



Diplomová práce

Propojení algebry a geometrie na 2. stupni ZŠ

<i>Studijní program:</i>	N0114A300106 Učitelství pro střední školy a 2. stupeň základních škol
<i>Studijní obory:</i>	Matematika Tělesná výchova
<i>Autor práce:</i>	Bc. Andrea Placek
<i>Vedoucí práce:</i>	Mgr. Petra Pirklová, Ph.D. Katedra matematiky

Liberec 2023



Zadání diplomové práce

Propojení algebry a geometrie na 2. stupni ZŠ

<i>Jméno a příjmení:</i>	Bc. Andrea Placek
<i>Osobní číslo:</i>	P21000932
<i>Studijní program:</i>	N0114A300106 Učitelství pro střední školy a 2. stupeň základních škol
<i>Specializace:</i>	Matematika Tělesná výchova
<i>Zadávací katedra:</i>	Katedra matematiky a didaktiky matematiky
<i>Akademický rok:</i>	2021/2022

Zásady pro vypracování:

Cílem diplomové práce je zjistit pomocí dotazníkového šetření, zda pedagogové na 2. stupni ZŠ používají při výuce matematiky propojení algebry a geometrie, zda vnímají možnou vazbu mezi algebrou a geometrií, zda ji využívají při výuce a jakým způsobem. Dále pak pomocí pretestu zjistit, zda žáci k řešení úloh, jež lze řešit s využitím geometrie, skutečně geometrii využívají. Dalším cílem je vytvořit výukové aktivity (včetně metodiky) do hodin matematiky, které budou řešeny právě propojením algebry a geometrie. Po absolvování těchto aktivit žáci vypracují druhý test, jehož výsledky budou porovnány s testem prvním. Výše zmíněné výukové materiály pak budou poskytnuty pedagogům do výuky.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování práce:

Jazyk práce:

tištěná/elektronická

čeština

Seznam odborné literatury:

Nelsen R. B.: Důkazy beze slov I, Cvičení pro rozvoj vizuálního myšlení. Young Scientist, 1993. ISBN 978-80-88792-61-1.

Gila H., De Villiers M.: Proof and proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study, New York Springer, 2011. ISBN 978-940-0721-289.

Hejný M., Kuřina F.: Dítě, škola, matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. Portál, 2015. ISBN 978-80-262-0901-0.

Vondrová N., Rendl M.: Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků. Praha, Univerzita Karlova, Karolinum, 2015. ISBN 978-80-246-3234-6.

Jirotková D.: Cesty ke zkvalitnění výuky geometrie. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Praha 2010. ISBN 978-80-72-90-399-3.

Eisenmann P., Novotná J., Příbyl J.: Tvořivě při řešení úloh v matematice. In: Dva dny s didaktikou matematiky 2015. Praha: UK – PedF, 2015, pp. 9 – 22.

Pólya G.: Mathematical Discovery: On understanding, Learning and Teaching Problem Solving. Combined edition. New York, Chichester, Brisbane, Toronto: John Wiley & Sons, 1981. ISBN 978-0471693338.

Učebnice matematiky pro 2. stupeň ZŠ.

Vedoucí práce:

Mgr. Petra Pirklová, Ph.D.

Katedra matematiky

Datum zadání práce:

1. září 2022

Předpokládaný termín odevzdání: 26. dubna 2023

L.S.

prof. RNDr. Jan Pícek, CSc.
děkan

doc. RNDr. Jana Přihonská, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 9. září 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že svou diplomovou práci jsem vypracovala samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé diplomové práce a konzultantem.

Jsem si vědoma toho, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitou v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Současně čestně prohlašuji, že text elektronické podoby práce vložený do IS/STAG se shoduje s textem tištěné podoby práce.

Beru na vědomí, že má diplomová práce bude zveřejněna Technickou univerzitou v Liberci v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů.

Jsem si vědoma následků, které podle zákona o vysokých školách mohou vyplývat z porušení tohoto prohlášení.

Poděkování

Ráda bych poděkovala své vedoucí diplomové práce Mgr. Petře Pirklové, Ph.D. za odborné vedení a cenné rady, které mi při zpracování diplomové práce poskytovala.

Anotace

Diplomová práce se zabývá propojením algebry a geometrie, dvou klíčových oblastí matematiky, a zkoumá postoj pedagogů k této problematice. Práce obsahuje výukové materiály, které se zaměřují na tuto problematiku propojení, s metodickými poznámkami a dva testy, které byly předloženy žákům k řešení a snaží se odhalit, zda žáci při řešení využijí geometrii. Záměrem práce je inspirovat pedagogy na 2. stupni základních škol vyučující matematiku k integraci geometrických konceptů do hodin algebry za účelem dosažení hlubšího porozumění a chápání kontextu matematických témat u žáků. Pomocí propojení algebry a geometrie můžeme u žáků dosáhnout zlepšení kritického myšlení, které je v dnešním světě stále důležitější. Výsledky práce reflektují lepší uchopení abstraktních pojmů skrze jejich geometrické zpracování.

Klíčová slova: propojení algebry a geometrie, didaktika matematiky, abstrakce v matematice, vizualizace matematických problémů

Annotation

The master's thesis deals with the integration of algebra and geometry, two key areas of mathematics, and examines educators' attitudes towards this issue. The thesis includes educational materials focused on this integration topic, with methodological notes and two tests that were presented to students for solution, trying to discover whether students utilize geometry in their solutions. The intention of the work is to inspire educators at the upper primary school level teaching mathematics to integrate geometric concepts into algebra lessons in order to achieve a deeper understanding and comprehension of the context of mathematical topics in students. By linking algebra and geometry, we can improve critical thinking in students, which is increasingly important in today's world. The results of the work reflect a better grasp of abstract concepts through their geometric processing.

Key words: integration of algebra and geometry, mathematics education, abstraction in mathematics, visualization of mathematical problems

OBSAH

ÚVOD.....	8
1 SYNTÉZA POZNATKŮ	9
1.1 Algebra.....	9
1.2 Geometrie.....	10
1.3 Kritické oblasti matematiky na 2. stupni základní školy	12
1.3.1 Algebraizace a práce s algebraickými výrazy	12
1.3.2 Míra v geometrii	13
1.4 Význam propojení algebry a geometrie	14
2 CÍLE PRÁCE	17
3 METODIKA PRÁCE.....	18
3.1 Stanovení hypotéz.....	18
3.2 Charakteristika výzkumných metod	18
3.3 Charakteristika dotazovaného souboru	20
3.4 Charakteristika testovaného souboru	20
3.5 Organizace sběru dat a způsob zpracování dat	20
4 TESTOVÁNÍ ŽÁKŮ	22
4.1 Pre-test	23
4.2 Výukové materiály.....	29
4.3 Post-test.....	51
5 VÝSLEDKY A DISKUZE	58
5.1 Hodnocení dotazníkového šetření.....	58
5.2 Hodnocení testování žáků	66
5.3 Ověření hypotéz	78
ZÁVĚR.....	80
SEZNAM LITERATURY A POUŽITÉ ZDROJE	82

Seznam obrázků	83
Seznam grafů	85
Seznam příloh	85

ÚVOD

Výuka matematiky nejen na 2. stupni základních škol často představuje pro žáky úskalí a vyvolává negativní pocity, které mohou ovlivnit jejich celoživotní vztah k tomuto předmětu. Jeden z hlavních problémů může být abstraktní povaha algebry, která je pro mnohé žáky složitě uchopitelná. Na druhé straně geometrie, může pro žáky představovat něco na první pohled zřetelného a konkrétního a nabízí více vizuálních a praktických příkladů.

Myšlenkou mé práce je propojit obě tyto oblasti a žákům ukázat, že matematika není jen „počítání“ nebo „rýsování“, ale že obě oblasti spolu souvisí a jejich propojení může pomoci při pochopení složitějších matematických problémů. To, že žáci poznají souvislost mezi algebrou a geometrií, může u nich vést k většímu zájmu a motivaci v matematice. Může mít také pozitivní vliv na hlubší porozumění a pochopení matematiky a mohla by zlepšit logické myšlení i matematickou gramotnost žáků.

Tato práce se zaměřuje na šetření přístupu a postoje pedagogů k propojování těchto dvou matematických světů. Také je v ní uveden způsob, jak motivovat pedagogy k prolínání obou oblastí ve svých hodinách, a zároveň inspirovat ty, kteří hledají cestu, jak oživit běžnou výuku algebry a prolomit problém pochopení nekonkrétních pojmů a vzorců. V podstatě by spojení algebry a geometrie mohlo fungovat jako most mezi neuchopitelností vzorců a jejich názornou geometrickou interpretací.

1 SYNTÉZA POZNATKŮ

„V matematice se setkáváme, podobně jako v jiných oblastech bádání, se dvěma tendencemi: s tendencí k abstrakci a tendencí k názornosti. Tendence k abstrakci se snaží na základě logiky oboru disciplínu systematicky uspořádat. Názornost vychází z živého nazírání a z jejích obsahových vztahů.“ (Hilbert, 1932, Berlin)

1.1 Algebra

Algebra je matematická disciplína aplikující aritmetické operace na abstraktní symboly. Dle článku Algebra od Corryho (2023) prošla pomalým historickým vývojem, který vedl k vytvoření a ucelení tohoto samostatného oboru matematiky. Začátky algebry sahají až do Egypta a Babylonu, kde se Egypťané pokoušeli řešit lineární rovnice i systémy dvou rovnic včetně těch kvadratických. Přesto že, tyto civilizace ještě nepoužívaly symboly, jako proměnné, vyvíjely metody řešení specifických problémů, často však ve formě praktických situací.

Zařazení algebry do Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání 2023 (RVP ZV 2023) v České republice plyne z celkového pojetí vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. V českém vzdělávání není algebra samostatným tematickým okruhem, ale její prvky jsou zařazeny do tematického okruhu Číslo a proměnná, který je určen pro 2. stupeň základních škol. V rámci tohoto okruhu se žáci seznamují s konceptem proměnné, která zastupuje symbol čísla, a tím se žáci ocitají na cestě od konkrétních pojmů k abstraktním. Právě tento okruh představuje důležitý krok v rozvoji matematického myšlení žáků.

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru pro 2. stupeň v tematickém okruhu Číslo a proměnná podle RVP ZV (2023):

žák

- M-9-1-07 matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním,

- M-9-1-09 analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel,
- M-9-2-04 vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem,
- M-9-2-05 matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů,
- M-9-3-01 zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku,
- M-9-3-13 analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu,
- M-9-4-02 řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí.

1.2 Geometrie

Geometrie je jedna z nejstarších disciplín matematiky a je založena na vizuálních vjemech a intuici. Zásadně ji ovlivnil Euklidés, svým dílem nazvaným Základy. Bečvářová (2002) uvádí, že Euklidés vymezil ve své první knize 23 definic, 5 postulátů a 9 axiomy, a tím položil základy geometrie.

V dnešním světě je v rámci RVP ZV (2023) Geometrie v rovině a v prostoru jedním ze čtyř tematických okruhů, v němž se žáci učí určovat a znázorňovat geometrické útvary, geometricky modelují reálné situace, hledají podobnost a rozdílnost jednotlivých útvarů, porovnávají, odhadují a měří délku, velikost úhlů, obvod a obsah.

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru pro 2. stupeň v tematickém okruhu podle RVP ZV (2023):

žák

- M-9-3-01 zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku
- M-9-3-02 charakterizuje a třídí základní rovinné útvary
- M-9-3-03 určuje velikost úhlu měřením a výpočtem
- M-9-3-04 odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů

- M-9-3-05 využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh
- M-9-3-06 načrtne a sestrojí rovinné útvary
- M-9-3-07 užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků
- M-9-3-08 načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově a středově souměrný útvar
- M-9-3-09 určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti
- M-9-3-10 odhaduje a vypočítá objem a povrch těles
- M-9-3-11 načrtne a sestrojí síť základních těles
- M-9-3-12 načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině
- M-9-3-13 analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu

Bohužel, geometrie hraje dnes ve školské matematice spíše vedlejší roli. Touto otázkou se ve svém referátu Geometrie a geometrické vzdělávání (2005) zabývá Kuřina, který naráží na jeden důležitý bod a to na ten, že matematika je stále více chápána jako systém definic, vět, vzorců. Toto podle něj není vhodný způsob, jak by měla být školská matematika prezentována.

„Definice, věty a důkazy se lze naučit, aniž bychom jim rozuměli, tento soubor „vědomostí“ lze reprodukovat u zkoušek. Dobrá paměť rozvíjená tréninkem se zdá být postačující k „osvojení si“ minima matematiky. Takováto matematika však myšlení nerozvíjí, ale spíše utlumuje, protože myšlení komplikuje pohled na strukturu vytříbenou často mnohageneračním vývojem názorů na řešení určitého problému. Ne tedy studium části hotové matematiky, ale poznávání cest k matematice je základní příležitostí k rozvíjení myšlení.“ (Kuřina, 2005, str. 7)

Připomíná, že na zrodu geometrie se podílela řada dovedností, která k jejímu rozvíjení může vést i ve škole. Podle něho jsou to především: umění vidět, umění sestavovat a umění dokazovat. Upozorňuje, že při matematice často žákům uniká smysl pochopení struktury a vývoje matematických konceptů.

1.3 Kritické oblasti matematiky na 2. stupni základní školy

V této kapitole jsem se rozhodla reflektovat výsledky publikace od Vondrové (2015), která se rozsáhle zabývala právě tématem kritických míst matematiky na základních školách. Jako nejvíce obtížné očima českých učitelů na 2. stupni základních škol byly označeny úpravy algebraických výrazů, konstrukční úlohy a výpočtová geometrie (určování obsahu, objemu a povrchu). Na toto zjištění jsem navázala také v mé praktické části diplomové práce, ve které jsem se zabývala především výpočtu obsahu a úpravy algebraických výrazů. Podíváme-li se konkrétně na podkapitoly 1.3.2 Míra v geometrii a 1.3.1 Algebraizace a práce s algebraickými výrazy, zjistíme, že mezi hlavní obtíže žáků Vondrová řadí především:

Algebraizaci a práci s algebraickými výrazy

- žák má problémy popsat slovy s využitím algebraických pojmů reálnou situaci,
- žák nechápe roli koeficientů ve vzorci nebo v algebraickém výrazu,
- žák má problémy s geometrickou reprezentací algebraického výrazu.

Míru v geometrii

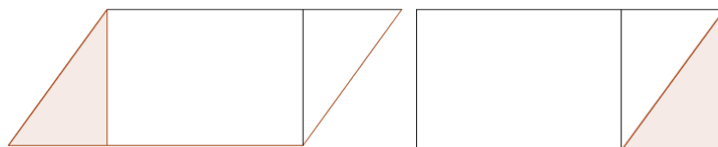
- žák má tendenci k okamžitému použití vzorce, jakmile se zjistí, že se jedná o obsah, povrch nebo objem,
- žák při zjištění, že byl použit nesprávný vzorec, hledá žák nápravu pouze početně, nevrací se k zadání a nesnaží se ho lépe pochopit,
- žák nechápe podstatu vzorce, má ho uchopen jen pamětí a nedovede s ním efektivně pracovat.

1.3.1 Algebraizace a práce s algebraickými výrazy

Právě oblast algebry byla v publikaci Vondrové výrazně popisována. Učitelé matematiky často uvádějí, že žáci mají potíže především s úpravami algebraických výrazů, hledáním ekvivalentních výrazů, substitucí proměnných s jejich operacemi. Na tuto oblast se nesmí ve výuce zapomenout, jelikož je důležitá pro rozvoj abstraktního myšlení a schopností práce s proměnnými. Proto přístup k nim je klíčový pro posílení matematického porozumění jednotlivých témat a aplikaci na obecné situace.

1.3.2 Míra v geometrii

Podstatou u tohoto tématu je podle Vondrové poznávací proces, kdy se žáci naučí pochopit míru geometrických útvarů nejen pomocí vzorců pro míru konkrétních útvarů, ale také tím, že rozdělení útvaru na části a jejich přemístění nemá na jejich míru vliv. Jako příklad uvádí zjišťování obsahu kosodélníku, kdy přenesením jeho části tvaru pravoúhlého trojúhelníku (viz Obr. 1) vznikne obdélník, jehož obsah lze jednoduše vypočítat pomocí už známého vzorce $S = a \cdot v_a$, kdy v_a je výška v kosodélníku a zároveň délka jedné strany obdélníku. V této souvislosti pak uvádí, že je vhodné s žáky používat čtverečkovaný papír, což žákům práci značně ulehčí.



Obr. 1: Změna kosodélníku na obdélník s využitím myšlenky komplementu

(Vondrová, 2015, str. 29)

Jako zásadní u výpočtů obsahů vyzdvihuje Vondrová potřebu pochopení multiplikativní struktury měření, což zahrnuje násobení příslušných naměřených délek. Je vhodné, aby žáci využívali počítání jednotek daného geometrického útvaru i vizuální modelování a přesunutí jednotlivých částí útvaru. Vhodné také je, aby žáci nepracovali pouze s celými jednotkami, ale také s jejich částmi a na základě toho si uvědomovali přesnost měření. V nejabstraktnější fázi dojdeme až k formulaci platných vzorců pro výpočet obsahu, které zobecňují proces měření. Je třeba, aby si žáci uvědomili i vztahy v daném vzorci a nepochopili vzorec pouze povrchně. Tím pak nevznikají souvislosti mezi jednotlivými poznatky, protože žáci se vzorec naučí mechanicky a pouze dosazují za proměnné bez hlubšího porozumění. V takovém případě dochází i k horší schopnosti si vzorec zapamatovat.

„Na jedné straně vzorce vystihují jádro poznatku, dají se zapamatovat a dobře se s nimi pracuje. Na druhou stranu mají vzorce tendenci stát v poznatkové struktuře osamoceně, žáci se je učí pamětně, bez pokusu jim porozumět, a vzorce se tak stávají pouhou náhradou skutečného poznání. Umožňují totiž žákovi počítat i to, čemu sám nerozumí.“
(Vondrová, 2015, str. 29)

1.4 Význam propojení algebry a geometrie

Článek od Petra Eisenmanna (2015) s názvem Tvořivě při řešení úloh ve školské matematice, prezentuje výsledky dvouleté experimentální výuky a zdůrazňuje význam tvořivých přístupů a různých metod řešení problémů. Experiment proběhl ve čtyřech třídách škol v České republice a zúčastnilo se ho celkem 70 žáků ve věku 12 až 18 let. Tento experiment přinesl u žáků, ale i u zúčastněných učitelů, pozoruhodné změny nejen v rozvoji schopností, ale také v postojích a názorech, jak matematické problémy řešit. Zaměřil se na šest heuristických strategií, a to na analogii, systematické experimentování, pokus-ověření-korekce, zavedení pomocného prvku, cestu zpět, konkretizaci a zobecnění.

Eisenmann (2015) na základě využití dané strategie, hovoří o trojích cestách řešení úloh: aritmetické, která je založena pouze na číselném výpočtu, algebraické, při které žák zavádí neznámé nebo grafické, která stojí na znázornění či obrázku. Tato rozmanitost může žákovi poskytnout hlubší porozumění dané problematice. V algebře a geometrii může být tato strategie vhodná k aplikaci při kombinaci používání proměnných a vizuální reprezentaci. Právě geometrické znázornění problému koresponduje s lepším pochopením algebraické struktury či vzorce. Zároveň geometrické modely mohou přispět k tvořivějšímu a intuitivnějšímu žakovskému řešení, což vede také k větší flexibilitě v myšlení. Geometrie může být vhodným nástrojem k ulehčení porozumění abstraktních pojmů žákům díky vizualizaci. Schopnost identifikovat vzorce a vztahy mezi proměnnými je klíčová pro jejich lepší zapamatování a další využití.

Hejný ve své publikaci Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky (2004) hovoří o konceptu generických a abstraktních modelů v procesu poznávání. Generický model vysvětluje jako univerzální verzi nějaké myšlenky, která nám pomáhá pochopit a spojit souvislosti. Abstraktní poznání na rozdíl od generického modelu nemá stejnou úroveň abstrakce, ale tuto úroveň přesahuje. Opírá se o symbolický jazyk. Zároveň Hejný ilustruje, jak se mohou konkrétní předmětové modely stát generickými modely pro pochopení abstraktních pojmů. Na příkladech popisuje, jak se může myšlení žáků vyvinout od konkrétních poznatků k abstraktním a zdůrazňuje význam tohoto vývoje.

„Podstata rozdílu mezi generickým modelem a abstraktním poznáním spočívá v tom, že generický model má stejnou úroveň jako abstrakce, jako mají modely separované, zatímco abstraktní poznání takové ukotvení nemá a je opřeno o jazyk a symboliku. Například prsty jsou generický model pro práci s malými počty. Prsty, stejně jako autíčka, jablka nebo židle mají předmětný charakter. Jestliže ale dítě rozumí slovu „tři“ nebo znaku „3“ bez dalšího poukazu, pak jeho znalost tohoto objektu je i abstraktní.“ (Hejný, 2004, str. 35)

Na tuto myšlenku částečně navazuje i článek *The benefits of an Interdisciplinary Approach to Mathematics Education on Issues Around Computation in School* (2022) autorů Martingnona a Rechtsteinerja vyzdvihující interdisciplinární přístup v matematice. Zásadním prvkem jejich přístupu je „Zahlenblick“, což označuje schopnost rozeznávat charakter problémů, vzorce a numerické vztahy. Autoři popisují podobně jako Hejný (2004), jak je důležitý raný vývoj chápání čísel, včetně reprezentace čísel pomocí prstů. Právě schopnost manipulovat s prsty symbolizující čísla může předcházet schopnosti uchopení abstraktních pojmů. Schopnost „Zahlenblicku“ by mohla napomoci pochopení algebraických konceptů pomocí geometrických reprezentací. Na základě toho můžeme také uvažovat o propojení algebry a geometrie za účelem získání efektivního nástroje k rozvoji schopnosti aplikace těchto principů do různých situací v moderním světě u žáků.

Integrovat algebru s geometrií můžeme například pomocí geometrických důkazů různých algebraických principů. Publikace *Proof and Proving in Mathematician Education* od Gily Hanny a Michaela de Villierse (2012) se zaměřuje na podrobný pohled na důkazy ve školní výuce. Autoři diskutují nad různými formami důkazů a navrhuje různé stupně důkazů ve školní matematice. Pro děti není pojem důkaz původně založen na deduktivním myšlení. Děti se zapojují do světa pomocí senzorického vnímání a interakcí s objekty. Právě to vede k rozvoji základních matematických operací, jako třídění, počítání, kombinování či řazení. Tato pravidla se namísto náhodných a přirozených jevů stávají požadovanými, které je třeba při daném zadání dodržovat, a tak se u dětí rozvíjí deduktivní myšlení. Pro koncept propojení algebry a geometrie je důležité si uvědomit, že obě oblasti nabízejí jedinečné, ale doplňující se perspektivy a pohledy na dané matematické problémy.

Autoři se také zabývají otázkami využití technologií v procesu matematického důkazu a jeho vlivu na kognitivní procesy při učení matematiky. Výrazným prvkem je zde využití

digitálních geometrických systémů. Autoři uvádějí dnes již málo používanou Cabri-geometrii, ale dnes by bylo možné využít např. Geogebra, k překonání překážky mezi empirickými matematickými úlohami a teoretickou stránkou. Možností, jak využít zmíněné technologie k propojení algebry a geometrie je například použití softwarů při výkladu algebraických funkcí, což umožní hlubší porozumění vlastností grafů jednotlivých funkcí.

Pokud vyučující zavádí důkazy do výuky, je také třeba vysvětlit žákům, z jakého důvodu tak činí a jaké jsou jeho přínosy. Žáci často nerozumí, proč musí dokazovat něco, co mají napsané před sebou v učebnici jako hotovou věc. Proč by měli přicházet na něco, co už před nimi někdo objevil. Hanna a Villiers (2012) charakterizují prvotní důkazy jako mosty pro žáky při přechodu od konkrétních k obecným důkazům. Vizualizace a geometrické důkazy, které jsou založeny na prezentaci matematických objektů a na operacích s nimi, jsou označeny v tomto procesu za efektivní. Autoři je dokonce označují za zásadní součást matematického myšlení a učení. Důkazy totiž nejsou postaveny pouze na základě ověřování jejich pravdivosti, ale také na objevování nových souvislostí a vztahů.

Pro integraci algebry a geometrie je velmi vhodné využít různých pedagogických strategií, jako je projektové vyučování, praktické činnosti, skupinová práce, práce s matematickými softwary a vizualizacemi. Všechno zmíněné pomáhá žákům lépe pochopit vztahy, rozvíjí kritické myšlení a také zlepšují matematickou intuici.

George Polya, autor publikace *Mathematical Discovery On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving* (1981), se shoduje s Hannou a Villiersem (2012) na pozitivním vlivu použití vizualizací a geometrických modelů na porozumění abstraktním algebraickým konceptům. Pokud se studenti aktivně zapojí do experimentování s geometrickými tvary a algebraickými výrazy, dojde podle Polya k hlubšímu porozumění spojitosti mezi algebrou a geometrií a bude to mít pozitivní dopad na schopnosti a znalosti v jednotlivých oblastech. Polya zdůrazňuje nutnost diskuze a reflexe nad řešenými matematickými problémy, právě to dokáže zdokonalit žákovo kritické myšlení. Studenty tak povzbuzuje k aplikaci získaných dovedností a poznatků na nové problémy, což podle něj pomáhá při zobecňování a má pozitivní vliv na rozvoj schopnosti přenášení znalostí do různých, obecných situací.

2 CÍLE PRÁCE

Cíle mé diplomové práce je zjistit pomocí dotazníkového šetření, jak pedagogové na 2. stupni základních škol vnímají potenciální vazbu mezi algebrou a geometrií a zda a jakým způsobem integrují toto propojení do výuky.

Dále si práce klade za cíl ověřit prostřednictvím pre-testu a post-testu, oddělených dvěma vyučovacími hodinami s výukovými aktivitami zaměřenými na propojení algebry a geometrie, zda se tento výukový přístup odrazí na schopnosti žáků aplikovat geometrii při řešení algebraických úloh.

Posledním cílem je vytvořit výukové aktivity zaměřené na propojení algebry a geometrie s řešením a s metodickými poznámkami pro pedagogiky.

3 METODIKA PRÁCE

Tato kapitola představuje metodologický rámec mé diplomové práce včetně popisu postupů, výzkumných metod a činitelů, které byly klíčové pro získávání a analýzu dat.

3.1 Stanovení hypotéz

K sepsání diplomové práce jsem byla vedena stanovením následujících hypotéz:

Hypotéza 1:

Většina pedagogů na 2. stupni základních škol nevyužívá nebo využívá pouze výjimečně vazby algebry a geometrie. Do své výuky neintegrují aktivity zaměřené na propojení algebry a geometrie a obě oblasti učí především izolovaně.

Hypotéza 2:

Žáci nejsou zvyklí využívat geometrii při algebraických úlohách a vazbu mezi těmito dvěma oblastmi nevnímají.

Hypotéza 3:

Vyučovací aktivity zaměřené na propojení algebry a geometrie zlepšují schopnost žáků aplikovat geometrii při řešení algebraických úloh, mají pozitivní dopad na vnímání vazby mezi proměnnou jako abstraktní složkou a číslem jako konkrétní hodnotou a jsou účinným nástrojem pro zefektivnění výuky obou oblastí.

3.2 Charakteristika výzkumných metod

K získání potřebných informací jsem využila dvou výzkumných metod – dotazníkového šetření a testování. Každá z těchto metod měla rozdílnou, ale důležitou roli ve sběru a analýze dat a každá se soustředila na zcela jiný soubor respondentů.

Dotazníkové šetření pro pedagogy

Pro sběr odpovědí jsem využila Google formulář a odkaz na tento dotazník jsem rozeslala pedagogům matematiky 2. stupně základních škol v České republice. Tuto metodu jsem zvolila z důvodu dobré dostupnosti pro respondenty z různých částí země a možnosti vyplnění online. Hlavním cílem dotazníku bylo zjistit, zda a jak pedagogové

integrují algebru a geometrii, a jestli vůbec vnímají možnou vazbu mezi těmito dvěma oblastmi matematiky.

Dotazník obsahoval převážně uzavřené otázky pro kvantitativní výzkum, ale i několik otevřených otázek pro lepší pochopení názorů pedagogů a pro inspiraci k tvorbě výukových aktivit. Zároveň byl rozdělen do tří sekcí, z důvodu lepší korespondence konkrétních otázek s respondenty, pro které jsou určeny. Sekce 1 byla pro všechny respondenty společná a na jejím základě byl každý z respondentů přesměrován na sekci 2 nebo sekci 3, které obsahovaly doplňující otázky na detaily problematiky propojení algebry a geometrie. Rozvržení otázek v jednotlivých sekcích vypadalo následovně:

- sekce 1: dvě povinné uzavřené otázky,
- sekce 2 (určená pro pedagogy využívající geometrii v hodinách algebry): pět povinných uzavřených otázek a dvě nepovinné otevřené otázky,
- sekce 3 (určená pro pedagogy nevyužívající geometrii v hodinách algebry): čtyři povinné uzavřené otázky.

Dotazník je přiložen jako příloha č. 1.

Testování žáků

Testování jsem zvolila jako metodu pro posouzení úrovně schopností žáků 9. ročníků základní školy v oblasti propojování algebry a geometrie. Testovány byly dvě třídy žáků 9. ročníků 9.A a 9.B. Testování zahrnovalo dva testy, které jsem sama navrhla: úvodní pre-test a následný post-test.

Pre-test byl realizován v obou třídách v rámci jedné hodiny matematiky a žáci ho řešili samostatně bez pomoci pedagoga. V následujících dnech proběhly v jedné třídě (9.B) dvě hodiny výuky, ve kterých se pedagog věnoval jednotlivým tématům dle metodických pokynů s využitím geometrie. Ve třídě 9.A byla výuka vedena tradičním způsobem bez zapojení geometrie. Následující čtvrtou hodinu matematiky žáci obou tříd opět samostatně řešili post-test, který byl obsahem i svou strukturou podobný pre-testu. Tento následný test měl ověřit či vyvrátit stanovenou hypotézu 3.

Správné odpovědi k pre-testu jsou přiloženy jako příloha č. 2 a odpovědi k post-testu jako příloha č. 3. Tyto výsledky lze žákům promítnout v rámci kontroly odpovědí.

3.3 Charakteristika dotazovaného souboru

Dotazovaný soubor zahrnoval pedagogy, kteří vyučují matematiku na 2. stupni základních škol. Pro dosažení rozmanitých pedagogických názorů byl dotazník rozeslán online mezi pedagogy po České republice. Snaha byla o dosažení odpovědí od širokého spektra pedagogů s různými názory i zkušenostmi.

3.4 Charakteristika testovaného souboru

Testovaný soubor zahrnoval dvě třídy žáků 9. ročníků na maloměstské škole. Třídy dle charakteristiky jejich vyučující se téměř neliší, prospěchově jsou v matematice lehce podprůměrné. Testované byly obě třídy a to dokonce ve stejné dny, obě třídy měly stejné zadání pre-testu i post-testu. Žáci 9.B navíc absolvovali před druhým testem dvě vyučovací hodiny zaměřené na propojení algebry a geometrie.

3.5 Organizace sběru dat a způsob zpracování dat

Výzkumnou část mé diplomové práce zahájilo dotazníkové šetření určené pro pedagogy. Pedagogové vyplňovali dotazník online prostřednictvím Google formuláře. Získané odpovědi byly zpracovány pomocí grafů opět v Google formuláři. Celkem dotazník vyplnilo 79 respondentů.

Na dotazníkové šetření navázala tvorba výukových aktivit a testů pro žáky. Při vytváření úloh do testů i do výukových aktivit jsem vycházela z odpovědí pedagogů v dotazníkovém šetření, přičemž jsem se soustředila na matematická témata, která byla v odpovědích zcela opomenuta nebo se vyskytla pouze zřídka. Po vytvoření testů a výukových aktivit jsem oslovila paní učitelku na jedné maloměstské škole, kde jsme se domluvily na realizaci testování. Tato paní učitelka v letošním roce učí třídy 9.A i 9.B. Dohodly jsme se, že ve třídě 9.B proběhnou navíc mnou vytvořené výukové aktivity, které jsem ji i s metodickými poznámkami a testy poskytla k realizaci. Třída 9.A pokračovala ve standardním procvičování bez specifického zaměření na propojení algebry a geometrie.

