

Zást. Doc. Inž. Jaroslav Charvát
HABILITAČNÍ PRÁCE

Vysoká škola strojní a textilní v Liberci

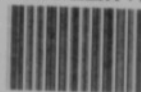
Systematická klasifikace
Euler - Savaryovy rovnice
se zřetelem ke konstrukci
 φ - křivek

Habilitační práce

Zást. Doc. Inž. Jaroslav Charvát

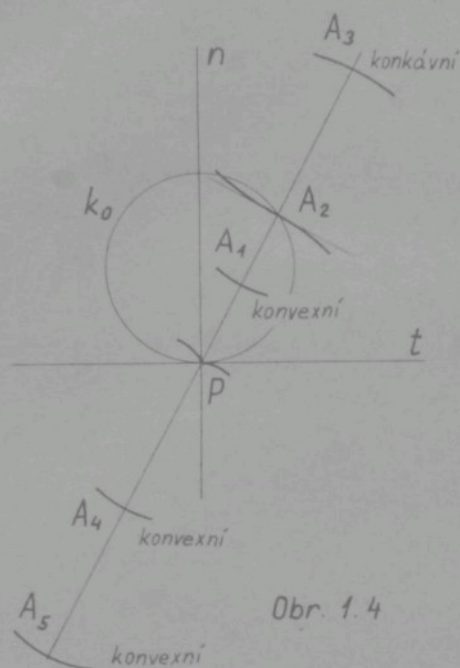
VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ
Univerzitní knihovna
LIBEREC JAROŠOVA 8

UNIVERZITNÍ KNIHOVNA
TECHNICKÉ UNIVERZITY V LIBerci



3146114456

W 23 S



Obr. 1.4

že rozbor vyjimečných případů není předmětem práce, budeme je z dalších úvah mlčky vylučovat.

Trajektorie bodů Z - roviny v 1. a 3. oblasti jsou konvexní ^{x/} /obr. 1.4 / a v 2. oblasti konkávní /kromě bodu v pólu, kde je trajektorie s bodem vratu a bodu na kružnici obratu, kde má trajektorie inflexní bod/. Z rovnice (1), v níž položíme $w_0 = d_0$

$$\frac{1}{d_0 \cos \alpha} = \frac{s-m}{ms} = \frac{\varphi}{ms} \quad (4)$$

V 1. oblasti Z - roviny je $s > \vartheta, m > \vartheta, s > m$, tedy $\varphi > \vartheta$.
 V 2. oblasti Z - roviny je $m > \vartheta, s < \vartheta$, tedy $\varphi < \vartheta$.
 V 3. oblasti Z - roviny je $m < \vartheta, s < \vartheta, |m| > |s|$, tedy $\varphi > \vartheta$.
 Rovnice (4) pro všechny tři oblasti bodů Z - roviny je pak

$$\frac{\pm |\varphi|}{ms} = \frac{1}{d_0 \cos \alpha}$$

Transformace bodů Z - roviny na rovinu přidružených středů křivosti ζ je kvadratická. Přímce v Z - rovině neprotínající kružnici obratu k_0 je přiřazena v rovině ζ elipsa. Přímce protínající k_0 přísluší hyperbola a přímce, která se dotýká k_0 , parabola. Prochází-li přímka pólem P , rozpadá se přiřazená kuželosečka na ni samu a na tečnu k polodiím. Mají tedy body Z - roviny na tečně k polodiím přidružené středy křivosti

^{x/} Při pohledu ze záporné poleroviny Z .

v pólu. Označíme-li $z \equiv x, y$, $\bar{z} \equiv \xi, \eta$, dostaneme použití transformačních vztahů

$$x = m \sin \alpha \quad ; \quad \xi = s \sin \alpha$$

$$y = m \cos \alpha \quad ; \quad \eta = s \cos \alpha$$

v Euler - Savaryově rovnici (1), v níž píšeme $w_0 = d_0$ pro souřadnice ξ, η

$$\xi = - \frac{d_0 x y}{x^2 + y^2 - d_0 y} \quad ; \quad \eta = - \frac{d_0 y^2}{x^2 + y^2 - y d_0} \quad (5)$$

Obdobně pro souřadnice x, y

$$x = \frac{d_0 \xi \eta}{\xi^2 + \eta^2 + d_0 \eta} \quad ; \quad y = \frac{d_0 \eta^2}{\xi^2 + \eta^2 + d_0 \eta} \quad (6)$$

2.0 Euler - Savaryova rovnice v projektivním tvaru

Pro danou normálu tělesa, tj. pro daný úhel α , představuje úhla m metrickou souřadnici jistého bodu A normály vzhledem k pólu P jako pevnému počátku. Pro další postup si zavedeme dělicí poměr λ bodu $A(m)$ vzhledem k bodům $B(m_1)$ a $C(m_2)$, tj.

$$\lambda = \frac{BA}{CA} = \frac{m - m_1}{m - m_2} \quad (1)$$

kde m_1, m_2 jsou metrické souřadnice dvou pevných tzv. základních bodů normály. Pro souřadnici m ze vztahu (1) je

$$m = \frac{m_1 - \lambda m_2}{1 - \lambda} \quad (2)$$

Dělicím poměrem vzhledem k daným bodům základním je bod normály jednoznačně určen. Volíme-li body P, Z , kde Z je průsečík normály s kružnicí obratu, za body základní /obr. 2.1 / tak, že bod P je první bod základní a bod Z druhý bod základní, je podle vztahu (1) a obr. 2.1

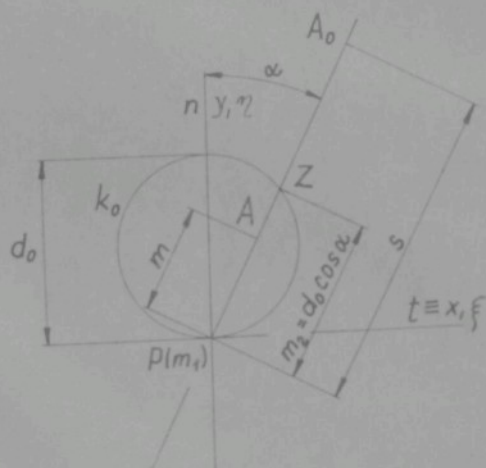
$$\lambda = \frac{PA}{ZA} = - \frac{m}{d_o \cos \alpha - m} \quad (3)$$

Souřadnice m ze vztahu (3) je pak

$$m = \frac{\lambda}{\lambda - 1} d_o \cos \alpha \quad (4)$$

Přičemž-li ve vztahu (3) $m = |m|$ pro body normály v 1. a 2. oblasti a $m = -|m|$ pro body v 3. oblasti, je dělicí poměr λ kladný pro body v 2. a 3. oblasti, záporný pro body v 1. oblasti.

Použijeme-li vztahu (4) k vyloučení souřadnice m

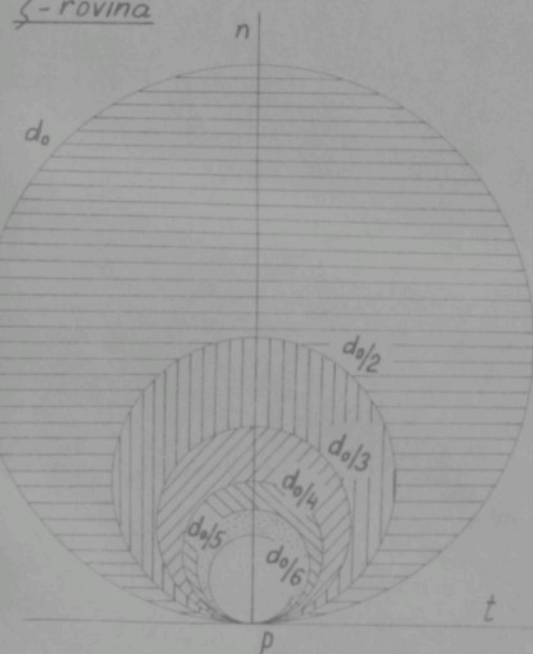


Obr. 2.1

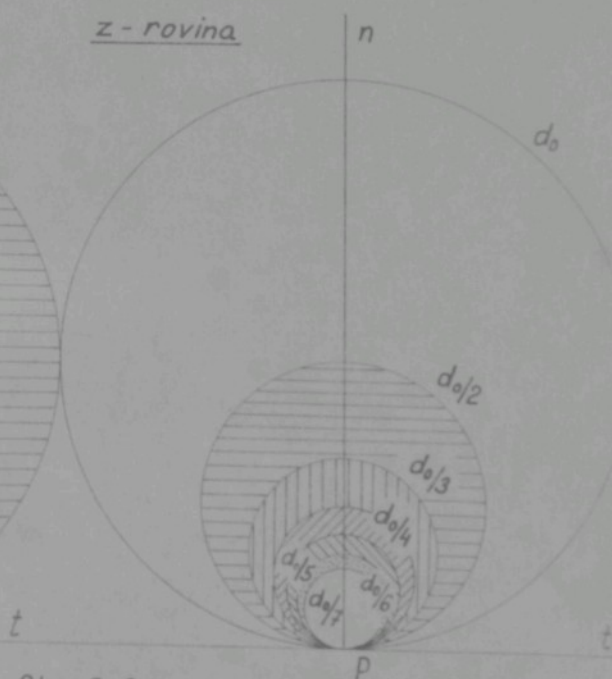
c	D	d	ξ_n
1	d_0	$\frac{d_0}{2}$	$\frac{d_0}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{d_0}{2}$	$\frac{d_0}{3}$	$\frac{d_0}{6}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{d_0}{3}$	$\frac{d_0}{4}$	$\frac{d_0}{12}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{d_0}{4}$	$\frac{d_0}{5}$	$\frac{d_0}{20}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{d_0}{5}$	$\frac{d_0}{6}$	$\frac{d_0}{30}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{d_0}{6}$	$\frac{d_0}{7}$	$\frac{d_0}{42}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{d_0}{7}$	$\frac{d_0}{8}$	$\frac{d_0}{56}$

Tab. 1

ζ -rovina



z -rovina

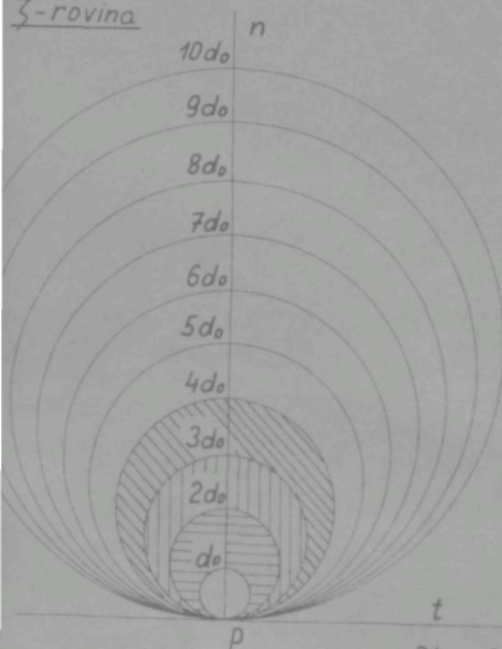


Obr. 2.3

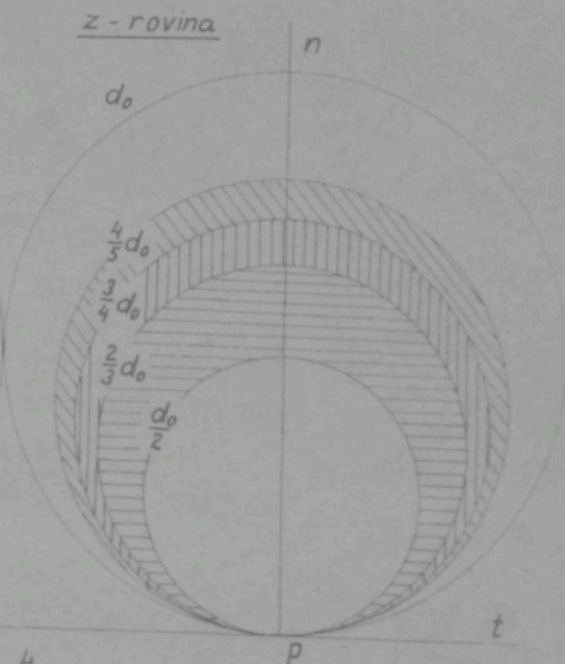
c	D	d	ξ_n
2	$2d_0$	$\frac{2}{3}d_0$	$\frac{4}{3}d_0$
3	$3d_0$	$\frac{3}{4}d_0$	$\frac{9}{4}d_0$
4	$4d_0$	$\frac{4}{5}d_0$	$\frac{16}{5}d_0$
5	$5d_0$	$\frac{5}{6}d_0$	$\frac{25}{6}d_0$
6	$6d_0$	$\frac{6}{7}d_0$	$\frac{36}{7}d_0$
7	$7d_0$	$\frac{7}{8}d_0$	$\frac{49}{8}d_0$
8	$8d_0$	$\frac{8}{9}d_0$	$\frac{64}{9}d_0$
9	$9d_0$	$\frac{9}{10}d_0$	$\frac{81}{10}d_0$
10	$10d_0$	$\frac{10}{11}d_0$	$\frac{100}{11}d_0$
∞	∞	d_0	∞

Tab. 2

ζ -rovina



z -rovina



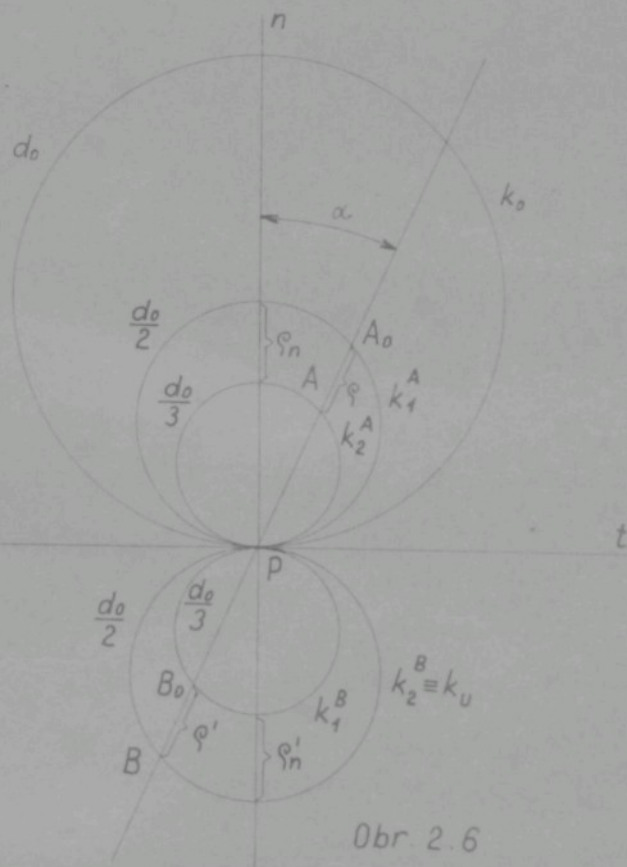
žnici k_1^B o průměru $\frac{d_0}{3}$. Tudiž $m_A = |s_B|$, $s_A = |m_B|$.
 onec sledujeme poměry v 2. oblasti. kružnicím k_2 v 2. oblasti
 - roviny

$$k_2 \equiv m = d_0 \cos \alpha \quad (30)$$

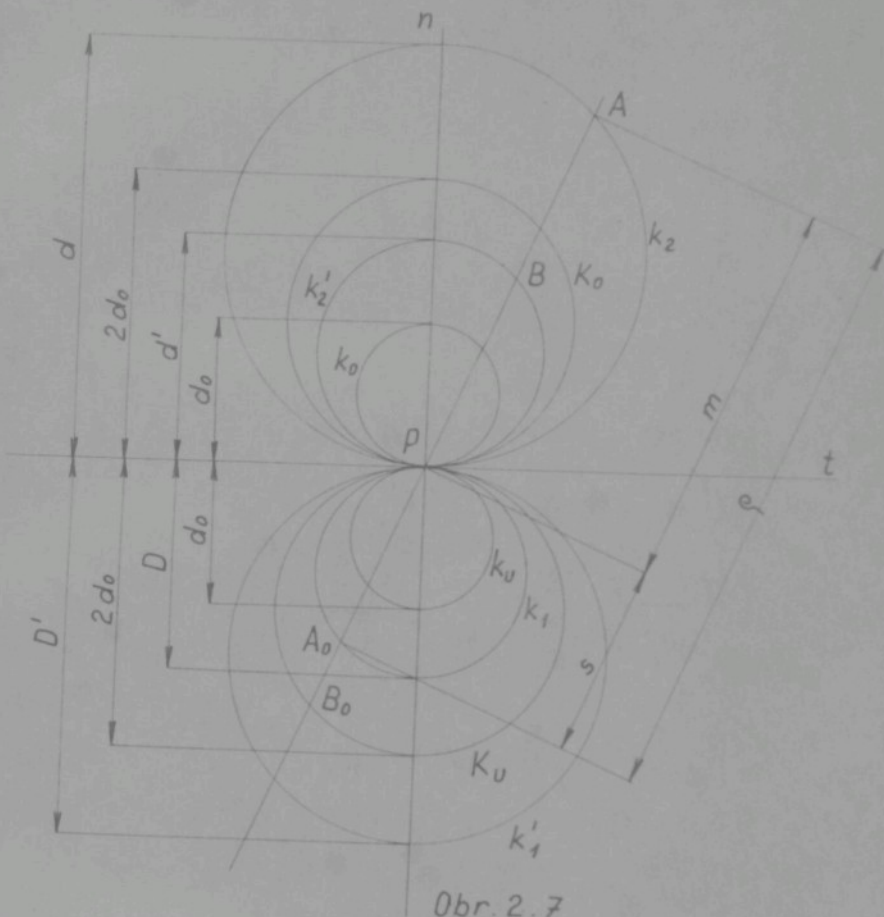
přifazeny kružnice k_1 v 3. rovině

$$k_1 \equiv s = -D \cos \alpha, \quad (31)$$

$$D = \frac{d d_0}{d - d_0} \quad (32)$$



Obr. 2.6

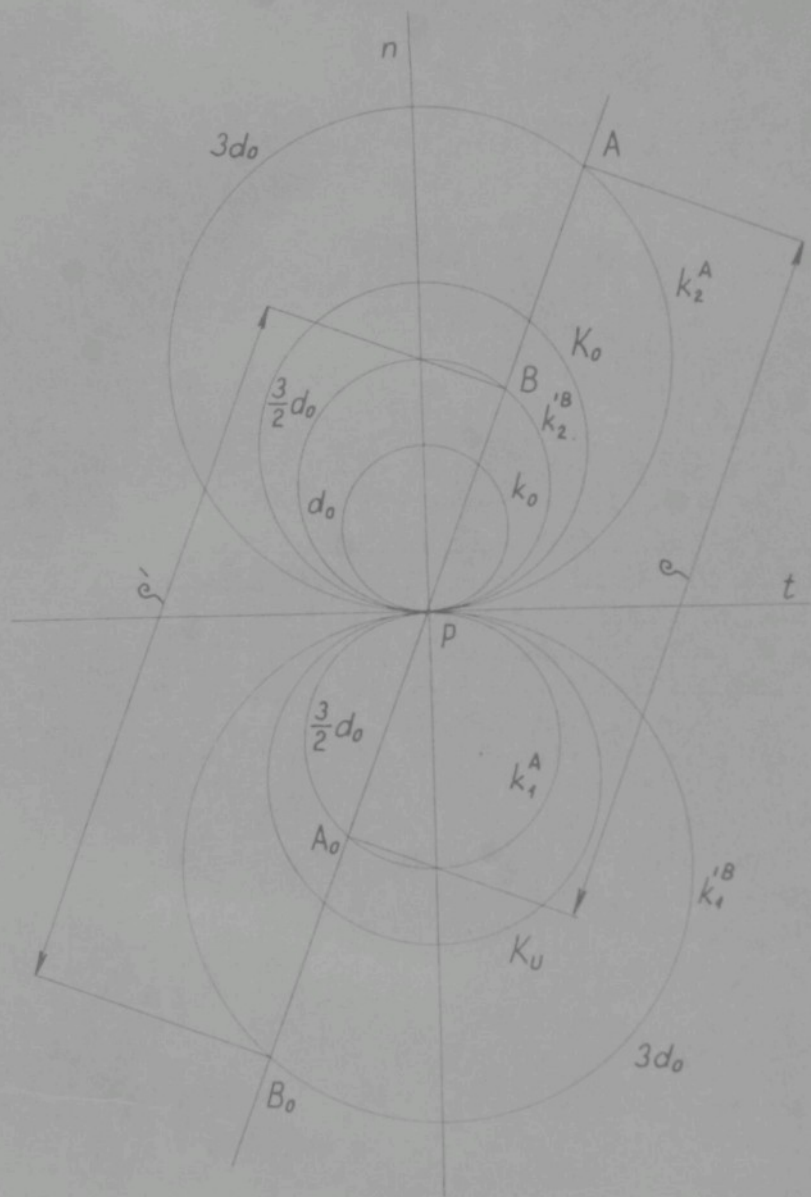


Obr. 2.7

Zavedeme-li v předchozím vztahu opět $d = k d_0$, kde $k > 0$, máme

$$D = \frac{k d_0}{k-1} ; |\xi| = \frac{k^2}{k-1} d_0 \cos \alpha ; |\zeta_n| = \frac{k^2}{k-1} d_0 .$$

V tab. 3 jsou ke kružnicím k_2 přiřazeny kružnice k_1 . Oblast bodů z - roviny vně kružnice K_0 , jejíž poloměr se rovná průseku kružnice obrátu k_0 se zobrazuje na oblast ξ - roviny mezi kružnicí k_u a kružnicí K_u /obr. 2.7 /, jejíž poloměr je stejný jako poloměr kružnice K_0 . Pro sledování přiřazené oblasti bodů z - roviny mezi kružnicemi k_0 a K_0 vyjděme z oblasti ξ - roviny vně kružnice K_u .



