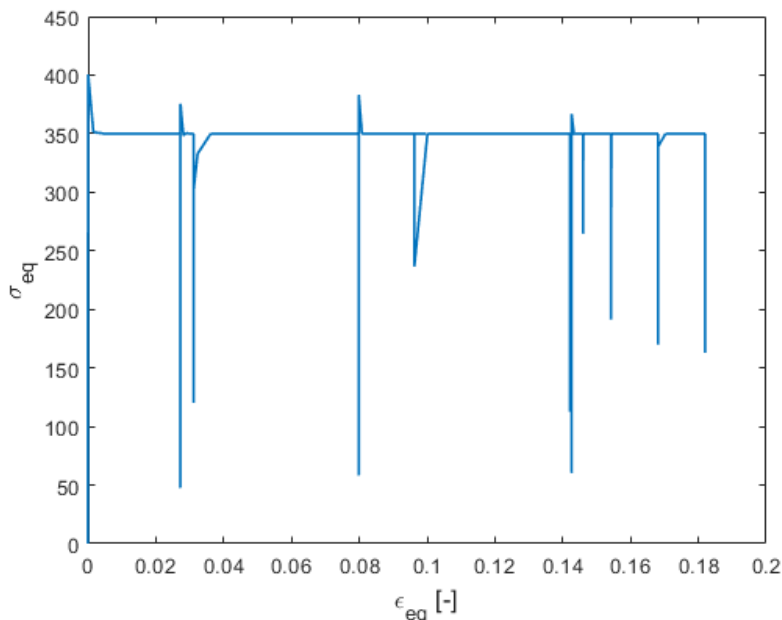
Obrázek 5.39: Rozložení ekvivalentních zbytkových napětí v celé troubě

Na obrázku 5.39 je zobrazen průběh ekvivalentních zbytkových napětí podél celé trouby, uvedená stupnice je v MPa. Hodnota stlačení byla natolik velká, že byla ovlivněna oblast na koncích trouby.



Obrázek 5.40: Průběh deformace v obvodovém směru

Na obrázku 5.40 je zobrazen průběh obvodové deformace při dané hodnotě průhybu 140 mm.



Obrázek 5.41: Průběh ekvivalentního napětí v závislosti na přetvoření

Na obrázku 5.41 je uveden průběh ekvivalentních napětí v závislosti na přetvořeních. Zbytkové napětí je rovno 162 MPa a zbytkové přetvoření má hodnotu 0,1820.

5.4 Zhodnocení výsledků

V tomto odstavci budou porovnány výsledky z MKP analýzy s výsledky z provedných experimentů.

Z vyhodnocení pomocí zákona tečení a metody založené na sekantově modulu a kombinovaném Poissonově čísla vychází pro první experimentální měření ekvivalentní zbytkové napětí rovno 350 MPa. V simulaci, která věrně simulovala experimentální měření je ekvivalentní zbytkové napětí rovno 108 MPa. Rozdíl hodnot může být způsoben faktem, že v MKP modelu je ekvivalentní napětí vyhodnoceno v jednom integračním bodě. Experimentální měření bylo ovšem vyhodnoceno v širší oblasti okolo bodu, kde docházelo k indentaci.

Druhý experiment byl vyhodnocen metodou založenou na zákonu tečení. Zbytkové napětí σ_z vyšlo v této metodě 350 MPa a ekvivalentní zbytkové přetvoření ε_z 0,06. Z numerické simulace vychází ekvivalentní zbytkové napětí 162 MPa a hodnota zbytkového přetvoření je rovna 0,182. Tyto výsledky nemusí odpovídat realitě, jelikož materiálový model pro druhou troubu není známý.

Vztah (5.8) platí pro hlavní složku přetvoření v obvodovém směru.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}t\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right) \quad (5.8)$$

Vztah (5.9) platí pro hlavní složku přetvoření v podélném směru.

$$\varepsilon_2 = -\frac{t}{2R_2} \quad (5.9)$$

Pro hlavní složky napětí, která popisuje prodloužení v podélném směru platí vztah

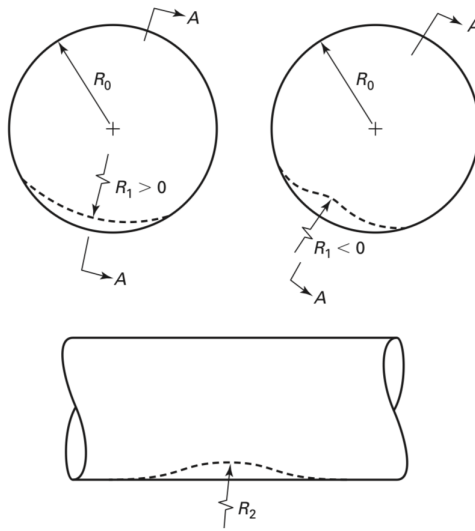
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{L} \right)^2. \quad (5.10)$$

Přetvoření na vnitřní ploše trouby se vypočte podle vztahu

$$\varepsilon_i = [\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2]^{1/2} \quad (5.11)$$

a přetvoření na vnější straně trouby se vypočte jako

$$\varepsilon_o = [\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1(-\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + (-\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2]^{1/2}. \quad (5.12)$$



Obrázek 5.42: Vyhodnocení zbytkového přetvoření na základě tvaru dentu, převzato z [2]

Na obrázku 5.42 je uveden příklad tvaru dentu a výpočet hlavní křivosti k_1 a k_2 ($1/R_1$ a $1/R_2$).

