

Technická univerzita v Liberci
Fakulta strojní
katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

MECHANICKÉ VLASTNOSTI PRYŽÍ

habilitační práce



2009

Iva Petříková

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Univerzitní knihovna
Voroněžská 1323, Liberec 1
PSČ 461 17

U 662 S

69s.

dr. r. guf

KMP

Annotation

Mechanical Properties of Rubber

The work contains a complex experimental research of mechanical properties of two types of isotropic rubberlike materials. Several kinds of quasistatic loading (uniaxial and multiaxial) were used, dynamical and tribological experimental measurements were effectuated in order to determine parameters of hyperelastic and viscoelastic material models. The used material models are based on the theory of nonlinear elasticity and viscoelasticity with finite strains. The experimental measurements were compared with the numerical simulation of experimental results and good qualitative and quantitative agreements were obtained. The calculation of some material constants such as shear modulus and Poisson's ratio is presented using material models and the results of the experiments.

Subjects of experimental investigation were specimens of Styren-Butadien Rubber (SBR) and as well damping segments of Polyisoprene-Polybutadiene Rubber Blend (IR/BR) used in resilient wheels of tramway. The examined naturally aged segments have different service history. The effect of aging on the response to dynamical loading was investigated. Specimens sliced from segments were subjected to dynamic mechanical analysis which consists in sinusoidal compressive strain controlled loading with different amplitudes and frequencies. The phase angle δ between strain and stress responses and storage and loss moduli were determined by different evaluation methods. The temperature dependence on dynamic behaviour of SBR was investigated.

The rate-dependent behaviour of carbon-black filled rubber is investigated in compression regimes. The viscosity-induced rate-dependent effects are described. The time independent response of the rubber is modelled by the Mooney-Rivlin hyperelastic material with uncoupled volumetric and deviatoric free energy function. The non-equilibrium viscoelastic stresses are evolving internal variables governed by rate equations. The parameters of a constitutive model of finite strain viscoelasticity are determined by nonlinear optimization methods. The FE simulation uses the finite strain formulation based on the material configuration with the right Cauchy-Green tensor as the strain measure. The FE simulations of the elastomeric viscoelastic solids response in relaxation, creep and cyclic loading are presented.

Tribological properties of naturally aged segments of Polyisoprene/Polybutadiene Rubber Blend (IR/BR) with a different service history and SBR material were investigated experimentally using home-made device for measurement of tribological properties "ball on disc".

Key words: filled rubber, hyperelasticity, viscoelasticity, dynamical mechanical analysis, large strains, stress relaxation, cyclic loading, coefficient of friction

Seznam použitých označení, zkratek a symbolů

Kurzívou jsou označovány skalární veličiny, zatímco vektory, tenzory a matice jsou označovány **tučným písmem**. Indexy vektorů a tenzorů $i, m, \alpha, \dots$ označují jejich odpovídající jednotlivé složky. Je-li zaveden nový symbol, následuje i jeho vysvětlení.

Většinu použitých symbolů je možné nalézt v níže uvedeném seznamu.

Označení	Jednotky	Název
a	m^2	plocha v deformované konfiguraci
A	m^2	plocha v referenční konfiguraci, plocha po deformaci
A_0	m^2	plocha před deformací
$\mathbf{B}$		levý Cauchy-Greenův tenzor deformace
$\mathbf{C}$		pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace
$\bar{\mathbf{C}}$		izochorická část pravého C-G tenzoru deformace
c_1, c_2	J/m^3	izochorické rovnovážné části napětí
C_1, C_2	Pa	konstanty Mooney-Rivlinova modelu
d	Pa^{-1}	objemový parametr
E	Pa	modul pružnosti v tahu/tlaku
E'	Pa	paměťový modul (storage modulus)
E''	Pa	ztrátový modul (loss modulus)
$\mathbf{E}$		Greenův deformační tenzor
E_{11}, E_{22}		složky Greenova deformačního tenzoru
F	N	síla
f	Hz	frekvence buzení
F_0	N	statická síla
ΔF	N	amplituda síly
$\mathbf{F}$		tenzor deformačního gradientu
F_{ia}		prvky tenzoru deformačního gradientu
G	Pa	modul pružnosti ve smyku
$\bar{I}_1, \bar{I}_2$		invarianty modifikovaného Cauchy-Greenova tenzoru deformace $\bar{\mathbf{C}}$
I_i		invariant
J		determinant deformačního gradientu, objemový činitel
K	Pa	objemový modul
$\mathbf{n}$		vnější jednotková normála k povrchu tělesa v Ω
L_0	m	délka vzorku před deformací
$\mathbf{N}$		vnější jednotková normála k povrchu tělesa v Ω_r
p		je Lagrangeův multiplikátor
P	N	tlaková síla
$\mathbf{P}$	Pa	první Piola-Kirchhoffův tenzor napětí
$\mathbf{Q}$		tenzor rotace
$\mathbf{Q}_\alpha$	Pa	overstress
$\mathbf{R}$		ortogonální tenzor
$\mathbf{S}$	Pa	druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí
$\mathbf{S}_{\text{VOL}}^\infty$	Pa	objemová odezva napětí

S_{ISO}^{∞}	Pa	izochorická odezva napětí
S_{11}, S_{22}	Pa	složky druhého Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí
$\mathbf{t}$	Pa	vektor napětí na jednotku plochy
$\mathbf{T}$	Pa	tenzor nominálního napětí
$\mathbf{U}$		pravý tenzor protažení
u	m	okamžitá výchylka
u_0	m	statická předdeformace
Δu	m	amplituda výchylky
$\mathbf{u}^{(i)}$		jednotkové vlastní vektory $\mathbf{U}$
v	mm/s	rychlost
$\mathbf{V}$		levý tenzor protažení
$\mathbf{v}^{(i)}$		jednotkové vlastní vektory $\mathbf{V}$
W	J/m ³	funkce deformační energie vztažená na jednotku objemu
$\mathbf{x}$	m	polohový vektor v deformované konfiguraci
$\mathbf{X}$	m	polohový vektor v referenční konfiguraci
x_i	m	složky vektoru $\mathbf{x}$
X_α	m	složky vektoru $\mathbf{X}$
α_m		materiálové konstanty
β_α^∞		bezrozměrný materiálový parametr
Γ		vnitřní deformační proměnná typu tenzoru deformace
δ		fázový úhel
Δ	m	stlačení vzorků
ε		okamžitá deformace (poměrná)
ε_0		předdeformace
$\Delta\varepsilon$		amplituda deformace (poměrné)
ε_l		podélné poměrné prodloužení
ε_p		příčná kontrakce
λ		okamžité protažení
λ_0		statická předdeformace odpovídající protažení
λ_i		hlavní protažení
μ_m	Pa	materiálové konstanty
ν		Poissonova konstanta
ν_{incomp}		Poissonova konstanta pro nestlačitelný materiál
ν_{real}		Poissonova konstanta (poměr) z experimentu
σ	Pa	okamžité napětí
σ_0	Pa	napětí odpovídající statické předdeformaci
$\Delta\sigma$	Pa	amplituda napětí
$\boldsymbol{\sigma}$	Pa	Cauchyho tenzor napětí
σ_i	Pa	hlavní Cauchyho napětí
τ_α	s	relaxační čas
χ		zobrazení = deformace z $\boldsymbol{\Omega}_r$ do $\boldsymbol{\Omega}$
Ψ	J/m ³	Helmholtzova funkce volné energie
$\boldsymbol{\Omega}$		deformovaná konfigurace tělesa
$\boldsymbol{\Omega}_r$		referenční konfigurace tělesa
$\mathbf{1}$		jednotkový tenzor
Υ_α		konfigurační volná energie

det	operátor determinantu
diag	diagonála matice
div	operátor divergence v deformované konfiguraci
Div	operátor divergence v referenční konfiguraci
Grad	operátor gradientu v Ω_r
tr	stopa tenzoru
$\otimes$	tenzorový součin

Obsah

1. Úvod	9
2. Obecné vlastnosti pryží	11
2.1. Přírodní pryž	11
2.2. Ostatní pryže	12
2.3. Plněná pryž	13
2.4. Tvrdost pryží	14
3. Hyperelastické vlastnosti pryží	16
3.1. Rovnice elasticity	17
3.1.1. Kinematika konečných deformací	17
3.1.2. Tenzory napětí a rovnice rovnováhy	18
3.1.3. Konstitutivní vztahy	19
3.1.4. Objektivita funkce deformační energie a materiálová symetrie	19
3.1.5. Izotropní hyperelasticita	20
3.1.6. Vybrané funkce deformační energie	20
3.2. Experimentální určení materiálových parametrů při kvazistatickém namáhání	21
3.2.1. Vztahy mezi napětím a deformací při jednoosém a dvouosém namáhání	21
3.2.2. Experiment - jednoosé zatěžování	22
3.2.3. Výsledky měření	24
3.2.4. Stanovení materiálových parametrů	27
3.2.5. Experiment - dvouosé zatěžování	30
3.2.6. Zatěžování na dvouosém rámu	33
3.3. Závěr	35
Reference	35
4. Dynamické vlastnosti pryží	36
4.1. Dynamická mechanická analýza	36
4.2. Experiment	37
4.3. Výsledky měření	39
4.4. Dynamické vlastnosti styren-butadienové pryže	40
4.5. Teplotní závislost dynamických veličin styren-butadienové pryže	45
4.6. Dynamické vlastnosti panenských vzorků pryže segmentů	46
4.7. Dynamické vlastnosti vzorků opotřebených segmentů	47
Reference	48
5. Viskoelastické vlastnosti pryží	49
5.1. Model pro viskoelastický materiál s konečnými deformacemi	49
5.2. Jednorozměrný tvar viskoelastického modelu	50
5.3. Relaxační testy	52

5.4.	Vyhodnocení měření	53
5.5.	Závěr	54
	Reference	54
6.	Tribologické vlastnosti pryží	56
6.1.	Úvod	56
6.2.	Experiment	59
6.3.	Výsledky měření styren-butadienové pryže	61
6.4.	Výsledky měření segmentů	62
6.5.	Závěr	65
	Reference	65
7.	Závěr	67
	Přehled použité literatury	70

1. Úvod

Přírodní pryž pochází z Jižní Ameriky a původními obyvateli byla používána převážně na výrobu sportovního náčiní nebo náboženských symbolů. Do Evropy výrobky z pryže poprvé přivezl Kryštof Kolumbus se svou posádkou po objevení Ameriky. Jednalo se o míče, se kterými Indiáni hráli míčové hry připomínající směsici fotbalu, volejbalu a basketbalu.

Pryžový materiál žádný zájem v Evropě nevzbudil a první zmínka o něm byla zaznamenána na Francouzské akademii věd teprve až v polovině 18. století. Vůbec první továrna na pryžové výrobky byla založena v roce 1803 v blízkosti Paříže, následovaly továrny v Anglii v roce 1820 a v roce 1830 ve Spojených státech. Pryžový materiál vykazoval řadu nepříznivých vlastností a teprve po objevení procesu vulkanizace vynálezcem Charlesem Goodyearem v roce 1839 dochází k prudkému rozvoji gumárenského průmyslu. Dnes světová produkce přírodní pryže dosahuje hodnoty 4,5 miliónu tun ročně. Ve druhé polovině 19. století dochází také k rozvoji výroby syntetické pryže a dnes tvoří 70% z celkového množství vyprodukované pryže.

První experimenty na přírodní pryži byly realizovány počátkem 19. století s cílem vyšetřit příčiny elasticity kaučuku. V roce 1930 fyzici W. Kuhn, E. Guth a H. Mark sestavili první matematický model zahrnující elasticitu pryže.

Pokrok v kvantitativním modelování polymerních materiálů nastal v průběhu 30. až 60. let 20. století zásluhou chemiků P. J. Floryho a L. R. G. Treloara a matematika R. S. Rivlina.

Výzkum pryží je založen na dvou přístupech, buď na výzkumu molekulární teorie, anebo na fenomenologickém přístupu podloženém teorií mechaniky kontinua a nelineární elasticity.

Chování pryžových materiálů je stále v popředí výzkumu, neboť 68% celkové produkce pryže se využívá na výrobu pneumatik. Dále se pryže používají na výrobu obuvi (5%), strojírenských součástí (8%), výrobků z latexu (8%), lepidel (3%) a dalšího zboží jako podlahové krytiny, sportovní potřeby, hračky apod. Vývoj speciálních tzv. smart pryžových materiálů např. elektroaktivních nebo magnetoreologických přináší možnosti nových a zajímavých aplikací. Mechanika pryžových materiálů má mnoho společného i s biomechanikou měkkých tkání např. cév, šlach a vazů.

Výzkum pryžových materiálů má na katedře mechaniky, pružnosti a pevnosti více než desetiletou tradici. Výzkum byl nejprve zaměřen na popis vlastností vzduchových pružin, jejichž hlavním konstrukčním prvkem je kompozit s pryžovou maticí vyztužený textilními kordy. Tento úkol je řešen jako součást tématu - výzkum základních charakteristik pružících elementů v rámci fakultního výzkumného záměru „Optimalizace vlastností strojů v interakci s pracovními procesy a člověkem“. V letech 2005 – 2007 se řešitelský kolektiv doc. Ing. Bohdany Marvalové, CSc. podílel na projektu GAČR „Dynamika a spolehlivost vibrotlumících prvků z termo-visko-elastických materiálů“ ve spolupráci z Ústavem Termomechaniky AV ČR pod vedením Ing. Luďka Peška, CSc. Vlastnosti pryží a pryžových kompozitů byly tématem tří diplomových a tří disertačních prací. Studentská práce na téma

„Tribologické chování pryže“ získala finanční prostředky na řešení od Nadace Czech Technical University Media Laboratory.

Habilitační práce navazuje na uvedenou tradici a jejím cílem je získání komplexního pohledu na mechanické vlastnosti pryží plněných sazemi a vypracování metodiky experimentů. Pro výzkum byly vybrány dva typy materiálu styrenbutadienová (SBR) a isopren-butadienová pryž. První typ pryže je běžně používaným materiálem pro výrobu pneumatik, součástek, těsnění apod. Druhý testovaný materiál isopren-butadienová pryž se používá na výrobu pryžových segmentů k odpružení kol. Získání nových i opotřebovaných pryžových segmentů poskytlo možnost porovnávání změn vlastností pryže vlivem stárnutí.

Kapitola Obecné vlastnosti pryží je úvodem do široké problematiky výzkumu a výroby pryží a stručně popisuje klasifikaci pryžových materiálů, jejich výrobu a důležité fyzikální vlastnosti.

Těžiště části Hyperelastické vlastnosti pryží bylo v návržení a ověření metodiky experimentu a jeho numerického zpracování a ve stanovení hyperelastických vlastností pryže a určení parametrů zvolených vhodných modelů.

Určení vlivu velikosti amplitudy, frekvence, teploty a statické střední výchylky na dynamický modul obou testovaných materiálu bylo cílem dynamických experimentů v kapitole nazvané Dynamické vlastnosti pryží.

Kapitola Viskoelastické vlastnosti pryží byla motivována snahou použít viskoelastický materiálový model k simulaci odezvy tramvajových pryžových segmentů na kombinaci statického a cyklického zatížení. V první části kapitoly je uveden stručný popis materiálového modelu se zřetelem na experimentální určení jeho parametrů z jednoosých relaxačních testů. Druhá část je věnována experimentálnímu měření vzorků ze segmentů a vyhodnocení parametrů modelu.

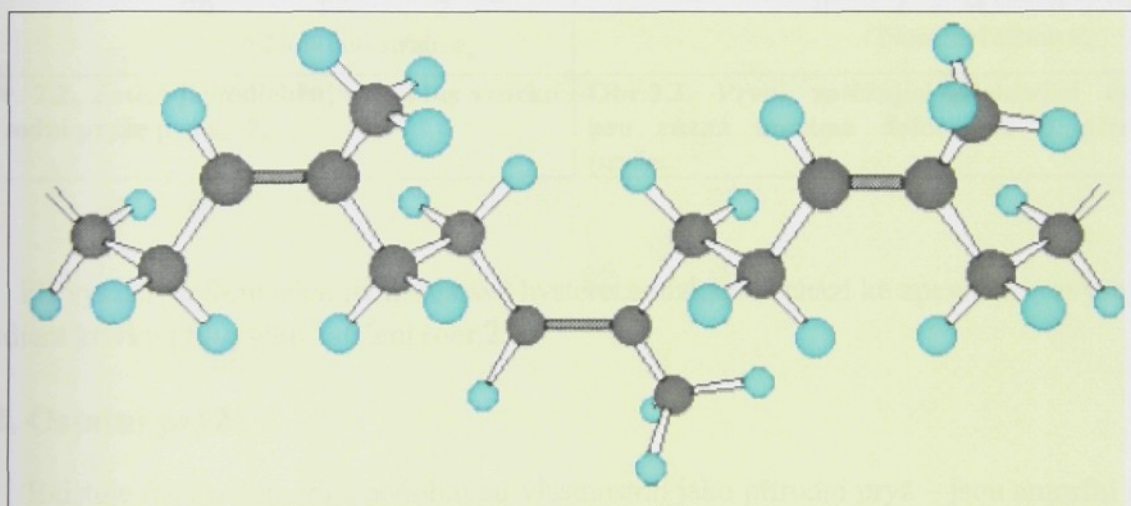
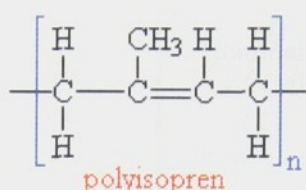
Cílem prováděných experimentů v kapitole Tribologické vlastnosti pryží bylo uvést do chodu nové zařízení na měření koeficientu tření, vypracovat metodiku měření tření a provést sérii ověřovacích a srovnávacích experimentů. Dále bylo třeba vypracovat metodiku zpracování shromážděných dat v prostředí MATLAB.

2. Obecné vlastnosti pryží

Pryžové materiály jsou typické velkou pružností a nízkým Youngovým modulem, který je v řádu jednotek MPa. Jsou to amorfní polymery s nízkou teplotou skelného přechodu, tvořené hustou sítí polymerních řetězců, většinou obsahují různá plniva ve tvaru částic.

2.1. Přírodní pryž

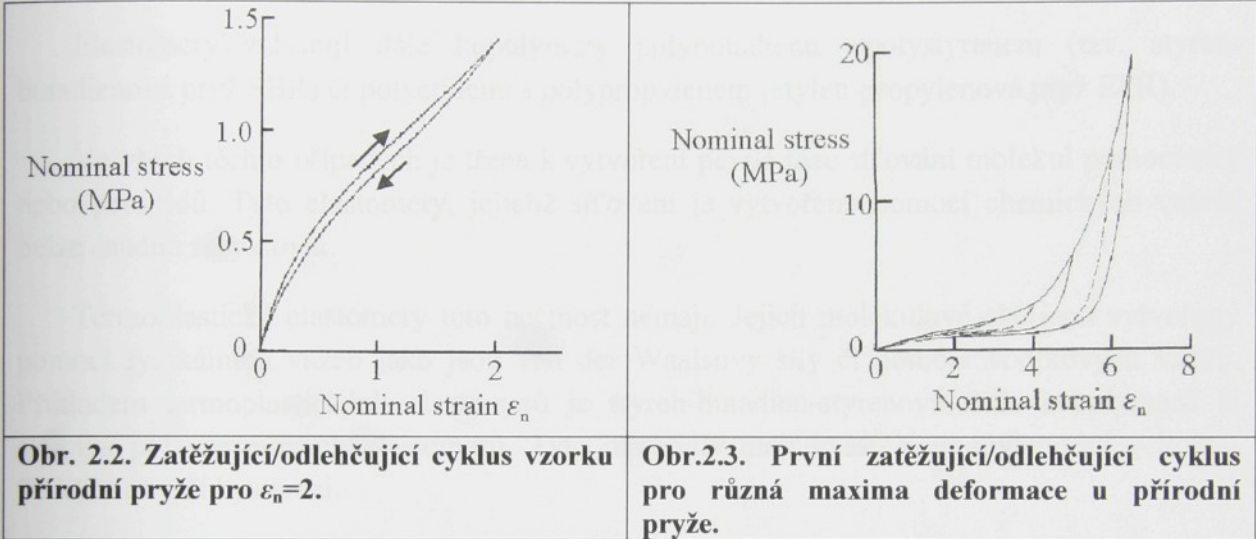
Přírodní pryž je vyráběna z latexu stromu *Hevea Brasiliensis*. Je to polymer 1,4 polyisopren, který se skládá z monomerních jednotek,



Obr. 2.1. Molekulové řetězce přírodní pryže.

u kterých dvojná vazba zabraňuje rotaci levé strany monomeru vůči pravé. Rotace kolem jednoduchých C-C vazeb je snadná a je příčinou velké ohebnosti molekulových řetězců. Při pokojové teplotě jsou molekuly velmi pohyblivé a polymer je v tekutém stavu. Teplota skelného přechodu je -70°C . Velmi dlouhé molekulové řetězce se skládají většinou z více jak 5000 isoprenových monomerních jednotek (obr. 2.1). Pro praktické aplikace je tekutý polymer přeměněn síťováním na pevnou fázi pomocí přibližně 1% síry, která reaguje s některými dvojnými vazbami v řetězcích a vytváří můstky mezi molekulami. Výsledkem je vulkanizovaná pryž. Při obsahu síry 0,5 - 1% je modul pružnosti ve smyku pryže kolem 1MPa při pokojové teplotě. Při vyšším obsahu síry je síťování velmi intenzivní a pohyblivost molekul je velmi omezena. Teplota skelného přechodu T_g se blíží pokojové teplotě a vzniká velmi tvrdý sklovitý materiál zvaný ebonit.

Přírodní nízkosíťovaná pryž se vyznačuje dokonalou pružností - po odlehčení se vrací do původního stavu bez trvalé deformace. Další významnou mechanickou vlastností je vysoká průtažnost - snese prodloužení až o 600% bez porušení. Přírodní pryž vykazuje velmi malou hysterezi - energie na jednotku objemu, disipovaná během jednoho cyklu zatížení/odlehčení (tj. plocha mezi zatěžovací a odlehčovací křivkou), je jen malým zlomkem energie potřebné pro dosažení maximální deformace (plocha pod zatěžovací křivkou), viz obr. 2.2 (Saccomandi & Ogden, 2004), (Lindley, 1964).

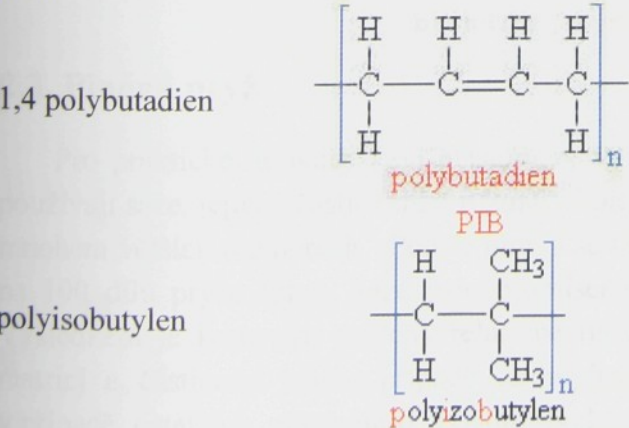


Při vyšších deformacích již nezůstává hystereze nízká a dochází ke zpevnění – zvyšuje se gradient křivky při vyšším zatížení (obr.2.3)

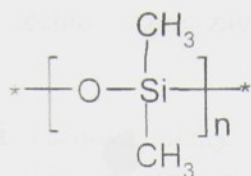
2.2. Ostatní pryže

Existuje řada polymerů s podobnými vlastnostmi jako přírodní pryž – jsou amorfní a při pokojové teplotě jsou nad svou teplotou skelného přechodu. Většinou jsou označovány jako elastomery.

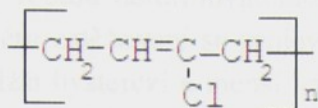
Kromě polyisoprenu je používána celá řada homopolymerů v elastomerickém stavu jako jsou:



poly (dimetyl siloxan)
silikonová pryž



1,4 - polychloropren

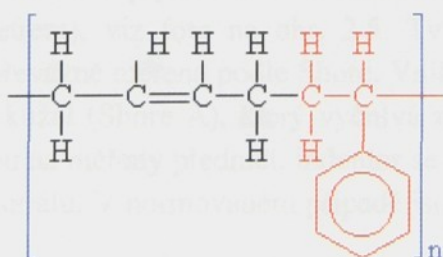


Elastomery zahrnují dále kopolymery polybutadienu s polystyrenem (tzv. styren-butadienová pryž SBR) či polyetylen s polypropylenem (etylen-propylenová pryž EPR).

Ve všech těchto případech je třeba k vytvoření pevné fáze síťování molekul pomocí síry nebo peroxidů. Tyto elastomery, jejichž síťování je vytvořeno pomocí chemických vazeb, nelze snadno recyklovat.

Termoplastické elastomery tuto nectnost nemají. Jejich molekulové sítě jsou vytvořeny pomocí fyzikálních vazeb jako jsou van der Waalsovy síly či pomocí vodíkových vazeb. Příkladem termoplastických elastomerů je styren-butadien-styrenová třída kopolymerů či skupina polyuretanových elastomerů. Tyto materiály mají vyšší Youngův modul – kolem 70 MPa a větší hysterezi.

Butadien-styrenové kaučuky jsou kopolymery 1,4 butadienu (bezbarvý plyn) se styrenem (jedovatá bezbarvá kapalina) obsahující většinou 23% až 25% styrenu. Vyrábějí se radikálovou emulzní kopolymerací při pH = 8 - 10 a teplotě 5° C v kaskádě autoklávů pod tlakem. Emulgátorem je upravená kalafuna, která zůstává v kaučuku. Následuje demonomerace uvolněním tlaku na 0,35 MPa – odstraní se butadien. Snížením tlaku na 6,6 kPa a ohřátím na 60°C se odstraní styren. Pryž se stabilizuje antioxidanty.



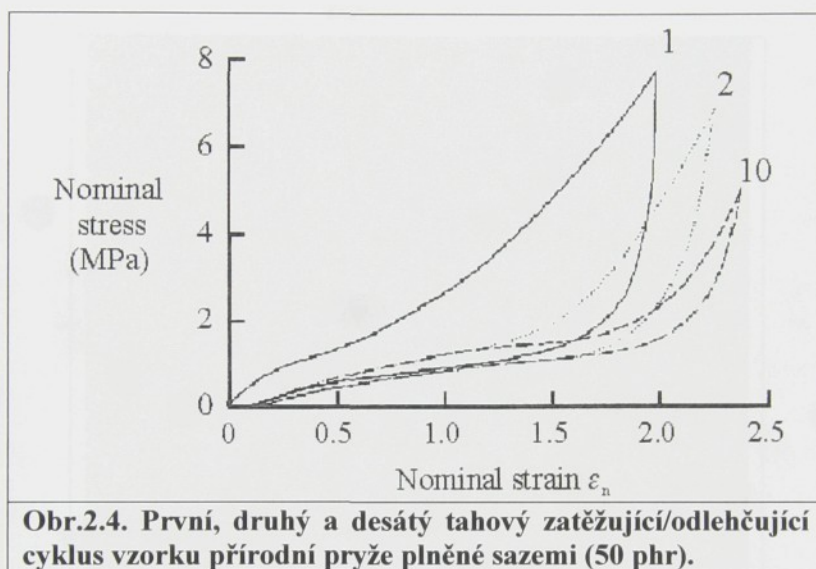
butadien styrenový kaučuk

2.3. Plněná pryž

Pro praktické aplikace jsou elastomery vyztuženy přidáním jemného plniva. Široce se používají saze, jejichž částice mají rozměry kolem 20 nm. Částice většinou vytvářejí shluky o mnohem větších rozměrech. Poměr plniva se udává jako počet dílů (většinou hmotnostních) na 100 dílů pryže (phr). Saze jsou promísené s pryží a směs je následně vulkanizována. Výsledkem je kompozit tvořený relativně tuhými částicemi v elastomerické matici. Mezi maticí a částicemi jsou v případě termoplastických elastomerů kovalentní vazby, ale i v případě ostatních elastomerů existují podstatné chemicko-fyzikální vazby mezi saze

a elastomerem. Pevnost těchto vazeb závisí na povrchových fyzikálních a chemických vlastnostech částic.

Plněný elastomer si zachová nízký Youngův modul, vysokou elastičnost, malou zbytkovou deformaci a velkou neformovatelnost, avšak přítomnost plniva výrazně zvyšuje hysterezi. Při opakovaném zatěžování se projevuje tzv. Mullinsův efekt – zatěžovací křivky vykazují nižší tuhost, nižší hysterezi a menší trvalou deformaci, jestliže byl materiál nejprve zatížen na nejvyšší deformaci (obr. 2.4).



2.4. Tvrdost pryží

Základním parametrem označení pryže vedle chemického složení je tvrdost, která je měřena tvrdoměrem (durometrem), viz foto na obr. 2.5. Tvrdost elastomerů s tloušťkou materiálu větší než 6 mm je převážně měřena podle Shore. Vnikací tělísko - indentor je kužel (Shore D), případně komolý kužel (Shore A), který vyčnívá z opěrné plochy měřidla. Je-li přístroj přitlačen celou plochou na měřený předmět, indentor se vtlačí do hloubky materiálu, a to v závislosti na tvrdosti materiálu. V normovaném případě jsou po 3 nebo po 15 sekundách hodnoty odečteny.

U všech zkoušek tvrdosti je třeba mít na zřeteli následující ovlivňující faktory: teplotu vzorku, dobu zatížení, rychlost zatížení, tloušťku vzorku, plochu vzorku, podložení vzorku, vzdálenost hrotu od okraje vzorku a přesnost zatěžování. Odchyluje-li se skutečná teplota od požadovaných 23° C, což v netemperovaných místnostech nelze zajistit, lze zjistit změnu tvrdosti do cca 4 %. Zkušební síla musí působit po předepsanou dobu a bez nárazu.

Na provádění korektních měření má veliký vliv tloušťka vzorku. Předpis normy DIN 53505 požaduje tloušťku vzorku 6 mm. S ubývajícím tloušťkou lze očekávat nárůst tvrdosti a v krajním případě již není měřena tvrdost vzorku nýbrž podložky, na které vzorek spočívá.

Nejmenší tloušťkou, při níž podložka neovlivňuje hodnoty měření, je normou požadovaných 6 mm.

S ubývající vzdáleností od okraje je třeba počítat s ubývající tvrdostí. V normách se vyskytují částečné údaje pro minimální vzdálenost od okraje, např. 5 mm. Normalizované tvrdoměry Shore jsou vybaveny opěrnou plochou o průměru 18 mm.

