# Technická univerzita v Liberci

## FAKULTA PEDAGOGICKÁ

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Kombinace oborů: matematika - německý jazyk


# MATEMATICKÉ KROUŽKY NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE

Diplomová práce 98-FP-KMD-001


Autor: Podpis: Dana Prchalová

Dana PRCHALOVÁ

Adresa:

Malá Okružní 8

419 01 DUCHCOV


Vedoucí práce: RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.

| Počet | stran | obrázků | tabulek | příloh |
|---|---|---|---|---|
| | 81 | 5 | 24 | 4 |

V Liberci dne 20. ledna 1998

Technická univerzita v Liberci
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
461 17 LIBEREC 1, Hálkova 6 Telefon: 5227111 Fax: 5227332

*Katedra:* matematiky a didkatiky matematiky

# ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(závěrečného projektu)

*diplomant:* Dana PRCHALOVÁ
*adresa:* Malá okružní 8, 419 01 DUCHCOV
*obor:* matematika - německý jazyk

*Název:* **MATEMATICKÉ KROUŽKY NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE**

*Vedoucí práce:* RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.
*Termín odevzdání:* květen 1997

Pozn.: Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž specifikují zadání: východiska, cíle, předpoklady, metody zpracování, základní literaturu (zpravidla na rub tohoto formuláře). Zásady pro zpracování DP jsou k dispozici ve dvou verzích (stručné, resp. metodické pokyny) v UKN TU, na katedrách a na Děkanátě Fakulty pedagogické.

V Liberci dne 30. 5. 1996

M. Uchumeda v zast.
.........................
*vedoucí katedry*

J. Vild
Doc. RNDr. Jaroslav Vild
*děkan*



Převzal (diplomant):

Datum: Podpis: Prchalová Dana

Prohlášení o původnosti práce:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla veškerou použitou literaturu.

Liberec, 1998.-01.-20.

Dana Prchalová

Poděkování:

Děkuji všem, kteří se zasloužili o zdárné dokončení této práce: vedoucí práce RNDr. Daniele Bittnerové, CSc. děkuji za podnětné rady a připomínky, učitelkám ze základních škol v Duchcově a v Liberci děkuji za umožnění zadání testů v 9. třídách, Marku Gazdovi děkuji za pomoc při počítačovém zpracování DP.

Prohlášení k využívání výsledků DP:

Jsem si vědoma toho, že diplomová práce je majetkem TUL a že s ní nemohu sama bez svolení TUL disponovat, a že diplomová práce může být zapůjčena či objednána (kopie) za účelem využití jejího obsahu.

Beru na vědomí, že po pěti letech si mohu diplomovou práci vyžádat v Univerzitní knihovně TU v Liberci, kde je uložena.

Dana PRCHALOVÁ

Malá Okružní 8

419 01 DUCHCOV

Podpis: Dana Prchalová

Resumé

MATEMATICKÉ KROUŽKY NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE

Závěrečný projekt navrhuje práci matematického kroužku pro 9. třídu základní školy. Obsahuje obecné poznatky o práci matematického kroužku, zabývá se otázkou potřebnosti či nepotřebnosti matematických kroužků na základních školách. Jeho součástí jsou přípravy pro hodiny matematického kroužku a výsledky testu zadaného v 9. třídách základních škol. V přílohách jsou vyplněné dotazníky o existenci matematických kroužků na základních školách a některé z vypracovaných testů.

Zusammenfassung

MATHEMATISCHE ZIRKEL AN DER GRUNDSCHULE

Das Abschlussprojekt schlägt das Programm für ein mathematisches Zirkel für 9. Klasse der Grundschule vor. Es umfasst allgemeine Erkentnisse über die Arbeit des mathematischen Zirkels, beschäftigt sich mit der Frage, ob die mathematischen Zirkel an den Grundschulen notwendig oder unnützlich sind. Ein Teil des Abschlussprojektes sind Vorbereitungen für die Stunden des mathematischen Zirkels und Ergebnisse des in den 9. Klassen der Grundschulen vergebenen Tests. In den Beilagen sind ausgefüllte Fragebögen über die Existenz der mathematischen Zirkel an den Grundschulen und einige von den ausgefüllten Testen.

Summary

EXTRA-CURRICULAR MATHEMATICS BEES AT BASIC SCHOOL

The final project discusses the work of the extra-curricular mathematics bee for form 9 of the basic school. It includes general information about the work of the course, it raises the question of the need of such courses at basic schools. It includes lesson plans and the results of the test that was set in forms 9 of basic schools. The appendix consists of completed questionnairs about the existence of such courses at basic schools and some of the elaborated tests.

# OBSAH

## SEZNAM OZNAČENÍ

V kapitole číslo 5 jsou příklady značeny dvojím způsobem:

* jsou značeny ilustrační příklady, na kterých si mají žáci osvojit probíranou látku,

• je označení příkladů, které žáci budou počítat samostatně v hodinách.

# 1. ÚVOD

Existují základní školy, které se specializují na výuku matematiky. Na tyto školy se hlásí žáci, kteří jsou v matematice zruční a tento předmět je baví. Ne však každý matematicky nadaný žák má možnost školu tohoto charakteru navštěvovat. Proto se i v matematicky nespecializovaných školách či třídách vyskytují žáci, kteří mají o matematiku hlubší zájem. Je dobré jejich talent podporovat a rozvíjet. Vhodné k tomu mohou být různé aktivity, např. volitelná cvičení z matematiky, řešení matematických olympiád či pythagoriád, ale především pravidelně se konající zájmový matematický kroužek.

Cílem této diplomové práce je připravit program matematického kroužku pro devátou třídu a ověřit jej v praxi. Konkrétně se jedná o téma úpravy algebraických výrazů. Toto téma se v deváté třídě probírá přibližně 24 hodin, tedy šest týdnů, neboť na většině základních škol jsou předepsány čtyři hodiny matematiky týdně. Za předpokladu, že se matematický kroužek bude konat jednou týdně šedesát minut, budou se žáci zabývat algebraickými výrazy na šesti setkáních kroužku.

V deváté třídě se probírají lomené algebraické výrazy a operace s nimi. Žáci se v osmé třídě již setkali s celistvými algebraickými výrazy. Procvičili si operace s nimi a osvojili si používání vzorců.

Diplomová práce je rozčleněna do sedmi kapitol. Po úvodu následuje kapitola, která je věnována obecným informacím o práci matematického kroužku. Je rozdělena do tří článků, ve kterých se dozvídáme o struktuře hodiny zájmového kroužku, o nejčastěji používaných didaktických metodách a o tom, jak by mělo vypadat úvodní a závěrečné setkání zájmového kroužku.

Třetí kapitola se týká existence matematických kroužků. Popisuje výsledky šetření na dvaceti různých základních školách. Informuje o tom, zda na škole pracuje matematický kroužek, jaký má charakter a jaký je zájem jednotlivých věkových skupin. Na školách, kde kroužek není, hodnotí názor učitelů na potřebnost a účelnost matematického kroužku a ochotu takový kroužek zřídit.

Čtvrtou kapitolu tvoří teoretická část o úpravách algebraických výrazů, mnohočlenech, početních operacích s mnohočleny a o rozkladech mnohočlenů.

Nejrozsáhlejší je kapitola číslo 5 - Přípravy. Přípravy jsou rozděleny do šesti částí, každou část tvoří příprava jedné hodiny. Každá hodina je rozdělena na informační, odbornou a relaxační část. V informační části se žáci většinou dozví nějakou zajímavost (např. o vzniku algebraické symboliky, o Möbiově pásce, o tom, jak násobí Etiopové, či o tom, jak se Epimedes dostal do učebnic logiky), nebo pomůcku (např. k zapamatování čísla $\pi$). Odborné části hodin jsou věnovány úpravám algebraických výrazů (celistvý výraz, sčítání, odčítání a násobení celistvých výrazů, úprava výrazů na součin vytýkáním a pomocí vzorců, lomený výraz, krácení, rozšiřování, sčítání, odčítání, násobení a dělení lomených výrazů, složené lomené výrazy a jejich úpravy). V relaxačních částech hodin žáci většinou budou řešit matematické hádanky, logické úlohy, pokusí se určit podstatu matematických kouzel a kouzel s čísly, mohou se pobavit při čtení matematických pohádek.

Užívané didaktické metody jsou: při informačních částech hodiny přednáška, při odborných částech hodiny komentovaná série úloh, série úloh, matematická soutěž a zkoumání problému, při relaxačních částech hodiny matematická hra, matematická soutěž a beseda.

Poněkud výjimečnou mezi přípravami je příprava č. 6, ve které odpadají informační a relaxační část. Celá hodina je věnována testu, který shrnuje veškerou látku týkající se algebraických výrazů.

Šestá kapitola popisuje, s jakým ohlasem u žáků se setkala jedna z příprav a shrnuje výsledky testů, které vypracovaly dvě skupiny žáků 9. tříd. Jednu skupinu tvořili žáci, kteří navštěvují matematický kroužek, druhou skupinu žáci, kteří chtějí studovat na středních školách, ale možnost navštěvovat matematický kroužek nemají.

Poslední kapitolou je závěr, který shrnuje výsledky práce.

Tato diplomová práce je sepsána v textovém editoru firmy Microsoft Word verze 6.0 a.

## 2. ZÁJMOVÉ KROUŽKY MATEMATIKY

Péče o žáky, kteří mají o matematiku hlubší zájem, už na základní škole zdomácněla v různých formách, jako jsou cvičení z matematiky, zájmové kroužky, letní školy, pythagoriády, kroužky řešitelů matematické olympiády a podobně. Program kroužku by se měl řídit následujícími zásadami :

1. Náplň kroužku má být přitažlivá, ale není dobré omezovat ji jen na směsi navzájem nesourodých úloh. Téma pro každou schůzku by mělo být podle možnosti obsahově ucelené, aby jeho zpracování nevyznělo v myslích žáků ve změť nesouvisejících představ, ale aby přispělo k prohloubení a upevnění jejich dosavadních matematických vědomostí, dovedností a návyků.
2. Práce v kroužku nemá vést k přílišnému překračování učebních osnov ani k předbíhání látky stanovené pro příslušný ročník nebo ročník následující, aby se tím později neoslaboval zájem žáků v pravidelném vyučování a nezvětšoval se nepříznivě rozdíl mezi úrovní bystřejších a slabších nebo pomalejších žáků ve třídním kolektivu. Náměty nemají být natolik obtížné, aby znemožňovaly účast v kroužku žákům středního nadání.
3. Náplň témat volně navazuje na látku probíranou v příslušném ročníku podle osnov a učebnic, témata však spolu obsahově nesouvisejí, takže účastníci kroužku nemusejí látku dohánět, jestliže někdy kroužek vynechají. Tím se též umožní, aby žák mohl začít s návštěvou kroužku ve vyšším ročníku, i když do něj v předchozích ročnících nedocházel.
4. Účast v kroužku má co nejvíce rozvíjet aktivitu a samostatnost žáků. Učitelovou úlohou je motivovat a předkládat náměty a usměrňovat řešení návodnými podněty. Doporučuje se přidělovat menším skupinám nebo jednotlivcům přiměřené dílčí úkoly, které se po rozřešení shrnou za spolupráce všech členů kroužku.

Program zájmového kroužku matematiky by měl být zaměřený na formování zájmu o matematiku, na rozvoj logického myšlení, schopnosti zobecňování, systematizace. Také na rozvoj originálnosti a přesnosti myšlení, matematické intuice, stejně jako na rozvoj celkové tvořivosti žáků. Při vytváření programu je důležité dbát na vědeckost, přiměřenost, názornost a též na individuální přístup k žákům.

## 2.1. STRUKTURA HODINY ZÁJMOVÉHO KROUŽKU

Většina hodin by měla být rozdělena do tří částí.

Informační část

- výměna informací o událostech posledního týdne
- organizační záležitosti týkající se práce kroužku
- matematické legendy (o matematicích, o objevech, o matematických zajímavostech)
- trvá přibližně 5 - 10 minut

Odborná část

- aktivizace schopností žáků
- důležitý je výběr materiálu, který žákům přiblížíme vhodnou didaktickou metodou
- trvá zhruba 30 - 35 minut (podle náročnosti učiva a zájmu žáků)

Relaxační část

- utvoření atmosféry na uvolnění a odpočinek žáků
- kvalita relaxační části ovlivňuje návštěvnost dalšího setkání
- nejpoužívanější metody této části: společenská hra, matematická hra, beseda, matematická soutěž
- délka této části bývá přibližně 15 - 20 minut

Na několika prvních setkáních je důležité utvořit takovou pracovní atmosféru, ve které se žáci cítí příjemně. Je dobré hovořit zatím více o zajímavostech z matematiky, a těžiště práce je tedy v 1. a 3. části hodiny. Postupně se těžiště práce přesouvá do odborné části hodiny.

## 2.2. DIDAKTICKÉ METODY

Mezi nejpoužívanější didaktické metody patří přednáška, komentovaná série úloh, série úloh, matematická soutěž, matematická hra, společenská hra, beseda.

<u>**Přednáška**</u>

- Připravený souvislý projev učitele nebo žáka.
- Neměla by být příliš dlouhá.
- Jejím cílem je seznámení ostatních žáků s novými poznatky.
- Klade vysoké nároky na pozornost, ale malé na aktivitu a tvořivost žáků.
- Nezařazovat příliš často.

<u>**Komentovaná série úloh**</u>

- Učitelem připravená série úloh s určitou návazností.
- Učitel úlohy zadává postupně a vhodně je komentuje.
- Vyžaduje aktivitu žáků, díky níž se nové poznatky rychleji zapamatují.

<u>**Série úloh**</u>

- Vhodně vybrané příklady, které nemusí mít vnitřní souvislost.
- Při jejich řešení je těžiště práce v aktivitě žáků.
- Pomáhá rozvíjet logické myšlení.
- Na jednu stranu série úloh zkvalitňuje odbornou stránku žáků, ale na druhé straně způsobuje diferenciaci žáků na dobré a slabší.

**Matematická soutěž**

- Zakládá se na soupeření družstev nebo jednotlivců.
- Družstvo či jednotlivec se snaží získat maximální počet bodů a tím si zajistit vítězství.
- Podporuje rozvoj rychlého kombinačního myšlení.

**Matematická hra**

- Rozvíjí kombinační schopnosti, originálnost myšlení.
- Nutí žáka k maximální vlastní aktivitě.
- Žák svou taktikou ovlivňuje strategii hry soupeře.

**Společenská hra**

- Používá se nejčastěji ve třetí - relaxační části hodiny.
- Jeví se jako optimální doplněk matematické přednášky nebo komentované série úloh.
- Účastní se jí většinou všichni členové kolektivu.
- Během hry bývá obvykle dobrá atmosféra, která napomáhá formovat a upevňovat kolektiv.

**Beseda**

- Je vhodná v první a třetí části hodiny.
- Doporučuje se zařazovat ji po matematických hrách nebo sérii úloh.
- Beseda na volné téma umožňuje učiteli postřehnout problémy a názory žáků, hodnotit je a orientovat žáky na jejich překonávání.
- Uplatní se v ní i matematicky slabší žáci.
- Je dobrým relaxačním prostředkem.

**Zkoumání problému**

- Používá se obvykle v odborné části hodiny.
- Navodí se problém, žáci na základě známých vlastností a analogií odvodí nové vztahy.

## 2.3. ÚVODNÍ A ZÁVĚREČNÉ SETKÁNÍ

### 2.3.1. Úvodní setkání

Při první schůzce matematického kroužku bychom měli

A) seznámit žáky se systémem a organizací práce zájmového kroužku,

B) zaujmout stanovisko k následujícím čtyřem bodům :

1. Je třeba si uvědomit, že kroužek je dobrovolný nejen pro žáky, kteří se chtějí něco naučit, ale také pro učitele, jehož hlavní úlohou je pozitivně ovlivnit vztah žáků k matematice. Toho lze dosáhnout jen tehdy, budou-li obě strany přistupovat k práci aktivně a zodpovědně. Pravidelnost v práci kroužku a v docházce je prvním předpokladem dobrých vztahů učitele a žáků a dosažení vytýčených cílů.

2. Program většiny setkání by měl učitel plánovat a realizovat společně se žáky. Učitel obvykle navrhuje témata na několik setkání dopředu a žáci k nim zaujmou stanovisko (souhlasí nebo navrhnou jiný, pro ně zajímavější nebo vhodnější program). Pokud se na navrhovaném programu shodnou, je třeba vyčlenit míru zodpovědnosti za jeho přípravu. Na prvních pět až šest setkání připravuje učitel program sám. Tato doba obvykle stačí na to, aby skupina žáků utvořila kolektiv a vzniklo přirozené vedení. S postupem času učitel přesouvá na žáky nejprve přípravu první a třetí části hodiny, později žáci připravují i odborný program.

3. V rámci informací o organizaci činnosti by měl učitel objasnit své představy o struktuře jednotlivých hodin, to znamená pohovořit o tom, že prvních 5-10 minut setkání je určených na vzájemnou výměnu informací o různých matematických, ale také pro činnost kroužku podstatných, problémech. Po této části bude následovat matematický program, to je přednáška, beseda, řešení problémů a podobně. V závěru hodiny si bude možné zahrát matematickou nebo společenskou hru.

4. Připomínky žáků k činnosti kroužku, ujasnění pravidel.

### 2.3.2. Závěrečné setkání

V úvodní části hodiny je vhodné společně zhodnotit činnost kroužku za uplynulý rok s poukázáním na konkrétní práci jednotlivých žáků, ať už v matematické olympiádě nebo při organizaci společné činnosti a podobně. Od žáků žádáme, aby také formulovali připomínky k práci matematického kroužku. Děláme to proto, aby se do budoucnosti mohla zkvalitnit práce kroužku. Vhodné je také orientovat žáky na samostatnou práci v době prázdnin.

## 3. EXISTENCE MATEMATICKÝCH KROUŽKŮ

Na dvaceti náhodně vybraných základních školách jsem formou dotazníku zjišťovala, zda na těchto školách pracuje matematický kroužek.

Pouze na čtyřech z těchto dvaceti ZŠ takový kroužek existuje. Na ZŠ v Teplicích docházejí do kroužku žáci 2. až 7. tříd, na duchcovské ZŠ žáci 6. a 9. tříd. V Jablonci nad Nisou jsou dvě školy s matematickými kroužky, které navštěvují pouze žáci 9. tříd. V případě žáků 9. tříd je kroužek zaměřen na jejich přípravu k přijímacím zkouškám.

Na dalších čtyřech z dotazovaných škol mají žáci možnost docházet na nepovinně volitelná cvičení nebo konzultace z matematiky. Této možnosti využívají většinou opět žáci 9. tříd jako přípravu na přijímací zkoušky. V těchto čtyřech případech učitelé ještě navíc podporují matematicky nadané žáky individuálním přístupem a jejich účastí na matematických soutěžích a myslí si, že matematický kroužek je účelný. Dva z nich by v případě zájmu žáků takový kroužek zřídili.

Na ostatních dvanácti dotazovaných školách matematický kroužek není. Učitelé z těchto škol mají na matematický kroužek následující názor: Osm z nich považuje tento kroužek za účelný, matematicky nadané žáky podporuje individuálním přístupem a přihlašuje je do matematických soutěží (především matematických olympiád). Sedm z těchto osmi učitelů by v případě zájmu žáků matematický kroužek zřídilo, ale jedna škola je jazykově zaměřená a na jiné než jazykové aktivity nevybývají hodiny, na dalších šesti školách žáci nemají o jeho zřízení zájem (většina nadaných žáků odešla na gymnázia). Trochu výjimečná mezi těmito osmi školami je ZŠ Lesní v Liberci, která má rozšířenou výuku matematiky. Žáci mají pět až šest hodin matematiky týdně, není proto nutné zřizovat pro ně matematický kroužek.

Na zbylých čtyřech školách učitelé nepovažují matematický kroužek za potřebný ani účelný. Na třech z nich sice matematicky nadané žáky podporují pomocí při řešení matematických soutěží, ale matematický kroužek by nezřídili, většinou pro oboustranný nezájem. Na jedné škole učitel matematicky nadané žáky nijak nepodporuje.

Některé z vyplněných dotazníků - viz příloha č. 1

# 4. ÚPRAVY ALGEBRAICKÝCH VÝRAZŮ

S používáním čísel bylo nutné zavést početní výkony, jimiž ke dvěma nebo více číslům přiřazujeme předepsaným způsobem jisté číslo. Matematické zápisy, kterými vyjadřujeme prováděné početní výkony a jejich pořadí, nazýváme **početní výrazy.**

Početní výrazy, které obsahují písmena ve významu čísel (proměnné), se nazývají **algebraické výrazy.** Při počítání s algebraickými výrazy je často nutné algebraický výraz A nahradit algebraickým výrazem B (ten je obvykle jednodušší nebo pro další výpočet vhodnější). Musí platit, že A = B. Jedná se o **úpravu algebraického výrazu**.

Při úpravách algebraických výrazů můžeme využít tranzitivnosti rovnosti algebraických výrazů: Platí-li pro algebraické výrazy A, B, C, že A = C a B = C, pak A = B.

Často je třeba provést úpravu (výpočet, zjednodušení) algebraického výrazu (resp. součtu, součinu nebo podílu takových výrazů). Přitom vždy musíme uvést podmínky, za kterých mají výrazy i provedené úpravy smysl.

Příklad:

$$\frac{x+3}{x^2-9} = \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x-3} \quad \text{pro } x \neq 3,\ x \neq -3$$

Mezi nejčastější početní operace užívané při úpravách algebraických výrazů jsou početní operace s mnohočleny.

## 4.1. MNOHOČLENY

Nechť $n$ je přirozené číslo, $a_0$, $a_1$, ...$a_n$ jsou reálná čísla a $x$ je proměnná. Potom součet

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\text{, kde } a_n \neq 0,$$

se nazývá **mnohočlen $n$-tého stupně s proměnnou** $x$, koeficienty jsou z číselného oboru R. Jednotliví sčítanci se nazývají členy mnohočlenu.

Každé číslo různé od nuly můžeme chápat jako mnohočlen nultého stupně.

Mnohočlen ale může mít také více proměnných. Budeme uvažovat výrazy typu $a_k x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, kde $a_k$ jsou konstanty z daného číselného oboru R, $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou reálné proměnné, $k_1, k_2, \dots, k_n$ jsou nezáporná celá čísla. Pokud sečteme libovolný počet takových výrazů, získáme mnohočlen $n$ proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ s koeficienty z číselného oboru R. Každý ze sčítanců se nazývá člen mnohočlenu, $a_k$ je jeho koeficient, součet $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ je stupeň členu. Maximální ze součtů $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ se nazývá **stupeň mnohočlenu** vzhledem ke všem proměnným, maximální z exponentů pro každou z proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ se nazývá **stupeň mnohočlenu** vzhledem k proměnné $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Mnohočlen, který má pouze jeden člen, se nazývá **jednočlen**. Mezi jednočleny patří také všechna čísla různá od nuly (mnohočleny nultého stupně). Mnohočlen se dvěma členy se nazývá **dvojčlen**, se třemi členy **trojčlen** atd.

Příklad:

$8a^3 - 3a^2 + a - 5$ je čtyřčlen 3. stupně s proměnnou $a$. Koeficienty jsou z oboru C.

$14u^3 + 9uv^2 - v$ je trojčlen 3. stupně s proměnnými $u$, $v$. Vzhledem k proměnné $u$ je trojčlen 3. stupně, vzhledem k proměnné $v$ je 2. stupně).

### 4.1.1. Početní výkony s mnohočleny

**Mnohočleny se rovnají**, pokud se rovnají koeficienty odpovídajících si členů, tj. členů, které obsahují stejné mocniny proměnných.

Při **sčítání a násobení mnohočlenů** v oboru R užíváme zákonů pro sčítání a násobení reálných čísel (komutativního, asociativního a distributivního).

**Součtem (rozdílem) mnohočlenů** je opět mnohočlen. Koeficienty jeho členů se rovnají součtu (rozdílu) koeficientů těch členů, které si odpovídají. Některé koeficienty v jednotlivých mnohočlenech mohou být i nulové. Při odčítání mnohočlenů musíme přičíst **mnohočlen opačný**, tedy takový, který vznikne z původního změnou znamének u všech jeho koeficientů.