Pro vyhodnocení byly křivosti byla vymezena oblast průhybu, který byl proložen explicitní funkcí. Jako explicitní funkce byl použit polynom 4. stupně. Pro explicitně zadanou funkce lze vypočítat hodnotu křivosti dle vztahu (5.13). Křivost byla vyhodnocena ve středu vzniklého dentu.

$$k = \frac{|y''|}{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}} \quad (5.13)$$

Tabulka 5.6: Porovnání výpočtu zbytkových deformací na základě doporučení normy [2]

Simulace	Přetvoření	Norma	Korekce normy	Comsol
První varianta	ε_i	0,0827	0,0955	0,11767
	ε_o	0,0819	0,0946	0,13491
Druhá varianta	ε_i	0,0546	0,0630	0,1116
	ε_o	0,0559	0,0634	0,1408
Postupné	ε_i	0,0509	0,0588	0,1820
	ε_o	0,0519	0,0599	0,2103

V tabulce 5.6 jsou uvedena zbytková napětí. Tato přetvoření byla vypočtena dle doporučení dodatku R v [2]. Z výsledků plyne, že výpočet hle normy se neshoduje s vypočteným MKP modelem.

Norma [1] popisuje 3 úrovně vyhodnocení promáčkliny. První úroveň je pro potrubí, kde je úroveň přetlaku konstantní a druhá úroveň je pro cyklicky se měnící tlakové zatížení. Norma specifikuje, že úroveň 1 a 2 lze použít pouze pro případ uhlíkových ocelí s maximální hodnotou meze kluzu 410 MPa.

V normě je uvedeno geometrické kritérium, pro které lze úroveň jedna a dva použít. Toto kritérium je definováno pro maximální a minimální průměr D $168 \text{ mm} \leq D \leq 1050 \text{ mm}$ trouby a její možný rozsah tloušťky t stěny $5 \text{ mm} \leq t \leq 19 \text{ mm}$.

Důležitým parametrem je přípustná tloušťka koroze, tato hodnota se odečte od tloušťky stěny. Výpočet závisí na velikosti meze kluzu a maximálního přípustného napětí. Výpočet podle normy také zahrnuje hloubku a délku dentu. Tyto hodnoty se musí určit z nezatíženého stavu, tzn. bez tlakového účinku. Další hodnota, která se ve vyhodnocení uvažuje, je vzdálenost promáčkliny od nejbližšího svaru.

Třetí úroveň slouží jako doporučení pro vytvoření MKP analýzy, která musí být vytvořena, pokud je materiál trouby jiný než uhlíková ocel. Tato

úroveň obsahuje výpočet potenciálního poškození založeného na geometrii, materiálu a zatěžovacích podmínkách.

Ztráta funkčnosti potrubí může být způsobena několika vlivy. Mezi ně patří například plastický kolaps, lokální poškození, ztráta stability (buckling), cyklické zatěžování a creep.

Norma definuje tři způsoby, které lze vyhodnotit pro plastický kolaps. Prvním způsobem je napěťová analýza v elastické oblasti. Druhým způsobem je metoda limitního zatížení (Limit-Load method) a posledním způsobem je elasto-plastická analýza.

Kapitola 6

Závěr

Cílem této práce bylo vyhodnotit experimenty z indentace trouby. Dalším cílem bylo vytvoření MKP modelu a určit vliv tvaru dentu na životnost trouby dle norem. Všechny tyto cíle byly dodrženy a splněny.

Pro vyhodnocení experimentálních měření byly použity dvě metody. Jmenovitě to byla metoda sekantového modulu a kombinovaného Poissonova čísla a druhou metodou bylo vyhodnocení na základě zákona tečení. První experimentální měření bylo vyhodnoceno pomocí obou metod. Druhé měření bylo vyhodnoceno metodou na základě zákona tečení.

Byly vytvořeny celkem dva MKP modely, které se lišily v nastavení okrajových podmínek. U prvního MKP modelu se jednalo o zjednodušení. U tohoto modelu šlo především zjistit, zda lze simulaci provedeného experimentu zjednodušit pomocí okrajových podmínek. Toto se ukázalo jako zcestné. Z toho důvodu byl vytvořen MKP model s geometrií odpovídající provedenému experimentu. Pro tento model byly nastaveny dvě varianty okrajových podmínek, které se lišily v předpisu posuvu. Pro první variantu byl posuv předepsán na indentor a u druhé varianty byl posuv předepsán na prizmatické lože.