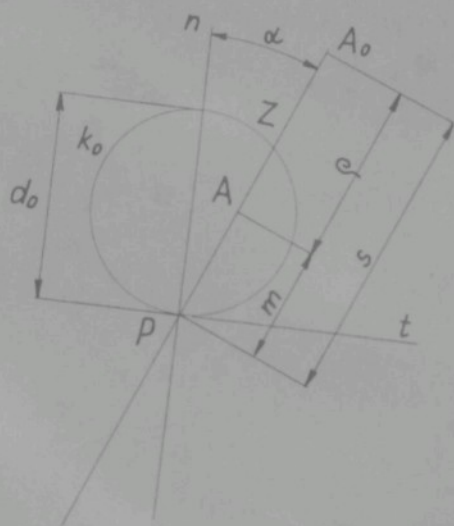
Obr. 2.8

získáme šest uspořádání Euler - Savaryovy rovnice, v nichž levá i pravá strana rovnice je vyjádřena jako dělicí poměry. Vyjádříme-li dělicí poměry ve vztazích (39) pomocí výrazů (37), (38) dostaneme jednotlivá uspořádání Euler - Savaryovy rovnice

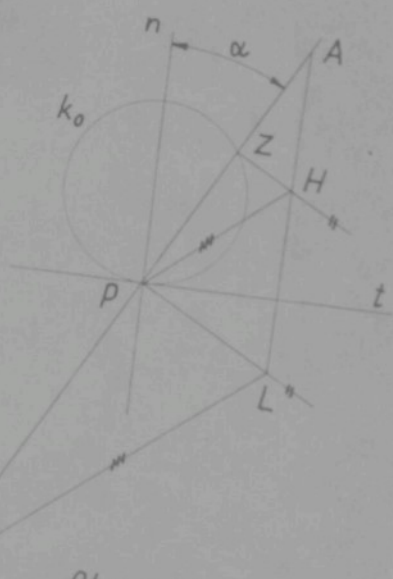
$$\left. \begin{aligned} \frac{d_o \cos \alpha}{d_o \cos \alpha - m} &= \frac{s}{m} ; \frac{d_o \cos \alpha - m}{d_o \cos \alpha} = \frac{m}{s} ; \frac{m}{d_o \cos \alpha - m} = \frac{s}{m} ; \\ \frac{m}{d_o \cos \alpha} &= \frac{s}{s} ; \frac{d_o \cos \alpha}{m} = \frac{s}{s} ; \frac{d_o \cos \alpha - m}{m} = \frac{m}{s} \end{aligned} \right\} (40)$$

Jako příklad je na obr. 2.10 určen přidružený střed křivosti A_o bodu A . Nechť na dané normále známe předem body P , Z . Trojicí bodů P , Z , A je určeno všech šest příslušných dělicích poměrů. Vyjděme např. z dělicího poměru (ZPA) . Body Z , P vedeme libovolné rovnoběžky, které protne přímku jdoucí bodem A . Podle obrazce je

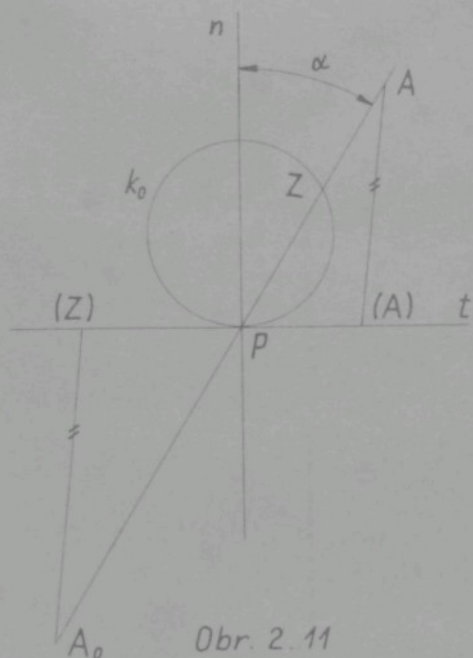
$$(ZPA) = \frac{ZH}{PL}$$



Obr. 2.9



Obr. 2.10



Obr. 2.11

Rovnoběžka bodem L se spojnicí HP nutně protíná normálu bodu A v hledaném středu křivosti A_0 , neboť

$$\frac{ZH}{PL} = \frac{PH}{A_0L} ;$$

$$\frac{PH}{A_0L} = (PA_0A) .$$

Řešme předchozí úlohu znovu např. pomocí dělicího poměru (PAZ) /obr. 2.11/. Na libovolnou přímku pólem /např. na tečnu k polodílu/ naneseme od pólu v opačných směrech úseky PZ a AZ

/viz body (Z) , (A) /. Rovnoběžka bodem (Z) vedená rovnoběžně se spojnicí $A(A)$ protíná normálu v hledaném bodě A_0 . Podle obrázce platí

$$\frac{A_0P}{AP} = \frac{(Z)P}{(A)P} ,$$

tedy

$$(A_0AP) = (PAZ) .$$

bodům Z_∞ , P je

$$(Z_\infty P A_0 B_0) = (B_0 A_0 P Z_\infty) = \frac{(B_0 A_0 P)}{(B_0 A_0 Z_\infty)} .$$

Ježto dělicí poměr

$$(B_0 A_0 Z_\infty) = 1 ,$$

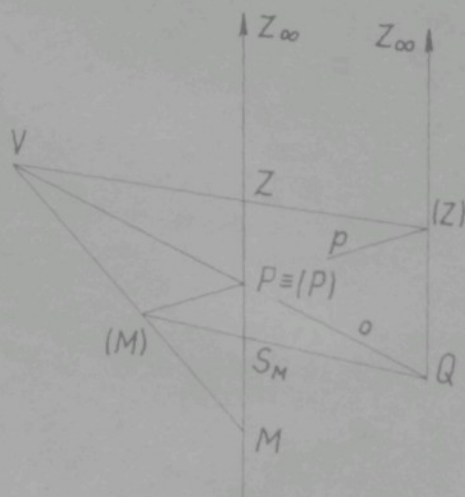
je

$$(Z_\infty P A_0 B_0) = (B_0 A_0 P) = \frac{s_2}{s_1} = \frac{m_2(m_1 - d_0 \cos \alpha)}{m_1(m_2 - d_0 \cos \alpha)} ,$$

tedy

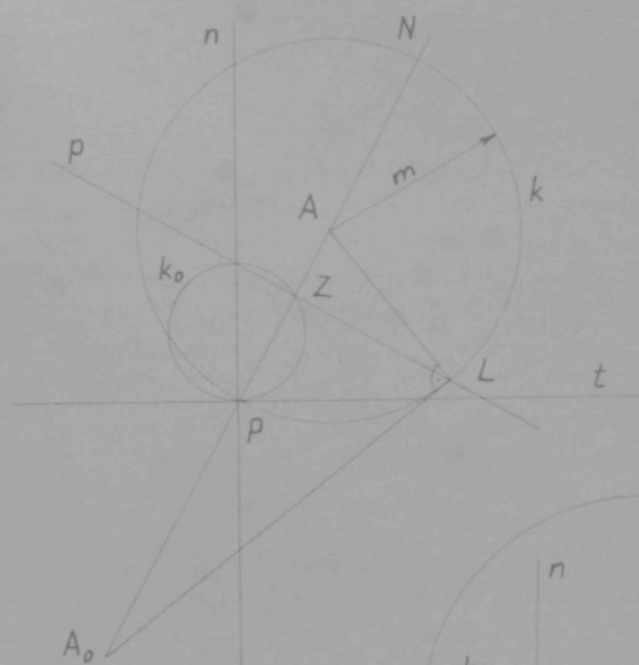
$$(Z P A B) = (Z_\infty P A_0 B_0) .$$

Doplňování projektivních řad, tj. konstrukce, kterou k libovolnému bodu jedné řady určujeme odpovídající bod druhé řady, se provádí z podmínky rovnosti dvojpoměrů. Známe-li na normále předem kromě pólu P bod Z , redukuje se uvedená podmínka na rovnost dělicích poměrů.

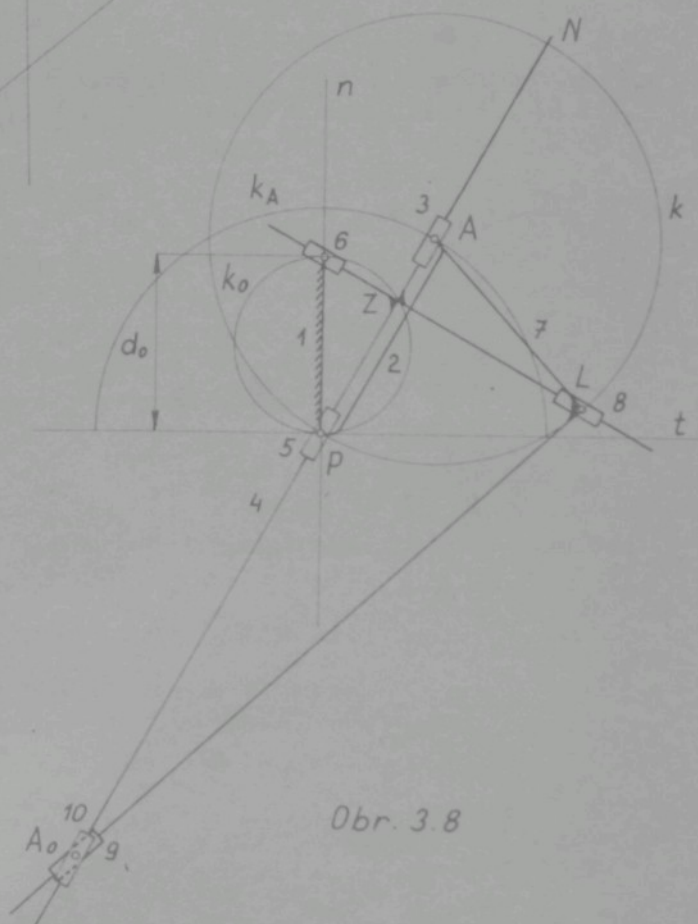


Obr. 3.1

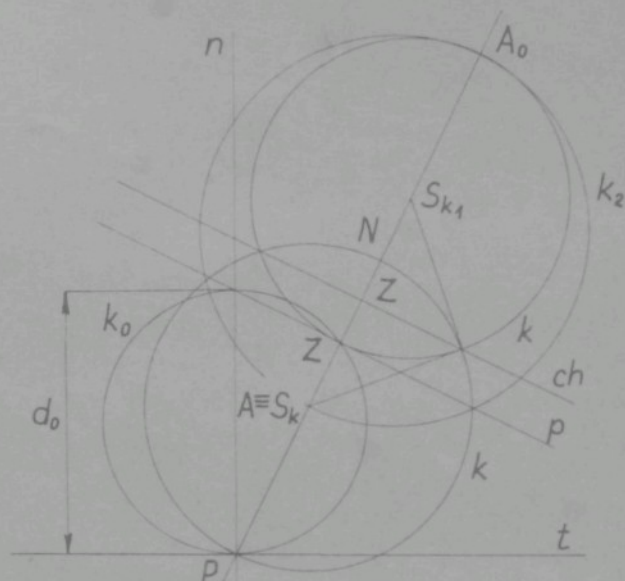
Nechť na normále známe kromě pólu P bod Z . K zvolnému bodu M normály určíme přidružený střed křivosti M_0 podle obr. 3.1. Pólem vedeme přímku p různou od normály a z libovolného bodu V ležícího mimo přímku p a normálu promítneme body P , Z , M do přímky p . Zřejmě je řada bodů (P) , (Z) , (M) perspektivní s řadou P , Z , M . Spojnice středu perspektivity V s pólem P jsou perspektivity/ protne spojnici $(Z)Z_\infty$ ve středu



Обр. 3.7



Обр. 3.8



Obr. 3.9

Mocnost bodu Z ke kružnici k_2 je

$$M_2 = ZA \cdot ZA_0 = -(d_0 \cos \alpha - m)(s - d_0 \cos \alpha) = -d_0 \cos \alpha (s - |p| - d_0 \cos \alpha + m).$$

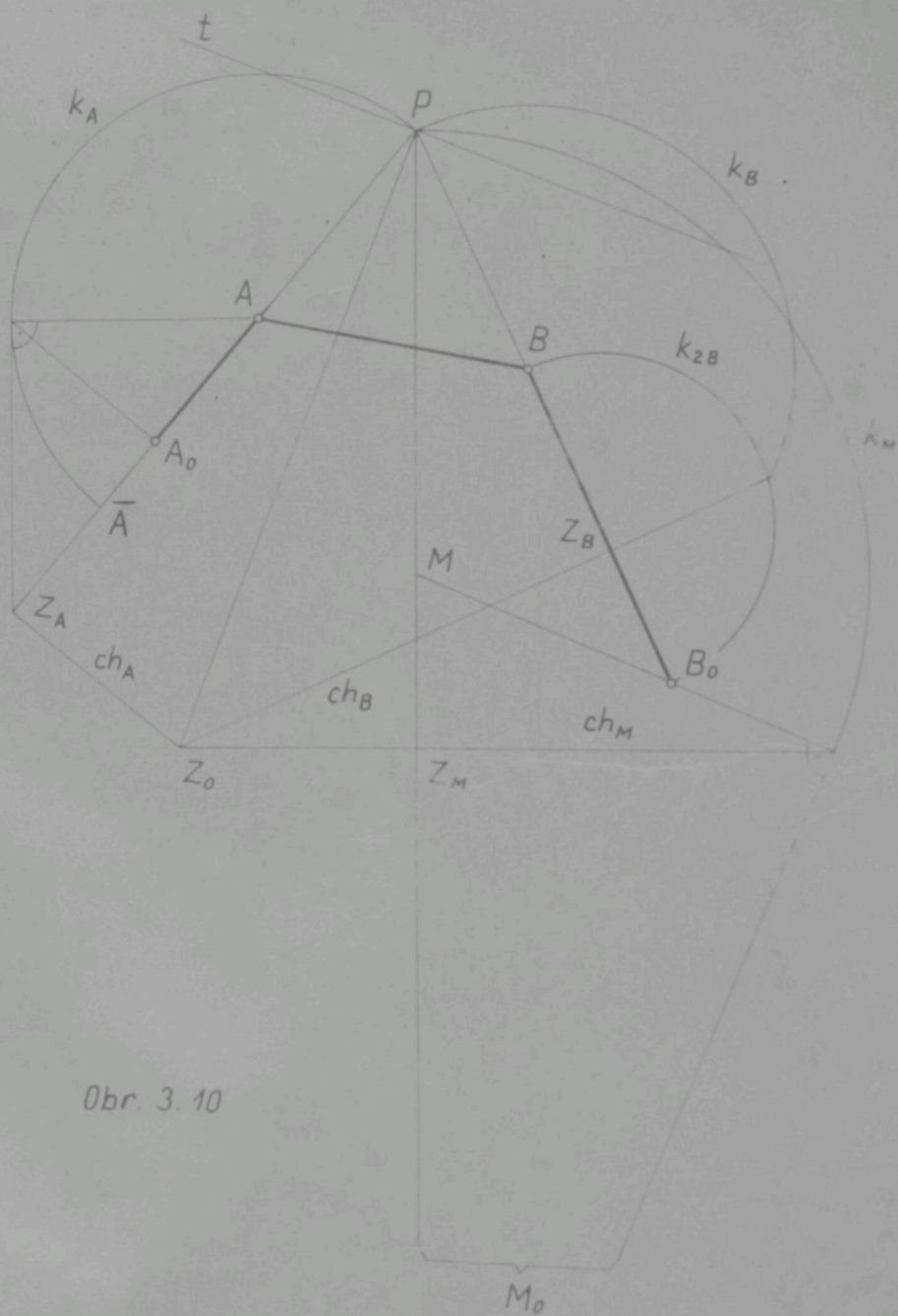
Ježto platí $-|p| = -s + m$, máme

$$M_2 = -d_0 \cos \alpha (2m - d_0 \cos \alpha),$$

čímž je tvrzení ověřeno.

Kolmice na normálu v bodu Z je chordálou kružnic k, k_2 . Všechny takové chordály prochází bodem obratu Z_0 . Bod Z_0 má tudíž stejnou mocnost ke všem kružnicím k, k_2 .

Na obr. 3.10 je použito podaných výsledků k určení středu křivosti M_0 bodu M u čtyřkloubového mechanismu. Bod Z_A jako inverzní sdružený bod s bodem A_0 ke kružnici k_A . Bod Z_B je stanoven pomocí kružnic k_B, k_{2B} . Bod M_0 je nakonec určen jako inverzní bod k bodu M ke kružnici k_M .