Před každým měřením je třeba tvrdoměr zkalibrovat na tvrdé skleněné destičce a docílit tvrdosti v toleranci udané výrobcem durometru.



Obr. 2.5. Měření tvrdosti pryžového segmentu.

Reference

Saccomandi, G., Ogden, R. W., 2004, *Mechanics and Thermomechanics of Rubberlike Solids*, Springer.

Lindley, P. B., 1964, *Engineering Design with Natural Rubber*. Brickendonbury: Malaysian Rubber Producers' Research Association.

3. Hyperelastické vlastnosti pryží

Pro výpočet napětí a deformací součástí z pryží – elastomerů – je dnes široce užívána metoda konečných prvků. Inženýři, kteří se těmito výpočty zabývají, většinou používají některý z hyperelastických modelů, které jsou v daném MKP prostředí nabízeny. Mnohdy však mylně spojují dnes velmi často užívanou předponu hyper- s velkými deformacemi. Je nutné si uvědomit, že výsledkem výpočtů s hyperelastickými materiálovými modely (založenými na funkci deformační energie) může být pouze pružná odezva na statické zatížení.

Hyperelastické modely materiálu jsou založeny na předpokladu existence funkce deformační energie vztažené na jednotku objemu, která roste s deformací a je nezávislá na historii deformace a deformační cestě a nezávisí rovněž na rychlosti deformace.

Má-li materiálový model sloužit k výpočtu kvazistatické deformace a napětí pryžových součástí při víceosé (většinou tříosé) napjatosti, nelze se spokojit s určením jeho parametrů pouze na základě tahové zkoušky. Vybavení naší laboratoře zatím umožňuje provádět tahové zkoušky, dvouosé zatěžování na biaxiálním zatěžovacím rámu a zkoušku na čistý smyk. Na základě těchto zkoušek byly určeny parametry Mooney-Rivlinova a Ogdenova modelu pro daný materiál pomocí nelineární optimalizace v prostředí MATLAB. Výsledky experimentů jsou přehledně srovnány s výsledky numerické simulace na základě experimentálně stanovených parametrů.

Kapitola obsahuje přehled teorie nestlačitelné nelineární elasticity s ohledem na izotropii (Saccomandi & Ogden, 2004) prostřednictvím nejčastěji používaných modelů pro určení parametrů a srovnává rozdíl výpočtu a experimentu na základě rozdílně získaných vstupních hodnot (jednoosé a víceosé zatěžování). Pomocí materiálových modelů a z výsledků experimentů jsou vypočteny některé materiálové konstanty jako modul pružnosti ve smyku a Poissonova konstanta.

Druhá část kapitoly je věnována experimentálnímu určení materiálových parametrů styren-butadienové pryže (SBR). Podrobněji jsou vlastnosti a výroba SBR popsány v předchozí podkapitole 2.2. Tato pryž má široké použití, především se používá k výrobě pneumatik, různých těsnění a těsnících prvků, průmyslových podlahovin apod. Pryž je ke koncovému uživateli dodávána v deskách, rolích, tyčích a různých specializovaných tvarech. Katalogové označení je SBR/E = emulzně kopolymerovaný styren-butadienový kaučuk. Udávaná katalogová tvrdost je 70 Shore A. Před měřením byla u tohoto typu pryže změřena tvrdost použitím ručního digitálního tvrdoměru (durometru) typu HT 6510A Shore A, který je určen pro materiály jako jsou elastomery, vinyl, guma, kůže, PVC, silikon-pryž, teflon, neopren atd., v souladu s normou pro měření tvrdosti. Hodnota tvrdosti použitých vzorků byla o málo vyšší než katalogová, a to 74 Shore A.

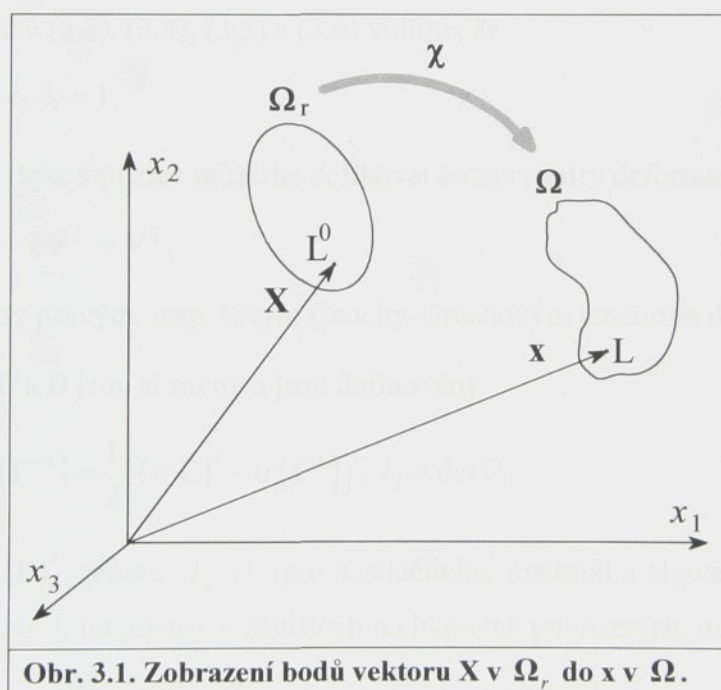
3.1. Rovnice elasticity

3.1.1. Kinematika konečných deformací

Mějme libovolný bod s polohovým vektorem $\mathbf{X}$ v referenční konfiguraci tělesa (stav bez napětí) označené Ω_r (obr. 3.1). Hranice tělesa Ω_r označme $\partial\Omega_r$. Předpokládejme, že těleso se kvazistaticky deformuje z konfigurace Ω_r do nové konfigurace Ω s hranicí $\partial\Omega$. Deformace je reprezentována zobrazením $\chi: \Omega_r \rightarrow \Omega$, který zobrazuje body $\mathbf{X}$ v Ω_r do $\mathbf{x}$ v Ω

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Omega_r, \quad (3.1)$$

kde $\mathbf{x}$ je polohový vektor zvoleného bodu v Ω . Zobrazení χ se nazývá deformace z Ω_r do Ω . Pro zjednodušení předpokládejme jen kartézský souřadnicový systém (obr. 3.1) a necht' $\mathbf{X}$ resp. $\mathbf{x}$ mají souřadnice X_α a x_i pro α a $i = 1, 2, 3$ tak, že $x_i = \chi_i(X_\alpha)$. Předpokládejme platnost Einsteinova součtového pravidla pro tenzorový zápis vztahů.



Obr. 3.1. Zobrazení bodů vektoru $\mathbf{X}$ v Ω_r do $\mathbf{x}$ v Ω .

Deformační gradient tenzoru označený $\mathbf{F}$ je dán rovnicí

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x}, \quad (3.2)$$

kde Grad je operátor gradientu v Ω_r . Prvky tenzoru $\mathbf{F}$ jsou $F_{i\alpha} = \partial x_i / \partial X_\alpha$. Předpokládáme-li nestlačitelný materiál, kdy deformace je izochorická (objem zachovávající), pak pro deformační gradienty v každém bodě musí platit

$$\det \mathbf{F} = 1. \quad (3.3)$$

Můžeme provést dvojí polární dekompozici deformačního gradientu (Brannon, 2008):

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (3.4)$$

kde $\mathbf{R}$ je ortogonální tenzor a $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ jsou pozitivně definitní a symetrické tenzory. Tenzor $\mathbf{U}$ resp. $\mathbf{V}$ se nazývá pravý resp. levý tenzor protažení. $\mathbf{U}$ můžeme popsat spektrálním rozkladem

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{u}^{(i)} \otimes \mathbf{u}^{(i)}, \quad (3.5)$$

kde $\lambda_i > 0$ pro $i = 1, 2, 3$ jsou hlavní protažení, $\mathbf{u}^{(i)}$ jsou jednotkové vlastní vektory $\mathbf{U}$, tzv. Lagrangeovy hlavní osy a symbol $\otimes$ označuje tenzorový součin. Podobně máme pro $\mathbf{V}$ spektrální rozklad

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{v}^{(i)} \otimes \mathbf{v}^{(i)} \quad (3.6)$$

a platí, že

$$\mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{R}\mathbf{u}^{(i)}, \text{ pro } i = 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Z předchozích vztahů (3.3), (3.4), (3.5) a (3.6) vidíme, že

$$\det \mathbf{U} = \det \mathbf{V} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (3.8)$$

Na základě polární dekompozice můžeme definovat tenzory míry deformace

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2, \quad (3.9)$$

$\mathbf{C}$ a $\mathbf{B}$ jsou nazývány pravým, resp. levým Cauchy-Greenovým tenzorem deformace.

Hlavní invarianty $\mathbf{C}$ a $\mathbf{B}$ jsou si rovny a jsou definovány

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{C}, \quad I_2 = I_3 \text{tr}(\mathbf{C}^{-1}) = \frac{1}{2} \left((\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right), \quad I_3 = \det \mathbf{C}, \quad (3.10)$$

jelikož $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{F})^2$, máme $I_3 = 1$ pro nestlačitelný materiál a zbývají jen dva nezávislé invarianty. Vyjádříme-li invarianty v závislosti na hlavních protaženích, máme

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2}. \quad (3.11)$$

Tyto dva invarianty hrají důležitou roli v teorii konečných deformací a její aplikaci na elasticitu pryží.

3.1.2. Tenzory napětí a rovnice rovnováhy

Vektor napětí $\mathbf{t}$ na jednotku plochy $d\mathbf{a} = \mathbf{n}da$ v deformované konfiguraci, kde $\mathbf{n}$ vnější jednotková normála k povrchu tělesa je

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}. \quad (3.12)$$

Zde je σ Cauchyho tenzor napětí (tenzor 2. řádu nezávislejší na $\mathbf{n}$). Podle Nansonovy formule je vztah mezi deformovaným elementem plochy $\mathbf{n}da$ a nedeformovaným elementem $\mathbf{N}dA$ pro nestlačitelný materiál

$$\mathbf{n}da = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}dA. \quad (3.13)$$

Vyjádríme-li da ze vztahu (3.13) a vynásobíme-li jím rovnici (3.12) dostáváme

$$\mathbf{t}da = \mathbf{P} \mathbf{N}dA, \quad (3.14)$$

kde $\mathbf{P} = \sigma^T \mathbf{F}^{-T}$ je první Piola-Kirchhoffův tenzor napětí, pomocí něhož můžeme vypočítat vektor napětí v deformované konfiguraci. Pro nestlačitelný materiál je vztah mezi $\mathbf{P}$ a σ dán výrazem

$$\sigma = \mathbf{F} \mathbf{P}^T = \mathbf{F} \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1} \sigma, \quad (3.15)$$

kde $\mathbf{T}$ je tenzor nominálního napětí.

Jestliže nejsou přítomny hmotové síly, pak rovnice rovnováhy můžeme psát v ekvivalentní formě pro deformovanou a referenční konfiguraci jako

$$\text{div} \sigma = 0, \quad \text{Div} \mathbf{T} = 0. \quad (3.16)$$

Z rovnice rovnováhy momentů vyplývá $\sigma^T = \sigma$ a tedy platí

$$\mathbf{T}^T \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{T} = \mathbf{F} \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \mathbf{F}^T. \quad (3.17)$$

3.1.3. Konstitutivní vztahy

V teorii hyperelasticity existuje funkce deformační energie $W = W(\mathbf{F})$, která je definována v prostoru deformačních gradientů a ze které lze odvodit napětí derivací podle $\mathbf{F}$. Pro nestlačitelný materiál platí

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{F}^{-1}, \quad \sigma = \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{F} = 1, \quad (3.18)$$

kde p je Lagrangeův multiplikátor spojený s vnitřní vazbou nestlačitelnosti, který odpovídá libovolnému hydrostatickému tlaku. Rovnice (3.18) jsou vztahy mezi napětím a deformací nestlačitelného hyperelastického materiálu, pro nějž existuje funkce deformační energie W .

3.1.4. Objektivita funkce deformační energie a materiálová symetrie

Je nutné, aby deformační energie byla nezávislá na pohybu tělesa jako tuhého celku, pak

$$W(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = W(\mathbf{F}) \quad (3.19)$$

pro všechny tenzory rotace $\mathbf{Q}$. Funkci deformační energie, která splňuje tento požadavek, říkáme objektivní (Holzapfel, 2000).

Užitím polární dekompozice (3.4) a zavedením $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$ ve vztahu (3.19) vidíme, že

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{U}). \quad (3.20)$$

Pak deformační energie W závisí jen na deformačním gradientu $\mathbf{F}$, a to prostřednictvím tenzoru protažení $\mathbf{U}$ a může být tedy definována na třídě pozitivně definitních symetrických tenzorů. Poznamenejme, že je-li funkce deformační energie závislá na $\mathbf{U}$, pak je automaticky objektivní, neboť není závislá na tuhé rotaci v deformační konfiguraci.

3.1.5. Izotropní hyperelasticita

Omezíme-li se na izotropní elasticitu, pak musí platit podmínka objektivity

$$W(\mathbf{FQ}) = W(\mathbf{F}) \quad (3.21)$$

pro všechny rotace $\mathbf{Q}$, z čehož plyne

$$W(\mathbf{QUQ}^T) = W(\mathbf{U}) \quad (3.22)$$

opět pro všechny rotace $\mathbf{Q}$. Tato podmínka říká, že W je izotropní funkcí $\mathbf{U}$. Ze spektrálního rozkladu (3.5) plyne, že W závisí na $\mathbf{U}$ pouze prostřednictvím hlavních protažení $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ pro každý deformační gradient $\mathbf{F}$ a pro všechny tenzory druhého řádu.

Vyjádříme-li deformační energii jako funkci hlavních protažení $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, pak odpovídající konstitutivní vztahy pro hlavní Cauchyho napětí σ_i pro $i = 1, 2, 3$ jsou dána vztahy

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (3.23)$$

3.1.6. Vybrané funkce deformační energie

Funkce deformační energie nestlačitelného elastického tělesa může být vyjádřena jako symetrická funkce hlavních protažení nebo jako funkce dvou nezávislých invariantů I_1, I_2 . Často užívaným tvarem funkce deformační energie je Mooney-Rivlinův tvar, který je lineární funkcí invariantů I_1 a I_2 :

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \equiv C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3), \quad (3.24)$$

kde C_1 a C_2 jsou konstanty a $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Platí, že $2(C_1 + C_2) = G$, kde $G > 0$ je modul pružnosti ve smyku materiálu v referenční konfiguraci. Je-li $C_2 = 0$, pak dostáváme neo-Hookeovskou deformační energii

$$W = C_1(I_1 - 3) = \frac{1}{2}G(I_1 - 3) = \frac{1}{2}G(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3). \quad (3.25)$$

Hojně užívaný je i Ogdenův tvar funkce deformační energie (Ogden, 1984)

$$W = \sum_{m=1}^N \frac{\mu_m}{\alpha_m} (\lambda_1^{\alpha_m} + \lambda_2^{\alpha_m} + \lambda_3^{\alpha_m} - 3), \quad (3.26)$$

kde μ_m a α_m jsou materiálové konstanty, které splňují vztah

$$\sum_{m=1}^N \mu_m \alpha_m = 2G, \quad (3.27)$$

kde G je modul pružnosti ve smyku.

3.2. Experimentální určení materiálových parametrů při kvazistatickém namáhání

3.2.1. Vztahy mezi napětím a deformací při jednoosém a dvouosém namáhání

Vydeme-li z funkce deformační energie vyjádřené v závislosti na hlavních protaženích, můžeme z ní odvodit derivací vztahy pro Cauchyho skutečné napětí. Pro nestlačitelný materiál platí vztah (3.23) (v něm se nesčítá přes opakovaný index).

Jednoosé zatížení ve směru 1

$$\sigma_{11} \neq 0, \sigma_{33} = \sigma_{22} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{12} = 0,$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad (3.28)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= -p + \sum_{m=1}^3 \mu_m \lambda_1^{\alpha_m} \\ \sigma_{22} &= -p + \sum_{m=1}^3 \mu_m \lambda_2^{\alpha_m} \\ \sigma_{33} &= -p + \sum_{m=1}^3 \mu_m \lambda_3^{\alpha_m} \end{aligned} \right\} = 0 \Rightarrow p = \sum_{m=1}^3 \mu_m \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \right)^{\alpha_m},$$

Lagrangeův multiplikátor je určen z podmínky nulových napětí v příčných směrech a dosazen do vztahu pro napětí σ_{11} .

Vztah mezi napětím a protažením při jednoosé napjatosti pro nestlačitelný materiál je

$$\sigma_{11} = \sum_{m=1}^3 \mu_m (\lambda_1^{\alpha_m} - \lambda_1^{-\frac{1}{2}\alpha_m}). \quad (3.29)$$

Dvouosé zatížení ve směru 1 a 2

Z podmínky, že hlavní napětí ve směru kolmém na rovinu (1,2) je nulové:

$$\sigma_{33} = -p + \sum_{m=1}^3 \mu_m \lambda_3^{\alpha_m} = 0$$

určíme hydrostatický tlak p :

$$p = \sum_{m=1}^3 \mu_m \lambda_3^{\alpha_m}.$$

Z podmínky nestlačitelnosti vyplývá velikost protažení ve směru 3:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Vztahy mezi napětími σ_{11} a σ_{22} a protaženími λ_1 a λ_2 při dvouosé napjatosti pro nestlačitelný materiál po dosazení za p a λ_3 do vztahů (3.28) a po úpravě jsou

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sum_{m=1}^3 \mu_m \left(\lambda_1^{\alpha_m} - (\lambda_1 \lambda_2)^{-\alpha_m} \right), \\ \sigma_{22} &= \sum_{m=1}^3 \mu_m \left(\lambda_2^{\alpha_m} - (\lambda_1 \lambda_2)^{-\alpha_m} \right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

3.2.2. Experiment – jednoosé zatěžování

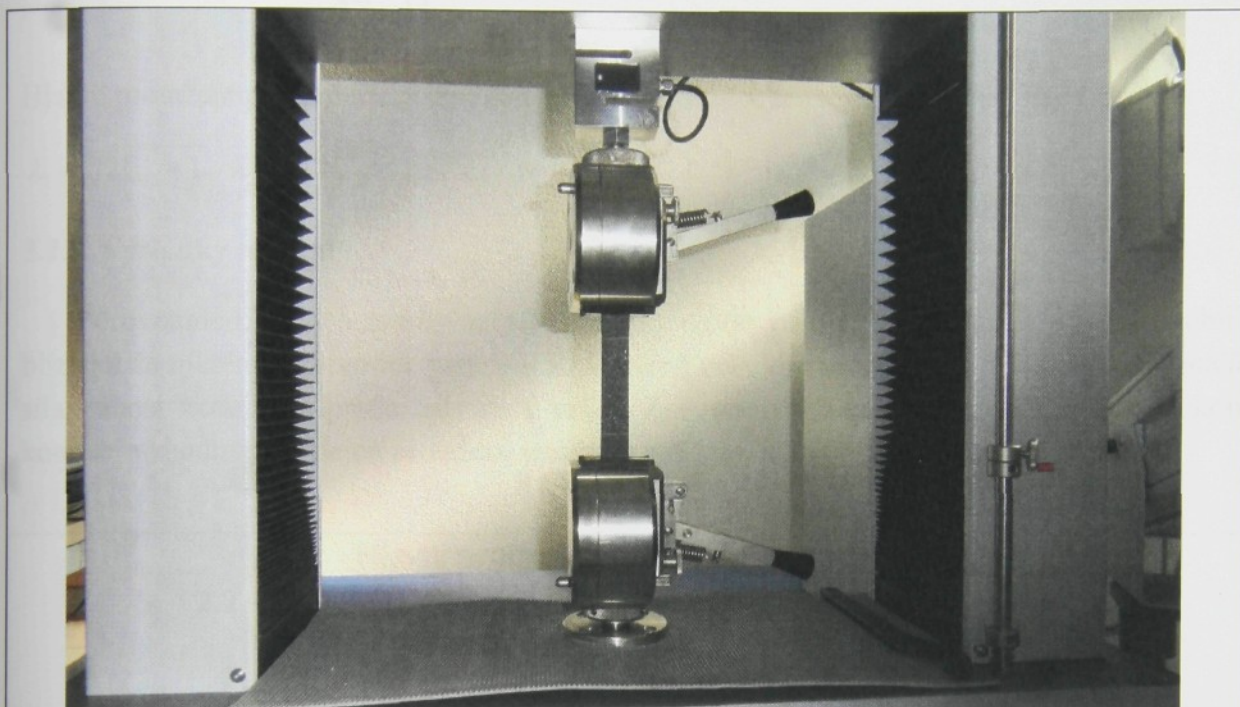
Kvazistatické tahové testy styren-butadienové pryže byly provedeny na testovacím stroji TIRA 2810 (obr. 3.2). Každý vzorek tvaru tenkého pásku o rozměrech 110 x 25 x 5 mm byl před vlastním měřením zatížen několika cykly na nejvyšší zatížení pro odstranění Mullinsova jevu. Následovalo kvazistatické zatížení s velmi malou rychlostí $v = 0,16$ mm/s. Pro každý experiment byla zaznamenávána síla a posuv čelistí v závislosti na čase se vzorkovací frekvencí 100 Hz. Srovnání experimentů je na obr. 3.3. Deformace vzorků byly stanoveny pomocí 2D optické korelace optickým měřicím systémem Istra 4D fy Dantec Dynamics. V této metodě je využíváno numerické zpracování obrazu snímaného digitální kamerou. Na vzorek je sprejem nanesena náhodná struktura bodů. Kamera snímá tuto strukturu v pravidelných intervalech se vzorkovací frekvencí 1 Hz během zatěžování. Posuvy jednotlivých bodů jsou na každém snímku identifikovány pomocí optické korelace a trajektorie bodů vzorku jsou stanoveny. Z nich je určen deformační gradient v pravidelné síti a vypočten Greenův deformační tenzor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}). \tag{3.31}$$

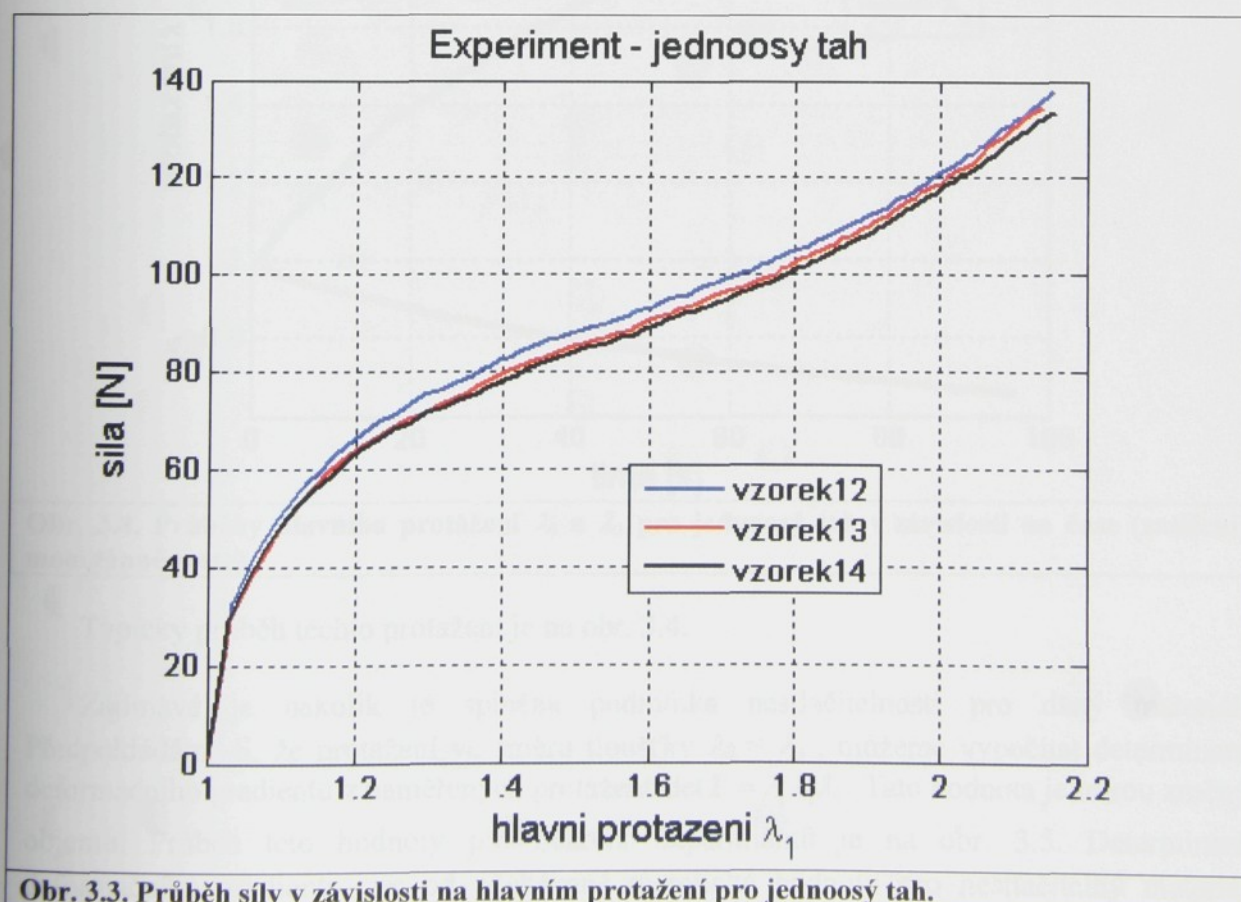
V případě rovinných vzorků, které zůstávají rovinné i po deformaci, postačí k určení deformací záznam pouze jedné kamery. Předpokládáme isotropní materiál, kdy hlavní osy deformace se pro dané jednoosé zatížení shodují s hlavními osami napětí. Potom má tenzor deformace tvar diagonální matice

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 - 1 & & \\ & \lambda_2^2 - 1 & \\ & & \lambda_3^2 - 1 \end{bmatrix}, \tag{3.32}$$

kde λ_1 je hlavní protažení ve směru tahového zatížení a $\lambda_2 = \lambda_3$ jsou protažení v příčných směrech. Pro nestlačitelný materiál má tenzor deformace podle (3.28) tvar



Obr. 3.2. Zatěžovací zařízení TIRA se vzorkem pryže.



Obr. 3.3. Průběh síly v závislosti na hlavním protažení pro jednoosý tah.