Jako klíčové pro určení správnosti nastavení okrajových podmínek byla výsledná reakční síla. Pro zjednodušený MKP model vyšla reakční síla větší o 100 kN oproti experimentu. Pro MKP model s první variantou okrajových podmínek, tzn. posuv byl nastaven na indentor, se maximální dosažená reakční síla lišila o 1,7 %. U provedeného experimentu ovšem posuv konalo lože, proto ve druhé variantě okrajových podmínek došlo k předepsání posuvu na lože a indentor zůstal ve statické poloze. U této varianty okrajových podmínek došlo k dobré korelaci reakčních sil. Tyto síly se lišily o 0,88 %.

Pro druhý experiment se reakční síly lišily. Tento fakt může být způsoben tím, že byla použita tahová zkouška pro materiál první trouby. Tahová křivka pro materiál druhé trouby nebyla dodána. MKP výsledky byly dále vyhod-

noceny podle dodatku R [2] normy r [1]. Po srovnání zbytkových napětí a přetvoření bylo zjištěno, že se hodnoty neshodují. Tento fakt může být způsoben tím, že v MKP analýze bylo zbytkové napětí a přetvoření vyhodnoceno v jedno itegračním bodě, tzv Gaussově bodě. Průběh napětí a přetvoření u experimentů byl měřen v širší oblasti okolo vznikajícího dentu. Během odlehčování u druhého MKP modelu musela být kontrolována reakční síla. V případě, že reakční síla byla menší než 0,001 kN, byl výpočet ukončen. V začátcích ladění této analýzy docházelo ke špatné konvergenci pro případ, že indetor nebyl v kontaktu s troubou.

V MKP analýze byl kontakt mezi tělesy nastaven bez tření. Bylo by zajímavé změřit tření mezi indentorem a troubou a provést simulaci s přidáním tření. Ve všech uvedených člancích zabývajících se MKP analýzou tohoto problému byl použit C3D8R element. Tento element má lineární předpis. Doručil bych změnit formulaci MKP elementů na elementy vyšších řádů. V MKP analýze pro druhý experiment byla použita materiálové data pro troubu z prvního experimentu. Byl vzán předpoklad, že i tato trouba bude mít stejné materiálové vlastnosti. Z výsledků reakčních sil vyplynulo, že materiál pro druhou troubu je jiný. Z toho důvodu bych doporučil provést tahové zkoušky pro tento materiál a spustit analýzu s novým materiálem.

V normě [1] jsou uvedeny vyhodnocovací metody pro ztrátu funkčnosti plastickým kolapsem. Pro tento typ kolapsu jsou definovány tři vyhodnocovací způsoby. V této práci bylo použito elasto-plastické vyhodnocení. V další návaznosti na tuto práci by se mohly vytvořit numerické modely pro vyhodnocení napěťové analýzy v elastické oblasti a vyhodnocení na základě limitního zatížení. Norma [1] popisuje ve třetí úrovni další možné kolapsy, které u trub mohou nastat. V návaznosti na tuto práci bych doporučil se uvedenými problémy z normy zabývat. Jedním ze zajímavých kolapsů uvedených v normě, který u trouby může nastat je ztráta stability (Buckling). Softwaru Comsol nabízí řešič pro tento problém.

U vzniklých promáčklin lze vidět, že největší koncentrace napětí je v horní části dentu, kde dochází k náhlé změně tvaru trouby. Pro případ, že by v budoucnu byl experiment opakován mohly by být tenzometry umístěny do předpokládaných míst těchto náhlých změn tvaru.