Příklad:

$(4x + 10y) + (6x - 8y) - (14x + 2y) = 4x + 10y + 6x - 8y - 14x - 2y =$

$= -4x$

**Mnohočlen násobíme jednočlenem** tak, že jednočlenem vynásobíme každý člen mnohočlenu.

Příklad:

$(2r + s - 7t) \cdot u = 2ru + su - 7tu$

**Součinem dvou mnohočlenů** je mnohočlen, který získáme sečtením součinů všech členů jednoho mnohočlenu se všemi členy druhého mnohočlenu.

Příklad:

$(6a^2 - 5)(3a^2 + 2) = 18a^4 + 12a^2 - 15a^2 - 10 = 18a^4 - 3a^2 - 10$

### 4.1.2. Rozklad mnohočlenů

Často, např. při počítání s lomenými algebraickými výrazy, je třeba vyjádřit daný mnohočlen jako součin jednodušších mnohočlenů, tj. zpravidla mnohočlenů nižšího stupně. Lze to provést některým z následujících způsobů:

1. **Vytknutím společného činitele před závorku**

Příklad:

$9x^2y - 24xy^3 = 3xy(3x - 8y^2)$

Někdy nelze sice ze všech členů daného mnohočlenu vytknout žádný společný činitel, ale po vhodném seřazení jeho členů do skupin je možno každou skupinu zvlášť rozložit tak, že pak všechny skupiny společný činitel mají.

Příklad:

$a^2 - 2ab - 3ac + 6bc = a(a - 2b) - 3c(a - 2b) = (a - 2b)(a - 3c)$

2. **Rozklad užitím vzorců**

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

# 5. PŘÍPRAVY

## 5.1. PŘÍPRAVA Č. 1

Informační část: Vznik algebraické symboliky. (10 minut)

Odborná část: Opakování látky osmé třídy k tématu algebraické výrazy: celistvé výrazy, sčítání a odčítání celistvých výrazů. (35 minut)

Relaxační část: Matematické hádanky. (15 minut)

### 5.1.1. Informační část - vznik algebraické symboliky

Tuto část hodiny může též připravit některý z žáků formou referátu.

S algebraickou symbolikou jsou spojena tři jména: Diofantos, François Viete a Reneé Descartes.

Diofantos patřil mezi alexandrijské matematiky římského období. Žil ve třetím století našeho letopočtu. Diofantos poprvé systematicky užil algebraické symboly. V jeho díle se setkáváme s dobře rozpracovaným algebraickým označováním prospěšným při řešení daleko složitějších problémů, než byly ty, které se vyskytly kdykoliv předtím. Symboly, které Diofantos používal, však zahrnovaly pouze operace sčítání a odčítání, vztah rovnosti a neznámou s jejími mocninami. Ostatní hodnoty v rovnici se vyjadřovaly konkrétními čísly.

Teprve francouzský matematik François Viete zavedl pro obecná čísla velká písmena: pro neznámé samohlásky, pro známé hodnoty souhlásky. François Viete byl advokát spřízněný s dvorem Jindřicha IV.

Po Vietově zlepšení symboliky následovala o jednu generaci později Descartova aplikace algebry na geometrii. Algebra dosáhla na začátku 17. století velkého rozvoje. Descartes zajistil nesmírné rozšíření její použitelnosti. Descartova symbolika byla již v mnohém moderní, v jeho knize se vyskytovaly výrazy, které se od našeho dnešního označování odlišovaly pouze v tom, že Descartes psal ještě *aa* místo $a^2$.

Zavedení vhodné symboliky proměnných bylo příčinou obrovského rozvoje matematiky. Proměnné jsou neodmyslitelnou pomůckou nejen v matematice, ale i v jiných oblastech vědy.

## 5.1.2. Odborná část

Cíl: V této hodině chceme se žáky procvičit počítání s celistvými výrazy, jejich sčítání a odčítání. V několika slovních úlohách by se měli žáci naučit správně vyjadřovat vztahy mezi neznámou a údaji zadanými v úloze.

Nejprve si se žáky zopakujeme a ujasníme pojmy číselný výraz, algebraický výraz, celistvý výraz, osvěžíme v paměti, jak vypadá jednočlen, dvojčlen, trojčlen atd.. Ke každému z témat probraných v osmém ročníku spočítáme několik příkladů.

### 5.1.2.1. Celistvý výraz

Výrazy, v nichž se vyskytují pouze reálná čísla, se nazývají **číselné výrazy.** Výrazy obsahující aspoň jednu proměnnou se nazývají **algebraické výrazy.** Algebraické výrazy, v nichž se proměnná nevyskytuje ve jmenovateli, se nazývají **celistvé výrazy.**

Například:

* $(6{,}3 - 2{,}7) \,.\, 3$; $1 - \sin 30°$ jsou číselné výrazy, neboť neobsahují proměnné, $\sin 30° = 0{,}5$.
* $(3x - 5) : 2 + 3{,}5$; $0{,}9k - (-0{,}81) + 1{,}1k$ jsou algebraické výrazy, neboť obsahují proměnné *x*, *k*.
* $6 \dfrac{5x - 3y}{4}$; $2a + 5$ jsou celistvé výrazy, neboť se v nich proměnná nevyskytuje ve jmenovateli.

- Zapište jako výraz:

a) součet trojnásobku čísla $y$ a čísla $z$

b) trojnásobek součtu čísel $y$ a $z$

c) šestinásobek čísla $x$ zvětšeného o osm

d) druhou mocninu rozdílu čísel $5m$ a $8n$

e) součet čísel $7s$ a $4t$ zmenšený o jejich rozdíl

Řešení:

a) $3y + z$

b) $3(y + z)$

c) $6(x + 8)$

d) $(5m - 8n)^2$

e) $(7s + 4t) - (7s - 4t)$

- Zjistěte, zda číslo -4 je řešením rovnice:

a) $3(x - 2) + 2(1 - x) = x - 4$

b) $5(2 - x) - 3(1 - 2x) = x + 1$

c) $x^2 + 2x - 8 = 2x^2 + 7x - 4$

Řešení:

a) $-18 + 10 = -8$

$-8 = -8$

b) $30 - 27 \neq -3$

$3 \neq -3$

c) $16 - 8 - 8 = 32 - 28 - 4$

$0 = 0$

- Jestliže $b$ kg jablek stálo 56 korun a $c$ kg hrušek 72 korun, kolik bychom zaplatili za 6 kg jablek a 5 kg hrušek?

Řešení:

| | |
|---|---|
| $b$ kg jablek ... 56 korun | $c$ kg hrušek ... 72 korun |
| 1 kg jablek ... $\frac{56}{b}$ korun | 1 kg hrušek ... $\frac{72}{c}$ korun |
| 6 kg jablek ... $6\frac{56}{b}$ korun | 5 kg hrušek ... $5\frac{72}{c}$ korun |

celkem: $6\dfrac{56}{b} + 5\dfrac{72}{c}$ korun

<u>Odpověď</u>:

Za 6 kg jablek a 5 kg hrušek bychom zaplatili $6\dfrac{56}{b} + 5\dfrac{72}{c}$ korun.

- Ondřej vydělá za měsíc $x$ korun, Luboš $y$ korun a Marek $z$ korun. Kolik korun vydělají dohromady za rok, jestliže budou každý měsíc vydělávat dva z nich, Luboš bude vydělávat o jeden měsíc déle než Ondřej a o jeden měsíc méně než Marek.

<u>Řešení</u>:

Ondřej: 1 měsíc ... $x$ korun

$a$ - 1 měsíců ... $(a - 1)x$ korun

Luboš: 1 měsíc ... $y$ korun

$a$ měsíců ... $ay$ korun

Marek: 1 měsíc ... $z$ korun

$a$ + 1 měsíců ... $(a + 1)z$ korun

$a = 24 : 3 = 8$

celkem: $7x + 8y + 9z$ korun

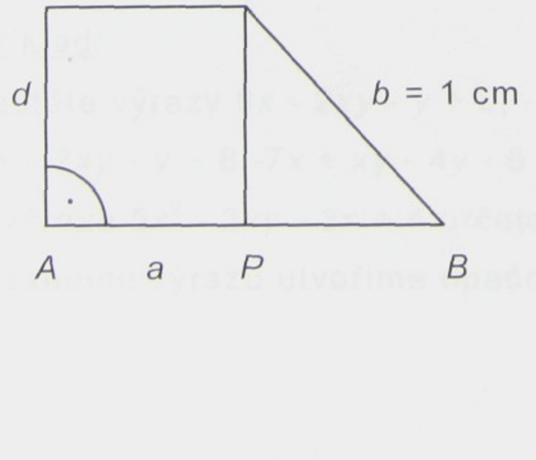
<u>Odpověď</u>:

Chlapci vydělají za rok dohromady $7x + 8y + 9z$ korun.

- Vyjádřete obsah lichoběžníku se stranami $a$, $b$, $c$, $d$. Strany $a$, $c$ jsou rovnoběžné. Velikost úhlu $DAB$ je 90°, $b$ = 1 cm.

<u>Řešení</u>:

Pro názornost si nakreslíme obrázek.



Jak vidíme z obrázku, lichoběžník si můžeme rozdělit na obdélník a trojúhelník.

obsah obdélníku: $S = c \,.\, d$

obsah trojúhelníku: $S = \dfrac{(a - c)\,d}{2}$

obsah lichoběžníku: $S = cd + \dfrac{(a - c)\,d}{2} = \dfrac{2cd + (a - c)\,d}{2} =$

$= \dfrac{d\,(2c + a - c)}{2} = \dfrac{d\,(c + a)}{2}$

Víme, že strana $b = 1$. Z pravoúhlého trojúhelníka $PBC$ vyjádříme velikost strany $d$.

$d^2 = b^2 - (a - c)^2$

$d^2 = 1 - (a - c)^2$

$d = \sqrt{1 - (a - c)^2}$

Obsah lichoběžníku je tedy $\dfrac{\sqrt{1 - (a - c)^2}\,.\,(c + a)}{2}$.

**5.1.2.2. Sčítání a odčítání celistvých výrazů**

Při **sčítání celistvých výrazů** postupujeme tak, že odstraníme závorky (pokud se vyskytují) a sčítáme všechny členy výrazů se stejnými proměnnými a zároveň se stejnou mocninou proměnné. Dva výrazy, jejichž součet je roven nule, se nazývají **navzájem opačné výrazy**. Při **odčítání celistvých výrazů** postupujeme tak, že odečtení výrazu nahradíme přičtením výrazu opačného.

Například:

* Sečtěte výrazy $9x - 2xy - y + 8$, $-7x + xy - 4y - 6$.

  $9x - 2xy - y + 8 - 7x + xy - 4y - 6 = 2x - xy - 5y + 2$

* K výrazu $5x^2 - 2xy - 3x + 4$ určete opačný výraz.

  K danému výrazu utvoříme opačný výraz tak, že změníme znaménka všech členů výrazu na znaménka opačná. Opačný výraz k danému výrazu tedy bude $-5x^2 + 2xy + 3x - 4$

* Odečtěte výrazy $7a^3 + 5a^2 - 4a - 6$, $6a^3 + 5a^2 - 7a - 2$

$7a^3 + 5a^2 - 4a - 6 + (-6a^3 - 5a^2 + 7a + 2) =$

$= 7a^3 + 5a^2 - 4a - 6 - 6a^3 - 5a^2 + 7a + 2 = a^3 + 3a - 4$

- Doplňte tabulku pro sčítání:

| + | $x^2 - 3x + 2$ | $x^2 - 7$ | $x + 6$ |
|---|---|---|---|
| $2x - 3$ | | | |
| $5x^2 - x$ | | | |
| $2x^2 + 2x - 1$ | | | |

Řešení:

| + | $x^2 - 3x + 2$ | $x^2 - 7$ | $x + 6$ |
|---|---|---|---|
| $2x - 3$ | $x^2 - x - 1$ | $x^2 + 2x - 10$ | $3x + 3$ |
| $5x^2 - x$ | $6x^2 - 4x + 2$ | $6x^2 - x - 7$ | $5x^2 + 6$ |
| $2x^2 + 2x - 1$ | $3x^2 - x + 1$ | $3x^2 + 2x - 8$ | $2x^2 + 3x + 5$ |

- Od výrazů ve sloupci odečtěte vždy příslušný výraz v řádku:

| - | $2a^2 - 3a$ | $a^2 + 4$ | $2a - 6$ |
|---|---|---|---|
| $5a^2 - 9$ | | | |
| $4a - 2$ | | | |
| $-a^2 + 3a$ | | | |

Řešení:

| - | $2a^2 - 3a$ | $a^2 + 4$ | $2a - 6$ |
|---|---|---|---|
| $5a^2 - 9$ | $-3a^2 - 3a + 9$ | $-4a^2 + 13$ | $-5a^2 + 2a + 3$ |
| $4a - 2$ | $2a^2 - 7a + 2$ | $a^2 - 4a + 6$ | $-2a - 4$ |
| $-a^2 + 3a$ | $3a^2 - 6a$ | $2a^2 - 3a + 4$ | $a^2 - a - 6$ |

- Vypočítejte, který výraz musíme přičíst k rozdílu výrazů $8x^2 - 2xy + 3y^2 - 5$, $4x^2 + 3xy - y^2 + 2$, abychom dostali jejich součet.

<u>Řešení</u>:

Rozdíl výrazů: $8x^2 - 2xy + 3y^2 - 5 - 4x^2 - 3xy + y^2 - 2 = 4x^2 - 5xy + 4y^2 - 7$

Součet výrazů: $8x^2 - 2xy + 3y^2 - 5 + 4x^2 + 3xy - y^2 + 2 =$

$= 12x^2 + xy + 2y^2 - 3$

Hledaný výraz: $12x^2 + xy + 2y^2 - 3 - 4x^2 + 5xy - 4y^2 + 7 =$

$= 8x^2 + 6xy - 2y^2 + 4$

- Dokažte, že součet libovolných tří po sobě jdoucích přirozených lichých čísel je dělitelný třemi.

<u>Řešení</u>:

Liché číslo můžeme zapsat ve tvaru $2n - 1$, součet tří po sobě jdoucích lichých čísel je tedy např.: $2n - 1 + 2n + 1 + 2n + 3 = 6n + 3 = 3(2n + 1)$. Výsledek je vždy dělitelný třemi.

- V lednu bylo vyčerpáno z rozpočtu $x$ dvanáctin a v únoru $y$ osmin financí. Jakou část rozpočtu zbývá vyčerpat?

<u>Řešení</u>:

leden ... $\frac{x}{12}$

únor ... $\frac{y}{8}$

celkem vyčerpáno ... $\frac{x}{12} + \frac{y}{8} = \frac{2x + 3y}{24}$

zbývá vyčerpat ... $1 - \frac{2x + 3y}{24} = \frac{24 - 2x - 3y}{24}$

<u>Odpověď</u>: Z rozpočtu zbývá ještě vyčerpat $\frac{24 - 2x - 3y}{24}$ financí.

5.1.3. Relaxační část - matematické hádanky

Připravíme pro žáky několik matematických hádanek.

**Společné vaření**

Zadání:

Nájemnice Trojánková přiložila do společné plotny tři polena ze své zásoby a nájemnice Pětníková pět polen. Nájemníku Netopilovi, který neměl vlastní dříví, dovolily uvařit oběd na společném ohni. Náhradou za výdaje zaplatil Netopil sousedkám 40 korun. Jak se o ně mají rozdělit?

Řešení:

Není správné, jak se mnozí domnívají, že 40 korun bylo zaplaceno za osm polen, po pěti korunách za poleno. Peníze byly zaplaceny pouze za třetinu z oněch osmi polen, neboť ohně používaly tři osoby ve stejné míře. Z toho plyne, že všech osm polen má cenu 40 . 3 = 120 Kč a jedno poleno 15 Kč.

Pětníkové tedy za jejích pět polen náleží 75 Kč, ale ona sama používala plotny za 40 Kč, má tedy dostat 35 Kč. Trojánková má za tři polena dostat 45 Kč a po odečtení 40 Kč za použití plotny dostane jen pět korun.

Při správném dělení má tedy Pětníková dostat 35 Kč a Trojánková 5 Kč.

**Záludný pařez**

Zadání:

Potkal venkovan v lese neznámého stařečka a dali se spolu do řeči. Stařeček povídá: „Znám v tomhle lese jeden zvláštní pařez, který pomáhá v nouzi.“ „K čemu je dobrý?“ „Zdvojnásobuje peníze. Dá se pod něj měšec s penězi, počítá se do sta a je to. Peníze v měšci se zdvojnásobí.“ „To bych rád zkusil“, žádostivě povídá venkovan. „To by šlo. Ale musíš mi zaplatit.“ „A kolik?“ Když stařeček viděl, že venkovan má v měšci málo peněz, souhlasil s tím, že po každém zdvojnásobení dostane 120 korun. A tak stařeček zavedl venkovana hluboko do lesa ke starému smrkovému pařezu. Vzal venkovanův měšec a zastrčil jej mezi kořeny. Pak počítali do sta. Stařec znovu sáhl pod pařez, něco tam kutil a nakonec vytáhl měšec a podal ho vesničanovi. Ten pohlédl do měšce a co to? Peníze se opravdu zdvojnásobily! Odpočítal z nich starci slíbených 120 korun. Celou transakci zopakovali ještě dvakrát. Když vesničan vyplatil starci slíbených 120 korun potřetí, nezůstala mu v měšci už ani koruna. Chudák při tom podniku přišel o všechny své peníze. Dál již nebylo co zdvojnásobovat a vesničan se vydal zarmouceně na cestu z lesa.

Přijdete na to, kolik měl vesničan u sebe peněz před nešťastnými pokusy s ošemetným pařezem?

Řešení:

Tuto hádanku je lepší řešit od konce. Víme, že po třetím zdvojnásobení bylo v měšci 120 Kč (peníze, které stařec dostal naposled). Před zdvojnásobením bylo tedy v měšci 60 Kč, které tam zbyly, když vesničan podruhé zaplatil starci 120 Kč. Před zaplacením bylo v měšci 120 Kč + 60 Kč = 180 Kč.

180 Kč bylo v měšci po druhém zdvojnásobení, předtím v něm bylo celkem 90 Kč, které tam zbyly, když stařec poprvé dostal 120 Kč. Z toho zjišťujeme, že před zaplacením bylo v měšci 90 Kč + 120 Kč = 210 Kč.

Tolik tam bylo po prvním zdvojnásobení, před ním tam byla polovina, to je 105 Kč. To byly tedy peníze, s nimiž venkovan zahájil své nezdařené peněžní operace.

Zkouška:

| | |
|---|---|
| Po prvním zdvojnásobení: | 105 . 2 = 210 |
| Po prvním zaplacení: | 210 - 120 = 90 |
| Po druhém zdvojnásobení: | 90 . 2 = 180 |
| Po druhém zaplacení: | 180 - 120 = 60 |
| Po třetím zdvojnásobení: | 60 . 2 = 120 |
| Po třetím zaplacení: | 120 - 120 = 0 |

**Nesymetrická střecha**

Zadání:

Dům má nesymetrickou střechu, jedna strana svírá s horizontální rovinou úhel 60°, druhá 70°. Předpokládejme, že kohout snese vejce na hřeben střechy. Na kterou stranu vejce padne - na strmější nebo rovnější?

Řešení:

Odpověď na tuto hádanku je velmi jednoduchá. Kohout vejce nesnáší.

## 5.2. PŘÍPRAVA Č. 2

Informační část: Möbiova páska. (10 minut)

Odborná část: Opakování látky osmého ročníku k tématu algebraické výrazy: násobení celistvých výrazů, úprava výrazů na součin vytýkáním a pomocí vzorců. (35 minut)

Relaxační část: Matematická kouzla. (15 minut)

### 5.2.1. Informační část - Möbiova páska

Na podivnou pásku přišel v polovině minulého století německý matematik F. Möbius. Její zhotovení není žádné umění. Proužek papíru zkroutíme o 180° a konce slepíme. Nic víc není třeba dělat a už je na světě zvláštnost. Nikdo z nás by totiž nedokázal nabarvit jednu stranu této pásky třeba červeně a druhou dejme tomu modře. To se nám prostě nepodaří, protože tato páska má jen jednu jedinou stranu. Z jedné strany se dostaneme na druhou, aniž by bylo třeba přecházet přes hranu pásky.

Möbiova páska (dostala jméno po svém objeviteli) umožní ještě jiné zajímavosti. Rozstřihneme-li Möbiovu pásku středem, nevzniknou nám dvě pásky, jak bychom předpokládali, vznikne jen jedna, dvojnásobně stočená. Pokračujme. Prstenec vzniklý prvním stříháním opět středem rozstřihneme. Tentokrát dostaneme prstence dva.

Stočíme-li papírový pásek tentokrát o 360°, vznikne páska, která má stejné vlastnosti jako při stočení jen o 180°. Rozstřihneme-li však tuto druhou pásku středem, vzniknou dva prstence do sebe zavěšené. A když jej místo jednoho rozstřižení rozstřihneme dvěma podélnými řezy po třetině šířky, dostaneme tři do sebe zavěšené prstence.

Další možnosti a různé způsoby stříhání si vyzkoušejí žáci sami doma a na další hodině zjistíme, jaké zajímavosti ještě objevili.

### 5.2.2. Odborná část

Cíl: V této hodině by si měli žáci zopakovat násobení celistvých výrazů, užití násobení při řešení slovních úloh. Dalším úkolem je zopakovat úpravu výrazů na součin vytýkáním před závorku a úpravu výrazů na součin pomocí vzorců.

#### 5.2.2.1. Násobení celistvých výrazů

Nejprve si připomeneme větu o **násobení mocnin se stejným základem**, která zní: Pro každé reálné číslo $a$ a pro každá přirozená čísla $m,n$ platí $a^m.a^n = a^{m+n}$. **Mnohočlen násobíme jednočlenem** tak, že jednočlenem násobíme každý člen mnohočlenu. **Výraz násobíme výrazem** tak, že každý člen jednoho výrazu vynásobíme každým členem druhého výrazu.

Například:

* Vynásobte: $2x \,.\, 3x^2$, $(-0{,}8u^2v) \,.\, (-0{,}5uv^3)$

  $2x \,.\, 3x^2 = (2 \,.\, 3) \,.\, (x \,.\, x^2) = 6x^3$

  $(-0{,}8u^2v) \,.\, (-0{,}5uv^3) = [(-0{,}8)\,(-0{,}5)] \,.\, (u^2 \,.\, u) \,.\, (v \,.\, v^3) = 0{,}4u^3v^4$

* Vynásobte: $2x\,(5y - 3x)$, $(-7b) \,.\, (3a^2 - 2ab + b)$

  $2x\,(5y - 3x) = 2x \,.\, 5y + 2x \,.\, (-3x) = 10xy - 6x^2$

  $(-7b) \,.\, (3a^2 - 2ab + b) = (-7b) \,.\, 3a^2 + (-7b) \,.\, (-2ab) + (-7b) \,.\, b =$

  $= -21a^2b + 14ab^2 - 7b^2$

* Vynásobte a zjednodušte: $(x + 5)\,(4x^2 - 3x + 7)$,

  $(a - 3b)\,(b - 2a)\,(4a + b)$

  $(x + 5)\,(4x^2 - 3x + 7) = 4x^3 - 3x^2 + 7x + 20x^2 - 15x + 35 =$

  $= 4x^3 + 17x^2 - 8x + 35$

  $(a - 3b)\,(b - 2a)\,(4a + b) = (ab - 2a^2 - 3b^2 + 6ab)\,(4a + b) =$

  $(7ab - 2a^2 - 3b^2)\,(4a + b) = 28a^2b - 8a^3 - 12ab^2 + 7ab^2 - 2a^2b - 3b^3 =$

  $-8a^3 + 26a^2b - 5ab^2 - 3b^3$

- Doplňte tabulku pro násobení:

| * | $a - 7$ | $3a^2 - 2a$ | $4a$ |
|---|---|---|---|
| $3a$ | | | |
| $4a - 2$ | | | |
| $3a^2 + 6$ | | | |

Řešení:

| * | $a - 7$ | $3a^2 - 2a$ | $4a$ |
|---|---|---|---|
| $3a$ | $3a^2 - 21a$ | $9a^3 - 6a^2$ | $12a^2$ |
| $4a - 2$ | $4a^2 - 30a + 14$ | $12a^3 - 14a^2 + 4a$ | $16a^2 - 8a$ |
| $3a^2 + 6$ | $3a^3 - 21a^2 + 6a - 42$ | $9a^4 - 6a^3 + 18a^2 - 12$ | $12a^3 + 24a$ |

- Dokažte, že rozdíl druhé mocniny libovolného přirozeného lichého čísla a součinu jeho sousedních lichých čísel je dělitelný čtyřmi.