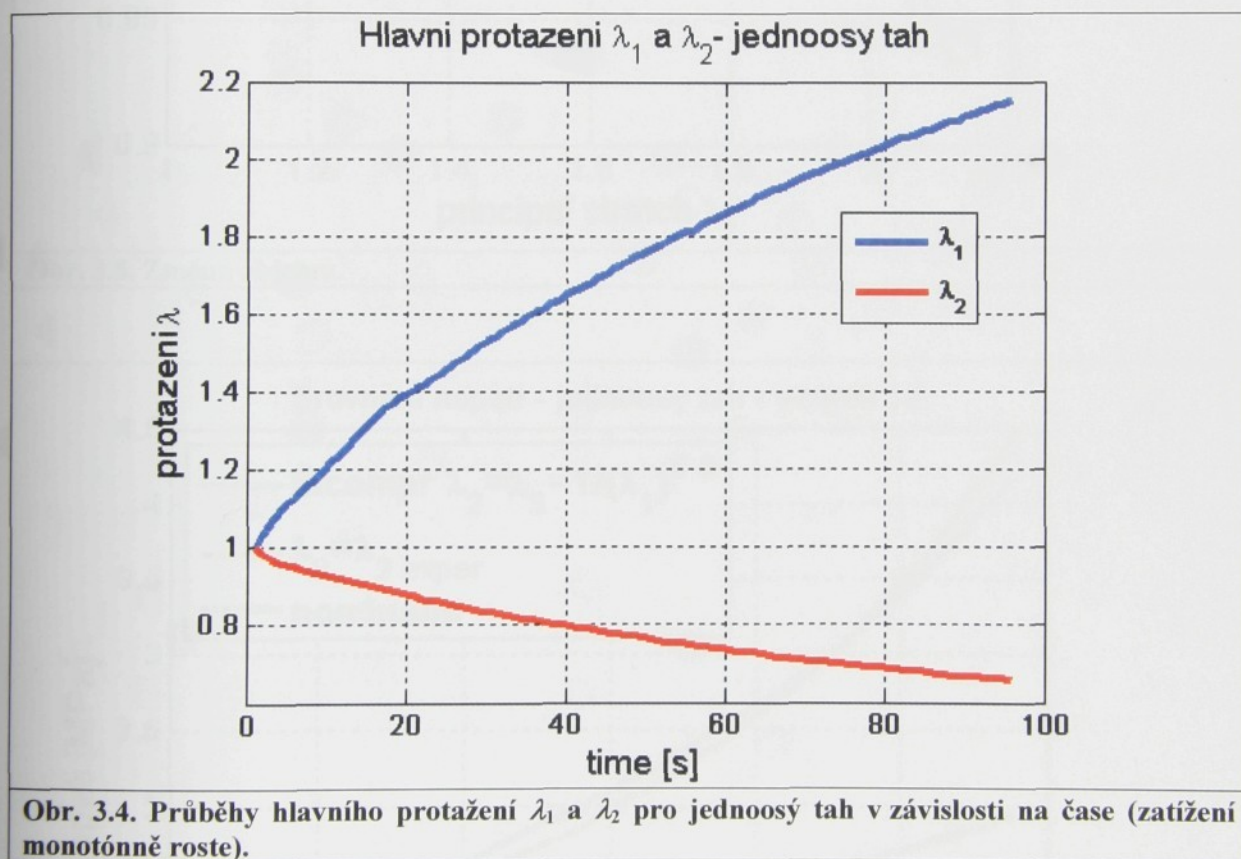
$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 - 1 & & \\ & \lambda_1^{-1} - 1 & \\ & & \lambda_1^{-1} - 1 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Hlavní protažení pak určíme ze změřených hodnot složek tenzoru deformace E_{11} a E_{22}

$$\lambda_1 = \sqrt{2E_{11} + 1}, \quad \lambda_2 = \sqrt{2E_{22} + 1}.$$

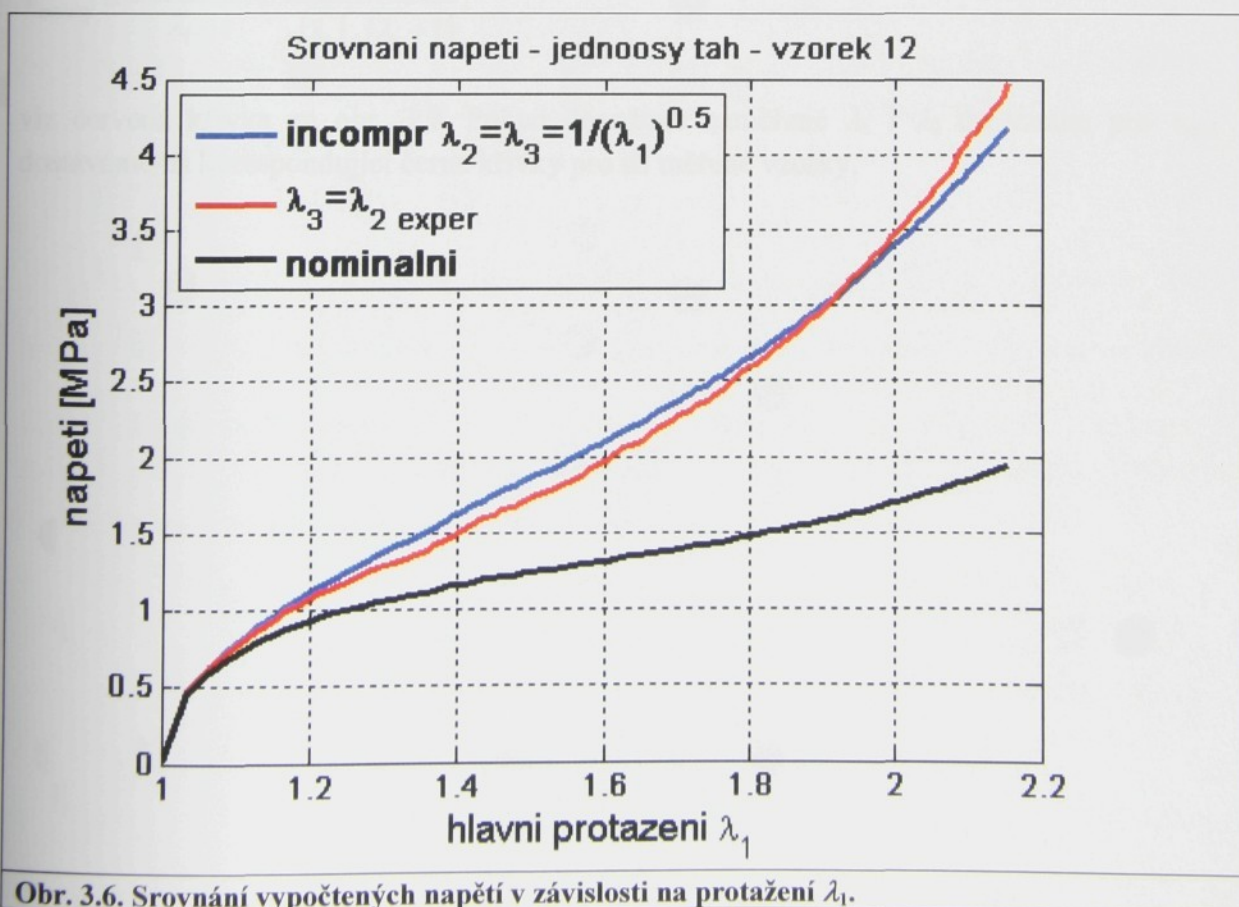
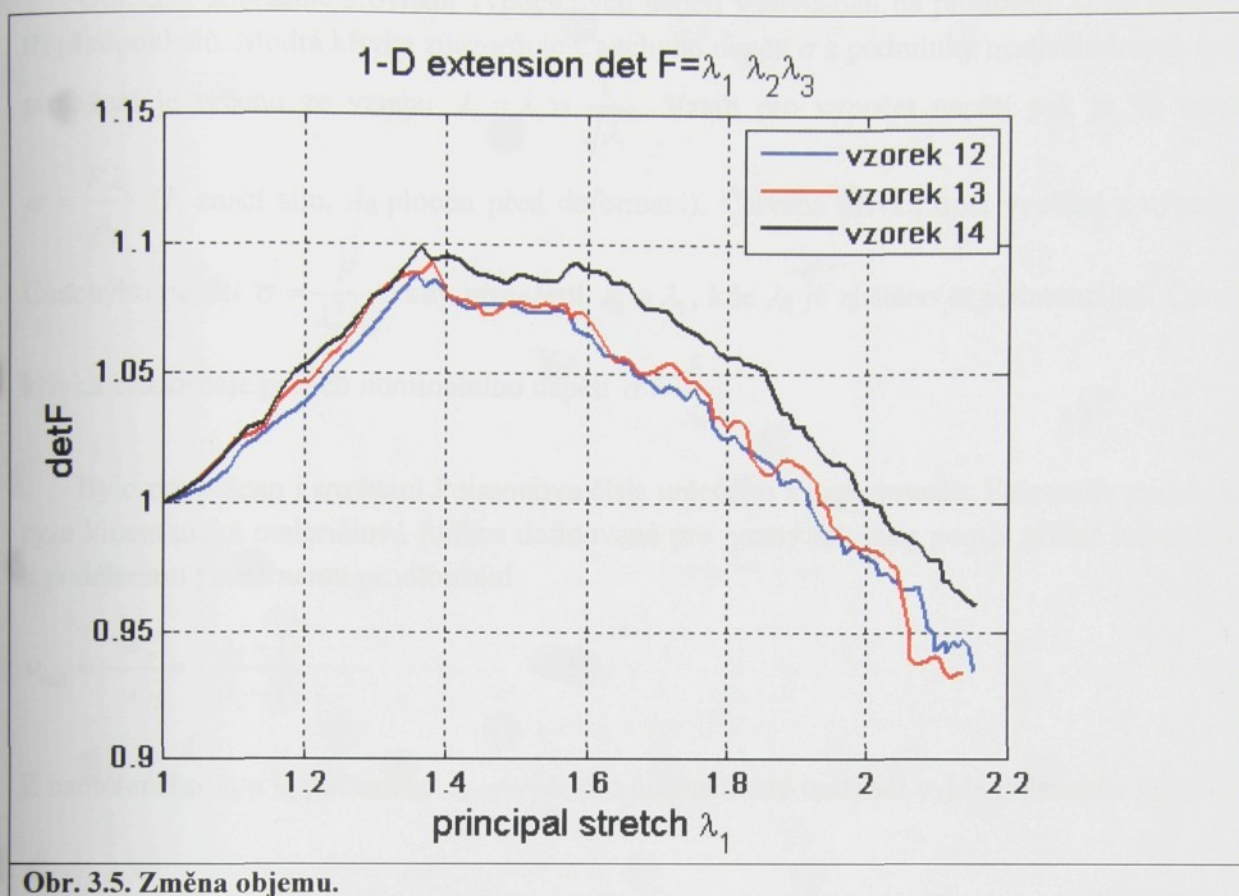
3.2.3. Výsledky měření

Porovnáme-li průběh zatěžovací síly pro tyto vzorky na obr. 3.3, vidíme, že jsou si velmi blízké a že měření je reprodukovatelné. K poměrně velkému protažení je třeba poměrně malá síla, tuhost zkoumané pryže tedy není velká. Z jednotlivých snímků vzorků byla optickou korelací vyhodnocena nejen protažení ve směru zatížení, ale i protažení v příčném směru.



Typický průběh těchto protažení je na obr. 3.4.

Zajímavé je nakolik je splněna podmínka nestlačitelnosti pro daný materiál. Předpokládáme-li, že protažení ve směru tloušťky $\lambda_2 = \lambda_3$, můžeme vypočítat determinant deformačního gradientu z naměřených protažení $\det \mathbf{F} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$. Tato hodnota je mírou změny objemu. Průběh této hodnoty pro několik experimentů je na obr. 3.5. Determinant deformačního gradientu se od očekávané teoretické hodnoty pro nestlačitelný materiál ($\det \mathbf{F} = 1$) liší. Jde tedy o mírně stlačitelný materiál.



Obr. 3.6. zobrazuje srovnání vypočtených napětí v závislosti na protažení λ_1 na základě tří předpokladů. Modrá křivka znázorňuje Cauchyho napětí σ z podmínky nestlačitelnosti, kdy protažení je určeno ze vztahu $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$. Vztah pro výpočet napětí pak je ve tvaru

$$\sigma = \frac{F \lambda_1}{A_0} \quad (F \text{ značí sílu, } A_0 \text{ plochu před deformací}).$$
 Červená křivka opět vychází z výpočtu

Cauchyho napětí $\sigma = \frac{F}{\lambda_2^2 A_0}$, kdy protažení $\lambda_3 = \lambda_2$, kde λ_2 je zjištěno experimentálně. Černá

křivka znázorňuje průběh nominálního napětí $\sigma = \frac{F}{A_0}$.

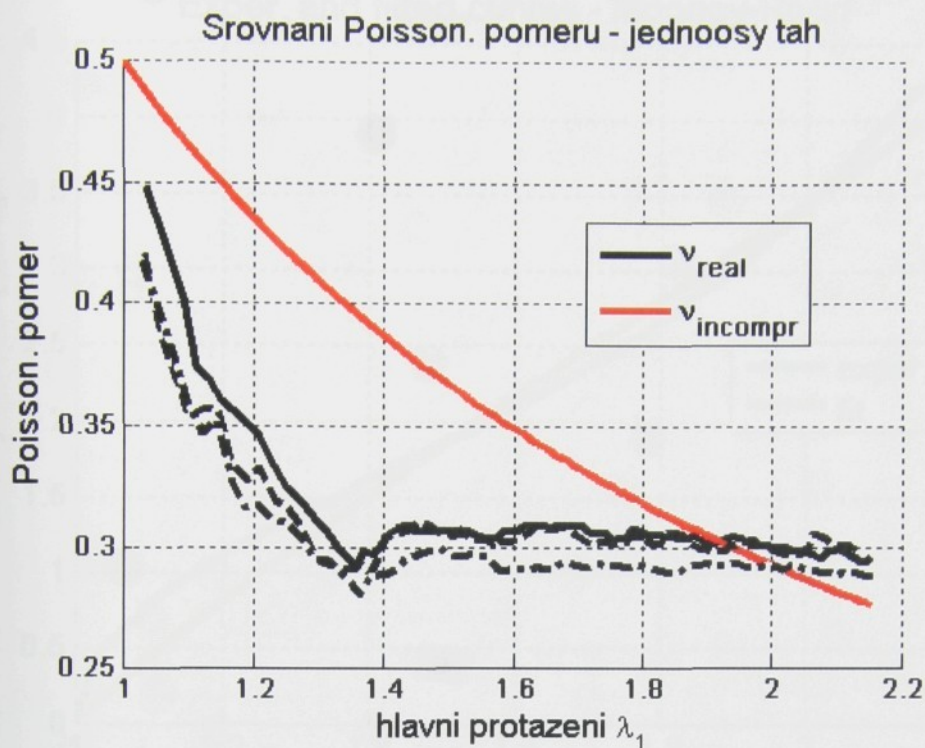
Bylo provedeno i srovnání Poissonova čísla určeného z experimentu. Poissonův poměr je ryze kinematická materiálová funkce definovaná pro prostý tah jako poměr příčné kontrakce k podélnému poměrnému prodloužení

$$\nu_{\text{real}} = -\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_l} = -\frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1}.$$

Z naměřeného λ_1 a vypočteného $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ pro nestlačitelný materiál vyjde Poissonův poměr

$$\nu_{\text{incomp}} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} - 1}{\lambda_1 - 1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}(\sqrt{\lambda_1} + 1)},$$

viz červená křivka na obr. 3.7. Pokud dosadíme naměřené λ_1 i λ_2 do vztahu pro ν_{real} , dostáváme tři korespondující černé křivky pro tři měřené vzorky.



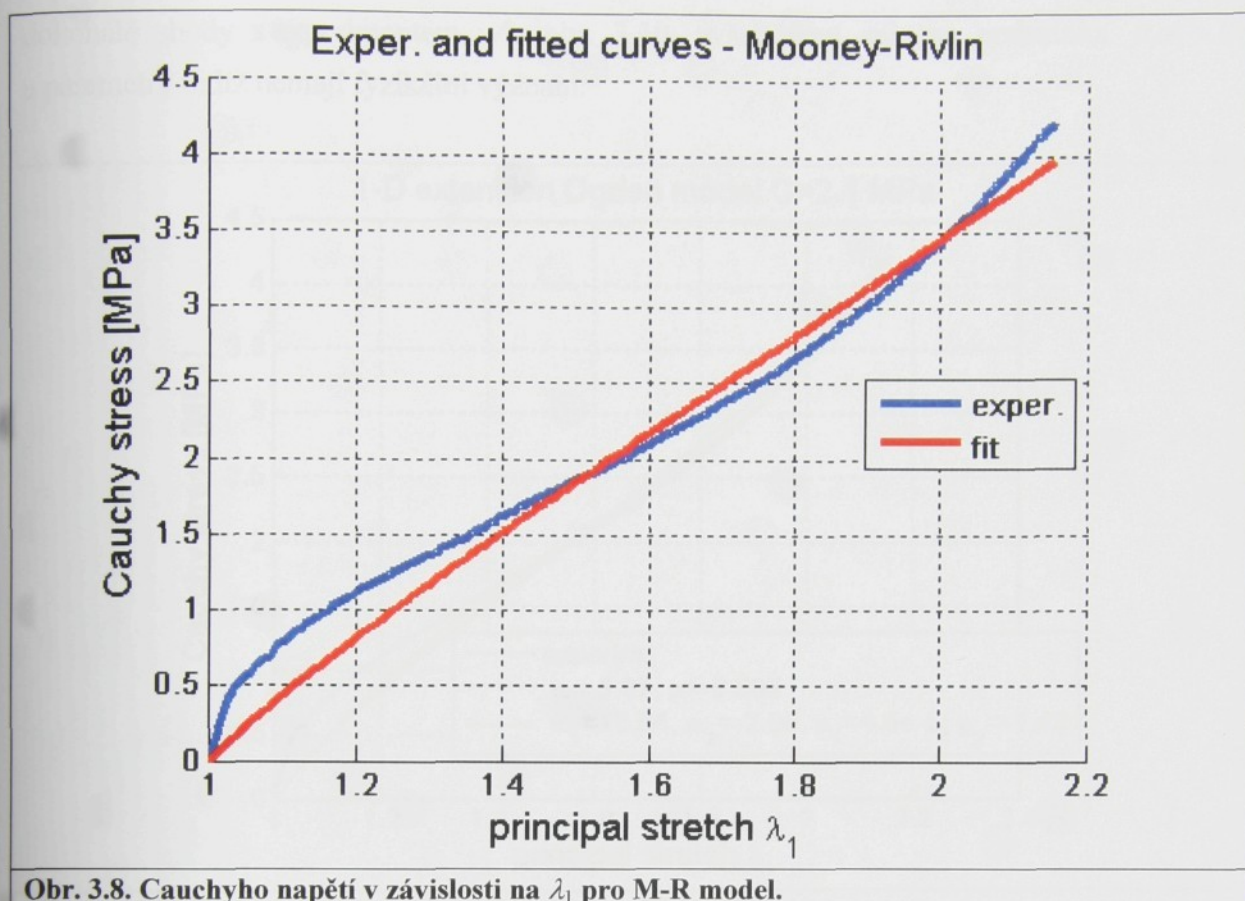
Obr. 3.7. Srovnání Poissonova poměru naměřeného a vypočteného.

3.2.4. Stanovení materiálových parametrů

Pro popis mechanických vlastností materiálů se používají obvykle dva modely Money-Rivlinův a Ogdenův. Při výpočtu parametrů pro Mooney-Rivlinův model se dvěma členy a nestlačitelný materiál vyjádříme z funkce deformační energie (3.24) a určíme Cauchyho napětí σ_1 podle vztahu (3.23). Pro $\lambda_2 = \lambda_3 = 1/\sqrt{\lambda_1}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ dostáváme konstitutivní vztah

$$\sigma_1 = 2 \left[C_1 (\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1}) + C_2 (-\lambda_1^{-2} + \lambda_1) \right].$$

V tomto vztahu je σ_1 lineární funkcí materiálových parametrů C_1 a C_2 a můžeme je tedy určit z experimentálních hodnot $\sigma_1 = \frac{F\lambda_1}{A_0}$ a λ_1 regresí pomocí metody lineárních nejmenších čtverců. Dostáváme hodnoty $C_1 = 0,224$ MPa a $C_2 = 0,538$ MPa a tedy modul pružnosti ve smyku $G = 2(C_1 + C_2) = 1,52$ MPa. Srovnání průběhu Cauchyho napětí určeného experimentálně a nařizováním je na obr. 3.8.



Obr. 3.8. Cauchyho napětí v závislosti na λ_1 pro M-R model.

Obdobným způsobem určíme parametry Ogdenova modelu (3.26). Vycházíme-li při tom pouze z tahových zkoušek, je vhodné použít Ogdenův model s jedním až dvěma členy. Konstitutivní vztah pro napětí σ_1 pro Ogdenův model za předpokladu nestlačitelnosti a jednoosé napjatosti je

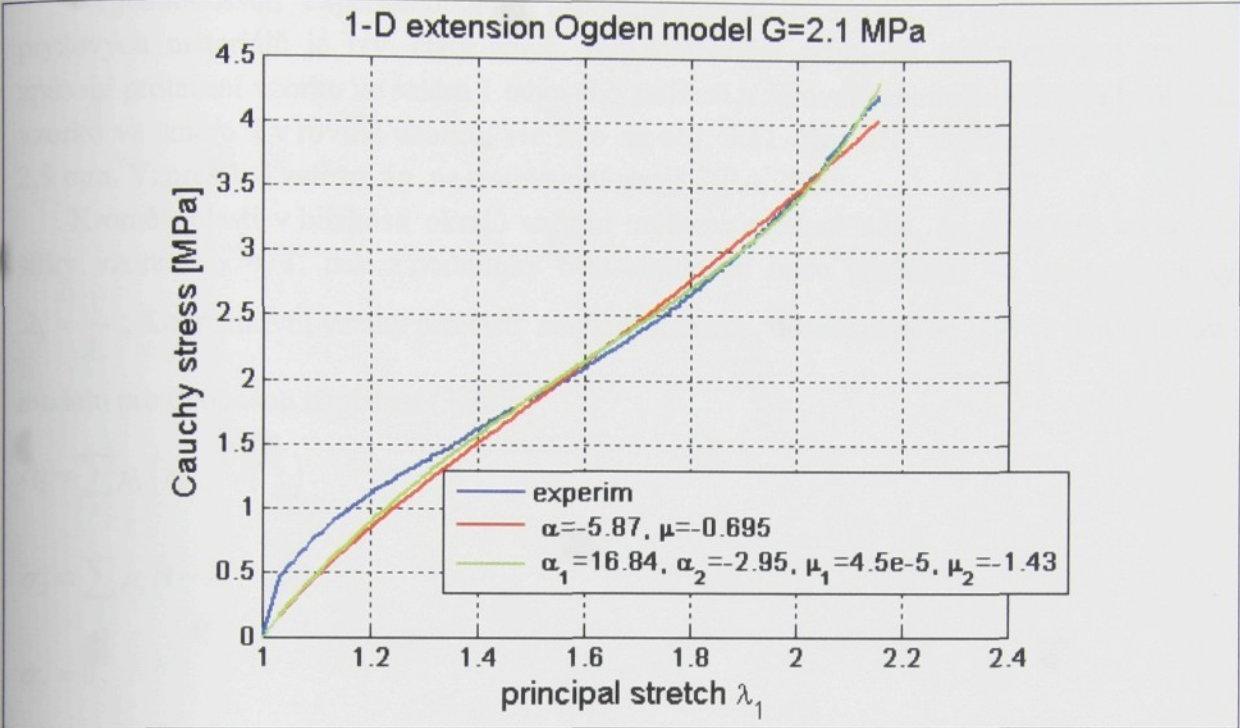
$$\sigma_1 = \sum_i \mu_i \left(\lambda_1^{\alpha_i} - \lambda_1^{-\frac{\alpha_i}{2}} \right).$$

Vzhledem k tomu, že tato funkce je lineární pro parametry μ_m a nelineární pro parametry α_m , použijeme k určení parametrů kombinaci lineárních a nelineárních nejmenších čtverců. Program v MATLABu se skládá ze dvou částí. Nejprve pro vstupní odhad parametrů α_m vypočteme pomocí metody lineárních nejmenších čtverců odhad parametrů μ_m , a potom pomocí metody nelineárních nejmenších čtverců optimalizujeme parametry α_m . Oba procesy probíhají v sekvenci tak dlouho, až jsou optimalizační podmínky splněny.

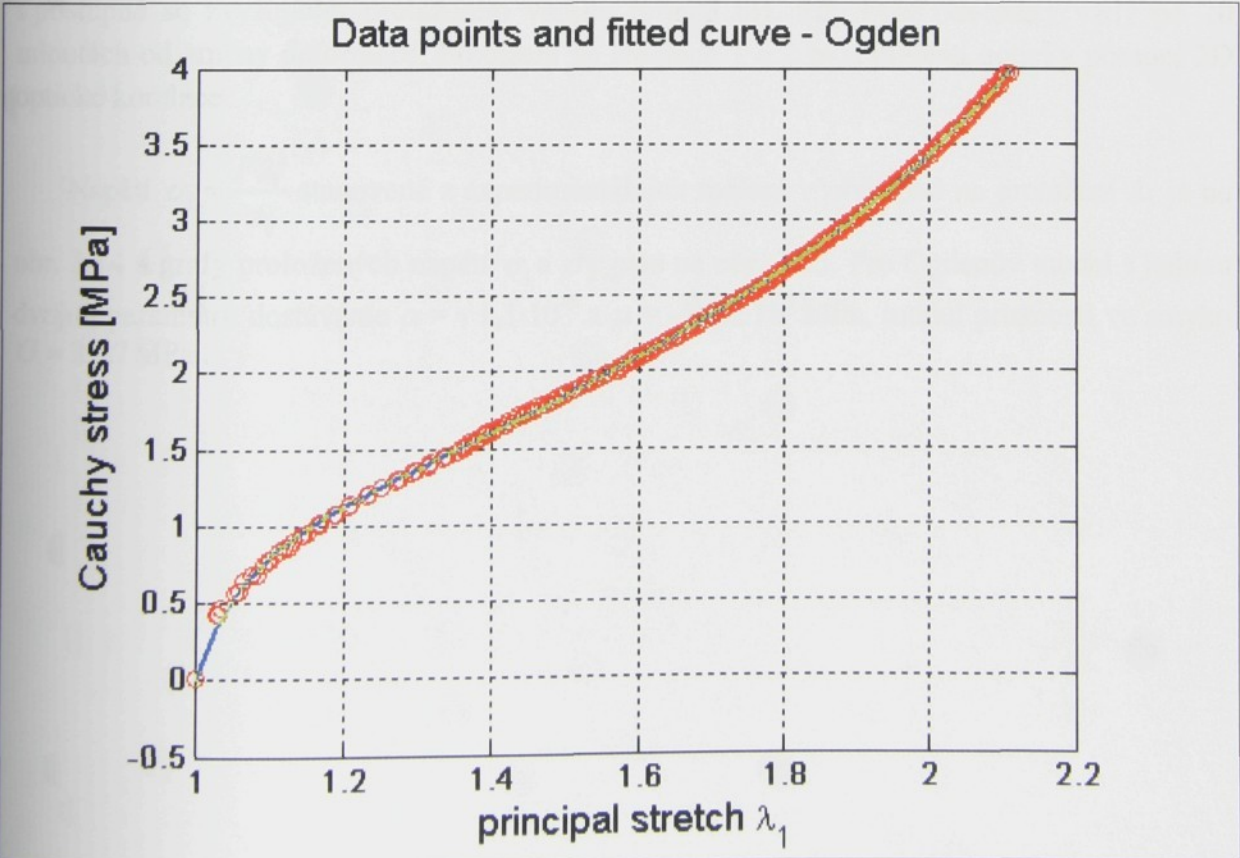
Pro Ogdenův model s jednou dvojicí parametrů dostáváme $\alpha = -5,87$ a $\mu = -0,69$ MPa. Pro dvě dvojice parametrů pak $\alpha_1 = 16,84$ a $\mu_1 = 4,5 \cdot 10^{-5}$ MPa, $\alpha_2 = -2,95$ a $\mu_2 = -1,43$ MPa. Pro oba případy máme stejný modul pružnosti ve smyku $G = \frac{1}{2} \sum_i \mu_i \alpha_i = 2$ MPa. Srovnání

obou přístupů je v grafu na obr. 3.9. Vidíme, že pro malé hodnoty protažení λ_1 je shoda s experimentálním měřením slabší. Zvolíme-li model se třemi členy, dosáhneme téměř

dokonalé shody s experimentem, viz obr. 3.10, avšak není splněna podmínka $\mu_i \alpha_i > 0$, a parametry tudíž nemají fyzikální význam.



Obr. 3.9. Cauchyho napětí v závislosti na λ_1 pro Ogdenův model.



Obr. 3.10. Cauchyho napětí v závislosti na λ_1 pro Ogdenův model se třemi členy.

3.2.5. Experiment - dvouosé zatěžování

Čistý smyk

Nejjednodušším experimentálním uspořádáním, které vyvolá dvouosou napjatost u pryžových materiálů je tzv. čistý smyk. Experimentální přípravek pro tento typ zatížení způsobí protažení vzorku ve směru 1 tahového zatížení a zároveň neumožní příčnou kontrakci vzorku ve směru 2 v rovině vzorku, viz foto na obr. 3.11. Rozměry vzorku byly 220 x 20 x 2,9 mm. Vzorek byl zatěžován na testovacím stroji TIRA 2810.

Kromě oblasti v blízkosti okrajů vzorku můžeme předpokládat, že protažení ve směru šířky vzorku $\lambda_2 = 1$, pak z podmínky nestlačitelnosti bude protažení ve směru tloušťky $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1}$. Konstitutivní vztahy pro čistý smyk dostaneme, dosadíme-li za $\lambda_2 = 1$ do Ogdenova modelu pro dvouosou napjatost (3.30):

$$\sigma_1 = \sum_i \mu_i (\lambda_1^{\alpha_i} - \lambda_1^{-\alpha_i}),$$

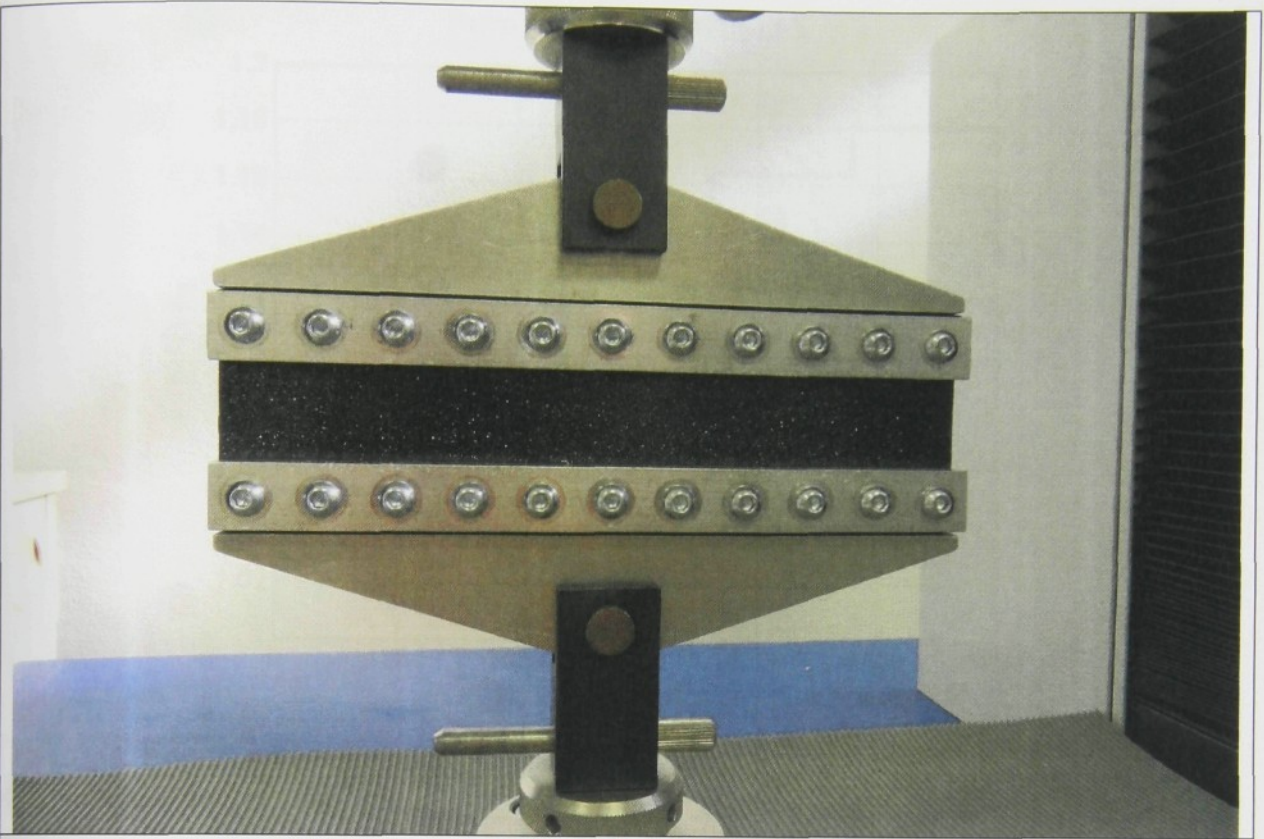
$$\sigma_2 = \sum_i \mu_i (1 - \lambda_1^{-\alpha_i}),$$

$$\sigma_3 = 0.$$

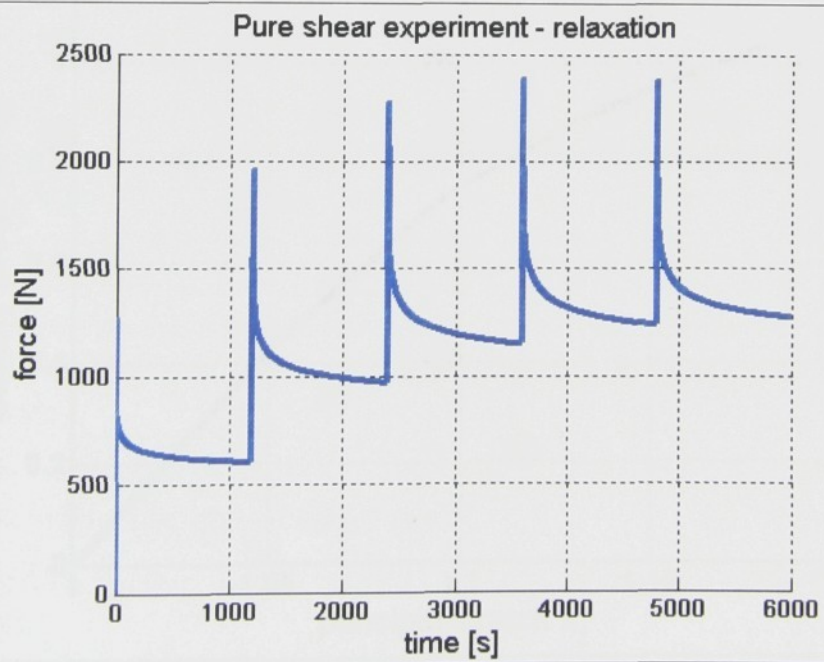
Zatížení v tomto případě nebylo vysoké a počet experimentálních dat byl malý, proto byl zvolen model s jedním členem. Rovnovážné síly byly určeny z relaxačních měření (obr. 3.12) s postupně se zvyšujícím protažením vzorku (obr. 3.13). Síly byly odečítány vždy po 20 minutách od změny deformace. Protažení ve směrech 1 a 2 byla měřena opticky pomocí 2D optické korelace.