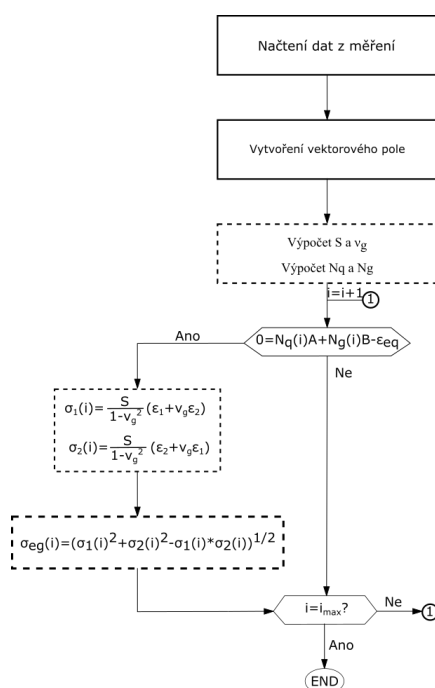
Literatura

- [1] SMITH, M. 2009. *Fitness for Service, API 579-1/ASME FFS-1*
- [2] American Society of Mechanical Engineers. 2016. *Gas Transmission and Distribution Piping Systems*. ASA B31.1.8. New York, NY: ASME. 2012 s. ISBN 9780791871218.
- [3] BAEK, Jong-hyun, Young-pyo KIM, Woo-sik KIM, Jae-min KOO a Chang-sung SEOK. 2012. *Load bearing capacity of API X65 pipe with dent defect under internal pressure and in-plane bending*, Materials Science and Engineering: A. 540, 70-82. DOI: 10.1016/j.msea.2012.01.078. ISSN 09215093. Dostupné také z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0921509312001141>
- [4] BROOKER, Daniel C. 2004. *Denting of pressurised pipelines under localised radial loading*. International journal of mechanical sciences, 46.12: 1783-1805.
- [5] ALASHTI, R.Akbari, S. JAFARI a S. J. HOSSEINIPOUR. 2015. *Experimental and numerical investigation of ductile damage effect on load bearing capacity of a dented API XB pipe subjected to internal pressure*. Engineering Failure Analysis [online]. 2015(47), 21 [cit. 2018-12-14]. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2014.10.011>. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350630714003112?via%3Dihub>
- [6] CAI, J., XIALI Jiang LODEWIJSKS, G. 2017. *Residual ultimate strength of offshore metallic pipelines with structural damage – a literature review*. Ships and Offshore Structures. 12:8, 1037-1055. DOI: 10.1080/17445302.2017.1308214
- [7] ITSKOV, M. 2018. *Elasto-plastic material behaviour*, lecture notes, Continuum mechanics, RWTH Aachen, delivered 28 June 2018

- [8] HELLER, L., 2017. *Plasticita 2. zápisky z přednášky*, Mechanika pokročilých materiálů, vyučováno TU Liberec. 14. listopadu 2017.
- [9] KEIL, S. 1976. *Stress analysis using strain gages in the elastoplastic deformation range. In Technology and Practical Use of Strain Gages With Particular Consideration of Stress Analysis Using Strain Gages* S. Keil (Ed.). doi:10.1002/9783433606667.ch13
- [10] SUTTON, Michael A., et al. 1996. *Determination of elastic-plastic stresses and strains from measured surface strain data*. Experimental Mechanics 36.2 (1996): 99-112.
- [11] STEFANCU, Andrei-Ionut, Silviu-Cristian Melenciuc, and Mihai Bude-scu. 2011. *Penalty based algorithms for frictional contact problems*. Bulletinul Institutului Politehnic din Iasi. Sectia Constructii, Arhitectura 57.3 : 119.
- [12] MARVALOVÁ, Bohdana, Tomáš HRUŠ a Iva PETRÍKOVÁ. 2018. *FEM Simulation of Elasto-Plastic Tube Indentation Comparison with Experiment*. Experimentální analýza napětí: sborník referátů [online]. 1. Ostrava: Dům techniky ČSVTS, s. 85-86 [cit. 2018-11-05]. ISBN 978-80-270-4062-9. Dostupné z: <http://experimentalni-mechanika.cz/konference/2018.html?download=1475:fem-simulation-of-elasto-plastic-tube-indentation-comparison-with-experiment>
- [13] MARVALOVÁ, Bohdana, Michal SIVČÁK a Iva PETRÍKOVÁ. 2018. *Strain Distribution in Vicinity of Dent in Tube in the Course of Indentation*. Experimentální analýza napětí ..: sborník referátů [online]. 1. Ostrava: Dům techniky ČSVTS, 2018, s. 87-88 [cit. 2018-11-05]. ISBN 978-80-270-4062-9. Dostupné z: <http://experimentalni-mechanika.cz/konference/2018.html?download=1476:strain-distribution-in-vicinity-of-dent-in-tube-in-the-course-of-indentation>
- [14] *Eight-node brick element with reduced integration (C3D8R and F3D8R)* [online]. University of Leeds:University of Leeds. 2002 [cit. 2018-12-08]. Dostupné z: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:Pxp43HDzuFIJ:web.mit.edu/calculix_v2.7/CalculiX/ccx_v2.7/doc/ccx/node27.html&client=safari&hl=cs&gl=czstrip=0&vwsr=0
- [15] REESE, S. 2018 *Locking*. poznámky z přednášek, Finite Element Technology, RWTH Aachen. vyučováno 28. května 2018

Příloha A

Algoritmus pro vyhodnocení měřených deformací pomocí sekantového modulu a kombinovaného Poissonova čísla



Obrázek A.1: Algoritmus pro vyhodnocení naměřených tenzometrických dat pomocí sekantového modulu a kombinovaného Poissonova čísla