Řešení:

$(2n + 1)^2 - (2n - 1)(2n + 3) = 4n^2 + 4n + 1 - (4n^2 + 6n - 2n - 3) =$

$= 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 4n + 3 = 4$

- Prázdný nákladní vagon má hmotnost 5,4 *t*. Jaká je hmotnost celého vlaku bez lokomotivy, jestliže má vlak 22 vagonů, na osmnácti je *m* tun nákladu a na zbývajících o *x* tun nákladu méně.

Řešení:

$22 \,.\, 5{,}4 + 18m + 4(m - x) = 118{,}8 + 22m - 4x$

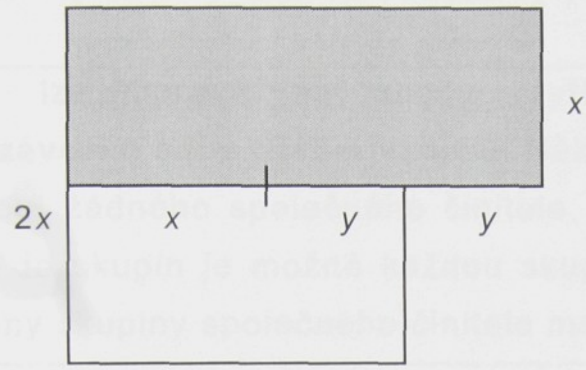
Odpověď:

Hmotnost celého vlaku je $118{,}8 + 22m - 4x$ tun.

- Dvěma způsoby vypočítejte a zapište co nejjednodušším výrazem obsah obrazce složeného ze dvou obdélníků:

a) vypočítejte obsahy obou obdélníků a pak je sečtěte,

b) doplňte obrázek na jeden obdélník, vypočítejte jeho obsah a od něj odečtěte obsah doplněné části.

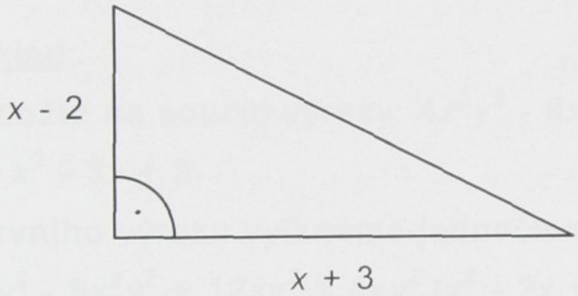



Řešení:

a) $x\,(x + 2y) + x\,(x + y) = x^2 + 2xy + x^2 + xy = 2x^2 + 3xy$

b) $2x\,(x + 2y) - xy = 2x^2 + 4xy - xy = 2x^2 + 3xy$

- Vyjádřete délku přepony co nejjednodušším výrazem:




Řešení:

$p^2 = (x - 2)^2 + (x + 3)^2$

$p^2 = x^2 - 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 = 2x^2 + 2x + 13$

$p = \sqrt{2x^2 + 2x + 13}$

- Jestliže dvě protější strany *a* čtverce zvětšíme o dva cm a druhé dvě strany zmenšíme o dva cm, vznikne obdélník, který má stejný obvod jako původní čtverec. Obsah se však změní. Jak?

Řešení:

obsah původního čtverce ... $a^2$

obsah obdélníka ... $(a + 2)\,(a - 2) = a^2 - 4$

Odpověď:

Obsah se o 4 $cm^2$ zmenší.

### 5.2.2.2. Úprava výrazů na součin vytýkáním a pomocí vzorců

Výraz lze upravit na součin **vytknutím společného činitele před závorku** nebo **užitím vzorců**. Někdy nelze ze všech členů výrazu vytknout žádného společného činitele, ale po vhodném seřazení jeho členů do skupin je možné každou skupinu zvlášť rozložit tak, že pak všechny skupiny společného činitele mají.

Vzorce, které budeme používat:

| | |
|---|---|
| $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ |
| $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ |
| $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ | $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ |
| | $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ |

<u>Například</u>:

* Rozložte na součin výrazy: $4x^3y^2 - 8x^2y^2 + 12xy^3$, $7(r - s) - r + s$, $x^3 - x^2 - 3x + 3$

  Z prvního výrazu vytkneme jednočlen $4xy^2$:

  $4x^3y^2 - 8x^2y^2 + 12xy^3 = 4xy^2(x^2 - 2x + 3y)$

  Ve druhém výrazu nejprve z dvojčlenu $-r + s$ vytkneme $-1$ a potom můžeme z celého výrazu vytknout dvojčlen $(r - s)$:

  $7(r - s) - r + s = 7(r - s) - (r - s) = (r - s)(7 - 1) = 6(r - s)$

  Ve třetím výrazu vytkneme nejprve z prvních dvou členů $x^2$, z druhých dvou $-3$:

  $x^3 - x^2 - 3x + 3 = x^2(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 3)$

* Rozložte na součin výrazy: $9x^2 + 30xy + 25y^2$, $r^2 - 6r + 9$, $49m^4n^2 - 9r^2$

  Při úpravě prvního trojčlenu užijeme vzorec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

  $9x^2 + 30xy + 25y^2 = (3x)^2 + 2 \,.\, 3x \,.\, 5y + (5y)^2 = (3x + 5y)^2 =$
  $= (3x + 5y)(3x + 5y)$

  Druhý trojčlen rozložíme na součin podle vzorce $(a - b)^2 =$
  $= a^2 - 2ab + b^2$:

  $r^2 - 6r + 9 = r^2 - 2r \,.\, 3 + 3^2 = (r - 3)^2 = (r - 3)(r - 3)$

K rozložení třetího trojčlenu na součin užijeme vzorec $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$49m^4n^2 - 9r^2 = (7m^2n)^2 - (3r)^2 = (7m^2n + 3r)(7m^2n - 3r)$

* Rozložte na součin výrazy: $15y + 125y^3 + 1 + 75y^2$, $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

První čtyřčlen nejprve uspořádáme od nejvyšší mocniny proměnné $y$ k nejnižší mocnině $y$, potom výraz rozložíme na součin podle vzorce $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$:

$15y + 125y^3 + 1 + 75y^2 = 125y^3 + 75y^2 + 15y + 1 = (5y + 1)^3 =$
$= (5y + 1)(5y + 1)(5y + 1)$

Typy mocnin a pravidelné střídání kladných a záporných znamének u druhého výrazu signalizuje, že výraz rozložíme podle vzorce $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$:

$27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 = (3x - 2y)^3 = (3x - 2y)(3x - 2y)(3x - 2y)$

* Rozložte na součin výrazy: $3x^3 + 3$, $x^6 - y^3$

V prvním výrazu vytkneme nejprve z obou členů výrazu 3 a dále výraz rozložíme podle vzorce $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$:

$3x^3 + 3 = 3(x^3 + 1) = 3(x + 1)(x^2 - x + 1)$

Výraz $x^6$ zapíšeme ve tvaru $(x^2)^3$ a potom druhý výraz rozložíme podle vzorce $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$:

$x^6 - y^3 = (x^2)^3 - y^3 = (x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$

- Doplňte následující tabulku pro násobení:

| * | $a^2$ | $2a$ |
|---|---|---|
| | $3a^4 - a^2$ | |
| | | $8a^2 + 6a$ |

<u>Řešení</u>:

| * | $a^2$ | $2a$ |
|---|---|---|
| $3a^2 - 1$ | $3a^4 - a^2$ | $6a^3 - 2a$ |
| $4a + 3$ | $4a^3 + 3a^2$ | $8a^2 + 6a$ |

- Rozložte na součin výrazy:

a) $6s(s - r) + 5r(r - s)$
b) $c + 4b(a - c) - a$
c) $25x^3 + 25x^2 + 5x + 5$
d) $-6c - 5a(3c - b) + 2b$
e) $xy + 2y - 3x - 6$
f) $a^2 - 2ab - 3ac + 6bc$
g) $y^2z^2 - 2z^3 - 2y^3 + 4zy$
h) $x^2y^2 - axy + bxy - ab$

Řešení:

a) $6s(s - r) + 5r(r - s) = (s - r)(6s - 5r)$

b) $c + 4b(a - c) - a = (a - c)(4b - 1)$

c) $25x^3 + 25x^2 + 5x + 5 = 5(5x^3 + 5x^2 + x + 1) = 5[5x^2(x + 1) + x + 1] =$
$= 5(x + 1)(5x^2 + 1)$

d) $-6c - 5a(3c - b) + 2b = (b - 3c)(2 + 5a)$

e) $xy + 2y - 3x - 6 = y(x + 2) - 3(x + 2) = (x + 2)(y - 3)$

f) $a^2 - 2ab - 3ac + 6bc = a(a - 2b) - 3c(a - 2b) = (a - 2b)(a - 3c)$

g) $y^2z^2 - 2z^3 - 2y^3 + 4zy = z^2(y^2 - 2z) - 2y(y^2 - 2z) = (y^2 - 2z)(z^2 - 2y)$

h) $x^2y^2 - axy + bxy - ab = xy(xy - a) + b(xy - a) = (xy - a)(xy + b)$

- Rozložte na součin:

a) $20x^3 - 60x^2y + 45xy^2$
b) $3x^2 + 12x + 12$
c) $32x^3 - 18x$
d) $4x^3 - 12x^2 + 9x$

Řešení:

a) $20x^3 - 60x^2y + 45xy^2 = 5x(4x^2 - 12xy + 9y^2) = 5x(2x - 3y)(2x - 3y)$

b) $3x^2 + 12x + 12 = 3(x^2 + 4x + 4) = 3(x + 2)(x + 2)$

c) $32x^3 - 18x = 2x(16x^2 - 9) = 2x(4x - 3)(4x + 3)$

d) $4x^3 - 12x^2 + 9x = x(4x^2 - 12x + 9) = x(2x - 3)(2x - 3)$

- Rozložte na součin, pokud lze:

a) $4b^2 + 12b + 9$
b) $16x^2 - 40x + 25$
c) $a^2b^2 - 121$
d) $\frac{1}{4}m^2 + 4m + 16$
e) $4a^2 - 6a + 9$
f) $\frac{1}{4}y^2 - x^4$

Řešení:

a) $4b^2 + 12b + 9 = (2b + 3)(2b + 3)$

b) $16x^2 - 40x + 25 = (4x - 5)(4x - 5)$

c) $a^2b^2 - 121 = (ab - 11)(ab + 11)$

d) $\frac{1}{4}m^2 + 4m + 16 = (\frac{1}{2}m + 4)(\frac{1}{2}m + 4)$

e) nelze - neodpovídá tvaru $a^2 - 2ab + b^2$

f) $\frac{1}{4}y^2 - x^4 = (\frac{1}{2}y - x^2)(\frac{1}{2}y + x^2)$

- Rozložte na součin pomocí vzorce:

a) $64x^3 + 1 + 12x + 48x^2$

b) $8a^3 + 27b^3$

c) $64 - 343r^3$

d) $125y^3 - 15xy^2 + 0{,}6x^2y - 0{,}008x^3$

Řešení:

a) $64x^3 + 1 + 12x + 48x^2 = (4x + 1)(4x + 1)(4x + 1)$

b) $8a^3 + 27b^3 = (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$

c) $64 - 343r^3 = (4 - 7r)(16 + 28r + 49r^2)$

d) $125y^3 - 15xy^2 + 0{,}6x^2y - 0{,}008x^3 = (5y - 0{,}2x)(5y - 0{,}2x)(5y - 0{,}2x)$

- Rozložte na součin:

a) $250u^3 + 16v^3$

b) $12a^2b^3c^5 - 42ab^4c^5 + 72a^3b^3c^5$

c) $4z^3 + 4z^2 - 25z - 25$

d) $-192u^4 + 81u$

Řešení:

a) $250u^3 + 16v^3 = 2(125u^3 + 8v^3) = 2(5u + 2v)(25u^2 - 10uv + 4v^2)$

b) $12a^2b^3c^5 - 42ab^4c^5 + 72a^3b^3c^5 = 6ab^3c^5(2a - 7b + 12a^2)$

c) $4z^3 + 4z^2 - 25z - 25 = z(4z^2 - 25) + 4z^2 - 25 = (4z^2 - 25)(z + 1) =$
$= (2z - 5)(2z + 5)(z + 1)$

d) $-192u^4 + 81u = 3u(27 - 64u^3) = 3u(3 - 4u)(9 + 12u + 16u^2)$

### 5.2.3. Relaxační část - matematická kouzla

Připravíme si pro žáky některé z následujících matematických kouzel. Důležitá je dokonalá příprava učitele. Doporučuje se kouzlo ukázat a dát žákům čas na samostatné odhalení jeho podstaty. Pokud se jim to nepodaří, odhalíme podstatu kouzla spolu s nimi.

**I.** Sedlák prodal koně za 28 500 korun. Kupující si však pomyslil, že nepotřebuje tak drahého koně a šel ho vrátit majiteli se slovy: „Ten kůň není hoden toho, kolik jsem za něj zaplatil." „Když myslíš, že cena toho koně je příliš vysoká, kup jen hřebíky v podkovách a koně dostaneš zadarmo přídavkem," odvětil původní majitel. „V každé podkově jsou čtyři podkováky. Za první mi zaplatíš 50 haléřů, za druhý korunu, za třetí dvě koruny a tak dále."

Kupujícího zlákala tak nízká cena. Přijal podmínku prodávajícího v přesvědčení, že za podkováky nebude muset zaplatit víc než 100 korun.

Jak se přepočítal?

Vysvětlení: Kupující musí zaplatit za 16 podkováků, za každý dvojnásobek ceny předešlého.

0,50 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1 024 + 2 048+ + 4 096 + 8 192 + 16 384 + 32 768 = 65 531,50

Za koně by kupující zaplatil 28 500 korun, za podkováky musí zaplatit 65 531,50 korun, což je o 65 531,50 - 28 500 = 37 031,50 korun více.

**II.** Na kouzlo je třeba jedna mince v hodnotě 1 Kč a tři v hodnotě 2 Kč, dále 24 hracích karet.

Tři žáci si v naší nepřítomnosti rozdělí mince takto: 1 Kč, 2 Kč a 4 Kč. Jednomu z nich dáme jednu kartu, druhému dvě a třetímu tři. Rozdělení mincí samozřejmě neznáme. Znovu odejdeme z místnosti. Předtím ale žáky vyzveme, aby odebrali další karty. Ten, kdo má 1 Kč, si vezme ještě tolik karet, kolik dostal. Ten, kdo má 2 Kč, dvakrát tolik než dostal, a ten, kdo má 4 Kč, čtyřikrát tolik. Po návratu si nenápadně prohlédneme karty, které zbyly, a řekneme žákům, kdo má kolik korun.

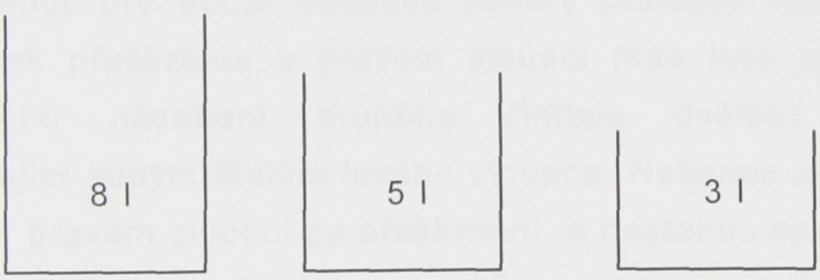
Vysvětlení: Toto kouzlo je založené na jednoduché myšlence. Každému případu rozdělení peněz odpovídá jiný počet karet, které zbyly. Kolik, to nám ukáže následující tabulka:

| ROZDĚLENÍ PENĚZ | | | ODEBRANÉ KARTY | | | ZBYLÉ KARTY |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 2 | 6 | 15 | 1 |
| 1 | 4 | 2 | 2 | 10 | 9 | 3 |
| 2 | 1 | 4 | 3 | 4 | 15 | 2 |
| 2 | 4 | 1 | 3 | 10 | 6 | 5 |
| 4 | 1 | 2 | 5 | 4 | 9 | 6 |
| 4 | 2 | 1 | 5 | 6 | 6 | 7 |

Pokud tedy zjistíme počet karet, které zbyly, pomocí této tabulky můžeme určit, kdo si vzal kolik korun.

**III.** Máme tři nádoby. První má obsah 8 litrů a je po okraj naplněná vodou. Druhá má obsah 5 litrů, třetí 3 litry. Druhá a třetí nádoba jsou prázdné. Vhodným přeléváním vody máme dosáhnout toho, aby v první i v druhé nádobě byly čtyři litry vody. Jak to uděláme bez odměrky?

Řešení:




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 8 | 0 | 0 | na počátku |
| 2. | 3 | 5 | 0 | |
| 3. | 3 | 2 | 3 | |
| 4. | 6 | 2 | 0 | |
| 5. | 6 | 0 | 2 | |
| 6. | 1 | 5 | 2 | |
| 7. | 1 | 4 | 3 | |
| 8. | 4 | 4 | 0 | na konci |

## 5.3. PŘÍPRAVA Č. 3

Informační část: Jak násobí Etiopové. (10 minut)

Odborná část: Lomený výraz, krácení a rozšiřování lomených výrazů. (35 minut)

Relaxační část: Kouzla s čísly. (15 minut)

### 5.3.1. Informační část - Jak násobí Etiopové.

Etiopské kmeny násobí dvě čísla následujícím způsobem: napíší si oba činitele vedle sebe, potom prvního činitele dělí dvěma a druhého násobí dvěma. Jestliže první činitel není dělitelný dvěma beze zbytku, neberou Etiopové ohled na zbytek - tudíž např. 25 : 2 je u nich 12. Tento postup se opakuje tolikrát, až levý sloupec čísel (tj. výsledky postupného dělení prvního činitele dvěma) se ukončí jedničkou. A jak nyní dostanou výsledek? V levém sloupci přeškrtnou všechna sudá čísla, neboť prý podle etiopské pověry přinášejí tato čísla neštěstí. Stejně tak přeškrtnou v pravém sloupci (kde jsou zapsané výsledky postupného násobení druhého činitele dvěma) všechna čísla odpovídající sudým číslům levého sloupce. Nakonec sečtou čísla, která zůstala v pravém sloupci po přeškrtnutí, a dostanou správný výsledek. Tímto způsobem Etiopanům vždy vyjde správné číslo, přestože při dělení neberou ohled na zbytky a přestože přeškrtávají sudá čísla.

Příklady:

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{6 \,.\, 9} \\ \hline \cancel{6} & \cancel{9} \\ 3 & 18 \\ 1 & 36 \\ \hline & 54 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{25 \,.\, 43} \\ \hline 25 & 43 \\ \cancel{12} & \cancel{86} \\ \cancel{6} & \cancel{172} \\ 3 & 344 \\ 1 & 688 \\ \hline & 1075 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{210 \,.\, 4} \\ \hline \cancel{210} & \cancel{4} \\ 105 & 8 \\ \cancel{52} & \cancel{16} \\ \cancel{26} & \cancel{32} \\ 13 & 64 \\ \cancel{6} & \cancel{128} \\ 3 & 256 \\ 1 & 512 \\ \hline & 840 \end{array}$$

## 5.3.2. Odborná část

Cíl: Lomené výrazy jsou novým učivem, proto se jimi budeme zabývat podrobněji. Žáci by si měli zvyknout pracovat s lomenými výrazy, měli by si zafixovat, že při počítání s lomenými výrazy je vždy nutné uvést podmínky, za kterých má výraz smysl. Dále by se měli naučit lomené výrazy krátit a rozšiřovat.

### 5.3.2.1. Lomený výraz

Dosud jsme se zabývali celistvými výrazy. Nyní se zaměříme na algebraické výrazy, které jsou zapsány ve tvaru zlomku, jako např. $\frac{5}{x}$, $\frac{3}{2x - 11}$, $\frac{2xy}{x + y}$. Takové výrazy se nazývají **lomené výrazy**. Lomené výrazy jsou výrazy zapsané ve tvaru zlomku, v jehož jmenovateli se vyskytuje proměnná. S lomenými výrazy pracujeme obdobně jako se zlomky. Víme, že jmenovatel žádného zlomku nemůže být roven nule. Totéž platí i o lomeném výrazu. Lomený výraz má smysl, jestliže **číselná hodnota** jeho **jmenovatele se nerovná nule**. Určujeme-li podmínky, pro které má lomený výraz smysl, vyloučíme všechny hodnoty jednotlivých proměnných, po jejichž dosazení je číselná hodnota jmenovatele lomeného výrazu rovna nule.

Například:

* Určete podmínky, pro které mají dané výrazy smysl:

$\frac{5 - x}{3x - 1}$ Výraz má smysl, jestliže $3x - 1 \neq 0$, tj. $x \neq \frac{1}{3}$

$\frac{y^2 + 1}{y^2 - 1}$ Výraz má smysl, jestliže $y^2 - 1 \neq 0$. Rozkladem na součin dostaneme $(y + 1)(y - 1) \neq 0$. Součin dvou výrazů je různý od nuly, jestliže každý z nich je různý od nuly. Získáme dvě podmínky: $y + 1 \neq 0$, $y - 1 \neq 0$. Odtud $y \neq -1$, $y \neq 1$. Výraz má smysl, jestliže $y \neq -1$, $y \neq 1$.

$\frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}$ Výraz má smysl, jestliže $y^2 + 1 \neq 0$. Odtud $y^2 \neq -1$. Pro každé reálné číslo $y$ platí $y^2 \geq 0$. Nemůže tedy nastat případ, že $y^2 = -1$. Výraz má proto smysl pro všechna reálná čísla $y$.

* Vypočítejte hodnotu výrazu $\frac{x^2 - 3}{2 - x}$ pro $x = -2; 0; 2$

Pro $x = -2$: $\frac{(-2)^2 - 3}{2 - (-2)} = \frac{4 - 3}{2 + 2} = \frac{1}{4}$

Pro $x = 0$: $\frac{0^2 - 3}{2 - 0} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$

Pro $x = 2$: $\frac{2^2 - 3}{2 - 2} = \frac{1}{0}$; výraz nemá smysl. Výraz má smysl jen v případě, že $x \neq 2$.