Obz. 3. 10

4.0 Euler - Savaryova rovnice kinematickém tvaru

Nechť je dán obecný pohyb tělesa v rovině valením hybné polodie k_h po nehybné polodii k_n /obr. 4.1 /. Okamžitá rychlost v_A bodu A je funkcí dvou proměnných m a ω , kde ω je okamžitá úhlová rychlost kolem pólu. Tedy

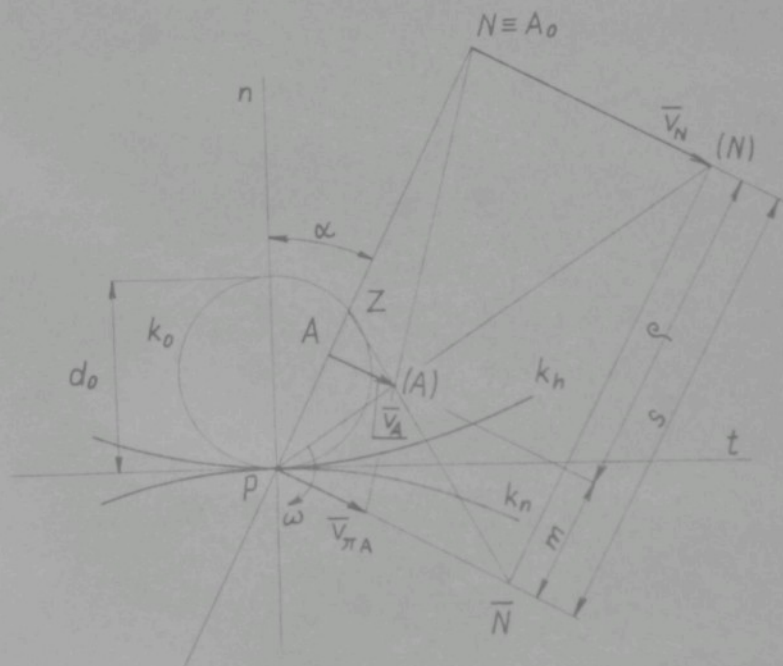
$$v_A = m \omega . \quad (1)$$

Okamžitá rychlost v_N bodu $N \equiv A_0$ je pak

$$v_N = s \omega \quad (2)$$

Poměr rychlostí bodu A a N je dán vztahem

$$\frac{v_A}{v_N} = \frac{m}{s} = \frac{A(A)}{N(N)} \quad (3)$$



Obr. 4.1

Euler - Savaryovy rovnice pro body v 1. oblasti Z - roviny

$$\frac{s-m}{s} = \frac{m}{d_o \cos \alpha} \quad (4)$$

dostaneme s přihlédnutím ke kinematickému významu průměru kružnice obrátu $d_o = \frac{v_r}{\omega}$

$$\frac{s-m}{s} = \frac{m\omega}{v_r \cos \alpha} = \frac{v_A}{v_{\pi A}} \quad (5)$$

kde $v_{\pi A}$ je pravouhlá složka pólové rychlosti do kolmice v pólu P na normálu bodu A. Z rovnic (3) a (5) dostaneme

$$1 - \frac{v_A}{v_N} = \frac{v_A}{v_{\pi A}} \quad ,$$

nebo-li

$$\frac{1}{v_A} = \frac{1}{v_N} = \frac{1}{v_{\pi A}} \quad (6)$$

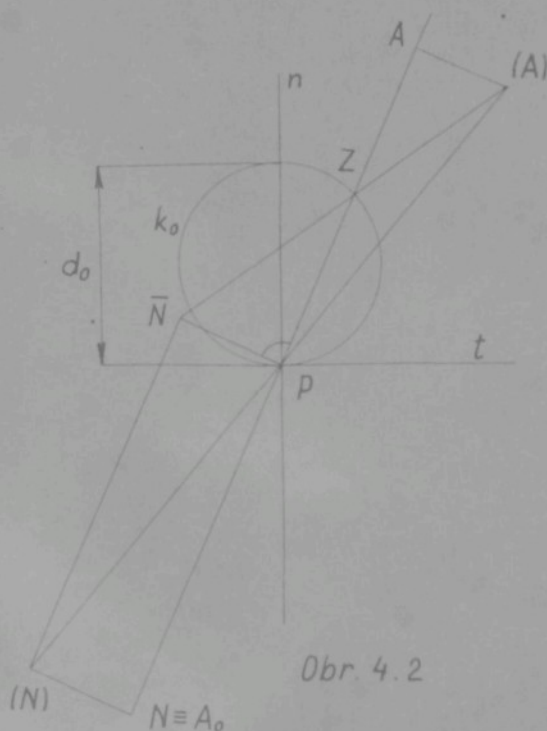
což je kinematický tvar Euler - Savaryovy rovnice. Tvar (6) dostaneme také přímo, násobíme-li pravou a levou stranu Euler - Savaryovy rovnice výrazem $\frac{1}{v_N}$. V rovnici (6) pro 1. oblast Z - roviny píšeme $v_A = |v_A|$, $v_N = |v_N|$; pro 2. oblast Z - roviny pak $v_A = -|v_A|$, $v_N = -|v_N|$.

Jak si dále ukážeme, spojnice $\overline{A(A)Z}$ vytíná na kolmici k normále v pólu úsek $\overline{PN} = \overline{P(N)} = |v_N|$. Podle otr. 4.1 je

$$\frac{\overline{A(A)}}{\overline{PN}} = \frac{d_o \cos \alpha - m}{d_o \cos \alpha} = \frac{m}{s} \quad ,$$

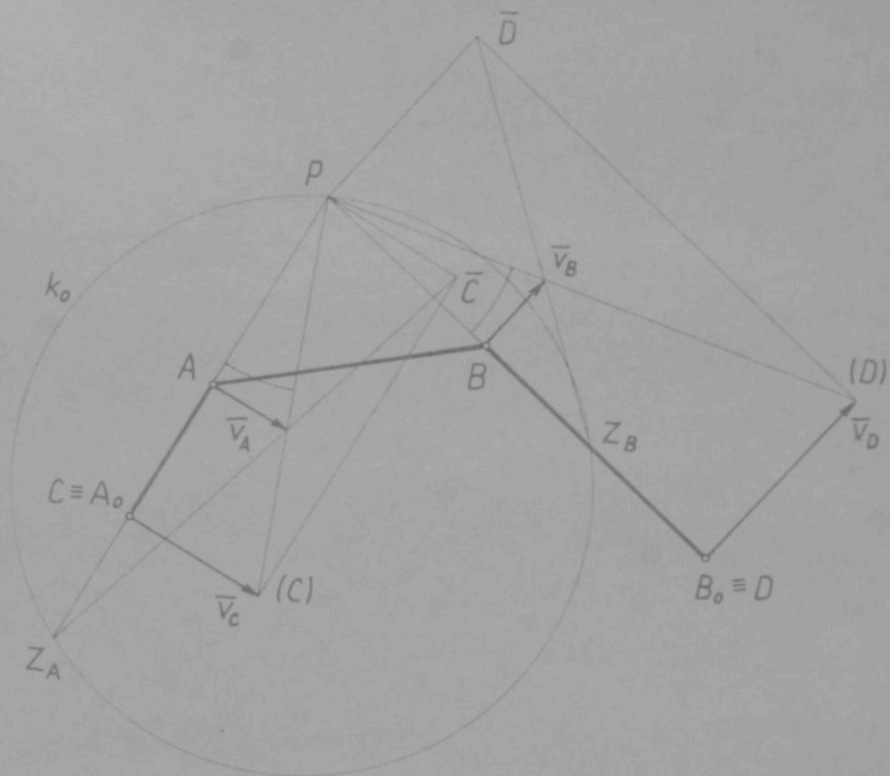
tedy

$$\frac{v_A}{v_N} = \frac{\overline{AA}}{\overline{PN}} \quad (7)$$



Obr. 4.2

(N) $N \equiv A_o$



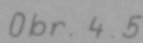
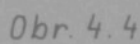
Obr. 4.3

Porovnáním vztahu (7) a (3) dostaneme

$$\frac{\overline{A(A)}}{\overline{PN}} = \frac{m}{s} = \frac{\overline{A(A)}}{\overline{N(N)}} \quad (8)$$

Konstrukce středu křivosti A_0 bodu A podle vztahu (8) je naznačena na obr. 4.2. Na kolmici v bodě A volíme desčku $\overline{A(A)}$. Spojnici $\overline{AZ}$ protíná kolmici v pólu v bodě $\overline{N}$. Rovnoběžka bodem $\overline{N}$ s normálou bodu A protíná spojnici $\overline{AP}$ v bodě $\overline{N}$. Pata kolmice z bodu (N) na normálu je hledaný střed křivosti $N=A_0$ bodu A. Na obr. 4.3 je podle vztahu (8) sestavena kružnice obratu k_0 u čtyřkloubového mechanismu. Volíme-li na obr. 4.2 $\overline{A(A)} = m$, je $\overline{PN} = s$ /viz konstrukci na obr. 4.4 /.

Jednoduchou konstrukci středu křivosti obdržíme, použijeme-li



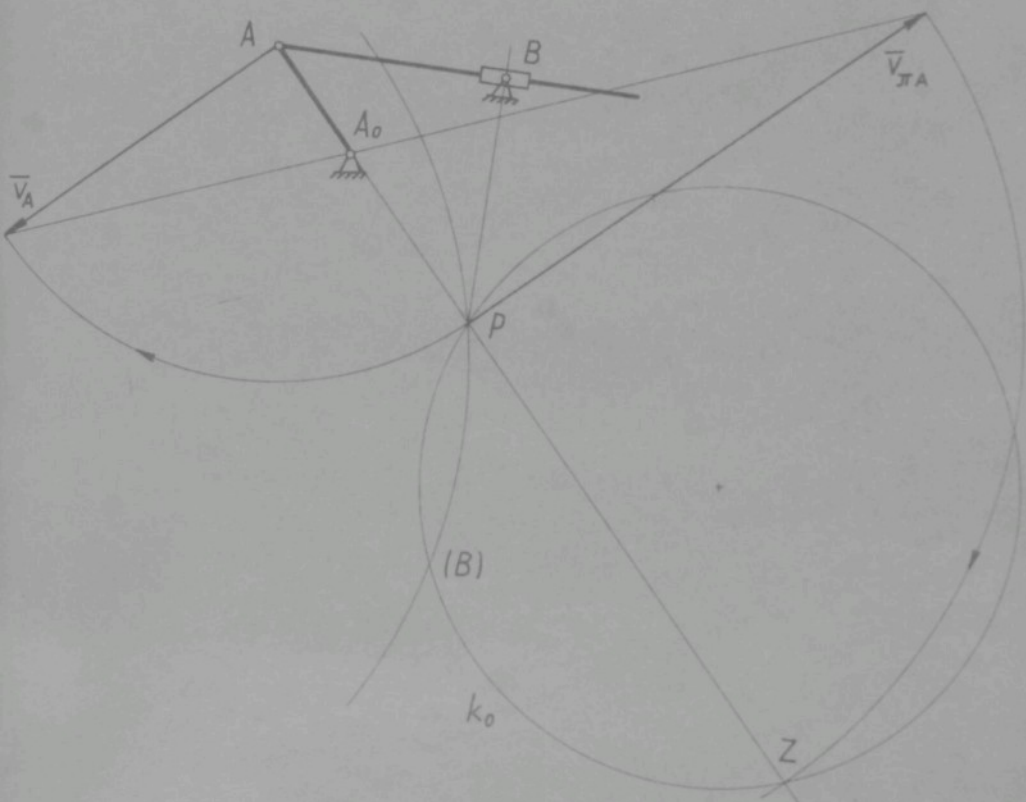
k řešení složky pólové rychlosti podle vztahu (5) pro $\omega = 1$.
 V tom případě je

$$|\bar{V}_A| = m$$

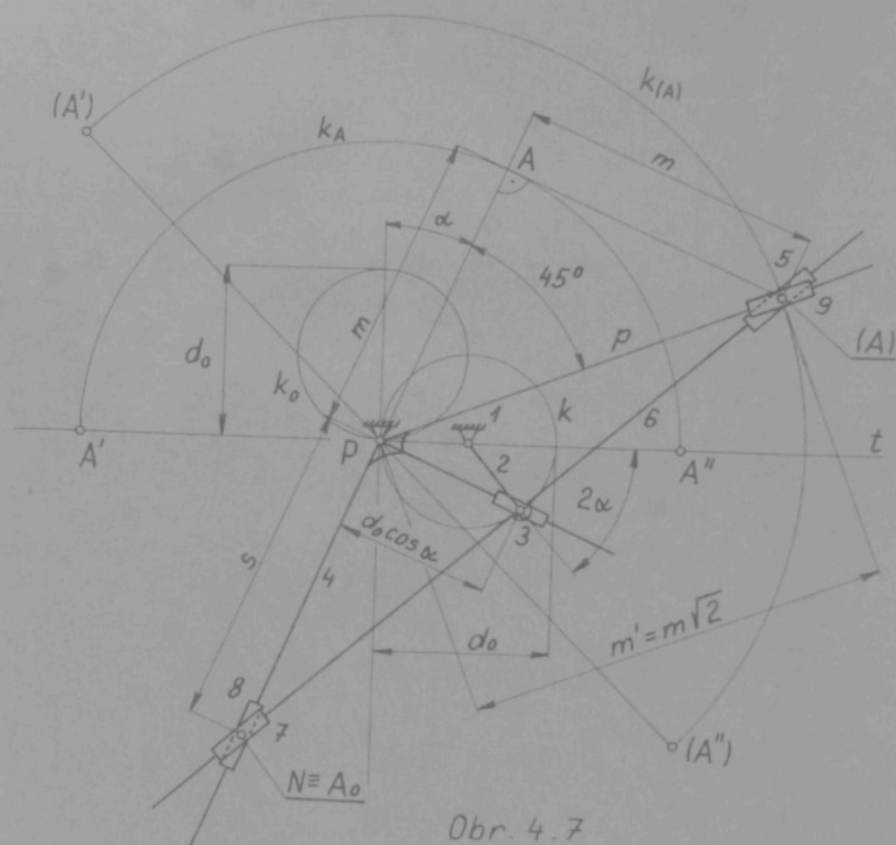
velikost složky pólové rychlosti $V_{\pi A}$ je rovna průmětu průměru k_o do směru normály bodu A, tj.

$$|V_{\pi A}| = \overline{PZ} = d_o \cos \alpha$$

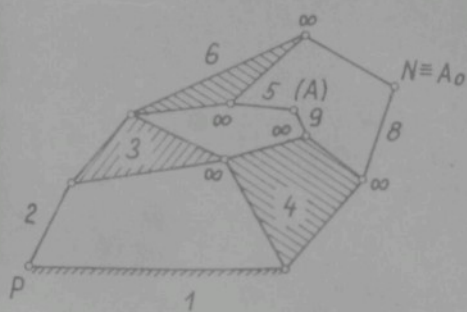
/viz řešení na obr. 4.5 /. Geometrickým místem vrcholu rychlosti $V_{\pi A}$ pro proměnný úhel α je kružnice k o stejném průměru jako kružnice obratu, ale se středem na tečně t . Na obr. 4.6 je užito konstrukce podle obr. 4.5 k určení k_o u kulisového mechanismu.



Obr. 4.6



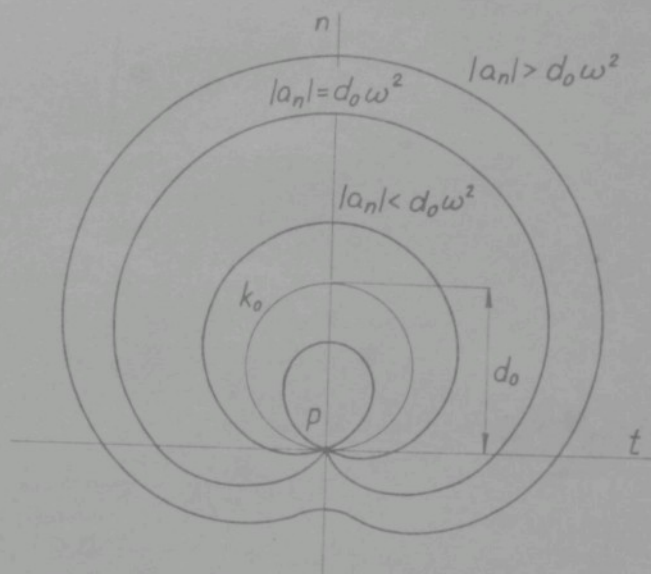
Obr. 4.7



Obr. 4.7b

Metoda řešení podle obr. 4.5 je vhodná pro konstrukci mechanismu realizujícího transformaci bodů z - roviny na $\bar{z}$ - rovinu Euler - Savaryovou rovnici. Na obr. 4.7 je navržen mechanismus vyhovující pro body 2. oblasti z - roviny. Klikou 2 kulového mechanismu 1, 2, 3, 4 je nastavována velikost složky pólové rychlosti $|v_{PA}| = d_0 \cos \alpha$. Pootočení

kliky o úhel 2π odpovídá pootočení kulisy 4 tedy i normály bodu A o úhel π . Posouváme-li při blokové kliky 2 objímkou 9 a bodem (A) po tyči p /např. šroubem/, udává poloha kloubu N střed křivosti přidružený bodu A . k určení středů křivosti



Obr. 4.10

Body se stejnou absolutní hodnotou normálního zrychlení dostaneme tudíž, namákneme-li na normály od bodu Z na obě strany úseky $\frac{|a_n|}{\omega^2}$. Pro $a_n = 0$ je $m = d_0 \cos \alpha$, což je rovnice kružnice obrátu. Pro body v 1. oblasti musí být

$$\frac{|a_n|}{\omega^2} < d_0 \cos \alpha. \quad (15)$$

Na normále existují vždy dva body se stejnou velikostí normálního zrychlení. x/ Je-li splněna podmínka (15), leží body v 1. a 2. oblasti Z - roviny. Je-li naopak

$$\frac{|a_n|}{\omega^2} > d_0 \cos \alpha,$$

leží body v 2. a 3. oblasti Z - roviny. Pro $\frac{|a_n|}{\omega^2} = d_0$ je rovnice a_n - křivky kardioida. Body leží v 2. a 3. oblasti.

x/ výjimku tvoří bod na hlavní normále pro $\frac{|a_n|}{\omega^2} = d_0$.

Rovnice a_n - křivky v souřadnicích x, y

$$(x^2 + y^2 - d_0 y)^2 = \frac{a_n^2}{\omega^4} (x^2 + y^2) \quad (16)$$

a_n - křivky lze realizovat buď whitworthovým mechanismem /obr. 4.11 / nebo jako epicykloidy. Úhel α tečny a_n - křivky v pólu P plyne ze vztahu

$$\cos \alpha = \frac{a_n}{\omega^2 d_0}$$

Při tomto úhlu přechází bod A_1 z 1. oblasti z - roviny do 3. oblasti z - roviny /viz vztah (13) /.

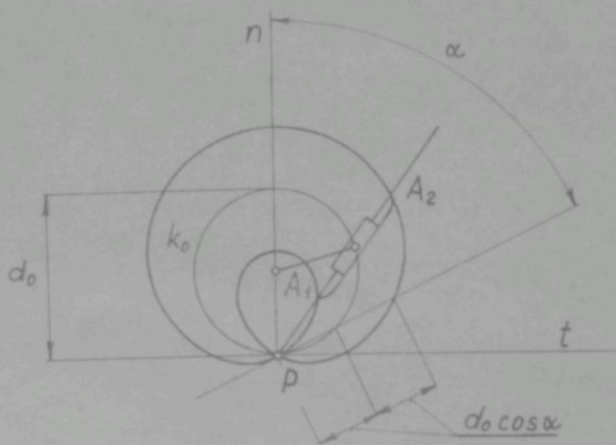
Body z - roviny na téže normále stejně vzdálené od bodu Z mají různé poloměry křivosti, jejich poměr je však stejný jako čtverec poměru vzdálenosti od pólu jak bodů, tak přidružených středů křivosti.

