

Technická univerzita v Liberci

fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

**Metoda dynamického programování
použitá pro číslicovou regulaci
lineárních dynamických soustav**

habilitační práce

UNIVERZITNÍ KNIHOVNA
TECHNICKÉ UNIVERZITY V LIBERCI



3146070689

Vědní obor : 26-15-9 Technická kybernetika

Autor : Ing. Bedřich Janeček, CSc.

Rok : 1996

Poznámka:

63 s. (obk)

U 380-M-1998

2



Ing. Bedřich Janeček, CSc., narozen 1943, vystudoval v r. 1966 ČVUT v Praze, fakultu elektrotechnickou, stud. obor automatizační technika. Od r. 1968 pracuje na VŠST a na TU v Liberci jako programátor a pracovník pro vědu a výzkum. Vědecko-pedagogickým pracovníkem se stal v r. 1991.

Vedení školy děkuji za vytvoření podmínek pro napsání práce. Děkuji za realizační spolupráci kolegům, s nimiž jsem týmově pracoval.

Za diskuze k obsahu práce a jasně formulované originální myšlenky, které jsem mohl s jeho svolením dále rozpracovat, děkuji

Doc. Ing. Vladimíru Kracíkovi, CSc.

Za rady a myšlenky z tematiky návrhu číslicových regulátorů metodou přechodových charakteristik děkuji

Prof. Ing. Bořivojovi Hanušovi, DrSc.

Za názory na algebraickou teorii systémů děkuji též svému bratrovi

Doc. Ing. Josefu Janečkovi, CSc.

Poznámka: *Snahou autora bylo napsat habilitační práci tak, aby byla i textem pro studenty a doktorandy.*

2

Obsah

str.

Seznam použitých symbolů

1. Úvod	5
2. Z přenos lineární dynamické SISO soustavy	6
3. Číslicový regulační obvod	16
4. Dynamické programování	19
4.1 Dynamické programování použité pro sekvenční rozhodovací úlohu s konečným počtem stavů v každém sekvenčním rozhodovacím kroku	19
4.2 Dynamické programování použité pro číslicové řízení lineárních dynamických systémů	21
4.3 Výpočet diferenční rovnice číslicového regulátoru z rovnice stavového regulátoru	31
5. Návrh číslicového regulátoru při použití algebraické teorie systémů	37
6. Doplněk k výpočtu číslicového regulátoru dynamickým programováním	52
7. Návrh regulátoru při náhodných poruchách	56
8. Adaptivní regulace	58
9. Závěr	60
Literatura	61

2

Seznam použitých symbolů

- s ... komplexní proměná Laplaceovy transformace,
- z ... komplexní proměná Z transformace, v práci je častěji použito $q = z^{-1}$,
- r ... řád regulované soustavy,
- $\mathbf{f}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}$... racionální lomené funkce, nebo vektory, v textu je vždy uvedeno o který případ se jedná,
- $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$... polynomy nebo matice, v textu je vždy uvedeno o který případ se jedná,
- $\delta \mathbf{A}$... stupeň polynomu $\mathbf{A}$,
- $\mathbf{A}^+$... součin stabilních kořenových činitelů polynomu $\mathbf{A}$,
- $\mathbf{A}^-$... součin nestabilních kořenových činitelů polynomu $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}^-$,
- $\bar{\mathbf{A}}$... sdružený polynom k polynomu $\mathbf{A} = \mathbf{A}(q)$, $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\left(\frac{1}{q}\right)$,
- $\bar{\mathbf{f}}$... sdružená racionální lomená funkce k r.l. funkci $\mathbf{f} = \mathbf{f}(q)$, $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f}\left(\frac{1}{q}\right)$,
- $\mathbf{A}^*$... reflexní polynom k polynomu $\mathbf{A}$, v textu je použito pouze zkráceného názvu reflexní polynom,
- $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$... skalární součin racionálních lomených funkcí.