- Dosaďte proměnné z řádku do výrazů ve sloupci, pokud lze, a vypočítejte hodnotu výrazu:

| | -5 | 5 | 4 |
|---|---|---|---|
| $\frac{x}{3x - 1}$ | | | |
| $\frac{1}{x + 5}$ | | | |
| $\frac{x^2 + 1}{x^3 - 25x}$ | | | |

Řešení:

| | -5 | 5 | 4 |
|---|---|---|---|
| $\frac{x}{3x-1}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{5}{14}$ | $\frac{4}{11}$ |
| $\frac{1}{x+5}$ | nelze | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{9}$ |
| $\frac{x^2+1}{x^3-25x}$ | nelze | nelze | $-\frac{17}{36}$ |

- Určete, pro které hodnoty proměnných mají dané výrazy smysl:

a) $\frac{k-9}{7k-21k^2}$

b) $\frac{8m-3}{-2m^2-8m}$

c) $\frac{5n-17}{4n^3+6n^2}$

d) $\frac{u^2+uv+v^2}{-6uv+9uv^2}$

e) $\frac{u+3v}{u-3v}$

f) $\frac{6u+5v}{u^2-v^2}$

Řešení:

a) $7k - 21k^2 \neq 0$

$7k\,(1 - 3k) \neq 0$

$k \neq 0,\ k \neq \frac{1}{3}$

b) $-2m^2 - 8m \neq 0$

$-2m\,(m + 4) \neq 0$

$m \neq 0,\ m \neq -4$

c) $4n^3 + 6n^2 \neq 0$

$2n^2\,(2n + 3) \neq 0$

$n \neq 0,\ n \neq -\frac{3}{2}$

d) $-6uv + 9uv^2 \neq 0$

$3uv\,(3v - 2) \neq 0$

$u \neq 0,\ v \neq 0,\ v \neq \frac{2}{3}$

e) $u - 3v \neq 0$

$u \neq 3v$

f) $u^2 - v^2 \neq 0$

$(u - v)\,(u + v) \neq 0$

$u \neq v,\ u \neq -v$

- Určete hodnoty proměnné $x$, pro něž se daný výraz rovná nule, a stanovte podmínky řešitelnosti. Výsledky s nimi porovnejte.

a) $\dfrac{81 - x^2}{x - 5}$

b) $\dfrac{x^2 - 14x + 49}{2x(3x - 4)}$

c) $\dfrac{25x^2 - 80x + 64}{(x + 1)(x - 1)}$

d) $\dfrac{x(x + 2)}{x - 2}$

Řešení:

a) $81 - x^2 = 0$

$(9 - x)(9 + x) = 0$

$x = 9,\ x = -9$

$x - 5 \neq 0$

$x \neq 5$

b) $x^2 - 14x + 49 = 0$

$(x - 7)(x - 7) = 0$

$x = 7$

$2x(3x - 4) \neq 0$

$x \neq 0,\ x \neq \dfrac{4}{3}$

c) $25x^2 - 80x + 64 = 0$

$(5x - 8)(5x - 8) = 0$

$x = \dfrac{8}{5}$

$(x + 1)(x - 1) \neq 0$

$x \neq -1,\ x \neq 1$

d) $x(x + 2) = 0$

$x = 0,\ x = -2$

$x - 2 \neq 0$

$x \neq 2$

- Určete, za jakých podmínek mají uvedené výrazy smysl:

a) $\dfrac{5e - f}{7e^2 - 8ef - 7e^2f + 8ef^2}$

b) $\dfrac{4a - 5b + 2c^2}{24a + 9ab - 40ac + 10a^2c - 15abc - 6a^2}$

Řešení:

a) $7e^2 - 8ef - 7e^2f + 8ef^2 = 7e^2(1 - f) - 8ef(1 - f) = (1 - f)(7e^2 - 8ef) =$

$= (1 - f)\,e\,(7e - 8f)$

$e(1 - f)(7e - 8f) \neq 0$

$e \neq 0,\ 1 - f \neq 0,\ 7e - 8f \neq 0$

$e \neq 0,\ f \neq 1,\ e \neq \dfrac{8f}{7}$

b) $24a + 9ab - 40ac + 10a^2c - 15abc - 6a^2 =$

$= a\,(24 + 9b - 40c + 10ac - 15bc - 6a) =$

$= a\,[8\,(3 - 5c) + 3b\,(3 - 5c) - 2a\,(3 - 5c)] = a\,(3 - 5c)\,(8 + 3b - 2a)$

$a\,(3 - 5c)\,(8 + 3b - 2a) \neq 0$

$a \neq 0,\ 3 - 5c \neq 0,\ 8 + 3b - 2a \neq 0$

$a \neq 0,\ c \neq \frac{3}{5},\ a \neq \frac{3b + 8}{2}$

### 5.3.2.2. Krácení a rozšiřování lomených výrazů

Krácení a rozšiřování lomených výrazů užíváme při zjednodušování lomených výrazů. Pro libovolné výrazy $A$, $B$, $C$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $B \neq 0$, $C \neq 0$, platí: $\frac{A\,.\,C}{B\,.\,C} = \frac{A}{B}$. Tato rovnost ukazuje, že lomené výrazy můžeme krátit výrazem různým od nuly. **Krátit lomený výraz** znamená dělit čitatele i jmenovatele týmž výrazem, který je různý od nuly.

Uvedenou rovnost můžeme zapsat i v opačném směru: $\frac{A}{B} = \frac{A\,.\,C}{B\,.\,C}$.

Tato rovnost ukazuje, že lomené výrazy můžeme rozšiřovat výrazem různým od nuly. **Rozšířit lomený výraz** znamená násobit čitatele i jmenovatele týmž výrazem, který je různý od nuly.

Například:

* Kraťte lomené výrazy: $\frac{8ab - 12a^2b}{8ab}$, $\frac{x^2 - 9}{2x^2 - 6x}$

První výraz má smysl pro všechna $a \neq 0$, $b \neq 0$. Protože v čitateli je rozdíl výrazů, nemůžeme bezprostředně krátit výrazem $8ab$. Nejprve musíme rozložit čitatele na součin a teprve pak lze krátit.

$$\frac{8ab - 12a^2b}{8ab} = \frac{4ab\,(2 - 3a)}{8ab} = \frac{2 - 3a}{2}$$

U druhého výrazu nejprve rozložíme na součin čitatele i jmenovatele a potom krátíme.

$$\frac{x^2 - 9}{2x^2 - 6x} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{2x(x - 3)} = \frac{x + 3}{2x}$$

Krátili jsme dvojčlenem $(x - 3)$. Podmínky, pro které má daný výraz smysl, snadněji určíme ze součinového tvaru jmenovatele:

$2x(x - 3) \neq 0$, tj. $x \neq 0$, $x \neq 3$

* Rozšiřte lomený výraz $\frac{5b}{3a}$ na výraz se jmenovatelem: $12a^3b$,

$-6a(b - a)$

$12a^3b = 3a \cdot 4a^2b$, proto daný výraz rozšíříme výrazem $4a^2b$

$$\frac{5b}{3a} = \frac{5b \cdot 4a^2b}{3a \cdot 4a^2b} = \frac{20a^2b^2}{12a^3b},\ a \neq 0,\ b \neq 0$$

$-6a(b - a) = 3a \cdot (-2) \cdot (b - a) = 3a \cdot [(-2)(b - a)]$, proto daný výraz rozšíříme výrazem $(-2)(b - a)$.

$$\frac{5b}{3a} = \frac{5b \cdot (-2)(b - a)}{3a \cdot (-2)(b - a)} = \frac{-10b(b - a)}{-6a(b - a)},\ a \neq 0,\ a \neq b$$

- Doplňte chybějící čitatele:

a) $\frac{a^2 + 1}{a} = \frac{}{3a^2}$

c) $\frac{x - 1}{x + 1} = \frac{}{x^2 + 2x + 1}$

b) $\frac{c^3 - 2c + 6}{c - 1} = \frac{}{c^2 - 1}$

d) $\frac{x - y}{x + 2y} = \frac{}{3x^2 + 12xy + 12y^2}$

Řešení:

a) $\frac{3a(a^2 + 1)}{3a^2}$

c) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$

b) $\frac{(c + 1)(c^3 - 2c + 6)}{c^2 - 1}$

d) $\frac{3(x + 2y)(x - y)}{3x^2 + 12xy + 12y^2}$

- Rozložte čitatele i jmenovatele na součin a výraz zkraťte:

a) $\frac{6y(x + y)^3(x - 2)}{9y^2(x + y)(x^2 - 4)}$

c) $\frac{15a^2 + 60a + 60}{35a^2 - 140}$

b) $\frac{8a^2 - 72}{4a + 12}$

d) $\frac{80y^2 - 240y + 180}{24y^2 - 54}$

Řešení:

a) $\dfrac{6y\,(x+y)^3\,(x-2)}{9y^2\,(x+y)\,(x^2-4)} = \dfrac{6y\,(x+y)^2\,(x+y)\,(x-2)}{9y^2\,(x+y)\,(x-2)\,(x+2)} = \dfrac{2\,(x+y)^2}{3y\,(x+2)}$

b) $\dfrac{8a^2-72}{4a+12} = \dfrac{8\,(a^2-9)}{4\,(a+3)} = \dfrac{2\,(a-3)\,(a+3)}{a+3} = 2\,(a-3)$

c) $\dfrac{15a^2+60a+60}{35a^2-140} = \dfrac{15\,(a^2+4a+4)}{35\,(a^2-4)} = \dfrac{3\,(a+2)\,(a+2)}{7\,(a+2)\,(a-2)} = \dfrac{3\,(a+2)}{7\,(a-2)}$

d) $\dfrac{80y^2-240y+180}{24y^2-54} = \dfrac{20\,(4y^2-12y+9)}{6\,(4y^2-9)} = \dfrac{10\,(2y-3)\,(2y-3)}{3\,(2y-3)\,(2y+3)} = \dfrac{10\,(2y-3)}{3\,(2y+3)}$

- Určete, pro které hodnoty proměnných mají výrazy smysl, a zjednodušte je:

a) $\dfrac{6x^2-54}{3x^3+18x^2+27x}$

c) $\dfrac{3n^2-4mn^2}{4m^3n-3m^2n}$

b) $\dfrac{6ba-6a^2}{4a^3-4b^2a}$

d) $\dfrac{c^2d^2-25d^2}{dc^2+10dc+25d}$

Řešení:

a) $3x^3+18x^2+27x \neq 0$

$3x\,(x^2+6x+9) \neq 0$

$3x\,(x+3)\,(x+3) \neq 0$

$x \neq 0,\ x \neq -3$

$\dfrac{6x^2-54}{3x^3+18x^2+27x} = \dfrac{6\,(x^2-9)}{3x\,(x^2+6x+9)} = \dfrac{2\,(x-3)\,(x+3)}{x\,(x+3)\,(x+3)} = \dfrac{2\,(x-3)}{x\,(x+3)}$

b) $4a^3-4b^2a \neq 0$

$4a\,(a^2-b^2) \neq 0$

$4a\,(a+b)\,(a-b) \neq 0$

$a \neq 0,\ a \neq -b,\ a \neq b$

$\dfrac{6ba-6a^2}{4a^3-4b^2a} = \dfrac{6a\,(b-a)}{4a\,(a+b)\,(a-b)} = \dfrac{-3}{2\,(a+b)}$

c) $4m^3n - 3m^2n \neq 0$

$m^2n(4m - 3) \neq 0$

$m \neq 0,\ m \neq \frac{3}{4},\ n \neq 0$

$$\frac{3n^2 - 4mn^2}{4m^3n - 3m^2n} = \frac{n^2(3 - 4m)}{m^2n(4m - 3)} = -\frac{n}{m^2}$$

d) $dc^2 + 10dc + 25d \neq 0$

$d(c^2 + 10c + 25) \neq 0$

$d(c + 5)(c + 5) \neq 0$

$d \neq 0,\ c \neq -5$

$$\frac{c^2d^2 - 25d^2}{dc^2 + 10dc + 25d} = \frac{d^2(c^2 - 25)}{d(c + 5)^2} = \frac{d(c - 5)(c + 5)}{(c + 5)(c + 5)} = \frac{d(c - 5)}{c + 5}$$

- Zjednodušte výraz a určete jeho podmínky:

$$\frac{6ac - 8a^2 + 12c - 16a}{(a^2 - 4)(3a + 5)(4c - 8a)}$$

Řešení:

$$\frac{6ac - 8a^2 + 12c - 16a}{(a^2 - 4)(3a + 5)(6c - 8a)} = \frac{6c(a + 2) - 8a(a + 2)}{(a - 2)(a + 2)(3a + 5)(6c - 8a)} =$$

$$\frac{(a + 2)(6c - 8a)}{(a - 2)(a + 2)(3a + 5)(6c - 8a)} = \frac{1}{(a - 2)(3a + 5)} = \frac{1}{3a^2 - a - 10}$$

$(a - 2)(a + 2)(3a + 5)(6c - 8a) \neq 0$

$a \neq 2,\ a \neq -2,\ a \neq -\frac{5}{3},\ a \neq \frac{6c}{8} \neq \frac{3c}{4}$

### 5.3.3. Relaxační část - kouzla s čísly

I. Žáci si napíší na papír libovolné trojmístné číslo. Za něj napíší ještě jednou totéž číslo. Získané šestimístné číslo vydělí sedmi. Výsledek vydělí jedenácti a potom budou dělit ještě jednou, tentokrát třinácti. Po všech těchto operacích vyjde žákům původní číslo.

Vysvětlení: Pokud je původní číslo *abc*, dostaneme po připsání číslo *abcabc*, což je 100 000$a$ + 10 000$b$ + 1 000$c$ + 100$a$ + 10$b$ + $c$ = = 1 001 (100$a$ + 10$b$ + $c$). Dále víme, že 7 . 11 . 13 = 1 001. Po všech třech děleních nám tedy zůstane číslo 100$a$ + 10$b$ + $c$, což je číslo původní.

Příklad: Vybereme si číslo 324.

324 324 : 7 = 46 332

46 332 : 11 = 4 212

4 212 : 13 = 324

**II.** Žáci si zvolí libovolné vícemístné číslo. Přemístěním jeho číslic utvoří nové číslo a odečtou ho od čísla původního. Ve výsledku přeškrtnou libovolnou číslici a ostatní číslice sdělí učiteli v jakémkoli pořadí. Učitel uhodne přeškrtnutou číslici.

Vysvětlení: Nechť zvolené číslo je *abc*, změnou dostaneme např. *bac*. Potom 100$a$ + 10$b$ + $c$ - 100$b$ - 10$a$ - $c$ = 90 ($a$ - $b$). Výsledek je tedy dělitelný devíti. Číslice, které nám žáci oznámí, doplníme tak, aby výsledné číslo bylo dělitelné devíti. Pokud součet číslic, které žáci oznámí, je dělitelný devíti, víme, že přeškrtnutá číslice je 0 nebo 9.

Příklad: Zvolené číslo je 4 281.

4 281 - 2 814 = 1 ~~4~~67

Žák sdělí čísla 1, 6, 7. Jejich součet je 14. Aby byl součet dělitelný devíti, musíme přičíst číslo 4. A to je právě hledaná přeškrtnutá číslice.

**III.** Tato úloha je velmi složitá a k rozluštění jejího principu budou žáci pravděpodobně potřebovat pomoc učitele. Žáci si zvolí libovolné trojmístné číslo takové, aby rozdíl krajních číslic nebyl menší než dvě. Obrácením pořadí jeho číslic vytvoří nové číslo. Potom odečtou menší z obou čísel od většího. Jejich rozdíl žáci napíší obvyklým způsobem a potom též v obráceném pořadí číslic. Tato dvě čísla sečtou. Učitel se nemusí na nic ptát a může žákům říci, které číslo jim nakonec vyšlo.

Vysvětlení: Zvolme číslo s číslicemi $a$, $b$, $c$. Zapíšeme je $100a + 10b + c$. Číslo s číslicemi v obráceném pořadí je $100c + 10b + a$. Jejich rozdíl je $99a - 99c$.

Úpravami dostaneme: $99a - 99c = 99 (a - c) = 100 (a - c) - (a - c) =$
$= 100 (a - c) - 100 + 100 - 10 + 10 - a + c =$
$= 100 (a - c - 1) + 90 + 10 - a + c$

Tři číslice rozdílu jsou:

stovky: $a - c - 1$

desítky: 9

jednotky: $10 + c - a$

Číslo s opačným pořádkem číslic je: $100 (10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$. Součtem obou čísel dostaneme:

$100 (a - c - 1) + 90 + 10 - a + c + 100 (10 + c - a) + 90 + (a - c - 1) =$
$= 900 + 180 + 9 = 1\ 089$

Ať jsou číslice $a$, $b$, $c$ jakékoli, dostaneme uvedeným výpočtem vždy totéž číslo, tedy 1 089.

Příklad: Některý ze žáků zvolí číslo 348. Nyní musí provést následující úkony:

$$\begin{array}{r} 843 \\ -\ \underline{348} \\ 495 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 495 \\ +\ \underline{594} \\ 1\ 089 \end{array}$$

Výsledné číslo je tedy skutečně 1 089.

## 5.4. PŘÍPRAVA Č. 4

Informační část: Pomůcka k zapamatování čísla $\pi$. (5 minut)

Odborná část: Sčítání a odčítání lomených výrazů, násobení lomených výrazů. (35 minut)

Relaxační část: Matematické pohádky. (20 minut)

### 5.4.1. Informační část - pomůcka k zapamatování čísla $\pi$

Ludolf van Ceulen, holandský matematik (1540 - 1610), vypočetl z mnohoúhelníku, který měl 10 473 741 248 stran, číslo $\pi$ (řecké písmeno od slova periféria - obvod) k výpočtu obsahu a obvodu kruhu.

K zapamatování čísla $\pi$ nám může pomoci stará mnemotechnická pomůcka ve formě verše, přičemž počet písmen každého slova udává příslušnou číslici.

Lín a kapr u hráze
prohlédli si rybáře,
udici měl novou,
jikrnáči neuplovou.

### 5.4.2. Odborná část

Cíl: Žáci se již naučili lomené výrazy krátit a rozšiřovat, cílem další hodiny je, naučit je lomené výrazy sčítat, odčítat a násobit.

#### 5.4.2.1. Sčítání a odčítání lomených výrazů

S rozšiřováním lomených výrazů, které jsme si procvičili v minulé hodině, se nejčastěji setkáváme při sčítání a odčítání lomených výrazů.

Jestliže máme **sečíst nebo odečíst lomené výrazy**, které nemají sobě rovné jmenovatele, upravíme je nejdříve na **společný jmenovatel** vhodným rozšířením.

Pro libovolné výrazy $A$, $B$, $C$, $D$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $B \neq 0$, $D \neq 0$, platí: $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{AD - BC}{BD}$$

Například:

* Sečtěte lomené výrazy: $\frac{3}{x} + \frac{x - 1}{x + 1}$, $\frac{3}{x} + \frac{x - 3}{x^2 + x}$

Společným jmenovatelem prvních dvou výrazů je součin $x\,(x + 1)$, tedy

$$\frac{3}{x} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{3\,(x+1)}{x\,(x+1)} + \frac{x\,(x-1)}{x\,(x+1)} = \frac{3\,(x+1) + x\,(x-1)}{x\,(x+1)} =$$

$$= \frac{3x + 3 + x^2 - x}{x\,(x+1)} = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x},\ x \neq 0,\ x \neq -1$$

Dvojčlen ve jmenovateli lomeného výrazu $\frac{x - 3}{x^2 + x}$ můžeme rozložit na součin: $x^2 + x = x\,(x + 1)$. Z toho je zřejmé, že $x^2 + x$ je společným jmenovatelem obou lomených výrazů:

$$\frac{3}{x} + \frac{x-3}{x^2+x} = \frac{3}{x} + \frac{x-3}{x\,(x+1)} = \frac{3\,(x+1) + x - 3}{x\,(x+1)} = \frac{3x + 3 + x - 3}{x\,(x+1)} =$$

$$= \frac{4x}{x\,(x+1)} = \frac{4}{x+1},\ x \neq 0,\ x \neq -1$$

Z řešení uvedeného příkladu vidíme, že je vhodné určit společný jmenovatel tak, aby to byl výraz co nejjednodušší. Společný jmenovatel lomených výrazů je obdobou nejmenšího společného násobku přirozených čísel. Během výpočtu ponecháváme jmenovatel v součinovém tvaru a v tomto tvaru se snažíme psát i čitatel, aby vznikla možnost krácení.

Například:

* Zjednodušte výraz $\frac{1}{x} + \frac{x}{x-y} - \frac{y^2}{x^2 - xy}$

Dvojčlen ve jmenovateli třetího lomeného výrazu můžeme rozložit na součin $x\,(x - y)$ a to je společný jmenovatel všech tří lomených výrazů.

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{x-y} - \frac{y^2}{x^2 - xy} = \frac{x - y + x^2 - y^2}{x\,(x-y)} = \frac{(x-y) + (x+y)\,(x-y)}{x\,(x-y)} =$$

$$= \frac{(x-y)\,[1 + (x+y)]}{x\,(x-y)} = \frac{1 + x + y}{x},\ x \neq 0,\ x \neq y$$

* Zjednodušte a určete podmínky, pro které mají dané výrazy a provedené úpravy smysl:

a) $\frac{u+v}{2v} + \frac{u-v}{v}$

b) $\frac{u-v}{4v} - \frac{u+v}{5v}$

c) $\frac{x}{3x-1} + \frac{1}{3x+1}$

d) $\frac{x+4y}{xy^2} - \frac{2x-y}{x^2y}$

e) $\frac{5x^2 - 3x + 1}{x^2y} - \frac{4x-1}{xy}$

f) $\frac{5x^2 - 3x + 2}{x^2y} - \frac{9x-2}{2xy}$

Řešení:

a) $v \neq 0$

$$\frac{u+v}{2v} + \frac{u-v}{v} = \frac{u + v + 2u - 2v}{2v} = \frac{3u - v}{2v}$$

b) $v \neq 0$

$$\frac{u-v}{4v} - \frac{u+v}{5v} = \frac{5u - 5v - 4u - 4v}{20v} = \frac{u - 9v}{20v}$$

c) $3x - 1 \neq 0,\ 3x + 1 \neq 0$

$x \neq \frac{1}{3},\ x \neq -\frac{1}{3}$

$$\frac{x}{3x-1} + \frac{1}{3x+1} = \frac{3x^2 + x + 3x - 1}{9x^2 - 1} = \frac{3x^2 + 4x - 1}{9x^2 - 1}$$

d) $x \neq 0,\ y \neq 0$

$$\frac{x+4y}{xy^2} - \frac{2x-y}{x^2y} = \frac{x^2+4xy-2xy+y^2}{x^2y^2} = \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2y^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2y^2}$$

e) $x \neq 0,\ y \neq 0$

$$\frac{5x^2-3x+1}{x^2y} - \frac{4x-1}{xy} = \frac{5x^2-3x+1-4x^2+x}{x^2y} = \frac{x^2-2x+1}{x^2y} = \frac{(x-1)^2}{x^2y}$$

f) $x \neq 0,\ y \neq 0$

$$\frac{5x^2-3x+2}{x^2y} - \frac{9x-2}{2xy} = \frac{10x^2-6x+4-9x^2+2x}{2x^2y} = \frac{x^2-4x+4}{2x^2y} = \frac{(x-2)^2}{2x^2y}$$

- Zjednodušte a určete podmínky, pro které mají dané výrazy smysl:

a) $\frac{1}{x-3} - \frac{3}{2x-6} + \frac{5}{3x-9}$

b) $\frac{x}{x+2} - \frac{4x}{10+5x} + \frac{2x}{3x+6}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-y} - \frac{y}{x^2-xy}$

d) $\frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$

e) $\frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$

f) $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y+x} - \frac{2y}{x^2-y^2}$

Řešení:

a) $x \neq 3$

$$\frac{1}{x-3} - \frac{3}{2x-6} + \frac{5}{3x-9} = \frac{6-9+10}{6\,(x-3)} = \frac{7}{6\,(x-3)}$$

b) $x \neq -2$

$$\frac{x}{x+2} - \frac{4x}{10+5x} + \frac{2x}{3x+6} = \frac{15x-12x-10x}{15\,(x+2)} = \frac{13x}{15\,(x+2)}$$

c) $x \neq 0,\ x \neq y$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-y} - \frac{y}{x^2-xy} = \frac{x-y+x-y}{x\,(x-y)} = \frac{2x-2y}{x\,(x-y)} = \frac{2\,(x-y)}{x\,(x-y)} = \frac{2}{x}$$

d) $x \neq 0,\ x \neq 1$

$$\frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1-x-x+1}{x\,(x-1)} = \frac{2\,(x-1)}{x\,(x-1)} = -\frac{2}{x}$$

e) $x \neq 2,\ x \neq -2$

$$\frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{4+x-2+x+2}{(x+2)\,(x-2)} = \frac{2\,(x+2)}{(x+2)\,(x-2)} = \frac{2}{x-2}$$

f) $x \neq y,\ x \neq -y$

$$\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y+x} - \frac{2y}{x^2-y^2} = \frac{x+y+x-y-2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2}{x+y}$$

- Zjednodušte a uveďte podmínky řešitelnosti:

a) $\dfrac{x}{(x-2)^3} - \dfrac{1}{(2-x)^2}$

c) $\dfrac{x+1}{2x+3} - \dfrac{x+1}{x-1}$

b) $\dfrac{x}{x^3+6x^2+12x+8} - \dfrac{1}{(x+2)^2}$

d) $\dfrac{x^2}{x^2-x+\frac{1}{4}} + \dfrac{x^2}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}$

Řešení:

a) $$\frac{x}{(x-2)^3} - \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{x-x+2}{(x-2)^3} = \frac{2}{(x-2)^3}$$

$x \neq 2$

b) $$\frac{x}{x^3+6x^2+12x+8} - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x-x-2}{(x+2)^3} = \frac{-2}{(x+2)^3}$$

$x \neq -2$

c) $$\frac{x+1}{2x+3} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)-(x+1)(2x+3)}{(2x+3)(x-1)} = \frac{-x^2-5x-4}{2x^2+x-3}$$

$x \neq 1,\ x \neq -\dfrac{3}{2}$

d) $$\frac{x^2}{x^2-x+\frac{1}{4}} + \frac{x^2}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{2x^3-x^2+x^2}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{2x^3}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{x^3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}$$

$x \neq \dfrac{1}{2}$

### 5.4.2.2. Násobení lomených výrazů

**Součin lomených výrazů** je lomený výraz, jehož čitatel je součin čitatelů a jmenovatel součin jmenovatelů násobených lomených výrazů. Pro libovolné výrazy $A$, $B$, $C$, $D$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $B \neq 0$, $D \neq 0$, platí: $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$

Již při sčítání a odčítání lomených výrazů jsme zdůraznili, že během výpočtu ponecháváme čitatel i jmenovatel v součinovém tvaru, popř. je na součinový tvar rozkládáme, aby vznikla možnost krácení. Při násobení je čitatel i jmenovatel ve tvaru součinu, proto **nejprve podle možnosti krátíme.** Někdy lze krátit bezprostředně, v jiných případech vytváříme možnost krácení rozkladem čitatele i jmenovatele obou výrazů na součin.