Pro takové body platí

$$a_n = \frac{v_1^2}{\varphi_1} = \frac{v_2^2}{\varphi_2} = \text{konst.}$$

tedy

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 = \left(\frac{s_2}{s_1} \right)^2 \quad (17)$$



Obr. 4.11

Pro body A_1, A_2 /obr. 4.12 / stejně vzdálené od bodu Z , dále platí

$$\frac{m_2 + m_1}{2} = d_0 \cos \alpha. \quad (18)$$

Zavedeme-li si

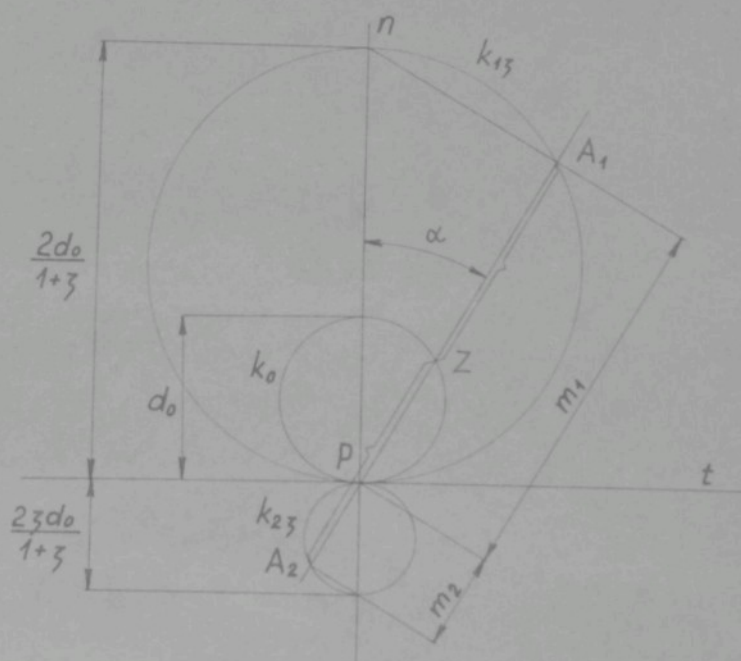
$$m_2 = \gamma m_1,$$

kde γ je volený parametr, dostaneme ze vztahu (18)

$$k_{1\gamma} \equiv m_1 = \frac{2}{1+\gamma} d_0 \cos \alpha; \quad (19)$$

$$k_{2\gamma} \equiv m_2 = \frac{2\gamma}{1+\gamma} d_0 \cos \alpha, \quad (20)$$

což jsou kružnice se středem na hlavní normále a dotýkající se v pólu /obr. 4.12 /.



Obr. 4.12

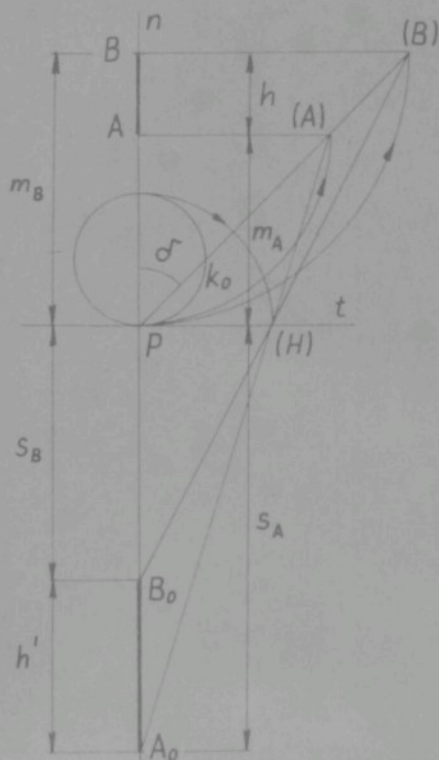
Podle obr. 5.1 se zobrazuje Euler - Savaryovou rovnici úsečka $\overline{AB}$ jako předmět na úsečku $\overline{A_o B_o}$ jako obraz. Zvětšení úsečky $\overline{AB}$ je

$$Z_o = \frac{\overline{A_o B_o}}{\overline{AB}} = \frac{h'}{h}$$

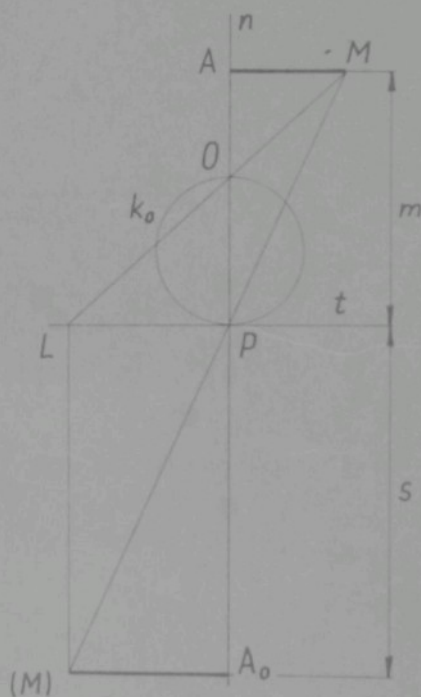
k určení bodů A_o , B_o bylo na obr. 5.1 použito této konstrukce. Na kolmice v bodech A , B a P nanese se úsečky $\overline{A(A)} = m_A$, $\overline{B(B)} = m_B$, $\overline{P(H)} = d_o$. Spojnice $\overline{A(H)}$, $\overline{B(H)}$ vytínají na normále bodů A , B hledané středy křivosti A_o , B_o .

Podle obr. 5.2 hledejme přidruženou úsečku $\overline{A_o(M)}$ jako obrazu předmětové úsečky $\overline{AM}$. Pak příčné zvětšení je

$$Z_p = \frac{\overline{A_o(M)}}{\overline{AM}} = \frac{|s|}{m}$$



Obr. 5.1



Obr. 5.2

Na obr. 5.3 je uvedenou konstrukcí stanovené osové zvětšení úsečky $\overline{AB}$ a příčné zvětšení úseček $\overline{BM}$ a $\overline{AN}$.

Vraťme se k osovému zvětšení úseček. Pro body A, B úsečky se stejným poloměrem křivosti je

$$m_A = |s_B| ; \quad m_B = |s_A| ,$$

tedy $Z_o = 1$. Obraz úsečky dostaneme posunutím úsečky $\overline{AB}$ na normále o míru φ rovnou poloměru křivosti. Kolmým promítnutím úseček $\overline{AB}$ a $\overline{A_o B_o}$ do libovolného směru normály se nemá osové zvětšení /obr. 5.4 /, tedy

$$Z_o = \frac{A_o B_o}{AB} = \frac{A_{ok} B_{ok}}{A_k B_k} .$$

Je-li předmět /úsečka/ v 1. oblasti je obraz osově vždy zvětšen a leží v téže polovině /obr. 5.5 /. Má-li být obraz úsečky vně K_o musí úsečka $\overline{AB}$ ležet v oblasti mezi kružnicí obratu a kružnicí o polovičním poloměru. Osové zvětšení je vždy větší než 1. Vzdaluje-li se předmět od bodu P , vzdaluje se od něho i obraz.

Pro předmět v 2. oblasti mohou nastat tři případy:

a/ Úsečka $\overline{AB}$ je mezi kružnicí K_o a K_u /dvojnásobný poloměr než K_o /, obraz je osově zvětšen a leží na opačné straně tečny k polodílu vně K_u .

b/ Úsečka $\overline{AB}$ je vně K_o , obraz osově zmenšen a leží opět na druhé straně mezi kružnicemi K_u a K_o /dvojnásobný poloměr než K_u /.

c/ Úsečka $\overline{AB}$ má bod A mezi kružnicemi K_o, K_u a bod B vně kružnice K_o , obraz může být osově zvětšen nebo zmenšen, resp. se osově nemá /poloměry křivosti obou bodů jsou stejné/.

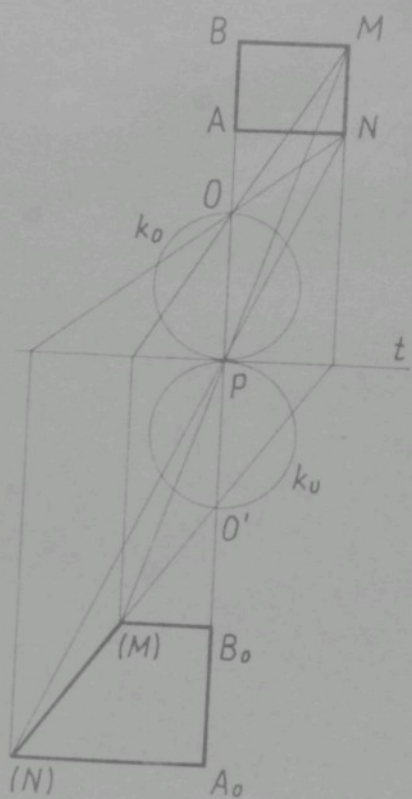
Je-li předmět v 3. oblasti je obraz vždy zmenšen /obr. 5.7 /.

Pohybuje-li se předmět k bodu P , pohybuje se obraz rovněž k bodu P . Ve všech případech se zachovává orientace úsečky $\overline{AB}$.

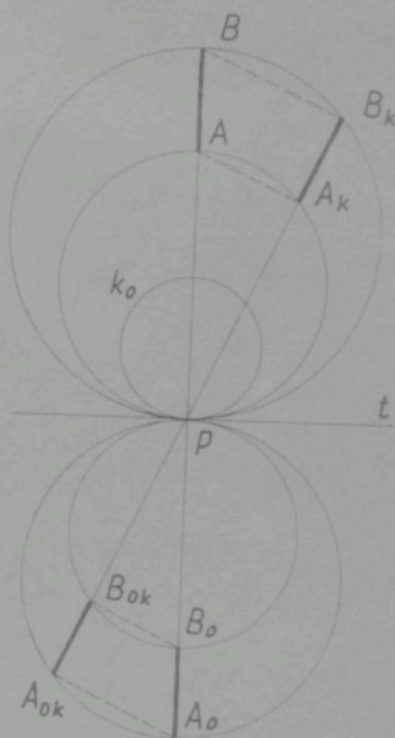
Obrazy úsečky jsou buď na straně předstívané úsečky nebo na opačné.

Obrazy, které jsou na téže straně jako předmět, budeme nazývat obrazy skutečnými oproti skutečným, které jsou na opačné straně. Nyní se vrátíme k příčnému zvětšení. Ježto příčné zvětšení se rovná

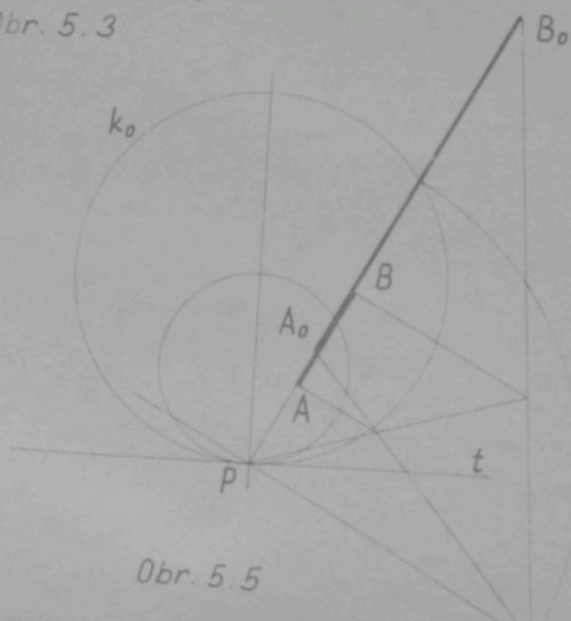
$$Z_p = \frac{|s|}{|m|} ,$$



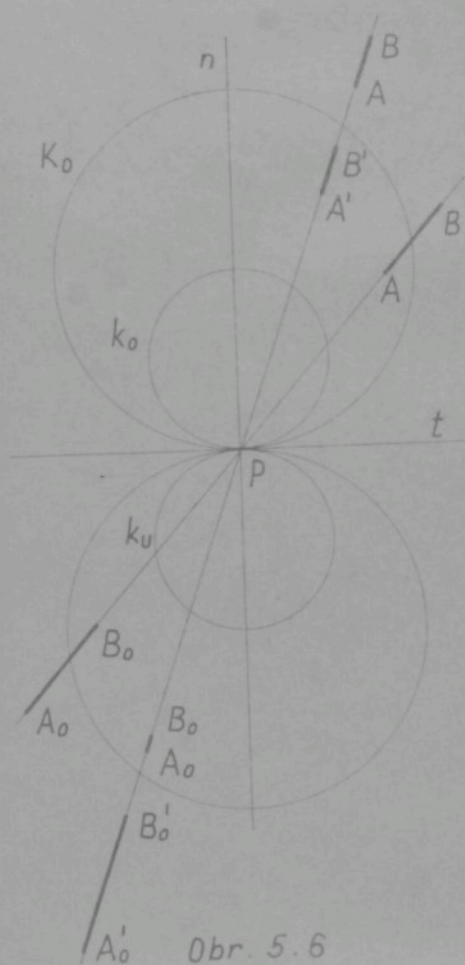
Obr. 5.3



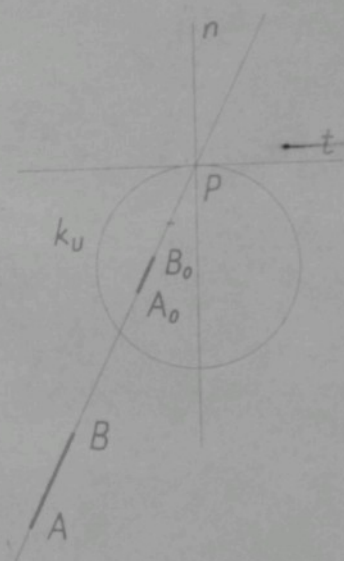
Obr. 5.4



Obr. 5.5



Obr. 5.6



Obr. 5.7

bude obraz příčně zvětšen pokud $|s| > |m|$, tj. možná v 1. a event. v 2. oblasti. V 3. oblasti je vždy $Z_P < 1$. V 2. oblasti může nastat i případ $Z_P = 1$. Nic se na věci nemění, představíme-li si, že úsečka $\overrightarrow{AM}$ (obr. 5.2) je v bodě A kolmá na nákretnu. Orientujeme-li úsečku $\overrightarrow{AM}$ se směrem před nákretnu, pak obraz $\overrightarrow{A_0(M)}$ je rovněž kolmý na nákretnu v A_0 , ale opačného směru. Říkáme, že obraz úsečky je převrácený. Jinak hovoříme o přímém obraze.

Celkově lze říci:

- 1/ Předstát v 1. oblasti je Euler - Savaryvova rovnice transformována na obraz, který je nekutečný, přímý, osově i příčně

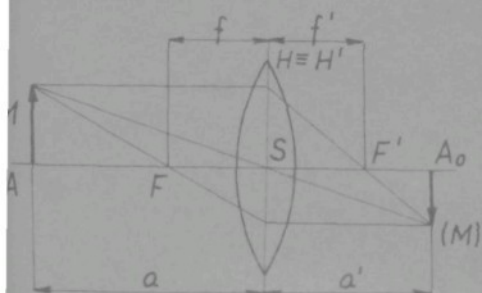
zvětšený ($Z_o > 1$; $Z_p > 1$).

2/ Předmět v 2. oblasti je transformován na obraz, který je skutečný, převrácený a při $Z_o \leq 1$, $|Z_p| \leq 1$.

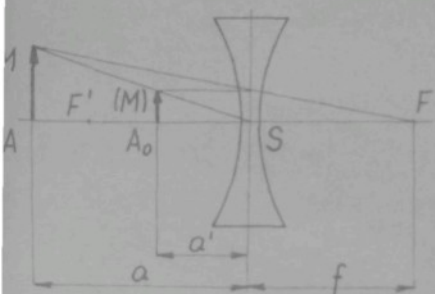
3/ Předmět v 3. oblasti je transformován na obraz, který je ne-sktečný, přímý, osově i příčně zmenšený.

5.1 Analogie Euler - Sevaryovy rovnice se zobrazovací rovnicí optické soustavy

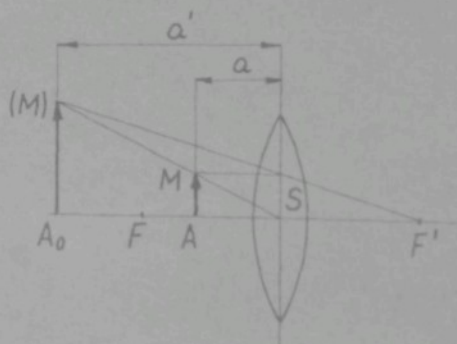
Z dosud podaných úvah vyplývá, že Euler - Sevaryovu transformaci lze realizovat optickou soustavou a naopak optickou soustavu realizovat Euler - Sevaryovou transformací. Mějme na mysli tenkou vypuklou čočku v paraxiálním Gaussově prostoru /obr. 5.8/. Pro vzdálenost předmětu a od hlavní roviny H tenké čočky /spojky/ a vzdálenost a' obrazu od hlavní



Obr. 5.8



Obr. 5.9



Obr. 5.10

$$r_2 = \frac{(n-1)d_0 r_1}{r - d_0(n-1)} \quad (9)$$

Pomocí výrazu (9) určujeme poloměr r_2 pro volený index lomu n spojky a poloměr r_1 . V případě, že volíme $r_1 = r_2 = r$, dostaneme pořádkový index lomu ze vztahu

$$n = \frac{r}{2d_0} + 1 \quad (10)$$

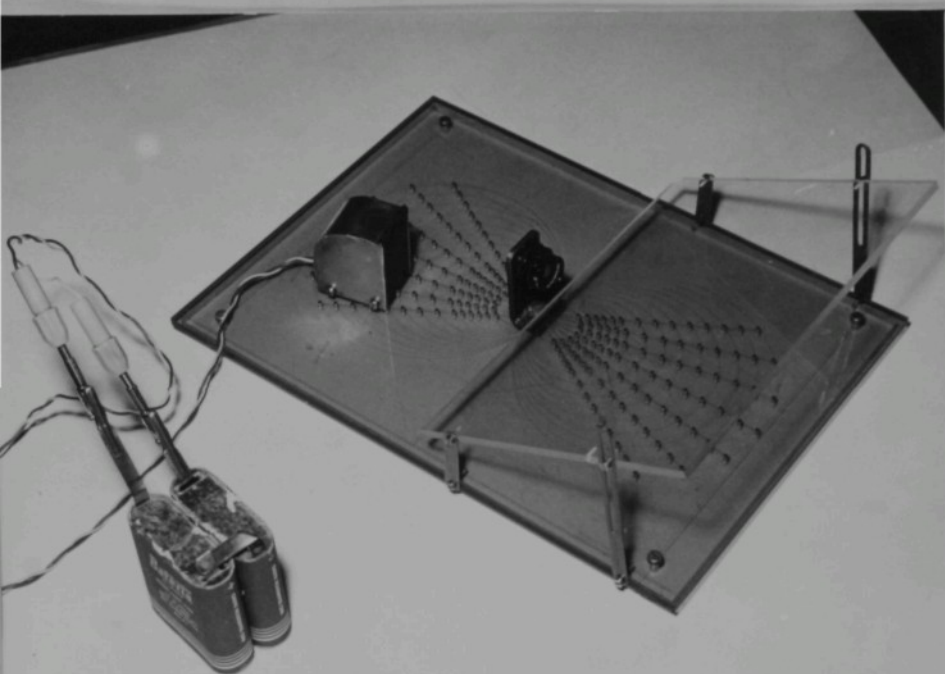
Dosavadní úvahy platí s omezením i v případě, že normála vyšetřovaného bodu Z - roviny svírá s hlavní normálou úhel α . V analo-
gii lomu odpovídá světelný paprsek odchýlený o též úhel od optické osy. Omezení je dáno maximálním úhlem α_m , tedy

$$\alpha < \alpha_m = \arcsin \frac{1}{n}, \quad \text{kde } n \text{ je index lomu čočky. Re-}$$

produkci Šuler - Savaryovy rovnice čočkou lze realizovat fotografickým přístrojem /objektivem/, u něhož lze skutečný, převrácený obraz zachytit na mstnici nebo film. Světelný bod A - roviny jako předmět zaostríme objektivem o ohniskové vzdálenosti na mstnici, čímž získáme polohu obrazu, tedy i příslušného bodu A_0 . V případě, kdy světelný bod je v 1. nebo 3. oblasti

Z - roviny s obraz je neskutečný, dosáhneme skutečného obrazu předřadíme-li před tento obraz další spojnou nebo rozptylnou čočku zůstává předmětem jako by se skutečně vytvořil.