2

1. Úvod

Regulace v technické praxi se v současnosti nejčastěji provádí spojitými PID regulátory, přičemž tyto regulátory jsou často realizovány na číslicových prvcích - počítačích. Algoritmy těchto regulátorů zatěžují výpočetní čas procesorů. Číslicové regulátory pracují s časovou periodou, která je podstatně delší než perioda činnosti spojitých regulátorů, které jsou realizovány na číslicových prvcích. Číslicové regulátory se též v literatuře nazývají "*discrete time control systems*" - regulátory pracující v diskretním čase. Z hlediska periody činnosti je ověřeno, že číslicové regulátory nezhoršují prakticky kvalitu regulace ve srovnání se spojitými regulátory. Číslicový regulátor je možno jednoduše realizovat jako regulátor stejného řádu jako je řád regulované soustavy. Z tohoto důvodu ***u soustav vyšších řádů než je řád 2 dosáhneme použitím číslicových regulátorů vyšší kvality regulace než při použití spojitých regulátorů PID.*** Pro návrh číslicových regulátorů je zapotřebí určit - identifikovat *diskretní model* regulované soustavy. *Pro identifikaci těchto modelů a pro návrh číslicových regulátorů jsou vyvinuty rekursivní účinné algoritmy* [sb1/80], [sb1/82]. Tyto algoritmy umožňují realizovat *číslicové adaptivní regulátory* pracující v reálném čase.

Pro návrh číslicových regulátorů při minimalizaci kvadratického kritéria se používají nejčastěji metody:

- a) návrh stavového regulátoru řešením *Ricattiho diferenční rovnice* [kn2/72], [kn1/82],
- b) návrh stavového regulátoru metodou *dynamického programování* [kn2/72], [kn3/80], [kn1/82],
- c) návrh diferenčních rovnic regulátorů *algebraickou metodou* [kn1/78], [kn1/79], [vy1/83], [vy3/84], [sk1/88], [sk1/92], [di1/94],
- d) návrh diferenčních rovnic regulátorů metodou "*Generalized Predictive Control*" [vy1/84], [vy2/84], [sb2/92],
- e) návrh diferenčních rovnic regulátorů *při použití přechodových charakteristik* [čal/64], [čal/65], [sb1/70], [sb1/72], [sk1/72], [sk2/72], [sk3/72], [sk1/81],

Poznámka: metoda d) byla též realizována jako jedna varianta řešení metodou e) (Algoritmus řízení pro vyrovnání obecné poruchy) [čal/65], [sk2/72].

Stavové regulátory navržené metodami a), b) jsou do regulačních obvodů připojovány použitím *estimátorů stavu* [kn2/78], [kn1/82], [sk1/79]. V předložené práci je zpracováno a ověřeno použití metody b). Metoda b) je svým numerickým charakterem podobná metodě a). V [kn1/72] je upozornění, že numerické řešení metodou a) je numericky nestabilní. Numerické řešení metodou a) autor předložené práce neověřoval. Metody a), b), c) oproti metodám d), e) pracují s menšími počty proměnných. V případě metod a), b), c) jsou počty proměnných určovány řádem regulované soustavy, u metod d), e) počtem kroků vyhodnocovaného kvadratického kritéria. Co do potřebných matematických operací je metoda b) srovnatelná s metodou c).

Metoda dynamického programování ve spojení s principem LD rozkladu symetrických matic je metodou rekursivní, numericky stabilní, s malými požadavky na operační paměť počítačů. Tyto vlastnosti jsou výhodné pro stavbu adaptivních regulátorů realizovaných i na "malých" číslicových řídicích systémech.

Přínosem autora je ověření výhodných vlastností metody dynamického programování pro návrh číslicových a adaptivních číslicových regulátorů, algoritmizace této metody a její ověření v průmyslovém a laboratorním provozu.

Metoda dynamického programování používá *stavový popis regulované soustavy* a výsledkem této metody je *optimální stavový regulátor*. Autor pro připojení stavového regulátoru do regulačního obvodu nepoužil klasický zpětnovazební estimátor, ale odvodil metodu pro výpočet diferenční rovnice regulátoru z maticové rovnice stavového regulátoru a

popisu regulované soustavy. Tímto postupem, při použití rozšířeného kvadratického kritéria získal diferenční rovnici regulátoru stejnou jako algebraickou metodou - samozřejmě při minimalizaci stejného kvadratického kritéria. Návrh diferenčních rovnic regulátorů, založený na metodě dynamického programování byl ověřen pro všechny typy soustav s jednou vstupní a jednou výstupní veličinou, tj. pro soustavy stabilní, astatické, nestabilní. Pro stabilní soustavy bylo ověřování prováděno pro soustavy

- nekmitavé (aperiodické),
- kmitavé (periodické),
- s neminimálně fázovým Laplaceovým přenosem,
- s neminimálně fázovým Z přenosem,
- s dopravním zpožděním.