Například:

* Vynásobte: $\frac{8a^2b}{a - b} \cdot \frac{3(a - b)}{4ab}$, $\frac{3xy + 3y^2}{xy^2} \cdot \frac{xy - x^2}{x^2 - y^2}$, $\frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \cdot (x - 1)$

První výraz není třeba upravovat, můžeme hned krátit:

$$\frac{8a^2b}{a - b} \cdot \frac{3(a - b)}{4ab} = 6a,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq b$$

Ve druhém výrazu nejprve rozložíme čitatele a jmenovatele lomených výrazů na součin, a pak krátíme:

$$\frac{3xy + 3y^2}{xy^2} \cdot \frac{xy - x^2}{x^2 - y^2} = \frac{3y(x + y)}{xy^2} \cdot \frac{(-x)(x - y)}{(x + y)(x - y)} = -\frac{3}{y},$$

$$x \neq 0,\ y \neq 0,\ x \neq y,\ x \neq -y$$

Ve třetím případu jde o násobení lomeného výrazu celistvým výrazem. Celistvý výraz $x - 1$ můžeme zapsat ve tvaru zlomku se jmenovatelem 1, čitatel i jmenovatel lomeného výrazu rozložíme na součin:

$$\frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \cdot (x - 1) = \frac{x(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} \cdot \frac{x - 1}{1} = x,\ x \neq -1,\ x \neq 1$$

* Vynásobte: $\left(\frac{2x}{x+1} - x\right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$

$$\left(\frac{2x}{x+1} - x\right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = \frac{2x - x(x+1)}{x+1} \cdot \frac{1+x}{x^2} = \frac{2x - x^2 - x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x^2} =$$

$$= \frac{x - x^2}{1} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{x(1-x)}{x^2} = \frac{1-x}{x}, \ x \neq 0, \ x \neq -1$$

- Zjednodušte a stanovte podmínky, za kterých mají dané výrazy a provedené úpravy smysl:

a) $\frac{(u-v)^2}{u} \cdot \frac{u^2 + uv}{u^2 - v^2}$

b) $\frac{u^2 - v^2}{(u+v)^2} \cdot \frac{2u}{v - u}$

c) $\frac{u^2 - 4v^2}{2v + u} \cdot \frac{-3v}{2v - u}$

d) $\frac{(u-v)^3}{uv - u^2} \cdot \frac{v^2 + uv}{u^2 - v^2}$

Řešení:

a) $$\frac{(u-v)^2}{u} \cdot \frac{u^2 + uv}{u^2 - v^2} = \frac{(u-v)^2}{u} \cdot \frac{u(u+v)}{(u+v)(u-v)} = u - v$$

$$u \neq 0, \ u \neq v, \ u \neq -v$$

b) $$\frac{u^2 - v^2}{(u+v)^2} \cdot \frac{2u}{v - u} = \frac{(u+v)(u-v)}{(u+v)^2} \cdot \frac{2u}{(-1)(u-v)} = -\frac{2u}{u+v}$$

$$u \neq v, \ u \neq -v$$

c) $$\frac{u^2 - 4v^2}{2v + u} \cdot \frac{-3v}{2v - u} = \frac{(u^2 - 4v^2)(-3v)}{4v^2 - u^2} = \frac{(u^2 - 4v^2)(-3v)}{(-1)(u^2 - 4v^2)} = 3v$$

$$u \neq 2v, \ u \neq -2v$$

d) $$\frac{(u-v)^3}{uv - u^2} \cdot \frac{v^2 + uv}{u^2 - v^2} = \frac{(u-v)^3}{-u(u-v)} \cdot \frac{v(u+v)}{(u+v)(u-v)} = \frac{v(v-u)}{u}$$

$$u \neq 0, \ u \neq v, \ u \neq -v$$

- Zjednodušte následující výrazy a stanovte podmínky:

a) $\left(1 - \frac{6}{y} + \frac{9}{y^2}\right) \cdot \frac{3y^2}{3 - y}$

b) $\left(\frac{m}{n} - \frac{m+1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{m^2 - n^2}$

c) $\left(\frac{x}{y} + \frac{2x + y}{x}\right) \cdot \frac{y}{(x+y)^2}$

d) $\left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{x}\right)$

e) $\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a} \cdot \frac{a-b}{b}$

f) $\left(\frac{m+n}{mn} - \frac{m-n}{mn} + 2\right) \cdot \left(\frac{m}{m+1} - \frac{m}{n+1}\right)$

Řešení:

a) $\left(1 - \frac{6}{y} + \frac{9}{y^2}\right) \cdot \frac{3y^2}{3 - y} = \frac{y^2 - 6y + 9}{y^2} \cdot \frac{3y^2}{3 - y} = \frac{(y-3)^2}{1} \cdot \frac{3}{(-1)(y-3)} =$

$= 9 - 3y \qquad y \neq 0,\ y \neq 3$

b) $\left(\frac{m}{n} - \frac{m+1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{m^2 - n^2} = \frac{m(n+1) - n(m+1)}{n(n+1)} \cdot \frac{n+1}{(m+n)(m-n)} =$

$= \frac{mn + m - mn - n}{n} \cdot \frac{1}{(m+n)(m-n)} = \frac{1}{n(m+n)}$

$n \neq 0,\ n \neq -1,\ m \neq n,\ m \neq -n$

c) $\left(\frac{x}{y} + \frac{2x + y}{x}\right) \cdot \frac{y}{(x+y)^2} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x} \cdot \frac{1}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)^2}{x} \cdot \frac{1}{(x+y)^2} =$

$= \frac{1}{x} \qquad x \neq 0,\ x \neq -y,\ y \neq 0$

d) $\left(\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{x}\right) = \frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x^2 - 4}{4x} =$

$= \frac{(x - 1 + x + 1)(x - 1 - x - 1)}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 4}{4x} = \frac{-4x}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 4}{4x} = -\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

$x \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq -1$

e) $\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a} \cdot \frac{a-b}{b} = \frac{(a+b)^2}{ab} - \frac{(a-b)^2}{ab} =$

$= \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab} = \frac{(a + b + a - b)(a + b - a + b)}{ab} = \frac{4ab}{ab} = 4$

$a \neq 0,\ b \neq 0$

f) $\left(\frac{m+n}{mn} - \frac{m-n}{mn} + 2\right) \cdot \left(\frac{m}{m+1} - \frac{m}{n+1}\right) =$

$$= \frac{(m+n)-(m-n)+2mn}{mn} \cdot \frac{m(n+1)-m(m+1)}{(m+1)(n+1)} =$$

$$= \frac{2mn+2n}{mn} \cdot \frac{m(n+1-m-1)}{(m+1)(n+1)} = \frac{2n(m+1)}{n} \cdot \frac{n-m}{(m+1)(n+1)} =$$

$$= \frac{2(n-m)}{n+1} \qquad n \neq 0,\ n \neq -1,\ m \neq 0,\ m \neq -1$$

- Určete součet rozdílu a součinu lomených výrazů $\frac{x+y}{y}$, $\frac{x+y}{x}$:

Rozdíl výrazů: $\frac{x+y}{y} - \frac{x+y}{x} = \frac{x(x+y)-y(x+y)}{xy} = \frac{(x+y)(x-y)}{xy}$

Součin výrazů: $\frac{x+y}{y} \cdot \frac{x+y}{x} = \frac{(x+y)^2}{xy}$

Součet výrazů: $\frac{(x+y)(x-y)}{xy} + \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{(x+y)(x-y)+(x+y)^2}{xy} =$

$$= \frac{(x+y)\left[(x-y)+(x+y)\right]}{xy} = \frac{(x+y)\,2x}{xy} = \frac{2(x+y)}{y}$$

Podmínky všech výrazů: $x \neq 0,\ y \neq 0$

### 5.4.3. Relaxační část - matematické pohádky

Přečteme si se žáky některou z následujících pohádek a vybídneme je, aby se do dalšího setkání kroužku pokusili vymyslet svou vlastní matematickou pohádku.

**O Mazaném Honzovi**

V království jménem Prostor vládl moudrý a spravedlivý král. Většina poddaných těles žila šťastně a spokojeně pod jeho vládou. Jen králův bratranec Válec Veliký nebyl spokojen se svým postavením a neustále dělal králi nějaké naschvály.

V lednu jednoho roku se král rozhodl provést nové sčítání povrchů těles. V Prostoru se totiž daně platily podle povrchu poddaných. Všechna tělesa spolupracovala a nahlásila královým pomocníkům své povrchy. Také Válec Veliký a jeho rytíři (ostatní válce) byli požádáni o udání svých povrchů. Ale jako obvykle měl Válec svou hlavu a králi zaslal pouze údaje o výškách. Král mu vzkázal, že nechce znát výšky, ale povrchy, a ať tedy zašle správné údaje. Zanedlouho král obdržel nové údaje, ale opět nesprávné. Tentokrát mu Válec zaslal poloměry podstav s dovětkem, že jiné údaje mu již neposkytne, ať si poradí, jak umí, s tím, co má.

Král přemýšlel, lámal si hlavu, ale na žádné řešení nepřišel. A tak nechal na pomoc zavolat Mazaného Honzu. „Pane králi, dej mi jeden den a já se pokusím vyřešit tvůj úkol."

Druhý den se dal Honza ohlásit u krále. „Pane králi, už vím, jak povrchy válců spočítáme. Představ si válec, když se rozkládá ke spánku. Vznikne z něj obdélník a k němu je z každé strany přilepený kruh. A obsah obdélníku i kruhu spočítat umíme. Jedna strana obdélníku je výška, kterou známe, a druhá strana se rovná obvodu kruhu, který také dokážeme spočítat. Teď už jen stačí sečíst obsahy jednotlivých částí a povrch válce je na světě."

A tak král s pomocí Mazaného Honzy dokázal všem válcům určit daně. Vymyslíte i vy vzorec, podle kterého král počítal povrchy válců?

**Obdélník rádcem**

V hlubokém lese na pokraji království královny Geometrie, které sousedilo s územím císařovny Aritmetiky, žil v poklidu, nerušen okolním hektickým matematickým světem, starý Obdélník. Žil sám, jen se svými vzpomínkami, na své úhlopříčce, dokud za ním nepřijel posel královny Geometrie. Byla to osamělá, bezdětná a mrzutá Úsečka. Ve chvíli, kdy vrazila do jeho plochy, trávil právě starý Obdélník čas s mladou Kružnicí, ve snaze vytvořit nové útvary.

„Proč se sem rýsuješ právě teď?" zavrčel Obdélník, až se mu rozestoupily strany. „Mlč, Obdélníku! Jsi pouhý poddaný, a tak budeš poslouchat rozhodnutí Její Výsosti. Seber všechny své vrcholy a okamžitě se dostav do královského paláce!" Po těchto slovech se Úsečka odrazila od svého bodu a byla pryč.

Starý Obdélník, který nerad odcházel od rozdělaného rysu, předal poslední geometrické informace Kružnici, upekl si pár ostrých úhlů a vydal se po parabole na cestu. Ještě poprosil Kosočtverec, aby mu hlídal místo v hospodě "U tří tečen", kde se scházejí a hrají protínanou. Když dorazil ke královskému paláci, požádala ho ostraha objektu o jeho rozměry. Po prozrazení svého tajného obvodu a obsahu ho neohrožení jehlani pustili ke královně Geometrii. Ta se právě bavila se svými dvorními šašky. Když Obdélník vstoupil, kralovna radostně zvolala: „Vítej, Obdélníku!"

„Zanech detailů, netrap se rýsováním, má vládkyně, a načrtni mi raději celou situaci."

„Obdélníku, příteli, trápím se , trápím, až mě bolí každé pravítko. Můj starý rádce, má oblíbená Rovina, odešla na odpočinek a já nemohu dále vládnout bez chytrého útvaru. Vstup do mých služeb, bohatě se ti odměním. Věnuji sadu příkladů o tobě do nejnovější učebnice matematiky."

„Proč zrovna já, má paní? "

„Protože jsi prožil plnohodnotný život. Máš dvě dcery, stranu *a* a stranu *b*. Díky nim máš lehce spočítatelný obsah a obvod."

„No dobrá, ale co čtverec?"

„Víš, on je hodný, ale nudný. Představ si, on má pouze jedno dítě, stranu *a*. Obsah a obvod je u něj jasný, ale ta konstrukce! Nikdy se přesně nestrefíš do jeho rozměrů. Vždyť on se lehce po konstrukci reinkarnuje do obdélníka. Ale když ty máš dobře propečené pravé úhly, nic tě nezmění."

„Chápu, ale proč nepřijmeš Kruh?"

„Kruh? To je starý opilec, naliješ mu sklenku a on se hned opije do šišata. Ten nikdy neví, kde má konec a kdy má dost. Pořád se o něj musí starat jeho chůva $\pi$."

„Asi máš pravdu. Zvážím tvá tvrzení, ale dovol mi nejprve popřemýšlet, zda ještě umím přesně spočítat svůj obsah a obvod."

Co myslíte, dokáže to? A dokážete to také vy?

[Autor - Zdeněk Lukesle]

**Jak se Honza ke štěstí dopočítal**

Jak už to tak za ta léta v pohádkách chodívá, žil kdesi daleko za lesem Honza se svou mámou. Už od malička všichni Honzovi přezdívali, jak bylo zvykem již od dob jeho prapraděda, hloupý. Zpočátku se chudák máma snažila svého synka zastat. Brzy se však oba smířili s tím, že Honza bude nadosmrti v očích okolí vypadat jako hlupák.

Čas běžel a Honza se pomalu začal zajímat o svůj budoucí osud. Základní školu absolvoval úspěšně v přírodovědně orientované třídě, a proto se zařadil mezi uchazeče o studium na gymnáziu. Byl přijat. Aby všem dokázal, že jeho přezdívka nemá nic společného s jeho schopnostmi, rozhodl se, že stráví prázdniny před nástupem do prvního ročníku co nejužitečněji. Důkladně prolistoval nabídkový katalog Čedoku a nakonec se rozhodl, že vycestuje do Země na konci nekonečné řady. Rozloučil se s mámou, od které dostal na cestu pár pěťáků. Již cestou na letiště přemýšlel, jak ten desetník využije. Po dobu letu jeho myšlenky putovaly kdesi daleko, tam, kam pouze hlava matematikova občas zabloudí, tedy v nekonečnu. Když dorazil na místo za sedmero velkými městy, dvěma oceány a třemi vesmírnými koráby, kam ani signál mobilních telefonů EUROTEL nedoléhá, spatřil smutečním suknem potažené město. V tamějších novinách se dočetl, že říši ovládá zlý černokněžník Matematikus, neboť mu král odepřel možnost seznámit se s královskou dcerou a pojmout ji za choť. Po celém městě byly vylepeny plakáty s oznámením, že kdo zbaví krásnou princeznu Křivku strachu z Matematika, dostane druhou odmocninu království, Křivku za ženu a titul největšího počtáře.

To byla pro Honzu výzva. Konečně zpřetrhá po staletí udržovanou tradici rodu Honzů a zbaví se své nedůstojné přezdívky. Proto jeho kroky ihned zamířily na zámek. Byl představen králi jako hloupý troufalec, který se hodlá postavit do cesty mocnému Matematikovi. Přesto král dovolil zavésti jej k princezně, aby se spolu poradili. Honza od ní dostal podrobnou brožurku, ve které byly všechny potřebné informace o situaci v zemi. Černokněžník ovládá školy, do kterých se bojí všichni chodit, unáší žáky do své říše Matematiky a tam je nutí počítat složité úlohy. To se Honzovi vůbec nelíbilo, a proto se definitivně rozhodl, že se utká s černokněžníkem. Souboj spočíval v tom, že Honza musel vyřešit dvě úlohy, které zadal zlý černokněžník, a nakonec se měl pokusit Matematika nějak napálit.

Zadání příkladů znělo takto:

1) Tabulka čokolády se skládá ze čtyřiceti čtverečků. Má pět řad a osm sloupců. Tabulka se láme po přímkách, které ji dělí na části, dokud nevznikne 40 dílků. Kolikrát je třeba tabulku rozlomit?

2) Ráno o páté hodině měl Jirka odcestovat. Večer si nepřipravil věci, takže ráno si šel pro boty a ponožky do pokoje, kde spala jeho sestra. Nechtěl ji vzbudit, proto nerozsvítil. Měl tam však tři páry bot různého tvaru a dvanáct šedých a dvanáct hnědých ponožek. Boty ani ponožky nebyly uloženy v párech, ale byly rozházené. Jaký nejmenší počet bot a ponožek musel vybrat, aby mezi nimi byl určitě pár bot téhož tvaru a pár ponožek téže barvy?

Honza je po chvíli přemýšlení vyřešil takto:

1) Po každém rozlomení se počet kousků zvětší o jeden. Na začátku máme jeden kus. Chceme jich mít čtyřicet, proto musíme lámat 39 krát.

2) Bylo třeba vzít čtyři boty a tři ponožky. I když vezme Jirka mezi prvními třemi botami každou z jiného páru, bude čtvrtá bota určitě tvořit pár s některou již vybranou botou. Jestliže ponožky byly jen ze dvou druhů, bylo třeba vzít jen tři. Ze dvou by mohla být např. jedna šedá a jedna hnědá. Třetí však musí být hnědá nebo šedá, a tím dostaneme pár stejné barvy.

První dvě úlohy byly tedy pro Honzu hračkou, ale jak přelstít černokněžníka, to bude pěkný oříšek. Když v tom si vzpomněl na drobné, které mu s sebou dala máma. Vše důkladně promyslel a pak poslal černokněžníkovi fax, že se s ním chce sejít. Černokněžník, který znal všechny matematické poučky, si byl jistý svým úspěchem. Seděl klidně v pohodlném křesle, zatímco Honza nejistě přešlapoval u dveří. „Tak spusť, ty hloupý Honzo," zaburácel Matematikus. A Honza začal: „Máma mi dala na cestu pár pěťáků. Kolik za ně mohu koupit růží pro Křivku, když jedna stojí dvacetník?" Zdánlivě banální otázka dala černokněžníkovi pěkně zabrat. Ať přemýšlel, jak přemýšlel, slovo „pár" nebylo v jeho matematické slovní zásobě. Jeho mozek pracoval na plné obrátky. Z černokněžníka létaly rovnice i nerovnice, ale odpověď nalézt nedokázal. A tak se stalo, že Honza přemohl lstivého Matematika, osvobodil princeznu a celé království. Nyní se mohl vrátit domů, bohatý a bez hanlivé přezdívky. S princeznou se vzhledem k její neplnoletosti neoženil, ale vzal ji do školy, aby se stejně jako všichni ostatní žáci přestala bát matematiky.

[Autorka - Nina Pokorná]

## 5.5. PŘÍPRAVA Č. 5

Informační část: Epimedes a logika. (5 minut)

Odborná část: Dělení lomených výrazů, složené lomené výrazy a jejich úpravy. (35 minut)

Relaxační část: Logika hrou. (20 minut)

### 5.5.1. Informační část - Epimedes a logika

Když Kréťan, tak lhář!

„Tihle Kréťané, všechno, co řeknou, je lež!" rozčílil se básník Epimedes, aniž tušil, že těmito slovy začíná jeho proslulost, nikoli však básnická. Epimedes žil před 2 600 lety na Krétě a velmi si zakládal na kráse svých veršů. Proto se velmi rozčílil, když se doslechl, že jeden Kréťan silně hanobí jeho básnické nadání. Co básník v rozčilení řekl, to už víme. Jenže vzápětí si uvědomil, že jeho kritik je vlastně vlivný boháč. Určitě mu donesou, že o něm mluvil jako o lháři, a pak bude zle. Jak z toho? Po dlouhých úvahách se Epimedes vydal ke svému kritikovi a vysvětloval: „Ano, přiznávám, řekl jsem, že vše, co řeknou Kréťané, je lež. Uvaž však, pane, žiji na Krétě, a jsem tedy Kréťan. Nu, a jestliže Kréťané vždy lžou, pak i já jsem lhal. Co jsem řekl, je tedy lež a ty se tím nemusíš cítit dotčen." Trvalo chvíli, než boháč rozeznal správnost básníkovy vytáčky, pak se zasmál a vše bylo v pořádku. A Epimedes se dostal se svým logicky správným uvažováním do učebnic logiky.

### 5.5.2. Odborná část

Cíl: V dnešní hodině dokončíme látku o lomených výrazech. Žáci se naučí lomené výrazy dělit a pracovat se složenými lomenými výrazy.

### 5.5.2.1. Dělení lomených výrazů

Známý poznatek o dělení zlomků užijeme i při dělení lomených výrazů.

**Lomeným výrazem dělíme**, jestliže násobíme výrazem převráceným k tomuto výrazu.

Převrácený výraz k celistvému výrazu $A$ je výraz $\frac{1}{A}$. Výraz $\frac{1}{A}$ je lomený výraz a má smysl jen pro ty hodnoty proměnných, pro něž je $A \neq 0$. Převrácený výraz k výrazu $\frac{A}{B}$ je výraz $\frac{B}{A}$. Lomený výraz $\frac{A}{B}$ má smysl jen pro ty hodnoty proměnných, pro něž je $B \neq 0$, podobně lomený výraz $\frac{B}{A}$ má smysl jen pro ty hodnoty proměnných, pro něž je $A \neq 0$.

Pravidlo pro dělení lomených výrazů lze stručně zapsat takto:

Pro libovolné výrazy $A$, $B$, $C$, $D$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, platí: $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$

Všimněme si, že při dělení lomených výrazů nestačí, aby byly různé od nuly jenom výrazy ve jmenovatelích lomených výrazů. Nenulový musí být celý lomený výraz, kterým dělíme, tj. různý od nuly musí být i čitatel dělitele.

Podmínky, pro které mají dané výrazy a úpravy prováděné s nimi smysl, je vhodné určovat až po provedení úprav. Podmínky totiž snadněji určíme ze součinového tvaru, v němž výrazy při úpravách vyjadřujeme. Navíc, při dělení lomeným výrazem, které převádíme na násobení výrazem k němu převráceným, nezapomeneme stanovit, že jmenovatel převráceného výrazu, tj. původně čitatel dělitele, musí být rovněž různý od nuly.