Žáci dostali k dispozici vytištěný pre-test a post-test, zároveň mohli používat prázdný papír na poznámky, někteří žáci využili k poznámkám okraje nebo druhou stranu pracovního listu. Testování proběhlo v rámci jednoho týdne. Vyplněné anonymní pre-testy

rozdělené dle tříd jsem osobně vyzvedla a dále zpracovala. Paní učitelka následující dvě hodiny s žáky třídy 9.B prošla výukové aktivity, při kterých se řídila metodickými poznámkami k těmto úlohám. Následně byl v obou třídách napsán druhý test a anonymní výsledky rozdělené dle tříd byly opět mnou osobně vyzvednuty a dále zpracovány. Porovnávala jsem řešení jednotlivých testů i v rámci jednotlivých tříd. Vybrala jsem nejčastější a zajímavá řešení úloh, které dále ve výsledcích prezentuji.

4 TESTOVÁNÍ ŽÁKŮ

Do testování byly zapojeny třídy 9.A a 9.B z maloměstské školy. Ve třídě 9.A je celkem 24 žáků a ve třídě 9.B celkem 22 žáků.

V testech i ve výukových aktivitách jsem se chtěla zabývat především algebraickými tématy, která se standardně na základních školách geometricky nezpracovávají. Mezi nejčastěji zpracovávaná témata z mé zkušenosti i podle výsledků dotazníkového šetření patří odvození Pythagorovy věty (geometrický důkaz) a soustava lineárních rovnic (pomocí průsečíků dvou přímek v grafu). Obě dvě témata geometricky zpracovaná jsou běžně součástí mnoha učebnic určených pro 2. stupeň základních škol, jako například učebnice Matematika pro 8. ročník ZŠ, 1. díl (vydavatelství Prometheus) nebo v učebnici Hravá matematika 8 – Algebra (vydavatelství Taktik).

V mé diplomové práci jsem se však zaměřila na následující dvě témata: úpravy algebraických výrazů s použitím vzorců a výpočet obsahů vybraných geometrických obrazců. Obě témata jsou zaměřena na práci s proměnnými a se vzorci. Tato témata jsou běžně probrána na většině základních škol, nicméně často může chybět objasnění prostřednictvím hlubší vizualizace.

Podle mého názoru je klíčovým problémem nejen v matematice tendence žáků učit se mechanicky a bez souvislostí a porozumění. Většina žáků je schopna vypočítat pomocí naučeného nebo poskytnutého vzorce cokoliv, pouze prostřednictvím mechanické výměny „písmenek“ za čísla. Důležité je uvědomění, že každý vzorec je více než jen hlouček náhodně poskládaných symbolů. Každý vzorec má smysl, a pokud dokážeme žáky přimět k tomu, aby daný smysl našli a pochopili princip, můžeme některým žákům odkrýt skutečné matematické myšlení a také schopnost umět matematiku aplikovat i v jiných, například reálných situacích.

V následující kapitole je uvedeno zadání pre-testu, které bylo předloženo žákům obou tříd k řešení. Zadání úloh 2 a 3 jsou na čtvercové síti kvůli rychlejšímu a snadnějšímu řešení.

4.1 Pre-test

PRE-TEST

1. Uprav:

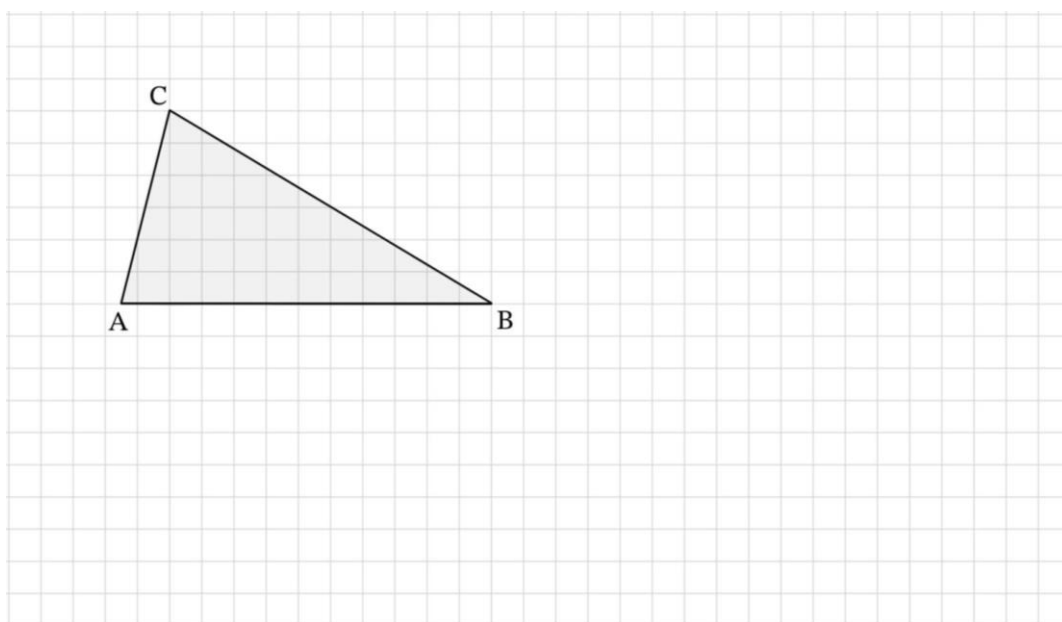
a) $(a + 4)^2 =$

b) $(3 - b)^2 =$

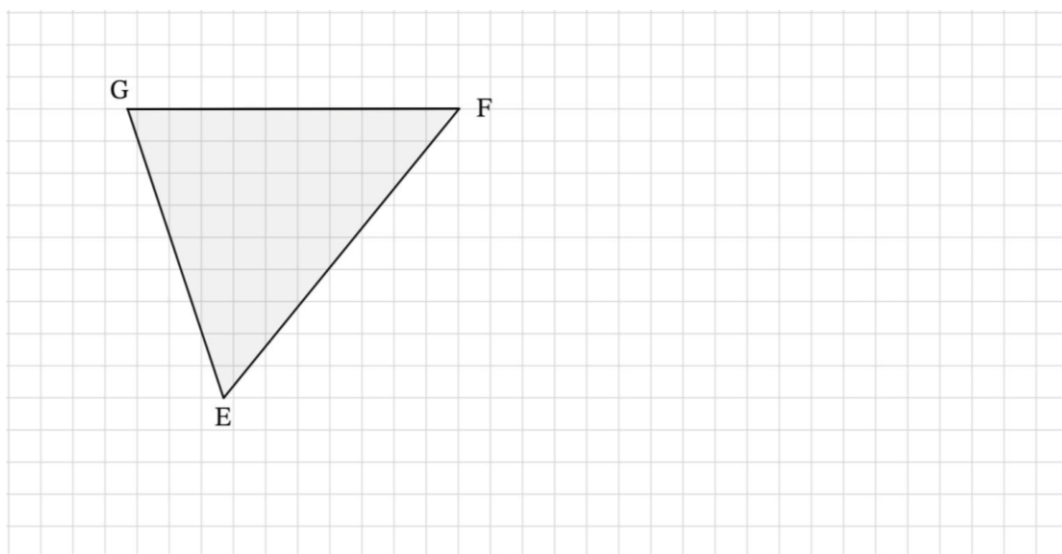
c) $x^2 - 4 =$

2. Načrtni trojúhelník, který:

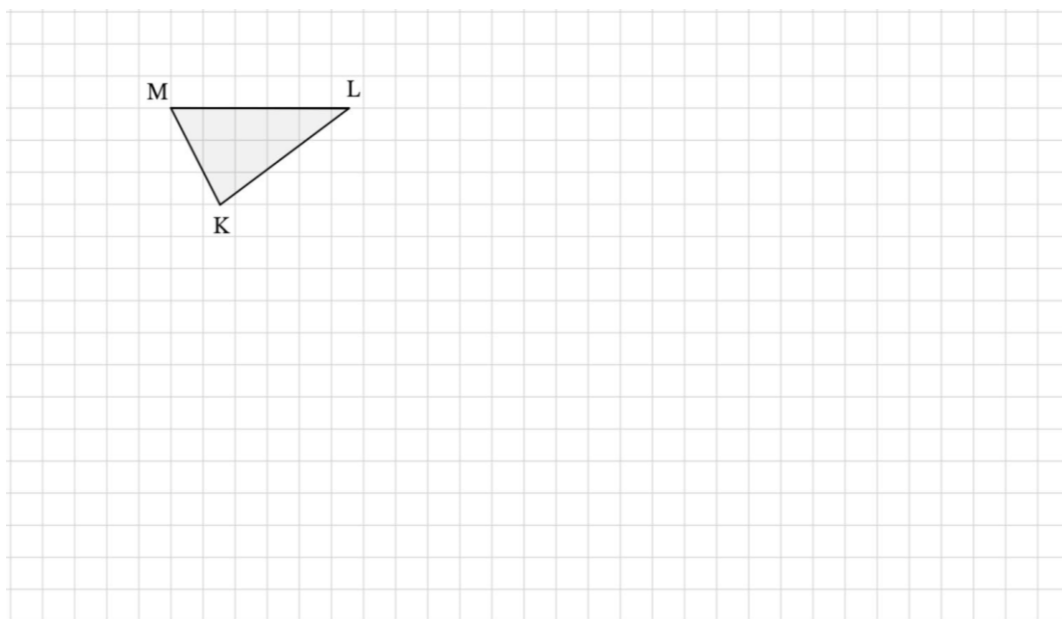
a) má stejný obsah jako trojúhelník ABC,



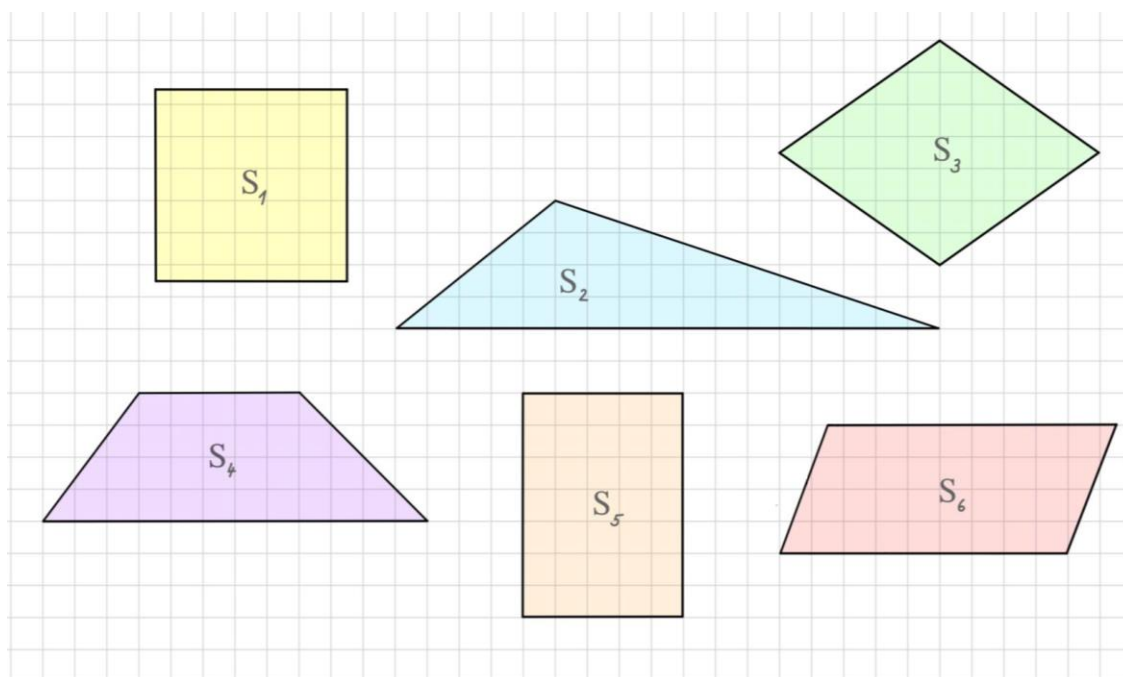
b) je pravoúhlý a má stejný obsah jako trojúhelník EFG,



c) má třikrát větší obsah než trojúhelník KLM



3. Přiřaď k sobě geometrické obrazce se stejným obsahem:
(1 čtvereček ve čtvercové síti znázorňuje 1 cm²):



PRE-TEST – podrobné řešení

1. Uprav:

a) $(a + 4)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 4 + 4^2 = \underline{a^2 + 8a + 16}$

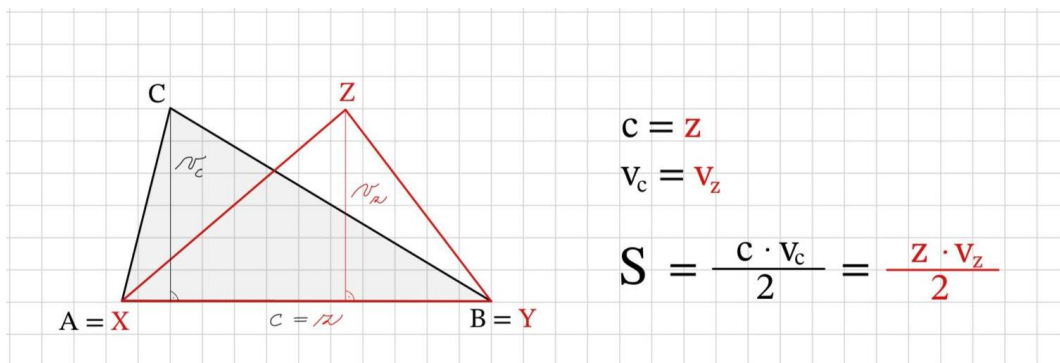
b) $(3 - b)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot b + b^2 = \underline{9 + 6b + b^2}$

c) $x^2 - 4 = \underline{(x - 2) \cdot (x + 2)}$

2. Načrtni trojúhelník, který:

- a) má stejný obsah jako trojúhelník ABC,

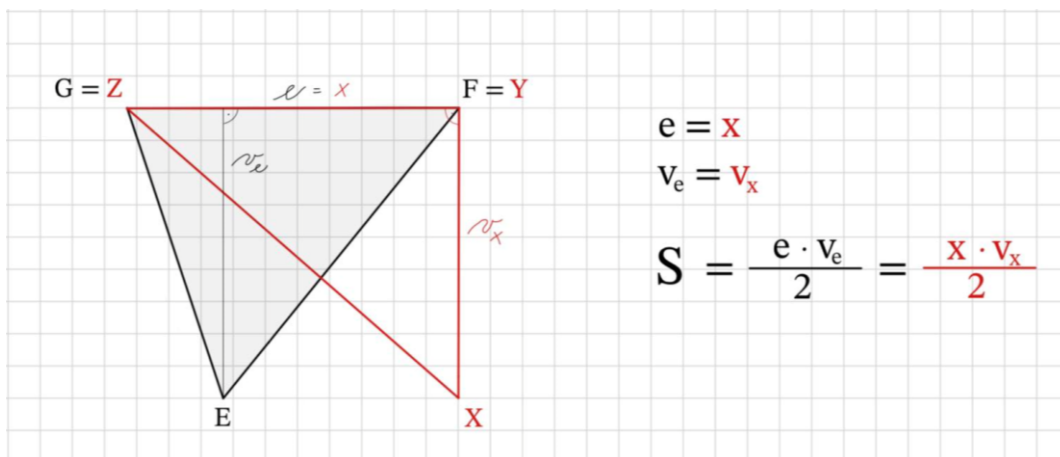
Obsah trojúhelníku se vypočítá jako polovina součinu délky strany tohoto trojúhelníku a délky výšky na tuto stranu. Pokud chceme načrtnout trojúhelník se stejným obsahem jako trojúhelník ABC musíme zachovat velikost jedné strany trojúhelníku a velikost výšky trojúhelníku k této straně. Řešením tedy může být libovolný trojúhelník, ve kterém bude zachována délka jedné vybrané strany např. AB, a třetí vrchol trojúhelníku, který na vybrané straně neleží, můžeme libovolně posouvat po rovnoběžce s touto stranou, která je vedena bodem C, čímž se zachovává také délka výšky v trojúhelníku. Tímto způsobem se zachová obsah trojúhelníku. (viz Obr. 2)



Obr. 2: Ukázka správného řešení úlohy 2 a)

- b) je pravoúhlý a má stejný obsah jako trojúhelník EFG,

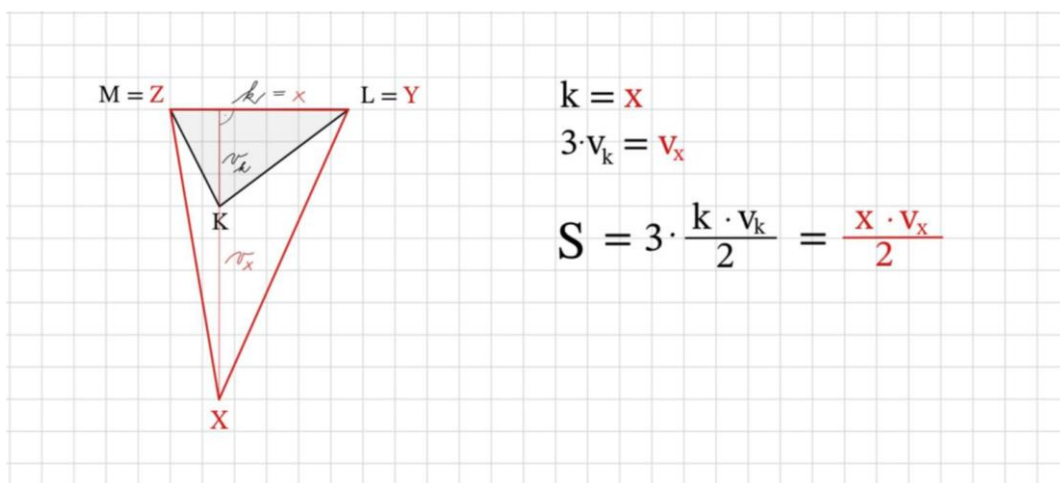
Pokud jsou v zadání nějaké další specifické požadavky, musíme tyto požadavky zohlednit. Například pokud má být nový trojúhelník pravoúhlý, musíme umístit vrchol trojúhelníku tak, abychom docílili jednoho vnitřního pravého úhlu trojúhelníku. (viz Obr. 3)



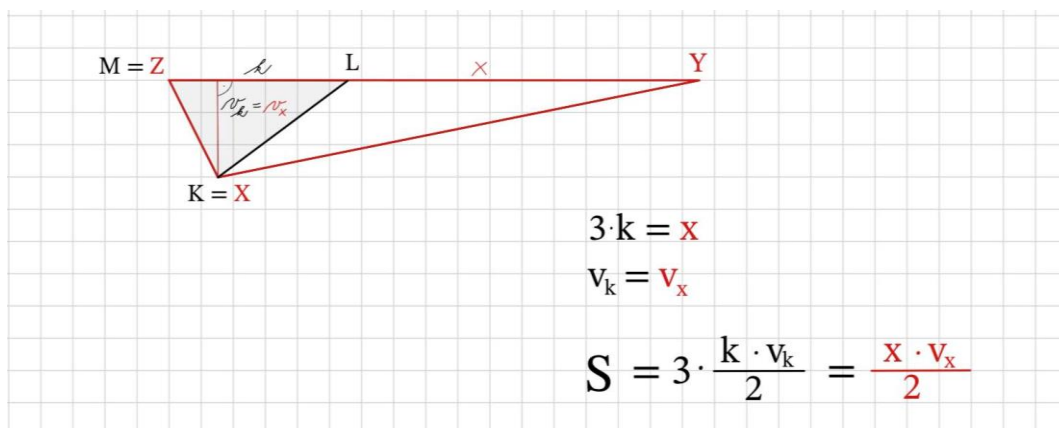
Obr. 3: Ukázka správného řešení úlohy 2 b)

c) má třikrát větší obsah než trojúhelník KLM

Trojúhelníku s násobně větším nebo menším obsahem docílíme pomocí změny (zvětšení nebo zmenšení) velikosti strany trojúhelníku a ponecháním zbylých dvou vrcholů trojúhelníku nebo změny velikosti vybrané výšky trojúhelníku a ponecháním ostatních dvou vrcholů trojúhelníku. Pokud chceme například načrtnout trojúhelník s třikrát větším obsahem, můžeme využít řešení pomocí trojnásobného zvětšení jeho strany nebo jeho výšky. (viz Obr. 4 a 5)



Obr. 4: Ukázka správného řešení úlohy 2 c) pomocí zvětšení výšky ke straně trojúhelníku

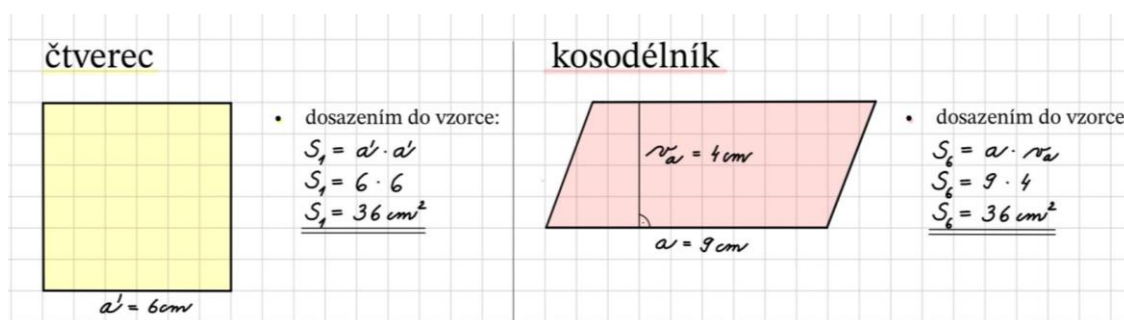


Obr. 5: Ukázka správného řešení úlohy 2 c) pomocí zvětšení strany trojúhelníku

3. Přiřaď k sobě geometrické obrazce se stejným obsahem:

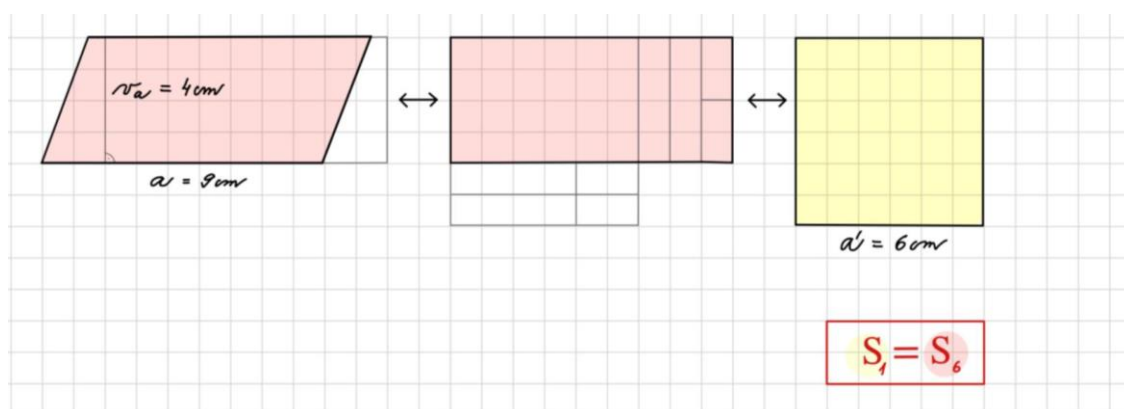
1. dvojice:

→ výpočtem:



Obr. 6: Ukázka správného řešení úlohy 3 v pre-testu pomocí výpočtu u 1. dvojice obrazců

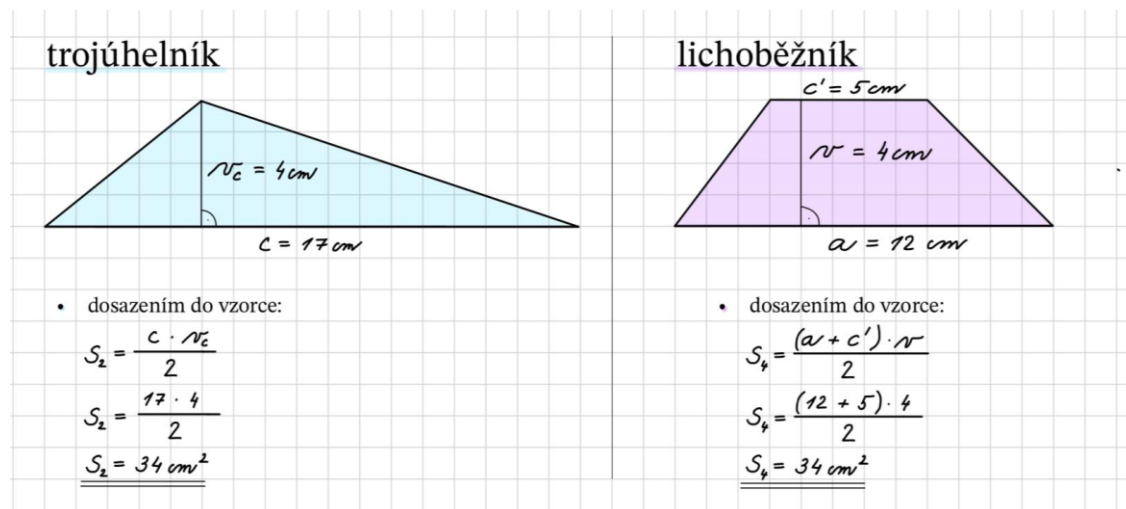
→ pomocí úpravy plochy:



Obr. 7: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí úpravy plochy u 1. dvojice obrazců

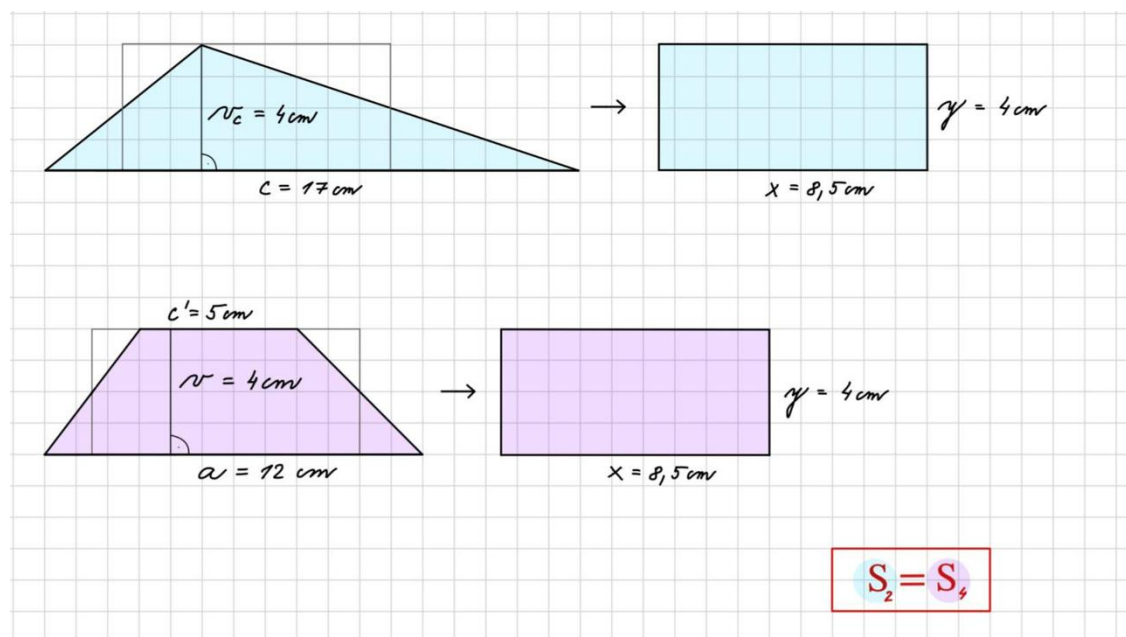
2. dvojice:

→ výpočtem:



Obr. 8: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí výpočtu u 2. dvojice obrazců

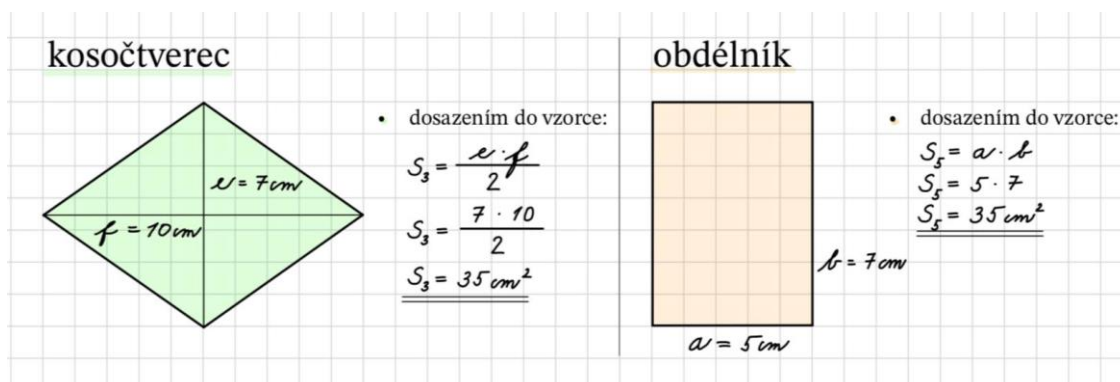
→ pomocí úpravy plochy:



Obr. 9: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí úpravy plochy u 2. dvojice obrazců

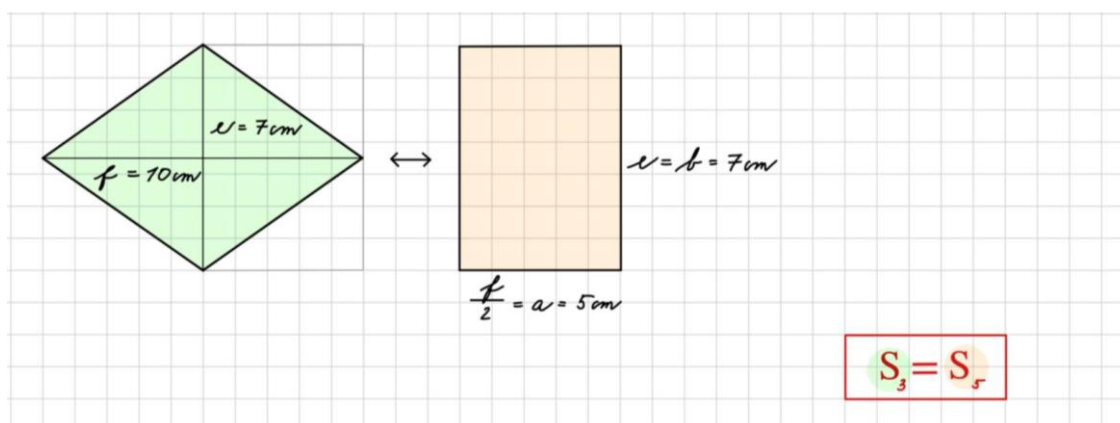
3. dvojice:

→ výpočtem:



Obr. 10: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí výpočtu u 3. dvojice obrazců

→ pomocí úpravy plochy:



Obr. 11: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí úpravy plochy u 3. dvojice obrazců

4.2 Výukové materiály

V této kapitole jsou uvedeny výukové materiály, které byly probírány ve dvou hodinách matematiky s třídou 9.B po napsaném pre-testu tak, aby žáci pochopili, že geometrii můžou využívat i při řešení algebraických úloh. Žáci si tímto způsobem mohli osvojit, jak jim geometrické koncepty mohou poskytnout nový pohled na algebraické problémy.