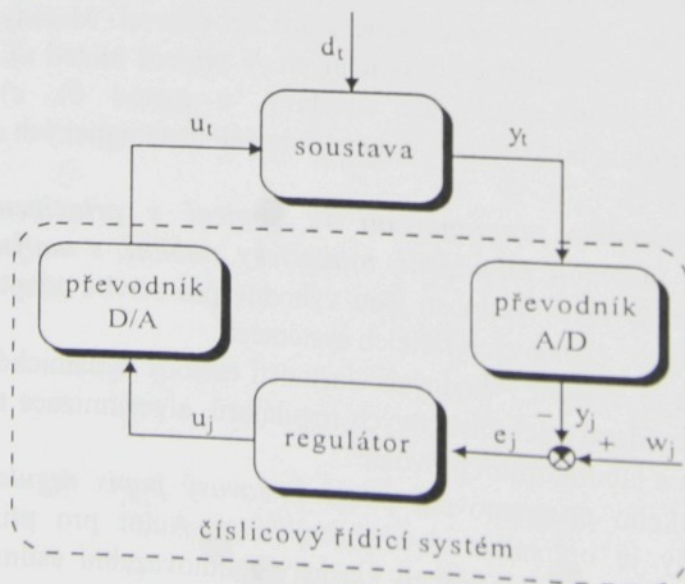
V průmyslové praxi byla uvedená metoda ověřena v *programovém adaptivním regulátoru teploty vypalovací pece* 1 kW [čal]. Dále byla uvedená metoda ověřována v *laboratoři při regulaci otáček tachodynamu* spojeného pružným hřídelem se stejnosměrným motorem, na další úloze *regulace otáček ss motoru s možností reverzace*, na úloze *regulace polohy systému s pružným pásem* a na úloze *regulace teploty*. V současnosti se připravuje využití této metody pro *regulaci řízeného tlumičového systému osobního automobilu* (s hydraulickým akčním členem) a pro *regulaci fluidního kotle na hnědé uhlí* s výkonem 1 MW. Pro soustavy s více vstupními a více výstupními veličinami byla metoda ověřena simulačními výpočty pro tzv. *regresní model soustavy*. V případě požadavků praxe bude ověřování metody dynamického programování pro řízení těchto soustav rozšířeno.

V následujícím textu budeme pro soustavy s jednou vstupní a jednou výstupní veličinou používat anglické zkratky **SISO** (single input, single output). Pro soustavy s více vstupy a více výstupy pak zkratky **MIMO** (multiple input, multiple output).

Pro účely návrhu číslicového regulátoru musíme sestavit diskrétní přenos - Z přenos spojitě dynamické soustavy. Pro přenosy lineárních dynamických soustav budeme používat názvy: -spojitý, nebo Laplaceův přenos (přenos vyjádřený v Laplaceově transformaci), -diskrétní, nebo Z přenos.

2. Z přenos lineární dynamické SISO soustavy.

Schéma zapojení pro regulaci SISO soustavy číslicovým regulátorem je uvedeno na obr. 2-1. K soustavě je prostřednictvím A/D (analog/digital) a D/A převodníků připojen číslicový řídicí člen - počítač.



Obr. 2-1

Na obr.2.1 jsou veličiny

u_t ... vstupní - řídicí - akční veličina soustavy,

y_t ... výstupní veličina soustavy - regulovaná veličina,

d_t ... poruchová veličina, index t značí, že uvedené veličiny jsou funkcemi času, tyto veličiny se nazývají spojitými,

y_j ... posloupnost čísel - hodnot, která vznikne měřením veličiny y_t , posloupnosti čísel se nazývají též diskretními veličinami,

w_j ... žádaná hodnota regulované veličiny y_j ,

e_j ... regulační odchylka,

u_j ... řídicí - akční veličina, index j značí, že tyto veličiny jsou posloupnostmi čísel.