K reprodukci Šuler - Savaryovy rovnice byl zhotoven pokusný zedel /viz fotografie/, u něhož v 2. oblasti Z - roviny /předmětové/ je přemisťován v zorném poli spojná čočka $f = d_0 = 40 \text{ mm}$ světelný bod. V $\bar{z}$ - rovině /obrazové/ byl umístěn fotografický papír, na který se exponovaly obrazy ve formě čárek /osové zvětšení světelného zdroje/. Výsledek pokusu je uveden na připojené fotografii.



6.0 Analogie Euler - Savaryovy rovnice s rovnicí elektrického obvodu v mostkovém zapojení

Euler - Savaryovy rovnici

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{s} = \frac{1}{W}, \quad (1)$$

kde $W = d_0 \cos \alpha$, můžeme reprodukovat elektrickým obvodem složeným ze dvou paralelně řazených větví I, II. Větev I obsahuje odpory R_1, R_2, R a větev II vyrovnávací odpory R_a, R_b . Bude-li obvod vyrovnán při $R_a = R_b$ (napětí mezi body obvodu A, B je nulové), jsou odpory R_1, R_2, R vázány vztahem

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}. \quad (2)$$

Upravíme-li vztah (1) na tvar

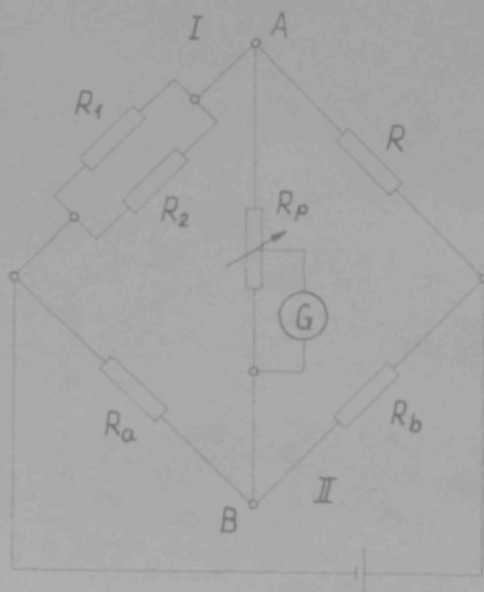
$$\frac{1}{W} + \frac{1}{s} = \frac{1}{m}, \quad (3)$$

dostaneme porovnáním vztahů (2) a (3) analogii pro 1. oblast z - roviny, tj. pro $m > 0, W > m$

$$\left. \begin{array}{l} R_1 \dots W; \\ R_2 \dots s; \\ R \dots m. \end{array} \right\} (4)$$

Pro 2. oblast z - roviny, kdy $m > 0, m > W$, dostaneme porovnáním vztahů (1) a (2) analogii

$$\left. \begin{array}{l} R_1 \dots m; \\ R_2 \dots s; \\ R \dots W. \end{array} \right\} (5)$$



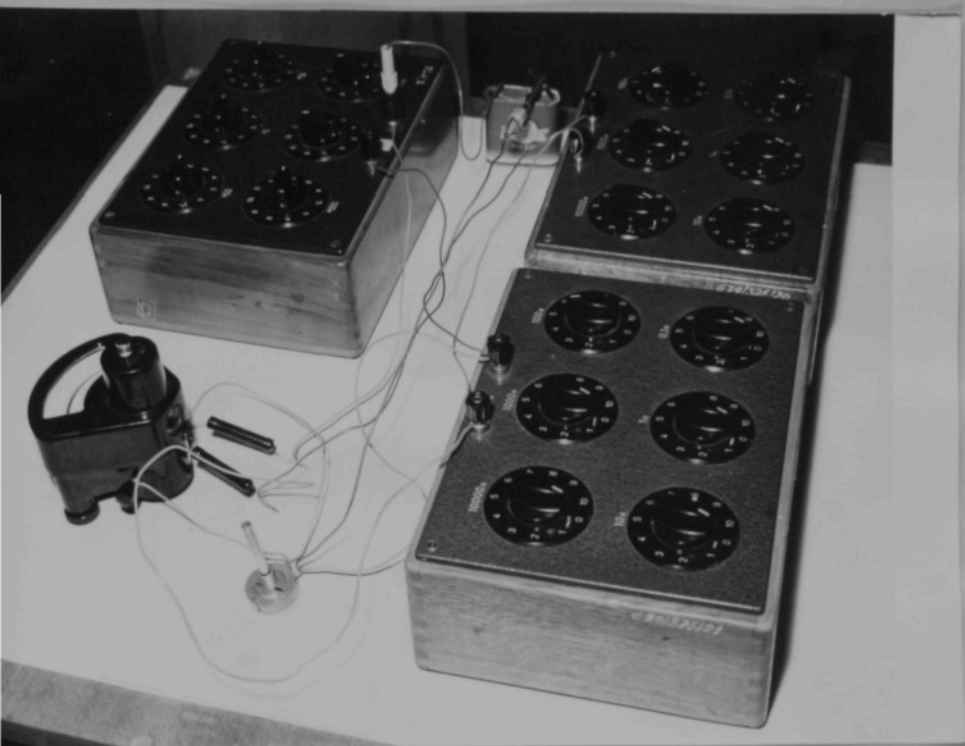
Obr. 6.1

oblast Z - roviny, kdy $m < 0$, dostaneme porovnání (2) s upraveným vztahem (1)

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{W} = \frac{1}{s} \quad (6)$$

$$R_1 \dots m; R_2 \dots W; R \dots s \quad (7)$$

Rovnice (1) se v analogii převádí na vyrovnávání můstkového odvětví, což je ekvivalentní s řešením rovnice (2). Souřadnice s a konstanta W se nastavuje a souřadnice s odečítá na dekádách elektrického odporu, tj. v Ω . Při praktickém měření bylo použito přesných /dekadických/ odporů s měnitelností po $0,1 \Omega$. K indikaci obvodu, bylo použito galvanometru G s potenciometrem R_p k nastavování citlivosti. Zapojení tury je na přiložené fotografii. Uveďme si příklad řešení: Je dáno $W = 40 \text{ mm}$, $m = -50 \text{ mm}$. Ježto $m < 0$, oblast Z - roviny, použijeme analogie podle relací (4). Nastavíme na dekádě odporu R_1 souřadnici $m = 500 \Omega$ a na dekádě odporu R_2 konstantu $W = 400 \Omega$. Na dekádě výsledného odporu R nastavíme předběžně souřadnici $s = 400 \Omega$ /např. hodnotu z obou deníků/. Volbou hodnoty souřadnice s podle podmínky nulového napětí mezi body A , B . V další fázi měření nastavíme hodnotu s tak dlouho, až je můstek vyrovnán /galvanometr se uklidní na nule/. V našem případě jsme získali hodnotu souřadnice $s = 222,2 \Omega$, což odpovídá $s = -22,22 \text{ mm}$.



7.0 φ a φ_s - křivky

V dané poloze roviny Z existují body, jimž přísluší stejný poloměr křivosti. Geometrické místo takových bodů roviny Z nazýváme φ - křivkou. Geometrické místo přidružených středů (středů křivosti bodů φ - křivky) v Σ - rovině nazýváme φ_s - křivkou. ^{x/} Rovnici φ - křivky v polárních souřadnicích (m, α) dostaneme z Euler - Savaryovy rovnice

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{s} = \frac{1}{d_0 \cos \alpha} \quad (1)$$

v níž položíme $s = m + \varphi$. Pak máme

$$k_\varphi \equiv m^2 + \varphi m - \varphi d_0 \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

Ješto poloměru křivosti φ přísluší rovněž záporné znaménko, 2. oblast bodů Z - roviny/, má generální rovnice φ - křivky tvar

$$k_\varphi \equiv m^2 \pm |\varphi| m \mp |\varphi| d_0 \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

Řešením rovnice (3) podle m , dostaneme čtyři souřadnice m_i ($i=1,2,3,4$)

$$m_i = \mp \frac{|\varphi|}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 \pm |\varphi| d_0 \cos \alpha} \quad (4)$$

které určují na normále dané úhlem α obecně čtyři body A_i ($i=1,2,3,4$), jimž přísluší stejná číselná hodnota poloměru křivosti φ . Ješto platí

$$\sqrt{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 \pm |\varphi| d_0 \cos \alpha} > \frac{|\varphi|}{2} \quad (5a)$$

určuje souřadnice m_1 bod A_1 φ - křivky v 1. oblasti normály /uvnitř kružnice obrátu/ a souřadnice m_2 bod A_2 φ - křivky v 3. oblasti normály /v záporné polorovině Z /. Pokud platí v rovnici (4)

$$\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 > |\varphi| d_0 \cos \alpha \quad (5b)$$

existují v 2. oblasti normály dva body A_3, A_4 φ - křivky.

^{x/} Zavedl H. Alt v práci: Zur Geometrie der Koppelrastgetriebe. Ingenieur - Archiv 1932.

$$\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = |\varphi| d_0 \cos \alpha \quad (5c)$$

body A_3, A_4 splývají /dvojnásobný kořen rovnice (4) /. Pro

$$\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 < |\varphi| d_0 \cos \alpha$$

nemá φ - křivka v 2. oblasti normály reálných bodů /příslušné kořeny rovnice (4) jsou komplexně sdružené/. Na dané normále tělesa existují čtyři, tři nebo dva reálné body se stejnou hodnotou poloměru křivosti φ podle toho, zda

$$|\varphi| \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 4 d_0 \cos \alpha \quad (5d)$$

Rovnice (2) v pravouhlých souřadnicích φ, m je rovnicí hyperboly. Na obr. 7.1 je sestavena taková hyperbola pro danou normálu. Je-li splněna podmínka (5b) jsou v 2. oblasti

Z - roviny dva body se stejným φ , a to jeden vně kružnice K_0 a druhý v oblasti mezi kružnicemi k_0 a K_0 /viz obr. 7.1 /. To jsme si ověřili již dříve v odst. 2.2.

Z vlastností rovnice (3) vyplývá pro souřadnice m_i

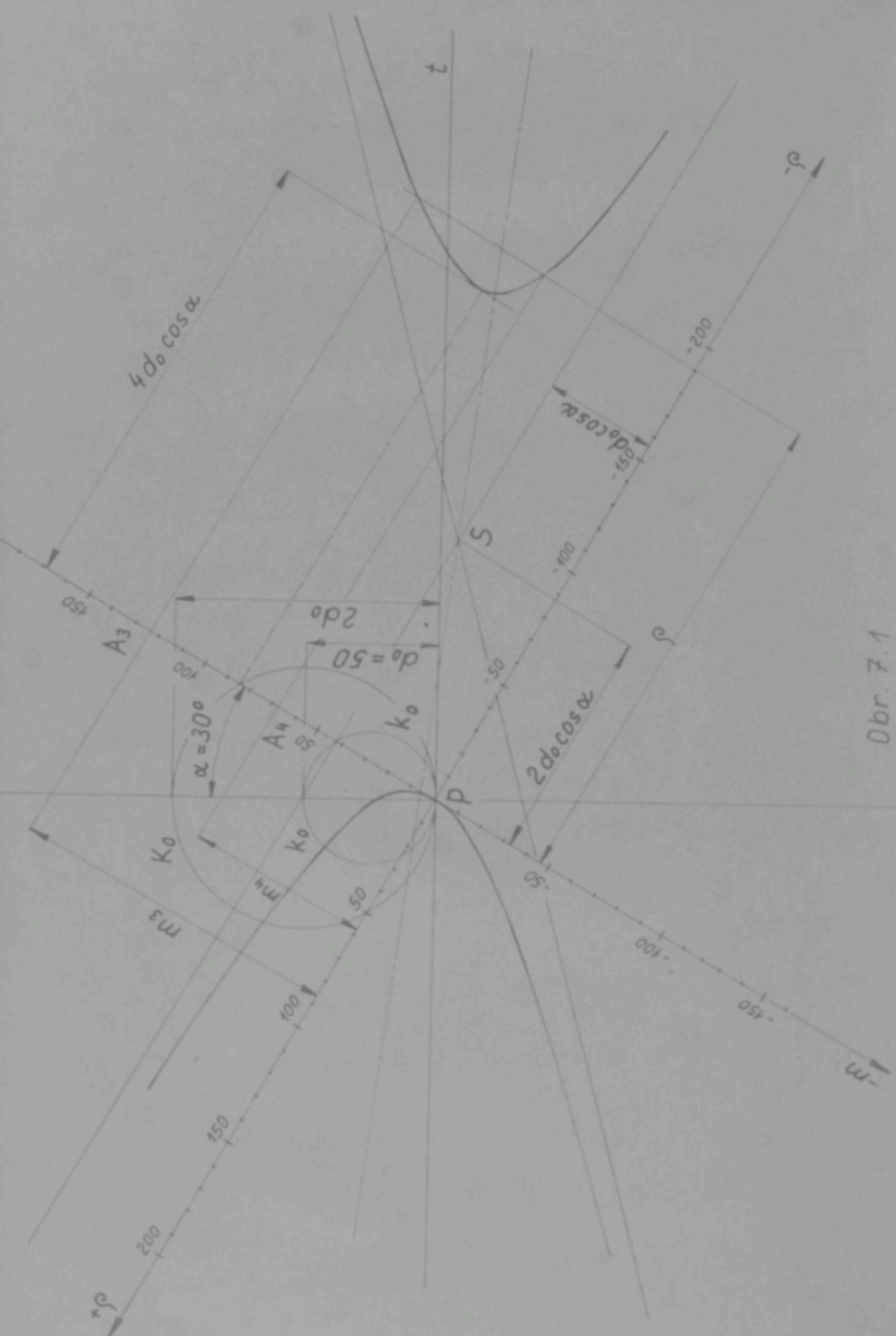
$$m_1 + m_2 = -|\varphi| ; \quad m_3 + m_4 = |\varphi| \quad (6)$$

Ježto pro body Z - roviny 1. a 3. oblasti je $s_1 - m_1 = |\varphi|, s_2 - m_2 = |\varphi|$ a pro body v 2. oblasti Z - roviny $-m_3 + s_3 = -|\varphi|, -m_4 + s_4 = -|\varphi|$, dostaneme s použitím vztahů (6)

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -m_2 ; & m_3 &= -s_4 ; \\ m_1 &= -s_2 ; & m_4 &= -s_3 ; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

což jsme také poznali v odst. 2.2

x/ K tomuto výsledku jsme se rovněž dostali sledováním přířezných oblastí Z a $\bar{Z}$ - roviny /viz odst. 2.2 /.



Обр. 7.1

Dosaďme-li v rovnici (3) $m = -s^{\frac{x}{d_0}}$ dostaneme rovnici φ_s - křivky v polárních souřadnicích s, α , tj.

$$k_{\varphi_s} \equiv s^2 \mp |q|s \mp |q|d_0 \cos \alpha = 0 \quad (8)$$

φ_s - křivka je φ - křivkou symetrická podle pólu P a tedy i podle tečny k polodiím, neboť φ - křivka a tedy i φ_s - křivka je symetrická podle hlavní normály, ježto $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$.

Rovnici φ - křivky v pravouhlých souřadnicích $x, y \equiv z$ dostaneme z rovnice (3), v níž položíme

$$m^2 = x^2 + y^2; \quad \cos \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (9)$$

tedy

$$k_{\varphi} \equiv (x^2 + y^2)^3 - \varphi^2(x^2 + y^2 - d_0 y)^2 = 0 \quad (10)$$

V souřadnicích x, y je φ - křivka šestého stupně [s počátkem v pólu P]. Položíme-li v rovnici (8)

$$s^2 = \xi^2 + \eta^2; \quad \cos \alpha = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad (11)$$

dostaneme rovnici φ_s - křivky v souřadnicích $\xi, \eta \equiv z$

$$k_{\varphi_s} \equiv (\xi^2 + \eta^2)^3 - \varphi^2(\xi^2 + \eta^2 + d_0 \eta)^2 = 0 \quad (12)$$

V souřadnicích ξ, η je φ_s - křivka šestého stupně [s počátkem v pólu P].

Položíme-li v rovnici (10)

$$x = \frac{x_1}{x_3}; \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

dostaneme rovnici φ - křivky v homogenních souřadnicích x_1, x_2, x_3 . Tedy

$$k_{\varphi} \equiv x_1^6 + 3x_1^4 x_2^2 + 3x_1^2 x_2^4 + x_2^6 - \varphi^2(x_1^4 x_3^2 + 2x_1^2 x_2^2 x_3^2 - 2x_1^2 x_2 x_3^3 d_0 + x_2^4 x_3^2 - 2x_2^2 x_3^3 d_0 + x_2^2 x_3^4 d_0^2) = 0 \quad (13)$$

Pro $x_3 = 0$ dostaneme

$$(x_1^2 + x_2^2)^3 = 0,$$

Protože euler - Savaryova rovnice je invariantní vůči této transformaci.

$$(x_1 + ix_2)^3 (x_1 - ix_2)^3 = 0. \quad (14)$$

z rovnice (14) plyne, že φ - křivka protíná nevlastní přímku ($x = \infty$, $y = \infty$) z - roviny ve dvou komplexně sdružených bodech /neko-
nečně vzdálené kruhové body/. Obě kruhové body jsou trojnásobnými body φ - křivky. φ - křivka tedy patří mezi cirkulární křivky šestého stupně. Totéž platí i pro φ_s - křivku.

φ - křivka / φ_s - křivka / je složena ($|\rho| > 4d_0$) ze tří větvi k_φ^1 , k_φ^2 , k_φ^{23} ($k_{\varphi_s}^2$, $k_{\varphi_s}^3$, $k_{\varphi_s}^{14}$), z nichž k_φ^1 ($k_{\varphi_s}^2$) je geometrickým místem bodů A_1 (A_{02}) a leží tudíž uvnitř kružnice k_0 (k_u), větve k_φ^2 ($k_{\varphi_s}^3$) je geometrickým místem bodů A_4 (A_{03}) a leží tudíž v oblasti mezi kružnicemi k_0 , K_0 (k_u , K_u), větve k_φ^{23} ($k_{\varphi_s}^{14}$) je geometrickým místem bodů A_2 , A_3 (A_{01} , A_{04}) a leží vně k_0 (k_u). Větve φ - křivky / φ_s - křivky / jsou sestaveny pro $|\rho| > 4d_0$ na obr. 7.16a, pro $|\rho| = 4d_0$ na obr. 7.16b a pro $|\rho| < 4d_0$ pak na obr. 7.16c.