Například:

* Vypočítejte: $\dfrac{12x^3y^2}{7z^3} : \dfrac{4xy^2}{21z^2}$, $\left(\dfrac{a}{a-b} - 1\right) : \left(\dfrac{b^2}{a-b} - b\right)$

$$\frac{12x^3y^2}{7z^3} : \frac{4xy^2}{21z^2} = \frac{12x^3y^2}{7z^3} \cdot \frac{21z^2}{4xy^2} = \frac{9x^2}{z}, \ x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{a-b} - 1\right) : \left(\frac{b^2}{a-b} - b\right) = \frac{a-(a-b)}{a-b} : \frac{b^2 - b(a-b)}{a-b} =$$

$$= \frac{a-a+b}{a-b} \cdot \frac{a-b}{b^2 - ab + b^2} = \frac{b}{a-b} \cdot \frac{a-b}{b(2b-a)} = \frac{1}{2b-a}$$

$a \neq b,\ a \neq 2b,\ b \neq 0$

• Zjednodušte a stanovte podmínky:

a) $\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} + 1\right) : \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

b) $\left(1 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{16}{x^2}\right) : \left(1 + \dfrac{4}{x}\right)$

c) $\left(x + 1 - \dfrac{1}{1-x}\right) : \left(x - \dfrac{x^2}{x-1}\right)$

d) $\left(\dfrac{1}{1-x} - 1\right) : \left(x - \dfrac{x^2}{x-1} - 1\right)$

Řešení:

a) $$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right) : \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1 - 2x + x^2}{x^2} : \frac{x^2 - 1}{x^2} =$$

$$= \frac{(1-x)^2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{(-1)(1+x)(1-x)} = -\frac{1-x}{1+x} = \frac{x-1}{x+1}$$

$x \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq -1$

b) $$\left(1 + \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2}\right) : \left(1 + \frac{4}{x}\right) = \frac{x^2 + 8x + 16}{x^2} : \frac{x+4}{x} = \frac{(x+4)^2}{x^2} \cdot \frac{x}{x+4} =$$

$$= \frac{x+4}{x}$$

$x \neq 0,\ x \neq -4$

c) $$\left(x + 1 - \frac{1}{1-x}\right) : \left(x - \frac{x^2}{x-1}\right) = \frac{1 - x^2 - 1}{1-x} : \frac{x^2 - x - x^2}{x-1} = \frac{-x^2}{(-1)(x-1)} \cdot \frac{x-1}{-x} =$$

$$= -x$$

$x \neq 0,\ x \neq 1$

d) $\left(\frac{1}{1-x}-1\right):\left(x-\frac{x^2}{x-1}-1\right)=\frac{x-1+x}{1-x}:\frac{x^2-x-x^2-x+1}{x-1}=$

$\frac{2x-1}{(-1)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{(-1)(2x-1)}=1$ $\qquad x \neq 1,\ x \neq \frac{1}{2}$

- Zjednodušte a stanovte podmínky, za kterých mají dané výrazy a provedené úpravy smysl:

a) $\frac{a}{a+b}:\frac{b}{a}+\frac{b+2a}{a+b}$

b) $\left[\frac{c^2}{(c+d)^2}+\frac{2c}{c+d}\right]:\frac{3c+2d}{c^2-d^2}$

c) $\frac{x^2+x}{y+2}:\frac{xy+2x+y+2}{y^2+4y+4}$

d) $\frac{x^2-x}{y-3}:\frac{y+3-xy-3x}{y^2-9}$

Řešení:

a) $\frac{a}{a+b}:\frac{b}{a}+\frac{b+2a}{a+b}=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{b}+\frac{b+2a}{a+b}=\frac{a^2}{b(a+b)}+\frac{b+2a}{a+b}=$

$=\frac{a^2+2ab+b^2}{b(a+b)}=\frac{(a+b)^2}{b(a+b)}=\frac{a+b}{b}$ $\qquad a \neq 0,\ a \neq -b,\ b \neq 0$

b) $\left[\frac{c^2}{(c+d)^2}+\frac{2c}{c+d}\right]:\frac{3c+2d}{c^2-d^2}=\frac{c^2+2c^2+2cd}{(c+d)^2}\cdot\frac{(c+d)(c-d)}{3c+2d}=$

$=\frac{c(3c+2d)}{c+d}\cdot\frac{c-d}{3c+2d}=\frac{c(c-d)}{c+d}$ $\qquad c \neq d,\ c \neq -d,\ c \neq -\frac{2}{3}d$

c) $\frac{x^2+x}{y+2}:\frac{xy+2x+y+2}{y^2+4y+4}=\frac{x(x+1)}{y+2}\cdot\frac{(y+2)^2}{x(y+2)+y+2}=$

$=\frac{x(x+1)}{1}\cdot\frac{y+2}{(y+2)(x+1)}=x$ $\qquad y \neq -2,\ x \neq -1$

d) $\frac{x^2-x}{y-3}:\frac{y+3-xy-3x}{y^2-9}=\frac{x(x-1)}{y-3}\cdot\frac{(y-3)(y+3)}{y+3-x(y+3)}=$

$=\frac{x(x-1)}{1}\cdot\frac{y+3}{(y+3)(1-x)}=x(x-1)\cdot\frac{1}{(-1)(x-1)}=-x$

$x \neq 1,\ y \neq 3,\ y \neq -3$

- Určete podíl rozdílu a součtu lomených výrazů $\frac{x}{1-x}$, $\frac{1+x}{x}$

Rozdíl výrazů: $\frac{x}{1-x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x^2 - (1-x^2)}{x(1-x)} = \frac{2x^2-1}{x(1-x)}$

Součet výrazů: $\frac{x}{1-x} + \frac{1+x}{x} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)}$

Podíl výrazů: $\frac{2x^2-1}{x(1-x)} : \frac{1}{x(1-x)} = \frac{2x^2-1}{x(1-x)} \cdot \frac{x(1-x)}{1} = 2x^2 - 1$

Podmínky pro všechny výrazy: $x \neq 1$, $x \neq 0$

### 5.5.2.2. Složené lomené výrazy a jejich úpravy

Víme, že podíl 3 : 2 můžeme psát ve tvaru zlomku $\frac{3}{2}$. Podíl dvou zlomků $\frac{3}{2} : \frac{6}{5}$ můžeme zapsat ve tvaru složeného zlomku $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{6}{5}}$. Podobně podíl lomených výrazů $\frac{9xz}{y} : \frac{3z}{2xy}$ můžeme zapsat ve tvaru $\frac{\frac{9xz}{y}}{\frac{3z}{2xy}}$.

Výraz, v jehož čitateli i jmenovateli jsou lomené výrazy, se nazývá **složený lomený výraz**. Zlomková čára oddělující čitatele od jmenovatele složeného výrazu se nazývá **hlavní zlomková čára**. Píšeme ji vždy v úrovni znaménka rovnosti.

Složený lomený výraz upravujeme tak, že hlavní zlomkovou čáru nahradíme znakem pro dělení a pak uplatníme pravidlo pro dělení lomených výrazů.

Pro libovolné výrazy $A$, $B$, $C$, $D$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, platí: $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$

Například:

* Zjednodušte výrazy: $\dfrac{\dfrac{3x}{5y}}{2z}$, $\dfrac{1 - \dfrac{1}{a}}{1 - \dfrac{a}{a - 1}}$

V prvním případě musíme dávat dobrý pozor na rozlišení hlavní zlomkové čáry.

$$\dfrac{3x}{\dfrac{5y}{2z}} = 3x : \dfrac{5y}{2z} = 3x \cdot \dfrac{2z}{5y} = \dfrac{6xz}{5y} \qquad y \neq 0,\ z \neq 0$$

$$\dfrac{1 - \dfrac{1}{a}}{1 - \dfrac{a}{a - 1}} = \dfrac{\dfrac{a - 1}{a}}{\dfrac{a - 1 - a}{a - 1}} = \dfrac{a - 1}{a} : \dfrac{-1}{a - 1} = \dfrac{a - 1}{a} \cdot \dfrac{a - 1}{-1} = -\dfrac{(a - 1)^2}{a}$$

$$a \neq 0,\ a \neq 1$$

• Zjednodušte výrazy a stanovte podmínky, za kterých mají dané výrazy smysl:

a) $\dfrac{8xy}{\dfrac{2y}{4x}}$

b) $\dfrac{\dfrac{36yz^3}{8xz^2}}{9yz}$

c) $\dfrac{\dfrac{u^2 - v^2}{2u + 2v}}{\dfrac{u - v}{u - 6}}$

d) $\dfrac{\dfrac{uv - u^2}{-3v + u}}{\dfrac{v - u}{2u - 6v}}$

Řešení:

a) $\dfrac{8xy}{\dfrac{2y}{4x}} = 8xy : \dfrac{2y}{4x} = 8xy \cdot \dfrac{4x}{2y} = 16x^2 \qquad x \neq 0,\ y \neq 0$

b) $\dfrac{\dfrac{36yz^3}{8xz^2}}{9yz} = \dfrac{36yz^3}{8xz^2} : \dfrac{9yz}{1} = \dfrac{9yz}{2x} \cdot \dfrac{1}{9yz} = \dfrac{1}{2x} \qquad x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$

c) $\dfrac{\dfrac{u^2 - v^2}{2u + 2v}}{\dfrac{u - v}{u - 6}} = \dfrac{(u - v)(u + v)}{2(u + v)} : \dfrac{u - v}{u - 6} = \dfrac{u - v}{2} \cdot \dfrac{u - 6}{u - v} = \dfrac{u - 6}{2}$

$u \neq 6,\ u \neq v,\ u \neq -v$

d) $\dfrac{\dfrac{uv - u^2}{-3v + u}}{\dfrac{v - u}{2u - 6v}} = \dfrac{u(v - u)}{u - 3v} : \dfrac{v - u}{2(u - 3v)} = \dfrac{u(v - u)}{u - 3v} \cdot \dfrac{2(u - 3v)}{v - u} = 2u$

$u \neq v,\ u \neq 3v$

- Zjednodušte výrazy a stanovte podmínky, za kterých mají dané výrazy a provedené úpravy smysl:

a) $\dfrac{\dfrac{2}{x} - 1}{1 + \dfrac{1}{1 - x}}$

b) $\dfrac{1 - \dfrac{2}{x}}{3 - \dfrac{x + 4}{2}}$

c) $\dfrac{\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{1}{x + 2}}{\dfrac{4x + 8}{(x + 2)^2}}$

d) $\dfrac{\dfrac{2}{x^2 + 2x + 1}}{\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{x + 1}}$

Řešení:

a) $\dfrac{\dfrac{2}{x} - 1}{1 + \dfrac{1}{1 - x}} = \dfrac{\dfrac{2 - x}{x}}{\dfrac{1 - x + 1}{1 - x}} = \dfrac{2 - x}{x} : \dfrac{2 - x}{1 - x} = \dfrac{2 - x}{x} \cdot \dfrac{1 - x}{2 - x} = \dfrac{1 - x}{x}$

$x \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq 2$

b) $\dfrac{1 - \dfrac{2}{x}}{3 - \dfrac{x + 4}{2}} = \dfrac{\dfrac{x - 2}{x}}{\dfrac{6 - x - 4}{2}} = \dfrac{x - 2}{x} : \dfrac{6 - x - 4}{2} = \dfrac{x - 2}{x} \cdot \dfrac{2}{(-1)(x - 2)} =$

$= -\dfrac{2}{x}$

$x \neq 0,\ x \neq 2$

c) $$\frac{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}}{\frac{4x+8}{(x+2)^2}} = \frac{\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}}{\frac{4(x+2)}{(x+2)^2}} = \frac{4}{(x-2)(x+2)} : \frac{4}{x+2} =$$

$$= \frac{4}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{4} = \frac{1}{x-2} \qquad x \neq 2,\ x \neq -2$$

d) $$\frac{\frac{2}{x^2+2x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x+1-x+1}{(x-1)(x+1)}} = \frac{2}{(x+1)^2} : \frac{2}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{2} = \frac{x-1}{x+1} \qquad x \neq 1,\ x \neq -1$$

### 5.5.3. <u>Relaxační část</u> - logika hrou

V relaxační části této hodiny se pokusíme se žáky vyřešit několik logických úloh.

**Lucinka a barevné kuličky**

„Jé, to jsou krásné kuličky! A ty krabičky! Dědečku, prosím, dej mi je." „No, uvidíme, jestli si je zasloužíš," odpověděl dědeček. „Ale nejdřív běž ven a počkej za dveřmi!" Když dědeček zavolal Lucinku zpátky do pokoje, řekl jí: „Tady je pět krabiček, jedna bílá, jedna černá, jedna červená, jedna modrá a jedna zelená. Z kuliček mají vždy dvě stejnou barvu, tedy dvě jsou bílé, dvě černé, dvě červené, dvě modré a dvě zelené. Do každé krabičky jsem dal dvě kuličky. Ale nemysli si, že v každé krabičce jsou kuličky stejné barvy, přeházel jsem je. Jestli uhádneš barvy kuliček v krabičkách, můžeš si je všechny nechat." „Dědečku, to přece nemůžu uhodnout." „Ale můžeš Lucinko, vždyť ti pomůžu. Všelicos ti prozradím:

1. Ani jedna kulička není v krabičce stejné barvy.
2. V každé krabičce jsou kuličky různých barev.
3. V červené krabičce není modrá kulička.
4. Červená a zelená kulička jsou buď v bílé, nebo v černé krabičce.

5. V jedné krabičce je jedna bílá a jedna modrá kulička.
6. V modré krabičce je jedna černá kulička.
7. Do černé krabičky jsem dal modrou a zelenou kuličku.

To by ti mělo stačit k rozluštění mé hádanky."

Řešení:

Pokud zkontrolujeme podmínky, vidíme, že v 6. a 7. podmínce již máme hotové výsledky. Zapíšeme to do tabulky:

| krabička | bílá | černá | červená | modrá | zelená |
|---|---|---|---|---|---|
| barvy | | modrá | | černá | |
| kuliček | | zelená | | | |

Ze 4. podmínky určíme, že červená a zelená kulička je v bílé krabičce:

| krabička | bílá | černá | červená | modrá | zelená |
|---|---|---|---|---|---|
| barvy | červená | modrá | | černá | |
| kuliček | zelená | zelená | | | |

Z podmínek 3 a 5 určíme barvy kuliček v další krabičce. V které krabičce může být bílá a modrá kulička? V úvahu přichází jen červená a zelená krabička. Ale v červené krabičce podle 3 není modrá kulička. Tedy bílá a modrá kulička jsou v zelené krabičce.

| krabička | bílá | černá | červená | modrá | zelená |
|---|---|---|---|---|---|
| barvy | červená | modrá | | černá | bílá |
| kuliček | zelená | zelená | | | modrá |

Zůstala nám ještě jedna bílá, jedna červená a jedna černá kulička. Z podmínky 1 víme, že červená kulička nemůže být v červené krabičce, a tak v červené krabičce je jedna bílá a jedna černá kulička. Zbývající červená kulička je spolu s černou v modré krabičce. Tím je úloha vyřešena. Pokud jí stejným způsobem vyřeší i Lucinka, budou všechny kuličky i krabičky její.

| krabička | bílá | černá | červená | modrá | zelená |
|---|---|---|---|---|---|
| barvy kuliček | červená | modrá | černá | černá | bílá |
| | zelená | zelená | bílá | červená | modrá |

**Vojáci**

Ve společnosti je pět důstojníků: pěšák, dělostřelec, letec, spojař a ženista. Podle hodnosti je jeden kapitán, tři jsou majoři a jeden je podplukovník. Pozornost žen se soustředí jen na ně, protože ve společnosti nejsou jiní muži. Z jejich rozhovoru jsme se dozvěděli:

1. Jan má takovou hodnost jako jeho přítel ženista.
2. František je dobrým přítelem spojaře.
3. Letec s Petrem a Lubošem byli minulý týden na cvičení.
4. Dnes se rozbilo dělostřelcovo rádio. Na jeho prosbu zavolal Luboš spojaře a ten rádio opravil.
5. František chtěl být původně letcem, ale na ženistovu radu si přece jen zvolil jiný druh zbraní.
6. Jan salutuje Lubošovi, Petr Františkovi.
7. Jméno pátého důstojníka je Andrej.

Zjistěme o každém, jaká je jeho hodnost a k jakému druhu zbraní patří.

<u>Řešení</u>:

Z podmínek 1 a 6 můžeme určit hodnosti všech pěti vojáků. Z 1 plyne, že Jan a ženista jsou majoři, protože jen tato hodnost se vyskytuje více než jednou. Z 6 vyplývá, že Luboš je podplukovník a Petr kapitán. František a Andrej jsou majoři.

| jméno | Petr | Jan | František | Andrej | Luboš |
|---|---|---|---|---|---|
| hodnost | kapitán | major | major | major | podplukovník |

Nyní nám už zbývá jen určit, které jméno patří ke které zbrani. Informace, které se vztahují na druh zbraní, naznačují jen to, kdo s kým není totožný. Podle 1 Jan není ženista. Podle 2 František není spojař. Podle 3 Petr a Luboš nejsou letci. Podle 4 Luboš není dělostřelec ani spojař. Podle 5 František není letec ani ženista. Z 1 dále plyne, že ženista musí být major. Luboš je podplukovník, není tedy ženista, letec, dělostřelec ani spojař. Luboš musí být pěšák. František nemůže být pěšák, není ani letec, ani ženista a ani spojař. František je tedy dělostřelec. Petr není ženista, letec, dělostřelec ani pěšák. Petr je spojař. Jan není ženista, pěšák, dělostřelec ani spojař. Musí tedy být letec. Poslední z důstojníků (Andrej) je ženista.

| jméno | Petr | Jan | František | Andrej | Luboš |
|---|---|---|---|---|---|
| hodnost | kapitán | major | major | major | podplukovník |
| zbraň | spojař | letec | dělostřelec | ženista | pěšák |

**Dopravní špička**

Psycholog zkoumal vliv dopravní špičky na nervovou soustavu. Na každé z autobusových tratí č. 55, 15, 25, 33 hovořil vždy s jedním cestujícím. Jejich jména byla Ondřej, Marek, Patrik a Ladislav a byli zaměstnáni jako laborant, učitel, kominík a řezník.

Bohužel, dopravní špička nejvíce vyčerpala samotného psychologa. Nakonec zapomněl, kde byli jednotliví cestující zaměstnáni. A to bylo pro výzkum důležité. Vzpomněl si jen na to, ve kterém autobuse s jednotlivými cestujícími hovořil. Rozhodl se, že i toto upřesní. Tak si jistě vzpomene i na zaměstnání každého z tázaných.

Vzpomněl si na následující údaje:

1. Číslo Patrikova autobusu nezačínalo jedničkou.
2. V autobusu č. 33 se bavil s laborantem nebo s řezníkem.
3. Řezník cestoval na lince, na které se součet číslic v jejím čísle rovnal počtu písmen v řezníkově jméně.

4. S Ladislavem hovořil na lince, jejíž číslo se skládá ze dvou stejných číslic.
5. Učitel se nejmenoval Patrik.
6. Marek chtěl vědět od psychologa, zda může přestoupit na autobus č. 25.
7. Ladislavova poslední věta byla: „Nastoupil jsem do špatného autobusu, přestoupím na pětapadesátku."

Zjistěme, na jakých linkách autobusů se kterými z jmenovaných psycholog hovořil a jaké měli zaměstnání.

Řešení:

Ze všech podmínek můžeme vylučovací formou určit následující tvrzení:

1. Patrik necestoval autobusem č. 15.
2. V autobusu č. 33 necestoval učitel ani kominík.
3. Mezi předpokládanými linkami součet číslic u 55 je 10, u 25 je 7, u 15 je 6 a u 33 je také 6. Počet písmen ve jménech Patrik a Ondřej je 6, ve jméně Marek 5 a ve jméně Ladislav 8. Řezník je tedy buď Patrik, nebo Ondřej a cestoval buď linkou 15, nebo 33. Tyto alternativy znamenají následující vyloučení: Řezník necestoval linkami 55 ani 25, nejmenuje se Marek ani Ladislav.
4. Ladislav necestoval na linkách 15 ani 25.
5. Učitel se nejmenuje Patrik.
6. Marek necestoval na lince 25.
7. Ladislav necestoval na lince 55.

Všechny informace, které nyní známe, zaznamenáme do tabulek. Přiřazení, která jsou vyloučena, označíme -, přiřazení, která souhlasí, budeme označovat +.

| | řezník | kominík | učitel | laborant |
|---|---|---|---|---|
| Ondřej | | | | |
| Marek | - | | | |
| Patrik | | | - | |
| Ladislav | - | | | |

| | 55 | 15 | 25 | 33 |
|---|---|---|---|---|
| Ondřej | | | | |
| Marek | | | - | |
| Patrik | | - | | |
| Ladislav | - | - | - | |

| | 55 | 15 | 25 | 33 |
|---|---|---|---|---|
| laborant | | | | |
| učitel | | | | - |
| kominík | | | | - |
| řezník | - | | - | |

Z tabulek vidíme, že Ladislav cestoval autobusem č. 33. Porovnáme-li zaměstnání a čísla autobusů, vidíme, že Ladislav může být pouze laborant nebo řezník. Z upravené podmínky 3 ale víme, že řezník se Ladislav nejmenuje. Ladislav je tedy laborant. Po doplnění tabulky zjistíme, že řezník cestoval linkou 15, a jelikož ze 3 víme, že se nejmenuje Marek, musí to být Ondřej. Učitel se může jmenovat jedině Marek a s psychologem hovořil na lince 55. Zbývá určit poslední trojici. Tu tvoří kominík Patrik, který jel autobusem č. 25.

Po doplnění vypadá tabulka takto:

| | řezník | kominík | učitel | laborant |
|---|---|---|---|---|
| Ondřej | + | - | - | - |
| Marek | - | - | + | - |
| Patrik | - | + | - | - |
| Ladislav | - | - | - | + |

| | 55 | 15 | 25 | 33 |
|---|---|---|---|---|
| Ondřej | - | + | - | - |
| Marek | + | - | - | - |
| Patrik | - | - | + | - |
| Ladislav | - | - | - | + |

| | 55 | 15 | 25 | 33 |
|---|---|---|---|---|
| laborant | - | - | - | + |
| učitel | + | - | - | - |
| kominík | - | - | + | - |
| řezník | - | + | - | - |

Pro větší přehlednost výsledky zapíšeme ještě jednou:

1. Ladislav - laborant - 33
2. Ondřej - řezník - 15
3. Marek - učitel - 55
4. Patrik - kominík - 25

## 5.6. PŘÍPRAVA Č. 6

Poslední hodina, která se týká tématu algebraické výrazy, bude věnována prověření znalostí žáků. Žáci dostanou k vypracování následující test. Formou soutěže tak zjistíme, kde má který žák nedostatky a v čem je naopak výborný. V testu jsou záměrně řazeny i příklady, které žáci již jednou v hodinách počítali.

Test je plánován na celých šedesát minut, proto v této hodině odpadají informační a relaxační část.

### 5.6.1. Test

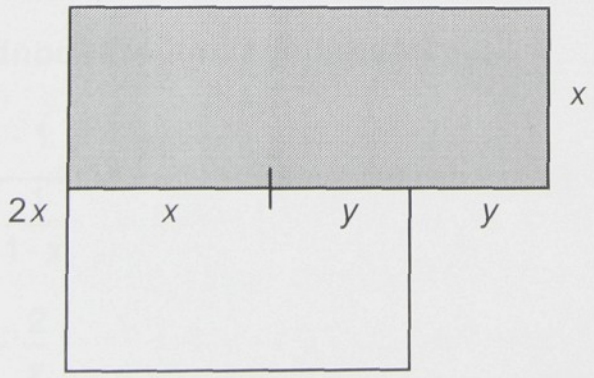
1. Jestliže $b$ kg jablek stálo 56 korun a $c$ kg hrušek 72 korun, kolik bychom zaplatili za 6 kg jablek a 5 kg hrušek?

2. Vypočítejte, který výraz musíme přičíst k rozdílu výrazů $8x^2 - 2xy + 3y^2 - 5$, $4x^2 + 3xy - y^2 + 2$, abychom dostali jejich součet.