Napětí $\sigma_1 = \frac{F \lambda_1^2}{A_0}$ stanovené z experimentálních měření v závislosti na protažení λ_1 je na

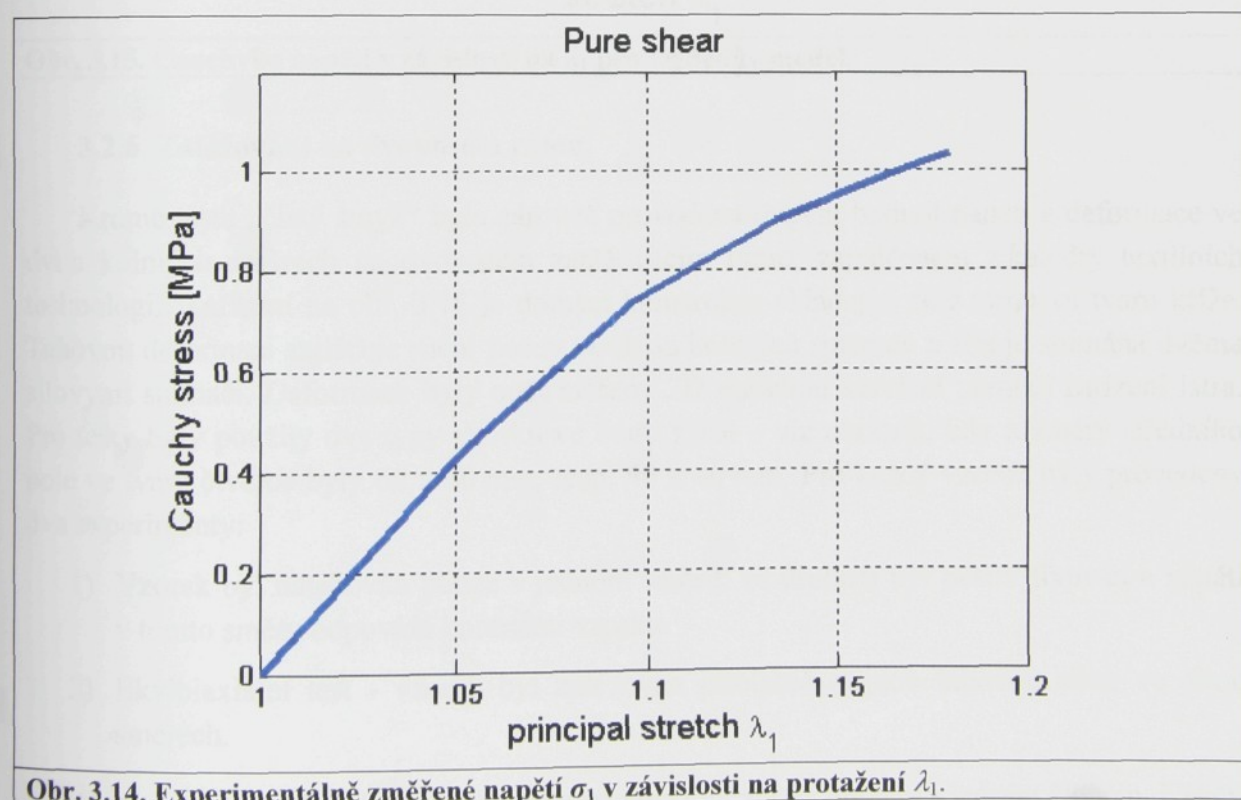
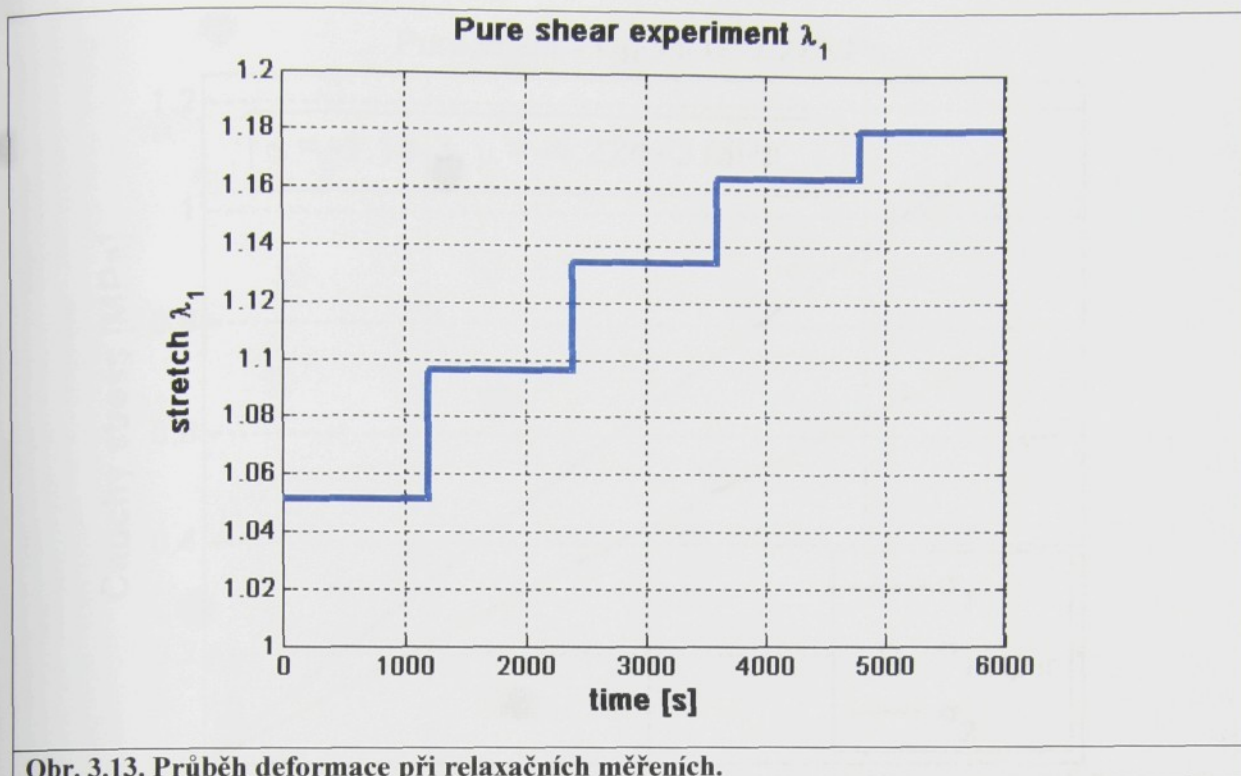
obr. 3.14 a grafy proložených napětí σ_1 a σ_2 jsou na obr. 3.15. Pro Ogdenův model s jednou dvojicí parametrů dostáváme $\alpha = -1,1 \cdot 10^{-3}$ a $\mu = -4,22 \cdot 10^3$ MPa, modul pružnosti ve smyku $G = 2,27$ MPa.

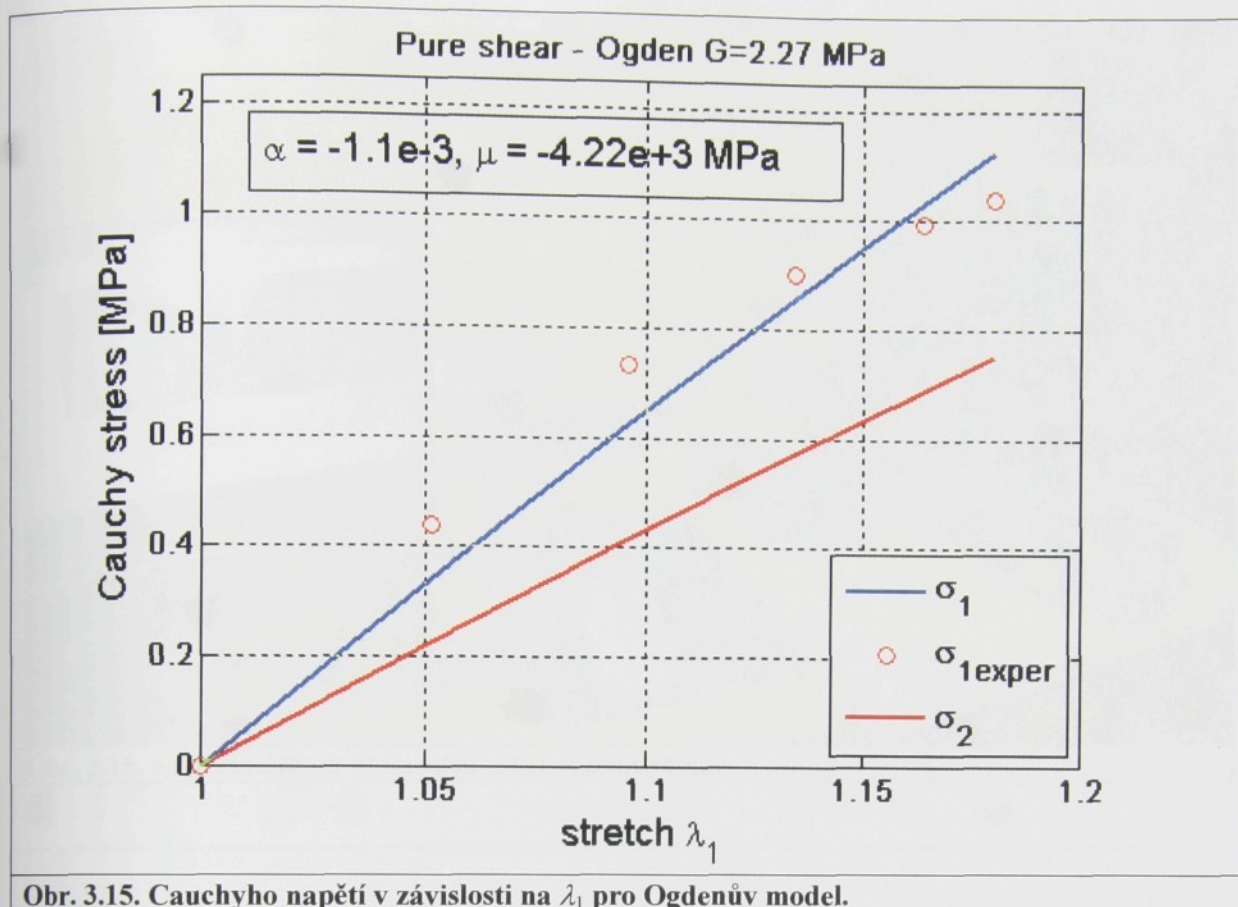


Obr. 3.11. Zařízení pro experiment „čistý smyk“.



Obr. 3.12. Určení rovnovážných sil z relaxačních měření.





3.2.6. Zatěžování na dvouosém rámu

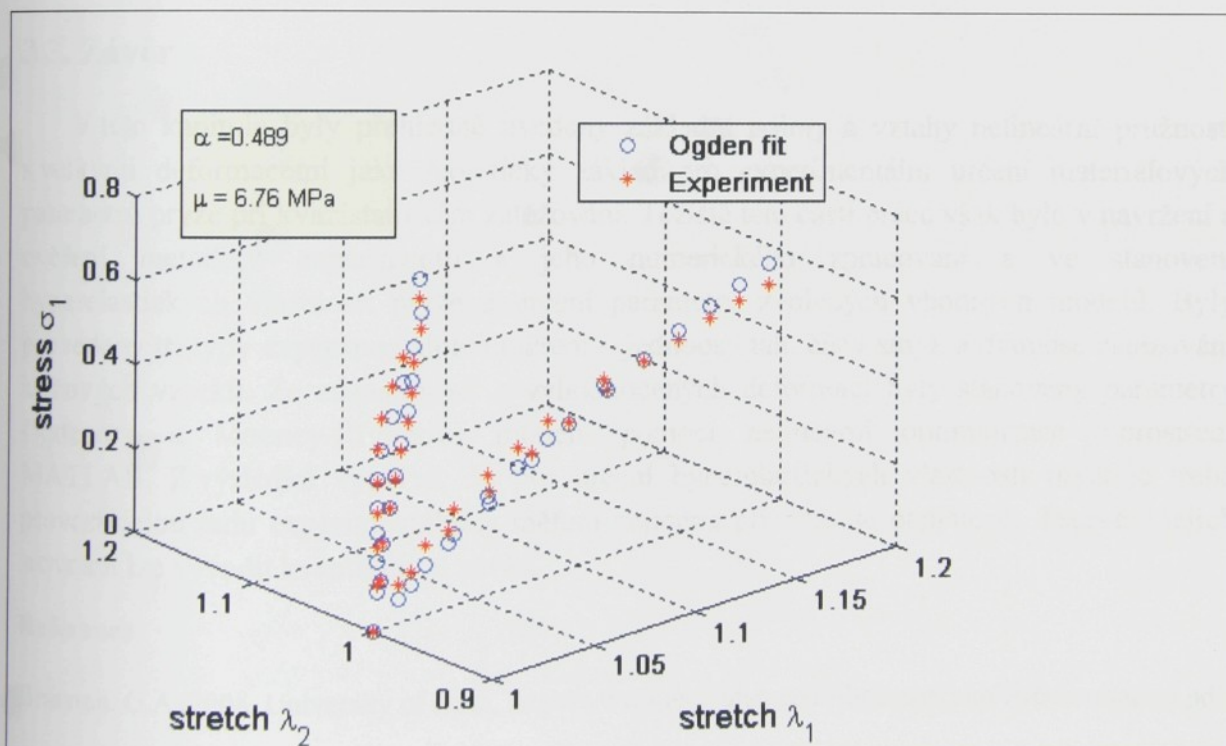
Kromě testu „čistý smyk“ byla zároveň provedena měření hodnot napětí a deformace ve dvou kolmých směrech na dvouosém zatěžovacím rámu, zapůjčeném z katedry textilních technologií. Zařízení na obr. 3.16 je domácí konstrukce skládající se z rámu ve tvaru kříže. Tahovou deformaci zajišťuje ruční posuv ve dvou kolmých směrech a síla je snímána dvěma silovými snímači. Deformace byly opět měřeny 2D optickou korelací pomocí zařízení Istra. Pro testy byly použity dva typy vzorků ve tvaru kříže – viz obrázek, kdy rozměry středního pole ve tvaru čtverce byly 60 x 60 mm, resp. 40 x 40 mm. Pro každý vzorek byly provedeny dva experimenty:

- 1) Vzorek byl natahován pouze v jednom směru, ve druhém byl posuv fixován a napětí v tomto směru odpovídá kontrakci vzorku.
- 2) Ekvibiaxiální test - vzorek byl zatěžován přibližně stejnou tahovou silou ve dvou směrech.

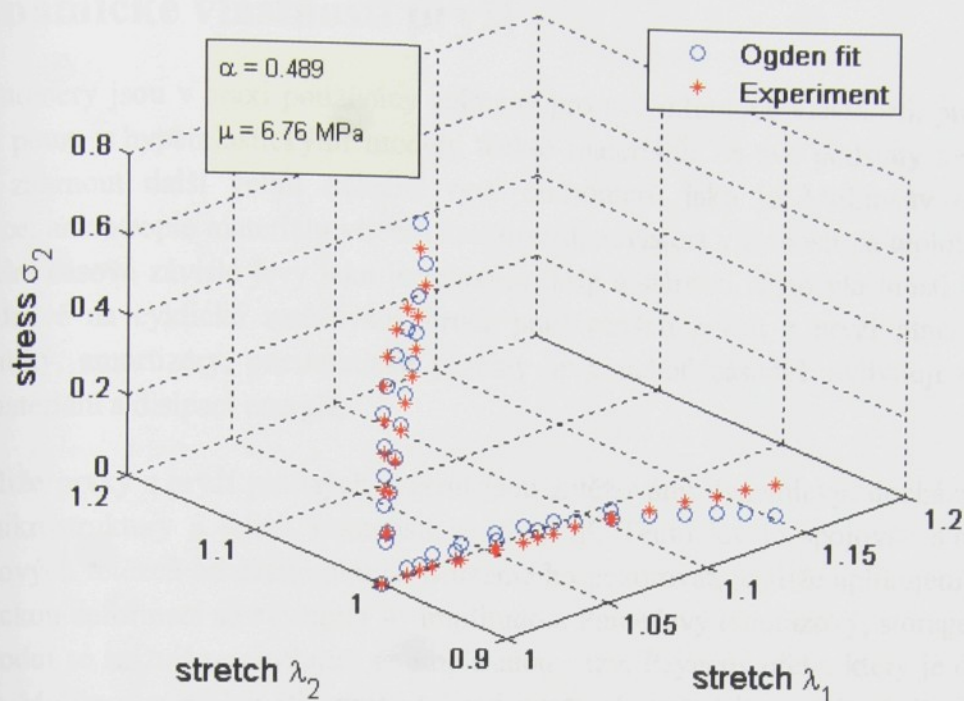
Vyhodnocení probíhalo v MATLABu pomocí Ogdenova modelu s jedním členem. Napětí $\sigma_1 = \frac{F\lambda_1^2}{A_0}$, resp. $\sigma_2 = \frac{F\lambda_2^2}{A_0}$ stanovené z experimentálních měření v závislosti na obou protaženích λ_1, λ_2 je na prostorových grafech na obr. 3.17, resp. obr. 3.18. Pro Ogdenův model s jednou dvojicí parametrů dostáváme $\alpha = 0,489$ a $\mu = 6,76$ MPa. Modul pružnosti ve smyku dává hodnotu $G = 1,65$ MPa.



Obr. 3.16. Experiment na dvuosém zatěžovacím rámu.



Obr. 3.17. Cauchyho napětí σ_1 v závislosti na λ_1, λ_2 pro Ogdenův model.



Obr. 3.18. Cauchyho napětí σ_2 v závislosti na λ_1, λ_2 pro Ogdenův model.

3.3. Závěr

V této kapitole byly přehledně uvedeny základní pojmy a vztahy nelineární pružnosti s velkými deformacemi jako teoretický základ pro experimentální určení materiálových parametrů pryže při kvazistatickém zatěžování. Těžiště této části práce však bylo v návržení a ověření metodiky experimentu a jeho numerického zpracování a ve stanovení hyperelastických vlastností pryže a určení parametrů zvolených vhodných modelů. Byly provedeny tři typy experimentálních měření – jednoosý tah, čistý smyk a dvouosé zatěžování křížových vzorků. Ze záznamu sil a vyhodnocených deformací byly stanoveny parametry Ogdenova a Mooney-Rivlinova modelu pomocí nelineární optimalizace v prostředí MATLAB. Z výsledků vyplývá, že pro určení hyperelastických vlastností pryží je třeba provést celou řadu experimentálních měření zejména při víceosé napjatosti. Teprve z jejich srovnání lze vyvodit kvantitativní závěr.

Reference

- Brannon, G.A., 2008, University of Utah, <http://www.mech.utah.edu/~brannon/public/deformation.pdf>.
- Holzappel, G.A., 2000, Nonlinear Solid Mechanics, John Wiley & Sons Ltd.
- Ogden, R.W., 1984, Non-Linear Elastic Deformations. Ellis Horwood Limited, Chichester.
- Saccomandi, G., Ogden, R.W., 2004, Mechanics and Thermomechanics of Rubberlike Solids, Springer.

4. Dynamické vlastnosti pryží

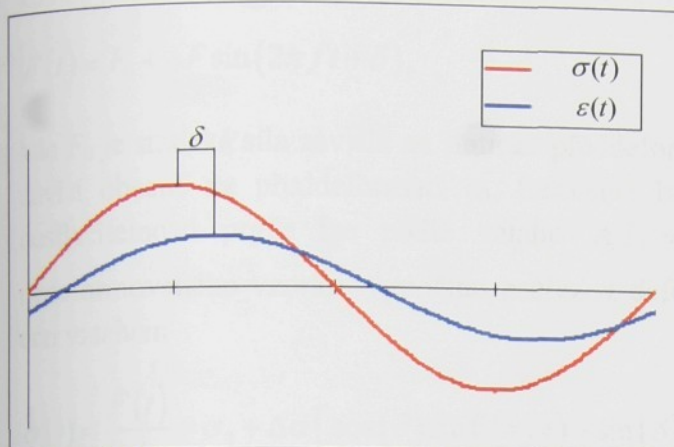
Elastomery jsou v praxi používány zejména pro své útlumové vlastnosti, proto se nelze spokojit pouze s hyperelastickými modely těchto materiálů. Ze své podstaty nemohou tyto modely zahrnout další velmi důležité rysy elastomerů jako je Mullinův efekt, trvalá deformace, anizotropie materiálu vlivem zatěžování, závislost vlastností na teplotě a zejména neelastické časově závislé jevy jako je relaxace, kríp a stárnutí. Tyto vlastnosti hrají velkou roli v odezvě na cyklické zatěžování široce používaných prvků z pryží plněných sazemi (pneumatiky, amortizéry, pneumatické pružiny ap.), neboť zásadně ovlivňují dynamickou tuhost materiálu a disipaci energie.

Jestliže prvky z pryží plněných sazemi jsou zatěžovány dynamicky, dochází k porušení jejich mikrostruktury a jejich vlastnosti se zhoršují. Tento jev je spojován s odtrháváním molekulových řetězců od částic plniva. Můžeme ho pozorovat, jestliže aplikujeme na vzorek harmonickou deformaci se zvyšující se amplitudou. Paměťový (soufázový, storage) i ztrátový (loss) modul se snižují se zvyšující se amplitudou - tzv. Payneův efekt, který je dynamickou obdobou Mullinsova efektu (tj. ztráty tuhosti pryží při statickém zatěžování). Zvyšující se frekvence cyklického zatěžování pak vede ke zvyšování obou složek dynamického modulu. Původně byl Payneův efekt spojován pouze s amplitudou zatížení, ukazuje se však, že dynamický modul závisí i na statické složce deformace (střední výchylce) (Lion, 1998) a na době zatěžování (Heinrich a kol., 2004). Experimenty Wrana a kol. (2003) ukazují, že soufázový (storage) modul výrazně klesá, je-li výchylka s malou amplitudou a s vysokou frekvencí superponována na oscilaci s nízkou frekvencí a velkou amplitudou. Je zřejmé, že tzv. Payneův efekt závisí na předchozí historii cyklického zatěžování a na kombinaci aktuálního statického a dynamického zatížení (Höfer & Lion, 2009).

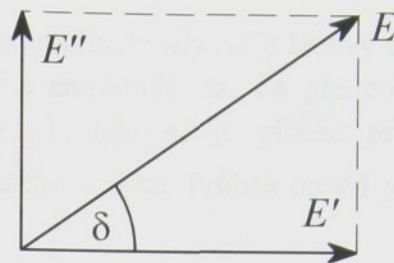
Určení vlivu velikosti amplitudy, frekvence a statické střední výchylky na dynamický modul materiálu bylo cílem dynamických experimentů.

4.1. Dynamická mechanická analýza

Pomocí dynamické mechanické analýzy (DMA) jsou měřeny mechanické vlastnosti materiálů jako dynamická tuhost a tlumení. Zkoušený vzorek materiálu je zatěžován periodicky proměnnou silou, vzorek se deformuje a je měřena výchylka. Průběh působící síly je přepočten na napětí a deformace na poměrné prodloužení. Odsud dostáváme aplikaci Hookeova zákona materiálovou konstantu E (modul pružnosti v tahu/tlaku). Fázový posuv průběhu napětí a průběhu deformace δ charakterizuje útlumové vlastnosti materiálu a vyjadřuje je hodnota $\tan \delta$ neboli ztrátový úhel (loss angle) (obr. 4.1). Pro případ $\delta = 0$ mluvíme o elastickém materiálu. Při $\delta = \pi/2$ se jedná o viskózní materiál. Většina materiálů má úhel δ mezi hodnotami 0 až $\pi/2$ a nazýváme je viskoelastické materiály; mezi ně můžeme zahrnout i pryže (elastomery). Dynamický modul E můžeme rozložit do dvou složek E' a E'' (obr. 4.2). Složku E' nazýváme paměťový modul (storage modulus), nebo též soufázový modul a složka E'' je ztrátový modul (loss modulus). Tyto moduly bývají závislé



Obr. 4.1. Fázový posuv δ – napětí (síla) předbíhá deformaci.



Obr. 4.2. Vektorové znázornění paměťového E' , ztrátového E'' a celkového modulu E .

na amplitudě zatížení, na frekvenci, na statickém předpětí, na teplotě a na dalších faktorech (Lion & Kardelky, 2004, Höfer & Lion, 2009).

Dynamické moduly pryží plněných sazemi mají slabou závislost na frekvenci v porovnání s výraznou závislostí na amplitudě (Höfer & Lion, 2009). Jestliže amplituda deformace roste, paměťový modul E' se snižuje a ztrátový modul E'' vykazuje sigmoidální průběh – Payneův efekt. Pro nelineárně viskoelastický materiál tyto dva moduly závisí nejen na amplitudě deformace, ale i na statické předdeformaci. Ztrátový úhel $\tan \delta$ je dán poměrem E''/E' a je mírou disipované energie přeměněné na teplo během dynamického cyklu. Je-li amplituda deformace konstantní v čase, pak v ustáleném stavu jsou i oba moduly na čase nezávislé (Lion, 1998).

4.2. Experiment

Zkoumány byly dva typy materiálu:

- 1) panenská styren-butadienová pryž (SBR) používaná na odpružení základů strojů a zařízení
- 2) isopren-butadienová pryž ze segmentů (tvar segmentů viz obr. 4.4) používaných k odpružení tramvajových kol – vzorky byly vyjmuty jak z panenských segmentů, tak ze segmentů opotřebovaných s různou provozní historií. Účelem tohoto měření bylo stanovit vliv stárnutí na dynamické vlastnosti dané pryže, měření bylo součástí širšího výzkumu vlastností a chování segmentů (Marvalová a kol. 2009, Petriková & Marvalová 2008, 2009).

Vzorky byly podrobeny harmonickému sinusovému buzení výchylkou

$$u(t) = u_0 + \Delta u \sin(2\pi f t). \quad (4.1)$$

Statická složka deformace ε_0 a amplituda $\Delta \varepsilon$ byla vypočtena s ohledem na geometrii vzorku

$$\varepsilon_0 = u_0 / (L_0 + u_0), \quad \Delta \varepsilon = \Delta u / (L_0 + u_0), \quad (4.2)$$

kde L_0 je délka před deformací. Silová odezva vzorku je také harmonickou funkcí

$$F(t) = F_0 + \Delta F \sin(2\pi f t + \delta), \quad (4.3)$$

kde F_0 je statická síla závislá na statické předdeformaci u_0 , amplituda síly ΔF a fázový úhel δ závisí obecně na předdeformaci ε_0 , frekvenci buzení f a amplitudě $\Delta\varepsilon$. Za předpokladu nestlačitelnosti pryže lze podle vztahu $A_0 L_0 = A(L_0 + u_0)$, kde A_0 je plocha průřezu nedeformovaného vzorku, vypočítat průřez A deformovaného vzorku. Průběh napětí je pak dán vztahem

$$\sigma(t) = \frac{F(t)}{A} = \sigma_0 + \Delta\sigma [\cos(\delta) \sin(2\pi f t) + \sin(\delta) \cos(2\pi f t)], \quad (4.4)$$

který lze přepsat na tvar

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \Delta\varepsilon [E'(\varepsilon_0, f, \Delta\varepsilon) \sin(2\pi f t) + E''(\varepsilon_0, f, \Delta\varepsilon) \cos(2\pi f t)], \quad (4.5)$$

kde

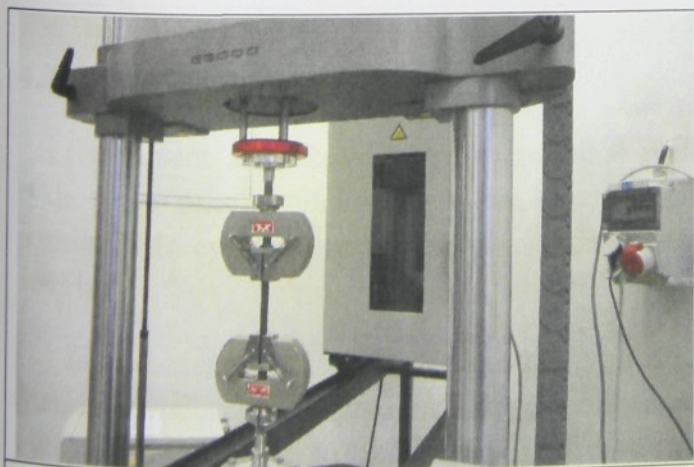
$$E'(\varepsilon_0, f, \Delta\varepsilon) = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \cos(\delta) \quad (4.6)$$

je paměťový (storage) modul a

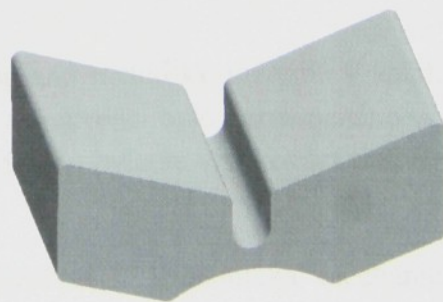
$$E''(\varepsilon_0, f, \Delta\varepsilon) = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \sin(\delta) \quad (4.7)$$

je ztrátový (loss) modul.

DMA testy byly prováděny na dynamickém testovacím zařízení Instron Elektropuls 3000 (obr. 4.3). Jednoosé tahové zatěžování vzorků probíhalo při pokojové teplotě a bylo řízeno polohou čelistí. Výstupními daty jsou měřené síly a výchylky v závislosti na čase. Účelem testů bylo stanovit závislost dynamického modulu na statické předdeformaci, na frekvenci a na dynamické amplitudě.



Obr. 4.3. Elektrodynamické zatěžovací zařízení Instron Elektropuls 3000 se vzorkem SBR pryže.



Obr. 4.4. Pryžový segment k odpružení tramvajových kol.