Podrobnější popis všech uvedených veličin je uveden dále v textu.

Ukažme, jak pro účely řízení získáme *diskrétní přenos soustavy*, který v číslicovém regulačním obvodu popisuje chování spojitě dynamické soustavy. Uvažujme spojitou dynamickou soustavu popsanou lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty. Při použití Laplaceovy transformace je přenos této soustavy racionální lomená funkce. **Racionální lomená funkce** (dále jen **r.l. funkce**) je zlomek s polynomem v čitateli a s polynomem ve jmenovateli. Stupeň polynomu ve jmenovateli je řádem r soustavy. Stupeň polynomu v čitateli může být menší nebo roven stupni polynomu ve jmenovateli.

Ukažme nejprve na jednoduchých příkladech jak získáme diskretní popis dynamické soustavy při použití slovníku Z transformace. Mějme stabilní soustavu prvního řádu se zesílením 1. Její Laplaceův přenos je

$$\frac{y}{u} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (2-1)$$

y je Laplaceův obraz výstupní veličiny soustavy,

u je Laplaceův obraz vstupní - řídicí - akční veličiny soustavy,

s je komplexní proměnná Laplaceovy transformace,

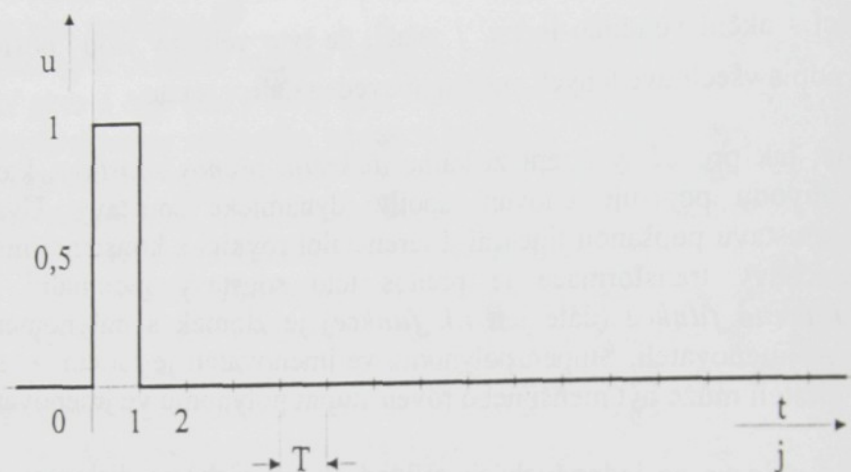
τ je časová konstanta soustavy, $\tau > 0$.

K této soustavě připojíme prostřednictvím A/D (analog/digital) a D/A převodníků počítač, pomocí kterého budeme tuto soustavu řídit - regulovat. (Člen, pomocí kterého je připojen výstup počítače na vstup soustavy se nazývá též tvarovač - D/A převodník je nejběžněji technicky používaný tvarovač.) Při uvedené realizaci počítač se zvolenou periodou měří veličinu y a "prakticky" ve stejných časových okamžicích soustavu řídí - zadává veličinu u_j na D/A převodník. D/A převodník pracuje na principu amplitudové modulace, na výstupu D/A převodníku je analogová veličina (na př. napětí nebo proud), jejíž velikost je úměrná velikosti čísla u_j , t.j. čísla, které se naposledy na převodník zaslalo. Na vstupu počítače je posloupnost čísel y_j a na svůj výstup počítač zasílá posloupnost čísel u_j . Prozatím předpokládejme, že čas zpracování informace na počítači je zanedbatelný vzhledem k periodě měření - řízení. Perioda měření - řízení se též nazývá periodou vzorkování. Na vstup D/A převodníku s periodou vzorkování T vstupuje posloupnost čísel u_j . Této posloupnosti můžeme myšleně přiřadit posloupnost Dirackových impulzů vynásobených u_j (vstupujících na převodník v časech jT). Laplaceův obraz Dirackova impulsu je 1. Při této úvaze a při předpokladu, že čísla do D/A převodníku vstupují s periodou T , můžeme hovořit o