7.1 Počítácko - grafické konstrukce

φ - křivka

U konstrukcí φ - křivky dané rovnicí (10) jsme se zabývali již v odst. 2.1 vztahy (14), (15). Uvedme si konstrukci φ - křivky, při níž se vychází z rovnice φ - křivky v souřadnicích m , M , kde M je mocnost bodu φ - křivky ke kružnici obratu k_0 . Pro bod A φ - křivky uvnitř kružnice k_0 je mocnost bodu A ke kružnici obratu

$$M = \overline{AP} \cdot \overline{AZ} = m(m - d_0 \cos \alpha). \quad (15)$$

Porovnáváme-li rovnici (2) ve tvaru

$$m^2 + \varphi(m - d_0 \cos \alpha) = 0$$

s rovnicí (15), máme

$$m^2 = -\varphi M.$$

Pro $\varphi = \pm |\rho|$, kde znaménko mínus přísluší 2. oblasti bodů

φ - křivky máme

$$m^3 = \mp |\varphi| M, \quad (16)$$

Je generální rovnici φ - křivky v souřadnicích m, M .
Rovnici φ_s - křivky v souřadnicích s, M dostaneme ze vztahů (16) pro $m = -s$

$$s^3 = \pm |\varphi| M. \quad (17)$$

Pro $M = \text{konst}$ dostaneme z rovnice (15), v níž pomocí vztahů (9) zavedeme pravouhlé souřadnice x, y rovnice kružnic k_M stálé mocnosti, tj.

$$k_M \equiv x^2 + \left(y - \frac{d_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{d_0}{2}\right)^2 + M \quad (18)$$

s z rovnice (16) soustředné kružnice k_m se středem v pólu

$$k_m \equiv x^2 + y^2 = \sqrt[3]{\varphi^2 M^2}. \quad (19)$$

Pro volené hodnoty M dostaneme body φ - křivky v průsečících odpovídajících kružnic k_M a k_m . Obdobně bychom konstruovali φ_s - křivku.

7.2 Involuční vlastnosti bodů φ - křivky

Jak jsme si již uvedli, je Euler - Savaryova rovnice lineární v m i s , tedy bilineární a vyjadřuje projekční příbuznost bodů normály a přidruženými středy křivosti. Z Euler - Savaryovy rovnice v bilineárním tvaru

$$ms - (s - m)d_0 \cos \alpha = 0 \quad (20)$$

máme pro $s - m = \pm |\varphi|$

$$ms = \pm |\varphi| d_0 \cos \alpha. \quad (21)$$

Ježto pro body φ - křivky platí podle vztahů (7)

$$m_2 = -s_1;$$

$$m_3 = -s_4.$$

pak

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-|\varphi| d_0 \cos \alpha} ; \quad y_{1,2} = \pm \sqrt{|\varphi| d_0 \cos \alpha} \quad (24)$$

Prvá involuce (22) je eliptická, druhá involuce (23) je hyperbolická. V prvním případě jsou odpovídající si body $A_1(m_1)$, $A_2(m_2)$ na různých stranách od pólu P a opišeme-li nad A_1, A_2 kružnici, prochází tato body H , $\bar{H}$, kde $\overline{PH} = \overline{P\bar{H}} = \sqrt{|\varphi| d_0 \cos \alpha}$ /obr. 7.2 /.

V druhém případě odpovídající si body $A_3(m_3)$, $A_4(m_4)$ leží na téže straně od pólu a opišeme-li kolem P kružnici poloměrem $\overline{PH} = \sqrt{|\varphi| d_0 \cos \alpha}$, seče tato normála ve dvojných bodech M, N /obr. 7.2 / . Body A_3 , A_4 oddělují harmonicky dvojné body M, N .

7.3 Grafické konstrukce bodů

φ - křivky

Ve vztahu (21) značí součin $m \cdot s$ mocnost $M_0 = PA \cdot PA_0$ pólu P ke kružnicím k_{0i} ($i = 1, 2, 3, \dots$) proloženými body A_i a přidruženými středy křivosti A_{0i} . Zavedením mocnosti M_0 ve vztahu (21)

$$M_0 = \pm |\varphi| d_0 \cos \alpha \quad x/ \quad (25)$$

dostaneme pro $|\varphi| = \text{konst}$ rovnici φ - křivky v souřadnicích M_0, α . Mocnost pólu P ke kružnicím k_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) bodů z - roviny na téže normále má stejnou číselnou hodnotu.

Použitím vztahu (25) v rovnici (4) dostaneme φ - křivku v souřadnicích m , M_0 , tj.

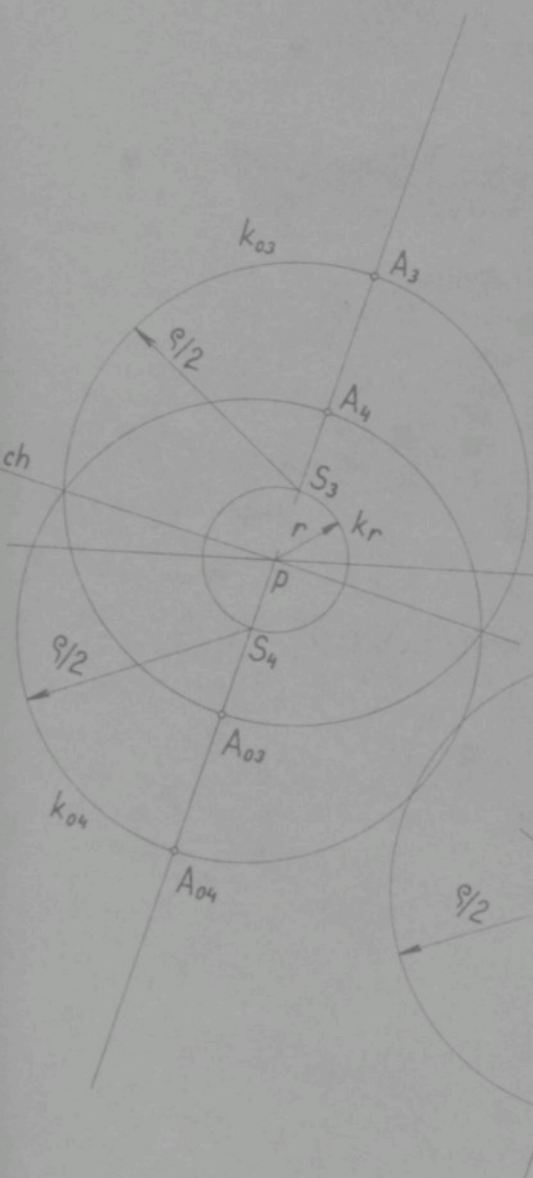
$$k_\varphi = m^2 \pm |\varphi| m \mp |M_0| = 0 \quad (26)$$

Řešením rovnice (26) podle m máme

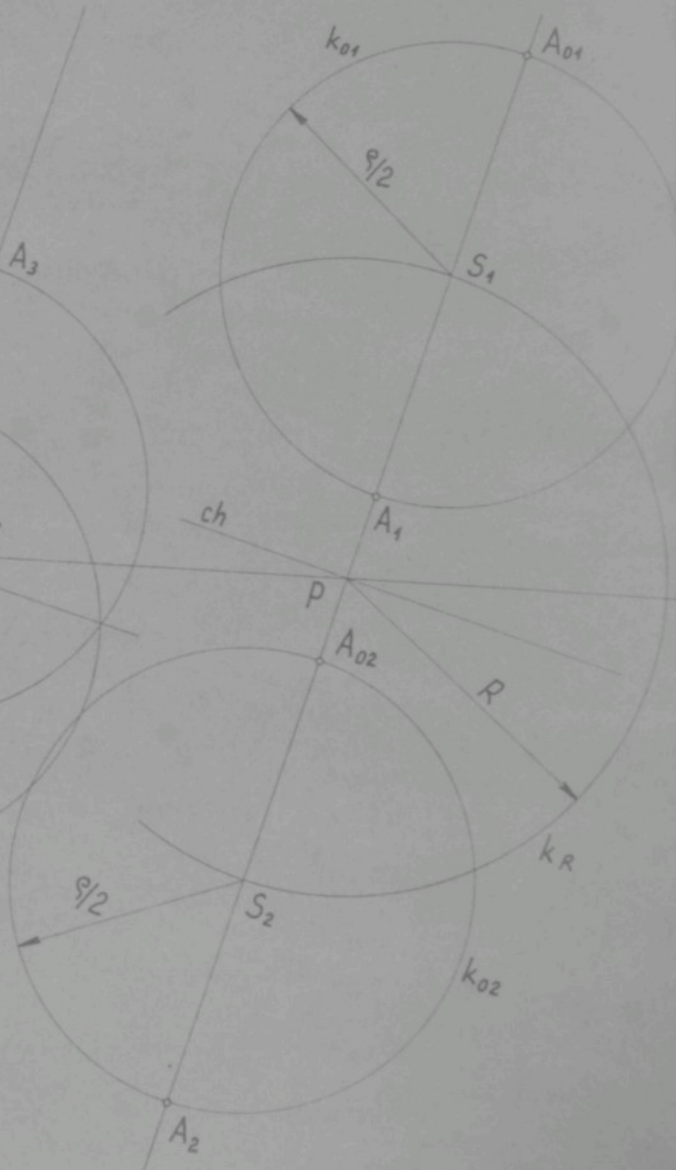
$$m_i = \mp \frac{|\varphi|}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 \pm |M_0|}, \quad (27)$$

kde $i = 1, 2, 3, 4$

x/ Mocnost je zřejmě mocnost involucí, o nichž jsme hovořili v předchozím odstavci.



Obr. 7.4



Obr. 7.3

hlednutím ke vztahu (25)

$$|R| = \sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + |\rho| d_0 \cos \alpha} ; |r| = \sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - |\rho| d_0 \cos \alpha} . \quad (34)$$

Body na dané normále s předepsaným poloměrem křivosti ρ stanovíme počtářsky pomocí rovnic (32), (33) a (34). Pro dané hodnoty d_0 , α , ρ určíme z rovnic (34) poloměry R , r kružnic k_R , k_r , které mají středy v pólu P . Průsečíky S_1, S_2 kružnice k_R s danou normálou jsou středy kružnic k_{01} , k_{02} bodů A_1 , A_2 /obr. 7.3 /. Kružnice k_{01} , k_{02} protnou danou normálu v bodech A_1 , A_{01} ; A_2 , A_{02} . Bod A_1 je vždy uvnitř a bod A_2 vně kružnice k_R . Ježto je vždy /viz vztah (34) /.

$$|R| > \frac{|\rho|}{2} ,$$

musí podle vztahu (32) platit

$$\vartheta < m_1 < |R| ;$$

$$m_2 < \vartheta ; |m_2| > |R| .$$

Obdobně průsečíky S_3 , S_4 kružnice k_r s normálou jsou středy kružnic k_{03} , k_{04} /obr. 7.4 /. Kružnice protnou normálu v bodech A_3 , A_{03} ; A_4 , A_{04} . Body A_3 , A_4 , pokud jsou reálné /srovnej podmínku (29) /, leží vždy v kladné, tj. horní polo-rovině z . Ze vztahu (34) je

$$\frac{|\rho|}{2} > |r| \geq \vartheta ,$$

tedy ze vztahu (33) máme pro bod A_3

$$m_3 > \vartheta ; \frac{|\rho|}{2} < m_3 ; m_3 > |r| .$$

Bod A_3 leží vždy vně kružnice k_r . Pro bod A_4 je

$$\frac{|\rho|}{2} \geq m_4 ; m_4 > \vartheta .$$

Bod A_4 leží vně nebo uvnitř kružnice k_r , neboť pro

$$4 d_0 \cos \alpha < |\rho| < \frac{16}{3} d_0 \cos \alpha$$

leží bod A_3 vně kružnice k_r , pro

$$|\xi| = \frac{16}{3} d_o \cos \alpha$$

leží bod A_3 na kružnici k_r , pro

$$|\xi| > \frac{16}{3} d_o \cos \alpha$$

leží bod A_3 uvnitř kružnice k_r a pro

$$|\xi| = 4 d_o \cos \alpha$$

je $r = 0$, tedy kružnice k_r se redukuje na bod.

Přímka ch kolmá na normálu v pólu P je společnou chordálou odpovídajících si kružnic k_{o1} , k_{o2} a k_{o3} , k_{o4} . Plyne z dříve vyslovené věty o mocnosti pólu P ke kružnicím k_{o1} .

Na obr. 7.5 jsou určeny na normále bodu A a bodu B čtyřkloubového mechanismu kružnice k_{o2}^A a (k_{o2}^B) pomocí kružnic k_r a (k_r) . Body A_2 , B_2 leží v 3. oblasti z -roviny. Body A_3 , A_4 a B_3 , B_4 v 2. oblasti z -roviny nejsou reálné.

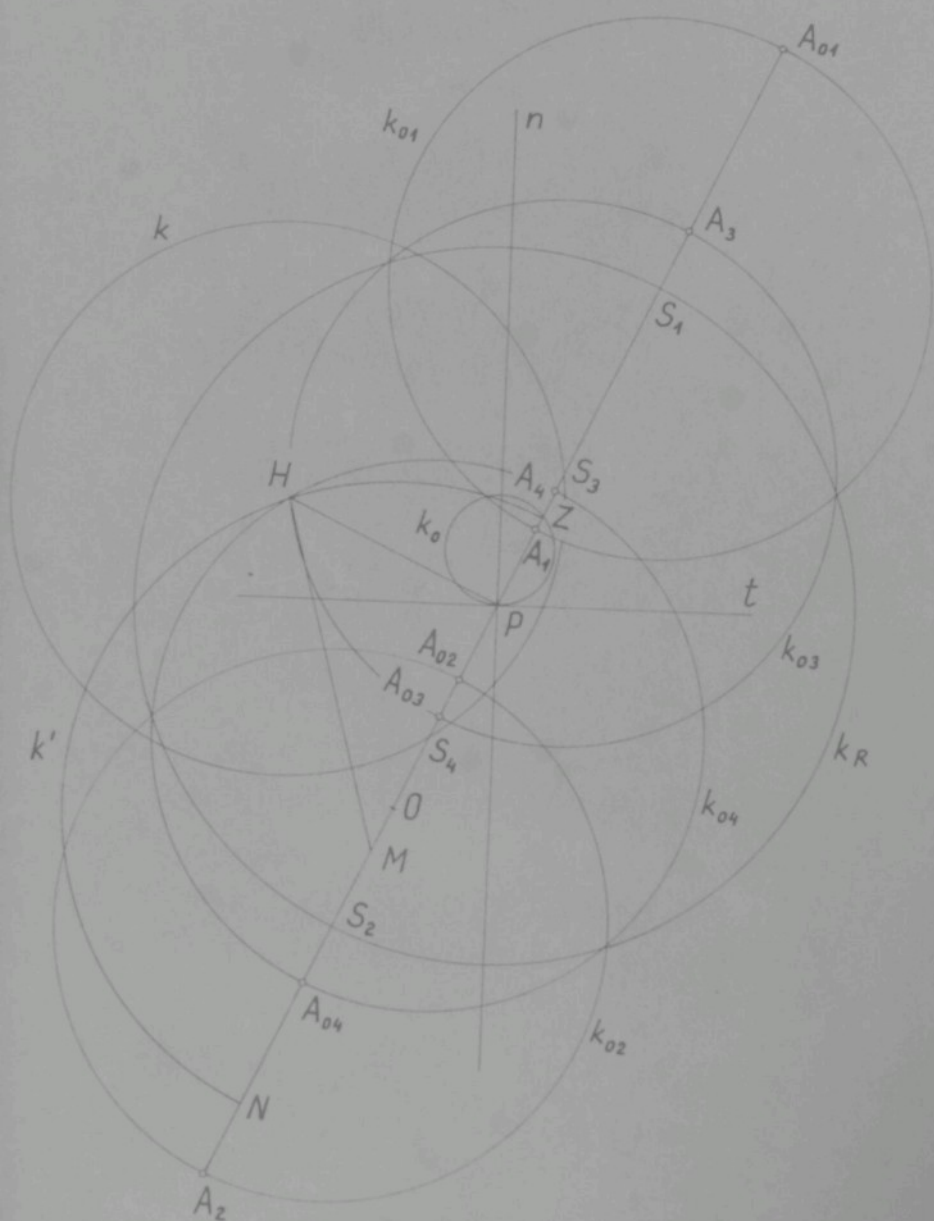
Sledujeme grafickou konstrukci bodů obecné normály, jímž přísluší stejný poloměr křivosti /obr. 7.6/. Na chordálách dosud neznámých kružnic k_{o1} , k_{o2} a k_{o3} , k_{o4} , tj. na kolmici v pólu P normály naneseeme úsečku $\overline{PH}$, jejíž druhá mocnina vyjadřuje mocnost

$$M_o = \varphi d_o \cos \alpha = \overline{PH}^2 \quad (35)$$

Úsečku $\overline{PH}$ konstruuje graficky jako výšku v pravouhlém trojúhelníku, jehož přepona je rovna součtu $\varphi + d_o \cos \alpha$.

Od bodu P naneseeme podle obr. 7.6 daný poloměr křivosti $\varphi = \overline{PN}$ a z políčního bodu O úsečky $\overline{NZ} = \varphi + d_o \cos \alpha$ ořetneme obloukem $\overline{ON}$ kružnice k' chordálu v hledaném bodě H .

Projektivní význam míry PH byl sledován v odst. 7.2.



kružnice k poloměru $\frac{\rho}{2}$ s se středem v bodě H pro-
 danou normálu ve středech S_3 a S_4 kružnic k_{03} , k_{04} .
 leme-li na normálu od bodu P do bodu M míru $\frac{\rho}{2}$, udává
 $\overline{MH}$ přímo poloměr kružnice k_R . Kružnice k_R o polomě-
 R protíná normálu ve středech S_1 , S_2 kružnic k_{01} , k_{02} .
 cká podmínka existence bodů p - křivky v 2. oblasti normá-

$$\frac{\rho}{2} \geq \overline{PH}.$$

Uvedené konstrukce lze použít i v případě, kdy známe předem
 u ze čtyř kružnic k_{0i} . Tak na obr. 7.7 máme na normále
 B čtyřkloubového mechanismu určit další body, jimž příslu-
 ňý poloměr křivosti jako bodu B_1 . Nejprve určíme pomocí
 nice k_R střed S_2 kružnice k_{02} . Délka tečny $\overline{P(H)}$ z bodu P
 ružnici k_{02} nám určuje míru $\overline{PH}$ na chordále ch . Další po-
 řešení je shodný s předešlým.