VYUČOVACÍ HODINA 1: Úpravy s algebraickými vzorci

Výukový cíl:

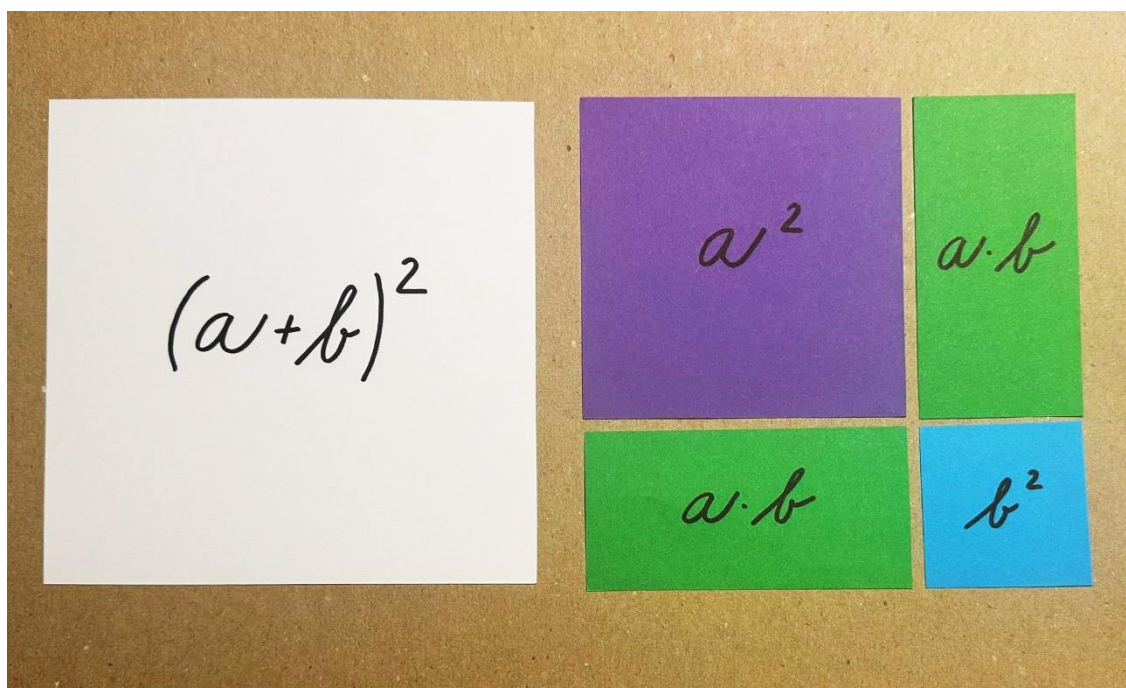
Žáci budou schopni samostatně vysvětlit a upravit algebraické vzorce $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$. Budou schopni aplikovat tyto vzorce na konkrétní příklady a využívat geometrické vizualizace pro lepší zapamatování a hlubší pochopení těchto vzorců..

Klíčové kompetence:

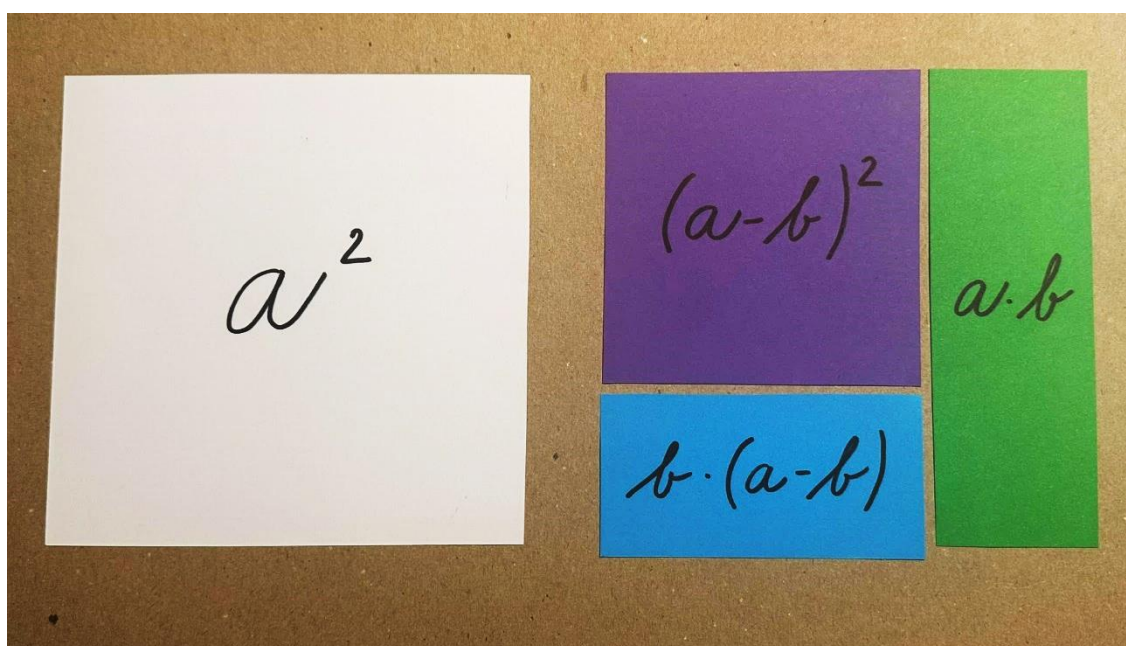
- *kompetence kučení: žáci se naučí, jak efektivně propojit algebraické vzorce s geometrií, což pomůže jejich schopnosti učit se a nacházet souvislosti mezi jednotlivými znalostmi*
- *kompetence k řešení problémů: žáci zlepšují schopnosti analyzovat problémy, učí se aplikovat teoretické znalosti v praktických situacích a nacházet tvůrčí řešení*
- *kompetence komunikativní: skrze diskuzi se spolužáky i s vyučujícím se zlepšují v argumentaci a užití matematické terminologie při popisování matematických konceptů*
- *kompetence sociální a personální: žáci rozvíjejí schopnost spolupracovat ve skupině, učí se vzájemné toleranci*
- *kompetence pracovní: při manipulaci s vystřiženými částmi geometrických obrazců a při jejich sestavování si procvičí přesnost a systematický přístup k práci*
- *rozvoj kritického myšlení: podpora kritického myšlení skrze analýzu matematických konceptů*

Motivace

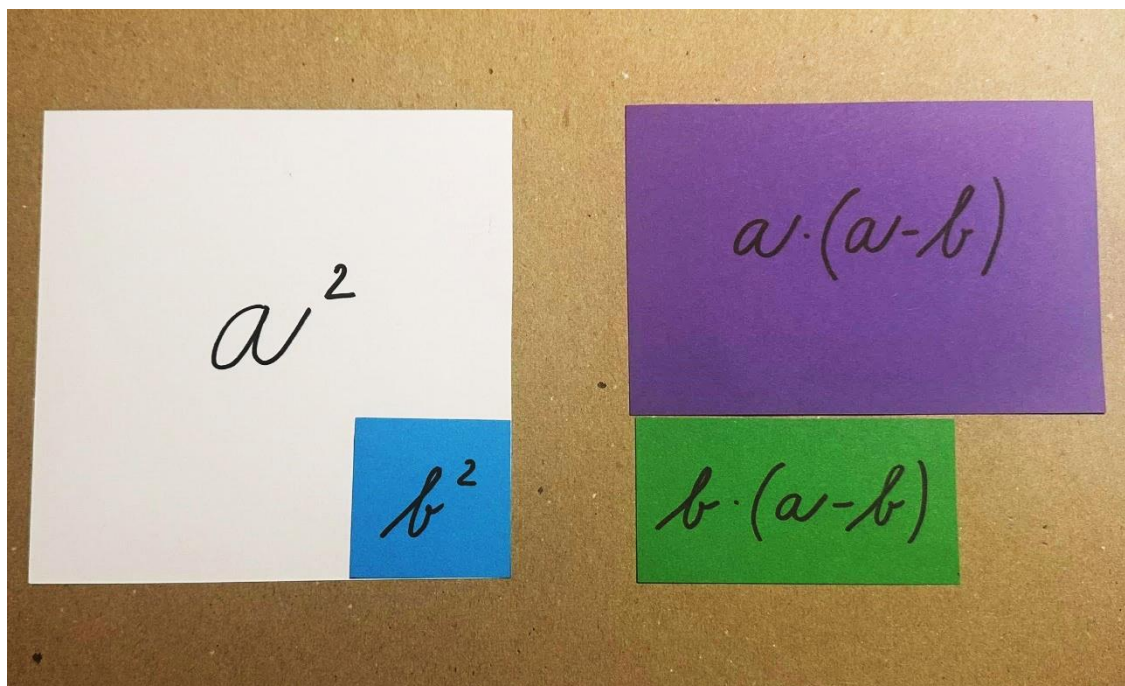
(10 min): Po třídě vytvoříme 6 stanovišť (vždy na dvou stanovištích budou stejné důkazy, žákům stačí navštívit pouze jedno z těchto dvou stanovišť, ale z důvodu pohybu po třídě i času je vhodnější využít více stanovišť). Na každé stanoviště vytiskneme barevný geometrický důkaz algebraických vzorců (viz Obr. 15, 20 a 25). Tyto důkazy můžeme obohatit o vystřižené části jednotlivých obrazců, aby si žáci mohli s jednotlivými částmi pohybovat a skládat dle důkazu (viz Obr. 12, 13 a 14). Následně se žáci rozdělí do 6 týmů a začnou obcházet jednotlivá stanoviště. Jejich úkolem je seznámit se se třemi vzorci pomocí geometrického důkazu.



Obr.:12: Pomůcka pro skládání geometrického důkazu vzorce $(a + b)^2$



Obr.:13: Pomůcka pro skládání geometrického důkazu vzorce $(a - b)^2$



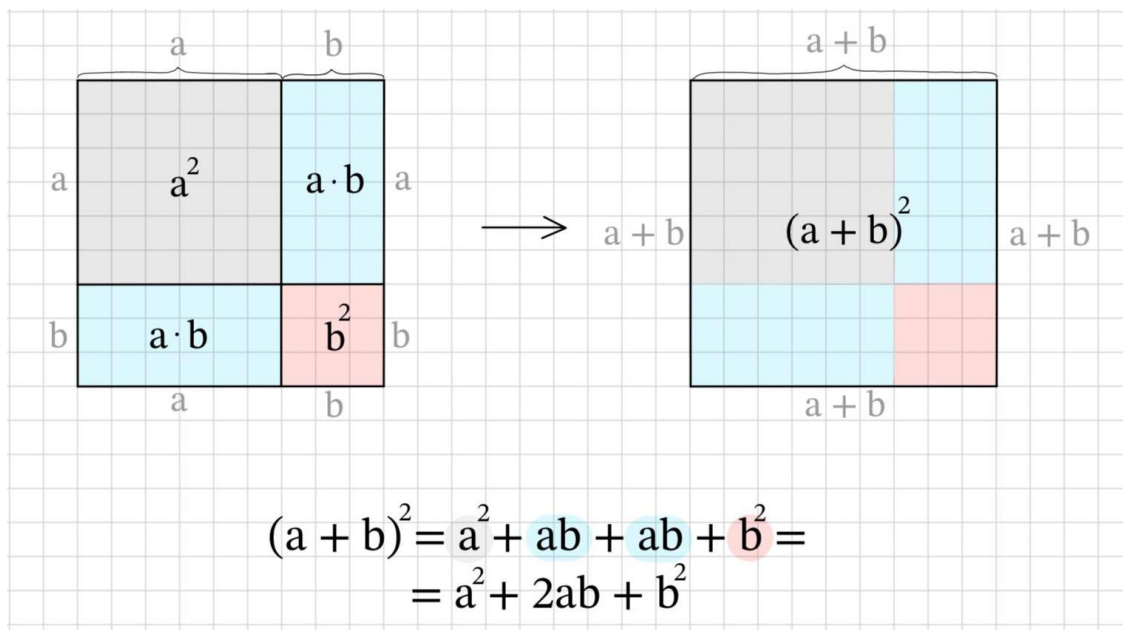
Obr.:14: Pomůcka pro skládání geometrického důkazu vzorce $a^2 - b^2$

Poté se žáci posadí zpět do lavice a pedagog začne rekapitulovat a diskutovat s žáky, co na jednotlivých stanovištích viděli. (5 min)

Ve zbylém čase hodiny pedagog vysvětlí jednotlivé odvození algebraických vzorců na tabuli, žáci si je zaznamenají do sešitu, a následně si vyzkouší samostatně vyřešit obdobné příklady s využitím daného vzorce. (30 min = přibližně 10 minut na jeden vzorec)

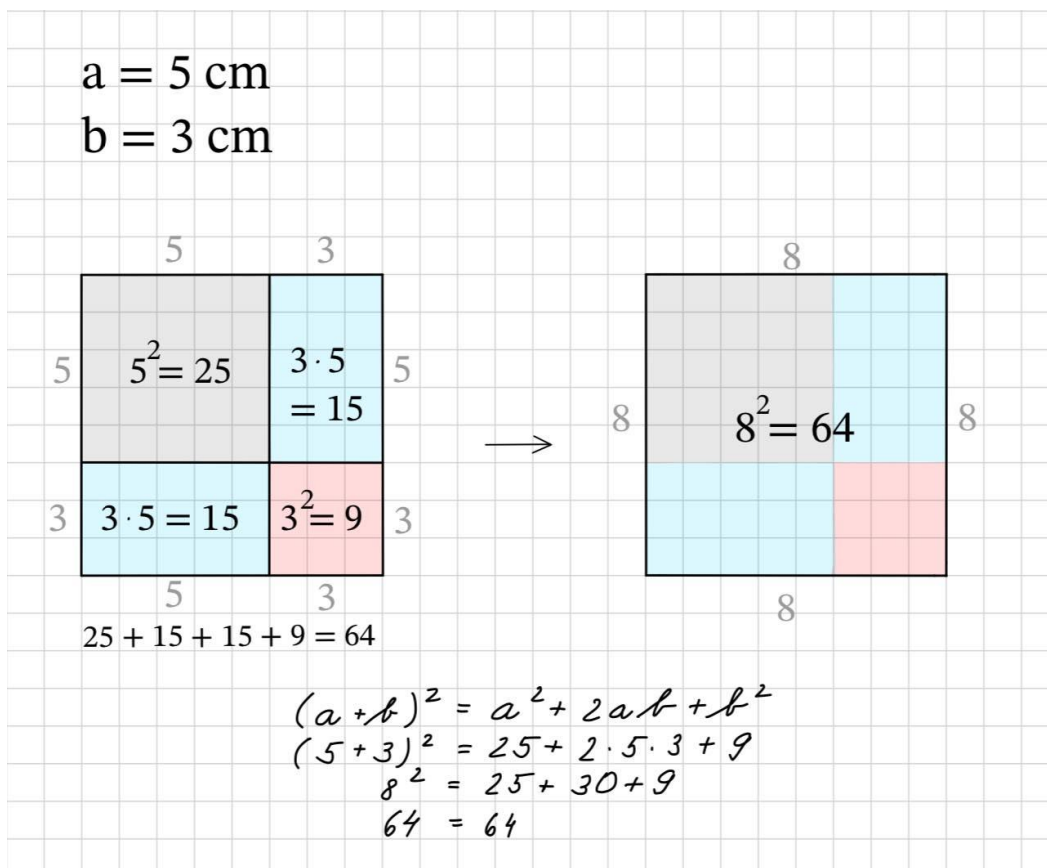
Algebraický vzorec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- *odvození pomocí obsahu čtverců a obdélníků, kde obsah čtverce je $S = a^2$, $S = b^2$, obsah obdélníku $S = a \cdot b$*
- *vidíme, že plochu největšího čtverce můžeme rozdělit na dílčí části, přitom součet obsahů těchto dílčích částí se rovná obsahu největšího čtverce (viz Obr. 15)*



Obr. 15: Geometrický důkaz vzorce $(a + b)^2$

Příklad s konkrétními délkami stran:



Obr. 16: Geometrický důkaz vzorce $(a + b)^2$ s konkrétními rozměry

Příklady k samostatnému řešení žáků (procvičování do sešitu):

a) $(a + 2)^2$

b) $(6 + b)^2$

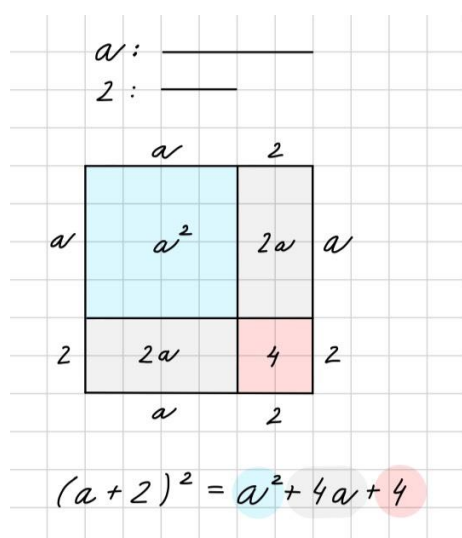
c) $(a + 8)^2$

Řešení:

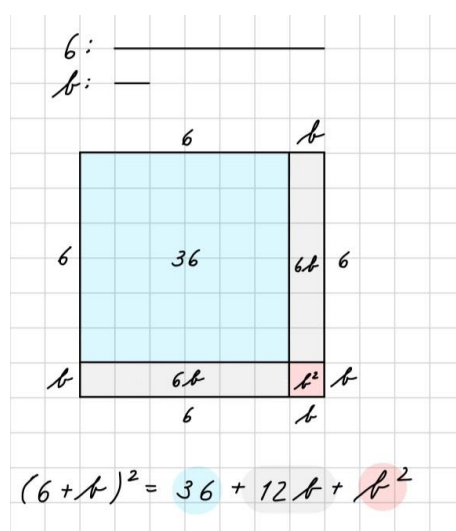
a) $(a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4$ (viz Obr. 17)

b) $(6 + b)^2 = 36 + 12b + b^2$ (viz Obr. 18)

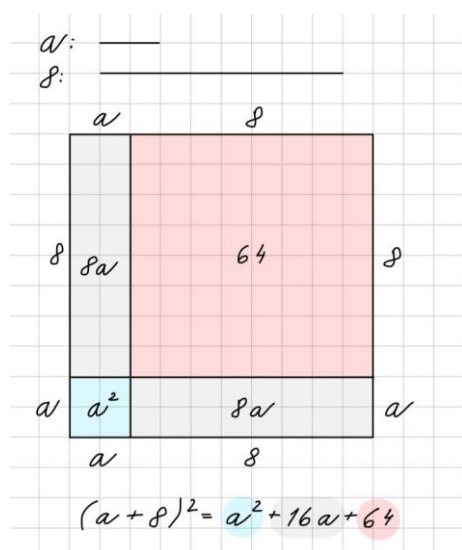
c) $(a + 8)^2 = a^2 + 16a + 64$ (viz Obr. 19)



Obr. 17: Geometrické řešení příkladu a)



Obr.18: Geometrické řešení příkladu b)

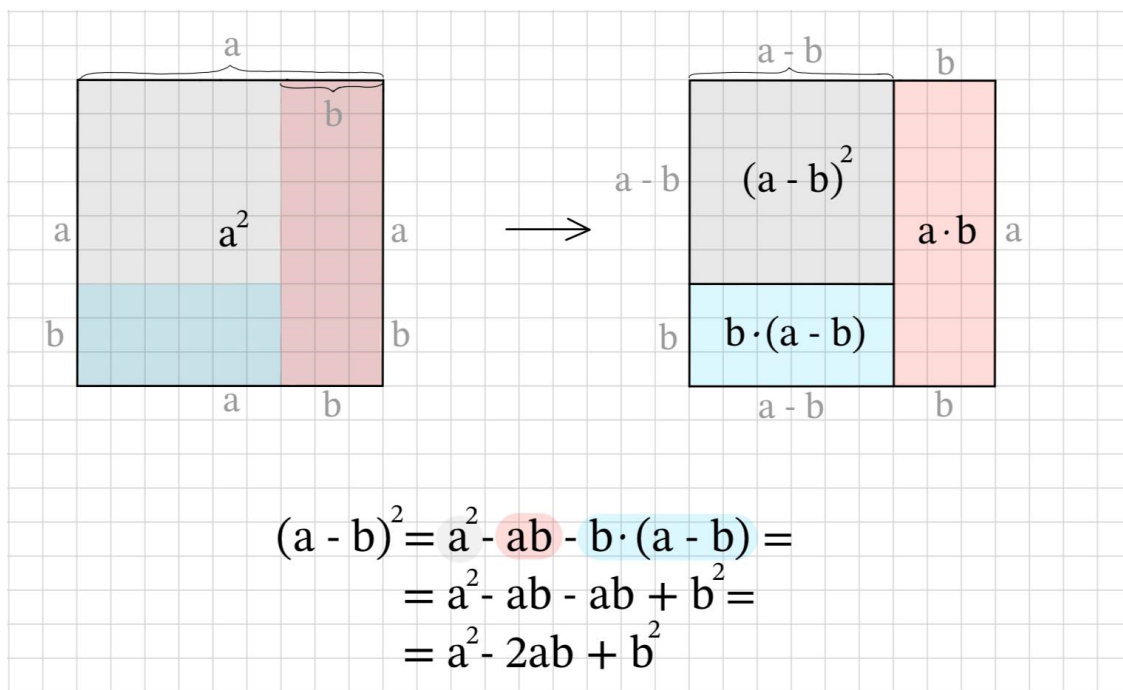


Obr. 19: Geometrické řešení příklad c)

Algebraický vzorec $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

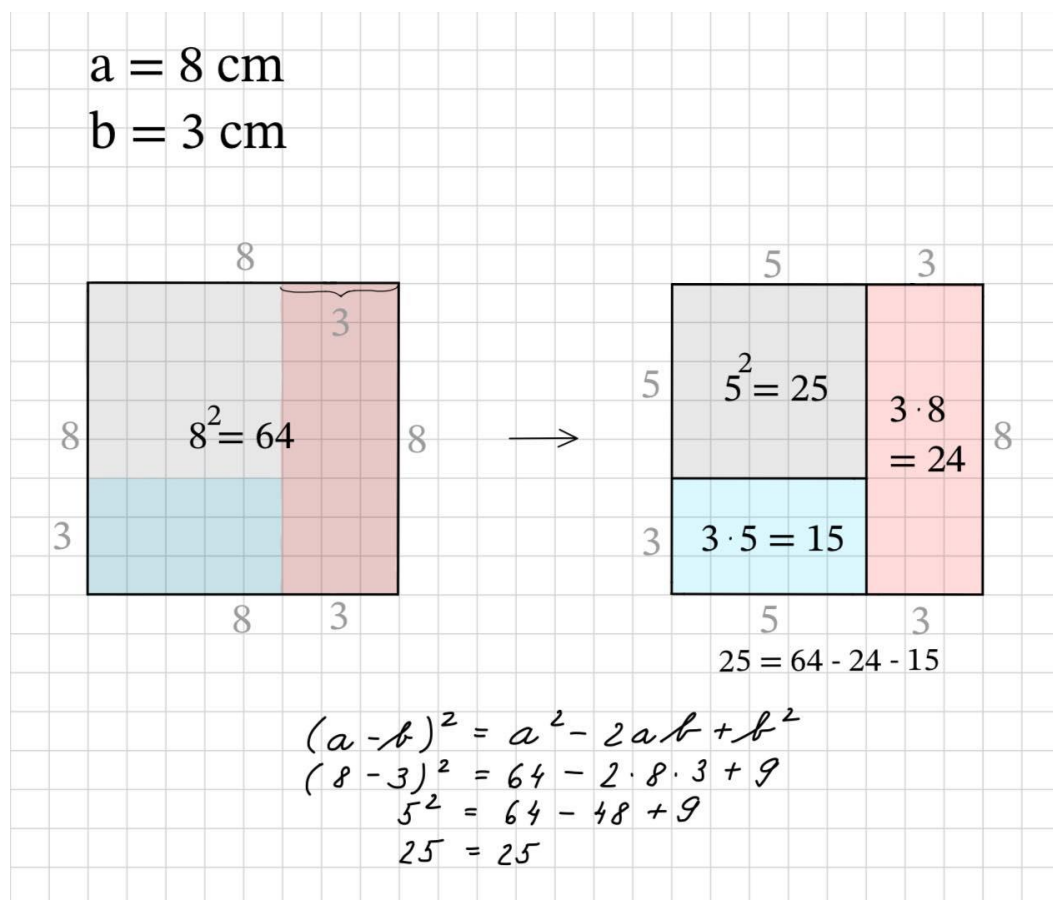
→ odvození pomocí obsahu čtverců a obdélníků, kde obsah čtverce je $S = a^2$, $S = b^2$, obsah obdélníku $S = a \cdot b$

→ vidíme, že plocha menšího šedého čtverce se rovná ploše, která vznikne odečtením obsahů dvou obdélníků od původního největšího čtverce (viz Obr. 20)



Obr. 20: Geometrický důkaz vzorce $(a - b)^2$

Příklad s konkrétními délkami stran:



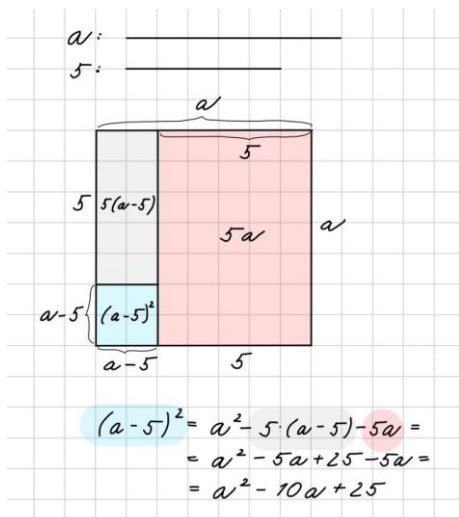
Obr. 21: Geometrický důkaz vzorce $(a - b)^2$ s konkrétními rozměry

Příklady k samostatnému řešení žáků (procvičování do sešitu):

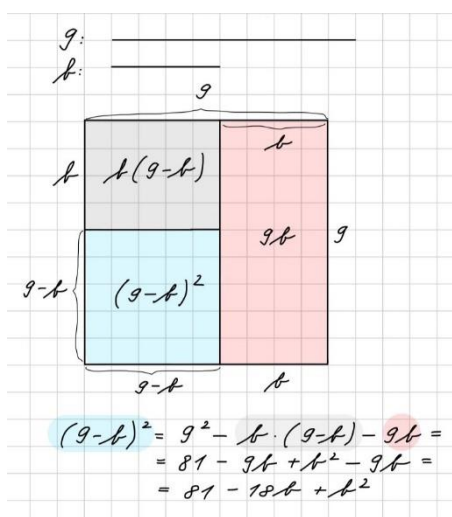
- a) $(a - 5)^2$
- b) $(9 - b)^2$
- c) $(a - 10)^2$

Řešení:

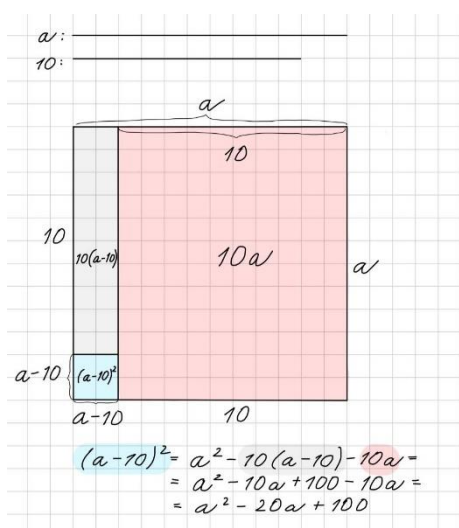
- a) $(a - 5)^2 = a^2 - 10a + 25$ (viz Obr. 22)
- b) $(9 - b)^2 = 81 - 18b + b^2$ (viz Obr. 23)
- c) $(a - 10)^2 = a^2 - 20a + 100$ (viz Obr. 24)



Obr. 22: Geometrické řešení příkladu a)



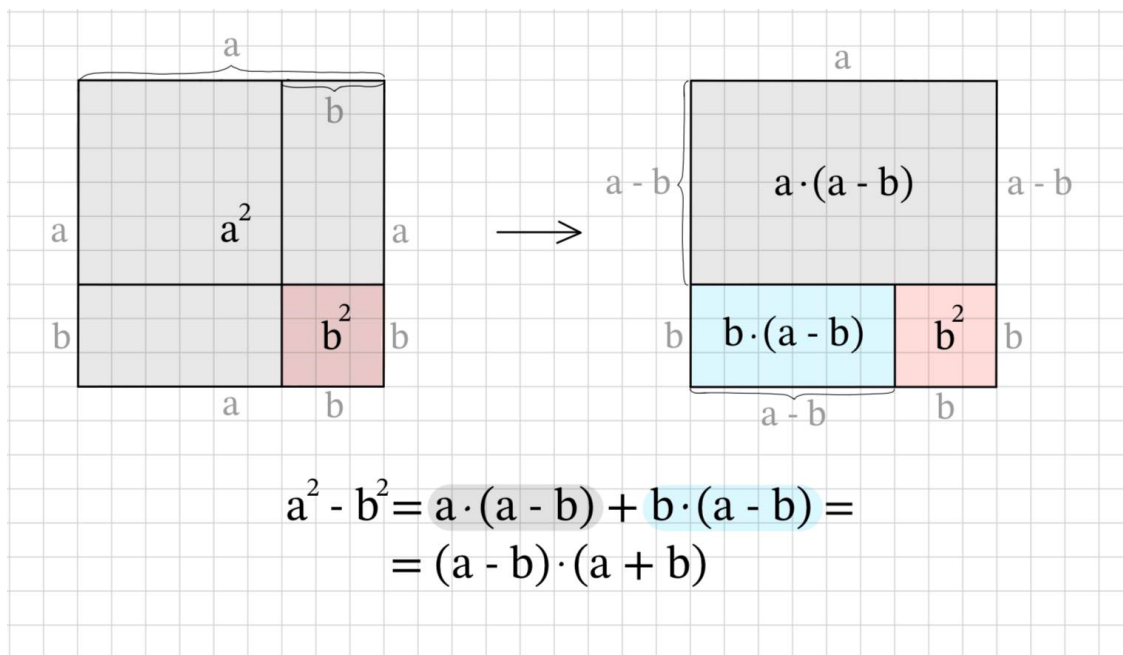
Obr. 23: Geometrické řešení příkladu b)



Obr. 24: Geometrické řešení příkladu c)

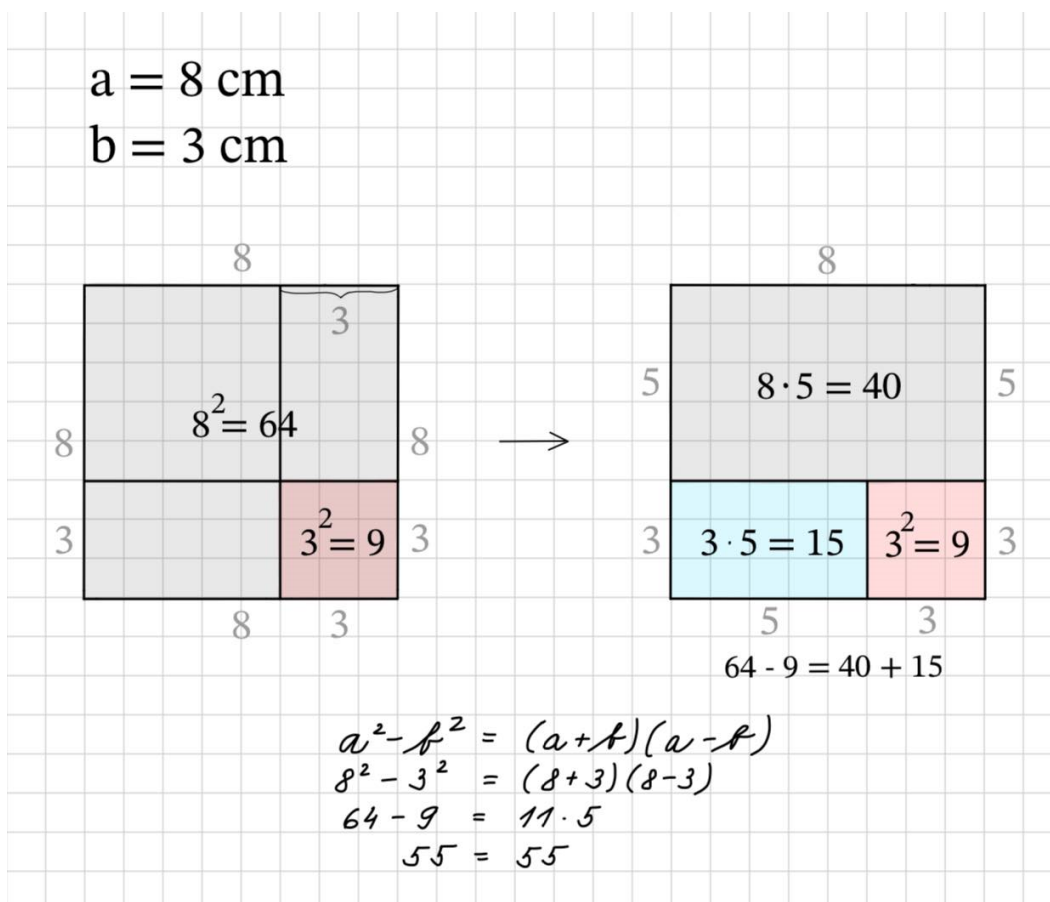
Algebraický vzorec $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

- odvození pomocí obsahu čtverců a obdélníků, kde obsah čtverce je $S = a^2$, $S = b^2$, obsah obdélníku $S = a \cdot b$
- vidíme, že obsah největšího čtverce bez nejmenšího (červeného) čtverce se rovná obsahu šedého a modrého obdélníku
- pokud tedy sečteme oba obdélníky z druhého obrázku, dostaneme obsah $a^2 - b^2$ (viz Obr. 25)



Obr. 25: Geometrický důkaz vzorce $a^2 - b^2$

Příklad s konkrétními délkami stran:



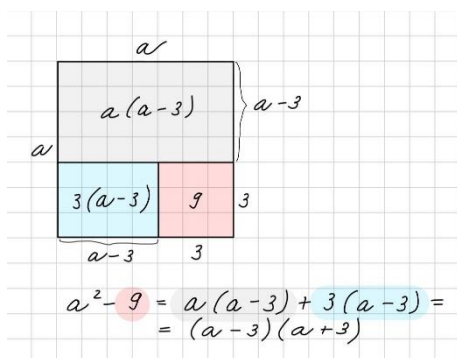
Obr. 26: Geometrický důkaz vzorce $a^2 - b^2$ s konkrétními rozměry

Příklady k samostatnému řešení žáků (procvičování do sešitu):

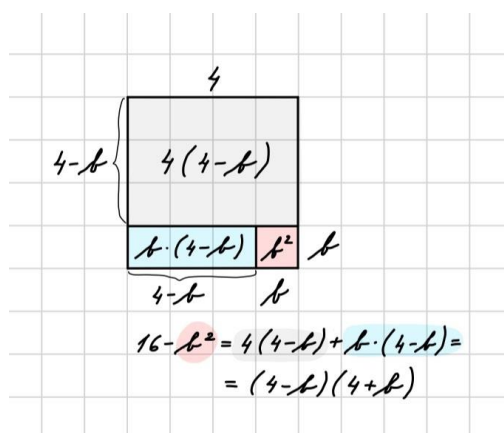
- a) $a^2 - 9$
- b) $16 - b^2$
- c) $49 - b^2$

Řešení:

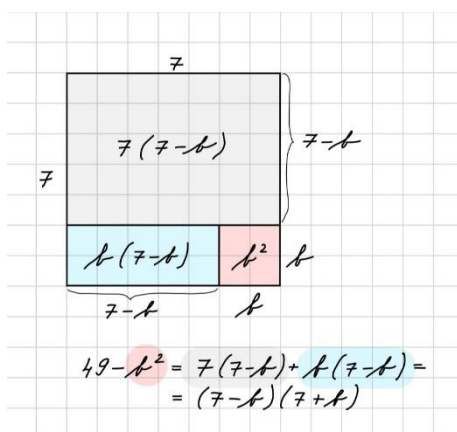
- a) $a^2 - 9 = (a + 3)(a - 3)$ (viz Obr. 27)
- b) $16 - b^2 = (4 + b)(4 - b)$ (viz Obr. 28)
- c) $49 - b^2 = (7 + b)(7 - b)$ (viz Obr. 29)



Obr. 27: Geometrické řešení příkladu a)



Obr. 28: Geometrické řešení příkladu b)



Obr. 29: Geometrické řešení příkladu c)

Metodické poznámky

Pedagog by se měl po celou hodinu snažit zapojit všechny skupiny a žáky, korigovat rozmístění a posouvání skupin na stanovištích. Také by měl motivovat žáky ke kooperaci ve skupině, šikovnější žáci mohou pomoci slabším žákům, slabší žáci mohou při samostatné práci spolupracovat například ve dvojici či menší skupině.