3. Dvěma způsoby vypočítejte a zapište co nejjednodušším výrazem obsah obrazce složeného ze dvou obdélníků:

a) vypočítejte obsahy obou obdélníků a pak je sečtěte,

b) doplňte obrázek na jeden obdélník, vypočítejte jeho obsah a od něj odečtěte obsah doplněné části.




4. Rozložte na součin výrazy:

a) $a^2 - 2ab - 3ac + 6bc$

b) $x^2y^2 - axy + bxy - ab$

c) $32x^3 - 18x$

d) $12a^2b^3c^5 - 42ab^4c^5 + 72a^3b^3c^5$

5. Určete, pro které hodnoty proměnných mají výrazy smysl, a potom výrazy zjednodušte:

a) $\dfrac{6x^2 - 54}{3x^3 + 18x^2 + 27x}$ c) $\dfrac{3n^2 - 4mn^2}{4m^3n - 3m^2n}$

b) $\dfrac{6ba - 6a^2}{4a^3 - 4b^2a}$ d) $\dfrac{c^2d^2 - 25d^2}{dc^2 + 10dc + 25d}$

6. Zjednodušte a určete podmínky, pro které mají dané výrazy smysl:

a) $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{3}{2x-6} + \dfrac{5}{3x-9}$ c) $\dfrac{1}{x^2 - x} - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{4x}{10+5x} + \dfrac{2x}{3x+6}$ d) $\dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{y+x} - \dfrac{2y}{x^2 - y^2}$

7. Zjednodušte a stanovte podmínky, za kterých mají dané výrazy smysl:

a) $\left(1 + \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{y^2}\right) \cdot \dfrac{y}{y+1}$ c) $\left(1 + \dfrac{4}{y} + \dfrac{4}{y^2}\right) \cdot \dfrac{y^2}{y^2 - 4}$

b) $\left(1 - \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{y^2}\right) \cdot \dfrac{y^2}{y-1}$ d) $\left(1 - \dfrac{6}{y} + \dfrac{9}{y^2}\right) \cdot \dfrac{3y^2}{3-y}$

8. Zjednodušte a stanovte podmínky:

a) $\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} + 1\right) : \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$ c) $\left(x + 1 - \dfrac{1}{1-x}\right) : \left(x - \dfrac{x^2}{x-1}\right)$

b) $\left(1 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{16}{x^2}\right) : \left(1 + \dfrac{4}{x}\right)$ d) $\left(\dfrac{1}{1-x} - 1\right) : \left(x - \dfrac{x^2}{x-1} - 1\right)$

9. Zjednodušte následující výrazy.

a) $\dfrac{\dfrac{2}{x} - 1}{1 + \dfrac{1}{1-x}}$ c) $\dfrac{\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}}{\dfrac{4x+8}{(x+2)^2}}$

b) $\dfrac{1 - \dfrac{2}{x}}{3 - \dfrac{x+4}{2}}$ d) $\dfrac{\dfrac{2}{x^2 + 2x + 1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}}$

Zadání testu a nejlépe vypracované testy viz přílohy č. 2, 3, 4.

# 6. PRAXE

## 6.1. VYZKOUŠENÍ PŘÍPRAVY Č. 4 V PRAXI

Na jedné z hodin matematického kroužku byla vyzkoušena příprava č. 4.

V informační části hodiny si žáci zapsali říkanku k zapamatování čísla $\pi$. Všichni si počet písmenek jednotlivých slov napsali na papír a podle matematických tabulek zkontrolovali, zda obě čísla opravdu souhlasí.

Ve druhé části hodiny žáci formou soutěže počítali příklady týkající se sčítání, odčítání a násobení lomených výrazů. Téměř žádný z příkladů, které stihli vyřešit v čase vyhrazeném pro odbornou část hodiny, žákům nečinil větší obtíže.

Žákům se velmi líbila relaxační část hodiny, ve které si přečetli všechny tři matematické pohádky. Odpovědět na otázky položené v prvních dvou pohádkách bylo pro žáky 9. třídy velmi jednoduché, ani nad řešením obou příkladů zadaných v pohádce třetí se nezdrželi příliš dlouho.

S přístupem žáků matematického kroužku k řešení všech příkladů, i s jejich vztahem k matematice vůbec, jsem byla velmi spokojena.

## 6.2. VYHODNOCENÍ TESTŮ

Na dvou ze základních škol, na kterých učitelé vyplňovali dotazníky, mi byl umožněn vstup do hodiny. Zadala jsem žákům test, který shrnuje veškerou látku týkající se algebraických výrazů a jejich úprav.

Pro možnost srovnání jsem na jedné ze škol zadala test žákům, kteří navštěvují matematický kroužek, na druhé škole vypracovali test žáci, kteří se chtějí hlásit na střední školy, ale nemají možnost docházet do matematického kroužku.

V následujících dvou tabulkách vidíme výsledky testu. Výsledky jsou řazené podle úspěšnosti. Správně vyřešený příklad je označen /, špatně vyřešený příklad X. Pokud příklad není vyřešen vůbec, je značen -. V tabulce je rovněž uveden počet nesprávně vyřešených příkladů a počet příkladů, které nejsou vyřešeny vůbec.

1. Žáci navštěvující matematický kroužek (test řešilo 9 žáků):

| poř. | 1 | 2 | 3 | 4 | | | | 5 | | | | 6 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| č. | | | | a | b | c | d | a | b | c | d | a | b | c | d |
| 1 | / | / | / | / | / | / | X | / | / | / | / | / | / | X | / |
| 2 | / | / | / | X | / | / | / | / | / | / | / | X | / | / | / |
| 3 | / | X | / | - | - | / | / | / | / | / | / | X | / | / | / |
| 4 | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / |
| 5 | / | X | / | X | / | / | / | / | / | / | / | - | - | - | - |
| 6 | / | X | X | / | / | / | / | / | / | / | / | / | X | / | / |
| 7 | / | X | X | / | / | / | / | / | / | / | / | X | X | X | X |
| 8 | / | / | / | X | X | / | / | / | / | / | / | X | X | X | / |
| 9 | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | X | X | X | X |

| poř. | 7 | | | | 8 | | | | 9 | | | | počet | chybějící |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| č. | a | b | c | d | a | b | c | d | a | b | c | d | chyb | příklady |
| 1 | / | / | X | / | / | / | / | X | / | / | / | / | 4 | 0 |
| 2 | / | / | / | / | / | / | / | X | / | / | X | / | 4 | 0 |
| 3 | / | / | / | / | / | / | / | X | / | / | / | / | 3 | 2 |
| 4 | / | / | / | / | / | / | X | X | / | X | X | X | 5 | 0 |
| 5 | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | X | / | 3 | 4 |
| 6 | X | / | / | / | / | / | / | / | / | X | X | X | 7 | 0 |
| 7 | / | X | / | / | / | / | / | / | / | X | / | / | 8 | 0 |
| 8 | X | X | X | X | X | X | / | / | / | / | / | / | 11 | 0 |
| 9 | X | X | X | X | X | X | / | / | - | - | - | - | 10 | 4 |

2. Žáci se zájmem o studium na střední škole (test řešilo 8 žáků):

| poř. | 1 | 2 | 3 | 4 | | | | 5 | | | | 6 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| č. | | | | a | b | c | d | a | b | c | d | a | b | c | d |
| 1 | / | / | - | / | / | / | / | / | / | / | / | X | X | X | - |
| 2 | / | / | X | X | / | / | / | / | / | / | / | X | X | X | / |
| 3 | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | / | - | - | - | - |
| 4 | / | - | / | X | X | / | / | - | - | - | - | X | / | X | / |
| 5 | / | / | X | / | / | / | / | X | / | / | X | X | - | - | - |
| 6 | / | X | / | / | / | / | / | / | / | / | X | X | X | X | X |
| 7 | / | / | X | / | / | X | X | / | / | / | / | X | X | X | X |
| 8 | / | / | X | X | X | / | / | / | / | / | / | X | X | X | X |

| poř. | 7 | | | | 8 | | | | 9 | | | | počet | chybějící |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| č. | a | b | c | d | a | b | c | d | a | b | c | d | chyb | příklady |
| 1 | / | / | / | / | / | X | / | / | / | / | / | / | 4 | 2 |
| 2 | / | / | / | / | / | / | / | / | / | X | X | X | 8 | 0 |
| 3 | / | / | / | / | X | / | X | - | / | X | / | X | 4 | 5 |
| 4 | / | / | X | X | / | / | X | X | / | / | - | - | 8 | 7 |
| 5 | / | / | X | / | X | / | X | X | X | X | X | X | 12 | 3 |
| 6 | X | X | X | X | X | / | X | X | X | - | - | - | 14 | 3 |
| 7 | - | - | - | - | - | - | - | - | X | X | X | X | 11 | 8 |
| 8 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | 19 | 0 |

Porovnáním obou tabulek jsem zjistila, že žáci, kteří navštěvují matematický kroužek, byli při řešení testu úspěšnější, než žáci z druhé skupiny.

V první skupině mělo všech 9 žáků správně vyřešené příklady č. 1, 4c, 5a, b, c, d. Největší potíže jim činily příklady 6a, b, c, 9c. Mezi příklady se nenašel žádný, který by nevyřešil ani jeden z žáků.

Ve druhé skupině se naopak vyskytly takové příklady dva: 6a, c. Také v příkladech 6b, d, 8c, d, 9b, c, d žáci často chybovali. Všech 8 žáků mělo správně pouze příklad č. 1.

Pokud vezmeme v úvahu všechny žáky jedné skupiny a všechny správně vyřešené příklady, je celková úspěšnost první skupiny 73,3 %, úspěšnost druhé skupiny 50 %.

Z časového hlediska pouze 3 žáci z první skupiny nestihli test vyřešit během šedesáti minut, ve druhé skupině bylo takových žáků 6.

## 7. ZÁVĚR

Zkoumáním na základních školách jsem zjistila, že jen na mizivém počtu škol pracují matematické kroužky. Přitom zřejmě na každé škole se v devátých třídách najde několik žáků, kteří by rádi studovali na středních školách a dobrá znalost matematiky bude podmínkou jejich přijetí.

Jsem si vědoma toho, že objektem mého zkoumání byl velmi nízký počet žáků, a nemohu proto vyvozovat všeobecné závěry. Přesto ale podle výsledků testu, který vypracovali dvě skupiny žáků z devátých tříd, vyšlo najevo, že znalosti žáků, kteří navštěvují matematický kroužek, jsou lepší, než znalosti těch žáků, kteří mají zájem o studium na středních školách, ale nemají možnost do matematického kroužku docházet.

Žáci, kteří navštěvují matematický kroužek, si zřejmě zvykli častěji počítat, a to i náročnější příklady. Na hodinách matematického kroužku se v informační a relaxační části hodiny setkávají se zábavnou formou matematiky, baví je i různé matematické soutěže. Jejich touha po vítězství je přinutí zapojit se do počítání naplno.

Podle mého názoru by se měl matematický kroužek zřídit na každé škole, na které by o něj matematicky nadaní žáci projevili zájem.

## SEZNAM LITERATURY


- Bizám,G. - Herczeg, J. : Hra a logika v 85 príkladoch. Bratislava, ALFA 1979.
- Bušek, I. - Kubínová, M. - Novotná, J. : Matematika pro 9. ročník ZŠ, I. díl. Praha, Prometheus 1994.
- Bušek, I. - Kubínová, M. - Novotná, J. : Sbírka úloh z matematiky pro 9. ročník ZŠ. Praha, Prometheus 1996.
- Cvik, P. - Bero, P. - Hecht, T. : Záujmový útvar matematiky pre žiakov 1. a 2. ročníka stredných škol. Bratislava, Slovenské pedagogické nakladatelstvo 1985.
- Dušek, F. : Matematické zájmové kroužky. Praha, SPN 1985.
- Koval, V. : Kamarádi čísla. Praha, SPN 1969.
- Krupka, P. : Aritmetika, algebra, funkce. Praha, Global 1995.
- Novoveský, Š. - Križalkovič, K. - Lečko, I. : Zábavná matematika. Praha, SPN 1983.
- Perelman, J. I. : Zajímavá matematika. Praha, Mladá fronta 1971.
- Pešková, E. a kol. : Matematika, přehled středoškolského učiva. Praha, ORFEUS 1992.
- Polák, J. : Přehled středoškolské matematiky. Praha, SPN 1983.
- Struik, D. J. : Dějiny matematiky. Praha, Orbis 1963.
- Šedivý, O. a kol. : Matematika pro 8. ročník ZŠ, I. díl. Praha, SPN 1991.
- Žůrek, M. : Sbírka příkladů z matematiky, II. díl. Olomouc, FIN 1994.
- Program semináře Kapitoly z didaktiky. Liberec, TUL 1997.

## Příloha č. 1 - DOTAZNÍKY

Některé z dotazníků, které se týkají existence matematických kroužků na základních školách.

škola: ZŠ Duchcov, Teplická 13

*Funguje na vaší škole matematický kroužek?*

ANO

NE

*1. Kolik žáků do kroužku dochází?*

9.A – 20, 6.A – 16

*2. Pro které třídy kroužek funguje?*

9.A, 6.A

*3. Jaký je zájem u jednotlivých věkových skupin?*

přibližně stejný; důvodem zájmu je především velký počet žáků ve třídách

*4. Jaká je náplň kroužku (má spíše doučovací charakter nebo rozšiřuje základní učivo?*

9. ročník – spíše doučování
6. –"– – rozšiřování učiva různé soutěže

*5. Kolikrát týdně se kroužek schází?*

každý 1x

*6. Připravuje kroužek žáky 8. a 9. tříd na přijímací zkoušky?*

příprava je součástí náplně dobrého kroužku

*1. Je to z důvodu nezájmu žáků nebo jiného důvodu?*

*2. Kdybyste měli možnost, zřídili byste matematický kroužek?*

*3. Podporujete nějak jinak matematicky nadané žáky?*

*4. Je podle vašeho názoru matematický kroužek potřebný, účelný?*

škola: 1. ZŠ, E. FLORIÁNOVÉ 8, JABLONEC N. NISOU

*Funguje na vaší škole matematický kroužek?*

ANO

NE

*1. Kolik žáků do kroužku dochází?*

15 žáků

*2. Pro které třídy kroužek funguje?*

9. A, B

*3. Jaký je zájem u jednotlivých věkových skupin?*

.....................................

*4. Jaká je náplň kroužku (má spíše doučovací charakter nebo rozšiřuje základní učivo?*

kroužek je zaměřen jako příprava na přijímací zkoušky na střední školu

*5. Kolikrát týdně se kroužek schází?*

1x týdně (1h)

*6. Připravuje kroužek žáky 8. a 9. tříd na přijímací zkoušky?*

ano

*1. Je to z důvodu nezájmu žáků nebo jiného důvodu?*

.....................................

*2. Kdybyste měli možnost, zřídili byste matematický kroužek?*

.....................................

*3. Podporujete nějak jinak matematicky nadané žáky?*

.....................................

*4. Je podle vašeho názoru matematický kroužek potřebný, účelný?*

.....................................

**ZÁKLADNÍ ŠKOLA**
ul.E.Floriánové 8
JABLONEC NAD NISOU
tel. 253 16

15.12.1997 Mgr. [illegible]

škola: ZŠ Pivovarská, Jablonec nad Nisou

*Funguje na vaší škole matematický kroužek?*

ANO

NE

1. *Kolik žáků do kroužku dochází?*

2. *Pro které třídy kroužek funguje?*

vycházející 9. třídy

3. *Jaký je zájem u jednotlivých věkových skupin?*

4. *Jaká je náplň kroužku (má spíše doučovací charakter nebo rozšiřuje základní učivo?*

prohlubování a upevňování základního učiva

5. *Kolikrát týdně se kroužek schází?*

1x

6. *Připravuje kroužek žáky 8. a 9. tříd na přijímací zkoušky?*

ano

1. *Je to z důvodu nezájmu žáků nebo jiného důvodu?*

2. *Kdybyste měli možnost, zřídili byste matematický kroužek?*

3. *Podporujete nějak jinak matematicky nadané žáky?*

MO, Pythágoriády

4. *Je podle vašeho názoru matematický kroužek potřebný, účelný?*

ano

škola: Základní škola v Buzulucké ul., Teplice III

*Funguje na vaší škole matematický kroužek?* (programování)

ANO

NE

1. *Kolik žáků do kroužku dochází?*

15 – 25

2. *Pro které třídy kroužek funguje?*

2. – 7. tř.

3. *Jaký je zájem u jednotlivých věkových skupin?*

největší zájem 5. a 6. třída (zaměření na matematiku, programování)

4. *Jaká je náplň kroužku (má spíše doučovací charakter nebo rozšiřuje základní učivo?*

rozšiřuje učivo matematiky – úlohy řešené na PC – tvorba programů – QBASIC

5. *Kolikrát týdně se kroužek schází?*

1x – 90 minut

6. *Připravuje kroužek žáky 8. a 9. tříd na přijímací zkoušky?*

rozvíjí schopnost zobecňování – řešení slovních úloh

1. *Je to z důvodu nezájmu žáků nebo jiného důvodu?*

2. *Kdybyste měli možnost, zřídili byste matematický kroužek?*

3. *Podporujete nějak jinak matematicky nadané žáky?*

4. *Je podle vašeho názoru matematický kroužek potřebný, účelný?*

škola: ZŠ Mozartova, Jbc n. N.

*Funguje na vaší škole matematický kroužek?*

ANO

NE

*1. Kolik žáků do kroužku dochází?*

*2. Pro které třídy kroužek funguje?*

pro 9. třídy - příprava na př. zk. (n.volitel.př.)

*3. Jaký je zájem u jednotlivých věkových skupin?*

9. třídy
zájem je

*4. Jaká je náplň kroužku (má spíše doučovací charakter nebo rozšiřuje základní učivo?*

příprava na př. zk.

*5. Kolikrát týdně se kroužek schází?*

1x týdně

*6. Připravuje kroužek žáky 8. a 9. tříd na přijímací zkoušky?*

ano

*1. Je to z důvodu nezájmu žáků nebo jiného důvodu?*

*2. Kdybyste měli možnost, zřídili byste matematický kroužek?*

Ne

*3. Podporujete nějak jinak matematicky nadané žáky?*

MO

*4. Je podle vašeho názoru matematický kroužek potřebný, účelný?*

účelný ano

škola: ZŠ Duchcov, J. Pětrly 11

*Funguje na vaší škole matematický kroužek?*

ANO

NE

*1. Kolik žáků do kroužku dochází?*

*2. Pro které třídy kroužek funguje?*

*3. Jaký je zájem u jednotlivých věkových skupin?*

*4. Jaká je náplň kroužku (má spíše doučovací charakter nebo rozšiřuje základní učivo?*

*5. Kolikrát týdně se kroužek schází?*

*6. Připravuje kroužek žáky 8. a 9. tříd na přijímací zkoušky?*

*1. Je to z důvodu nezájmu žáků nebo jiného důvodu?*

nezájem žáků

nadaní žáci odešli do

gymnázií (většina)

*2. Kdybyste měli možnost, zřídili byste matematický kroužek?*

většina zájem je o doučování

*3. Podporujete nějak jinak matematicky nadané žáky?*

ano, individuální prací,

matematické soutěže

*4. Je podle vašeho názoru matematický kroužek potřebný, účelný?*

ano

škola: ZŠ LESNÍ, LIBEREC

*Funguje na vaší škole matematický kroužek?*

ANO

NE

*1. Kolik žáků do kroužku dochází?*

.....................................

*2. Pro které třídy kroužek funguje?*

.....................................

*3. Jaký je zájem u jednotlivých věkových skupin?*

.....................................

*4. Jaká je náplň kroužku (má spíše doučovací charakter nebo rozšiřuje základní učivo?*

.....................................

*5. Kolikrát týdně se kroužek schází?*

.....................................

*6. Připravuje kroužek žáky 8. a 9. tříd na přijímací zkoušky?*

.....................................

*1. Je to z důvodu nezájmu žáků nebo jiného důvodu?*

Škola je rozdělena na dvě části. Jedna část žáků má rozšířenou výuku matematiky, druhá část žáků pracuje pod Výzkumným ústavem matematiky v Praze

*2. Kdybyste měli možnost, zřídili byste matematický kroužek?*

Na této škole ne, žáci mají 5-6 hodin MA týdně

*3. Podporujete nějak jinak matematicky nadané žáky?*

rozšířenou výukou

*4. Je podle vašeho názoru matematický kroužek potřebný, účelný?*

Na školách, které nemají rozšířenou výuku MA, ano.

škola: ZŠ Liberecká, Jablonec nad Nisou

*Funguje na vaší škole matematický kroužek?*

ANO

NE

1. *Kolik žáků do kroužku dochází?*

........................................

2. *Pro které třídy kroužek funguje?*

........................................

3. *Jaký je zájem u jednotlivých věkových skupin?*

........................................

4. *Jaká je náplň kroužku (má spíše doučovací charakter nebo rozšiřuje základní učivo?*

........................................

5. *Kolikrát týdně se kroužek schází?*

........................................

6. *Připravuje kroužek žáky 8. a 9. tříd na přijímací zkoušky?*

........................................

1. *Je to z důvodu nezájmu žáků nebo jiného důvodu?*

nezájem žáků i učitelů.
není potřebný.

2. *Kdybyste měli možnost, zřídili byste matematický kroužek?*

NE

3. *Podporujete nějak jinak matematicky nadané žáky?*

NE

4. *Je podle vašeho názoru matematický kroužek potřebný, účelný?*

NE

# Příloha č. 2 - TEST

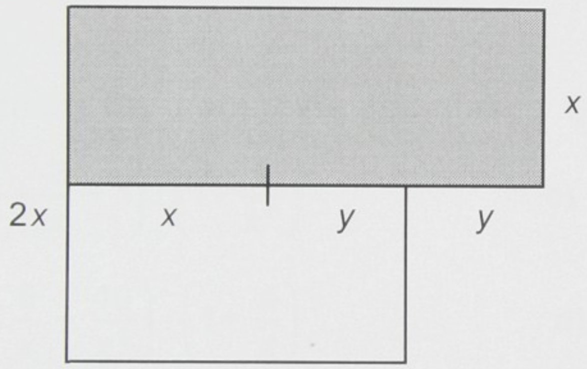
1. Jestliže $b$ kg jablek stálo 56 korun a $c$ kg hrušek 72 korun, kolik bychom zaplatili za 6 kg jablek a 5 kg hrušek?

2. Vypočítejte, který výraz musíme přičíst k rozdílu výrazů $8x^2 - 2xy + 3y^2 - 5$, $4x^2 + 3xy - y^2 + 2$, abychom dostali jejich součet.

3. Dvěma způsoby vypočítejte a zapište co nejjednodušším výrazem obsah obrazce složeného ze dvou obdélníků:

a) vypočítejte obsahy obou obdélníků a pak je sečtěte,

b) doplňte obrázek na jeden obdélník, vypočítejte jeho obsah a od něj odečtěte obsah doplněné části.