Nyní si naznačíme jinou alternativu konstrukce bodů normály
 edepsaným poloměrem křivosti. Při tomto řešení nebudeme kon-
 novat kružnice k_{0i} , nýbrž přímo kružnice proložené body A_1 , A_2 ,
 A_3 , A_4 . Sledujeme nejprve body A_1 , A_2 . Dosud neznámou
 ňnici proloženou body A_1 , A_2 nazvěme k_{12} (obr. 7.8).
 nost M_{12} pólu P ke kružnici k_{12} je

$$M_{12} = m_1 \cdot m_2. \quad (36)$$

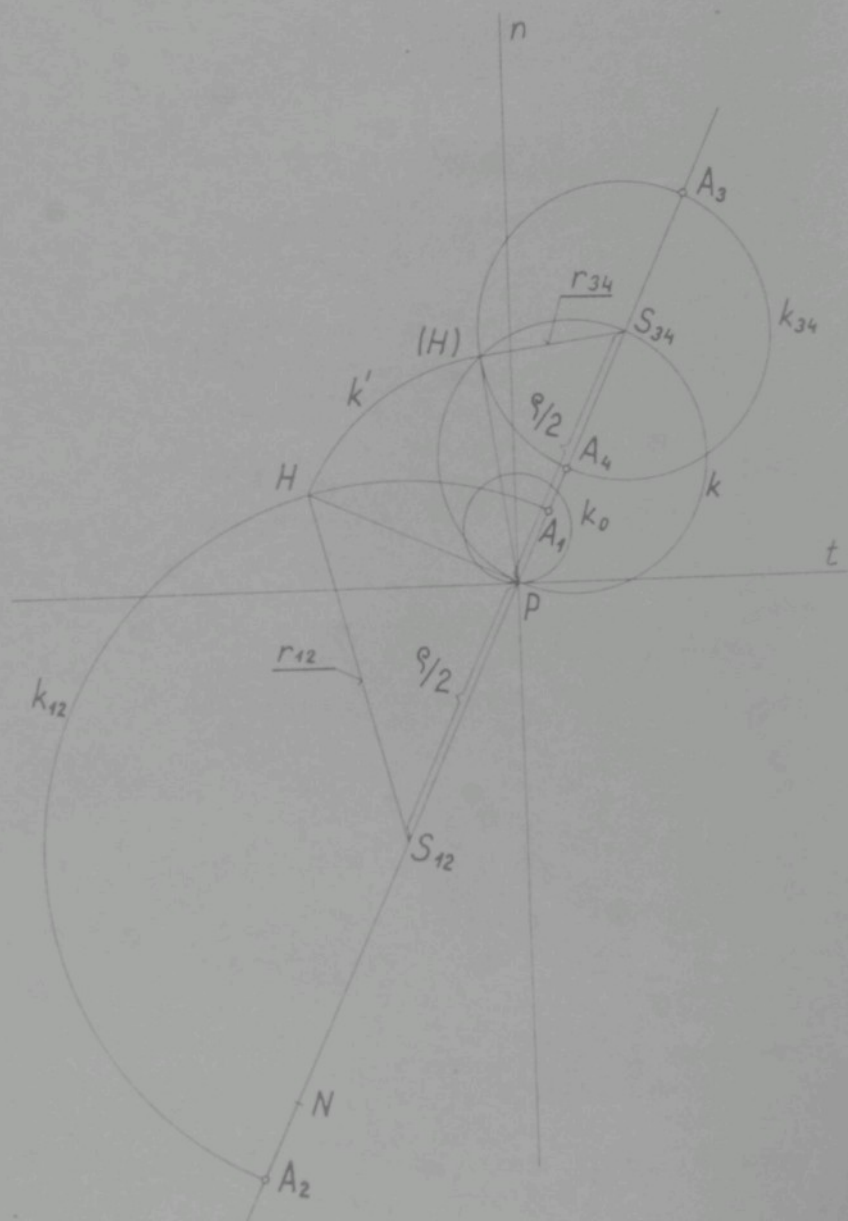
itím příslušných vztahů (28) pro míry m_1 , m_2 v rovnici (36)
 taneme

$$M_{12} = -|M_0|. \quad (37)$$

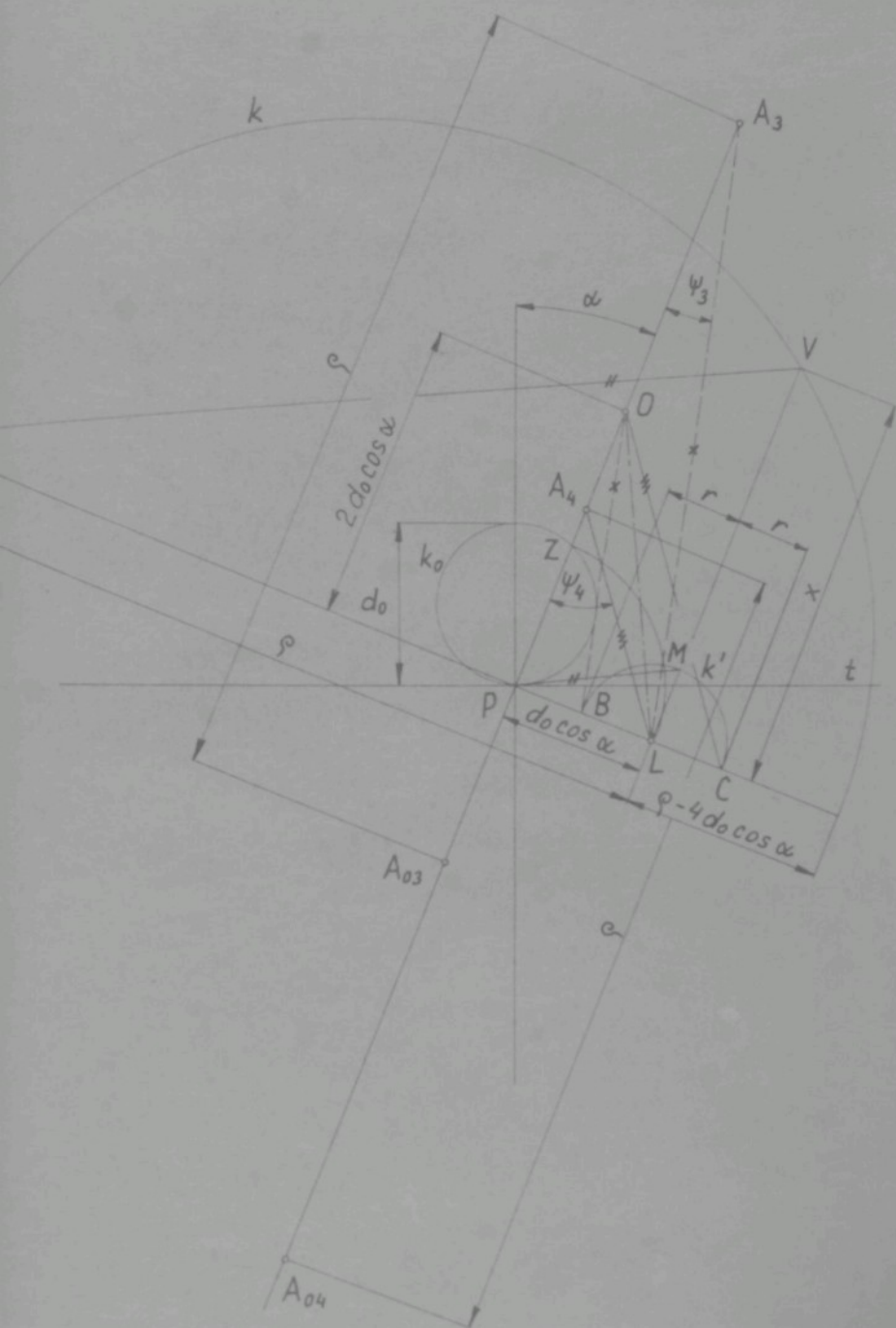
nost pólu P ke kružnicím k_{01} , k_{02} je až na znaménko stejná jak
 nost pólu P ke kružnici k_{12} proložené body A_1 , A_2 , jimž
 sluší stejný poloměr křivosti.

élenost m_{12} středu S_{12} kružnice k_{12} od pólu P dostaneme ze
 tahu

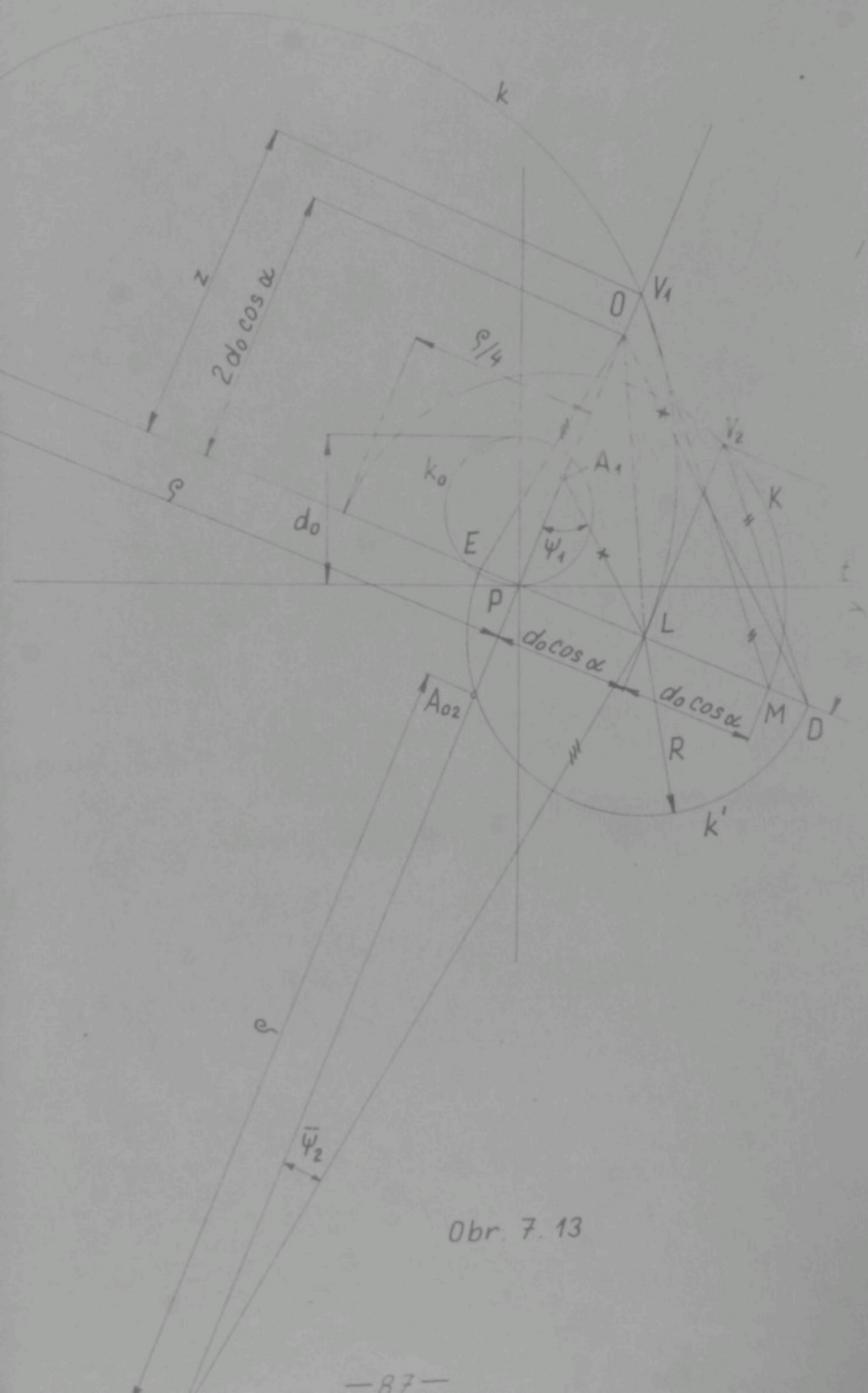
$$m_{12} = \frac{m_1 + m_2}{2} = -\frac{|\varphi|}{2}. \quad (38)$$

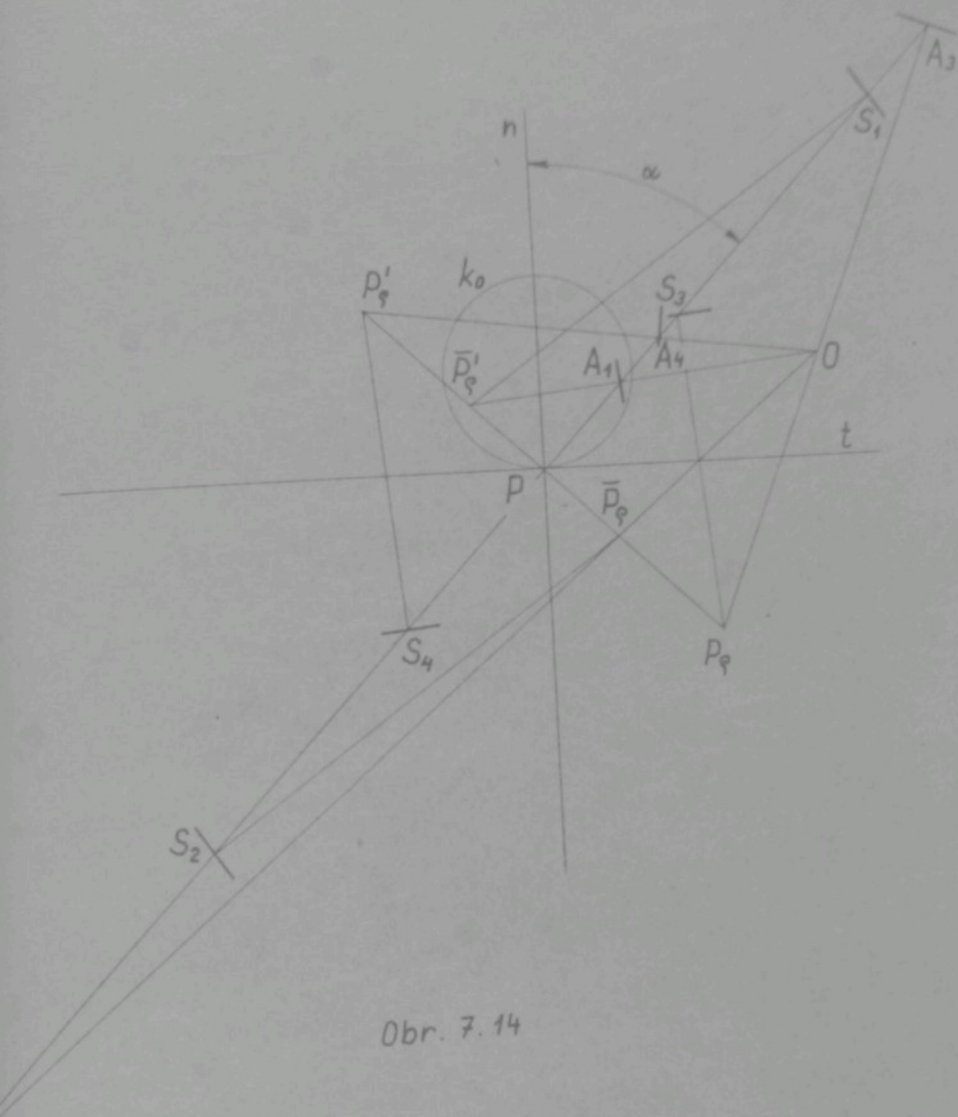


Obr. 7.8



Обр. 7.12





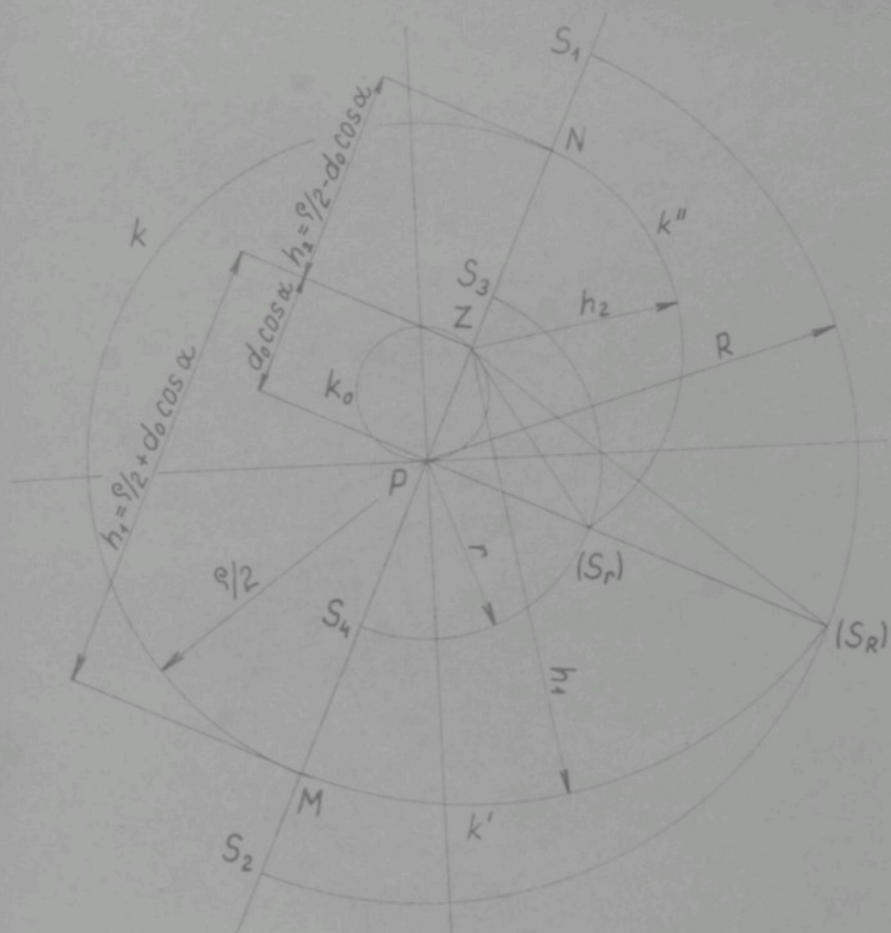
Obr. 7.14

polární rovnice S_r - křivky pak

$$n^2 - \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + |\varphi| d_0 \cos \alpha = 0. \quad (5)$$

Rovnice S - křivky v převodných souřadnicích (x, y) je

$$(x^2 + y^2)^3 - 2(x^2 + y^2)^2 \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + (x^2 + y^2) \left(\frac{\rho}{2}\right)^4 = \varphi^2 d_0^2 y^2. \quad (6)$$