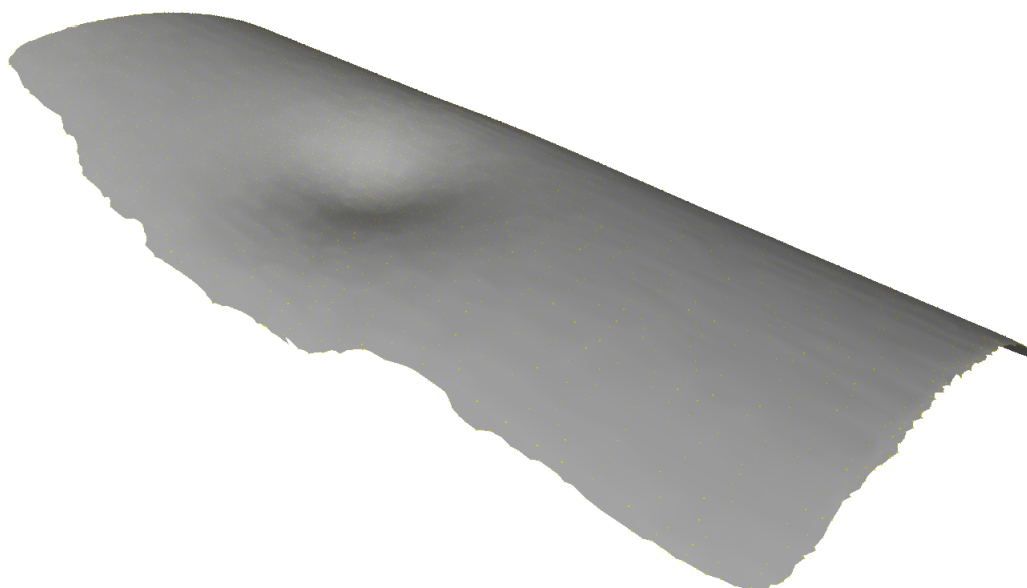
Vývojový diagram pro vyhodnocení napětí na základě zákona tečení



Příloha C

Scan trouby z experimentu měření

V případě dostatečného počtu naměřených bodů lze tento scan vyhodnotit dle bodtku R [2] normy [1]



Obrázek C.1: Scan trouby pro první měření

Příloha D

Odvození: Elastická zóna, mezní kritérium a mezní funkce

Uvažujme zatěžovací proces z napětového stavu označeného σ_1 do jiného označeného σ_2 . Tento proces je označován jako elastický, pokud se během zatěžování všechny vnitřní proměnné zachovávají konstantní [7]

$$\varepsilon_p = konst, \xi = konst.$$

Elastická zóna může být definována jako set napětových stavů, které mohou být transformovány do volného stavu $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ podle elastického procesu. Elastická zóna reprezentuje minimální nebo žádnou změnu objemu v napětovém prostoru s mezní plochou popsanou podmínkou [7]

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad (\text{D.1})$$

referovanou jako mezní kritérium. Funkce Φ je označována jako mezní funkce. Tato plocha elastické zóny je označena jako mezní plocha. Elastická zóna může být následně definována podmínkou [7]

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0. \quad (\text{D.2})$$

V rámci principu materiálové objektivit je mezní funkce vystavena omezení [7]

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}^*) = \Phi(\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T) = \Phi(\boldsymbol{\sigma}) \quad (\text{D.3})$$

Pokud Φ reprezentuje isotropní tenzorovou funkci Cauchyho napětí, může být aplikována v této formě jen na isotropní materiály. [7]

$$\Phi = \Phi(I_{\sigma_1}, II_{\sigma_2}, III_{\sigma_3}) = \Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (\text{D.4})$$

kde σ_i ($i=1, 2, 3$) reprezentuje hlavní napětí. V rámci konstrukce partikulární isotropní mezní funkce Cauchyho tenzoru napětí je nutno nejprve rozložit tento tenzor na součet deviátorické a sférické části [7]

$$\boldsymbol{\sigma} = dev\boldsymbol{\sigma} + sph\boldsymbol{\sigma}, \quad (D.5)$$

kde

$$sph\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} = -p\mathbf{I}, dev\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I} \quad (D.6)$$

a $p = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})$ označuje hydrostatický tlak. U kovů mezní funkce závisí jen na deviátorické části Cauchyho tenzoru napětí, takže [7]

$$\Phi = \Phi(dev\boldsymbol{\sigma}) \quad (D.7)$$

Následující zjednodušené výsledky vychází z předpokladu, že mezní funkce je reprezentována pouze kvadratickou funkcí napětí. $I_{dev\boldsymbol{\sigma}} = tr(dev\boldsymbol{\sigma}) = 0$, tento invariant obsahuje lineární člen. Při elastické deformaci nedochází ke změně objemu, je i $III_{dev(\boldsymbol{\sigma})} = 0$. Mezní funkce obsahuje jen kvadratické členy z druhého invariantu. [7]

$$\Phi = -II_{dev\boldsymbol{\sigma}} - k^2 = \frac{1}{2}tr(dev^2\boldsymbol{\sigma}) - k^2 = \frac{1}{2}\|dev\boldsymbol{\sigma}\|^2 - k^2, \quad (D.8)$$

kde k označuje smykové mezní napětí. V případě smykové defomace se smykovým napětím τ v rovině 1-2 je tenzor napětí ve formě [7]

$$dev\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (D.9)$$

$$dev^2\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, tr(dev^2\boldsymbol{\sigma}) = 2\tau^2 \quad (D.10)$$