4. Rozložte na součin výrazy:

a) $a^2 - 2ab - 3ac + 6bc$

b) $x^2y^2 - axy + bxy - ab$

c) $32x^3 - 18x$

d) $12a^2b^3c^5 - 42ab^4c^5 + 72a^3b^3c^5$

5. Určete, pro které hodnoty proměnných mají výrazy smysl, a potom výrazy zjednodušte:

a) $\dfrac{6x^2 - 54}{3x^3 + 18x^2 + 27x}$

b) $\dfrac{6ba - 6a^2}{4a^3 - 4b^2a}$

c) $\dfrac{3n^2 - 4mn^2}{4m^3n - 3m^2n}$

d) $\dfrac{c^2d^2 - 25d^2}{dc^2 + 10dc + 25d}$

6. Zjednodušte a určete podmínky, pro které mají dané výrazy smysl:

a) $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{3}{2x-6} + \dfrac{5}{3x-9}$

c) $\dfrac{1}{x^2-x} - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{4x}{10+5x} + \dfrac{2x}{3x+6}$

d) $\dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{y+x} - \dfrac{2y}{x^2-y^2}$

7. Zjednodušte a stanovte podmínky, za kterých mají dané výrazy smysl:

a) $\left(1+\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{y^2}\right)\cdot\dfrac{y}{y+1}$

c) $\left(1+\dfrac{4}{y}+\dfrac{4}{y^2}\right)\cdot\dfrac{y^2}{y^2-4}$

b) $\left(1-\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{y^2}\right)\cdot\dfrac{y^2}{y-1}$

d) $\left(1-\dfrac{6}{y}+\dfrac{9}{y^2}\right)\cdot\dfrac{3y^2}{3-y}$

8. Zjednodušte a stanovte podmínky:

a) $\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}+1\right):\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

c) $\left(x+1-\dfrac{1}{1-x}\right):\left(x-\dfrac{x^2}{x-1}\right)$

b) $\left(1+\dfrac{8}{x}+\dfrac{16}{x^2}\right):\left(1+\dfrac{4}{x}\right)$

d) $\left(\dfrac{1}{1-x}-1\right):\left(x-\dfrac{x^2}{x-1}-1\right)$

9. Zjednodušte následující výrazy.

a) $\dfrac{\dfrac{2}{x}-1}{1+\dfrac{1}{1-x}}$

c) $\dfrac{\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}}{\dfrac{4x+8}{(x+2)^2}}$

b) $\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{3-\dfrac{x+4}{2}}$

d) $\dfrac{\dfrac{2}{x^2+2x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}$

Příloha č. 3 - VYPRACOVANÝ TEST 1

Nejlépe vypracovaný test ze skupiny žáků, kteří navštěvují matematický kroužek.

počet chyb: 4

1/ b kg jablek ... 56 Kč

c kg hrušek ... 42 Kč

kolik za ... 6 kg jablek a 5 kg hrušek

$$\left(\frac{56}{b}\cdot 6\right)+\left(\frac{42}{c}\cdot 5\right)$$

✓

---

2/ $(8x^2-2xy+3y^2-5)+(4x^2+3xy-y^2+2)=$

$=8x^2-2xy+3y^2-5+4x^2+3xy-y^2+2=$

$=\underline{12x^2+1xy+2y^2-3}$

$(8x^2-2xy+3y^2-5)-(4x^2+3xy-y^2+2)=$

$=8x^2-2xy+3y^2-5-4x^2-3xy+y^2-2=$

$=\underline{4x^2-5xy+4y^2-7}$

$(12x^2+1xy+2y^2-3)-(4x^2-5xy+4y^2-7)=$

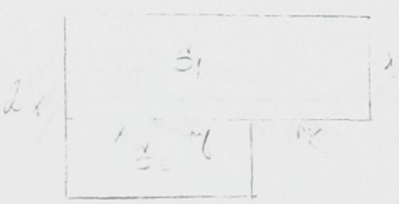
$=12x^2+1xy+2y^2-3-4x^2+5xy-4y^2+7=$

$=\underline{\underline{8x^2+6xy-2y^2+4}}$

✓

---

3/



a/ $S_1=(2y+x)\cdot x$

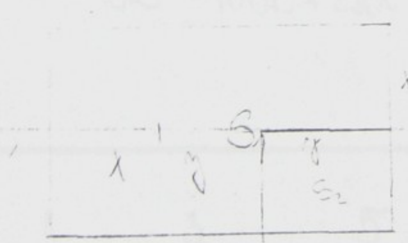
$\underline{S_1=2xy+x^2}$

$S_2=(x+y)\cdot x$

$\underline{S_2=x^2+xy}$

$S=(2xy+x^2)+(x^2+xy)=2xy+x^2+x^2+xy=$

$\underline{\underline{S=3xy+2x^2}}$



b/ $S_1=2x\cdot(x+2y)$

$\underline{S_1=2x^2+4xy}$

$S=(2x^2+4xy)-(yx)$

$\underline{\underline{S=2x^2+3yx}}$

$S_2=y\cdot x$

$\underline{S_2=yx}$

Obsah obdélníku je $3xy+2x^2$.

✓

4/ a/ $a^2-2ab-3ac+6bc = (a^2-3ac)+(6bc-2ab) = a\cdot(a-3c)+2b\cdot(3c-a) = $

$= \underline{(a+2b)\cdot(a^2-3c^2)}$ ✓

b/ $(x^2y^2-axy)+(bxy-ab) = xy(xy-a)+b(xy-a) = \underline{(xy+b)\cdot(xy^2-a^2)}$ ✓

c/ $32x^3-18x = 2x\cdot(16x^2-9) = \underline{2x\cdot(4x-3)\cdot(4x+3)}$ ✓

d/ $12a^2b^3c^5-42ab^4c^5+72a^3b^3c^5 = xy\cdot(xy-a)+b(xy-a) = \underline{(xy+b)\cdot(xy^2-a}$

---

5/ a/ $\frac{6x^2-54}{3x^3+18x^2+27x} = \frac{6\cdot(x^2-9)}{3x\cdot(x^2+6x+9)} = \frac{\cancel{6}\cdot\cancel{(x+3)}\cdot(x-3)}{\cancel{3}x\cdot\cancel{(x+3)}^2} = \underline{\underline{\frac{2(x-3)}{x\cdot(x+3)}}}$ ✓

b/ $\frac{6ba-6a^2}{4a^3-4b^2a} = \frac{6a\cdot(b-a)}{4a(a^2-b^2)} = \frac{-\cancel{(b-a)}\,3}{2\cdot\cancel{(a-b)}\cdot(b+a)} = \underline{\underline{\frac{-3}{2\cdot(a+b)}}}$ ✓

c/ $\frac{3m^2-4mn^2}{4m^3n-3m^2n} = \frac{m^2\cdot\cancel{(3-4mn)}}{m^2x\cdot\cancel{(4mn-3m)}} = \underline{\underline{\frac{-n^2}{m^2}}}$ ✓

d/ $\frac{c^2d^2-25d^2}{dc^2+10dc+25d} = \frac{d^2\cdot(c^2-25)}{d\cdot(c^2+10c+25)} = \frac{\cancel{d^2}\cdot\cancel{(c+5)}\cdot(c-5)}{\cancel{d}\cdot\cancel{(c+5)}^2} = \underline{\underline{\frac{d\cdot(c-5)}{(c+5)}}}$ ✓

chybí podmínky

---

6/ a/ $\frac{1}{x-3} - \frac{3}{2x-6} + \frac{5}{3x-9} = \frac{1}{x-3} - \frac{3}{2\cdot(x-3)} + \frac{5}{3\cdot(x-3)} = \frac{6-9+10}{(x-3)\cdot2\cdot3} = \underline{\frac{7}{6\cdot(x-3)}}$

P: $\cancel{x\neq0}$; $x\neq3$

b/ $\frac{x}{x+2} - \frac{4x}{10+5x} + \frac{2x}{3x+6} = \frac{x}{x+2} - \frac{4x}{5\cdot(2+x)} + \frac{2x}{3\cdot(x+2)} = \frac{(3\cdot5\cdot x)-12x+10x}{(x+2)\cdot3\cdot5} =$

$= \frac{15x-12x+10x}{15x+30} = \underline{\frac{13x}{15x+30}}$  P: $x\neq-2$, $\cancel{x\neq0}$

c/ $\frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x\cdot(x-1)} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{(x^3-x^2)-(x^3-x^4)-(x^3-x^2)}{x\cdot x\cdot(x-1)} = \frac{x^3-x^2-x^3+x^2-x^3+x^2}{x^3-x^2} =$

d) $\frac{1}{x-y} - \frac{1}{y+x} + \frac{2y}{x^2-y^2} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y+x} - \frac{2y}{(y+x)(x-y)} = \frac{(x+y)+(x-y)-2y}{(x+y)\cdot(x-y)}$

$= \frac{x+y+x-y-2y}{(x+y)\cdot(x-y)} = \frac{2x-2y}{(x^2-y^2)}$   P: $x \neq y$, $x \neq -y$

---

7/ a) $\left(\frac{1}{1}+\frac{2}{y}+\frac{1}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{y}{y+1}\right) = \left(\frac{y^2+2y+1}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{y}{y+1}\right) = \left(\frac{(y+1)^2}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{y}{y+1}\right) = \frac{y+1}{y}$

P: $y \neq 0$; $y \neq -1$

b) $\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{y}+\frac{1}{y^2}\right)\cdot\frac{y}{y-1} = \left(\frac{y^2-2y+1}{y^2}\right)\cdot\frac{y}{y-1} = \left(\frac{(y-1)^2}{y^2}\right)\cdot\frac{y}{y-1} = \frac{y-1}{y}$

P: $y \neq 0$; $y \neq 1$

c) $\left(\frac{1}{1}+\frac{4}{y}+\frac{4}{y^2}\right)\cdot\frac{y^2}{y^2-4} = \left(\frac{y^2+4y+4}{y^2}\right)\cdot\frac{y^2}{y^2-4} = \left(\frac{(y+2)^2}{y^2}\right)\cdot\frac{y^2}{y^2-4} = \frac{y+2}{(y+2)\cdot(y-2)} = \frac{1}{(y-2)}$

P: $y \neq 0$; $y = 2, -2$

d) $\left(\frac{1}{1}-\frac{6}{y}+\frac{9}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{3y^2}{3-y}\right) = \left(\frac{y^2-6y+9}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{3y^2}{3-y}\right) = \left(\frac{(y-3)^2}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{3y^2}{3-y}\right) = 3\cdot(y-3) = -3y+9$

P: $y \neq 0$  $y = +3$

---

8/ a) $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{1}{1}\right) : \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{x^2}\right) = \left(\frac{1-2x+x^2}{x^2}\right) : \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = \left(\frac{(x-1)^2}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{(x-1)(x-1)}\right) =$

$= \frac{x-1}{x+1}$   P: $x \neq 0$, $x \neq -1, 1$

b) $\left(\frac{1}{1}+\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}\right) : \left(\frac{1}{1}+\frac{4}{x}\right) = \left(\frac{x^2+8x+16}{x^2}\right) : \left(\frac{x+4}{x}\right) = \left(\frac{(x+4)^2}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{x+4}\right) = \frac{x+4}{x}$

P: $x \neq 0$  $x \neq 4$

c) $\left(\frac{x}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{1-x}\right) : \left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{x-1}\right) = \left(\frac{x\cdot(1-x)+1-x-1}{1-x}\right) : \left(\frac{x\cdot(x-1)-x^2}{x-1}\right) = \left(\frac{x-x^2+1-x-1}{1-x}\right) : \left(\frac{x^2-x-x^2}{x-1}\right)$

$= \left(\frac{-x^2}{1-x}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{-x}\right) = -x$   P: $x \neq 1$, $x \neq 0$

d) $\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1}\right) : \left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{1}\right) = \left(\frac{1-(1-x)}{1-x}\right) : \left(\frac{x\cdot(x-1)-x^2-(x-1)}{x-1}\right) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right) : \left(\frac{x^2-x-x^2-x+1}{x-1}\right)$

$= \left(\frac{1+x}{1-x}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) = \frac{1+x}{1-2x}$   P: $x \neq 1$, $x = -1$

9/ a)

$$\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1-x}} = \frac{\frac{2-x}{x}}{\frac{1-x+1}{1-x}} = \frac{\cancel{2-x}^{1}}{x}\cdot\frac{1-x}{\cancel{2-x}_{1}} = \frac{1-x}{x}$$

P: $x \neq 1 \quad x \neq 0 \quad x \neq 2$

b)

$$\frac{\frac{1}{1}-\frac{2}{x}}{\frac{3}{1}-\frac{x+4}{2}} = \frac{\frac{x-2}{x}}{\frac{6-(x+4)}{2}} = \frac{(\cancel{x-2})^{1}}{x}\cdot\frac{2}{\underset{\cdot(-1)}{-x+2}} = -\frac{2}{x}$$

$x \neq 0 \quad x \neq -2$

c)

$$\frac{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}}{\frac{4x+8}{(x+2)^2}} = \frac{\frac{(x+2)-(x-2)}{(x+2)\cdot(x-2)}}{\frac{4\cdot(\cancel{x+2})^{1}}{(\cancel{x+2})^2_{\,x+2}}} = \frac{\frac{x+2-x+2}{(x+2)\cdot(x-2)}}{\frac{4}{x+2}} = \frac{\cancel{4}^{1}}{(\cancel{x+2})_{1}\cdot(x-2)}\cdot\frac{\cancel{x+2}^{1}}{\cancel{4}_{1}} = \frac{1}{x-2}$$

P: $x \neq 2, -2$

d)

$$\frac{\frac{2}{x^2+2x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}} = \frac{\frac{2}{(x+2)^2}}{\frac{x+1-x+1}{(x-1)/(x+1)}} = \frac{\cancel{2}^{1}}{(\cancel{x+1})^2_{\,x+1}}\cdot\frac{(\cancel{x+1})/(x-1)}{\cancel{2}_{1}} = \frac{x-1}{x+1}$$

$x \neq 1 \quad x \neq -1$

Příloha č. 4 - VYPRACOVANÝ TEST 2

Nejlépe vypracovaný test ze skupiny žáků, kteří matematický kroužek nenavštěvují, ale chtějí studovat na střední škole.

počet chyb: 7
chybějící příklady: 2

b kg jahod 56 Kč
c kg hrušek 72 Kč

6 kg jahod + 5 kg hrušek

$5 \cdot \frac{72}{c} + 6 \cdot \frac{56}{b}$ ✓

$(8x^2 - 2xy + 3y^2 - 5) + (4x^2 + 3xy - y^2 + 2) =$
$= 8x^2 - 2xy + 3y^2 - 5 + 4x^2 + 3xy - y^2 + 2) = \underline{\underline{12x^2 + xy + 2y^2 - 3}}$

$(8x^2 - 2xy + 3y^2 - 5) + (4x^2 + 3xy - y^2 + 2) =$
$= 8x^2 - 2xy + 3y^2 - 5 + 4x^2 + 3xy - y^2 + 2 = \underline{\underline{4x^2 - 5xy + 4y^2 - 7}}$

$(12x^2 + xy + 2y^2 - 3) - (4x^2 - 5xy + 4y^2 - 7) =$
$= 12x^2 + xy + 2y^2 - 3 - 4x^2 + 5xy - 4y^2 + 7 = \underline{\underline{8x^2 + 6xy - 2y^2 + 4}}$ ✓

musíme přičíst výraz $8x^2 + 6xy - 2y^2 + 4$.

4.
a) $a^2 - 2ab - 3ac + 6bc = a \cdot (a - 2b) - 3c \cdot (a - 2b) = \underline{\underline{(a-2b) \cdot (a-}}$

b) $(y^2x^2 - axy) + (bxy - ab) = xy \cdot (xy - a) + b \cdot (xy - a) = \underline{\underline{(xy - a) \cdot (b+}}$

c) $32x^3 - 18x = \underline{\underline{x \cdot (32x^2 - 18)}}$

d) $12a^2b^3c^5 - 42ab^4c^5 + 72a^3b^3c^5 = 6abc^{3 \cdot 5} \cdot \underline{\underline{(2a - 7b + 12a^2)}}$

5.

a) $\frac{6x^2 - 54}{3x^3 + 18x^2 + 27x} = \frac{6 \cdot (x^2 - 9)}{3x \cdot (x^2 + 6x + 9x)} = \frac{6 \cdot (x-3) \cdot \cancel{(x+3)}^{1}}{3x \cdot \cancel{(x+3)^2}_{(x+3)}} =$

$= \frac{2 \cdot (x-3)}{\ldots} = \frac{2x - 6}{x^2 + 3x}$

P: $x \neq 0$
$x \neq -3$

$$\frac{6ba-6a^2}{4a^3-4b^2a}=\frac{6a\cdot(b-a)}{4a\cdot(a^2-b^2)}=\frac{\overset{3}{\cancel{6a}}\,\overset{1}{\cancel{(b-a)}}}{\underset{2}{\cancel{4a}}\cdot(a+b)\cdot\underset{-1}{\cancel{(a-b)}}}=$$

$$=-\frac{3}{2a+2b}$$

P: $a\neq 0$
~~$b\neq 0$~~
$a\neq\pm b$

✓

c) $$\frac{3n^2-4mn^2}{4m^3n-3m^2n}=\frac{\cancel{n^2}^{\,n}\cdot(3-4m)}{\underset{1}{\cancel{n}}(4m^3-3m^2)}=\frac{n(3-4m)}{4m^3-3m^2}=\frac{3n-4mn}{4m^3-3m^2}$$

$m\neq\frac{3}{4}$

P: $m\neq 0$
$n\neq 0$

✓

d) $$\frac{c^2d^2-25d^2}{dc^2+10dc+25d}=\frac{d^2(c^2-25)}{d\cdot(c^2+10c+25)}=\frac{\cancel{d^2}^{\,d}\cdot\cancel{(c+5)}^{\,1}\cdot(c-5)}{\cancel{d}\cdot\underset{(c+5)}{\cancel{(c+5)^2}}}$$

$$=\frac{d\cdot(c-5)}{c+5}=\frac{dc-5d}{c+5}$$

P: $c\neq -5$
$d\neq 0$

✓

7.

a) $$\left(1+\frac{2}{y}+\frac{1}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{y}{y+1}\right)=\left(\frac{y^2+2y+1}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{y}{y+1}\right)=\frac{\overset{y+1}{\cancel{(y+1)^2}}}{\underset{y}{\cancel{y^2}}}\cdot\frac{\cancel{y}}{\underset{1}{\cancel{y+1}}}$$

$$=\frac{y+1}{y}$$

P: $y\neq 0$
$y\neq -1$

✓

b) $$\left(1-\frac{2}{y}+\frac{1}{y^2}\right)\cdot\frac{y^2}{y-1}=\left(\frac{\overset{\overset{y-1}{\cancel{(y-1)^2}}}{y^2-2y+1}}{\cancel{y^2}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{y^2}}{\cancel{y-1}}\right)=y-1$$

P: $y$ [illegible]
$y$ [illegible]

✓

c) $$\left(1+\frac{4}{y}+\frac{4}{y^2}\right)\cdot\frac{y^2}{y^2-4}=\left(\frac{\overset{\overset{y+2}{\cancel{(y+2)^2}}}{y^2+4y+4}}{\cancel{y^2}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{y^2}}{(y-2)\cdot\cancel{(y+2)}}\right)=\frac{y+2}{y-2}$$

P: $y\neq\pm 2$, $y\neq$ [illegible]

c) $\left(1-\frac{6}{y}+\frac{9}{y^2}\right)\cdot\frac{3y^2}{3-y}=\frac{y^2-6y+9}{y^2}\cdot\frac{3y^2}{3-y}=\frac{\cancel{(y-3)}^{2}}{\cancel{y^2}}\cdot\frac{3\cancel{y^2}}{\cancel{3-y}}$

$=\frac{3\cdot(y-3)}{-1}=-\frac{3y+9}{1}$ P: $y\neq 0$, $y\neq 3$ ✓

$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right):\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1-2x+x^2}{x^2}:\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{\cancel{(x-1)}^{2}}{\cancel{x^2}}\cdot\frac{\cancel{x^2}}{(x+1)\cdot(x-1)}$

$=\frac{x-1}{x+1}$ P: $x\neq 0$, $x\neq 1$, $x=-1$ ✓

$\left(1+\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}\right):\left(1+\frac{4}{x}\right)=\frac{x^2+8x+4}{x^2}:\frac{x+4x}{x}=$

$=\frac{(x+2)^2}{\cancel{x^2}_{x}}\cdot\frac{\cancel{x}}{x+4x}=\frac{(x+2)^2}{x^2+4x^2}=\frac{\cancel{(x+2)}^2}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{x+2}{x-2}$ P: $x\neq$ … $x\neq$ … $x\neq$ …

$\left(x+1-\frac{1}{1-x}\right):\left(x-\frac{x^2}{x-1}\right)=\frac{x\cdot(1-x)+1-x-1}{1-x}:\frac{x\cdot(x-1)-x}{x-1}$

$=\frac{x-x^2+1-x-1}{1-x}:\frac{x^2-x-x^2}{x-1}=\frac{-x^2}{1-x}:\frac{-x}{x-1}=\frac{\cancel{-x}^{2}}{1\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{-x}}=-x$

P: $x\neq 1$ ~~$x\neq -1$~~ $x\neq 0$ ✓

d) $\left(\frac{1}{1-x}-1\right):\left(x-\frac{x^2}{x-1}-1\right)=\frac{1-1\cdot(1-x)}{1-x}:\frac{x\cdot(x-1)-x^2-1\cdot(x}{x-1}$

$=\frac{1-1+x}{1-x}:\frac{x^2-x-x^2-x+1}{x-1}=\frac{x}{1-x}:\frac{-2x+1}{x-1}=\frac{x}{\cancel{1-x}}\cdot\frac{\cancel{x-1}}{-2x+1}$

$$\frac{\frac{2}{x}-1}{1+\frac{1}{1-x}} = \left(\frac{2}{x}-1\right) : \left(1+\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2-x}{x} : \frac{1-x+1}{1-x} =$$

$$\frac{\cancel{2-x}^{1}}{x} \cdot \frac{1-x}{\cancel{2-x}_{1}} = \frac{1-x}{x}$$

$P: x \neq 0$

$x \neq 1$

$x \neq 2$

✓

$$\frac{1-\frac{2}{x}}{3-\frac{x+4}{2}} = \left(1-\frac{2}{x}\right) : \left(3-\frac{x+4}{2}\right) = \left(\frac{x-2}{x}\right) : \frac{6-x+4}{2} =$$

$$\frac{x-2}{x} : \frac{2-x}{2} = \frac{\cancel{x-2}^{1}}{x} \cdot \frac{2}{\cancel{2-x}_{-1}} = -\frac{2}{x}$$

$P: x \neq 0$

$x \neq 2$

✓

$$\frac{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}}{\frac{4x+8}{(x+2)^2}} = \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right) : \left(\frac{4x+8}{(x+2)^2}\right) = \frac{(x+2)\cdot-1\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+2)}$$

$$: \frac{4\cdot(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)-x+2}{(x-2)\cdot(x+2)} \cdot \frac{4\cdot(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{(x+2)}\cdot(x-2)} \cdot \frac{\cancel{(x+2)}^{2}}{\cancel{4}_{1}\cdot\cancel{(x+2)}_{1}} = \dots$$

$P: x \neq 2 \quad x \neq -2$

✓

$$\frac{\frac{2}{x^2+2x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}} = \frac{2}{x^2+2x+1} : \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right) = \frac{2}{(x+1)^2} : \frac{(x+1)-1\cdot(x\dots}{(x-1)\cdot(x\dots}$$

$$\frac{2}{(x+1)^2} : \frac{x+1-x+1}{(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{(x+1)}^2_{\,x+1}} \cdot \frac{\cancel{(x+1)}\cdot(x-1)}{\cancel{2}\,1} = \frac{x+1}{x-1}$$

P: $x \neq 1$
$x \neq -1$

a) $$\frac{1}{x-3} - \frac{3}{2x-6} + \frac{5}{3x-9} = \frac{1}{x-3} - \frac{3}{2\cdot(x-3)} + \frac{5}{3\cdot(x-3)} =$$

$$= \frac{6-9\cdot(x-3)+10\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot 2\cdot 3} = \frac{6-9x+27+10x-30}{(x-3)\cdot 6} = \frac{x+3}{(x-3)\cdot 6}$$

P: $x \neq 3$

b) $$\frac{x}{x+2} - \frac{4x}{10+5x} + \frac{2x}{3x+6} = \frac{x}{x+2} - \frac{4x}{5\cdot(2+x)} + \frac{2x}{3\cdot(x+2)} =$$

$$= \frac{15x-12x\cdot(x+2)+10x\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot 5\cdot 3} = \frac{15x-12x^2-24x+10x^2+20}{(x+2)\cdot 15} =$$

$$= \frac{15x-(x^2-4)}{15\cdot(x+2)} = \frac{15x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}{15\cdot(x+2)} = \frac{x-(x-2)}{1} = x-x+2 =$$

P: $x \neq -2$

c) $$\frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{(x-1)\cdot(x+1)} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x-x\cdot(x+1)-(x+1)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-}$$

$$\frac{x-x^2-x-(x^2-x+x-x^2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{x-x^2-x-x^2+x-x-x^2}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{-3x^2}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)} = -\frac{3x}{(x+1)\cdot}$$