Laplaceově obrazu přenosu D/A převodníku. Přenos D/A převodníku v Laplaceově transformaci za uvedených předpokladů je

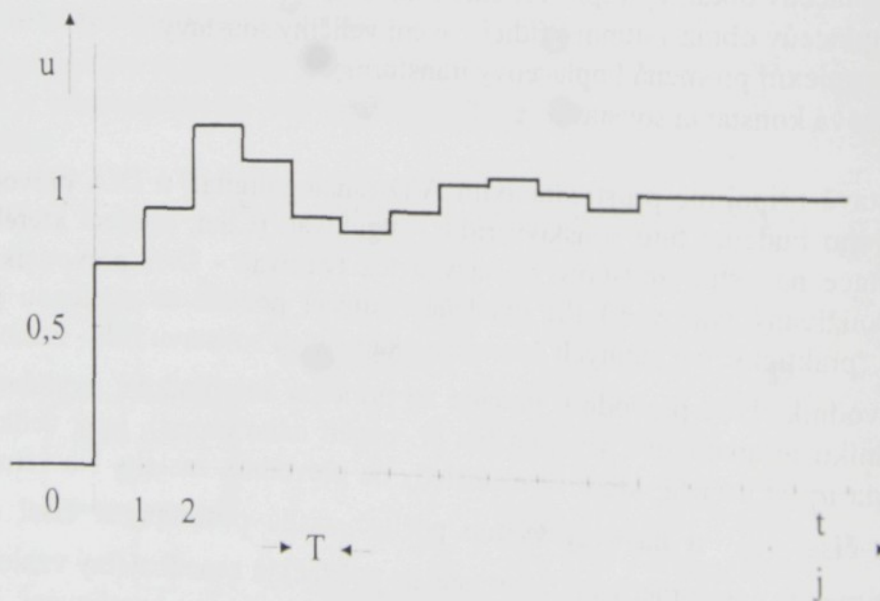
$$\frac{1 - \exp(-Ts)}{s} \quad (2-2)$$

což je Laplaceův obraz časové funkce nakreslené na obr.2-2.



Obr.2-2

Funkci času na obr.2-2 nazveme jednotkovým impulzem. Výstup z uvažovaného D/A převodníku je schodová funkce, tvořená složením posunutých jednotkových impulzů vynásobených čísly u_j .



Obr.2-3

Na výstupu D/A převodníku se objeví jednotkový impulz, viz obr.2-2 tehdy, jestliže na vstup tohoto převodníku vstoupí posloupnost čísel $u_j = 1, 0, 0, 0, \dots$, pro $j = 0, 1, 2, 3, \dots$. Z obraz této číselné posloupnosti označíme $u(z)$ a je 1.

Vysvětlení uvedeného tvrzení: Z obraz posloupnosti čísel - diskrétní funkce f_j je definován

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^{-j} \quad (2-3)$$

Je zřejmé, že $u(z)=1$ pro jakoukoliv konečnou a nenulovou hodnotu komplexní proměnné z .

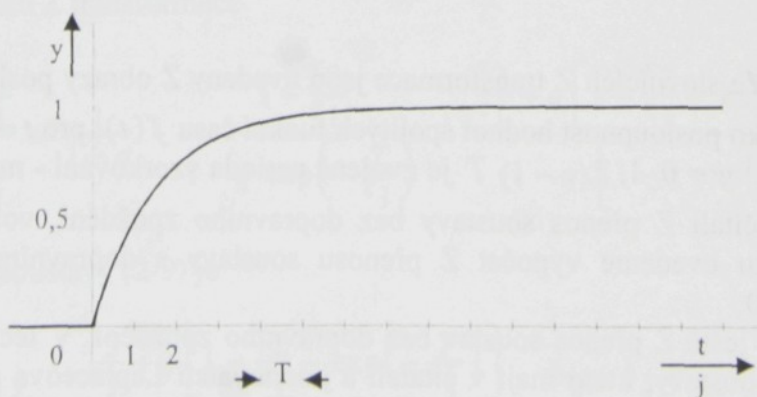
Poznámka 2-1: Rovnice (2-3) definuje Z obraz posloupnosti čísel. Při vstupu poruch typu impulz a skok do regulačního obvodu Z obrazy všech veličin tohoto obvodu existují, t.zn. lze nalézt komplexní proměnnou z , pro kterou součet (2-3) je konvergentní. Z obrazy všech diskutovaných veličin jsou racionální lomené funkce, což jsou podíly dvou polynomů. V případě, že $F(z)$ bude r.l. funkce označíme ji f . (Regulační obvod je složen ze vzájemně propojených lineárních systémů a jeho složitost může být i větší, než je složitost regulačních obvodů diskutovaných v této práci.)