Funkce rov. D.11 je von Mises mezní kritérium. [7]

$$\Phi = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2 - \sigma_3)^2 + \sigma_1 - \sigma_3)^2] - k^2 \quad (D.11)$$

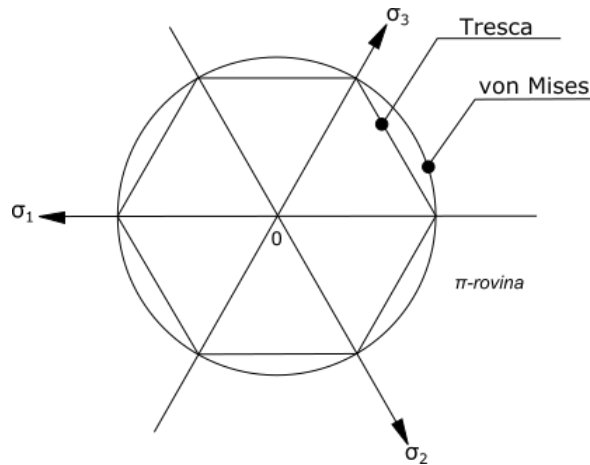
Mezní funkce závisí jen na rozdílu hlavních napětí. Jinou formu isotropní mezní funkce ve formě hlavních napětí je Tresca ve tvaru [7]

$$\Phi = \frac{1}{2} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|) - k \quad (\text{D.12})$$

Mezní podmínka může být reprezentována geometricky plochou ve 3D prostoru hlavních napětí. Pro funkci nezávislou na tlaku. [7]

$$\Phi = \Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \Phi(\sigma_1 + p, \sigma_2 + p, \sigma_3 + p) \quad (\text{D.13})$$

Odpovídající mezní plocha reprezentuje obecný válec s osami $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Tento válec může být charakterizován průřezovou křivkou zobrazenou na obrázku D.1 pro von Mises a Trescovu hraniční funkci. Plocha diagramu, který má ortogonální osy hlavních napětí a stejně nakloněná plocha ke všem koordinačním osám, se nazývá π -plocha. [7]



Obrázek D.1: Porovnání mezních ploch v π -rovině [7]

Příloha E

Odvození pro vyhodnocovací metodu založenou na sekantově modulu a kombinovém Poissonově čísle

V kapitole 3 byl uvedena teorie k vyhodnocení tenzometrických dat na základě sekantového modulu a kombinovaném Poissonově čísle. Pro hodnotu z byl uveden konečný vztah, ale nebylo ukázáno jeho odvození. Toto odvození bude ukázáno v této příloze.

Základním předpokladem pro odvození faktoru z je uvažování podmínek pro jednoosou napjat v této napjatosti platí pro hlavní přetvoření následující podmínky.

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_1,$$

pro druhé a třetí hlavní přetvoření platí, že jsou si rovna a lze je vypočíst z prvního hlavního přetvoření podle uvedeného vztahu:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1.$$

Tyto uvedené podmínky budou dosazeny do rovnice (3.6) uvedené na straně 20

$$z\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1^2 + \nu^2\varepsilon_1^2 + \nu^2\varepsilon_1^2 + \nu\varepsilon_1^2 + \nu\varepsilon_1^2 - \nu^2\varepsilon_1^2$$

v následujícím kroku zjednodušíme rovnici na tvar

$$z\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1^2 + \nu^2\varepsilon_1^2 + 2\nu\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1^2(1 + 2\nu + \nu^2) = \varepsilon_1^2(1 + \nu)^2.$$

Tato rovnice lze vydělit ε_1^2 a po vydělení dostáváme vztah pro z , viz rovnice (3.9), která je uvedena na straně 20.

V této metodě, ale i v metodě založené na vyhodnocení podle zákona tečení je použit výpočet třetího hlavního přetvoření ε_3 pomocí prvního a druhého hlavního přetvoření. Vztah pro přepočtení mezi hlavními přetvořeními bude odvozen v této části.

Pro případ dvouosé napjatosti platí pro první a druhé hlavní přetvoření následující vztahy:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1).$$

Ze vztahu pro první hlavní přetvoření vyjádříme čemu se rovná σ_1 .

$$\sigma_1 = \nu\sigma_2 + \varepsilon_1 E$$

a dosadíme do vztahu pro ε_2 .

$$E\varepsilon_2 = \sigma_2 - \nu^2\sigma_2 - \nu\varepsilon_1 E,$$

z této rovnice vyjádříme čemu se rovná σ_2 :

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1).$$

Stejný postup je aplikován na výpočet σ_1 .

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)$$

Třetí hlavní přetvoření lze vypočítat na základě hlavních napětí σ_1 a σ_2 .

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_1 - \nu\sigma_2)$$

Do tohoto vztahu jsou dosazeny odvozené vzorce pro výpočet hlavních napětí σ_1 a σ_2 na základě předpokladu znalosti hlavních přetvoření ε_1 a ε_2 .