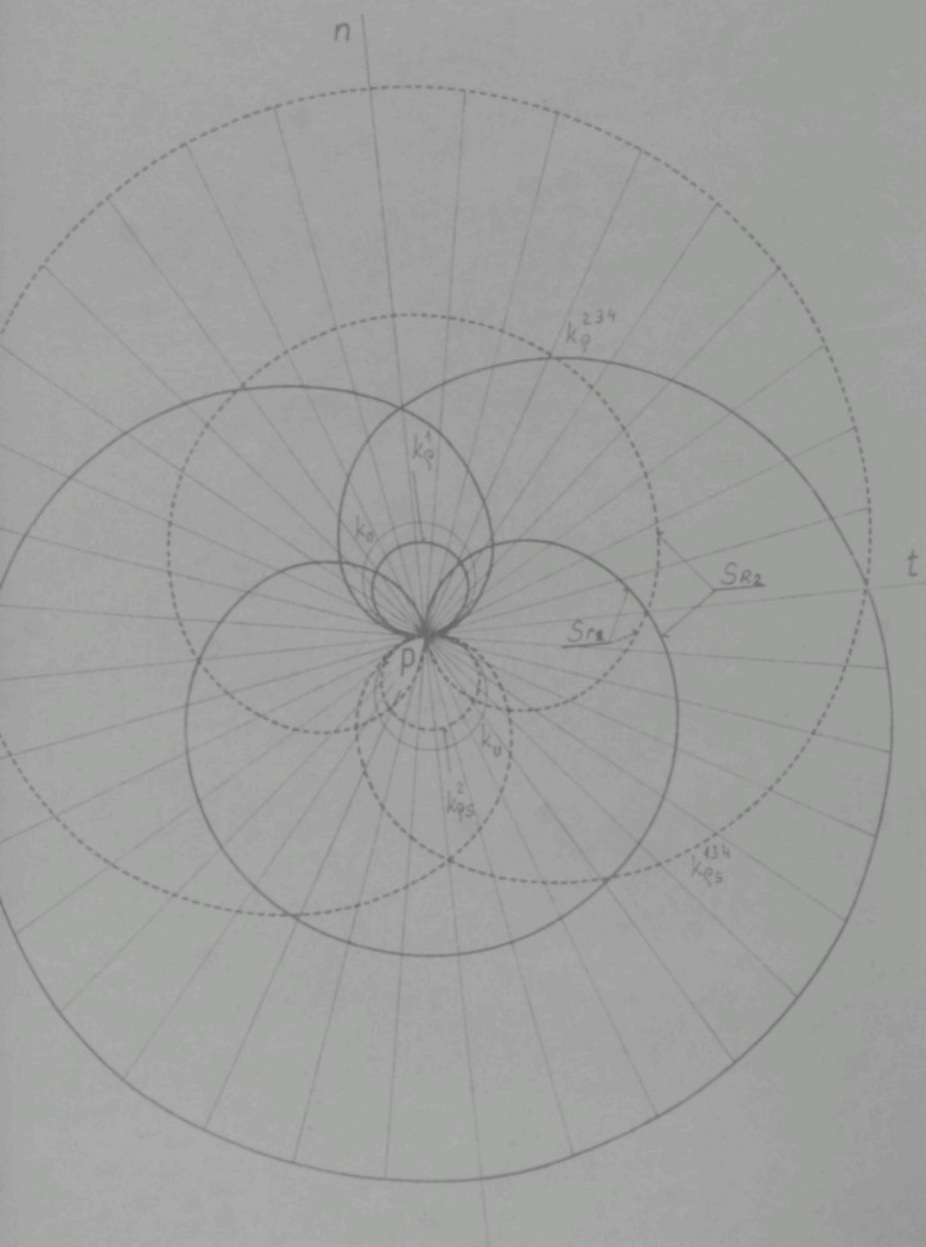


Obr. 7.15

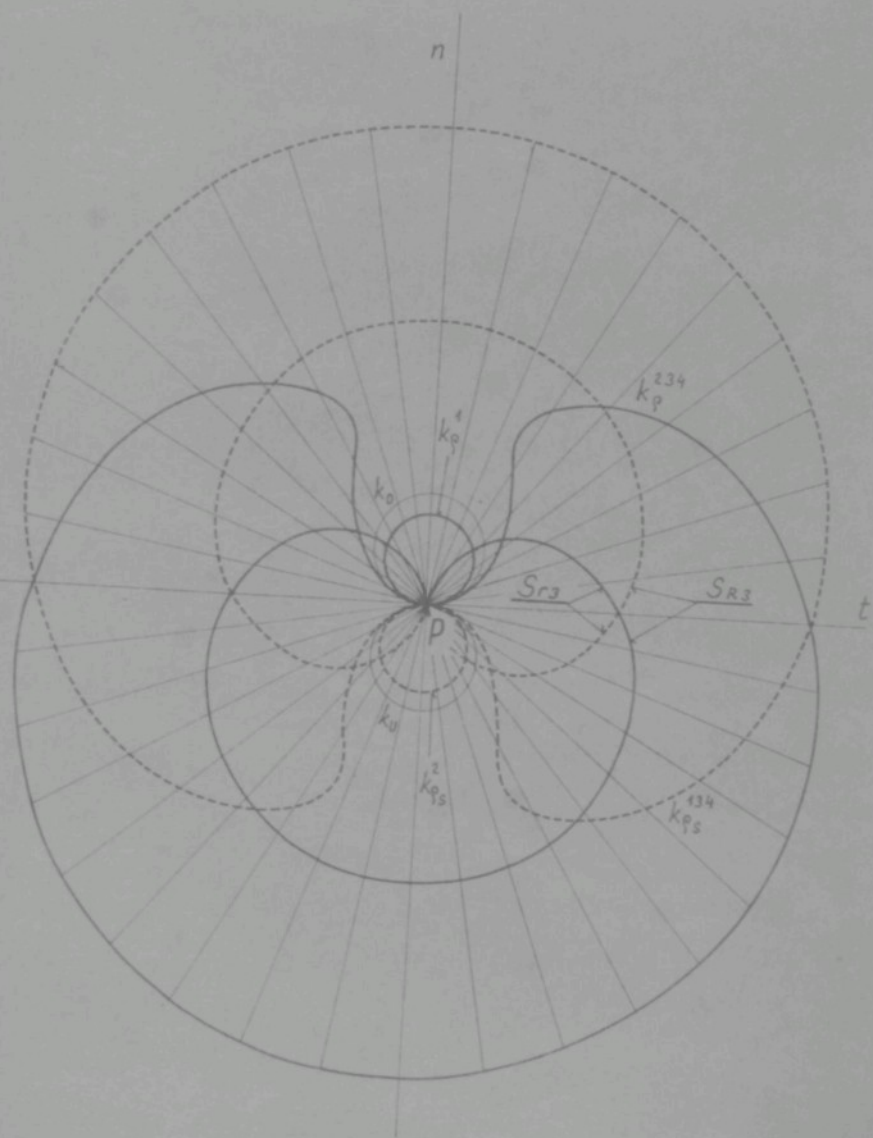
Obdobně jako φ - křivka, je S - křivka šestého stupně s dvěma trojnásobnými kruhovými body, tedy tricirkulární.
 S konstrukcí bodů S - křivky na volené normále jsme se seznámili již dříve /srovnej s obr. 7.6 /.

Dále si uvedeme novou velmi jednoduchou konstrukci bodů S - křivky. Vyjdeme z rovnic (4), (5) a píšeme

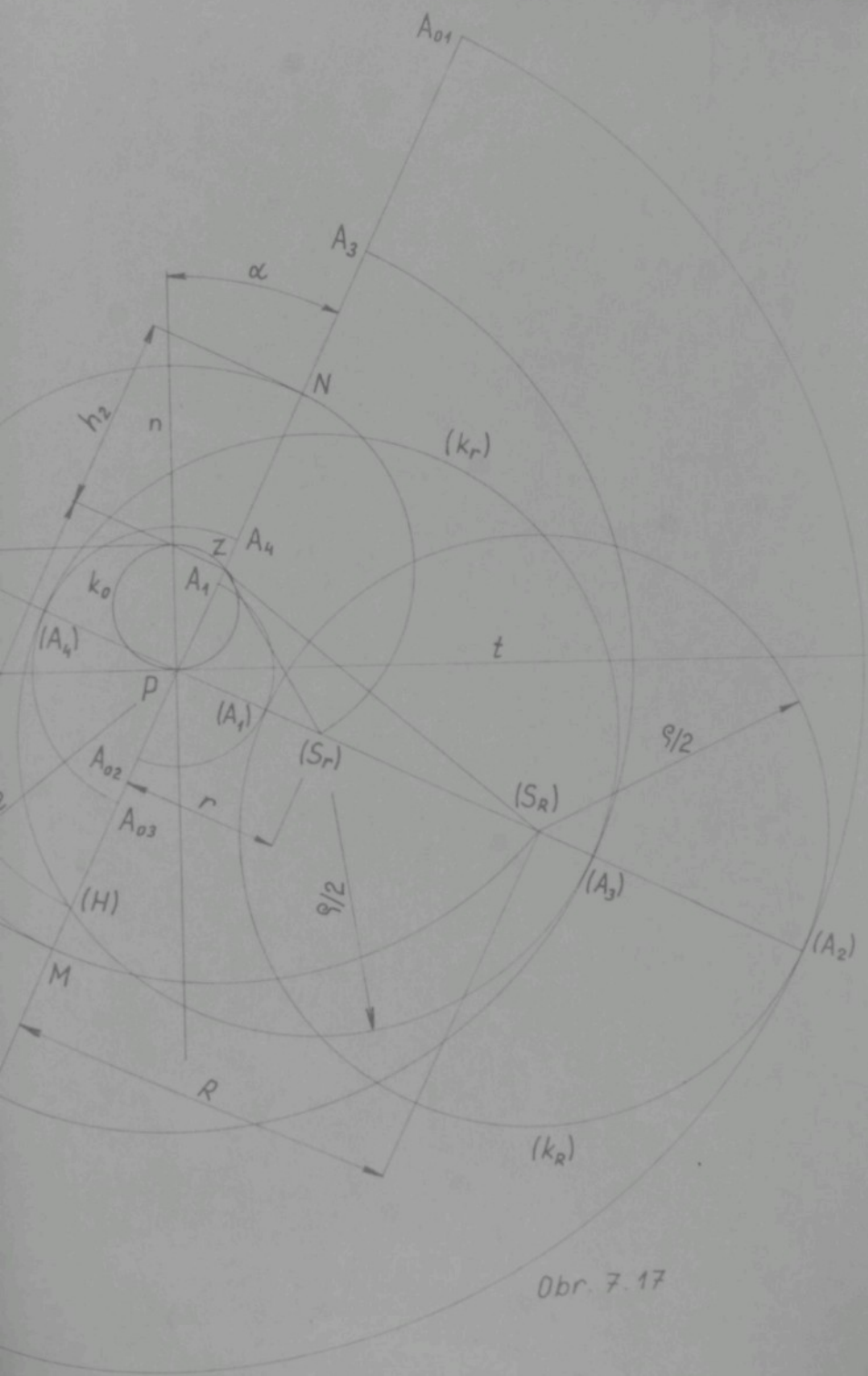
$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \frac{|r|}{2} 2 d_0 \cos \alpha - R^2 = 0, \quad (7)$$



Обр. 7. 16 б



Obr. 7. 16 c



Kinematické poměry φ - křivky

Vyjděme z polární rovnice φ - křivky

$$m^2 + \varphi m - \varphi d_0 \cos \alpha = 0. \quad (1)$$

Encováním rovnice (1) a dělením dt dostaneme

$$2m v_m + \varphi v_m + \varphi d_0 \sin \alpha \omega = 0. \quad (2)$$

máme pro rychlost v_m bodu φ - křivky ve směru normály A_φ

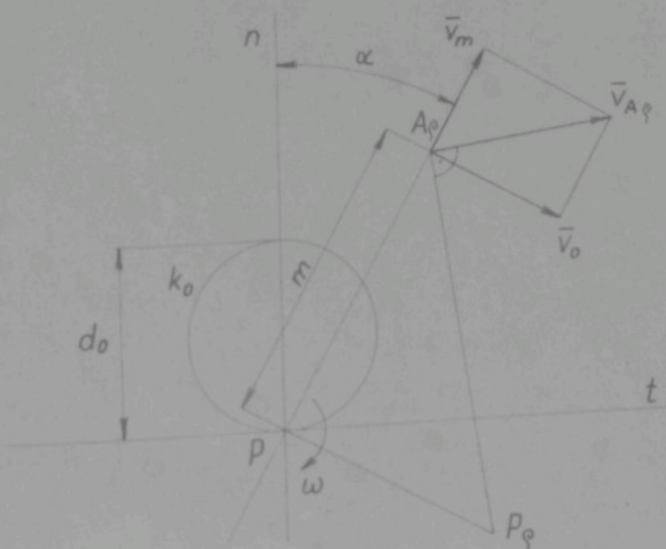
$$v_m = - \frac{\varphi d_0 \sin \alpha}{2m + \varphi} \omega, \quad (3)$$

ω je úhlová rychlost průvodiče bodu A_φ z pólu P vzhledem k rovině. Vztah (3) platí pro 1. a 3. oblast z - roviny, 2. oblast je $\varphi = -|\varphi|$, tudíž

$$v_m = \frac{|\varphi| d_0 \sin \alpha}{2m - |\varphi|} \omega. \quad (4)$$

úhlová rychlost v_A bodu A_φ φ - křivky je

$$\bar{v}_{A_\varphi} = \bar{v}_0 + \bar{v}_m,$$



Obr. 8.1

kde $v_0 = m\omega$ značí složku rychlosti $v_{A\varphi}$ bodu A_φ ve směru kolmé na normálu bodu A_φ . Kolmice v bodě A_φ k rychlosti $v_{A\varphi}$, tj. normála φ - křivky v bodě A_φ protíná kolmici v pólu P v okamžitém středu otáčení P_φ . Ježto v bodě P_φ je

$$\bar{v}_0 = -\bar{v}_m,$$

máme pro body A_φ v 2. oblasti /obr. 8.1/

$$\overline{PP_\varphi} \omega = \frac{|\varphi| d_0 \sin \alpha}{2m - |\varphi|} \omega$$

a odtud

$$\overline{PP_\varphi} = \frac{|\varphi| d_0 \sin \alpha}{2m - |\varphi|}, \quad (5)$$

což je v souladu s hodnotou subnormály φ - křivky

$$m^2 - m|\varphi| + |\varphi| d_0 \cos \alpha = 0$$

v bodě A_φ , tedy

$$s_n = \frac{dm}{d\alpha} = \frac{|\varphi| d_0 \sin \alpha}{2m - |\varphi|}$$

Ve vztahu (5) píšeme

$$\overline{PP_\varphi} = \frac{|\varphi| d_0 \sin \alpha}{2(m - \frac{|\varphi|}{2})} = \frac{|\varphi| d_0 \sin \alpha}{\pm 2r}, \quad (6)$$

kde podle dříve uvedeného vztahu 7.33 je

$$\pm r = m - \frac{\varphi}{2}$$

Grafické určení míry $\overline{PP_\varphi}$ z úměry

$$\frac{\varphi}{2r} = \frac{\overline{PP_\varphi}}{d_0 \sin \alpha}$$

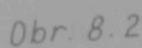
je naznačeno na obr. 8.2.

Pro body φ - křivky v 1. a 3. oblasti je podle vztahu (3)

$$\overline{PP_\varphi} = -\frac{\varphi d_0 \sin \alpha}{2m + \varphi} \quad (7)$$

Cpět jako dříve přepíšeme vztah (7) na

$$\overline{PP_\varphi} = \frac{\varphi d_0 \sin \alpha}{\pm 2R}$$



Nyní si dokážeme, že normály φ - křivky v bodech A_1, A_2, A_3, A_4 procházejí bodem O /viz obr. 8.2 /. Vyjděme z bodů φ - křivky v 2. oblasti a určíme souřadnice průsečíku O normál $\overline{A_3 P_\varphi}$ a $\overline{A_4 P'_\varphi}$ vzhledem k souřadnicovému systému ξ, η /viz obrazec/. Z úsekových rovnic normál

$$\frac{\xi}{|s_n|} + \frac{\eta}{m_3} = 1 ; \quad \frac{\xi}{-|s_n|} + \frac{\eta}{m_4} = 1 , \quad (8)$$

v nichž úseky vyřetě normálami na kolmicích v pólu jsou označeny jako subnormály s_n , dostaneme sečtením obou rovnic

$$\eta = 2 \frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4} = 2 d_0 \cos \alpha , \quad (9)$$

neboť pro body φ - křivky v 2. oblasti Z - roviny máme z Euler - Savaryovy rovnice

$$\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} = \frac{1}{d_0 \cos \alpha} ,$$

ježto $|s_3| = m_4$.

Odečtením rovnic (8) a s přihlédnutím k vztahu (9) máme pro druhou souřadnici

$$\xi_0 = s_n d_0 \cos \alpha \frac{m_3 - m_4}{m_3 m_4} . \quad (10)$$

Vyjádříme-li ve vztahu (10)

$$m_3 - m_4 = 2 \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 - |\eta| d_0 \cos \alpha} = 2r ;$$

$$m_3 \cdot m_4 = |\eta| d_0 \cos \alpha ; \quad |s_n| = \frac{|\eta| d_0 \sin \alpha}{2r} ,$$

dostaneme

$$\xi_0 = d_0 \sin \alpha . \quad (11)$$

Souřadnice bodu O vzhledem k souřadnicovým osám x, y jsou

$$x = d_0 \sin \alpha \cos \alpha + 2 d_0 \cos \alpha \sin \alpha = 3 d_0 \sin \alpha \cos \alpha ; \quad (12)$$

$$y = 2 d_0 \cos^2 \alpha - d_0 \sin^2 \alpha = 2 d_0 - 3 d_0 \sin^2 \alpha . \quad (13)$$

Pro $\varphi < 4d_0$ existuje normála tělesa, na níž jsou tři body, jimž přísluší předepsaný poloměr křivosti φ .

Pro 2. oblast bodů platí

$$m_{3,4} = \frac{|\varphi|}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 - |\varphi| d_0 \cos \alpha}$$

pro $\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = |\varphi| d_0 \cos \alpha_k$ je

$$m_3 = m_4 = m_k = \frac{|\varphi|}{2} = 2 d_0 \cos \alpha,$$

neboť $\varphi = 4 d_0 \cos \alpha$.

Příslušný úhel α_k normály plyne ze vztahu

$$\cos \alpha_k = \frac{\frac{\varphi}{2}}{2 d_0}.$$

Pro míru $\overline{PP}_\varphi$ v 2. oblasti je /obr. 8.4 /

$$\overline{PP}_\varphi = \frac{|\varphi| d_0 \sin \alpha}{2 m_k - \varphi} = \infty.$$

Pro míru $\overline{PH} = \sqrt{|\varphi| d_0 \cos \alpha} = \frac{\varphi}{2}$.

Normála tělesa je tečnou φ - křivky v bodě $A_3 \equiv A_4$. Střed křivosti bodů $A_3 \equiv A_4$ jsou ve stejné vzdálenosti od pólu jako příslušné body. Normála φ - křivky v bodě $A_3 \equiv A_4$ prochází vrcholem kružnice K_0 . Je-li $\theta \leq \alpha < \alpha_k$ existují na normálách dva body s předepsaným φ . Pro $\alpha = \alpha_k$ existují tři body a pro $\alpha_k < \alpha < \frac{\pi}{2}$ existují čtyři body s předepsaným φ .

8.1. Křivost φ - křivky

Vyjděme z rovnice φ - křivky pro 1. a 3. oblast Z - roviny

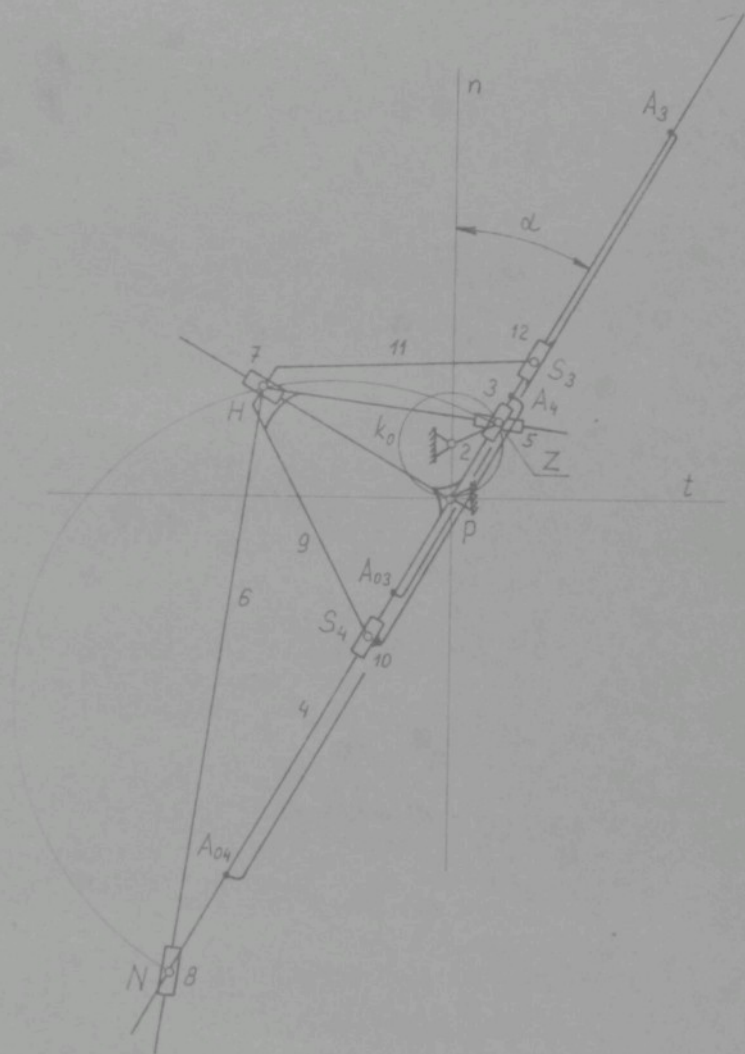
$$m^2 + \varphi m - \varphi d_0 \cos \alpha = \theta. \quad (17)$$

Diferencováním vztahu (17) dostaneme

$$2m dm + \varphi dm + \varphi d_0 \sin \alpha d\alpha = \theta. \quad (18)$$

Odtud

$$v_m (2m + \varphi) + \varphi d_0 \sin \alpha \omega = \theta. \quad (19)$$



Obz. 8. 9

u 23 S