Ad 1) Vzorky ve tvaru tenkého pásku s rozměry 110 x 25 x 3 mm ze styren-butadienové pryže tvrdosti 74,3 Shore A byly podrobeny tahovému zatěžování. Vzorky byly po 6 předzatěžujících cyklech nataženy postupně na 3 statické výchylky u_0 , kterým odpovídaly předdeformace ε_0 , pro každou tuto předdeformaci byly aplikovány cykly s pěti zvyšujícími se dynamickými výchylkami $\Delta u(t)$, kterým odpovídaly amplitudy deformace $\Delta \varepsilon$ a pro každou z nich bylo aplikováno pět postupně se zvyšujících frekvencí f . Dále byl sledován vliv teploty na dynamické vlastnosti této pryže. Zatížení probíhalo v teplotní komoře v rozmezí teplot -20° až $+105^\circ$ C pro jednu frekvenci 5 Hz a jednu amplitudu $\varepsilon = 0,025$.

Ad 2) Vzorky ze segmentů panenských i opotřebených byly vyřezány vodním paprskem ve tvaru hranolu o rozměrech 20 x 15 x 15 mm. Podmínky opotřebení u segmentů nejsou přesně známy, míra opotřebení je dána počtem ujetých kilometrů (viz tabulka 4.1).

Tabulka 4.1. Označení, historie a tvrdosti vzorků z pryžových segmentů.

vzorek	0 R	1 R	2 R	3 G	4 R	5 R	6 R
doba provozu x1000 [km]	0	175	255	172	75	473	146
Shore A	80.0	82.4	86.1	85.4	83.6	83.5	88.3

Vzorky byly označeny písmenem R (výrobce segmentů Rubena Náchod) a G (neznámý německý výrobce). V tabulce je u každého vzorku rovněž uvedena naměřená hodnota tvrdosti Shore A. Vzorky byly podrobeny tlakovému zatížení na uvedeném zatěžovacím zařízení. Po šesti předzatěžujících cyklech byly vzorky stlačovány postupně na tři statické výchylky. Pro každé stlačení bylo aplikováno pět amplitud a pro každou z nich pět frekvencí (viz tabulka 4.2).

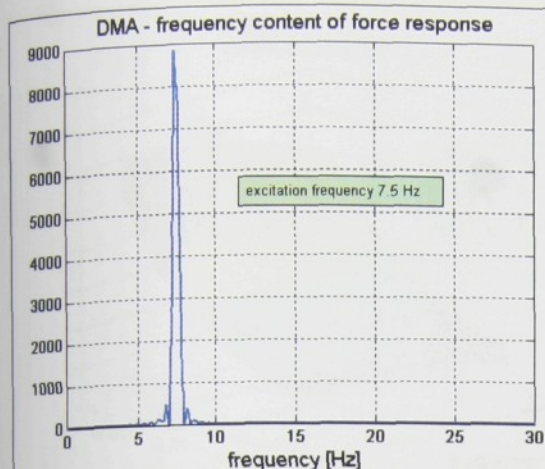
Tabulka 4.2. Rozměry vzorků, předdeformace, amplitudy a frekvence pro DMA.

vzorek	Styren-butadienová pryž	Isopren-butadienová pryž
rozměr	110 x 25 x 3 mm	20 x 15 x 15 mm
ε_0	0,17; 0,21; 0,25	-0,14; -0,2; -0,26
$\Delta \varepsilon$	0,014; 0,028; 0,042; 0,056; 0,07	0,05; 0,1; 0,015; 0,02; 0,025
f [Hz]	1; 2,5; 5; 7,5; 10	

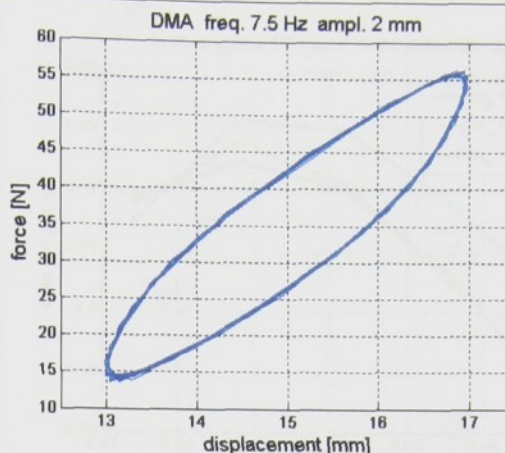
4.3. Výsledky měření

Experiment za pokojové teploty probíhal podle popsané metodiky měření. V každém cyklu, tj. pro danou statickou výchylku, danou amplitudu a frekvenci bylo zaznamenáno vždy posledních 16 cyklů při ustáleném rovnovážném stavu. Měřeno bylo se vzorkovací frekvencí 100 Hz.

Zaznamenaná data byla zpracována v prostředí MATLAB. Dynamická mechanická analýza je založena na předpokladu, že silová odezva má stejnou frekvenci jako budící výchylka. Z frekvenčního spektra síly na obr. 4.5 a z hysterezní smyčky na obr. 4.6 vyplývá, že pro daný materiál je tento předpoklad splněný.



Obr. 4.5. Frekvenční spektrum síly.



Obr. 4.6. Průběh hysterézní smyčky při frekvenci 7,5 Hz a amplitudě $\Delta u=2\text{mm}$.

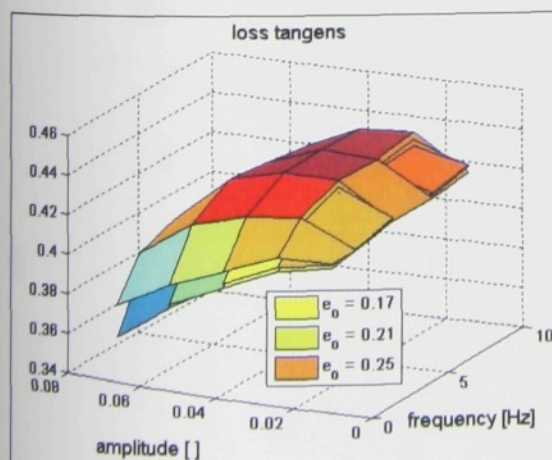
Amplitudy a fázový posun mezi budící výchylkou a silovou odezvou (ztrátový úhel δ) byly určeny pomocí diskrétní Fourierovy transformace v prostředí MATLAB. Byly použity funkce *fft* a *angle*.

Paměťový a ztrátový modul byl vypočten podle vztahů (4.6), (4.7). V experimentech byla sledována závislost dynamických modulů a ztrátového úhlu na statické předdeformaci (střední výchylce), na amplitudě výchylky a na frekvenci.

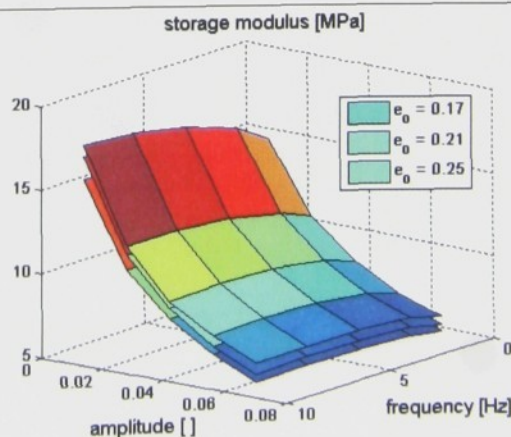
4.4. Dynamické vlastnosti styren-butadienové pryže

Výsledky měření jsou přehledně uvedeny v grafech na obr. 4.7 - 4.10. Z výsledků měření vyplývá, že všechny tři dynamické veličiny – paměťový modul, ztrátový modul i ztrátový úhel rostou se statickou výchylkou – předdeformací.

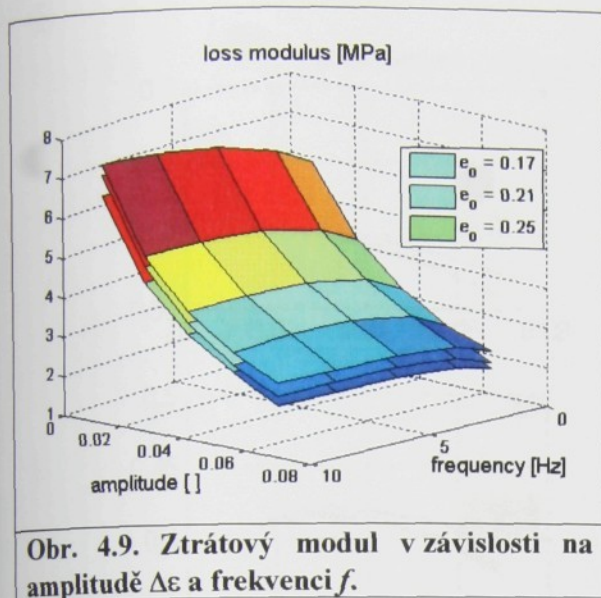
Jejich velikost roste rovněž s rostoucí frekvencí zatížení, i když tento nárůst není dramatický v rozmezí aplikovaných frekvencí.



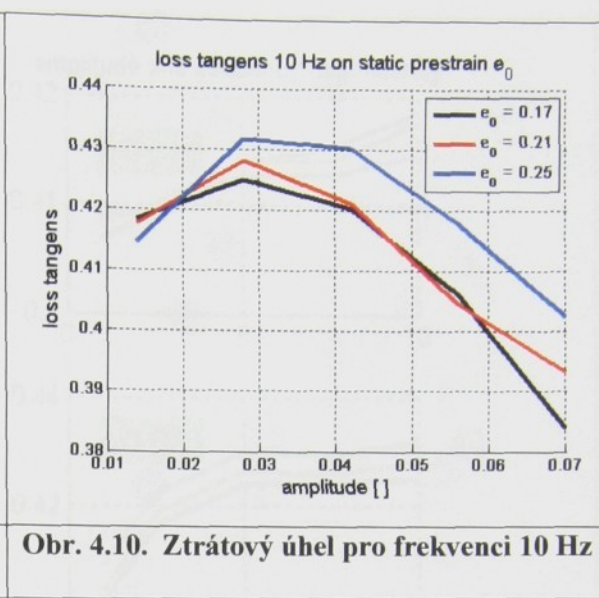
Obr. 4.7. Ztrátový úhel v závislosti na amplitudě $\Delta \epsilon$ a frekvenci f .



Obr. 4.8. Paměťový modul v závislosti na amplitudě $\Delta \epsilon$ a frekvenci f .



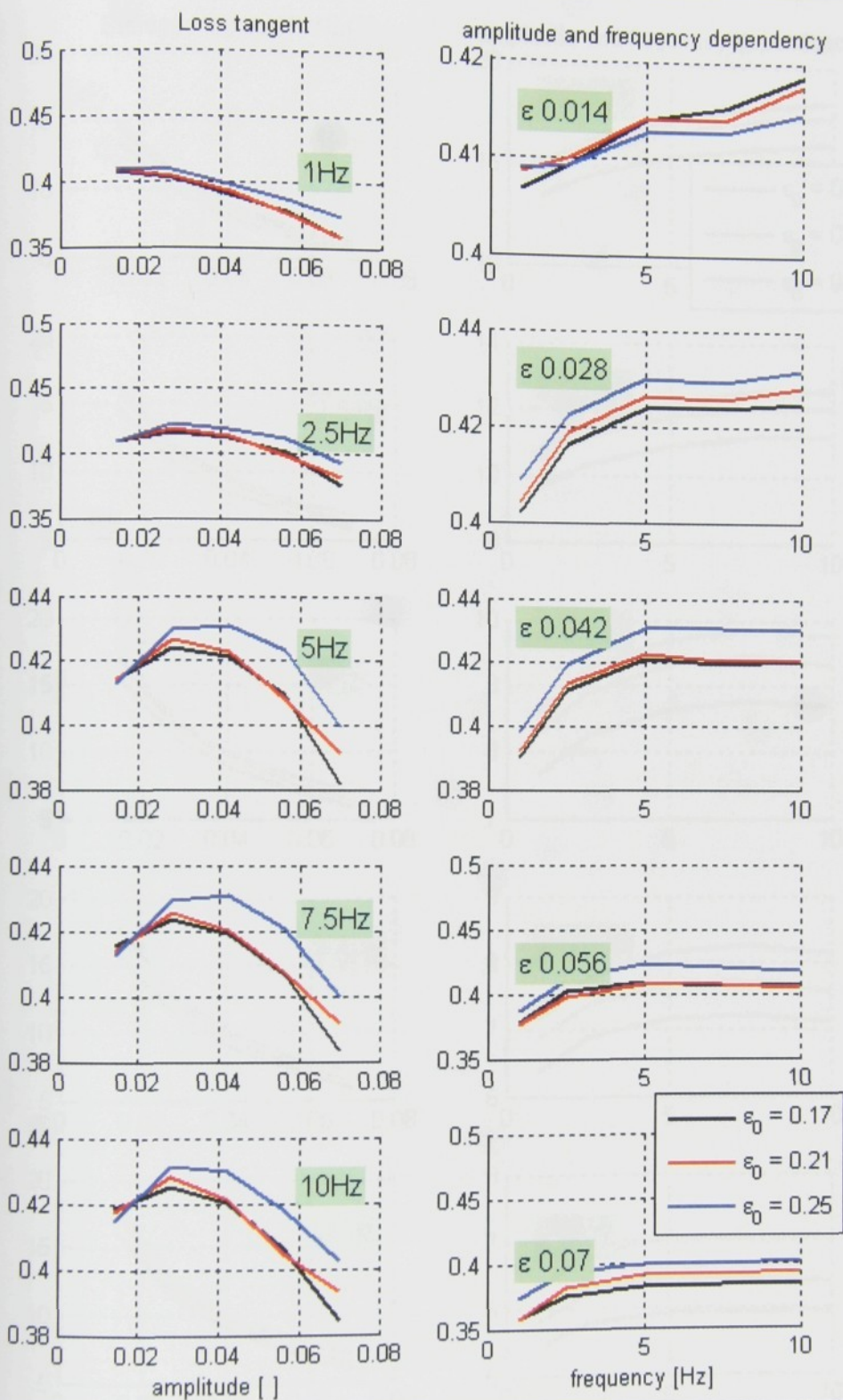
Obr. 4.9. Ztrátový modul v závislosti na amplitudě $\Delta\epsilon$ a frekvenci f .



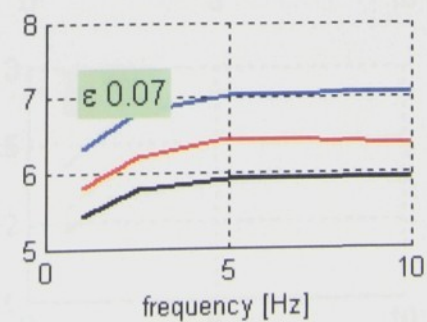
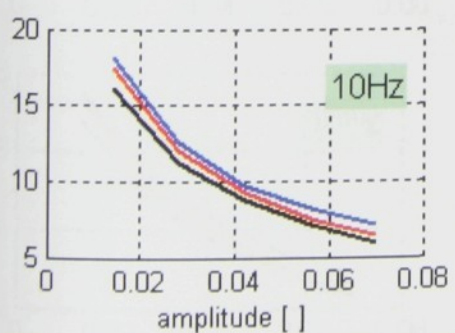
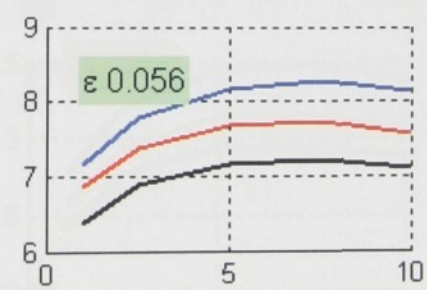
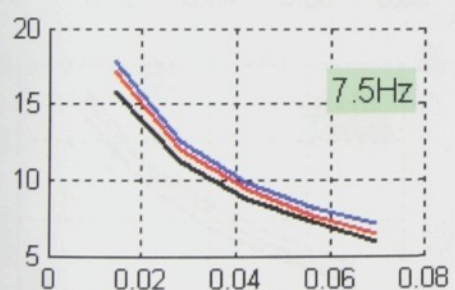
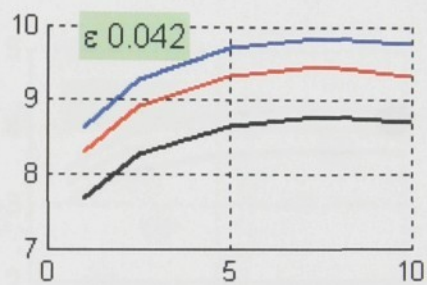
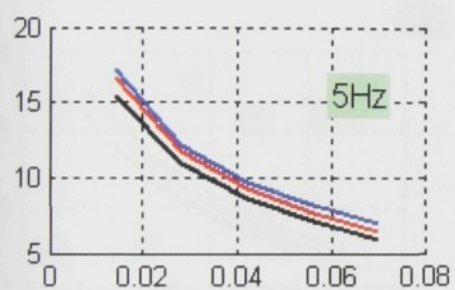
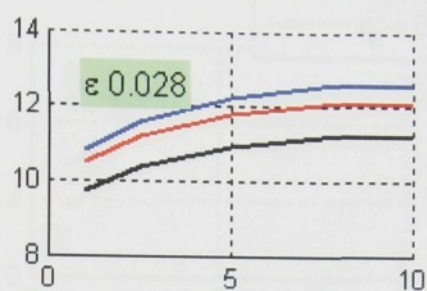
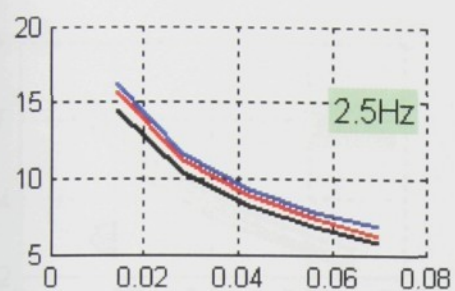
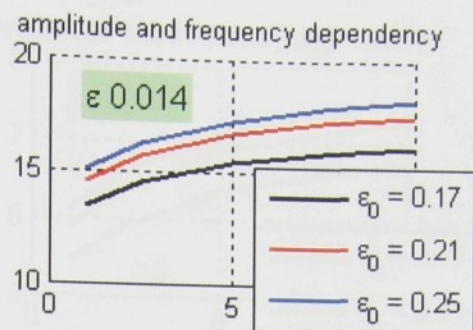
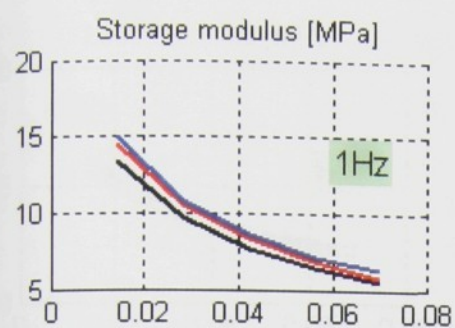
Obr. 4.10. Ztrátový úhel pro frekvenci 10 Hz

Paměťový modul i ztrátový modul klesají monotónně s rostoucí amplitudou výchylky (Payneův efekt). Závislost ztrátového úhlu na amplitudě výchylky není monotónní funkcí, ale při vyšších frekvencích nabývá maxima, a potom rovněž klesá, jak je patrné z obr. 4.7. a 4.10.

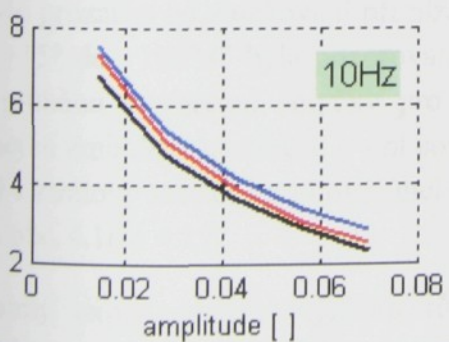
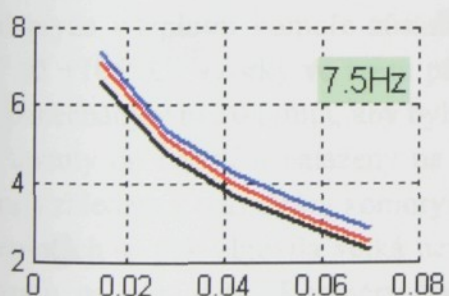
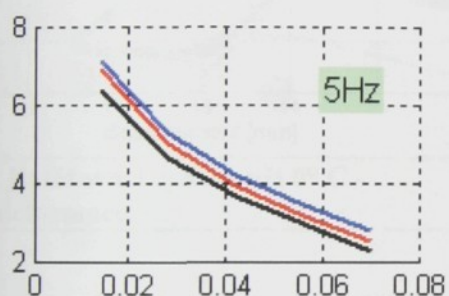
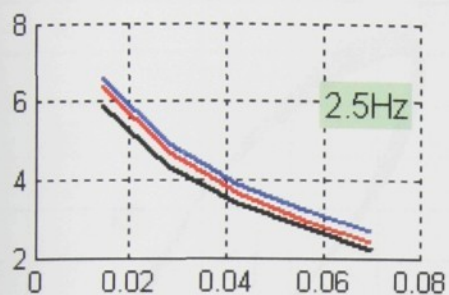
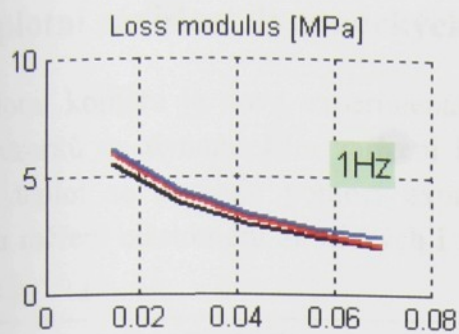
Všechny tyto závislosti jsou patrné z 3-D grafů na obr. 4.7. - 4.9. a podrobněji jsou zachyceny na obr. 4.11. - 4.13., kde v levé části je zachycena závislost veličin na amplitudě pro jednotlivé frekvence a statické předdeformace a v pravé části je frekvenční závislost pro jednotlivé amplitudy a statické předdeformace.



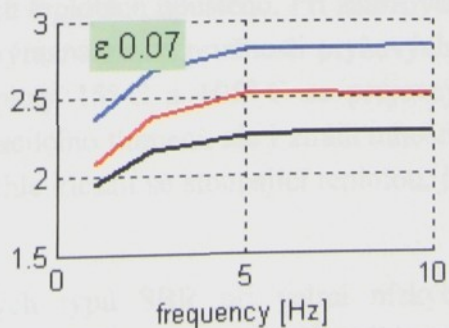
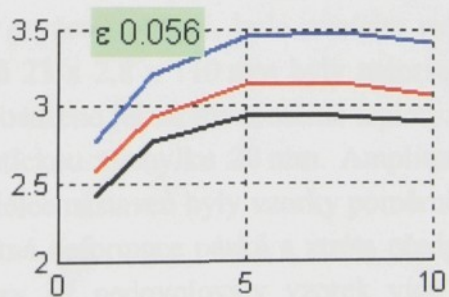
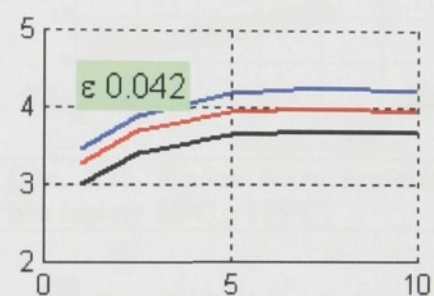
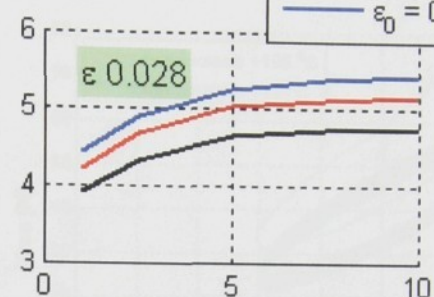
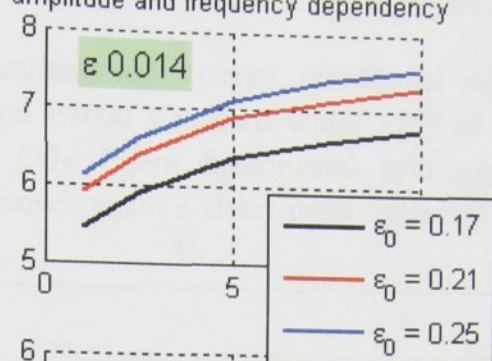
Obr. 4.11. Závislost ztrátového úhlu na amplitudě (vlevo) a frekvenci (vpravo).



Obr. 4.12. Závislost paměťového modulu na amplitudě (vlevo) a frekvenci (vpravo) .



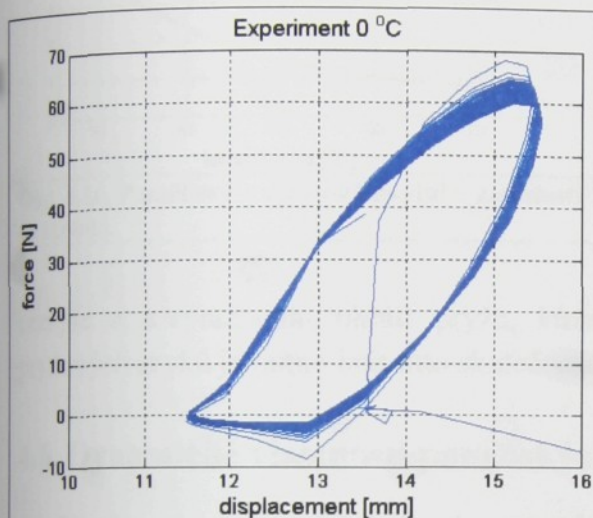
amplitude and frequency dependency



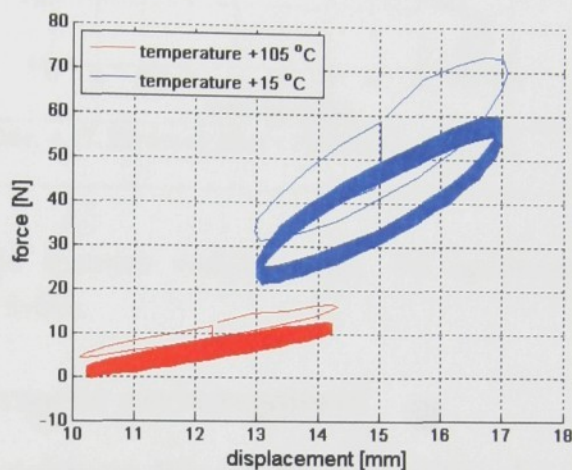
Obr. 4.13. Závislost ztrátového modulu na amplitudě (vlevo) a frekvenci (vpravo).

4.5. Teplotní závislost dynamických veličin styren-butadienové pryže.

Teplotní komora je nové experimentální zařízení naší katedry, umožňující zatěžování malých vzorků na dynamickém zařízení Instron E3000 v rozmezí teplot -75° až 250° C. Nízkých teplot se docílí pomocí expanze CO_2 . Cílem experimentů bylo vypracovat metodiku měření elastomerů za nízkých i zvýšených teplot a získat první výsledky. Styren-



Obr. 4.14. Zatěžovací cyklus při 0° C - nevratná deformace.



Obr. 4.15. Změna tvaru hysterezní smyčky pro teploty 15° C a 105° C.

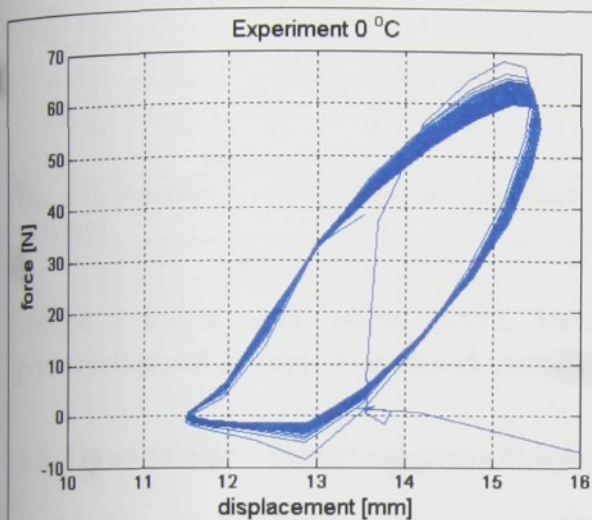
butadienová pryž má poměrně vyšší teplotu skelného přechodu - kolem -50° C. Aby zatěžování pryže v teplotní komoře zůstalo v pryžové oblasti, bylo zvoleno rozmezí teplot mezi -20° až $+105^{\circ}$ C. Vzorky ve tvaru pásků $23 \times 2,8 \times 110$ mm byly nejprve vloženy do komory a ponechány v ní 30 minut, aby bylo dosaženo jejich rovnoměrné teploty. Potom byly v komoře upnuty do čelistí a nataženy na statickou výchylku 20 mm. Amplituda výchylky byla 2 mm. Vzhledem k rozměrům komory a délce nástavců byly vzorky poměrně dlouhé. Při nízkých teplotách se pak objevila velká nevratná deformace pásků a ztráta předpětí, která je patrná z grafu na obr. 4.14. Rozměry komory již nedovolovaly vzorek více předepnout, a proto bylo prozatím od zatěžování při nízkých teplotách upuštěno. Při zatěžování v rozmezí teplot od $+15^{\circ}$ do $+105^{\circ}$ C byla pozorována výrazná ztráta pružnosti pryžových vzorků. Při srovnání průběhu hysterezní smyčky pro teploty 15° C a 105° C se projevuje s rostoucí teplotou nejen zmenšení hystereze a s ní souvisejícího tlumení, ale i ztráta tuhosti (obr. 4.15). Paměťový i ztrátový modul i ztrátový úhel rychle klesají se stoupající teplotou, jak je zřejmé z grafů na obr. 4.16 a 4.17.

Podrobný experimentální výzkum různých typů SBR při velmi nízkých teplotách (Radhakrishnan a kol., 2008) ukazuje výrazné maximum ztrátového úhlu při teplotách skelného přechodu a pokles obou dynamických modulů se stoupající teplotou.