Pedagog přizpůsobuje tempo a náročnost vysvětlování problematiky a příkladů individuálním potřebám žáka, zároveň efektivně spravuje čas, který je rozvržen na jednotlivé činnosti. V případě nutnosti zopakuje vzorce pro obsah čtverce a obdélníku. Vhodné je zdůraznit spojitost mezi geometrickými obrazci a algebraickými výrazy.

Žákům také mohou pomoci návodné otázky, kterými mohou být například:

- Jak vypočítáme obsah čtverce? Jak vypočítáme obsah obdélníku?
- Co znamená druhá mocnina? Můžeme ji geometricky znázornit? Jakou má souvislost s obsahem čtverce?
- Můžeme sčítat délky dvou úseček? Jak postupujeme?
- Jak můžeme geometricky znázornit vzorec $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$?
- Jaký je vztah mezi geometrickým obrazcem a algebraickým vzorcem?
- Který geometrický důkaz ti připadá nejsnazší a který naopak nejsložitější? Proč?

VYUČOVACÍ HODINA 2: Obsahy geometrických obrazců

Výukový cíl:

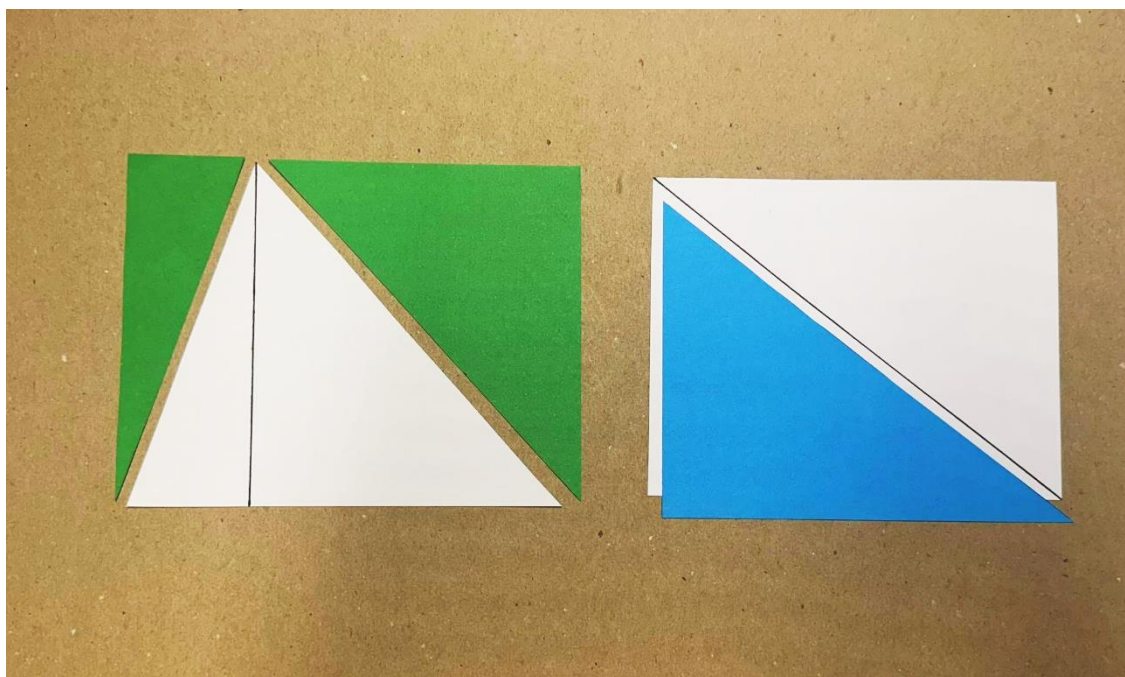
Žáci budou schopni samostatně vysvětlit a upravit vzorce pro výpočet obsahů vybraných geometrických obrazců. Budou schopni aplikovat tyto vzorce na konkrétní příklady a využívat geometrické vizualizace pro lepší zapamatování a hlubší pochopení těchto vzorců..

Klíčové kompetence:

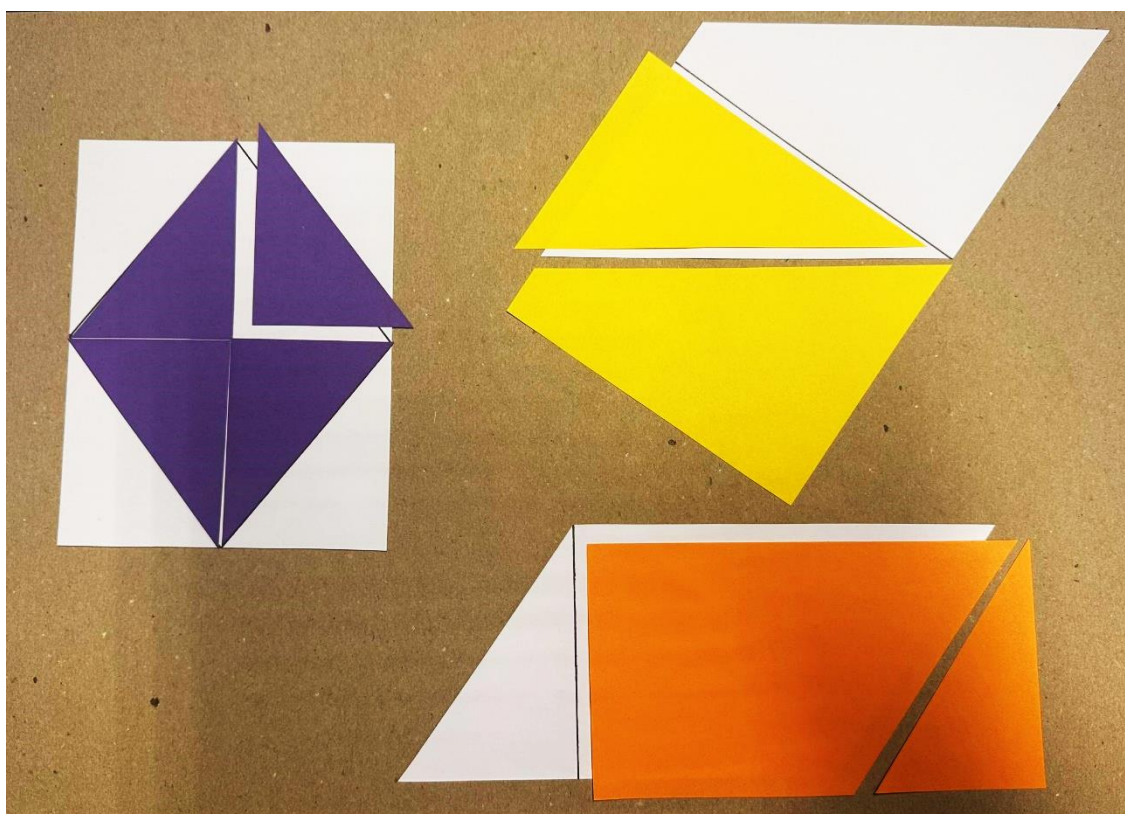
- *kompetence k učení: žáci se naučí nacházet souvislosti mezi jednotlivými znalostmi, rozšíří si znalosti v oblasti geometrie*
- *kompetence k řešení problémů: žáci zlepšují schopnosti analyzovat problémy, učí se aplikovat teoretické znalosti v praktických situacích a nacházet tvůrčí řešení*
- *kompetence komunikativní: skrze diskuzi se spolužáky i s vyučujícím se zlepšují v argumentaci a užití matematické terminologie při popisování matematických konceptů*
- *kompetence sociální a personální: žáci rozvíjejí schopnost spolupracovat ve skupině, učí se vzájemné toleranci*
- *kompetence pracovní: při manipulaci s vystřiženými částmi geometrických obrazců a při jejich sestavování si procvičí přesnost a systematický přístup k práci*
- *rozvoj kritického myšlení: podpora kritického myšlení skrze analýzu matematických konceptů*

Motivace

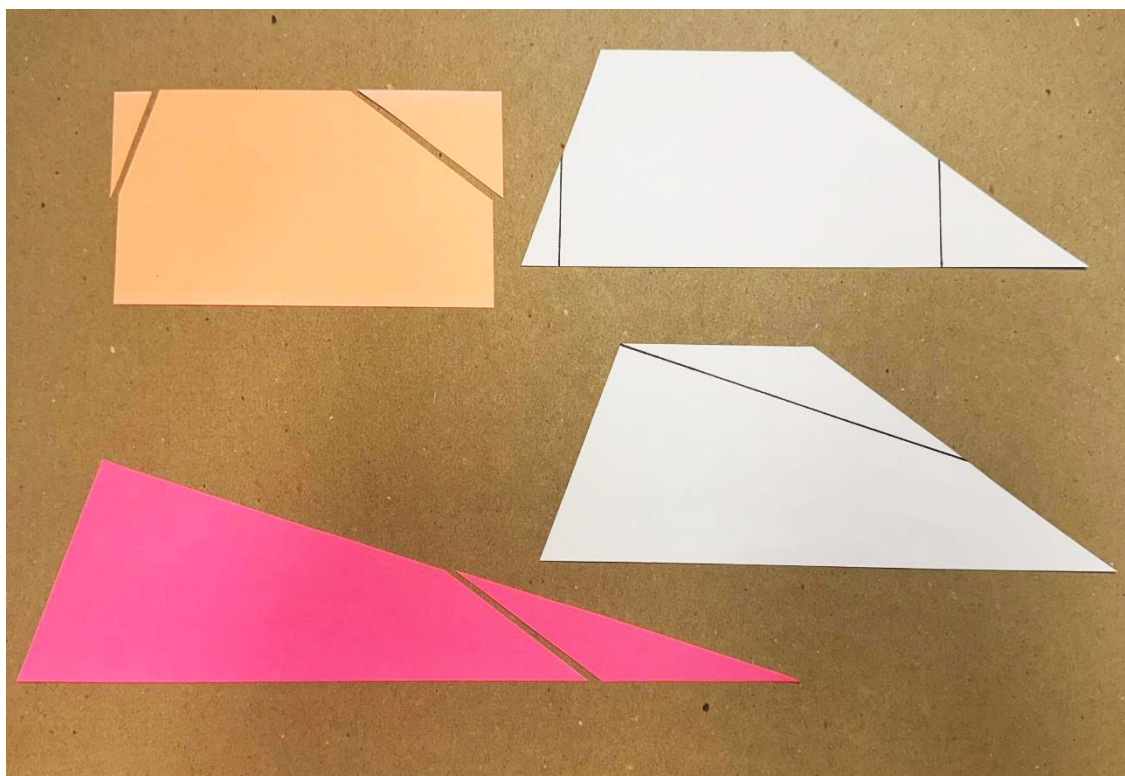
(8 min): Ve třídě vytvoříme 5 stanovišť. Na každé stanoviště vytiskneme geometrický důkaz vzorců pro vybrané geometrické obrazce (viz Obr. 33-39). Tyto důkazy můžeme obohatit a vystřižené části jednotlivých obrazců, aby si žáci mohli s jednotlivými částmi pohybovat a skládat dle důkazu (viz Obr. 30, 31 a 32). Následně se žáci rozdělí do 5 týmů a začnou obcházet jednotlivá stanoviště. Jejich úkolem je seznámit se se vzorci pomocí geometrického důkazu.



Obr.:30: Pomůcka pro odvození vzorce pro obsah pravoúhlého a obecného trojúhelníku



Obr.:31: Pomůcka pro odvození vzorce pro obsah kosočtverce a kosodélníku



Obr.:32: Pomůcka pro odvození vzorce pro obsah lichoběžníku

Poté se žáci posadí zpět do lavice a pedagog začne s žáky diskutovat a rekapitulovat, co žáci na jednotlivých stanovištích viděli. (2 min)

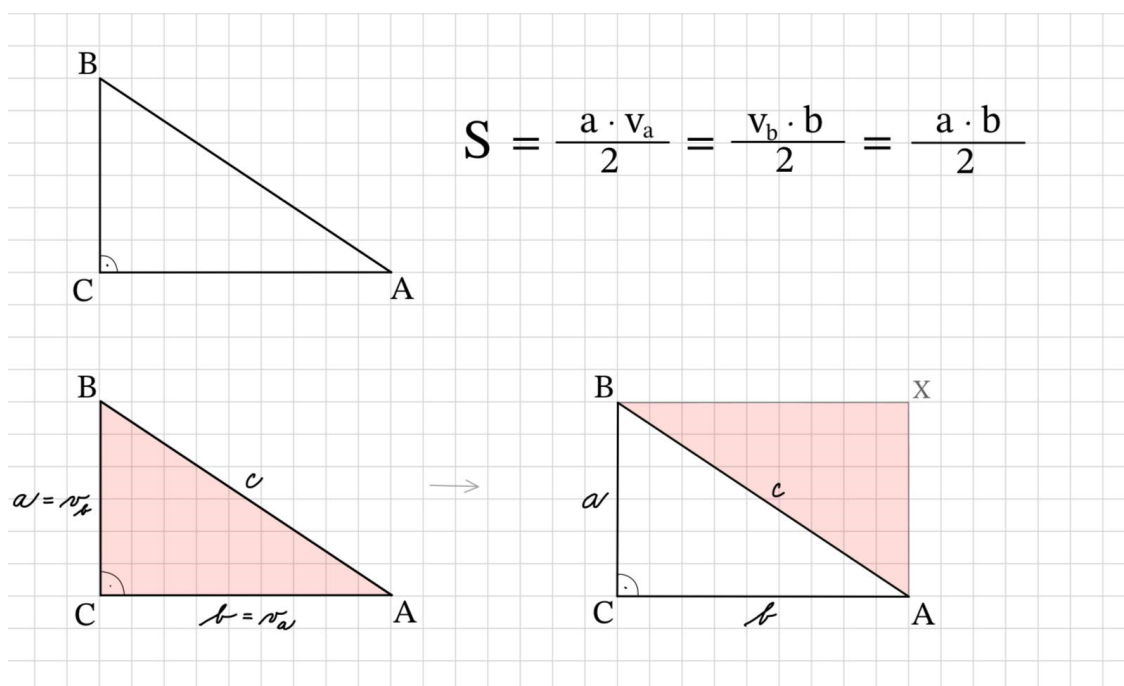
Ve zbylém čase hodiny pedagog vysvětlí jednotlivé odvození geometrických vzorců na tabuli a žáci si je zaznamenají do sešitu. (35 minut = 15 minut obsahy trojúhelníků, 20 minut obsahy čtyřúhelníků)

- obsah pravoúhlého trojúhelníku (*stanoviště 1*)

→ odvození pomocí obsahu obdélníku, který vypočítáme jako $S = a \cdot b$

→ pokud přidáme shodný pravoúhlý trojúhelník (viz Obr. 33), vznikne obdélník, ve kterém je přepona pravoúhlého trojúhelníku zároveň jeho úhlopříčkou

→ odtud je vidět, že obsah pravoúhlého trojúhelníku je polovinou obsahu obdélníku a zároveň, že výšky k oběma odvěsnám se rovnají stranám obdélníku, tj. $v_a = b$, $v_b = a$



Obr. 33: Geometrická důkaz vzorce pro obsah pravoúhlého trojúhelníku

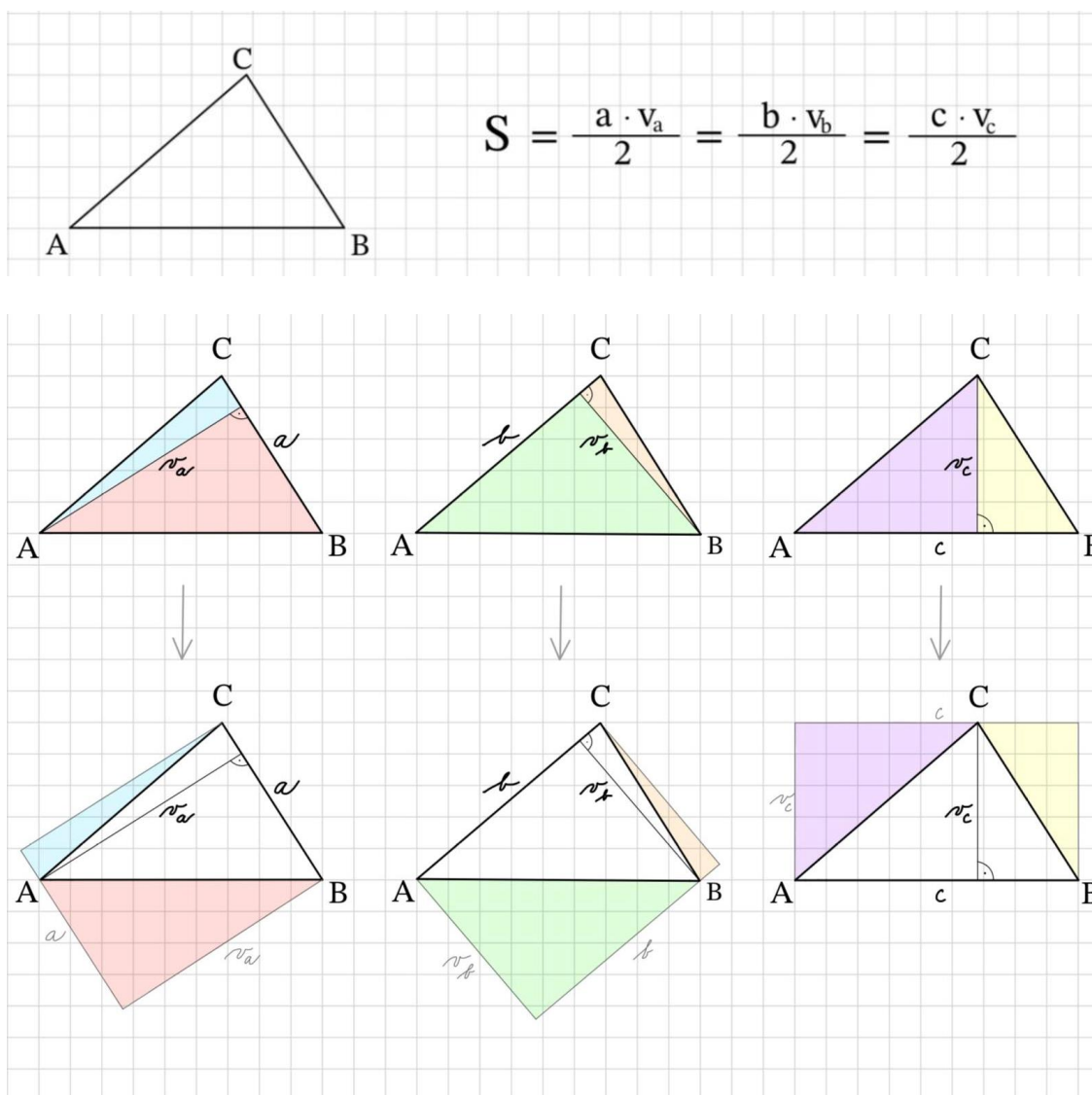
- obsah obecného trojúhelníku (*stanoviště 2*)

→ odvození pomocí obsahu obdélníku, který vypočítáme jako $S = a \cdot b$

→ pokud trojúhelník rozdělíme podle zvolené výšky na dva pravoúhlé trojúhelníky a přidáme shodné trojúhelníky k daným trojúhelníkům vznikne obdélník (viz Obr. 34)

→ v tomto obdélníku má jedna jeho strana velikost shodnou s velikostí vybrané výšky trojúhelníku a velikost druhé strany obdélníku se shoduje se stranou trojúhelníku, jejíž výšku jsme využili při rozdělení

→ odtud je vidět, že obsah trojúhelníku je polovinou obsahu vzniklého obdélníku



Obr. 34: Geometrický důkaz vzorce pro obsah obecného trojúhelníku

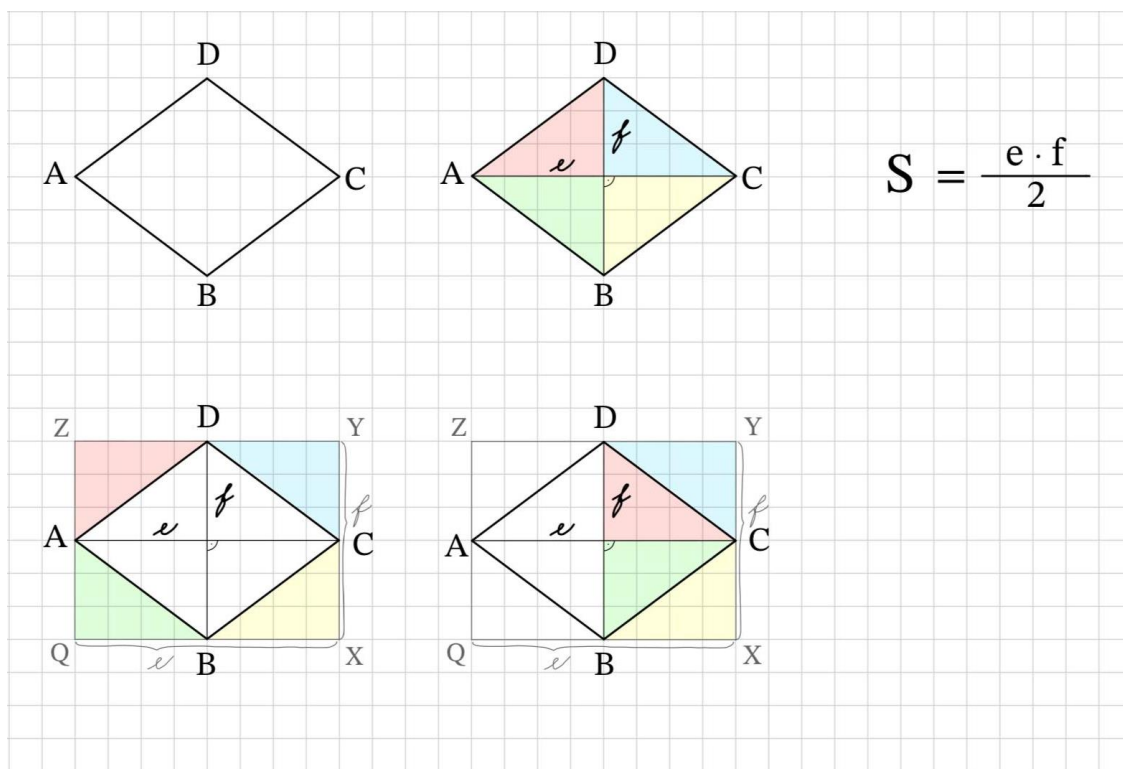
- obsah kosočtverce (*stanoviště 3*)

→ *odvození pomocí obsahu obdélníku, který vypočítáme jako $S = a \cdot b$*

→ *pokud kosočtverec rozdělíme podle úhlopříček na čtyři shodné dílčí pravoúhlé trojúhelníky, můžeme sestavit obdélník přidáním shodných dílčích pravoúhlých trojúhelníků k danému kosočtverci (viz Obr. 35)*

→ *v tomto obdélníku mají strany shodnou délku jako úhlopříčky kosočtverce*

→ *po přemístění jednotlivých trojúhelníků je vidět, že obsah kosočtverce je polovinou obsahu vzniklého obdélníku*



Obr. 35: Geometrický důkaz vzorce pro obsah kosočtverce

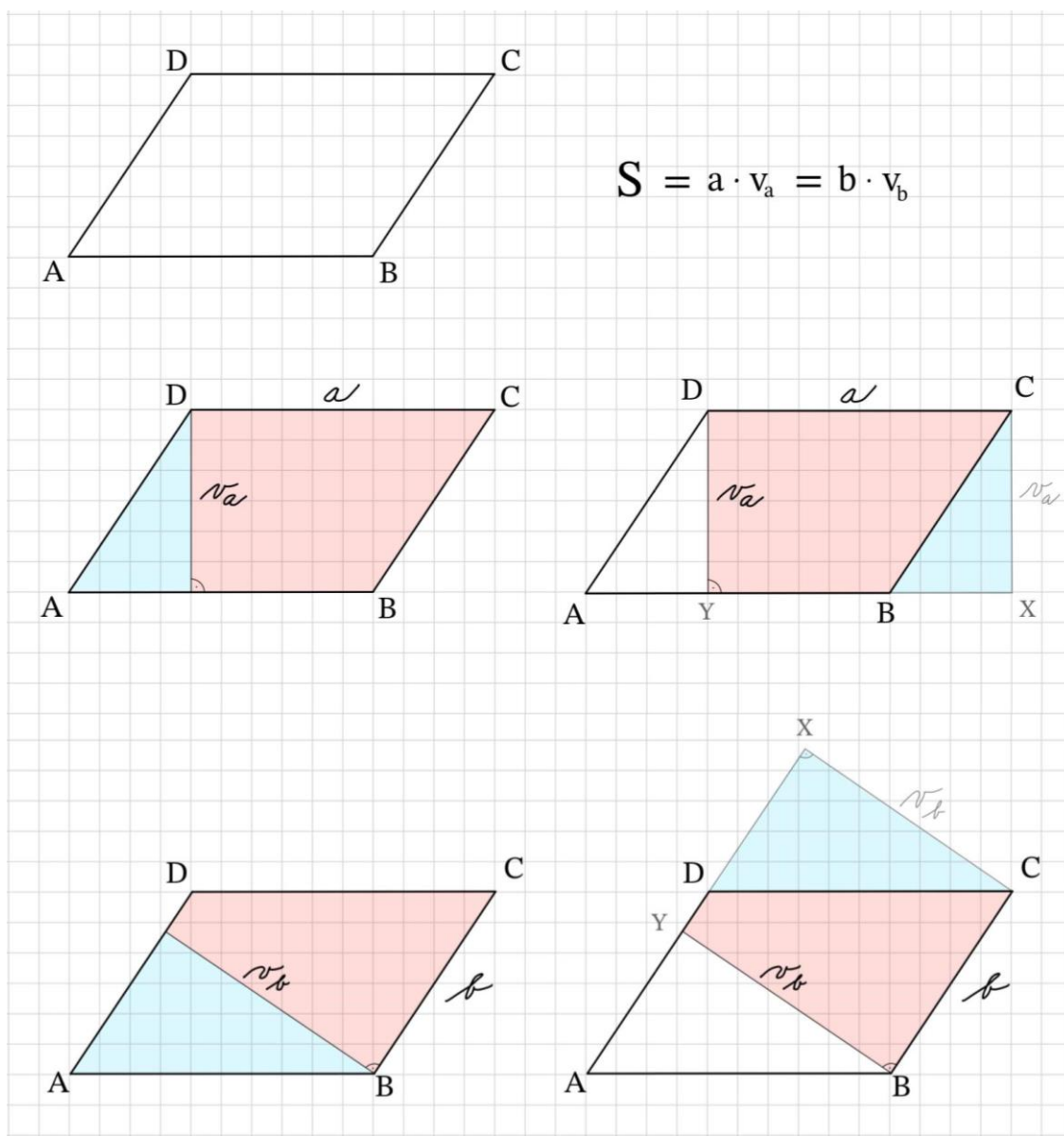
- obsah kosodélníku (*stanoviště 4*)

→ odvození pomocí obsahu obdélníku, který vypočítáme jako $S = a \cdot b$

→ pokud kosodélník rozdělíme výškou v jednom jeho vrcholu, získáme pravoúhlý trojúhelník, který posuneme k jedné jeho straně ve směru zvolené strany, čímž vznikne obdélník (viz Obr. 36)

→ v tomto obdélníku mají strany shodné velikosti jako využitá výška kosodélníku a strana, k níž je tato výška kolmá

→ odtud je vidět, že obsah kosodélníku se rovná obsahu vzniklého obdélníku



Obr. 36: Geometrický důkaz vzorce pro obsah kosodélníku

- obsah lichoběžníku (stanoviště 5)