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \left(-\frac{\nu E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) - \frac{\nu E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \right)$$

Z této rovnice lze vydělit Youngův modul E a vytknutím vztahu $\frac{\nu}{1 - \nu^2}$ dostáváme rovnici ve tvaru

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1(1 + \nu) + \varepsilon_2(1 + \nu))$$

Z této rovnice lze vytknout $(1 + \nu)$ a dostaneme tvar rovnice

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{(1 - \nu^2)}(1 + \nu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

Člen $1 - \nu^2$ lze přepsat na tvar $(1 - \nu)(1 + \nu)$ člen $(1 + \nu)$ se vyruší s členem, který byl vytknut v přechodím kroku. Rovnice pro ε_3 je ve tvaru

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

tento vztah je uveden v rovnici (3.11) na straně 20.

K odvození plastického součinitele λ byly použity Prantlovy-Reussovy rovnice.

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xx} &= \frac{d\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu\sigma_{yy}}{E} + d\lambda S_{xx} \\ d\varepsilon_{yy} &= \frac{d\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu\sigma_{zz}}{E} + d\lambda S_{yy} \\ d\varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E}(d\sigma_{xx} + d\sigma_{yy}) + d_{zz} \\ d\varepsilon_{xy} &= \frac{(1 + \nu)d\sigma_{xy}}{E} + d\lambda S_{xy} \end{aligned}$$

Příloha F

Matlab kód pro vyhodnocení na základě pravidla tečení

```
%%% Dvouosá napjatost
%Materiálové parametry

E=210*103; % Youngův modul [MPa]
nu=0.3; %Poissonovo číslo
sigmayield=350; %mez kluzu

%Initialization for Point M and Lth Load

sigmaflow=sigmayield;
sigmaeff(1)=0;
C=E/(1-nu2)*[1 nu; nu 1 ]; %stiffness matrix
eff(1)=0;
%Data import
f=xlsread('hodnoty.xlsx');
eps=f(:,1)*10-6;
eps2=f(:,2)*10-6;
%Inicializace počátečního napjatostního stavu
epse=zeros(3,length(eps));
sigma=zeros(2,length(eps));
epsp=zeros(3,length(eps));
epse=zeros(3,length(eps));
eff=zeros(1,length(eps));
sigmaeff(1)=0;
jedna=diag(ones(1,3));
sigmaeff1(1)=0;
```

```

for i=2:length(eps)
    %Výpočet hlavních přetvoření
    delta1=eps(i)-eps(i-1);%první hlavní přetvoření
    delta2=eps2(i)-eps2(i-1);%druhé hlavní přetvoření
    delta3=-(nu/(1-nu))*(delta1+delta2);%přetí hlavní přetvoření
    delta=[delta1;delta2;delta3];
    deltasigmatrial(:,i)=C*[delta1;delta2];
    % přírůstek zkušebního napětí
    %přírůstky deviátrických napětí
    deltaS(1)=(2*deltasigmatrial(1,i)-deltasigmatrial(2,i))/3;
    deltaS(2)=(2*deltasigmatrial(2,i)-deltasigmatrial(1,i))/3;
    deltaS(3)=(-deltasigmatrial(1,i)-deltasigmatrial(2,i))/3;
    sigmatrial(:,i)=sigma(:,i-1)+deltasigmatrial(:,i);%zkušební stav
    %deviatorická napětí
    S(1)=(2*sigmatrial(1,i)-sigmatrial(2,i))/3;
    S(2)=(2*sigmatrial(2,i)-sigmatrial(1,i))/3;
    S(3)=(-sigmatrial(1,i)-sigmatrial(2,i))/3;
    sigmaeff(i)=sqrt(3/2*(S(1)^2+S(2)^2+S(3)^2));
    %převod na jednoosou napjatost
    if sigmaeff(i)<sigmaflow
        sigma(:,i)=sigmatrial(:,i);
        epse(:,i)=epse(:,i-1)+[delta1;delta2;delta3];
        %elastické přetvoření
        epsp(:,i)=epsp(:,i-1);%plastické přetvoření
        eff(i)=eff(i-1);
    else
        if sigmaeff(i-1)<sigmaflow
            %overeni zda byl předchozí stav elastické oblasti
            R=R_determination(Sprevious,deltasigmatrial(:,i),sigmaflow);
            deltaeff=sqrt(2/3*(delta1^2+delta2^2+delta3^2));
            sigmac(:,i)=sigma(:,i-1)+R*deltasigmatrial(:,i);
            %nový napěťový stav
        else
            %zjištění směru toku
            D=0;
            for p=1:3
                D=D+deltaS(p)*Sprevious(p);
            end
            if D>=0
                sigmac(:,i)=sigma(:,i-1);
            else