Výstupní veličina soustavy y_t je spojitou veličinou - spojitou funkcí času. Jiný způsob značení této veličiny je $y(t)$. Výstupní veličinu soustavy počítač se vzorkovací periodou T měří, do počítače vstupuje posloupnost čísel y_j , $y_j = y(jT)$, T je perioda vzorkování.

Diskrétní přenos soustavy - Z přenos řetězce D/A převodník, soustava, A/D převodník hledáme jako Z obraz posloupnosti čísel, které vzniknou tím, že na vstup uvedeného řetězce přivedeme posloupnost čísel, jejíž obraz v Z transformaci je 1. Tato posloupnost čísel je, jak již bylo řečeno 1, 0, 0, 0, Soustava musí být v čase 0 v klidu s nulovou výstupní veličinou, $y_j = 0$ pro $j \leq 0$ a $u_j = 0$ pro $j < 0$. Soustava v čase 0 se nachází v **nulových počátečních podmínkách**.

Diskrétní přenos soustavy vyjadřuje závislost posloupnosti čísel y_j na posloupnosti čísel u_j . Tento přenos můžeme získat jednoduše použitím slovníku Z transformace. Ve slovníku Z transformace jsou uvedeny Z obrazy vybraných základních funkcí času. K těmto funkcím času jsou ve slovnících Z transformace uvedeny i jejich Laplaceovy obrazy.

Diskrétní přenos - Z přenos soustavy je Z obrazem součinu Laplaceova přenosu D/A převodníku a Laplaceova přenosu soustavy. Laplaceův obraz přenosu A/D převodníku nemusíme uvažovat, neboť tento pracuje jako vzorkovač, měří se zvolenou periodou T hodnoty spojitě funkce $f(t)$, přičemž $t = jT$. Proměnná j se nazývá též **diskrétním časem**. V přenosu D/A převodníku (2-2) je člen $\exp(-sT)$, který vyjadřuje dopravní zpoždění o čas T . Uvedené dopravní zpoždění jednoduše vyjádříme až v Z obraze. Proto nejprve vynásobíme přenos soustavy pouze přenosem $1/s$ a k tomuto součinu - k přechodové charakteristice soustavy, nalezneme Z obraz. Přechodová charakteristika soustavy (2-1) je nakreslena na obr.2-4.



Obr.2-4

Chceme-li použít slovníku Z transformace, rozložíme Laplaceův obraz přechodové charakteristiky na parciální zlomky

$$\frac{1}{s(\tau s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (2-4)$$

Ve slovníku Z transformace pro $\varepsilon = 0$ (viz poznámka 2-2 v následujícím textu) nalezneme obrazy obou parciálních zlomků

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \div \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q \exp(-\frac{T}{\tau})}, \quad q = z^{-1} \quad (2-5)$$

Pro přiřazení obrazů jsme použili znak $\div$. Na pravé straně přiřazení (2-5) je Z obraz přechodové charakteristiky f_j diskutované soustavy prvního řádu. Tento výraz upravíme

$$\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q \exp(-\frac{T}{\tau})} = \frac{q \left[1 - \exp(-\frac{T}{\tau}) \right]}{(1-q) \left[1 - q \exp(-\frac{T}{\tau}) \right]} = f \quad (2-6)$$

Diskrétní přenos soustavy získáme ze Z obrazu přechodové charakteristiky (2-6) $f + f_j$ tak, že nalezneme Z obraz funkce f_j posunuté o 1 doprava, tj. obraz f_{j-1} a od obrazu funkce f_j odečteme obraz funkce f_{j-1} . Při posunu funkce f_j doprava doplníme tuto funkci zleva nulovou hodnotou, takže

$$\begin{aligned} f_{j-1} &\div \sum_{j=0}^{\infty} f_{j-1} z^{-j}, \quad \text{jelikož } f_{-1} = 0 \\ f_{j-1} &\div \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^{-j} z^{-1} = f z^{-1} \end{aligned} \quad (2-7)$$