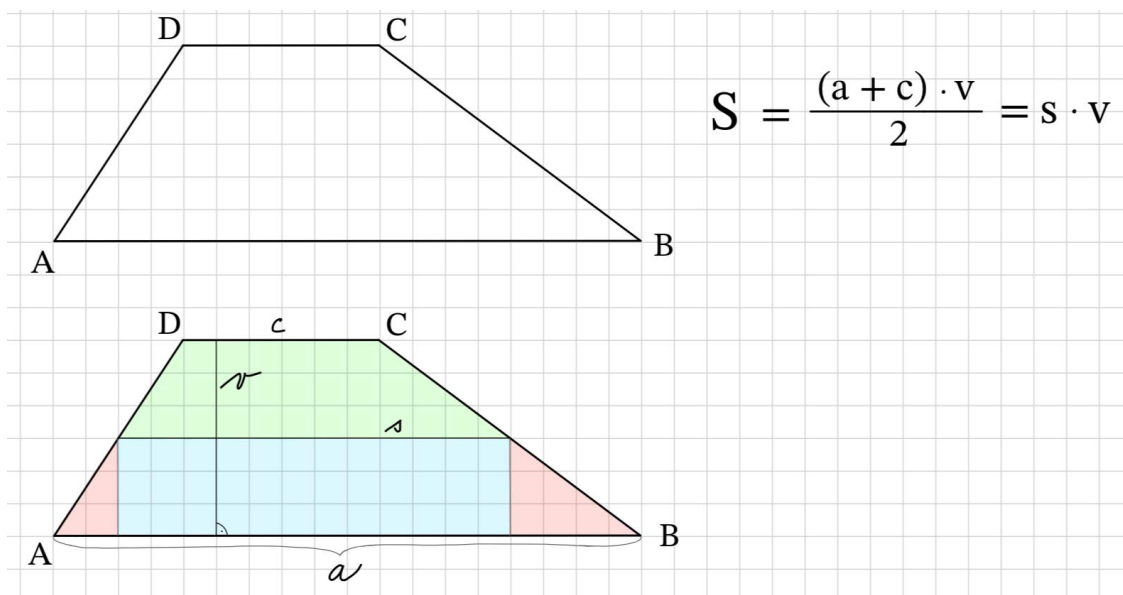
máme dvě možnosti odvození vzorce

odvození pomocí obsahu obdélníku:

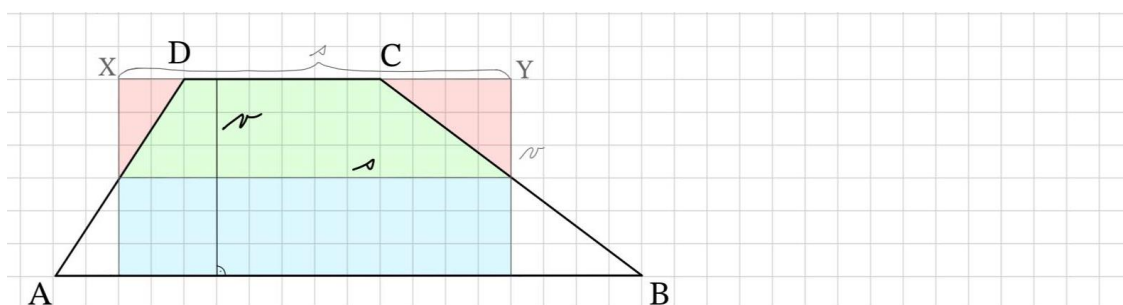
→ *ve středech ramen spustíme výšku na delší základnu, čímž vzniknou dva pravoúhlé trojúhelníky (viz Obr. 37), otočením těchto trojúhelníků o 180° vždy podle středy ramena vznikne obdélník (viz Obr. 38)*

→ *v tomto obdélníku mají strany shodné velikosti jako výška lichoběžníku a jeho střední příčka, kterou získáme spojením středu ramen lichoběžníku*

→ *odtud je vidět, že obsah kosodélníku se rovná obsahu vznikého obdélníku*



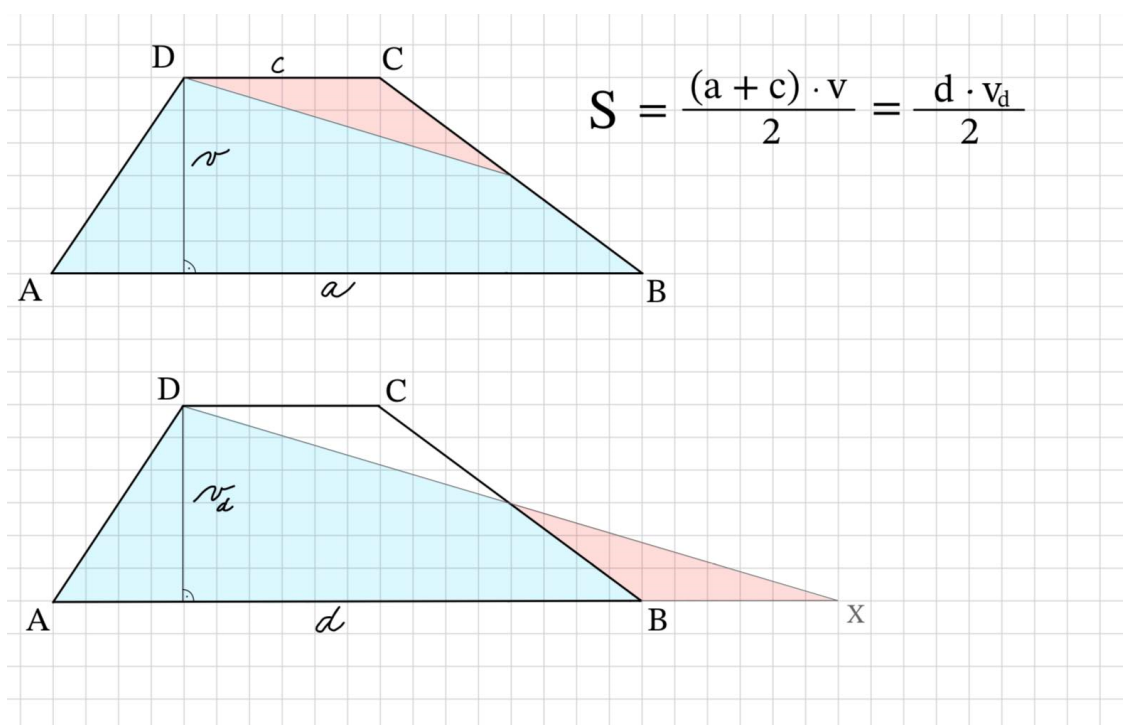
Obr. 37: Rozdělení lichoběžníku na dílčí útvary pomocí střední příčky



Obr. 38: Geometrický důkaz vzorce pro obsah lichoběžníku pomocí obsahu obdélníku

odvození pomocí obsahu trojúhelníku:

- základnu AB lichoběžníku ABCD prodloužíme o délku jeho druhé základny CD
- krajní nově vzniklý bod X spojíme s vrcholem D tak, aby nám vznikl trojúhelník AXD, který má délku jedné strany rovnu součtu velikostí obou základů lichoběžníku a zároveň stejnou výšku k této straně jako je výška lichoběžníku (viz Obr. 39), tj. $a + c = d$, $v = v_d$
- po přemístění malého trojúhelníku (červeného) zpět do lichoběžníku vidíme, že obsah lichoběžníku se rovná obsahu vzniklého trojúhelníku



Obr. 39: Geometrický důkaz vzorce pro obsah lichoběžníku pomocí obsahu trojúhelníku

Metodické poznámky

Pedagog by se měl po celou hodinu snažit zapojit všechny skupiny a žáky, korigovat rozmístění a posouvání skupin na stanovištích. Také by měl motivovat žáky ke kooperaci ve skupině, šikovnější žáci mohou pomoci slabším žákům, slabší žáci mohou při samostatné práci spolupracovat například ve dvojici či menší skupině.

Pedagog přizpůsobuje tempo a náročnost vysvětlování problematiky a příkladů individuálním potřebám žáka, zároveň efektivně spravuje čas, který je rozvržen na jednotlivé činnosti. V případě nutnosti zopakuje vzorce pro obsah čtverce a obdélníku. Vhodné je zdůraznit spojitost mezi geometrickými obrazci a algebraickými výrazy.

Žákům také mohou pomoci návodné otázky, kterými mohou být například:

- Jaký vztah existuje mezi obsahem pravoúhlého trojúhelníku a obsahem obdélníku, který vznikne přidáním shodného trojúhelníku? Proč je obsah pravoúhlého trojúhelníku polovinou obsahu obdélníku vzniklého z dvojice shodných pravoúhlých trojúhelníků?
- Jak souvisí velikost vybrané výšky trojúhelníku s velikostí strany vzniklého obdélníku? Proč je obsah obecného trojúhelníku polovinou obsahu obdélníku vzniklého přidáním shodných dílčích trojúhelníků?
- Jak souvisí délky úhlopříček kosočtverce s délkami obdélníku vytvořeného z dílčích pravoúhlých trojúhelníků? Proč je obsah kosočtverce polovinou obsahu obdélníku, který má délky stran shodných s délkami úhlopříček kosočtverce?
- Jak souvisí obsah kosodélníku s obsahem obdélníku, který vznikne posunutím části kosodélníku, konkrétně pravoúhlého trojúhelníku?
- Co je to střední příčka lichoběžníku? Jak souvisí délka střední příčky a výšky lichoběžníku s obdélníkem, který vznikne otočením dílčích pravoúhlých trojúhelníků?
- Jak souvisí obsah lichoběžníku s obsahem trojúhelníku, který vznikne přemístěním dílčího trojúhelníku?

V následující kapitole 4.3 je uveden post-test, který byl řešen žáky 9.B po absolvování zmíněných dvou hodin s představenými aktivitami.

4.3 Post-test

POST-TEST

1. Uprav:

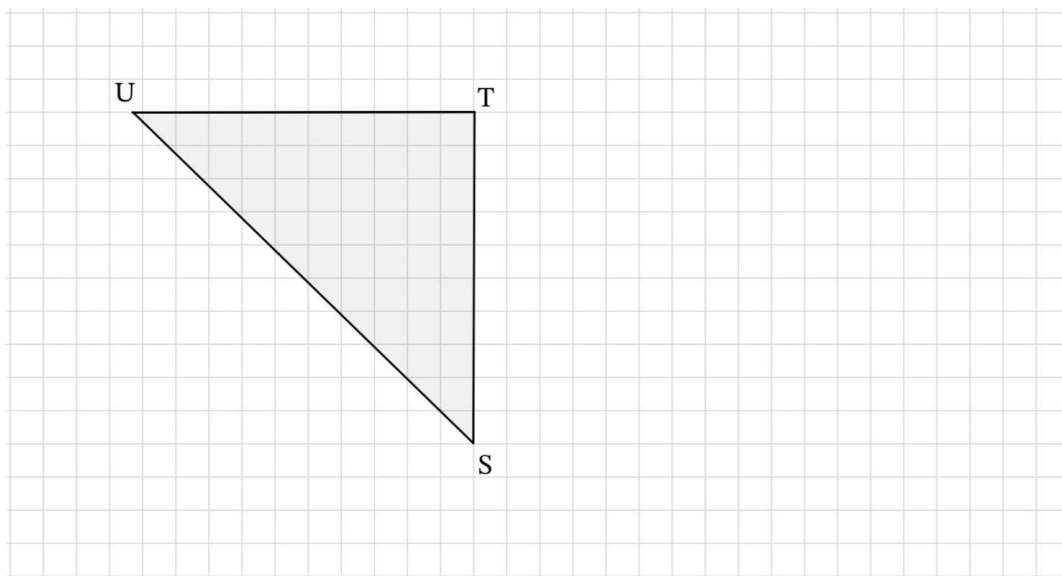
a) $(5 + b)^2 =$

b) $(a - 4)^2 =$

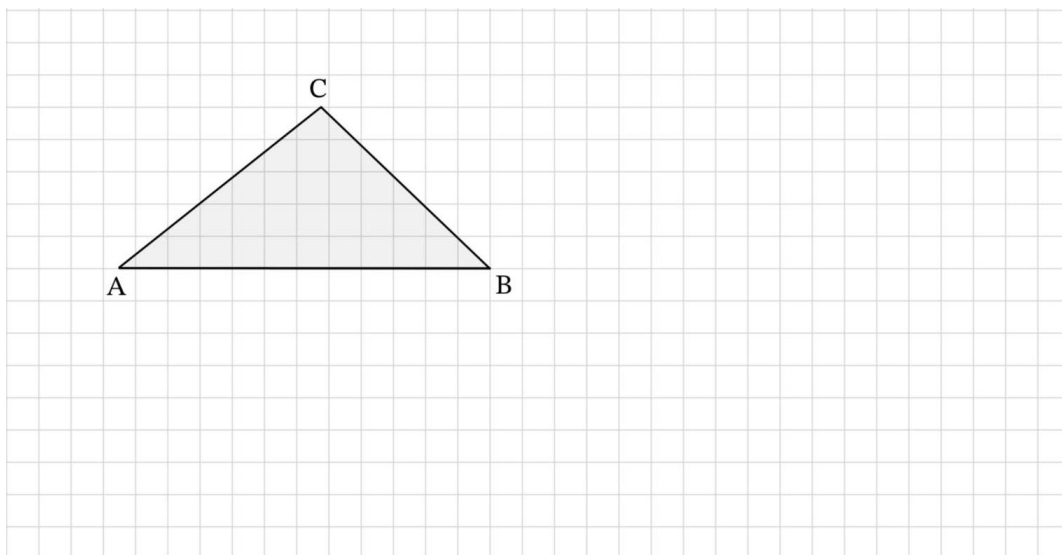
c) $9 - y^2 =$

2. Načrtni trojúhelník, který:

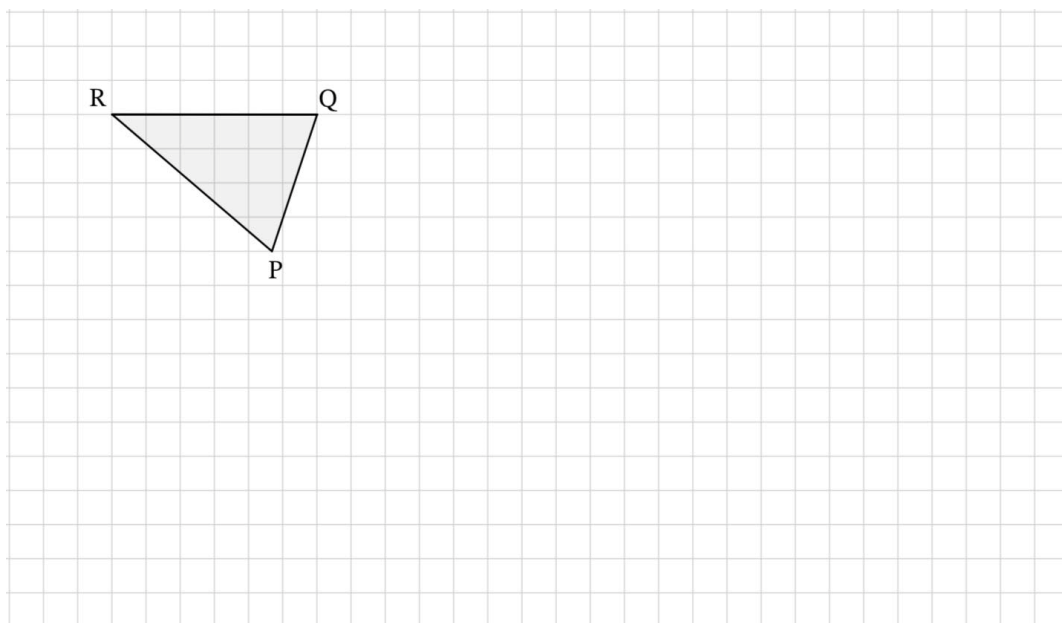
a) je ostroúhlý a má stejný obsah jako trojúhelník STU,



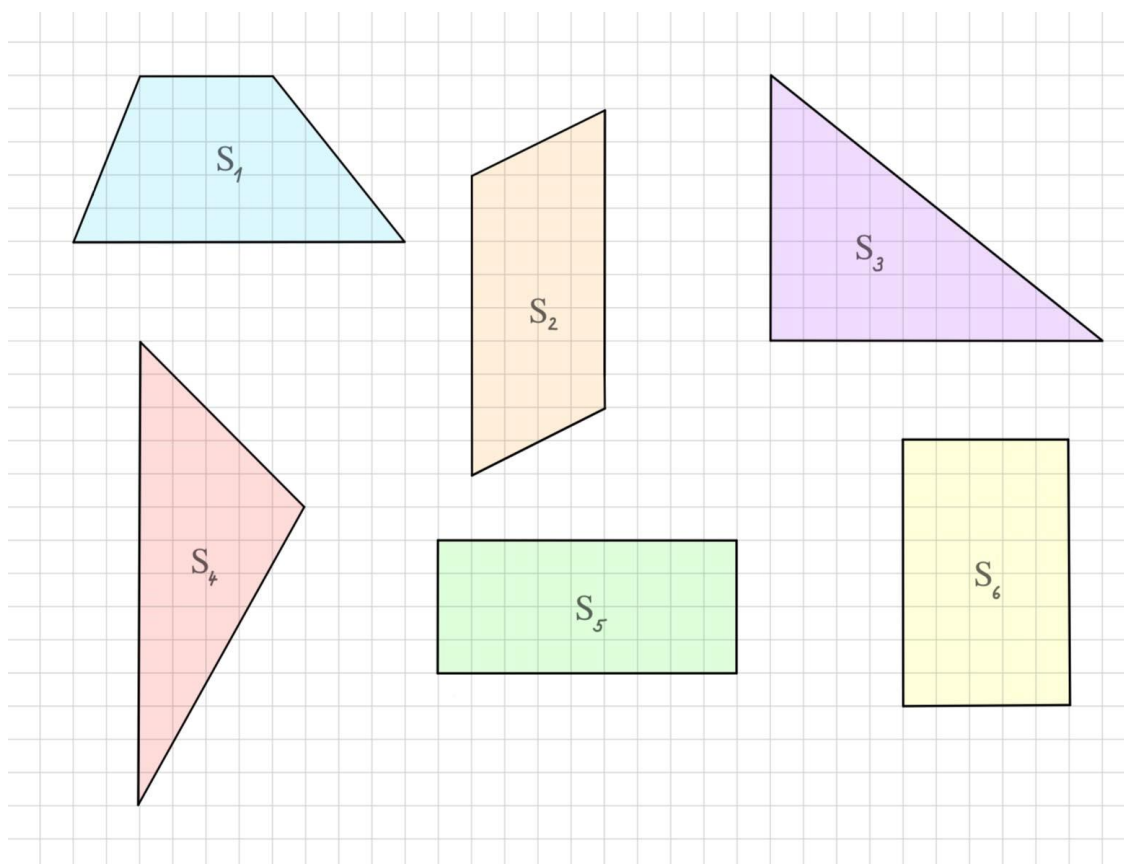
b) je tupoúhlý a má stejný obsah jako trojúhelník ABC,



c) má 2,5krát větší obsah než trojúhelník PQR.



3. Přiřaď k sobě geometrické obrazce se stejným obsahem:
(1 čtvereček ve čtvercové síti znázorňuje 1 cm²):



POST-TEST – podrobné řešení

1. Uprav:

a) $(5 + b)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot b + b^2 = \underline{25 + 10b + b^2}$

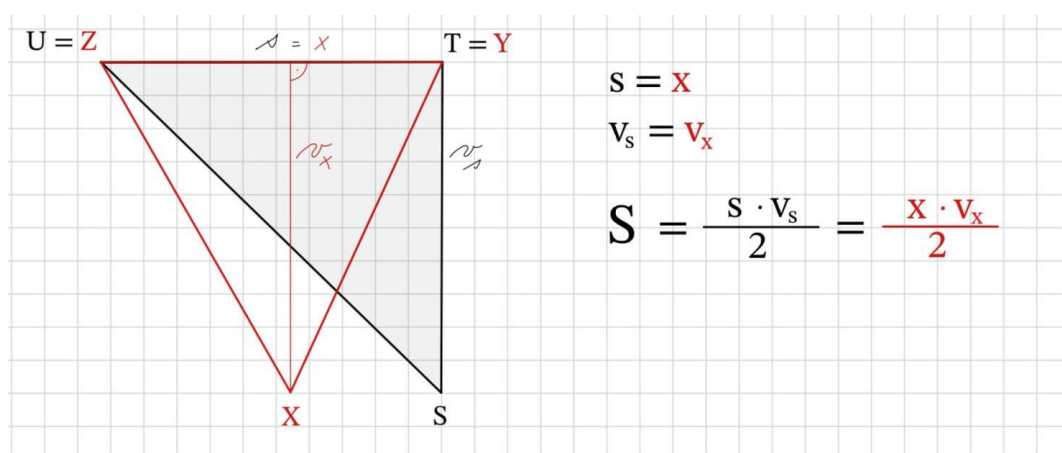
b) $(a - 4)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 4 + 4^2 = \underline{a^2 - 8a + 16}$

c) $9 - y^2 = \underline{(3 - y) \cdot (3 + y)}$

2. Načrtni trojúhelník, který:

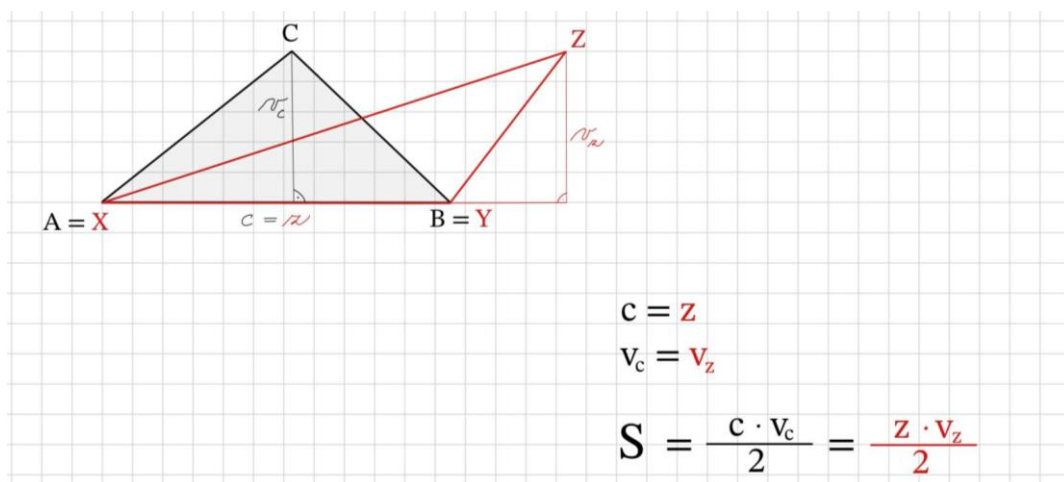
- a) je ostroúhlý a má stejný obsah jako trojúhelník STU,

Obsah trojúhelníku se vypočítá jako polovina součinu délky strany tohoto trojúhelníku a délky výšky na tuto stranu. Pokud chceme načrtnout trojúhelník se stejným obsahem jako trojúhelník STU musíme zachovat velikost jedné strany trojúhelníku a velikost výšky trojúhelníku k této straně. Řešením tedy může být libovolný trojúhelník, ve kterém bude zachována délka jedné vybrané strany např. TU, a třetí vrchol trojúhelníku, který na vybrané straně neleží, můžeme libovolně posouvat po rovnoběžce s touto stranou, která je vedena bodem S, čímž se zachová také délka výšky v trojúhelníku. Tímto způsobem se zachová obsah trojúhelníku. Pokud jsou v zadání nějaké další specifické požadavky, musíme tyto požadavky zohlednit. Například pokud má být nový trojúhelník ostroúhlý, musíme umístit vrchol trojúhelníku tak, abychom docílili všech vnitřních ostrých úhlů trojúhelníku (viz obr. 40). Pokud má být pravoúhlý, musíme umístit vrchol tak, abychom docílili jednoho vnitřního pravého úhlu trojúhelníku (viz Obr. 41).



Obr. 40: Ukázka správného řešení úlohy 2 a)

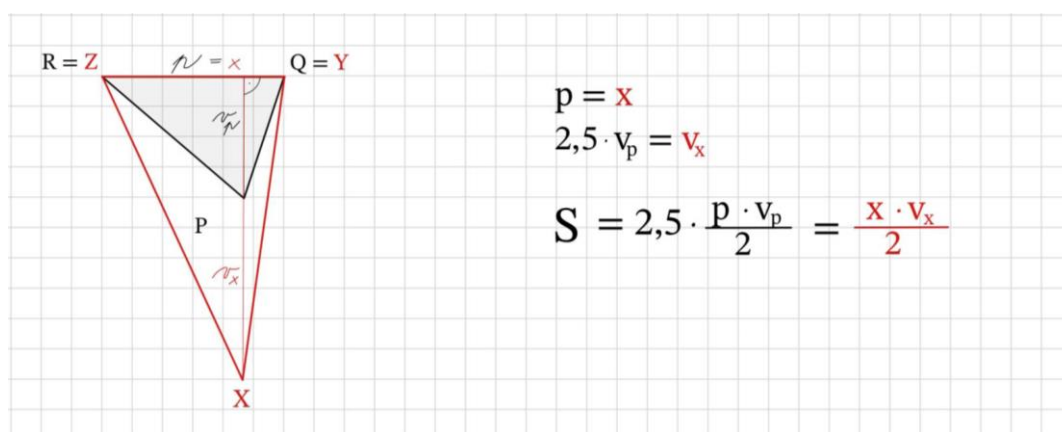
b) je tupouhlý a má stejný obsah jako trojúhelník ABC,



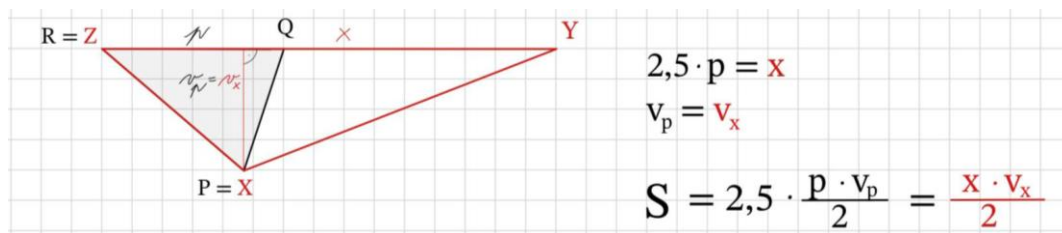
Obr. 41: Ukázka správného řešení úlohy 2 b)

c) má 2,5krát větší obsah než trojúhelník PQR.

Trojúhelníku s násobně větším nebo menším obsahem docílíme pomocí změny (zvětšení nebo zmenšení) velikosti strany trojúhelníku a ponecháním zbylých dvou vrcholů trojúhelníku nebo změny velikosti vybrané výšky trojúhelníku a ponecháním ostatních dvou vrcholů trojúhelníku. Pokud chceme například načrtnout trojúhelník s 2,5krát větším obsahem, můžeme využít řešení pomocí 2,5krát násobného zvětšení jeho strany nebo jeho výšky. (viz Obr. 42 a 43)



Obr. 42: Ukázka správného řešení úlohy 2 c) pomocí zvětšení výšky ke straně trojúhelníku

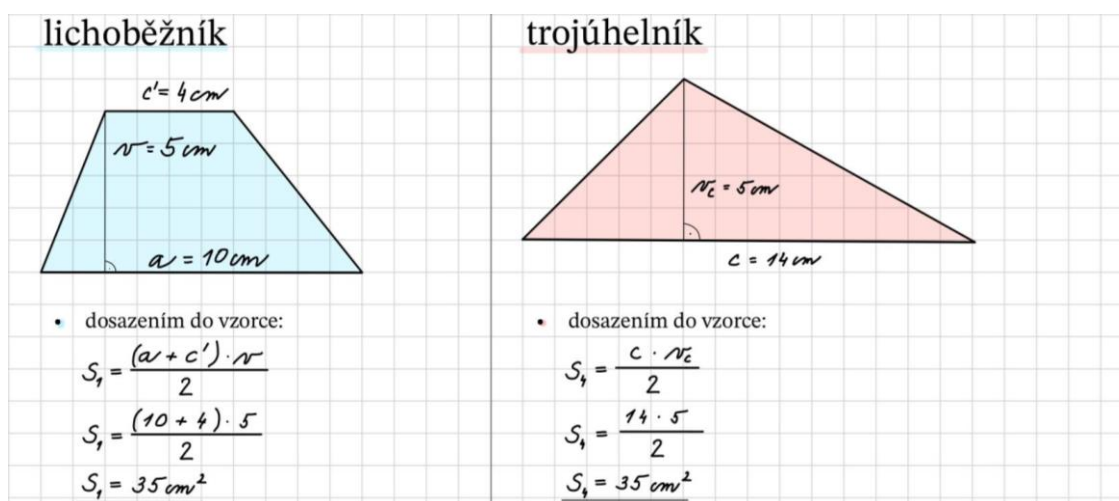


Obr. 43: Ukázka správného řešení úlohy 2 c) pomocí zvětšení strany trojúhelníku

3. Přiřaď k sobě geometrické obrazce se stejným obsahem:

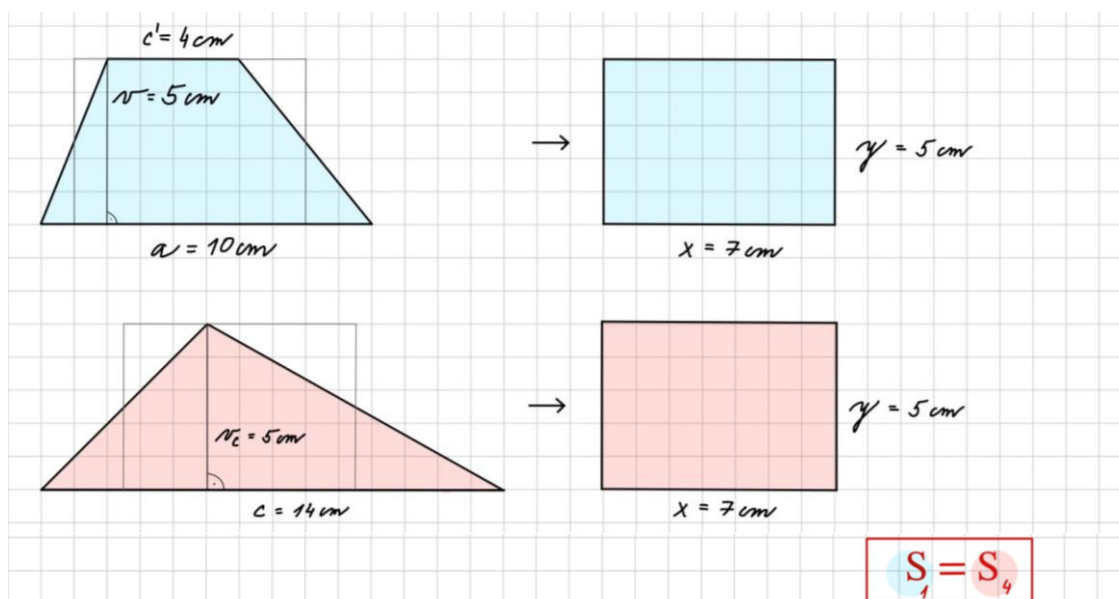
1. dvojice:

→ výpočtem:



Obr. 44: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí výpočtu u 1. dvojice obrazců

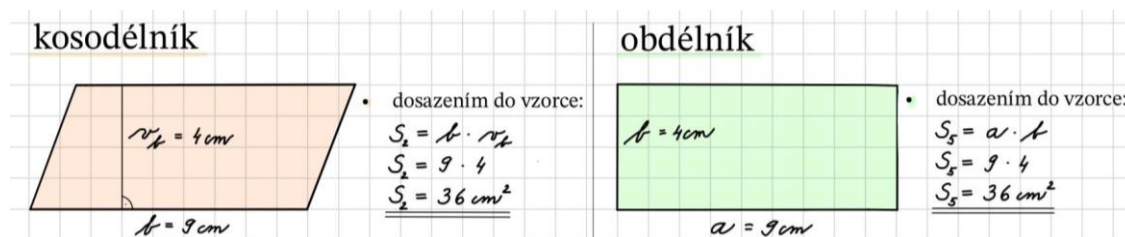
→ pomocí úpravy plochy:



Obr. 45: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí úpravy plochy u 1. dvojice obrazců

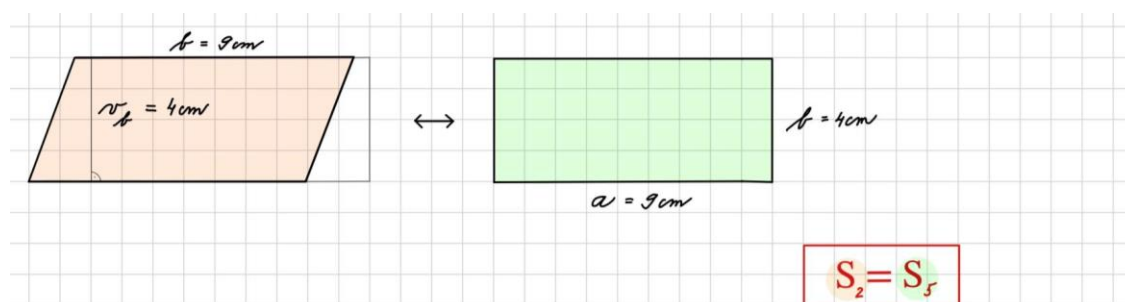
2. dvojice:

→ výpočtem:



Obr. 46: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí výpočtu u 2. dvojice obrazců

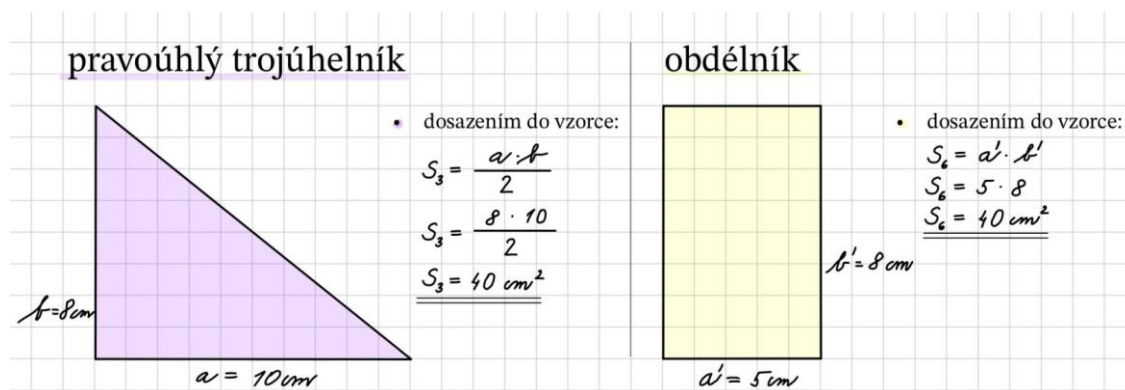
→ pomocí úpravy plochy:



Obr. 47: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí úpravy plochy u 2. dvojice obrazců

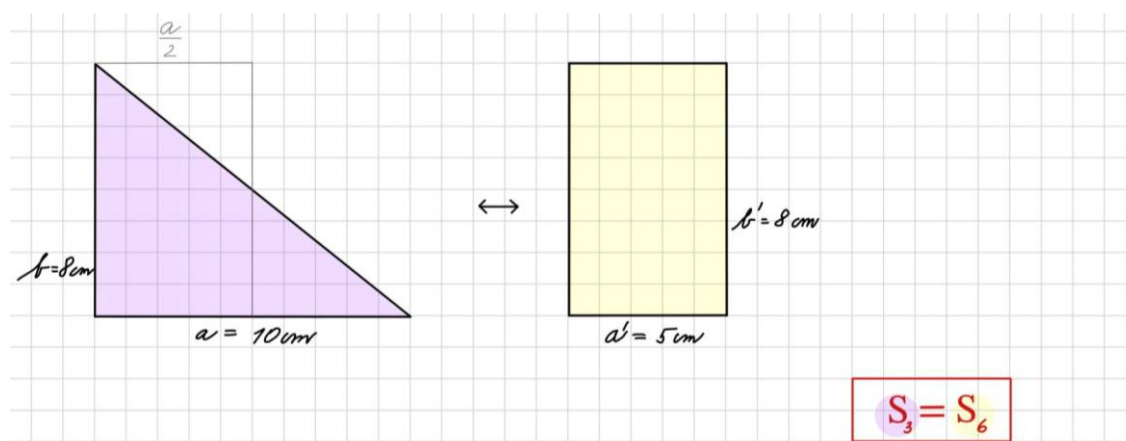
3. dvojice:

→ výpočtem:



Obr. 48: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí výpočtu u 3. dvojice obrazců

→ pomocí úpravy plochy:



Obr. 49: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí úpravy plochy u 3. dvojice obrazců

5 VÝSLEDKY A DISKUZE

Podstatou této kapitoly je interpretace získaných dat. Zabývám se zde analýzou výsledků dotazníkového šetření určeného pro pedagogy i porovnáním výsledků žákovského testování. Důležitou částí je diskuse nad stanovenými hypotézami a cíli.

5.1 Hodnocení dotazníkového šetření

Dotazník vyplnilo 79 pedagogů. Po vyplnění sekce 1 byli respondenti přesměrováni buď na sekci 2 – určenou pro pedagogy, kteří při své výuce integrují geometrii do algebraických úloh, nebo na sekci 3 – určenou pro pedagogy nevyužívající tohoto propojení. Doplnující otázky v sekci 2 tedy vyplňovalo 26 pedagogů a doplňující otázky v sekci 3 vyplňovalo 53 pedagogů. Na základě tohoto rozvržení už je patrné, že pedagogové spíše nevyužívají propojení algebry a geometrie ve své výuce.

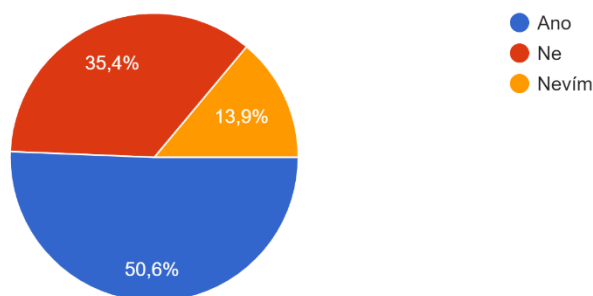
Odpovědi na jednotlivé otázky dotazníku včetně mého komentáře:

SEKCE 1

○ otázka 1-1:

Vnímáte vazbu mezi algebrou a geometrií v rámci výuky matematiky na 2. stupni ZŠ?

79 odpovědí



Graf 1: Vnímání vazby mezi algebrou a geometrií

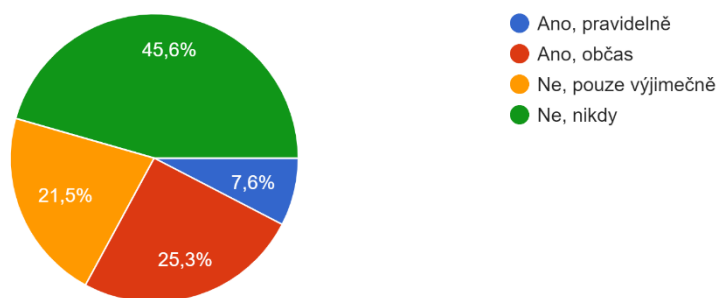
○ komentář:

Odpovědi reflektují, že pouze polovina dotázaných pedagogů (50,6 %) vnímá vazbu mezi algebrou a geometrií na 2. stupni ZŠ (viz Graf 1). Tento výsledek mě negativně překvapil, jelikož jsem očekávala vyšší procento pedagogů, kteří vazbu vnímají. Dle mého názoru jednoznačně existuje důležitá vazba mezi těmito dvěma oblastmi matematiky. Právě to, že pedagogové možnou vazbu nevnímají, může

přispět k prezentaci obou oblastí jako dvou izolovaných „světů“. Žáci na základě toho nebudou schopni vidět nejruznější souvislosti a jsou tak ochuzeni o rozmanité způsoby řešení.

○ **otázka 1-2:**

Používáte při výuce algebry prvky geometrie, například k geometrickému řešení algebraických úloh?
79 odpovědí



Graf 2: Použití prvků geometrie při výuce algebry

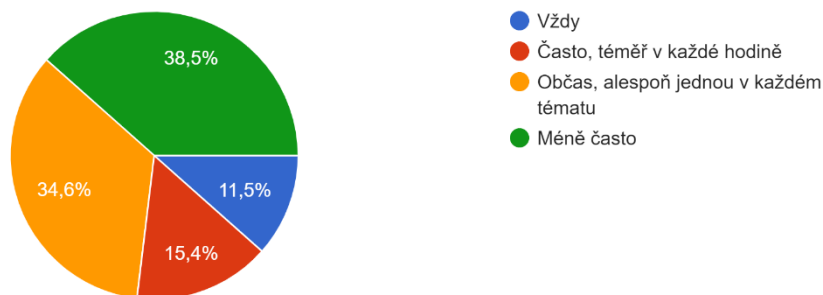
○ **komentář:**

Výsledky této otázky dopadly dle mé hypotézy č. 1, která se tímto potvrdila. Přibližně dvě třetiny dotázaných (67,1 %) běžně ve své výuce nepropojuje algebru a geometrii. Pouze 7,6 % respondentů tyto oblasti propojuje pravidelně (viz Graf 2).

SEKCE 2 (určená pro pedagogy využívající propojení algebry a geometrie ve výuce)

○ **otázka 2-1:**

Jak často integrujete koncepty algebry a geometrie ve své výuce?
26 odpovědí



Graf 3: Frekvence propojení algebry a geometrie ve výuce

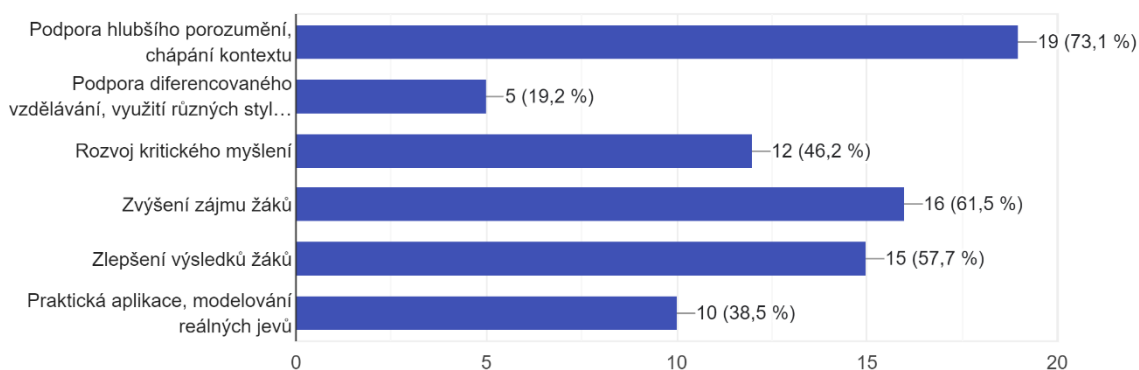
○ komentář:

Po analýze první otázky této sekce vyplývá, že většina respondentů propojující obě oblasti zařazuje propojování méně často nebo občas. Pouze 26,9 % respondentů uvádí propojování oblasti pravidelněji. Celkově ze všech 79 dotázaných to je tedy 7,02 % (viz Graf 3). Dle mého názoru právě pravidelností můžeme docílit toho, že žáci nebudou danou úlohu řešit mechanicky, ale dokáží najít různá řešení na základě hlubšího porozumění principům a konceptům, které stojí za úlohou.

○ otázka 2-2:

Uveďte důvody, proč ve výuce využíváte propojení algebry a geometrie.

26 odpovědí



Graf 4: Důvody využívání propojení algebry a geometrie

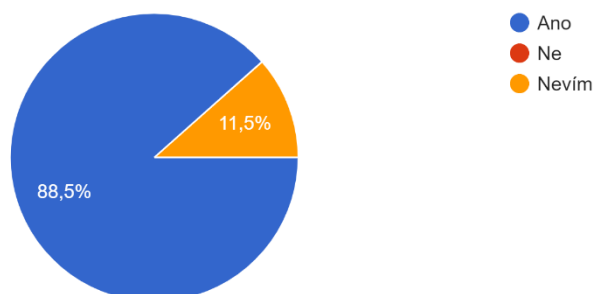
○ komentář:

V této otázce si respondenti mohli zvolit z nabídky, případně doplnit svou vlastní odpověď. Možnosti doplnění své vlastní odpovědi nikdo nevyužil. Dotázaní pedagogové propojující algebru a geometrii uvedly jako tři nejčastější důvody, proč propojení využívají, podporu hlubšího porozumění textu, zvýšení zájmu žáků a zlepšení jejich výsledků (viz Graf 4). Myslím si, že odpovědi reflektují, že vizualizace matematických problémů, může u žáků vzbudit větší zájem, jelikož se z abstraktních problémů stává něco, co vidí a mohou tomu lépe porozumět a i si to lépe zapamatovat.

○ **otázka 2-3:**

Vnímáte, že propojování algebry a geometrie ve výuce přispívá ke zlepšení výsledků žáků v matematice a celkovému porozumění vybraných kapitol?

26 odpovědí



Graf 5: Vliv propojování algebry a geometrie na výsledky žáků a porozumění učiva

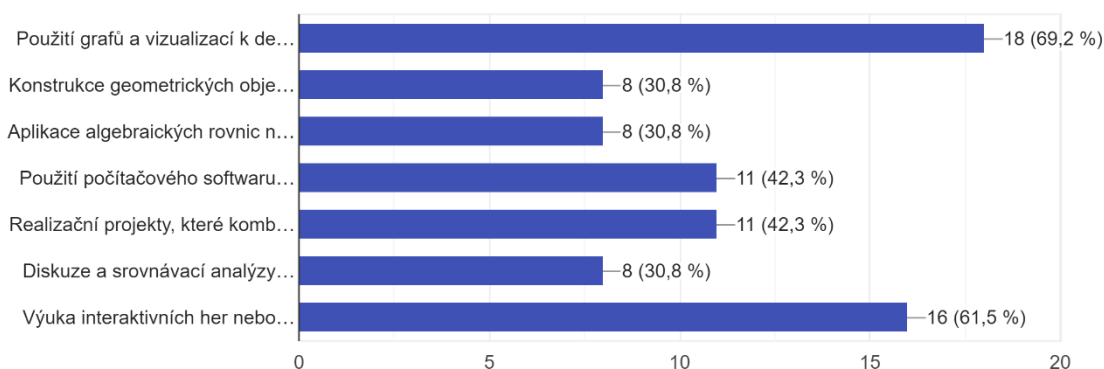
○ **komentář:**

Pozitivním výsledkem je, že žádný z dotázaných neodpověděl, že by propojování algebry a geometrie mělo negativní dopad na výsledky žáků. Naopak velká většina dotázaných (88,5 %) vnímá zlepšení v oblasti celkového porozumění kapitol i zlepšení žákovských výsledků (viz Graf 5). Na základě mého testování se projevilo zlepšení žáků v oblasti algebraických vzorců i výpočtu obsahu vybraných geometrických obrazců. Žáci se aktivněji zapojovali do výuky a následně byli schopni využít získané poznatky k efektivnímu řešení úloh. Zároveň došlo k lepšímu zapamatování jednotlivých vzorců.

○ **otázka 2-4:**

Jaké metody nebo strategie používáte k ukázání vztahu mezi algebrou a geometrií?

26 odpovědí



Graf 6: Přehled metod a strategií pro propojení algebry a geometrie

- komentář:

S velkým náskokem se mezi nejvyužívanějšími metodami ukazující vzájemný vztah algebry a geometrie umístily dvě, a to používání grafů a vizualizací a používání interaktivních her nebo aktivit zahrnující algebraické a geometrické koncepty. Možnost zodpovězení otázky pomocí své vlastní odpovědi opět nikdo nevyužil (viz Graf 6).

- **otázka 2-5** (nepovinná):

Uveďte téma, ve kterém se vám daří nejefektivněji propojovat algebraické a geometrické koncepty.

- komentář:

Tuto dobrovolnou otázku vyplnilo 12 respondentů. Nejčastější odpovědi zahrnovaly Pythagorovu větu a řešení soustav lineárních rovnic.

- **otázka 2-6** (nepovinná):

Uveďte téma, kde se vám propojení algebry a geometrie jeví jako nejkomplikovanější, nebo kde toto propojení nevyužíváte.

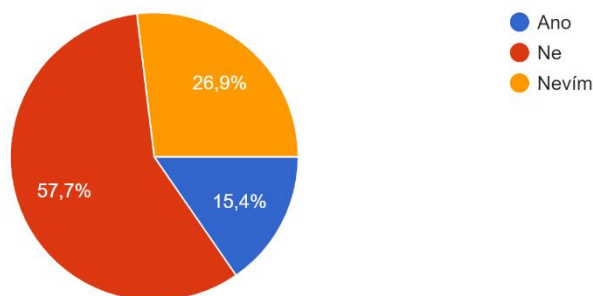
- komentář:

Tuto dobrovolnou otázku vyplnilo 10 respondentů. Nejčastější odpovědi zahrnovaly práci s proměnnou.

- **otázka 2-7:**

Domníváte se, že je k dispozici dostatečné množství výukových materiálů podporujících integraci algebry a geometrie ve výuce matematiky na 2. stupni ZŠ?

26 odpovědí



Graf 7: Náзор na množství výukových materiálů podporujících propojení algebry a geometrie

○ komentář:

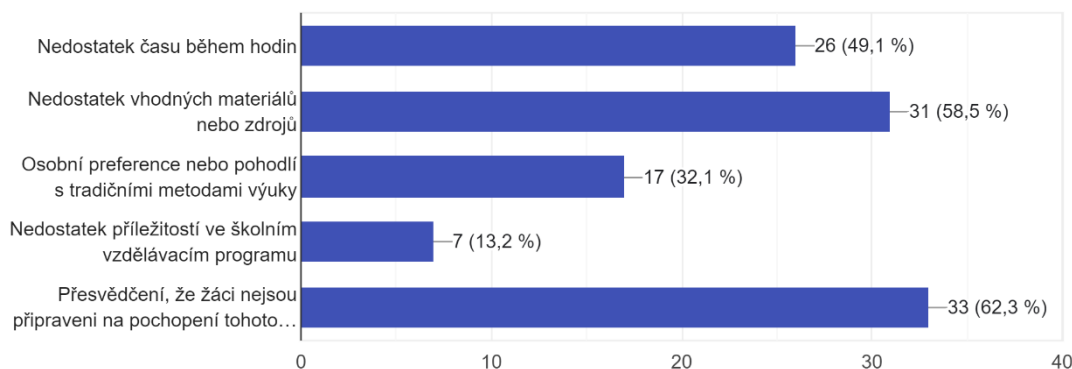
Většina dotazovaných (57,7 %) vnímá nedostatek výukových materiálů podporujících integraci algebry a geometrie (viz Graf 7). Důvodem by mohlo být to, že v mnoha učebnicích, které se na základních školách využívají, je tradiční rozdělení obou oblastí. Pedagogové pak tyto oblasti vyučují nejčastěji izolovaně bez propojování. Geometrie se často učí v rámci jednoho delšího úseku (například 1 měsíc, kde se probere celé téma nebo více témat) a poté se zase vystřídá s algebrou, nebo se často ve školách realizuje zařazení geometrie jedenkrát týdně v určený den. Žáci mívají i dva sešity, kde jeden je určený na algebru a druhý na geometrii. Poznatky z obou oblastí jsou i tímto oddělené a žáci je mohou vnímat jako dvě odlišné disciplíny. Struktura a organizace výuky může ovlivnit, jak žáci budou vnímat vzájemný vztah mezi algebrou a geometrií. Značné množství respondentů (26,9 %) odpovědělo, že nevědí, zda je k dispozici dostatečné množství materiálů podporujících toto propojení. Nevědomost může odrážet spokojenost pedagogů s existujícími učebními materiály, které například běžně využívají a algebru a geometrii nepropojují, a tudíž nevyhledávají žádné jiné metodiky.

SEKCE 3 (určená pro pedagogy nevyužívající propojení algebry a geometrie ve výuce)

○ **otázka 3-1:**

Uveďte důvody, proč ve výuce nevyužíváte propojení algebry a geometrie.

53 odpovědí



Graf 8: Důvody nevyužívání propojení algebry a geometrie

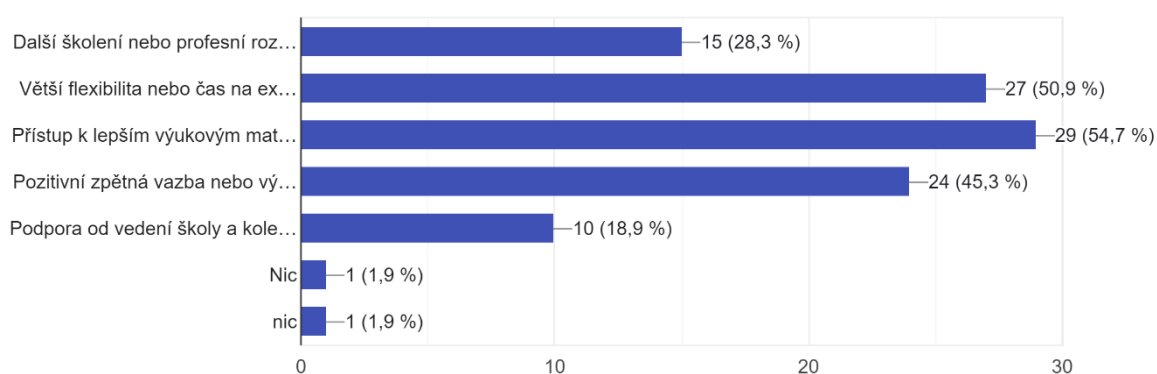
○ komentář:

Dotazovaní pedagogové, kteří ve výuce propojení nevyužívají, za nejčastější důvod nevyužívání označili, že žáci nejsou připraveni na pochopení tohoto propojení (viz Graf 8). Myslím si, že toto propojení nemusíme nutně vnímat jako něco, co by se žáci museli učit navíc, ale naopak jako prostředek, jak některým matematiku vizualizovat a přiblížit. Opět možnost „jiné“, do které by respondenti mohli napsat svou vlastní odpověď nikdo nevyužil.

○ otázka 3-2:

Co by Vás mohlo podpořit nebo motivovat k začlenění geometrie do výuky algebry?

53 odpovědí



Graf 9: Faktory motivující pedagogy k propojování algebry a geometrie ve svých hodinách

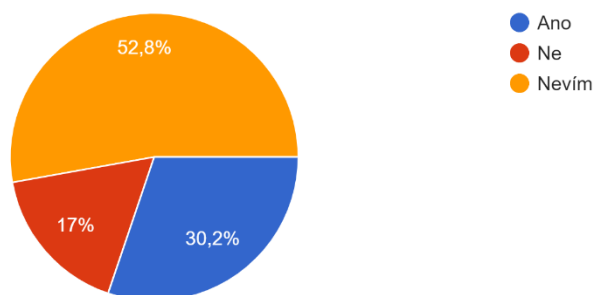
○ komentář:

Nejčastější motivací pro dotazované pedagogy by byl přístup k lepším výukovým materiálům nebo technologiím, větší flexibilita nebo čas na experimentování s novými metodami výuky a pozitivní zpětná vazba nebo výsledky žáků (viz Graf 9). Vzhledem ke zkušenostem dotazovaných v otázce 2-3 (viz Graf 5), by se výsledky žáků mohly na základě zařazení propojení algebry a geometrie zlepšit. Dva respondenti zároveň využili možnost odpovědět na otázku prostřednictvím své vlastní odpovědi, která zněla, že by je k začlenění geometrie do výuky algebry nemotivovalo nic.

○ **otázka 3-3:**

Myslíte si, že by propojení algebry a geometrie mohlo přispět ke zlepšení výsledků žáků v matematice a celkovému porozumění vybraných témat?

53 odpovědí



Graf 10: Názory pedagogů na přínos propojení algebry a geometrie pro lepší výsledky žáků a celkové porozumění vybraných témat

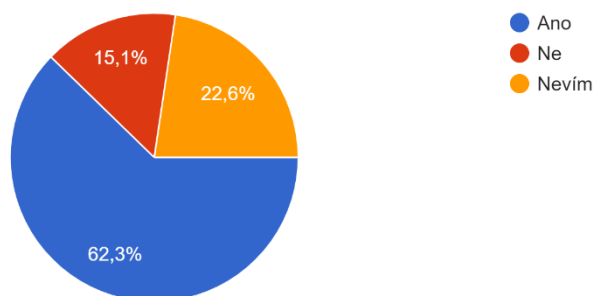
○ komentář:

Vzhledem k tomu, že tuto sekci vyplňovali pouze pedagogové, kteří algebru a geometrie ve výuce cíleně nepropojují, byla očekávanou nejčastější odpovědí odpověď „Nevím“, která se potvrdila s výsledkem 52,8 % z dotázaných (viz Graf 10).

○ **otázka 3-4:**

Jste ochotni vyzkoušet v hodinách matematiky výukové aktivity zaměřené na propojení algebry a geometrie, pokud by vám byly poskytnuty příslušné výukové materiály?

53 odpovědí



Graf 11: Ochota pedagogů vyzkoušet výukové aktivity zaměřené na propojení algebry a geometrie

○ komentář:

Pozitivním zjištěním je, že mezi dotazovanými pedagogy nepropojujícími algebru a geometrii lze nalézt 62,3 % těch, kteří by byli ochotni vyzkoušet v hodinách matematiky právě výukové aktivity propojující algebru a geometrii, pokud by jim byly tyto materiály poskytnuty. Naopak je smutné, že tyto materiály nejspíš nejsou schopni sami vytvořit (viz Graf 11).

5.2 Hodnocení testování žáků

Testování žáků proběhlo dle plánu, který byl představen v kapitole 3.5. Obě třídy vypracovaly na začátku týdne pre-test, ve třídě 9.B dále proběhly dvě vyučovací hodiny s uvedenými výukovými aktivitami. Obě třídy pak na konci týdne řešily post-test.

Při výukových aktivitách ve třídě 9.B se vyučující řídila metodickými poznámkami, vše proběhlo dle předchozí dohody a plánu, pouze při první hodině (algebraické vzorce) žáci nestihli všechny příklady na procvičení. Příklady v poslední části výukové aktivity pro tuto hodinu, na vzorec $a^2 - b^2$, dostali žáci jako domácí procvičování a paní učitelka se ke kontrole výsledků vrátila v úvodu následující hodiny. Nejsložitější úkol pro žáky bylo pochopení geometrického důkazu $a^2 - b^2$, kterému musela vyučující věnovat vyšší časovou dotaci a vysvětlení důkazu zopakovat. Bylo to možná způsobeno tím, že byl uložen k domácí přípravě.

Vyučující hodnotila všechny výukové aktivity jako přínosné, potvrdila zvýšený zájem a motivaci u žáků. Žáci byli v obou hodinách aktivní a dobře se zapojovali i v práci ve skupinách v úvodních částech hodiny. Vyučující využila výukové aktivity i v následujícím týdnu ve třídě 9.A. Zároveň ocenila podrobné řešení pre-testu a post-testu, které naplánovala žákům promítnout a dodatečně s nimi možné řešení projít.

Post-test proběhl v obou třídách opět ve stejný den na konci týdne. Vzhledem k podobnosti zadání pre-testu a post-testu se potvrdilo očekávání, že žáci obou tříd druhý test vyplní o něco rychleji než pre-test. Na pre-testu strávili přibližně 20 minut času, na závěrečném testu zhruba 15 minut.

Testování se nakonec zúčastnilo:

- Třída 9.A: pre-test: 23 žáků
post-test: 21 žáků
- Třída 9.B: pre-test: 19 žáků
post-test: 20 žáků (1 přišel po nemoci, při hodnocení zařazen ke třídě 9.A, jelikož stejně jako třída 9.A neabsolvoval výukové aktivity)

Hodnocení výsledků pre-testu od žáků obou tříd, skončilo velice podobně. Potvrdilo se, že žáci nejsou zvyklí řešit úlohy s pomocí geometrie a neuvědomují si ani její možnou aplikaci.

Z celkového počtu 42 žáků zvládly test bezchybně vyřešit 2 žáci. Dalších 7 žáků dokázalo vyřešit vše, kromě cvičení 2 b), c), což se celkově ukázalo jako nejproblematictější úloha pre-testu. U žádného žakovského řešení nebylo znát využití geometrie. Nejčastějším problémem při řešení bylo chybné zapamatování vzorce nebo jeho neznalost. Vybrala jsem ukázková řešení, která patřily k nejčastějším způsobům, jak žáci obou tříd jednotlivé úlohy řešily, a na kterých jsou vidět nejčastější chyby žáků.