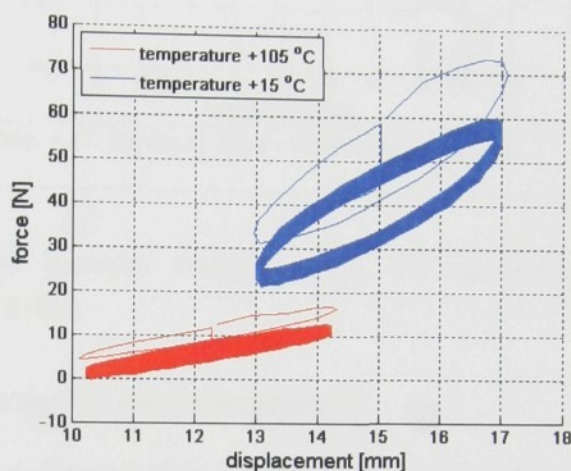
Jak je patrné z výsledků experimentů v teplotní komoře, mechanické vlastnosti pryže se dramaticky mění s teplotou. Při cyklickém zatěžování pryžových součástí dochází k disipaci

4.5. Teplotní závislost dynamických veličin styren-butadienové pryže.

Teplotní komora je nové experimentální zařízení naší katedry, umožňující zatěžování malých vzorků na dynamickém zařízení Instron E3000 v rozmezí teplot -75° až 250° C. Nízkých teplot se docílí pomocí expanze CO_2 . Cílem experimentů bylo vypracovat metodiku měření elastomerů za nízkých i zvýšených teplot a získat první výsledky. Styren-



Obr. 4.14. Zatěžovací cyklus při 0° C - nevratná deformace.

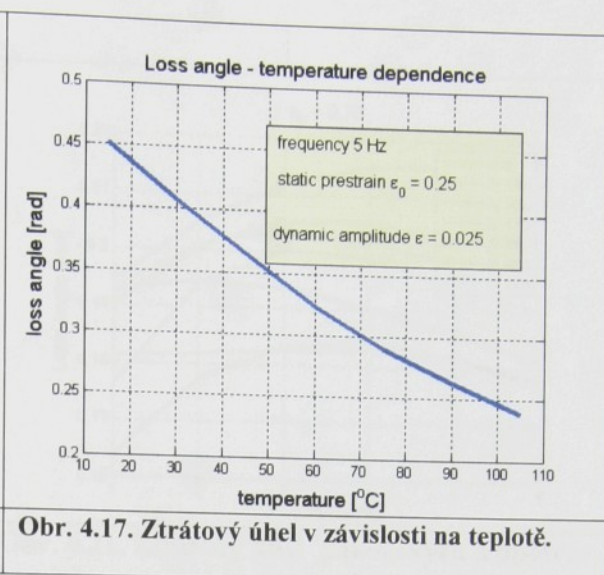
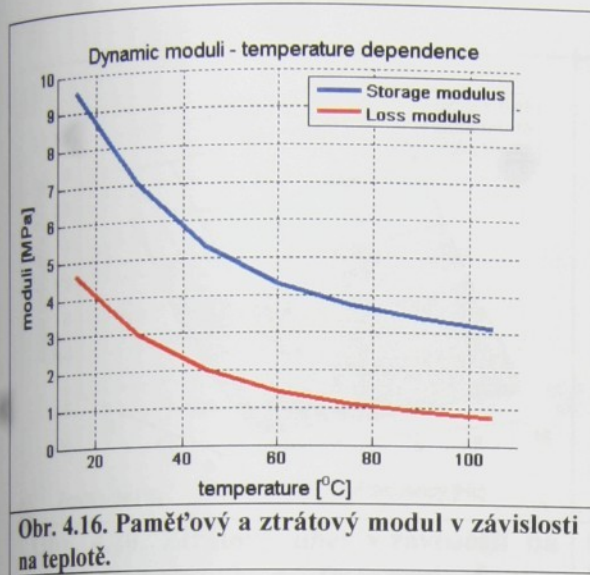


Obr. 4.15. Změna tvaru hysterezní smyčky pro teploty 15° C a 105° C.

butadienová pryž má poměrně vyšší teplotu skelného přechodu - kolem -50° C. Aby zatěžování pryže v teplotní komoře zůstalo v pryžové oblasti, bylo zvoleno rozmezí teplot mezi -20° až $+105^{\circ}$ C. Vzorky ve tvaru pásků $23 \times 2,8 \times 110$ mm byly nejprve vloženy do komory a ponechány v ní 30 minut, aby bylo dosaženo jejich rovnoměrné teploty. Potom byly v komoře upnuty do čelistí a nataženy na statickou výchylku 20 mm. Amplituda výchylky byla 2 mm. Vzhledem k rozměrům komory a délce nástavců byly vzorky poměrně dlouhé. Při nízkých teplotách se pak objevila velká nevratná deformace pásků a ztráta předpětí, která je patrná z grafu na obr. 4.14. Rozměry komory již nedovolovaly vzorek více předepnout, a proto bylo prozatím od zatěžování při nízkých teplotách upuštěno. Při zatěžování v rozmezí teplot od $+15^{\circ}$ do $+105^{\circ}$ C byla pozorována výrazná ztráta pružnosti pryžových vzorků. Při srovnání průběhu hysterezní smyčky pro teploty 15° C a 105° C se projevuje s rostoucí teplotou nejen zmenšení hystereze a s ní souvisejícího tlumení, ale i ztráta tuhosti (obr. 4.15). Paměťový i ztrátový modul i ztrátový úhel rychle klesají se stoupající teplotou, jak je zřejmé z grafů na obr. 4.16 a 4.17.

Podrobný experimentální výzkum různých typů SBR při velmi nízkých teplotách (Radhakrishnan a kol., 2008) ukazuje výrazné maximum ztrátového úhlu při teplotách skelného přechodu a pokles obou dynamických modulů se stoupající teplotou.

Jak je patrné z výsledků experimentů v teplotní komoře, mechanické vlastnosti pryže se dramaticky mění s teplotou. Při cyklickém zatěžování pryžových součástí dochází k disipaci

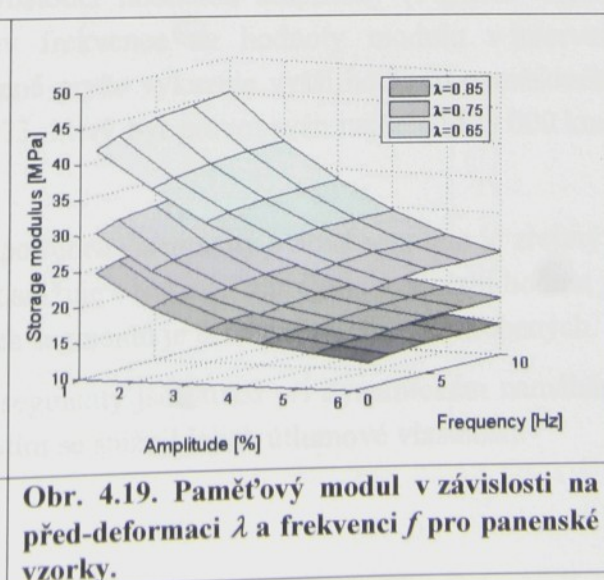
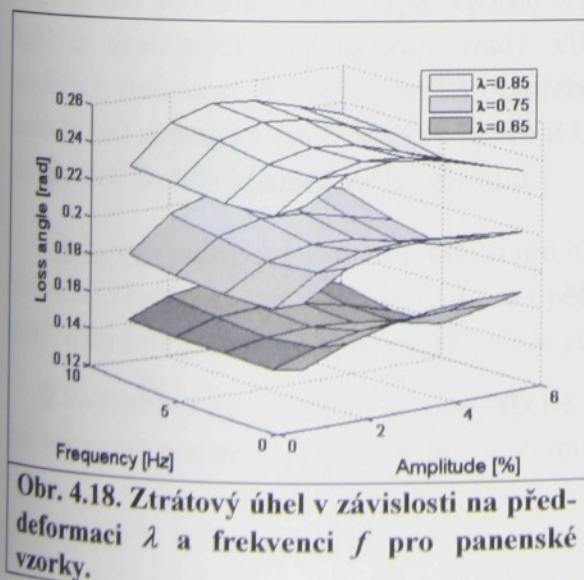


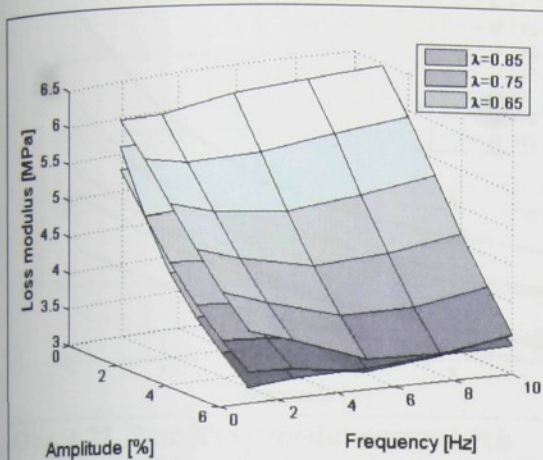
energie a k výraznému ohřátí pryže, která je špatným vodičem tepla. Při navrhování pryžových prvků je nutno brát tuto skutečnost v úvahu.

4.6. Dynamické vlastnosti panenských vzorků pryže segmentů

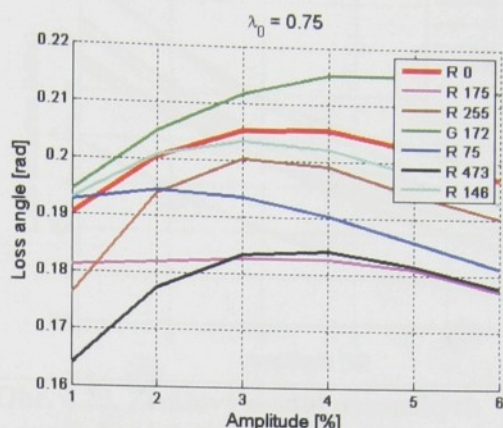
U panenských vzorků byl při vzrůstající deformaci (viz tabulka 4.2) zjištěn vliv na průběh ztrátového úhlu i dynamických modulů. Z grafu na obr. 4.18 je zřejmý vliv tří zvolených předdeformací. Ztrátový úhel výrazně klesá se vzrůstající předdeformací na rozdíl od paměťového modulu, který má stoupající tendenci (obr. 4.19). V měřeném rozsahu amplitud a frekvencí můžeme na grafu (obr. 4.18) sledovat opakující se „sedlovitý průběh“. Frekvenční závislost ztrátového úhlu má nevýrazný průběh. Svého minima dosahuje mezi hodnotami 1 až 3 Hz. Naproti tomu amplitudová závislost je významná, ztrátový úhel dosahuje maxima přibližně uprostřed intervalu aplikovaných frekvencí.

Paměťový modul panenských vzorků na obr. 4.19 roste zejména se statickou předdeformací, mírně se zvyšuje s frekvencí a významně klesá s rostoucí amplitudou.





Obr. 4.20. Ztrátový úhel v závislosti na předdeformaci λ a frekvenci f pro panenské vzorky.



Obr. 4.21. Ztrátový úhel panenských a opotřebených segmentů v závislosti na amplitudě pro předdeformaci $\lambda_0 = 0,75$ a frekvenci $f = 5$ Hz.

Ztrátový modul u panenských vzorků na obr. 4.20 má podobný průběh s jediným rozdílem – závisí velmi málo na statické předdeformaci.

4.7. Dynamické vlastnosti vzorků opotřebených segmentů

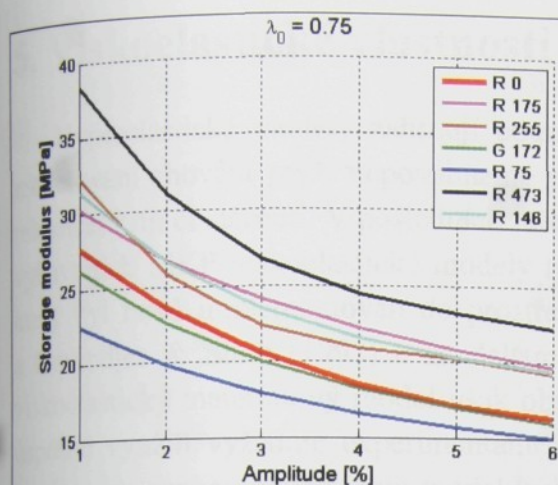
Úkolem realizovaného experimentu bylo vyšetřit vliv přirozeného stárnutí a opotřebení na mechanické vlastnosti pryžových segmentů.

Ztrátový úhel δ : porovnání ztrátových úhlů vzorků s odlišnou historií stárnutí je na obr. 4.21. V grafu je uvedena závislost na amplitudě pro statickou předdeformaci $\lambda_0 = 0,75$ a frekvenci 5 Hz. Ztrátový úhel vykazuje podobný průběh u opotřebených segmentů i u panenského. Hodnoty ztrátového úhlu u opotřebených pryží jsou nižší než u nové pryže (na obr. 4.21 červená křivka). Výjimku tvoří pouze vzorky pryže označené G172, která jediná pochází od jiného výrobce.

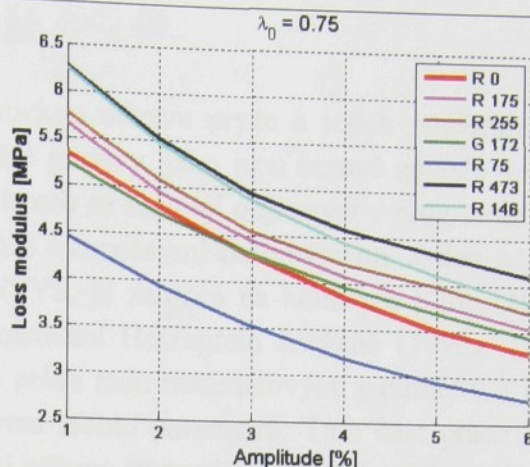
Paměťový modul: porovnání je na obr. 4.22. Z grafů je patrná klesající tendence paměťového modulu všech typů vzorků s rostoucí hodnotou amplitudy (Payneův efekt). Analýza změřených dat ukazuje malý vliv frekvence na hodnoty modulu v intervalu použitých frekvencí. Většina vzorků opotřebené pryže vykazuje vyšší hodnotu paměťového modulu než panenská pryž. Vzorek pryže R473, který byl provozován nejdéle (473 000 km), má největší hodnoty paměťového modulu.

Ztrátový modul: porovnání modulu pro opotřebené segmenty a nový segment je zřejmý z obr. 4.23. Hodnota ztrátového modulu se opět snižuje s rostoucí amplitudou. Rozdíl hodnot je malý, nicméně ztrátový modul vzorků z nových segmentů je nižší než většina opotřebených.

Závěrem lze konstatovat, že opotřebené segmenty jsou tužší při dynamickém namáhání než segmenty panenské. Opotřebením a stárnutím se snižují jejich útlumové vlastnosti.



Obr. 4.22. Paměťový modul panenských a opotřeбенých segmentů v závislosti na amplitudě pro předdeformaci $\lambda_0 = 0,75$ a frekvenci $f = 5$ Hz.



Obr. 4.23. Ztrátový modul panenských a opotřeбенých segmentů v závislosti na amplitudě pro předdeformaci $\lambda_0 = 0,75$ a frekvenci $f = 5$ Hz.

Reference:

Heinrich, G., Härtel, V., Tschimmel, J., Klüppel, M., 2004, Kinetics of filler structures in reinforced polymernetworks. In: *Polymeric Materials* 2004.

Höfer, P., Lion, A., 2009, Modelling of frequency- and amplitude-dependent material properties of filler-reinforced rubber, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 57, 500–520.

Lion, A., 1998, Thixotropic behaviour of rubber under dynamic loading histories: experiments and theory. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 46, 895–930.

Lion, A., Kardelky, C., 2004, The Payne effect in finite viscoelasticity: constitutive modelling based on fractional derivatives and intrinsic time scales, *International Journal of Plasticity*, Vol. 20, pp. 1313–1345.

Marvalová, B., Petriková, I., Mázik L., 2009, June 8 -11 Experimental measurement of the dynamic moduli of naturally aged rubber segments. 47th International Scientific Conference Experimental Stress Analysis EAN 2009. pp. 145–152. Technical University of Liberec.

Petriková, I., Marvalová, B., 2008, June 2.-5., Measurement of Friction and Damping Properties of Rubber, In: Book of contributions, 46th Inter. Scientific Conference Experimental Stress Analysis 2008. VŠB – Technical University of Ostrava, pp. 191–194.

Petriková, I., Marvalová, B., 2009 September 7 – 10, Experimental Determination of the Mechanical Properties of Naturally Aged Rubber. In: International Conference of Constitutive Model for Rubber VI. pp. 143–147. Taylor&Francis.

Radhakrishnan, C. K., Prajitha Kumari, Sujith, A., Unnikrishnan, G., 2008, Dynamic mechanical properties of styrene butadiene rubber and poly (ethylene-co-vinyl acetate) blends, *Journal of Polymer Research*, 15, pp. 161–171.

Wrana, C., Fischer, C., Härtel, V., 2003, Dynamische Messungen an gefüllten Elastomersystemen bei mono- und bimodaler sinusförmiger Anregung. *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, 56, pp. 437–443.

5. Viskoelastické vlastnosti pryží

Hyperelastické modely zahrnují pouze elastickou odezvu pryže a jejich použitím pro modelování chování pryží nepostihneme podstatné projevy, jako jsou časově závislé jevy – relaxace, kříp či stárnutí. V posledních několika letech se začínají objevovat v programových vybaveních MKP viskoelastické modely materiálu s konečnými deformacemi. Jeden z nich, který byl nově implementován do prostředí ANSYS, je založen na konceptu Simo (1987) a Govindjee & Simo (1992) a na dalším rozpracování Holzapfela & Simo (1996). Tento viskoelastický materiálový model však obsahuje celou řadu materiálových parametrů a jeho úspěšné využití vyžaduje experimentální stanovení těchto parametrů. Tato část práce byla motivována snahou použít tento model k simulaci odezvy tramvajových pryžových segmentů na kombinaci statického a cyklického zatížení. V první části kapitoly je uveden stručný popis materiálového modelu se zřetelem na experimentální určení jeho parametrů z jednoosých relaxačních testů. Druhá část je věnována experimentálnímu měření a vyhodnocení parametrů modelu.

5.1. Model pro viskoelastický materiál s konečnými deformacemi

Viskoelastický materiálový model s konečnými deformacemi (Holzapfel & Simo, 1996) zohledňuje velký rozdíl mezi objemovou a smykovou (izochorickou) deformací elastomerů. Model je založen na Helmholtzově funkci volné energie Ψ , která závisí nejen na tenzoru deformace $\mathbf{C}$, ale i na vnitřních deformačních proměnných označených jako Γ_α . Tato funkce má 3 části (Holzapfel 2000):

$$\Psi(\mathbf{C}, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m) = \Psi_{\text{VOL}}^\infty(J) + \Psi_{\text{ISO}}^\infty(\bar{\mathbf{C}}) + \sum_{\alpha=1}^m \gamma_\alpha(\bar{\mathbf{C}}, \Gamma_\alpha). \quad (5.1)$$

První dva členy v rovnici (5.1) charakterizují rovnovážný stav a popisují objemovou a izochorickou pružnou odezvu pro čas $t \rightarrow \infty$. Třetí člen je disipativní potenciál popisující viskoelastickou odezvu. Právý Cauchy-Greenův tenzor deformace $\mathbf{C}$ je multiplikativně rozložen na objemovou část a izochorickou část $\bar{\mathbf{C}}$:

$$\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C}, \quad (5.2)$$

kde J je $\det(\mathbf{F})$.

Druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí je derivací Helmholtzovy funkce (5.1) podle tenzoru deformace $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C}, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m)}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{S}_{\text{VOL}}^\infty + \mathbf{S}_{\text{ISO}}^\infty + \sum_{\alpha=1}^m \mathbf{Q}_\alpha. \quad (5.3)$$

kde $\mathbf{S}_{\text{VOL}}^\infty$ a $\mathbf{S}_{\text{ISO}}^\infty$ je objemová a izochorická odezva napětí a $\mathbf{Q}_\alpha$ je vnitřní proměnná tzv. overstress, což je napětí typu druhého Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí.

Pro vnitřní proměnnou je třeba stanovit evoluční rovnici. Vydeme-li ze zobecněného Maxwellova reologického modelu, lze tuto evoluční rovnici zapsat jako:

$$\dot{Q}_\alpha + \frac{Q_\alpha}{\tau_\alpha} = \dot{S}_{ISO_\alpha}, \quad (5.4)$$

kde τ_α je relaxační čas a podle Simo (1987) předpokládáme, že

$$S_{ISO_\alpha} = \beta_\alpha^\infty S_{ISO}^\infty(\bar{C}) = \beta_\alpha^\infty 2 \frac{\partial \Psi_{ISO}^\infty(\bar{C})}{\partial C}, \quad (5.5)$$

kde β_α^∞ je bezrozměrný materiálový parametr, který je nutné určit experimentálně. Řešení evoluční rovnice (5.4) v uzavřeném tvaru je dáno konvolučním integrálem

$$Q_\alpha = \exp(-T/t_\alpha) Q_{\alpha 0} + \int_0^T \exp(-(T-t)/t_\alpha) \beta_\alpha^\infty \dot{S}_{ISO}^\infty(t) dt \quad (5.6)$$

5.2. Jednorozměrný tvar viskoelastického modelu

Parametry viskoelastického modelu jsou určovány z výsledků relaxačních testů v jednoosém tlaku. Pro potřeby experimentálního určení parametrů je třeba třídimenzionální model upravit na jednorozměrný. Předpokládáme elastické části Helmholtzovy funkce ve tvaru Mooney-Rivlinova modelu

$$\Psi_{VOL}^\infty(J) = \frac{1}{d}(J-1)^2, \quad \Psi_{ISO}^\infty(\bar{C}) = c_1(\bar{I}_1 - 3) + c_2(\bar{I}_2 - 3), \quad (5.7)$$

kde $\bar{I}_1$ a $\bar{I}_2$ jsou invarianty modifikovaného Cauchy-Greenova tenzoru deformace $\bar{C}$ a parametry c_1 , c_2 a d budou určeny z dlouhodobých relaxačních experimentů v jednoosém tlaku. Je-li vzorek podroben jednoosému homogennímu tlaku, pak hlavní protažení $\lambda_1 < 1$ a protažení $\lambda_2 = \lambda_3 > 1$. Pro izotropní materiál je $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-\nu}$, kde předpokládáme $\nu = 0,485$ pro mírně stlačitelný materiál. Deformační gradient pro jednoosé zatížení F je ve tvaru:

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Odpovídající pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace v rovnici (5.1) a jeho první invariant jsou:

$$\bar{C} = J^{-\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}, \quad J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad \bar{I}_1 = J^{-\frac{2}{3}} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2). \quad (5.9)$$

Modifikovaná rovnovážná izochorická část druhého Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí v (5.3) je:

$$\bar{\mathbf{S}}_{ISO}^{\infty} = \beta_{\alpha}^{\infty} 2 \frac{\partial \Psi_{ISO}^{\infty}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = 2(c_1 + c_2 \bar{I}_1) \mathbf{1} - 2c_2 \bar{\mathbf{C}}. \quad (5.10)$$

Složky druhého Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí $\mathbf{S}_{VOL}^{\infty}$ a $\mathbf{S}_{ISO}^{\infty}$ v (5.3) pro $\lambda_2 = \lambda_3$ jsou:

$$\mathbf{S}_{VOL}^{\infty} = J(J-1) \frac{2}{d} \text{diag} \begin{bmatrix} \lambda_1^{-2} \\ \lambda_2^{-2} \\ \lambda_2^{-2} \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{S}_{ISO}^{\infty} = \frac{2}{3} J^{\frac{2}{3}} \text{diag} \begin{bmatrix} 2c_1 \left[1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \right] + 2c_2 \lambda_2^2 J^{-\frac{2}{3}} \left[1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \right] \\ c_1 \left[1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \right] + c_2 \lambda_2^2 J^{-\frac{2}{3}} \left[1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \right] \\ c_1 \left[1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \right] + c_2 \lambda_2^2 J^{-\frac{2}{3}} \left[1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \right] \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Celkový druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí je dán součtem objemové, izochorické a overstressové části ve vztahu (5.2). Boční povrchy experimentálních vzorků jsou bez zatížení, pak druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí v experimentu je

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

kde ostatní hlavní složky tenzoru napětí jsou nulové $S_{22} = S_{33} = 0$.

Dosadíme-li do této rovnice za S_{22} z (5.11) a (5.12), máme:

$$S_{22} = S_{VOL_{22}}^{\infty} + S_{ISO_{22}}^{\infty} + \sum_{\alpha=1}^m Q_{\alpha_{22}} = 0, \quad (5.14)$$

$$J(J-1) \frac{2}{d} \lambda_2^{-2} + \frac{2}{3} J^{\frac{2}{3}} \left\{ c_1 \left[1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \right] + c_2 \lambda_2^2 J^{-\frac{2}{3}} \left[1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \right] \right\} + \sum_{\alpha=1}^m Q_{\alpha_{22}} = 0.$$

Z rovnice (5.14) můžeme vyjádřit objemový parametr $d=2/K$, kde K je objemový modul. Po dosažení d vyjádřeného z rovnice (5.14) do výrazu pro hlavní napětí S_{11} dostáváme hledané vyjádření napětí ve směru jednoosého zatížení

$$S_{11} = S_{11}^{\infty} + \sum_{\alpha=1}^m Q_{\alpha 11}, \quad (5.15a)$$

které je součtem rovnovážné a viskoelastické části:

$$S_{11}^{\infty} = 2J^{\frac{2}{3}} \left\{ c_1 \left[1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \right] + c_2 \lambda_2^2 J^{\frac{2}{3}} \left[1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \right] \right\}, \quad (5.15b)$$

$$Q_{\alpha 11} = \int_0^T \exp(-(T-t)/\tau_{\alpha}) \beta_{\alpha}^{\infty} \dot{S}_{11}^{\infty}(t) dt, \quad (5.15c)$$

s počáteční podmínkou:

$$Q_{\alpha 11}|_0 = 0.$$

Materiálové parametry v rovnicích (5.15) c_1 , c_2 , β_{α}^{∞} , τ_{α} byly stanoveny pomocí relaxačních experimentů, v nichž rovnovážná síla byla měřena během 20 minut trvání relaxace. Viskoelastické chování bylo modelováno pro $\alpha = 2$ relaxační členy s odpovídajícími relaxačními časy τ_{α} a faktory volné energie β_{α} .

5.3. Relaxační testy

Všechny testy probíhaly na vzorcích o rozměrech hranolu 47 x 23 x 25 mm, které byly pořízených z nových segmentů používaných na tlumení tramvajových kol. Každý vzorek byl podroben předzatěžovacímu cyklu pro odstranění Mullinsova jevu.

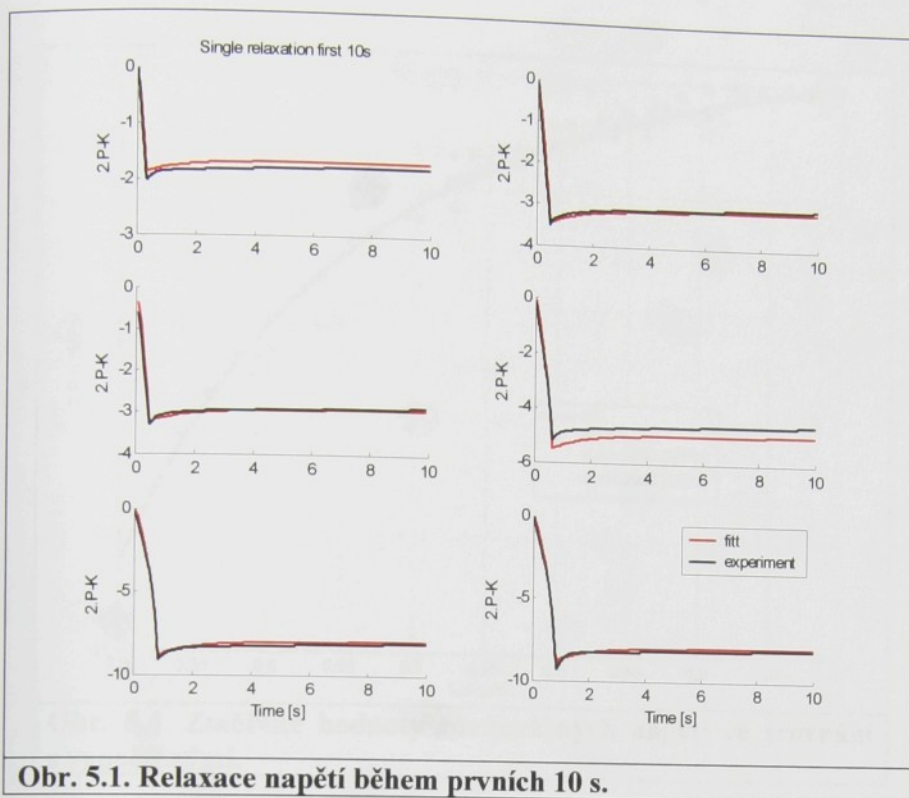
Pokles přítláčné síly pro různé hodnoty deformace byl měřen v jednoduchých i ve víceukových relaxačních testech. Rychlost stlačování během zatěžování byla 0,05 mm/s pro tlakové zatížení. Relaxace síly byla zaznamenávána po dobu 1200 s.

Z výsledků experimentů byla určena protažení λ_1 v zatěžujícím směru a složky S_{11} druhého Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí testovaných vzorků:

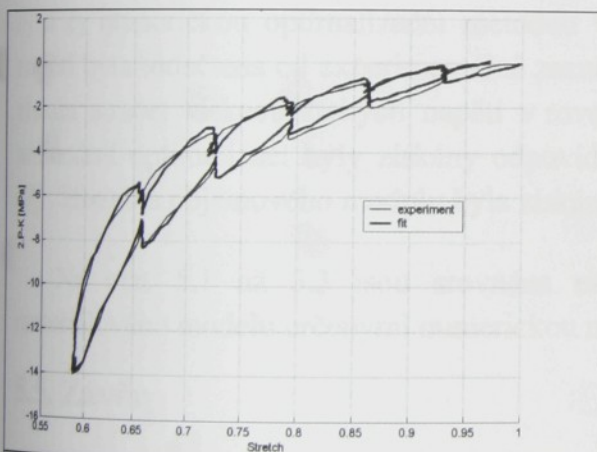
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\Delta / L_0 + 1 \\ S_1 &= -P / A_0 / \lambda_1 \end{aligned} \quad (5.16)$$

kde Δ je tlaková deformace vzorků, P je tlaková síla, A_0 a L_0 jsou počáteční plocha průřezu a délka vzorku.