```

```

        R=R_determination(sigma(:,i-1),deltasigmatrial,sigmaflow)
        %výpočet faktoru R
        deltaeff=sqrt(2/3*(delta1^2+delta2^2+delta3^2));
        %efektivní plastické přetvoření
        sigmac(:,i)=sigma(:,i-1)+R*deltasigmatrial(:,i);
        %nový napěťový stav
    end
    for k=1:1
        lambda=((S(1)+nu*S(2))*delta(1)+(S(2)+nu*S(1))*delta(2))...
        .../(S(1)^2+S(2)^2+2*S(1)*S(2));%plastického součinitele
        deltaepsp=lambda*S';%přírůstek plastických přetvoření
        deltaepse=delta-deltaepsp;% přírůstek elastických přetvoření
        sigman(:,i)=sigmac(:,i)+C*[deltaepse(1);deltaepse(2)];
        %nový napěťový stav
        epse(:,i)=epse(:,i-1)+deltaepse;%elastické přetvoření
        epsp(:,i)=epsp(:,i-1)+deltaepsp;%plastické přetvoření
        deltaeff=sqrt(2/3*(deltaepsp(1)^2+deltaepsp(2)^2...
        ...+deltaepsp(3)^2));
        eff(i)=eff(i-1)+deltaeff;
        %deviatorická napětí
        S(1)=(2*sigman(1,i)-sigman(2,i))/3;
        S(2)=(2*sigman(2,i)-sigman(1,i))/3;
        S(3)=(-sigman(1,i)-sigman(2,i))/3;
        sigmaeff(i)=sqrt(3/2*(S(1)^2+S(2)^2+S(3)^2));
        %efektivní napětí
        G=(sigman(1,i)^2)/3+(sigman(2,i)^2)/3-...
        ...-(sigman(2,i)*sigman(1,i))/3-(sigmaflow)^2/3;
        if G~=0
            beta=sigmaflow/sigmaeff(i);%výpočet faktoru beta
            sigman(:,i)=beta*sigman(:,i);%korekce napěťového stavu
        end
        %deviatorická napětí
        S(1)=(2*sigman(1,i)-sigman(2,i))/3;
        S(2)=(2*sigman(2,i)-sigman(1,i))/3;
        S(3)=(-sigman(1,i)-sigman(2,i))/3;
        end
        sigma(:,i)=sigman(:,i);%konečný napěťový stav
    end
end
    Sprevious=diag(S);
end

```

Příloha G

Matlab kód pro vyhodnocení metody založené na sekantově modulu a kombinovaném Poissonově čísle

```
clear
close all
clc
Y=350;%mez kluzu [MPa]
E=2.1929e+05;%youngův modul pružnosti [MPa]
nu=.3;
nazev='roura1_mereni1.xlsx';
soubor=xlsread(nazev);%načtení hodnot
epst=soubor(:,1);%první epsilon
epsa=soubor(:,2);%druhé epsilon
%%elastická oblast
NQe=(1-nu.*(1-nu))./((1-nu.^2).^2);%vypocet nové proměnné
NGe=(-1+nu.*(4-nu))./((1-nu.^2).^2);%vypocet nové proměnné
%%plastická oblast
poc=1.589*10^(-3);
epsV=poc:.000005:.04;%iniciazace
%sekant modulus(podíl s E)
SE=Y/E./epsV;
nug=.5-(.5-nu)*SE;%kombinované Poissonovo číslo
NQ=(1-nug.*(1-nug))./((1-nug.^2).^2);%Nové proměnné
NG=(-1+nug.*(4-nug))./((1-nug.^2).^2);
A=epsa.^2+epst.^2;%vektor hodnot A
```

```

B=epsa.*epst;%vektor hodnot B
P=epsV.^2;%vektor ekvivalterních přetvoření
for i=1:length(epsV)
    Z=abs(NQ(i)*A+NG(i)*B-P(i));
    k=find(Z==min(Z));%nalezení minima
    vysl=[vysl;[k(1) Z(k(1))]]; %nahraní pozice
end
for i=1:length(epsV)

    S(i)=Y/epsV(i);%sekantův modul
    ss=vysl(i,1);%pozice
    kof=S(i)/(1-nug(i)^2);
    sigt(i)=kof*(epst(ss)+nug(i)*epsa(ss));%výpočet hlavních napětí
    siga(i)=kof*(epsa(ss)+nug(i)*epst(ss));
end
ekv=sqrt(sigt.^2+siga.^2-sigt.*siga);%ekvivaletní napětí
plot(epsV,ekv,'r','Linewidth',1.2)
%Napětí v elastické oblasti
sigtel=E*(epst+nu*epsa)/(1-nu^2);
sigael=E*(epsa+nu*epst)/(1-nu^2);
ekvsigel=sqrt(sigtel.^2+sigael.^2-sigtel.*sigael);
kk=find(ekvsigel<Y);
epsE=sqrt(NQe*A(kk)+NGe*B(kk));
plot(epsE,ekvsigel(kk),'r','Linewidth',1.2)
xlabel('\epsilon_{eq} [-]','FontSize',12);
ylabel('\sigma_{eq} [MPa]','FontSize',12);
xlim([0,0.042])

```