Ukázková řešení žáků – pre-test:

ÚLOHA 1

1. Uprav:

a) $(a + 4)^2 = a^2 + 4^2 = a^2 + 16$

b) $(3 - b)^2 = 9 - b^2$

c) $x^2 - 4 = (x - 2)^2$

- žák 9.A – opomenutí členu $2ab$ při rozkladu, je znát, že žák ve vzorcích nevidí žádnou souvislost a pravděpodobně si u prvních dvou příkladů neuvědomil, že nemůže odstranit závorku a výraz přepsat jako součet (rozdíl) dvou druhých mocnin

1. Uprav:

a) $(a + 4)^2 = a^2 + 16a^2 + 16$

b) $(3 - b)^2 = 9 - 9b^2 + b^2$

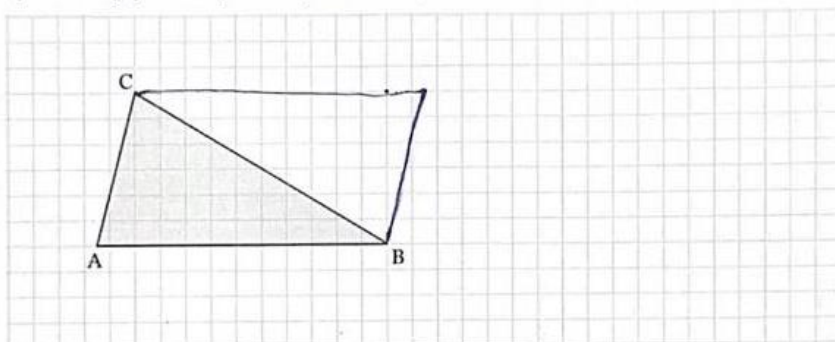
c) $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

- žákyně 9.B – chybné dopočítání členu $2ab$

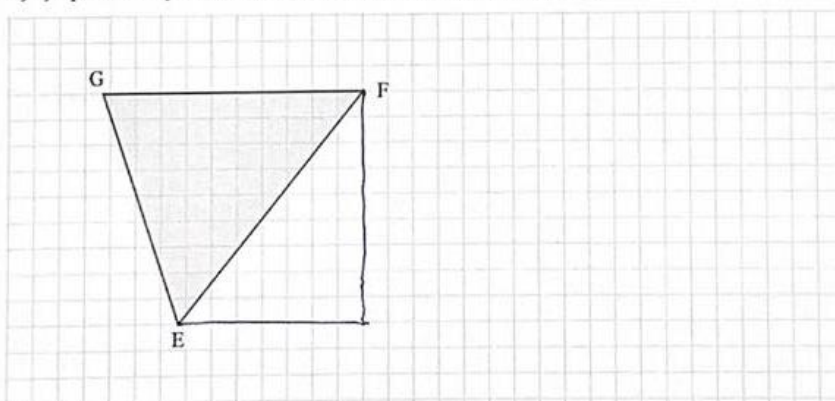
ÚLOHA 2

2. Načrtni trojúhelník, který:

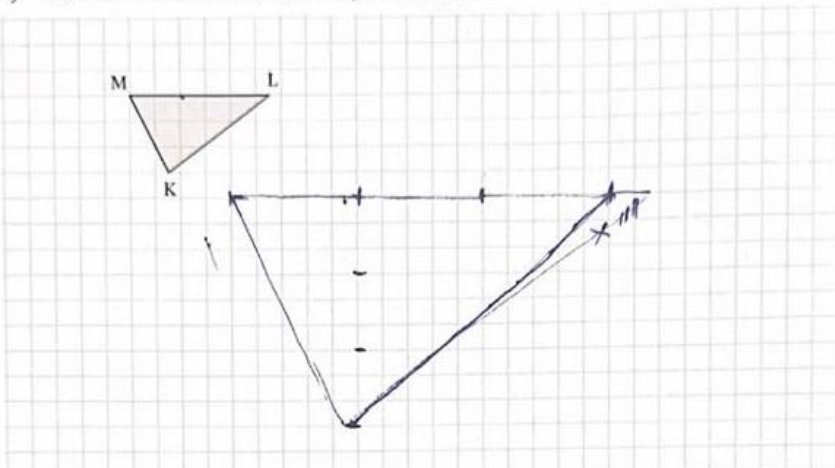
a) má stejný obsah jako trojúhelník ABC,



b) je pravoúhlý a má stejný obsah jako trojúhelník EFG,



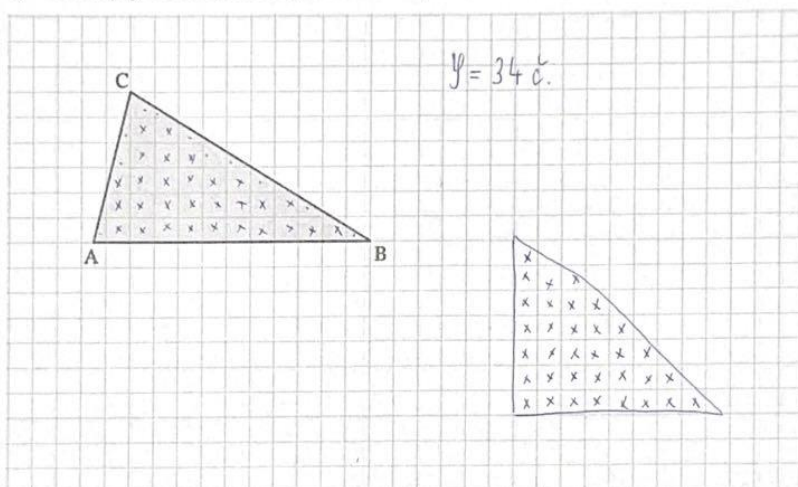
c) má třikrát větší obsah než trojúhelník KLM



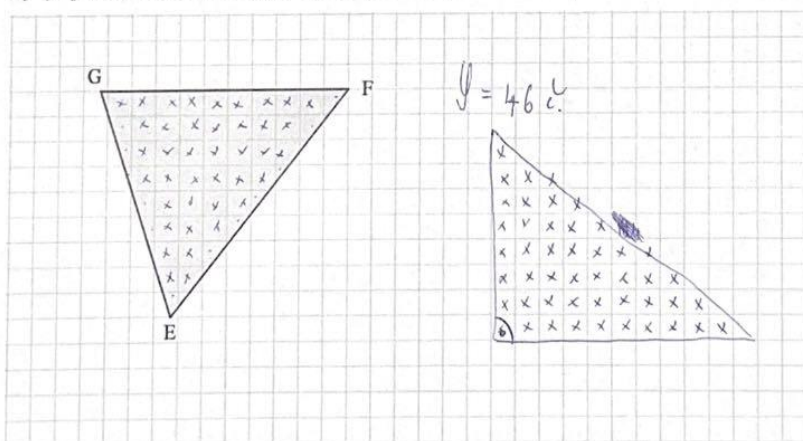
- žák 9.A – příklad a) vyřešil správně, využil doplnění na kosodélník, u příklad b) je často se opakující chybné řešení, při řešení příkladu c) žák začal správně zvětšovat třikrát stranu trojúhelníku, ale neuvědomil si propojenost se vzorcem na obsah trojúhelníku a následně zvětšil i jeho výšku, i toto chybné řešení se vyskytovalo velice často

2. Načrtni trojúhelník, který:

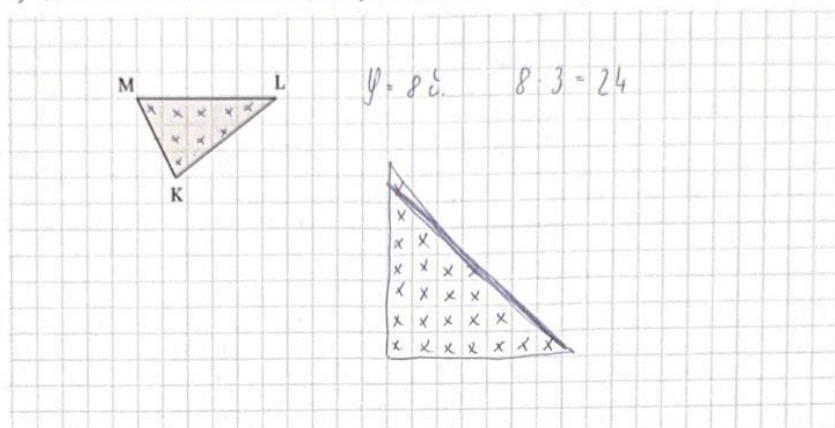
a) má stejný obsah jako trojúhelník ABC,



b) je pravoúhlý a má stejný obsah jako trojúhelník EFG,



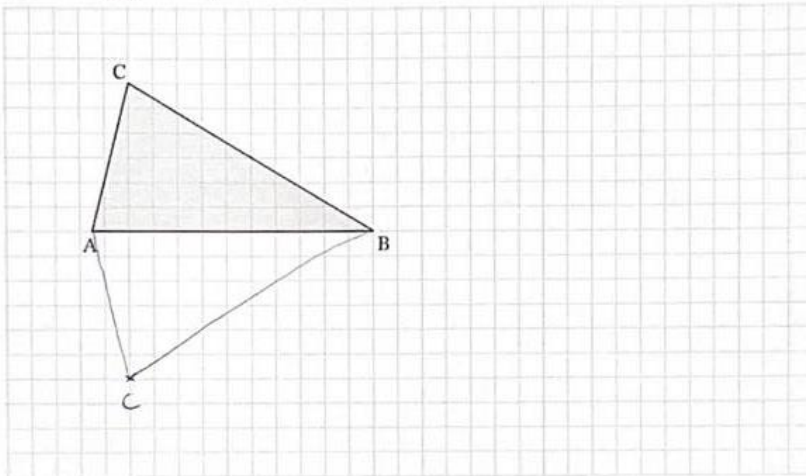
c) má třikrát větší obsah než trojúhelník KLM



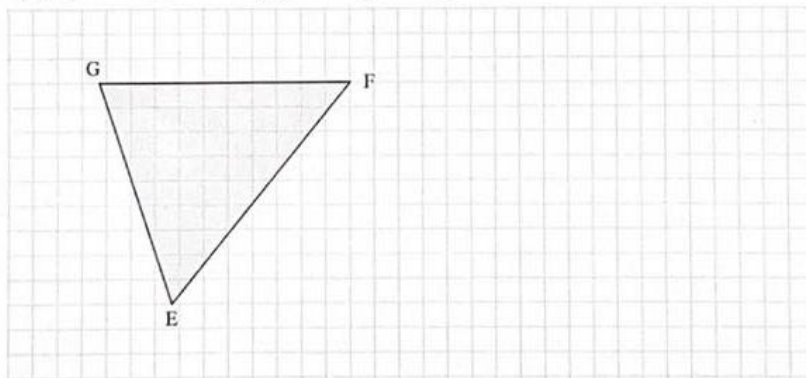
- o žák 9.B – vhodná strategie řešení pomocí součtu jednotlivých čtverečků a následném pokusu o vytvoření trojúhelníků se stejným počtem (u příklad c) s třikrát větším počtem) čtverečků, výsledek je nepřesný, jelikož žák sečetl čtverce na celé „jednotky“ a nepočítal s částmi čtverců

2. Načrtni trojúhelník, který:

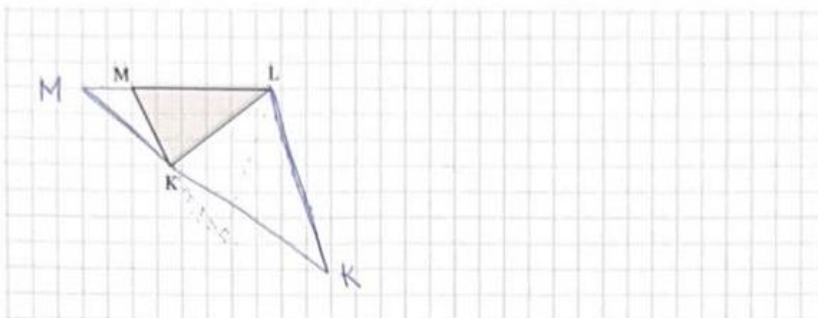
a) má stejný obsah jako trojúhelník ABC,



b) je pravoúhlý a má stejný obsah jako trojúhelník EFG,



c) má třikrát větší obsah než trojúhelník KLM

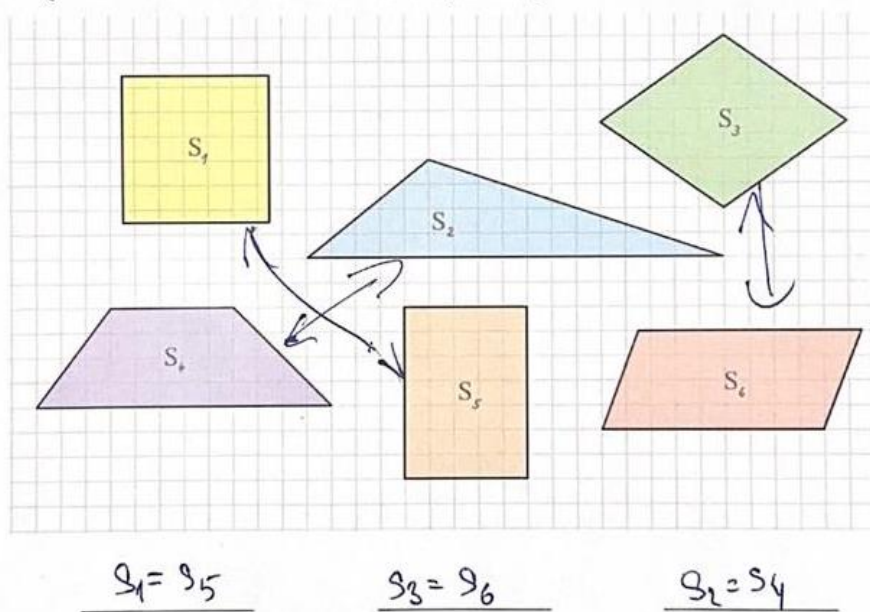


- o žákyně 9.B – příklad b) a následně i c) patřil k nejčastěji vynechávaným příkladům testu, příklad b) celkově nevyřešilo a ani se nepokusilo vyřešit 11 žáků, z těchto tří příkladů byl příklad a) nejčastěji vyřešen správně a nejčastější jeho řešení bylo právě řešení shodné s řešením této žákyně

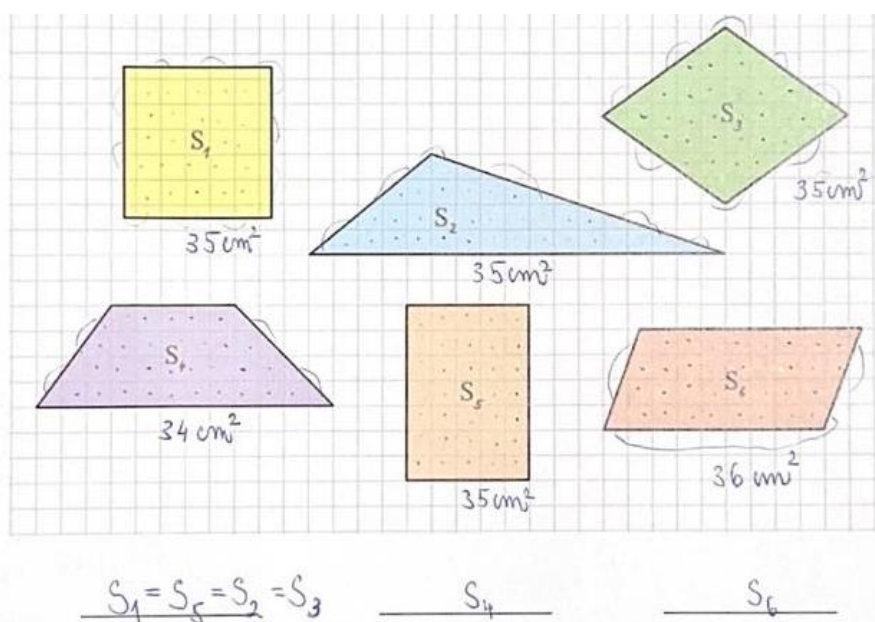
ÚLOHA 3

3. Přiřaď k sobě dvojice geometrických obrazců se stejným obsahem.

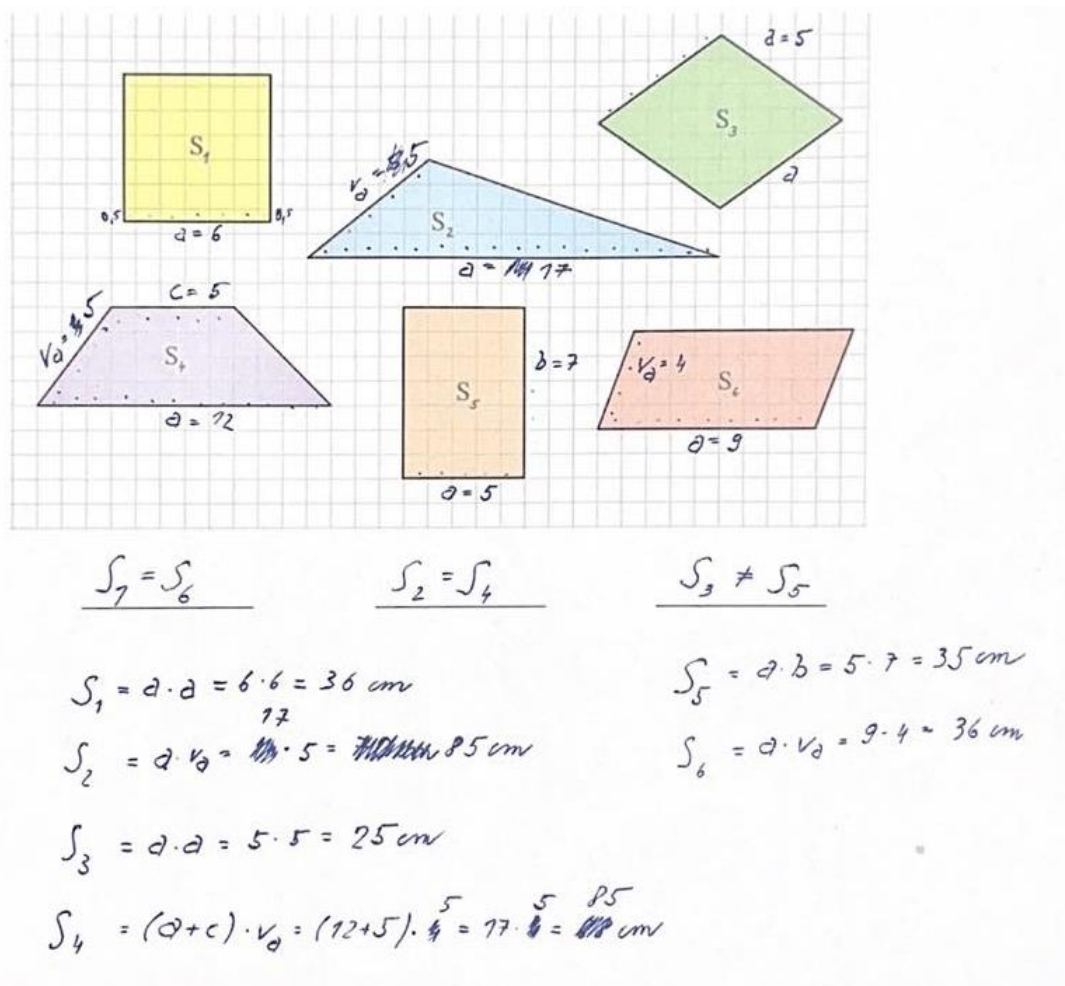
(1 čtvereček ve čtvercové síti znázorňuje 1 cm^2):



- o žák 9.B – mezi nejčastější řešení této úlohy patřilo náhodné přiřazení dvojic asi na základě prvního pohledu, možná i spojení na základě podobnosti geometrických útvarů (čtverec-obdélník, lichoběžník-trojúhelník, kosočtverec-kosodélník), žák má problémy s určením plochy útvaru, pokud se nejedná o útvar vyplněný celými čtverečky



- žákyně 9.A – řešení má naznačeno výpočet pomocí dopočtu ve čtvercové síti, žáci si spočítali počet čtverců v daném útvaru, občas nebylo jednoduché určit přesný počet čtverců především u kosích stran útvarů, zde docházelo k chybám



- žák, 9.B – chybně dopočítané kosé strany útvarů, chybně použity vzorce pro určité obrazce (např. kosodélník) – opakující se problém s určením plochy, pokud není útvar složen z celých čtverců, zároveň při zjištění, že výsledek výpočtu nevychází dle předpokladů, hledá žák nápravu pouze kalkulativně, nepřipouští si, že použil chybný vzorec

Při porovnání výsledků post-testu tříd 9.A a 9.B, se ukázalo, že žáci třídy 9.B při řešení druhého testu efektivněji využili geometrii při řešení a neměli tolik chyb ve vzorcích, lépe si je pamatovali. Třída 9.B byla v řešení úspěšnější, ani jeden žák nevynechal žádnou úlohu, oproti tomu ve třídě 9.A opět někteří žáci vynechali úlohu 2.

Největší zlepšení bylo právě v úloze 2, kterou dokázalo správně vyřešit ze třídy 9.B 14 z 19 testovaných žáků. Ve třídě 9.A se úspěšnost shodovala s úspěšností pre-testu.

Ukázková řešení žáků – post-test:

ÚLOHA 1

1. Uprav:

a) $(5 + b)^2 = 5^2 + b^2 = 25 + b^2$

b) $(a - 4)^2 = a^2 - 2^2$

c) $9 - y^2 = (3 + y)^2$

- žák 9.A – opět chybně použit vzorec, chybí člen $2ab$, toto řešení bylo ve třídě 9.A opět poměrně častou chybou

1. Uprav:

a) $(5 + b)^2 = 25 + 10b + b^2$

b) $(a - 4)^2 = a^2 - 8a + 16$

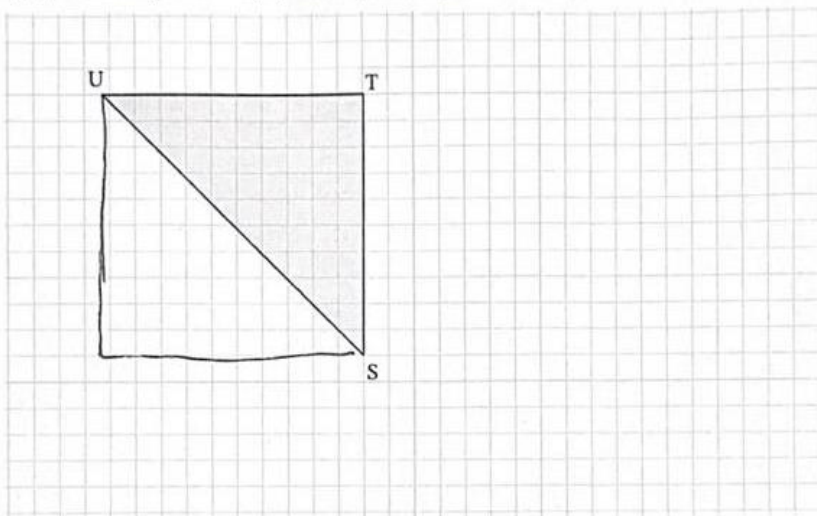
c) $9 - y^2 = (3 - y)(3 + y)$

- žák 9.B – správně vyřešená úloha, toto cvičení dokázalo vyřešit bezchybně 13 z 19 žáků, další 4 žáci měli pouze drobné chyby ve výpočtu, ne v použitém vzorci

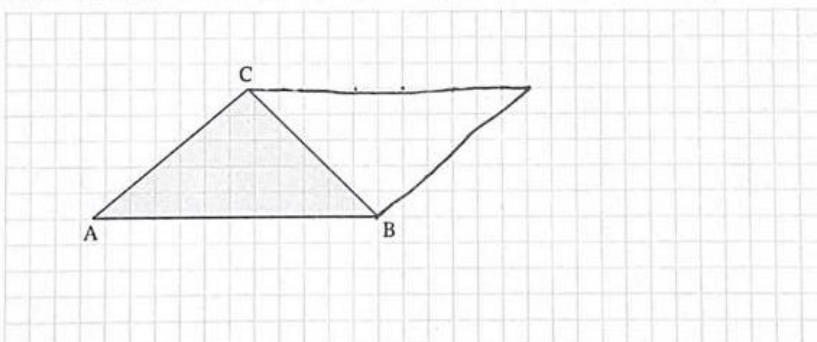
ÚLOHA 2

2. Načrtni trojúhelník, který:

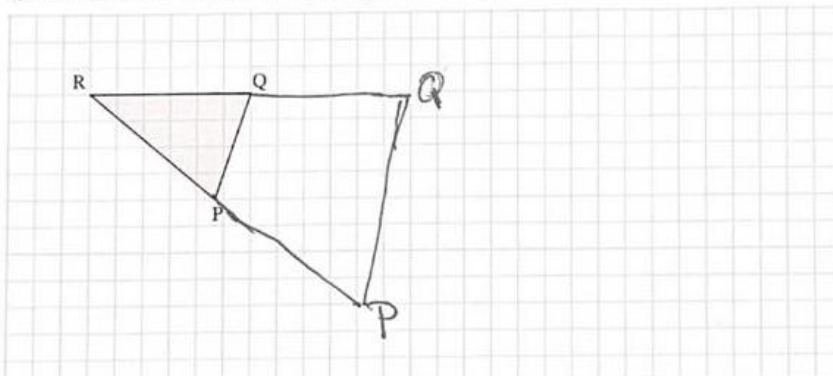
a) je ostroúhlý a má stejný obsah jako trojúhelník STU,



b) je tupouhlý a má stejný obsah jako trojúhelník ABC,



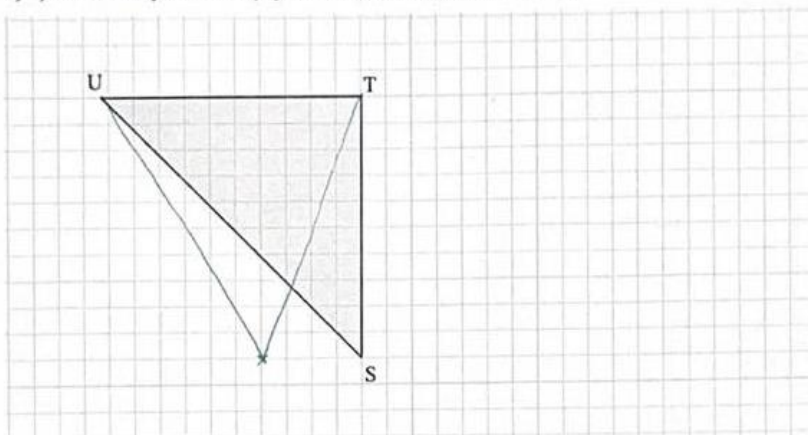
c) má 2,5krát větší obsah než trojúhelník PQR.



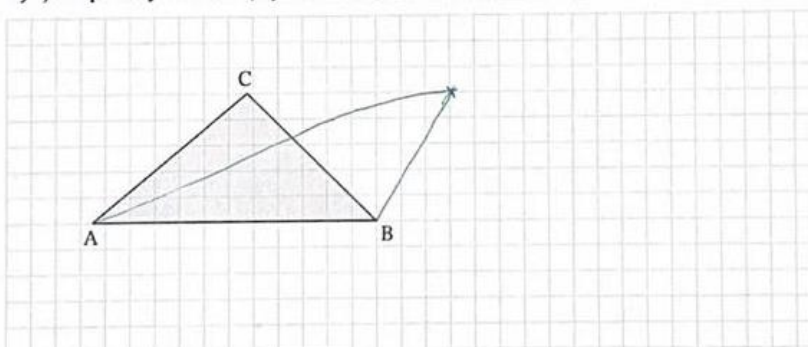
- žák 9.A – žák s drobnou nepřesností dodržel pomocí překlopení útvarů stejných obsahů, ale nedokázal dodržet další podmínky nově vzniklého trojúhelníku, úloha c) je opět řešena odhadem

2. Načrtni trojúhelník, který:

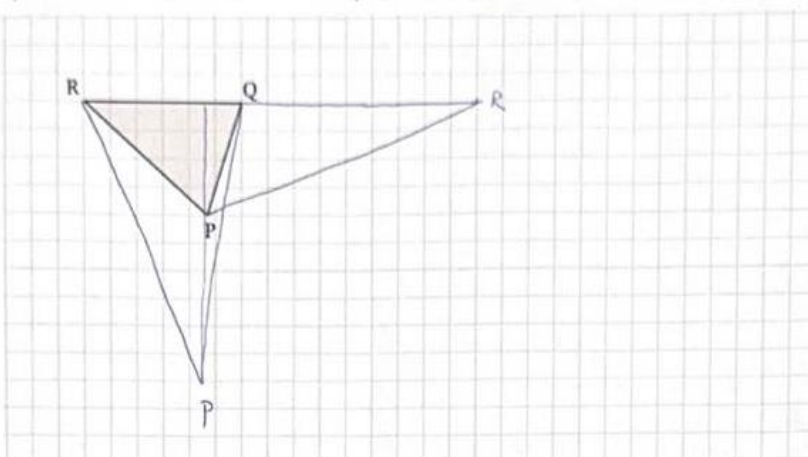
a) je ostroúhlý a má stejný obsah jako trojúhelník STU,



b) je tupouhlý a má stejný obsah jako trojúhelník ABC,



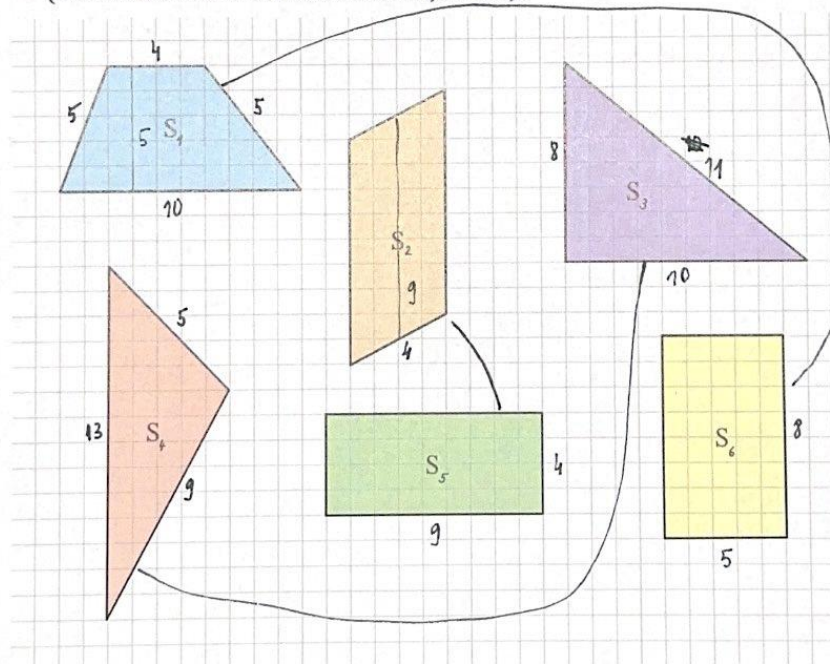
c) má 2,5krát větší obsah než trojúhelník PQR.



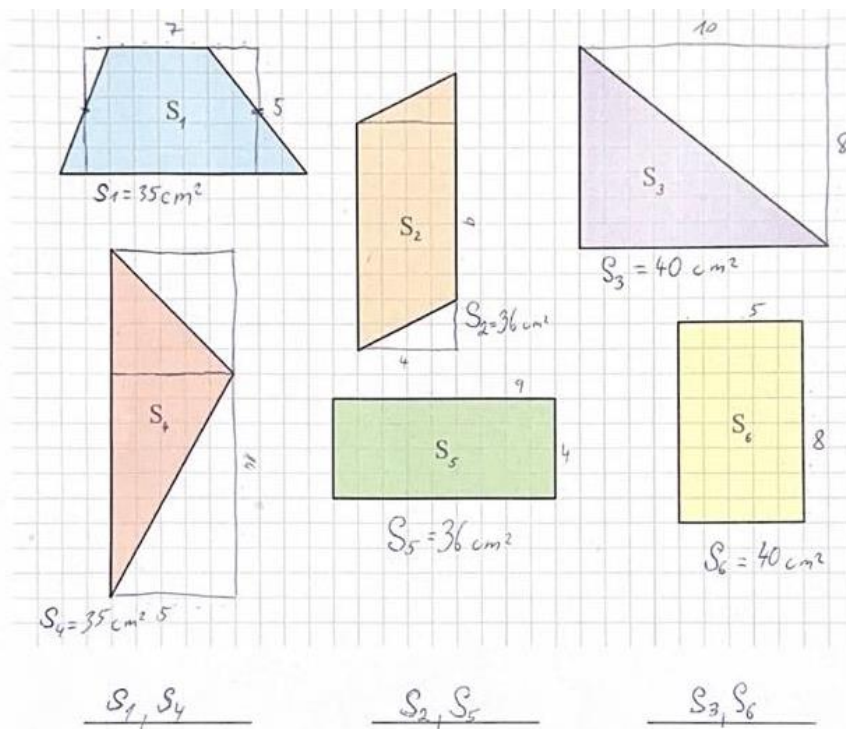
- žák 9.B – správné řešení, u úloh a) i b), žák správně využil ponechání délky jedné strany a pohybu třetího bodu po rovnoběžce s touto stranou, tím je tedy i podle vzorce dodržen stejný obsah, jelikož výška ani strana potřebná při výpočtu ze vzorce je stále stejná, u úlohy c) uvedena dokonce dvě správná řešení

ÚLOHA 3

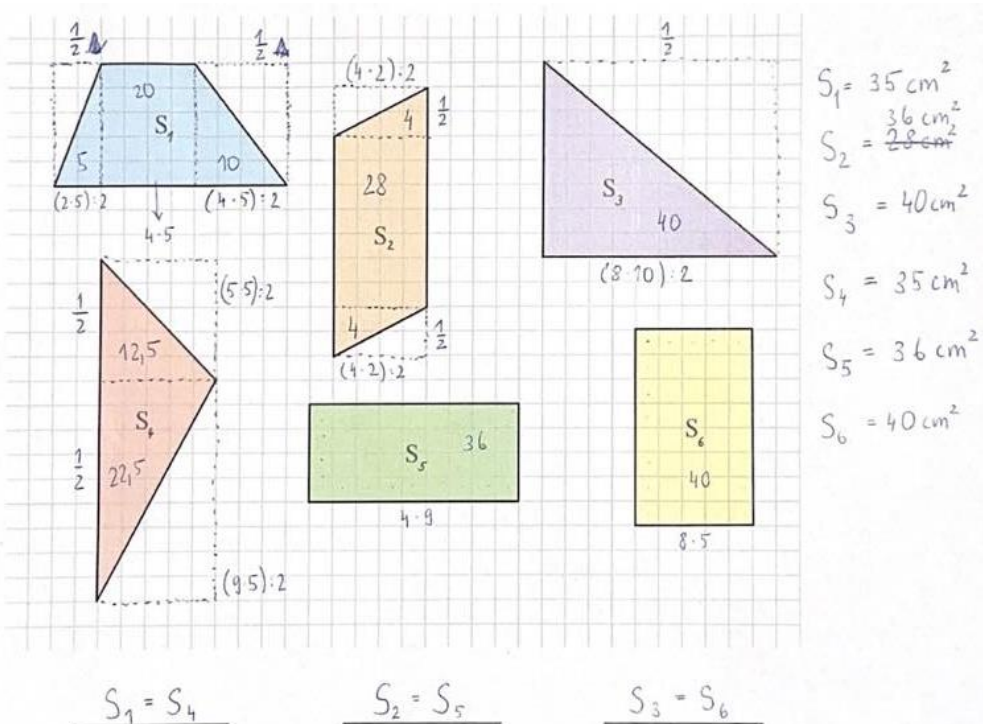
3. Přiřaď k sobě dvojice geometrických obrazců se stejným obsahem.
(1 čtvereček ve čtvercové síti znázorňuje 1 cm^2):



- žák 9.A – žák nesprávně využívá vzorce pro výpočet obsahu jednotlivých obrazců, jeho představa o zjišťování obsahu je pravděpodobně založena na představě, že se „nějak vynásobí rozměry obrazce“, délky stran jsou však také chybně určeny, délky stran korespondují spíše s počtem čtverců, kterými tyto strany procházejí a neodpovídají skutečné délce



- žák 9.B – využití odvození vzorců pro obsahy geometrických obrazců, přemístění částí původního obrazce tak, aby získal obdélník se stejným obsahem, je patrné, že žák vnímá souvislosti mezi proměnnými ve vzorci a plochou daného obrazce



- žákyně 9.B – rozdělení útvarů na dílčí útvary (čtverce, obdélníky a trojúhelníky), plocha celého obrazce určena jako součet obsahů jednotlivých částí obrazce

5.3 Ověření hypotéz

Ověření hypotéz

Hypotéza 1:

- Většina pedagogů na 2. stupni základních škol nevyužívá nebo využívá pouze výjimečně vazby algebry a geometrie. Do své výuky neintegrují aktivity zaměřené na propojení algebry a geometrie a obě oblasti učí především izolovaně.