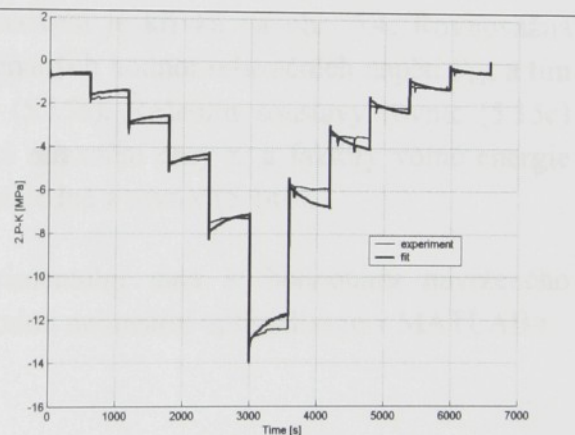
Jednoduché relaxační testy jsou zřejmé z obr. 5.1, kde je časový průběh síly pro různá stlačení vzorku. Všechny křivky vykazují přítomnost velmi rychlé relaxace napětí během prvních 10 s následované velmi pomalou relaxací (Haupt & Sedlan, 2001). Je zřejmé, že relaxační testy pro vyšší hodnoty deformace mají větší hodnoty overstressu a rychlejší relaxaci napětí než při nižších hodnotách deformace, jak uvádí rovněž Amin a kol. (2005).



Obr. 5.1. Relaxace napětí během prvních 10 s.



Obr. 5.2. Průběh vícekrokového relaxačního testu v závislosti na deformaci.

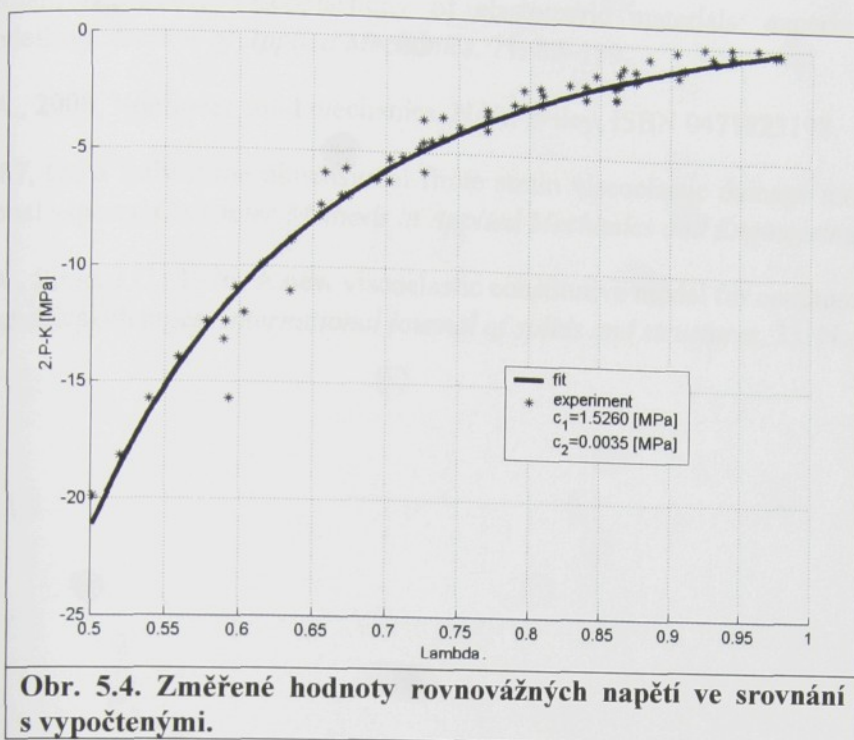


Obr. 5.3. Časový průběh vícekrokového relaxačního testu.

Rovnovážný stav nastane po nekonečně dlouhé relaxační době. Napětí naměřená po 1200 s jsou přibližně rovna rovnovážným napětím. Rozdíl mezi okamžitým napětím a rovnovážným napětím je overstress. Postupná relaxace je zachycena na obr. 5.2 a 5.3. Stlačení vzorku bylo postupně zvyšováno a potom postupně snižováno po 0,5 mm. Vidíme zde rozdílný průběh relaxace ve vzestupné a sestupné větvi. Na obr. 5.2 je patrné, že napětí při postupném zatěžování a odlehčování relaxuje ke stejné rovnovážné hodnotě.

5.4. Vyhodnocení měření

Změřené hodnoty napětí na konci relaxačních dob jsou považovány za rovnovážná napětí S_{11}^{∞} . Body na obr. 5.4 ukazují rovnovážná napětí $S_{VOL}^{\infty} + S_{ISO}^{\infty}$.



Soustava nelineárních rovnic (5.15b) byla řešena samostatně pro získání hodnot konstant c_1 a c_2 numerickou optimalizační metodou výsledkem je křivka na obr. 5.4. Rovnovážná napětí byla odečtena od experimentálně zaznamenaných hodnot relaxačních napětí S_{11} , a tím získán součet viskoelastických napětí v rovnici (5.15a). Řešením soustavy rovnic (5.15c) nelineární optimalizací byly získány odpovídající relaxační časy τ_α a faktory volné energie β_α^∞ . Hodnota objemového modulu byla získána následně z rovnic (5.14b).

Na obr. 5.1 až 5.3 jsou srovnána experimentální data s hodnotami navrženého materiálového modelu určenými numerickou metodou nelineární optimalizace v MATLABu.

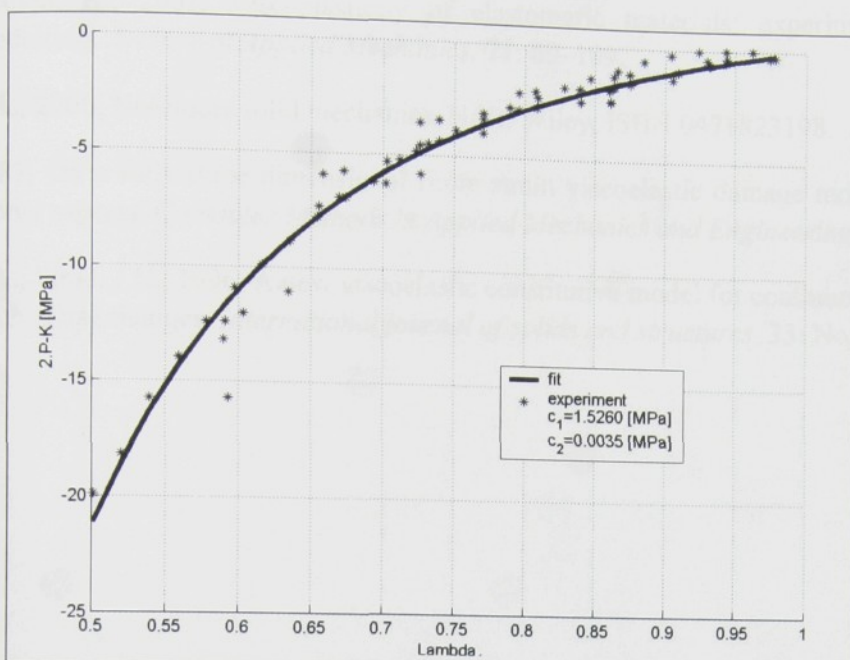
5.5. Závěr

Užitím teorie viskoelastivity byly modelovány jednoduché a víceetapové relaxační testy pryžových materiálů plněných sazemí. Parametry modelu byly určeny z relaxačních dat použitím nelineární optimalizační metody. Navržený model byl poté porovnán s experimentálními hodnotami pro pryže s rozdílnou historií zatížení. Ukazuje se, že model vykazuje dobrou shodu pro různá relaxační chování.

Reference:

Amin, A.F.M.S., Lion, A., Sekita, S., Okui, Y., 2006, Nonlinear dependence of viscosity in modelling the rate dependent response of natural and high damping rubbers in compression and shear: Experimental identification and numerical verification. *International Journal of Plasticity* 22: 1610–1657.

Govindjee, S., Simo, J.C., 1992, Mullins' effect and strain amplitude dependence of the storage modulus. *International Journal of Solids and Structures*. 29: 1737–1751.



Obr. 5.4. Změřené hodnoty rovnovážných napětí ve srovnání s vypočtenými.

Soustava nelineárních rovnic (5.15b) byla řešena samostatně pro získání hodnot konstant c_1 a c_2 numerickou optimalizační metodou výsledkem je křivka na obr. 5.4. Rovnovážná napětí byla odečtena od experimentálně zaznamenaných hodnot relaxačních napětí S_{11} , a tím získán součet viskoelastických napětí v rovnici (5.15a). Řešením soustavy rovnic (5.15c) nelineární optimalizací byly získány odpovídající relaxační časy τ_a a faktory volné energie β_a^∞ . Hodnota objemového modulu byla získána následně z rovnic (5.14b).

Na obr. 5.1 až 5.3 jsou srovnána experimentální data s hodnotami navrženého materiálového modelu určenými numerickou metodou nelineární optimalizace v MATLABu.

5.5. Závěr

Užitím teorie viskoelastivity byly modelovány jednoduché a víceukové relaxační testy pryžových materiálů plněných sazemi. Parametry modelu byly určeny z relaxačních dat použitím nelineární optimalizační metody. Navržený model byl poté porovnán s experimentálními hodnotami pro pryže s rozdílnou historií zatížení. Ukazuje se, že model vykazuje dobrou shodu pro různá relaxační chování.

Reference:

Amin, A.F.M.S., Lion, A., Sekita, S., Okui, Y., 2006, Nonlinear dependence of viscosity in modelling the rate dependent response of natural and high damping rubbers in compression and shear: Experimental identification and numerical verification. *International Journal of Plasticity* 22: 1610–1657.

Govindjee, S., Simo, J.C., 1992, Mullins' effect and strain amplitude dependence of the storage modulus. *International Journal of Solids and Structures*. 29: 1737–1751.

Haupt, P., Sedlan, K., 2001, Viscoplasticity of elastomeric materials: experimental facts and constitutive modelling. *Archive of Applied Mechanics*. 71: 89–109.

Holzapfel, G. A., 2000, Nonlinear solid mechanics. N.Y.: Wiley, ISBN 0471823198.

Simo, J.C., 1987, On a fully three dimensional finite strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60: 153–173.

Holzapfel, G. A., Simo, J.C., 1996, A new viscoelastic constitutive model for continuous media at finite thermomechanical changes. *International journal of solids and structures*. 33: No. 20-22, pp. 3019-34.

6. Tribologické vlastnosti pryží

6.1. Úvod

Třecí vlastnosti elastomerů jsou intenzivně zkoumány již téměř půl století. Nejstarší studie byly zaměřeny na změření a na přehledné tabelování třecích vlastností pryže pro nejčastější aplikace jako jsou pneumatiky, stěrače, těsnění i viskoelastická adheziva.

Snaha po hlubším pochopení základů tření pryže počíná v padesátých letech minulého století, kdy se dochází k závěru, že klasický Coulombův zákon, kterým lze popsat tření mezi relativně tuhými povrchy, neplatí pro tření mezi tuhým povrchem a pryží. Odlišnost třecích vlastností pryže od třecích vlastností ostatních materiálů spočívá zejména v tom, že pryže mají nízký modul pružnosti a velké vnitřní tření, které má za následek značnou disipaci energie.

Do dnešního dne zůstává částečně neobjasněný vliv celé řady parametrů, které řídí frikční chování elastomerů. Vychází se z předpokladu, že tření pryžových materiálů je určováno dvěma hlavními vlivy a to adhezí a hysterezí. Zatímco adhezní složka tření je způsobena mezimolekulárními vazbami, které vznikají mezi dvojicí frikčních povrchů (Sills, 2007), hysterezní složka tření je výsledkem energetických ztrát uvnitř objemu pryžového materiálu způsobených cyklickým buzením části objemu pryže při smýkání po nerovnostech – asperitách – drsného povrchu tuhého materiálu.

Tření pryže na tuhé drsné podložce je důležité v mnoha technických aplikacích, avšak vztah mezi třením a viskoelastickými či termodynamickými vlastnostmi pryže a charakteristikami drsnosti povrchu není stále kvantifikován. Přes současný pokrok ve stanovení role kontaktní mechaniky a vlivu povrchové volné energie je stále ještě obtížné předpovědět tření elastomerů v inženýrské praxi.

Řešením je série experimentů, které však jsou časově i finančně náročné. Výsledkem výzkumu by mělo být stanovení fyzikálních konceptů tření pryže, které vážou třecí sílu, a základní fyzikální veličiny, jakou je komplexní modul, který lze stanovit experimentálně. Podle literatury existují dva základní mechanismy, které se podílejí na tření pryže:

- 1) adhezivní interakce mezi povrchovými vrstvami, která závisí na povrchové energii pryže a třecí vrstvy,
- 2) hysteretická ztráta energie, která je vyvolána deformací pryže povrchovými výstupky (nerovnostmi) substrátu.

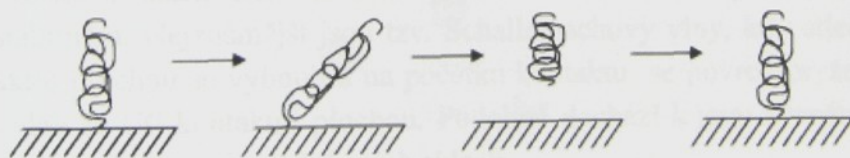
Stěžejní prací je článek Grosch (1963), který popisuje experimentální měření tření několika typů pryže na tvrdých površích v širokém pásmu teplot a vzájemných rychlostí. Nejvyšší rychlost nepřesáhla několik centimetrů za vteřinu, takže teplo vznikající v důsledku tření bylo zanedbatelné. Výsledky ukázaly, že tření se zvyšuje s rostoucí rychlostí do určitého maxima a dále pak klesá. Aplikace transformace Williams, Landel & Ferry (1955) ukázala, že třecí chování pryže, která klouže s různou rychlostí a za různé teploty po daném tvrdém

povrchu, může být popsáno jedinou křivkou tzv. „master-curve“ v závislosti na teplotě skelného přechodu dané pryže. Tyto křivky vykazují dva vrcholy pro hrubé abrazivní povrchy, jeden z nich se objevuje při rychlosti smýkání, která odpovídá frekvenci, se kterou výstupky tvrdého povrchu deformují povrch pryže. Toto maximum se u hladkých povrchů neobjevuje a tedy odráží pouze disipační ztráty, které vznikají při pohybu pryže přes výstupky (asperity) tvrdého substrátu. Druhé maximum, kterém se objevuje při mnohem nižších rychlostech odpovídá samostatnému maximu, které se objevuje při smýkání po hladkém povrchu. Když Grosh rozptýlil na povrchu substrátu jemný pudr MgO , toto maximum se neobjevilo a je tedy přičítáno molekulární adhezi. Grosh dovodil, že tření mezi pryží a tvrdým substrátem vzniká v důsledku adhezní a deformační disipace a že oba procesy jsou úzce spojeny s viskoelastickými vlastnostmi pryže. Adheze je dominantní při nižších rychlostech tření pryže na suchých hladkých substrátech jako je sklo. Hysteretický mechanismus je charakteristický pro drsné povrchy a pro tření s lubrifikantem. Grosch zjistil, že koeficient tření se mění podle typu třecí plochy a že koeficient má široké (rozplzlé) maximum při zvyšující se rychlosti. Toto maximum je spojené se skelným přechodem pryže při velkých frekvencích, kdy nastává zvýšená disipace energie. Třecí síla klesá se zvyšující se teplotou pryže.

1) Grosch identifikoval souvislost mezi rychlostí a frekvencí a charakteristickou škálou (měřítkem) drsnosti.

2) Určil pro tření na skle charakteristickou škálu (měřítko) spojenou se základní skokovou vzdáleností několika nanometrů, tj. vzdálenost o kterou pryžové řetězce (molekulové) poskočí během tření.

V důsledku Groschových zjištění přehodnotil a zpřesnil Schallamach (1953, 1963) svůj model tření mezi dvěma povrchy a jeho nemonotónní závislosti na rychlosti. Prokázal, že suché tření hladkých povrchů je převážně adhezní a je řízeno vznikem a zánikem vazeb pryžových polymerních řetězců k tuhému povrchu.



Obr. 6.1.

Podle Schallamacha (obr. 6.1) se pryžové řetězce stále přilepují a odtrhávají od povrchu hladkého substrátu a provádějí malé skoky ve směru pohybu, neboť podle Eyringova modelu reakčních rychlostí pravděpodobnost odtržení polymerního řetězce závisí na frekvenčním faktoru, který exponenciálně roste s velikostí přítláčné síly, a na počtu zúčastněných řetězců, který klesá s kluznou rychlostí. Kombinace těchto dvou vlivů způsobí, že tření v závislosti na rychlosti nejprve roste, pak dosáhne svého maxima a posléze klesá.

Chernyak a Leonov (1986) zpřesnili Schallamachův model tření pryže tím, že použili rovnovážný stochastický adhezivní model kinetiky odtrhávání řetězců. Podle tohoto modelu vnější síla natahuje polymerní řetězce, a to vede k jejich odtrhávání od povrchu substrátu. Odtrhávané řetězce disipují elastickou energii nahromaděnou během jejich natahování a znovu přilnou k povrchu substrátu. Schallamachův model i model Chernyaka a Leonova jsou založeny čistě na předpokladu adhezivního tření.

Savkoor (1965) podobně jako Ludema a Tabor (1966) dovodili, že i tření, které vypadá jako čistě adhezivní, má ještě další složku. Savkoor navrhl hybridní model, který předpokládal, že výstupky na povrchu substrátu, které mají velikost srovnatelnou s rozměry molekul pryže, jsou v adhezivním kontaktu s povrchem pryže. V kontaktu tak vzniká struktura sestávající z ostrůvků adhezivních vazeb. Když je aplikována smyková síla, tato struktura akumuluje elastickou energii, dokud není překonána adhezivní energie. V takovém okamžiku se strukturou s adhezivními vazbami začne šířit trhлина se smykovým módem.

Tyto modely ještě stále nebraly v úvahu viskózní vlastnosti elastomerů. Aktivační energie třecího procesu byla stále přisuzována pouze uvolňování adhezivních vazeb.

Tření však nemusí být ovlivněno pouze adhezí. Realistická představa o dějích v kontaktu mezi povrchy musí zahrnovat viskoelastické chování elastomerů během smýkání, to znamená rovněž intermolekulární klouzání – klouzání molekulových řetězců uvnitř objemu pryže. Mezimolekulární klouzání řetězců a vnitřní tření je objemový relaxační proces, který může být rovněž popsán Eyringovým modelem.

Jestliže vezmeme v úvahu jak intermolekulární relaxaci, která je objemovou vlastností elastomeru zatíženého smykem, tak i adhezivní povrchový proces vytváření a porušování vazeb mezi povrchy, pak můžeme považovat tření elastomerů za tribo-reologický proces. Oba procesy mají svoji vlastní časovou škálu, a tedy závisí na experimentálním časovém okně - na rychlosti a teplotě, zda se uplatní jen jeden z těchto dvou procesů, či oba zároveň.

V důsledku nízkého elastického modulu pryže dochází často při klouzavém tření k elastickým nestabilitám. Nejznámější jsou tzv. Schallamachovy vlny, kdy stlačený povrch pryže před kontaktní plochou se vyboulí a na počátku kontaktu se povrch pryže odtrhne od substrátu, a tato vlna se šíří kontaktní plochou. Podobně dochází k jevu zvanému stick-slip běžnému při pohybu stěračů na automobilových sklech.

V nedávné době Persson (2000) navrhl teorii pro tření na relativně hladkých površích. Je založena na faktu, že povrchy nejsou hladké na všech škálách, i když na makroskopické škále se zdají být hladké. I hladký povrch skla je drsný na nano-škále. Persson ukázal, že v důsledku svého nízkého modulu vyplňuje pryž dutiny povrchu substrátu, neboť povrchová energie mezi oběma vrstvami pryže deformuje. Při nízkých vzájemných rychlostech to vede k adhezí vyvolanému hysteretickému tření, neboť adheze nutí pryž vyplňovat povrchový profil s drsností s měřítkem v rozmezí nanometru. Jeho výsledky pokusů s třením na hladkých površích jsou v souladu s touto teorií. Takže teorie o poskakování řetězců není nutná k vysvětlení tření na hladkých površích a Groschových třecích experimentů.

Persson považuje za dominantní faktor hysteretické ztráty energie v důsledku deformace pryže povrchovými výstupky. Tření tedy závisí na morfologii povrchu a na její invarianci na různých škálách – tj. na fraktálním popisu geometrie povrchu. Podle tohoto konceptu je tvar výstupků a dutin povrchu sobě podobný z hlediska statistiky. Je nutné shromáždit základní geometrické údaje pro popis takových samoafinních povrchů, které jsou potřebné k pochopení třecí dynamiky pryže, jež je výsledkem stochastického buzení pryže během klouzání po povrchu s širokou škálou drsnosti. Perssonův přístup se uplatní zejména při výzkumu a modelování tření pneumatik za nejrozumnějších pomínek.

Podobný model vyvinuli Heinrich a Klüppel (2000), kteří vycházejí z teorie objemového hysteretického tření a dynamického Rouseova modelu pro oblast přechodu mezi pryžovým a skelným stavem. Tvrdý substrát popisují jako samoafinní drsný povrch, který má reprezentovat reálné povrchy s výstupky, jejichž rozměry mají různá měřítka. Třecí koeficient je funkcí rychlosti smýkání a typických parametrů povrchu (dimenze povrchových fraktálů, korelačních délek profilu povrchu). Autoři dále ukázali korelaci koeficientu tření s viskoelastickým ztrátovým modulem pryže.

Pro fenomenologický popis viskoelastického chování pryže se používá řada reologických modelů. Lze je použít i pro odvození základních vztahů pro koeficient tření a jeho závislosti na rychlosti tření.

Formálně a přehledně bychom mohli model elastomerického tření popsat pomocí Kummerova vztahu, který uvádí Smith (2008):

$$F_T = F_A + F_{Hs} + F_{Hb} + F_C,$$

kde: F_T je celkový odpor proti tření mezi pryží a substrátem,

F_A je podíl van der Waalsových adhezivních sil mezi oběma povrchy,

F_{Hs} je podíl viskoelastických mikrodeformací na povrchu pryže – mikrohystereze,

F_{Hb} je podíl viskoelastických makrodeformací celého objemu pryže – makrohystereze,

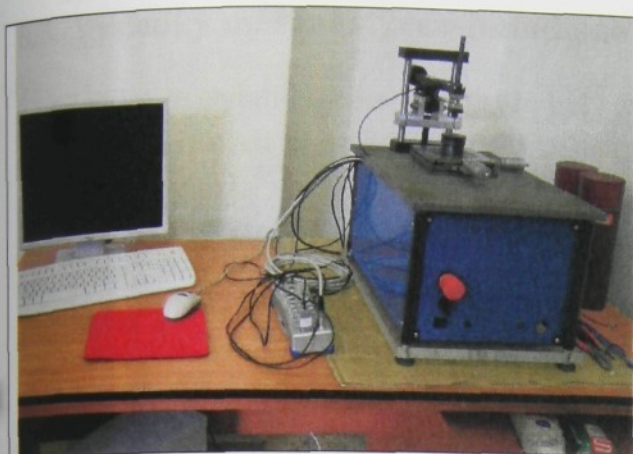
F_C je podíl ztráty koheze v důsledku opotřebení.

Dosadit za jednotlivé členy však není jednoduché a vliv každé z těchto položek je zkoumán celými vědeckými týmy a řada odborných článků se zabývá popisem jednotlivých procesů, avšak jednotný obraz tření elastomerů dosud nebyl stanoven.

6.2. Experiment

Pro účely výzkumu tření pryže, elastomerů a jiných polymerních materiálů bylo zkonstruováno a vyrobeno tribometrické zařízení typu ball-on-disc na obr. 6.2 a 6.3.

Zařízení se skládá ze stojanu, pohonné jednotky s krokovacím motorem Maxon a řídicí jednotkou Epos, otáčivého stolu s křížovým mikrometrickým posuvem pro upevnění pryžových vzorků, raménka se závažím a tříosým piezoelektrickým snímačem Kistler se zesilovačem. Na raménku je upevněn držák s ocelovou kuličkou (používáme ložiskové kuličky o průměru 6 mm).



Obr. 6.2. Tribometr „ball on disc“.



Obr. 6.3. Detail tribometru - otáčivý stolek a raménko s držákem a ocelovou kuličkou.

Kulička je přitlačována k otáčejícímu se pryžovému vzorku, přitlačná svíslá síla a dvě složky síly v rovině vzorku jsou měřeny silovým snímačem. Záznam dat se zvolenou vzorkovací frekvencí se provádí prostřednictvím měřicí karty Dewetron. Zpracování dat je prováděno v prostředí MATLAB.

Cílem prováděných experimentů bylo uvést do chodu toto nové zařízení, vypracovat metodiku měření tření a provést sérii ověřovacích a srovnávacích experimentů. Dále bylo třeba vypracovat metodiku zpracování shromážděných dat v prostředí MATLAB.

Experimenty byly prováděny při pokojové teplotě na styren-butadienové pryži (SBR) tvrdosti 74,3 Shore A, jejíž vlastnosti při statickém a dynamickém zatížení byly určeny v předchozích částech práce. Pět vzorků ve tvaru kruhových kotoučků o průměru 50 mm a tloušťce 5 mm bylo vyraženo z pryžové desky o stejné tloušťce.

Dále byly zkoumány a srovnány třecí vlastnosti panenských a opotřeбенých tramvajových segmentů z isopren-butadienové pryže (IBR) na pěti vzorcích ve tvaru kvádrů 15 x 15 x 20 mm.

Na počátku měření byla provedena kalibrace snímače ve všech třech směrech pomocí kalibrovaných závaží. V experimentálním rozmezí sil je charakteristika snímače lineární.

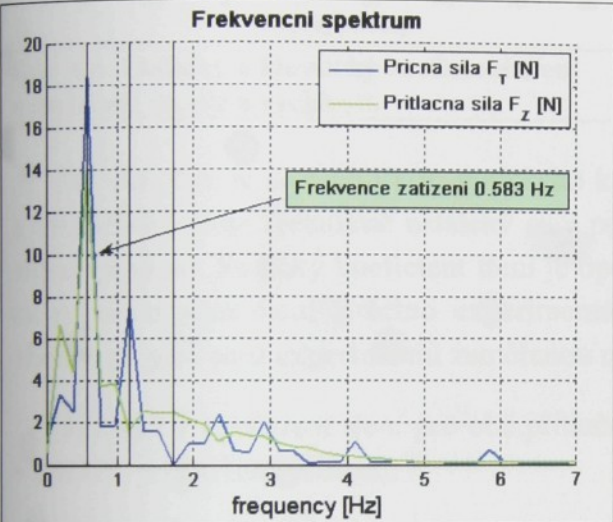
Vzhledem k tomu, že průběh měřených sil je kvazistatický, je nutné při dlouhodobějších experimentech měření vždy po cca 2 minutách na krátkou dobu přerušit a vynulováním odstranit drift piezoelektrického snímače.

Metodika experimentu byla stanovena tak, aby bylo možné zachytit vliv velikosti přitlačné síly a vliv rychlosti smýkání na velikost poměru mezi přitlačnou a příčnou silou. Tento poměr je většinou nazýván třecím koeficientem. Tečná síla byla stanovena ze dvou změřených složek sil v rovině vzorku.

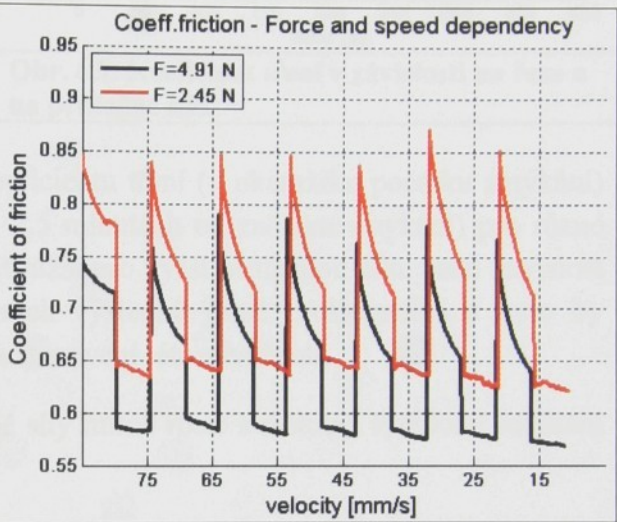
6.3. Výsledky měření styren-butadienové pryže.

Vzorky ze styren-butadienové pryže byly zatěžovány postupně dvěma přitlačnými silami (byla použita závaží o hmotnosti 0,25 kg a 0,5 kg), avšak výsledné přitlačné síly měřené snímačem jsou nižší v důsledku pasivních odporů v uložení raménka.

Otáčky během měření měly konstantní velikost 35 ot/min a poloměr dráhy kuličky se měnil od 20 do 4 mm, takže rychlosti smýkání byly postupně 73,3; 66,0; 55,0; 44,0; 36,7; 25,7 a 14,7 mm/s.



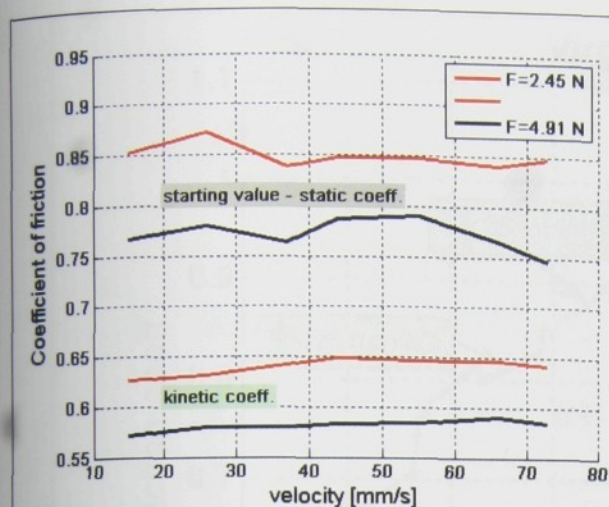
Obr. 6.4. Frekvenční spektrum přitlačné a třecí síly



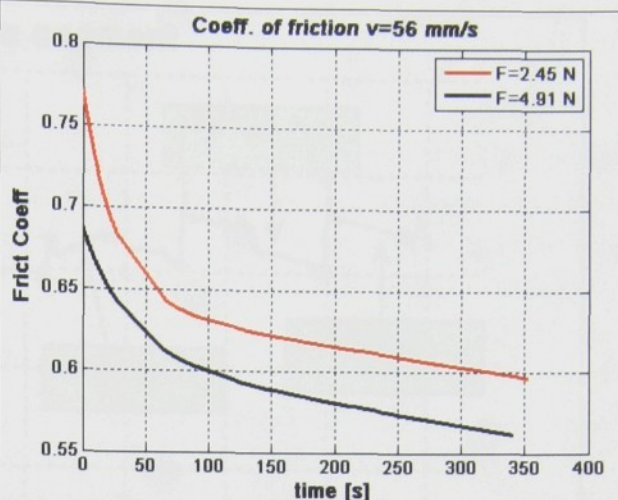
Obr. 6.5. Počáteční a ustálený koeficient tření, závislost na přitlačné síle a rychlosti.