- ověření:

Tato hypotéza byla prostřednictvím dotazníkového šetření určeného pro pedagogy potvrzena. Z výsledků plyne, že 67,1 % dotazovaných pedagogů na 2. stupni základních škol propojení algebry a geometrie nevyužívá nebo využívá pouze výjimečně.

Hypotéza 2:

- Žáci nejsou zvyklí využívat geometrii při algebraických úlohách a vazbu mezi těmito dvěma oblastmi nevnímají.

- ověření:

Tato hypotéza byla prostřednictvím testování žáků 9. ročníku potvrzena. Při vyhodnocení výsledků pre-testu obou tříd bylo znát, že žáci při řešení nevyužili efektivně geometrii. Někteří žáci vůbec neznali vzorce nebo si je nesprávně vybavili a nedokázali bez nich úlohy správně vyřešit. Nevnímali možnost vzorce si odvodit nebo přijít na různé způsoby, jak při řešení úloh postupovat.

Hypotéza 3:

- Vyučovací aktivity zaměřené na propojení algebry a geometrie zlepšují schopnosti žáků aplikovat geometrii při řešení algebraických úloh, mají pozitivní dopad na vnímání vazby mezi proměnnými jako abstraktní složky matematiky a čísla jako konkrétními hodnotami a jsou účinným nástrojem pro zefektivnění výuky obou oblastí.

- ověření:

Tato hypotéza byla prostřednictvím opětovného testování žáků 9. ročníku potvrzena. Žáci třídy 9.A ve srovnání s třídou 9.B, která mezi pre-testem a post-testem absolvovala navíc výukové aktivity zaměřené na propojování algebry a

geometrie, napsali post-test s horšími výsledky. Celkově měli největší problém s úlohou 2, která byla založena na propojení určení plochy trojúhelníku s jeho vizualizací. V pre-testu tento problém měly obě třídy, ale třída 9.B po absolvování výukových aktivit dokázala využít geometrii k efektivnějšímu řešení úloh. Také bylo znát velké zlepšení při zapamatování vzorců, jelikož žákům pomocí vizualizace dávali i při hodinách větší smysl a následně při testu si díky geometrickému důkazu dokázali vzorec lépe vybavit a aplikovat.

ZÁVĚR

Na základě dotazníku pro pedagogy, který byl zaměřen na propojování algebry a geometrie v hodinách matematiky na 2. stupni základních škol, jsem získala potřebné informace o názorech, přístupech a preferencích pedagogů v této problematice a na základě toho jsem vytvořila výukové aktivity do hodin matematiky, kde byly propojeny abstraktní algebraické výrazy a konkrétní geometrické vizualizace vybraných matematických úloh. Prostřednictvím testování žáků ve dvou třídách, bylo ověřeno, že výukové aktivity zaměřené na propojení algebry a geometrie mají pozitivní dopad na pochopení a odvození algebraických vzorců a vzorců pro výpočet obsahu geometrických obrazců. Vytvořené výukové aktivity budou v rámci této práce k dispozici k tisku či promítnutí, včetně výsledků, podrobného řešení testů a metodických poznámek pro pedagogy.

Závěrem bych chtěla zdůraznit, že propojení algebry a geometrie je skvělý a účinný nástroj, jak přispět u žáků k hlubšímu porozumění a pochopení matematických problémů, a zároveň jak u nich vypěstovat lepší kritické myšlení, které je v dnešním světě plném informací, stále důležitější. Obrázky a vizuální paměť jsou dětem blízké již od dětství, ale v matematice často dochází k úbytku vizuálních podnětů. Geometrie a algebra se během výuky stávají dvěma odlišnými oblastmi díky jejich separaci, čímž žák mezi nimi nenachází žádné propojení a souvislost.

Domnívám se, že matematika by neměla být postavená na mechanickém učení vzorců. Měla by v žácích vzbuzovat touhu po objevování a uvědomování si možností aplikace matematických konceptů do reálného života. Jako pedagogové bychom se měli snažit rozvíjet u žáků zvědavost a logické myšlení, k čemuž nám může pomoci právě vizualizace matematických problémů. Žáci si pomocí toho učivo lépe zapamatují, pro někoho nicneříkající abstraktní pojmy dostanou smysl a žák si dokáže odvodit nové poznatky na základě propojení souvislostí. Integrace algebry s geometrií a zařazení vizualizací a geometrických důkazů do algebry může směřovat ke zlepšení matematické gramotnosti u žáků.

Touto prací bych ráda vzbudila zájem o propojování těchto dvou oblastí matematiky nejen mezi žáky, ale především u pedagogů, na kterých leží úkol motivovat žáky k objevování nového. Věřím, že vytvořené výukové aktivity budou užitečným

nástrojem i pro další pedagogy. Doufám, že získáváním větších zkušeností v roli pedagoga se mi podaří této problematice porozumět ještě lépe a svůj přístup i metody zdokonalit.

SEZNAM LITERATURY A POUŽITÉ ZDROJE

1. Bečvářová, M. (2002). Eukleidovy základy, jejich vydání a překlady. Dějiny matematiky. Praha: Prometheus. ISBN 8071962333.
2. Corry, L. (2023). algebra. Encyclopedia Britannica. [online]. [cit. 23. 11. 2023]. Dostupné z: <https://www.britannica.com/science/algebra>.
3. Eisenmann, P., Novotná, J., Příbyl, J. (2015). Tvořivě při řešení úloh v matematice. In: Dva dny s didaktikou matematiky 2015. Praha: UK – PedF, pp. 9 – 22.
4. Hanna, G., & de Villiers, M. (Eds.). (2012). Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study. Springer. ISBN 978-94-007-2128-9.
5. Hejný, M., Novotná, J., Vondrová, N. (Eds.). (2004). Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. ISBN 8072901893.
6. Hilbert, D., Cohn-Vossen, S. (1932). Anschauliche Geometrie. Berlin: Springer. [online]. [cit. 23. 11. 2023]. Dostupné z: <http://eudml.org/doc/204121>.
7. Kuřina, F. (2005). Geometrie a geometrické vzdělávání. In S. Olivík (Ed.), Sborník příspěvků 25. Konference o geometrii a počítačové grafice (15–22). Praha: JČMF.
8. Laubeová, A., Matasová, B., Mierva, T., Nádvorníková, P., Presová, J. et al. (2021) Hravá matematika 8: učebnice pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia : v souladu s RVP. Praha: Taktik. ISBN 978-80-7563-265-4.
9. Martignon, L., Rechtsteiner, C. (2022). The Benefits of an Interdisciplinary Approach to Mathematics Education on Issues Around Computation in School. Front. Psychol., 02. června 2022, sekce Educational Psychology, svazek 13 - 2022. [online]. [cit. 23. 11. 2023]. Dostupné z: <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2022.533402/full>
10. MŠMT. (2023). Rámcový vzdělávací program pro základní školy. Praha: NUV. [online]. [cit. 23. 11. 2023]. Dostupné z: <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/>.
11. Nelsen, R. B. (1993). Důkazy beze slov I, Cvičení pro rozvoj vizuálního myšlení. Young Scientist. ISBN 978-80-8879-261-1.
12. Odvárko, Oldřich, a Jiří Kadleček. (2013). Matematika pro 8. ročník základní školy - 1.díl. 1. vydání. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-434-6.
13. Vondrová, N., Rendl, M. (2015). Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků. V Praze: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum. ISBN 9788024632346.

Seznam obrázků

- Obr. 1: Změna kosodélníku na obdélník s využitím myšlenky komplementu
(Vondrová, 2015, str. 29)
- Obr. 2: Ukázka správného řešení úlohy 2 a)
- Obr. 3: Ukázka správného řešení úlohy 2 b)
- Obr. 4: Ukázka správného řešení úlohy 2 c) pomocí zvětšení výšky ke straně trojúhelníku
- Obr. 5: Ukázka správného řešení úlohy 2 c) pomocí zvětšení strany trojúhelníku
- Obr. 6: Ukázka správného řešení úlohy 3 v pre-testu pomocí výpočtu u 1. dvojice obrazců
- Obr. 7: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí úpravy plochy u 1. dvojice obrazců
- Obr. 8: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí výpočtu u 2. dvojice obrazců
- Obr. 9: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí úpravy plochy u 2. dvojice obrazců
- Obr. 10: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí výpočtu u 3. dvojice obrazců
- Obr. 11: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí úpravy plochy u 3. dvojice obrazců
- Obr.:12: Pomůcka pro skládání geometrického důkazu vzorce $(a + b)^2$
- Obr.:13: Pomůcka pro skládání geometrického důkazu vzorce $(a - b)^2$
- Obr.:14: Pomůcka pro skládání geometrického důkazu vzorce $a^2 - b^2$
- Obr. 15: Geometrický důkaz vzorce $(a + b)^2$
- Obr. 16: Geometrický důkaz vzorce $(a + b)^2$ s konkrétními rozměry
- Obr. 17: Geometrické řešení příkladu a)
- Obr.18: Geometrické řešení příkladu b)
- Obr. 19: Geometrické řešení příklad c)
- Obr. 20: Geometrický důkaz vzorce $(a - b)^2$
- Obr. 21: Geometrický důkaz vzorce $(a - b)^2$ s konkrétními rozměry

Obr. 22: Geometrické řešení příkladu a)

Obr. 23: Geometrické řešení příkladu b)

Obr. 24: Geometrické řešení příkladu c)

Obr. 25: Geometrický důkaz vzorce $a^2 - b^2$

Obr. 26: Geometrický důkaz vzorce $a^2 - b^2$ s konkrétními rozměry

Obr. 27: Geometrické řešení příkladu a)

Obr. 28: Geometrické řešení příkladu b)

Obr. 29: Geometrické řešení příkladu c)

Obr.:30: Pomůcka pro odvození vzorce pro obsah pravoúhlého a obecného trojúhelníku

Obr.:31: Pomůcka pro odvození vzorce pro obsah kosočtverce a kosodélníku

Obr.:32: Pomůcka pro odvození vzorce pro obsah lichoběžníku

Obr. 33: Geometrická důkaz vzorce pro obsah pravoúhlého trojúhelníku

Obr. 34: Geometrický důkaz vzorce pro obsah obecného trojúhelníku

Obr. 35: Geometrický důkaz vzorce pro obsah kosočtverce

Obr. 36: Geometrický důkaz vzorce pro obsah kosodélníku

Obr. 37: Rozdělení lichoběžníku na dílčí útvary pomocí střední příčky

Obr. 38: Geometrický důkaz vzorce pro obsah lichoběžníku pomocí obsahu obdélníku

Obr. 39: Geometrický důkaz vzorce pro obsah lichoběžníku pomocí obsahu trojúhelníku

Obr. 40: Ukázka správného řešení úlohy 2 a)

Obr. 41: Ukázka správného řešení úlohy 2 b)

Obr. 42: Ukázka správného řešení úlohy 2 c) pomocí zvětšení výšky ke straně trojúhelníku

Obr. 43: Ukázka správného řešení úlohy 2 c) pomocí zvětšení strany trojúhelníku

Obr. 44: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí výpočtu u 1. dvojice obrazců

Obr. 45: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí úpravy plochy u 1. dvojice obrazců

Obr. 46: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí výpočtu u 2. dvojice obrazců

Obr. 47: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí úpravy plochy u 2. dvojice obrazců

Obr. 48: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí výpočtu u 3. dvojice obrazců

Obr. 49: Ukázka správného řešení úlohy 3 pomocí úpravy plochy u 3. dvojice obrazců

Seznam grafů

Graf 1: Vnímaní vazby mezi algebrou a geometrií

Graf 2: Použití prvků geometrie při výuce algebry

Graf 3: Frekvence propojení algebry a geometrie ve výuce

Graf 4: Důvody využívání propojení algebry a geometrie

Graf 5: Vliv propojování algebry a geometrie na výsledky žáků a porozumění učiva

Graf 6: Přehled metod a strategií pro propojení algebry a geometrie

Graf 7: Názor na množství výukových materiálů podporujících propojení algebry a geometrie

Graf 8: Důvody nevyužívání propojení algebry a geometrie

Graf 9: Faktory motivující pedagogy k propojování algebry a geometrie ve svých hodinách

Graf 10: Názory pedagogů na přínos propojení algebry a geometrie pro lepší výsledky žáků a celkové porozumění vybraných témat

Graf 11: Ochota pedagogů vyzkoušet výukové aktivity zaměřené na propojení algebry a Geometrie

Seznam příloh

Příloha č.1: Dotazník pro pedagogy

Příloha č.2: Správné odpovědi k pre-testu

Příloha č.3: Správné odpovědi k post-test

Přílohy

Příloha č. 1: Dotazník pro pedagogy

Sekce 1 z 3

Propojení algebry a geometrie v hodinách matematiky na 2. stupni ZŠ

Tento dotazník je určen pro vyučující matematiky a má za cíl zjistit, zda a případně jak pedagogové na 2. stupni základních škol používají propojení algebry a geometrie ve výuce matematiky.

Odpovědi jsou anonymní.
Vyplnění dotazníku bude trvat maximálně 10 minut.

Děkuji Vám za Váš čas a za vyplnění dotazníku!

Vnímáte vazbu mezi algebrou a geometrií v rámci výuky matematiky na 2. stupni ZŠ? *

☐ Ano

☐ Ne

☐ Nevím

Používáte při výuce algebry prvky geometrie, například k geometrickému řešení algebraických úloh? *

☐ Ano, pravidelně

☐ Ano, občas

☐ Ne, pouze výjimečně

☐ Ne, nikdy

Sekce 2 z 3

Doplňující otázky

Tato sekce je určena pro pedagogiky využívající geometrii v hodinách algebry.

Jak často integrujete koncepty algebry a geometrie ve své výuce? *

☐ Vždy

☐ Často, téměř v každé hodině

☐ Občas, alespoň jednou v každém tématu

☐ Méně často

Uved'te důvody, proč ve výuce využíváte propojení algebry a geometrie. *

- ☐ Podpora hlubšího porozumění, chápání kontextu
- ☐ Podpora diferencovaného vzdělávání, využití různých stylů učení
- ☐ Rozvoj kritického myšlení
- ☐ Zvýšení zájmu žáků
- ☐ Zlepšení výsledků žáků
- ☐ Praktická aplikace, modelování reálných jevů
- ☐ Jiná...

Vnímáte, že propojování algebry a geometrie ve výuce přispívá ke zlepšení výsledků žáků v matematice a celkovému porozumění vybraných kapitol? *

- ☐ Ano
- ☐ Ne
- ☐ Nevím

Jaké metody nebo strategie používáte k ukázání vztahu mezi algebrou a geometrií? *

- ☐ Použití grafů a vizualizací k demonstraci algebraických konceptů
- ☐ Konstrukce geometrických objektů pro ilustraci algebraických vztahů
- ☐ Aplikace algebraických rovnic na reálné geometrické situace
- ☐ Použití počítačového softwaru pro modelování algebraických a geometrických problémů
- ☐ Realizační projekty, které kombinují algebraické a geometrické dovednosti
- ☐ Diskuze a srovnávací analýzy mezi algebraickými a geometrickými principy
- ☐ Výuka interaktivních her nebo aktivit, které zahrnují algebraické a geometrické koncepty
- ☐ Jiná...

Uved'te téma, ve které se vám daří nejefektivněji propojovat algebraické a geometrické koncepty.

Text stručné odpovědi

Uved'te téma, kde se vám propojení algebry a geometrie jeví jako nejkomplikovanější, nebo kde toto propojení nevyužíváte.

Text stručné odpovědi

Domníváte se, že je k dispozici dostatečné množství výukových materiálů podporujících integraci algebry a geometrie ve výuce matematiky na 2. stupni ZŠ? *

- ☐ Ano
- ☐ Ne
- ☐ Nevím

Sekce 3 z 3

Doplňující otázky



Tato sekce je určena pro pedagogy, kteří geometrii v hodinách algebry nevyužívají.

Uvedte důvody, proč ve výuce nevyužíváte propojení algebry a geometrie. *

- ☐ Nedostatek času během hodin
- ☐ Nedostatek vhodných materiálů nebo zdrojů
- ☐ Osobní preference nebo pohodlí s tradičními metodami výuky
- ☐ Nedostatek příležitostí ve školním vzdělávacím programu
- ☐ Přesvědčení, že žáci nejsou připraveni na pochopení tohoto propojení
- ☐ Jiná...

Co by Vás mohlo podpořit nebo motivovat k začlenění geometrie do výuky algebry? *

- ☐ Další školení nebo profesní rozvoj v této oblasti
- ☐ Větší flexibilita nebo čas na experimentování s novými metodami výuky
- ☐ Přístup k lepším výukovým materiálům nebo technologiím
- ☐ Pozitivní zpětná vazba nebo výsledky žáků
- ☐ Podpora od vedení školy a kolegů
- ☐ Jiná...

Myslíte si, že by propojení algebry a geometrie mohlo přispět ke zlepšení výsledků žáků v matematice a celkovému porozumění vybraných témat? *

- ☐ Ano
- ☐ Ne
- ☐ Nevím

Jste ochotni vyzkoušet v hodinách matematiky výukové aktivity zaměřené na propojení algebry a geometrie, pokud by vám byly poskytnuty příslušné výukové materiály? *

- ☐ Ano
- ☐ Ne
- ☐ Nevím

PRE-TEST - výsledky

1. Uprav:

a) $(a + 4)^2 = \underline{a^2 + 8a + 16}$

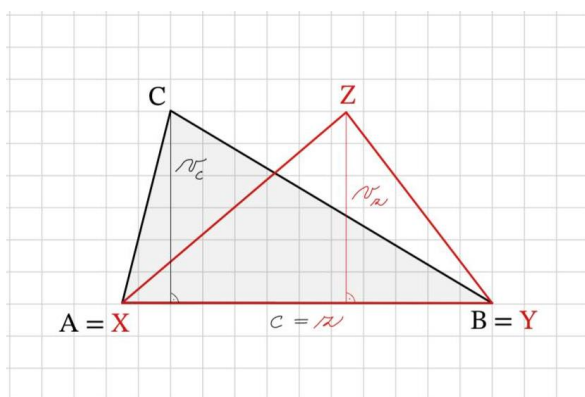
b) $(3 - b)^2 = \underline{9 + 6b + b^2}$

c) $x^2 - 4 = \underline{(x - 2) \cdot (x + 2)}$

2. Načrtni trojúhelník, který:

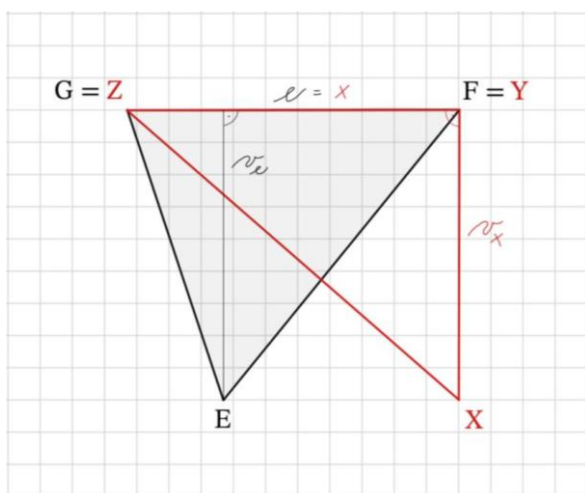
- a) má stejný obsah jako trojúhelník ABC,

jedno z možných řešení:



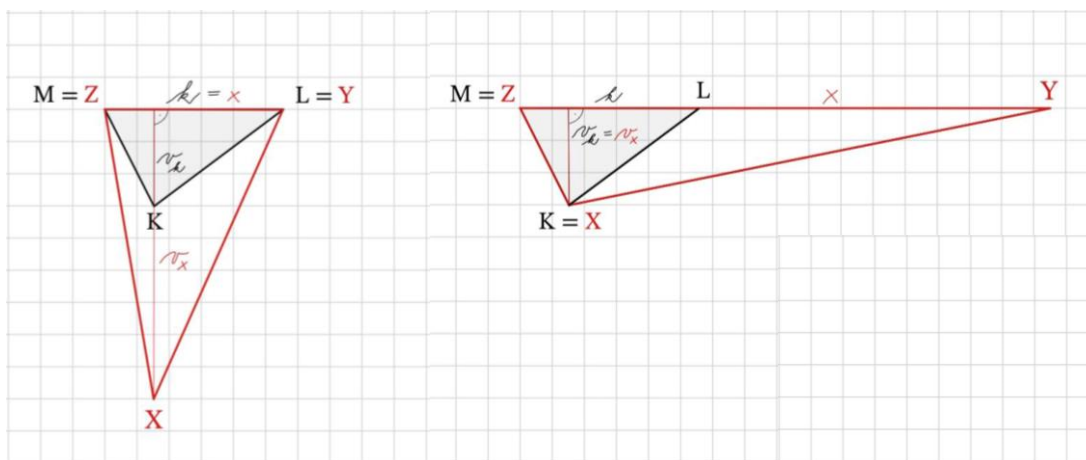
- b) je pravoúhlý a má stejný obsah jako trojúhelník EFG,

jedno z možných řešení:

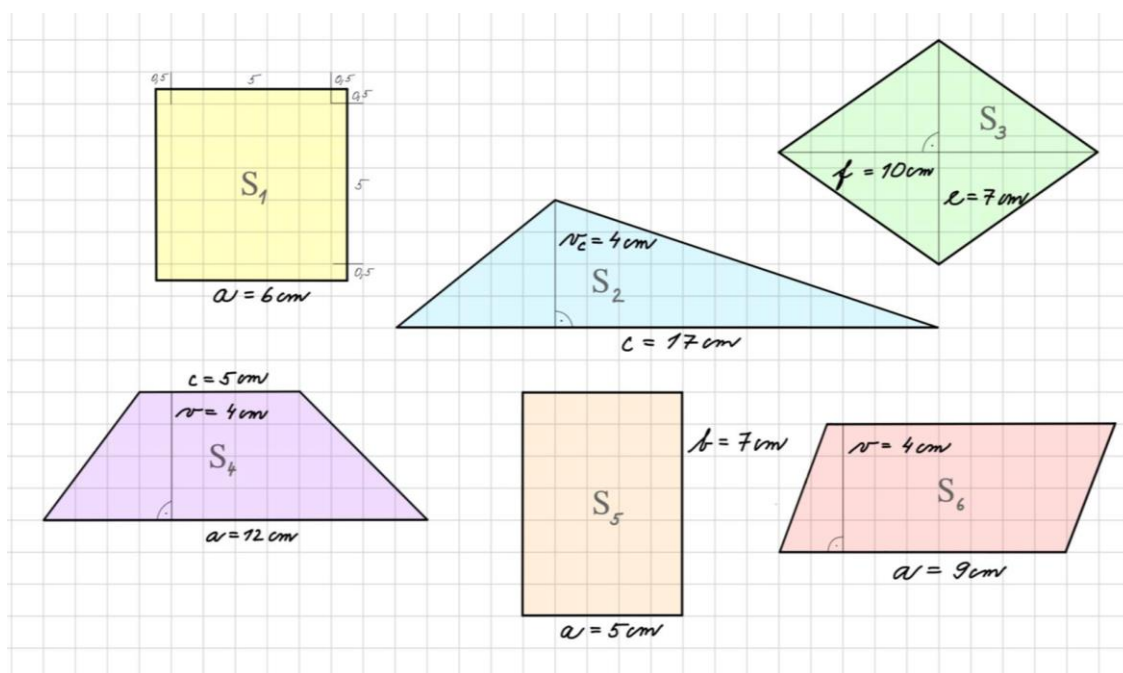


c) má třikrát větší obsah než trojúhelník KLM

dvě z možných řešení:



3. Přiřaď k sobě geometrické obrazce se stejným obsahem:



$$S_1 = S_6$$

$$S_2 = S_4$$

$$S_3 = S_5$$

POST-TEST - výsledky

1. Uprav:

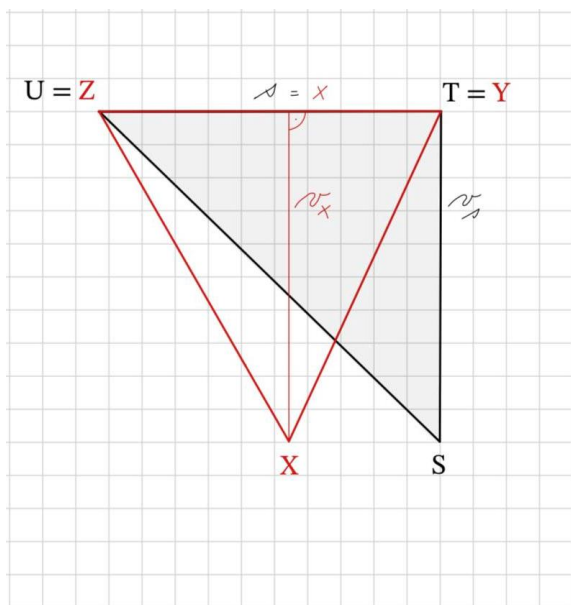
a) $(5 + b)^2 = \underline{25 + 10b + b^2}$

b) $(a - 4)^2 = \underline{a^2 + 8b + 16}$

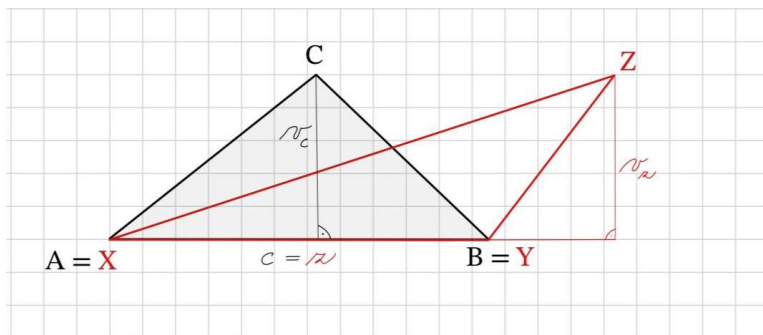
c) $9 - y^2 = \underline{(3 - y) \cdot (3 + y)}$

2. Načrtni trojúhelník, který:

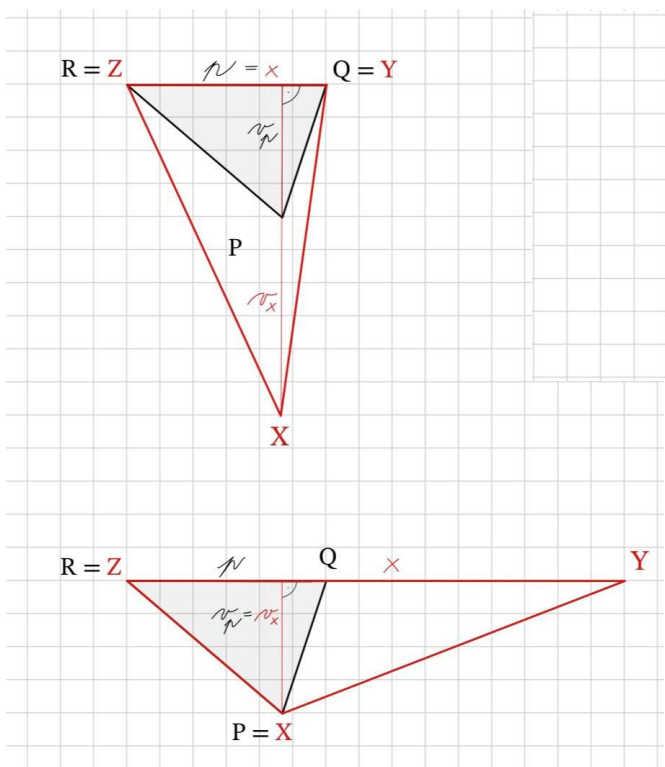
a) je ostroúhlý a má stejný obsah jako trojúhelník STU,



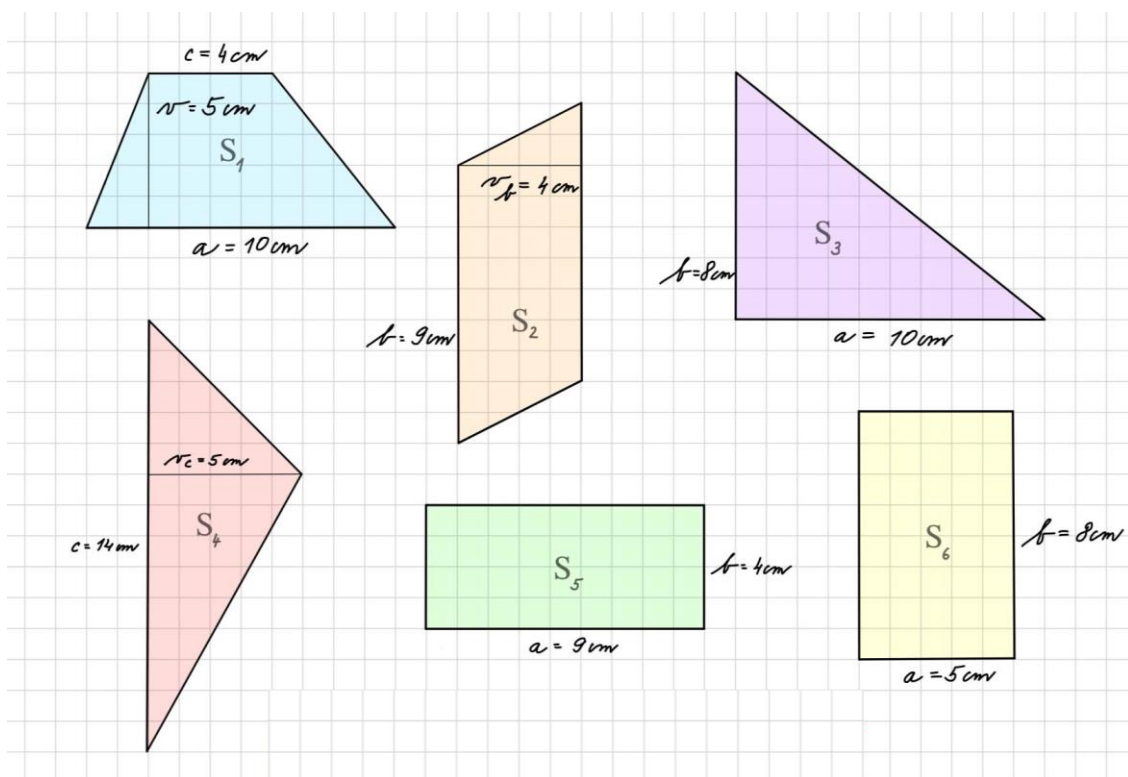
b) je tupoúhlý a má stejný obsah jako trojúhelník ABC,



c) má 2,5krát větší obsah než trojúhelník PQR.



3. Přiřaď k sobě geometrické obrazce se stejným obsahem:



$$S_1 = S_4$$

$$S_2 = S_5$$

$$S_3 = S_6$$