Bylo stanoveno frekvenční spektrum budícího signálu (přítlačná síla) a odezvy (tečná třecí síla), viz obr. 6.4. Hlavní frekvence obou signálů odpovídá frekvenci buzení – nastaveným otáčkám tribometru. Přítlačná síla však závisí i na malých nerovnostech vzorku a na jeho viskoelastických vlastnostech. Tyto faktory způsobují nerovnoměrný svislý pohyb raménka tribometru, který bude vhodné tlumit, aby bylo dosaženo rovnoměrnější přítlačné síly.

Styren-butadienová pryž vykazovala během experimentu velké opotřebení. Její odtržené jemné částičky způsobovaly stálý pokles koeficientu tření během měření. V grafu na obr. 6.5 je záznam 14 experimentů (2 různé přítlačné síly a 7 rychlostí smýkání). Je zde patrný rychlý pokles koeficientu tření vždy v prvních 30 vteřinách po zahájení experimentu a mírný stálý pokles v dalších 30 vteřinách 2,5 minuty po zahájení experimentu. Koeficient tření je nižší pro větší přítlačnou sílu a pro obě síly mírně stoupá s rychlostí smýkání.



Obr. 6.6. Statický a kinetický koeficient tření v závislosti na síle a rychlosti.



Obr. 6.7. Koeficient tření v závislosti na čase a na přítláčné síle.

Na obr. 6.6. je srovnání tzv. statického koeficientu tření (v okamžiku počátku smýkání) a kinetického tření (relativně ustálený stav po 2,5 minutách od začátku smýkání) pro různé síly a rychlosti. Statický koeficient tření je opět nižší pro vyšší přítláčnou sílu. Jeho závislost na rychlosti však není z těchto experimentálních výsledků jasně prokazatelná a bylo by vhodné provést sérii experimentů zaměřenou na stanovení této závislosti.

Kinetický koeficient tření pro obě přítláčné síly mírně roste s rostoucí rychlostí smýkání v rozsahu použitých rychlostí.

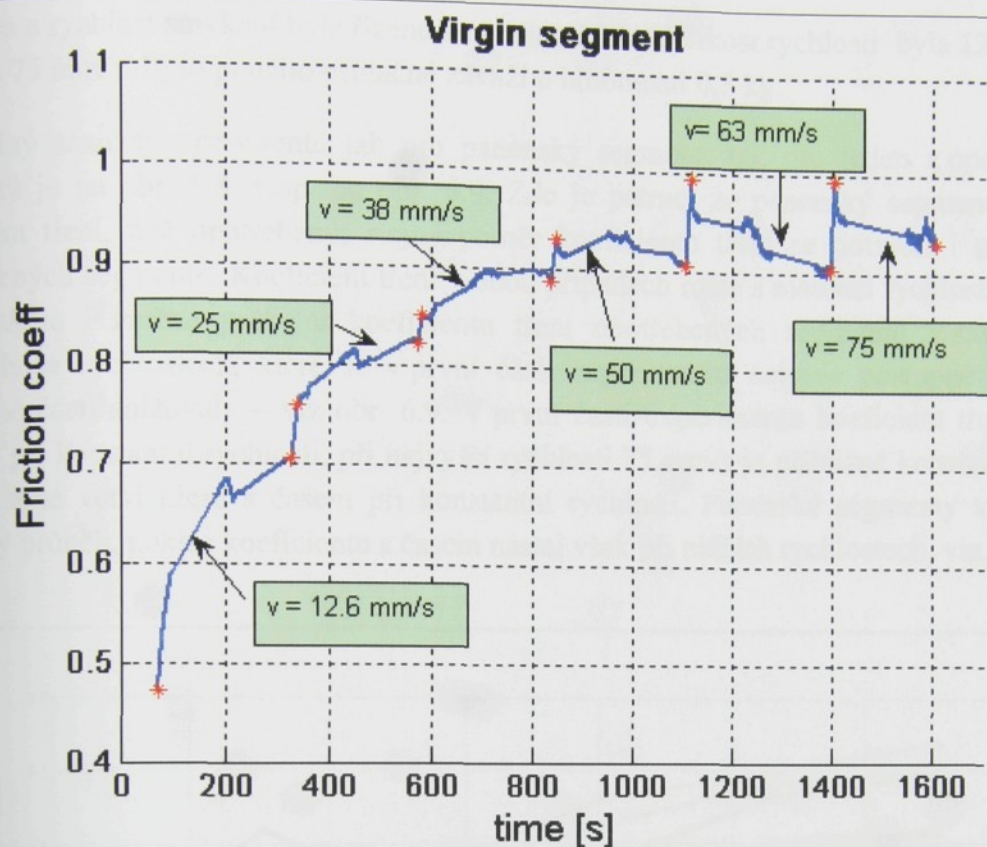
Závislost koeficientu tření na době trvání experimentu je pro rychlost smýkání 56 mm/s na obr. 6.7. Vidíme zde rychlý pokles koeficientu na počátku smýkání a stálý mírný pokles i po 5 minutách. Experimentální hodnoty byly proloženy exponenciální funkcí se dvěma členy metodou nelineárních nejmenších čtverců v prostředí MATLAB. Průběh koeficientu je podobný jako pokles napětí při relaxaci elastomerních materiálů.

Výsledky těchto experimentů jsou v kvalitativní shodě s výsledky uváděnými v literatuře. Lze tedy konstatovat, že koeficient tření je nižší pro vyšší přítláčné síly a že vzrůstá s rostoucí rychlostí smýkání.

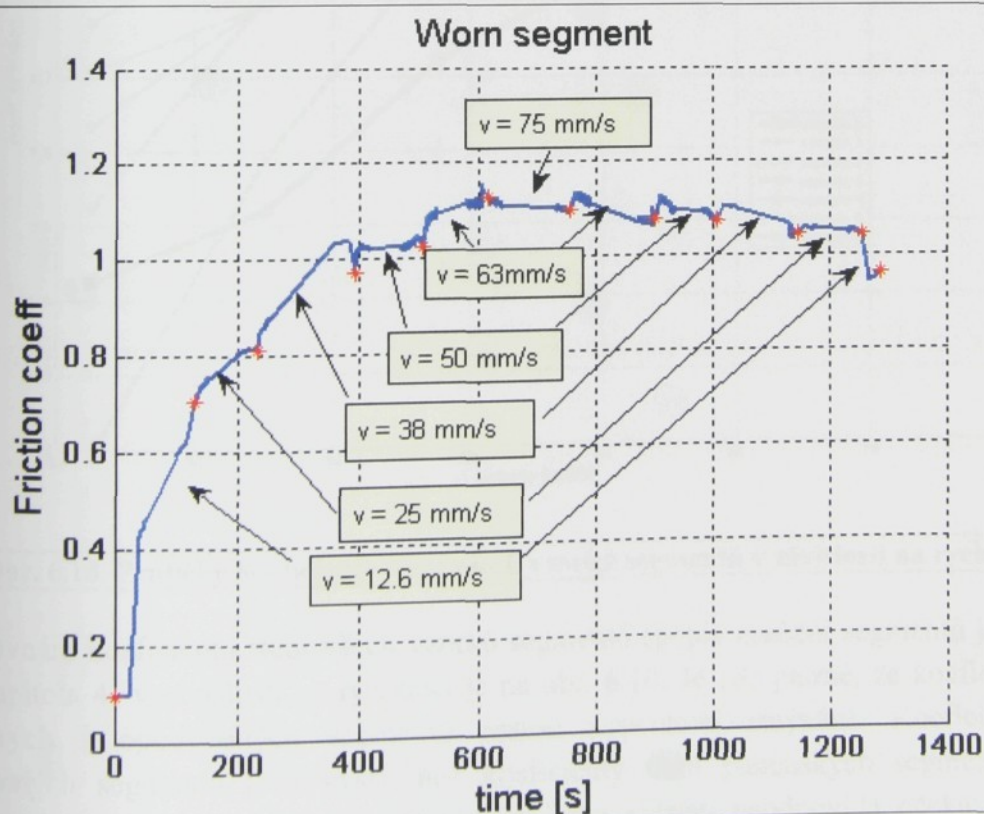
Kvantifikace výsledků je zatím obtížná vzhledem k počtu měření. Přesto si lze udělat představu o velikosti statického a kinetického koeficientu tření dané pryže a alespoň přibližně odpovědět na častou otázku, kterou kladou výpočtáři zabývající se simulací odezvy pryžových součástí MKP. Koeficient tření může hrát stěžejní roli v těchto výpočtech, neboť ovlivňuje výrazně podmínky kontaktu pryžových součástí s kovovými a je nutné počítat se stísněním deformace pryžových součástí, které dramatickým způsobem ovlivňuje jejich tuhost.

6.4. Výsledky měření segmentů

Cílem tohoto měření bylo porovnat koeficienty tření panenských a opotřebovaných tramvajových segmentů. Vzorky byly poměrně malé, proto dráha kuličky měla stálý poloměr



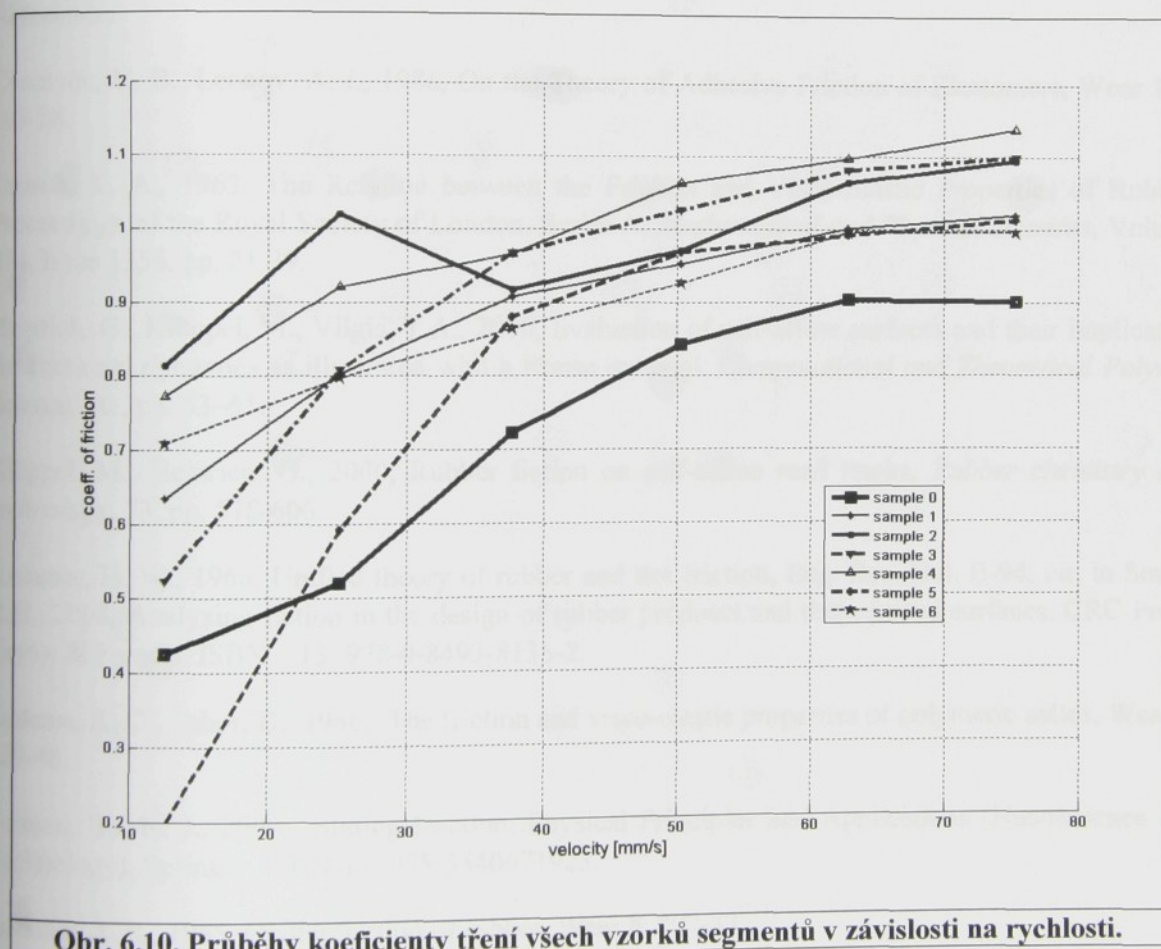
Obr. 6. 8. Průběh koeficientu tření v závislosti na rychlosti a na době trvání experimentu u vzorků panenských segmentů.



Obr. 6.9. Průběh koeficientu tření v závislosti na rychlosti a na době trvání experimentu u vzorků opotřebovaných segmentů.

$r = 4 \text{ mm}$ a rychlost smýkání byla řízena změnou otáček. Velikost rychlosti byla 12,6; 25; 38; 50; 63 a 75 mm/s. Bylo použito přitlačné závaží o hmotnosti 0,5 kg.

Úplný záznam experimentů jak pro panenský segment, tak pro jeden z opotřeбенých segmentů je na obr. 6.8, resp. na obr. 6.9. Zde je patrné, že panenský segment má nižší koeficient tření, než opotřeбенý; stejný poměr koeficientu tření se potvrdil i u ostatních opotřeбенých segmentů. Koeficient tření v obou případech roste s rostoucí rychlostí smýkání. Zajímavá je i změna průběhu koeficientu tření opotřeбенých segmentů v závislosti na měnících se rychlostech, které se v první části experimentu nejprve postupně zvyšovaly a v druhé části snižovaly – viz obr. 6.9. V první části experimentu koeficient tření vzrůstá s časem při konstantní rychlosti, při nejvyšší rychlosti 75 mm/s je přibližně konstantní v čase a v sestupné větvi klesá s časem při konstantní rychlosti. Panenské segmenty vykazovaly podobný průběh, pokles koeficientu s časem nastal však při nižších rychlostech, viz. obr. 6.8.



Obr. 6.10. Průběhy koeficientu tření všech vzorků segmentů v závislosti na rychlosti.

Srovnání koeficientu tření všech vzorků segmentů (popis značení segmentů je v tabulce 4.1 - kapitola 4) v závislosti na rychlosti je na obr. 6.10. Je zde patrné, že koeficienty tření panenských i opotřeбенých segmentů rostou s rychlostí smýkání. Koeficienty tření opotřeбенých segmentů jsou vyšší, než koeficienty tření panenských segmentů v grafu označeny jako plná tlustá křivka (sample 0). Toto zjištění neodpovídá očekávání, neboť výsledky DMA ukazují, že opotřeбенé segmenty jsou tužší a mají menší útlumové vlastnosti. Třecí experimenty na všech segmentech však byly prováděny za stejných podmínek a stejným

postupem a lze tedy konstatovat, že takto definovaný a změřený koeficient tření je vyšší u opotřeбенých segmentů.

6.5. Závěr

Bylo navrženo a realizováno zařízení, které umožní zkoumat třecí vlastnosti polymerních i jiných materiálů v závislosti na přitlačné síle a rychlosti smýkání. Lze na něm sledovat i opotřebení jednotlivých materiálů vlivem tření. Byly provedeny ověřovací experimenty, jejichž výsledky jsou konzistentní. Třecí experimenty jsou časově náročné a je nutné vypracovat jejich metodiku tak, aby bylo možné odlišit jednotlivé vlivy jak třecích podmínek, tak i vlastností zkoumaných materiálů; v případě elastomerů to jsou zejména jejich viskoelastické vlastnosti. V další etapě výzkumu bude cílem navržení a ověření modelů tření těchto materiálů.

Reference:

Chernyak, Y. B., Leonov, A. I., 1986, On the Theory of Adhesive Friction of Elastomers, *Wear* 108, 105-38.

Grosch, K. A., 1963, The Relation between the Friction and Visco-Elastic Properties of Rubber, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Volume 274, Issue 1356, pp. 21-39.

Heinrich, G., Klüppel, M., Vilgis, T.A., 2000, Evaluation of self-affine surfaces and their implication for frictional dynamics as illustrated with a Rouse material, *Computational and Theoretical Polymer Science*, 10, pp. 53-61.

Klüppel, M., Heinrich, G., 2000, Rubber friction on self-affine road tracks, *Rubber chemistry and technology*, 73, pp. 578-606.

Kummer, H. W., 1966, Unified theory of rubber and tire friction, *Eng. Res. Bul.* B-94, cit. in Smith, R.H., 2008, *Analyzing friction in the design of rubber products and their paired surfaces*. CRC Press, Taylor & Francis, ISBN – 13: 978-0-8493-8136-2.

Ludema, K. C., Tabor, D., 1966, The friction and visco-elastic properties of polymeric solids, *Wear* 9, 329-48.

Persson, Bo, N. J., 2000, *Sliding Friction: Physical Principles and Applications (NanoScience and Technology)*, Springer, ISBN-13: 978-3540671923.

Savkoor, A. R., 1965, On the friction of rubber, *Wear* 8, 222-37.

Schallamach, A., 1953, The velocity and temperature dependence of rubber friction, *Proceedings of the Physical Society Section B*, 66, pp. 386-392.

Schallamach, A., 1963, A theory of dynamic rubber friction (Equation governing dynamic frictional force involving number and average life of bonds, for case of rubber and smooth hard surface), *Wear*, Vol. 6, pp. 375-382.

Sills, S., Vorvolakos, K., Chaudhury, M. K., Overney, R.M., 2007, Molecular Origins of Elastomeric Fiction, In: Nanotribology: Friction and Wear on the Atomic Scale, eds. E. Gnecco and E. Meyer, Springer Verlag, Chapter 30, pp. 659-676.

Williams, M. L., Landel, R. F., Ferry, J. D., 1955, The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids, Journal of the American Chemical Society, 77, pp. 3701-07.

7. Závěr

Předkládaná habilitační práce přináší přehled experimentálních metod a přístupů pro určení komplexních mechanických vlastností pryží a elastomerických materiálů. V práci je navržena a ověřena vhodná metodika kvazistatických, dynamických, relaxačních a tribologických experimentů potřebných k určení parametrů materiálových modelů vhodných pro elastomery.

Experimenty byly provedeny na zařízení katedry mechaniky, pružnosti a pevnosti Strojní fakulty Technické univerzity v Liberci. K zatěžování vzorků byl použit universální zatěžující stroj TIRA 2080, dynamické zatěžovací zařízení INSTRON E3000 a dále speciální dvouosý zatěžovací rám vlastní konstrukce. Deformace vzorků byly měřeny optickou metodou zařízením ISTR 4D, využívajícím optickou korelaci záznamu digitální kamery. Tribologická měření byla prováděna na tribometru typu „ball on disc“ vlastní konstrukce. Vyhodnocení experimentů bylo provedeno pomocí prostředí MATLAB s využitím toolboxů pro nelineární optimalizaci, pro splajny, pro prokládání křivek a pro zpracování signálů.

K modelování kvazistatické odezvy pryže byly použity známé hyperelastické modely Ogdenův a Mooney-Rivlinův. Viskoelastická odezva byla modelována pomocí modelu Simo-Holzapfelova s vnitřními proměnnými typu napětí. Dynamické moduly a útlumové vlastnosti pryže byly stanoveny pomocí dynamické mechanické analýzy za předpokladu platnosti zákonitostí lineární viskoelasticity. Z tribologických experimentů byl vyhodnocen smluvní koeficient tření při různých třecích podmínkách.

Z experimentálně naměřených závislostí a z jejich vyhodnocení lze formulovat následující závěry:

- Pro určení parametrů hyperelastických materiálových modelů z kvazistatických zkoušek nelze vycházet pouze z tahové zkoušky. Z tohoto důvodu byly vzorky zatěžovány rovněž v tzv. čistém smyku a při dvouosé napjatosti.
- Provedené tahové kvazistatické zkoušky u styren-butadienové pryže vykazují shodný průběh u všech vzorků. Závislost mezi zatěžující silou a hlavním protažením λ_1 je výrazně nelineární v celém rozsahu zatěžování a rovněž měřené protažení v příčném směru λ_2 má nelineární průběh.
- Předpoklad nestlačitelnosti pryžového materiálu je třeba považovat za idealizaci, v experimentech se objemová změna pohybuje v rozmezí přibližně $\pm 10\%$.
- Výpočet nominálního napětí při zanedbání změny plochy průřezu při tahových zkouškách vykáže o 50% nižší hodnotu při protažení $\lambda_1=2$ ve srovnání se skutečným napětím vypočteným vzhledem k deformované ploše.
- Poissonův poměr μ vypočtený za předpokladu nestlačitelnosti monotónně klesá s rostoucím protažením λ_1 na rozdíl od hodnoty získané z experimentálních měření vykazující rychlý pokles na hodnotu 0,3 a poté setrvání na konstantní hodnotě.

- Při srovnání Cauchyho napětí určeného experimentálně s výpočtem podle Mooney-Rivlinova a Ogdenova modelu s jednou či se dvěma dvojicemi parametrů je vidět prokazatelně dobrá shoda právě pro poslední uvedený model se dvěma dvojicemi parametrů. Výjimku tvoří malé hodnoty protažení.

Je třeba zdůraznit, že pro korektní určení hyperelastických materiálových parametrů pryže je nutné provést celou řadu experimentálních měření, a to zejména při víceosé napjatosti. Teprve z jejich kombinace lze vyvodit kvantitativní závěr. Z tohoto důvodu bude v nejbližší době na KMP dokončen nový dvouosý zatěžovací rám s posuvem realizovaným krokovými motory a plánuje se postavení zařízení na provádění ekvibiaxiálních zkoušek pomocí zatížení přetlakem kruhového vzorku typu membrány. Objemový modul bude moci být měřen pomocí všestranného stlačování vzorků.

Dynamická mechanická analýza vedla ke stanovení závislosti dynamického modulu a útlumu na statické předdeformaci, na frekvenci i na amplitudě:

- U SBR paměťový modul, ztrátový modul a ztrátový úhel rostou se zvyšující se statickou výchylkou a mírně se zvyšují s rostoucí frekvencí v rozsahu použitých frekvencí.
- Oba moduly monotónně klesají s rostoucí amplitudou - tzv. Payneův jev.
- Ztrátový úhel v závislosti na amplitudě dosahuje svého maxima mezi amplitudami 0,02 a 0,04 a poté klesá.
- DMA aplikovaná na vzorky panenské isopren-butadienové pryže dává srovnatelné závislosti.
- Porovnání vzorků opotřebené pryže a nové pryže prokazuje změnu vlastností během procesu stárnutí, např. vyšší hodnotu ztrátového úhlu a nižší hodnoty obou modulů u nových vzorků vzhledem k opotřebeným.
- S rostoucí teplotou klesá paměťový i ztrátový modul stejně jako ztrátový úhel, což se projevuje ztrátou tlumení a tuhosti.

Závěrem lze konstatovat, že opotřebené segmenty jsou při dynamickém namáhání tužší než panenské a snižují se tím jejich tlumící vlastnosti. Pro získání podrobného průběhu změn vlastností vlivem stárnutí pryže se plánuje provést sérii experimentů, kdy vzorky pryže budou podrobeny umělému stárnutí při dlouhodobém ohřevu v teplotní komoře po dobu hodin či dnů.

V dalším výzkumu se předpokládá sledování dynamických vlastností za nízkých teplot a zahrnutí vlivu teploty do parametrů modelů v Helmholtzově funkci volné energie na základě termodynamických zákonitostí.

V práci byla věnována zvláštní pozornost poněkud opomíjené oblasti vlastností pryže, a to jejím reologickým vlastnostem jako je relaxace a kríp a závislosti materiálových parametrů na rychlosti zatěžování. Tyto vlastnosti určují množství disipované energie a tedy

i ohrátí pryže při cyklickém zatěžování, které roste s amplitudou zatížení. Zvýšení teploty pak zpětně ovlivňuje vlastnosti pryže, jak ukázala DMA při vyšších teplotách.

Na nově zkonstruovaném a vyrobeném tribometru byly provedeny první testy pro stanovení koeficientu tření mezi dvojicí materiálů kov a pryž. Byla vypracována metodika měření a bude dále rozvíjena. První testy na vzorcích SBR i na vzorcích z nových i opotřebených segmentů přinesly očekávané výsledky. Koeficient tření je nižší pro vyšší přítláčné síly a vzrůstá s rostoucí rychlostí smýkání. Pokles koeficientu tření v čase vykazuje obdobný průběh jako napětí při relaxaci elastomerických materiálů.

Srovnání průběhu koeficientu tření materiálů opotřebených a panenských segmentů přineslo neočekávaný výsledek, a to vyšší hodnoty koeficientu tření pro pryž opotřebených segmentů. Avšak výsledky DMA ukazují na jejich vyšší tuhost a menší tlumení. Všechny tribologické testy však probíhaly za stejných podmínek a výsledky lze považovat za věrohodné. V další etapě bude cílem navržení a ověření modelů tření elastomerů a jiných polymerních materiálů.

Práce je úvodem do komplikované problematiky experimentálního výzkumu vlastností pryžových materiálů. Jejich stále širší použití s sebou přináší nutnost optimalizace pryžových elementů strojů a konstrukcí a tedy i simulaci jejich odezvy pomocí MKP. Úspěch numerické simulace však závisí na vstupních parametrech a na použití adekvátních materiálových modelů. Experimentální výzkum pryží poskytuje nejen tato nezbytná data, ale i představu o jejich mnohdy překvapivém chování. Numerická simulace, má-li být ve shodě s realitou, musí jít ruku v ruce s experimentem.

Přehled použité literatury

Amin, A.F.M.S., Lion, A., Sekita, S., Okui, Y., 2006, Nonlinear dependence of viscosity in modelling the rate dependent response of natural and high damping rubbers in compression and shear: Experimental identification and numerical verification. *International Journal of Plasticity* 22: 1610–1657.

Brannon, G.A., 2008, University of Utah, <http://www.mech.utah.edu/~brannon/public/deformation.pdf>.

Chernyak, Y. B., Leonov, A. I., 1986, On the Theory of Adhesive Friction of Elastomers, *Wear* 108, 105-38.

Govindjee, S., Simo, J.C., 1992, Mullins' effect and strain amplitude dependence of the storage modulus. *International Journal of Solids and Structures*. 29: 1737–1751.

Grosch, K. A., 1963, The Relation between the Friction and Visco-Elastic Properties of Rubber, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, *Mathematical and Physical Sciences*, Volume 274, Issue 1356, pp. 21-39.

Haupt, P., Sedlan, K., 2001, Viscoplasticity of elastomeric materials: experimental facts and constitutive modelling. *Archive of Applied Mechanics*. 71: 89–109.

Heinrich, G., Härtel, V., Tschimmel, J., Klüppel, M., 2004, Kinetics of filler structures in reinforced polymernetworks. In: *Polymeric Materials 2004*.

Heinrich, G., Klüppel, M., Vilgis, T.A., 2000, Evaluation of self-affine surfaces and their implication for frictional dynamics as illustrated with a Rouse material, *Computational and Theoretical Polymer Science*, 10, pp. 53–61.

Holzappel, G. A., 2000, *Nonlinear solid mechanics*. N.Y.: Wiley&Sons Ltd., ISBN 0471823198.

Holzappel, G. A., Simo, J.C., 1996, A new viscoelastic constitutive model for continuous media at finite termomechanical changes. *International journal of solids and structures*. 33: No. 20-22, pp. 3019-34.

Höfer, P., Lion, A., 2009, Modelling of frequency- and amplitude-dependent material properties of filler-reinforced rubber, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 57, 500–520.

Klüppel, M., Heinrich, G., 2000, Rubber fiction on self-affine road tracks, *Rubber chemistry and technology*, 73, pp. 578-606.

Kummer, H. W., 1966, Unified theory of rubber and tire friction, Eng. Res. Bul. B-94, cit. in Smith, R.H., 2008, Analyzing fiction in the design of rubber products and their paired surfaces. CRC Press, Taylor & Francis, ISBN – 13: 978-0-8493-8136-2.

Lindley, P. B., 1964, *Engineering Design with Natural Rubber*. Brickendonbury: Malaysian Rubber Producers' Research Association.

Lion, A., 1998, Thixotropic behaviour of rubber under dynamic loading histories: experiments and theory. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 46, 895–930.

- Lion, A., Kardelky, C., 2004, The Payne effect in finite viscoelasticity: constitutive modelling based on fractional derivatives and intrinsic time scales, *International Journal of Plasticity*, Vol. 20, pp. 1313-1345.
- Ludema, K. C., Tabor, D., 1966, The friction and visco-elastic properties of polymeric solids, *Wear* 9, 329-48.
- Marvalová, B., Petříková, I., Mázik L., 2009, June 8 -11 Experimental measurement of the dynamic moduli of naturally aged rubber segments. 47th International Scientific Conference Experimental Stress Analysis EAN 2009. pp. 145-152. Technical University of Liberec.
- Ogden, R.W., 1984, *Non-Linear Elastic Deformations*. Ellis Horwood Limited, Chichester.
- Persson, B. N. J., 2000, *Sliding Friction: Physical Principles and Applications (NanoScience and Technology)*, Springer, ISBN-13: 978-3540671923.
- Petříková, I., Marvalová, B., 2008, June 2.-5., Measurement of Friction and Damping Properties of Rubber, In: Book of contributions, 46th Inter. Scientific Conference Experimental Stress Analysis 2008. VŠB – Technical University of Ostrava, pp. 191-194.
- Petříková, I., Marvalová, B., 2009 September 7 – 10, Experimental Determination of the Mechanical Properties of Naturally Aged Rubber. In: International Conference of Constitutive Model for Rubber VI. pp. 143-147. Taylor&Francis.
- Radhakrishnan, C. K., Prajitha Kumari, Sujith, A., Unnikrishnan, G., 2008, Dynamic mechanical properties of styrene butadiene rubber and poly (ethylene-co-vinyl acetate) blends, *Journal of Polymer Research*, 15, pp. 161–171.
- Saccomandi, G., Ogden, R.W., 2004, *Mechanics and Thermomechanics of Rubberlike Solids*, Springer.
- Savkoor, A. R., 1965, On the friction of rubber, *Wear* 8, 222-37.
- Schallamach, A., 1953, The velocity and temperature dependence of rubber friction, *Proceedings of the Physical Society Section B*, 66, pp. 386-392.
- Schallamach, A., 1963, A theory of dynamic rubber friction (Equation governing dynamic frictional force involving number and average life of bonds, for case of rubber and smooth hard surface), *Wear*, Vol. 6, pp. 375-382.
- Simo, J.C., 1987, On a fully three dimensional finite strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60: 153–173.
- Wrana, C., Fischer, C., Härtel, V., 2003, Dynamische Messungen an gefüllten Elastomersystemen bei mono- und bimodaler sinusförmiger Anregung. *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, 56, pp. 437–443.