Diskrétní model soustavy (2-1) je

$$\begin{aligned} f - f z^{-1} &= f (1 - z^{-1}) = \frac{q \left[1 - \exp(-\frac{T}{\tau}) \right]}{1 - q \exp(-\frac{T}{\tau})} = q \frac{b_0}{1 + a_1 q} = \frac{y}{u} \\ z^{-1} &= q, \quad b_0, a_1 \text{ jsou vypočtené koeficienty.} \end{aligned} \quad (2-8)$$

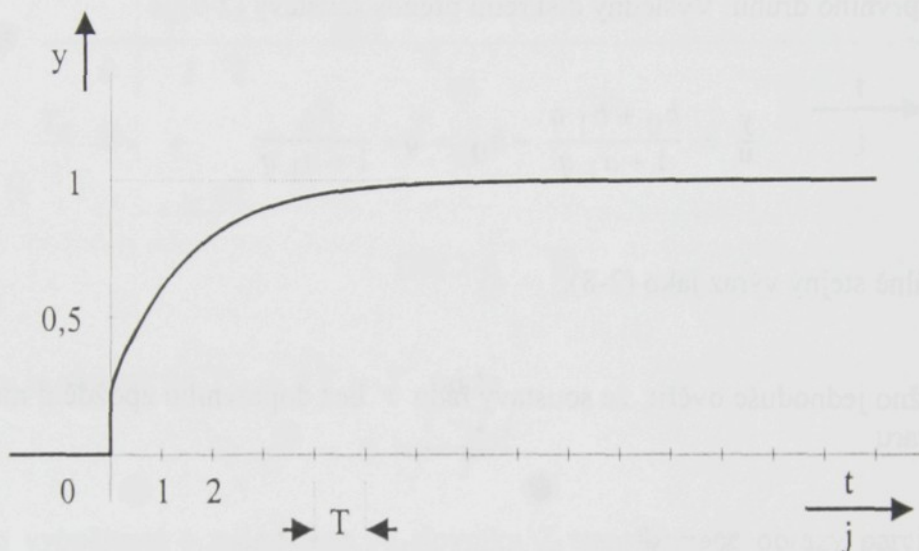
Poznámka 2-2: Ve slovnících Z transformace jsou uvedeny Z obrazy posloupností čísel f_j , které vzniknou jako posloupnost hodnot spojitých funkcí času $f(t)$, pro $t = (j + \varepsilon) T$, $f_j = f[(j + \varepsilon)T]$, $j = 0, 1, 2, \dots$, T je zvolená perioda vzorkování - měření, $0 \leq \varepsilon < 1$. V textu jsme počítali Z přenos soustavy bez dopravního zpoždění, volili jsme $\varepsilon = 0$. V následujícím textu uvedeme výpočet Z přenosu soustavy s dopravním zpožděním, kdy budeme volit $\varepsilon \neq 0$.

Diskutujeme ještě Z přenos soustav bez dopravního zpoždění. V technice se vyskytují (avšak zřídka) i soustavy, které mají v čitateli a jmenovateli Laplaceova přenosu polynomy stejného stupně. Na přechodové charakteristice těchto soustav je v čase 0 nespojitost prvního druhu, $\lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \neq 0$.

Z důvodu jednoduchého vysvětlení uvažujme soustavu opět prvního řádu s Laplaceovým přenosem

$$\frac{y}{u} = \frac{\tau_2 s + 1}{\tau_1 s + 1} \quad (2-9)$$

τ_1 , τ_2 jsou konstanty soustavy. Předpokládejme, že $0 < \tau_2 < \tau_1$. Přejchodová charakteristika této soustavy je



Obr.2-5

Pro přechodovou charakteristiku na obr.2-5 je $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \frac{\tau_2}{\tau_1}$. Laplaceův obraz přechodové charakteristiky diskutované soustavy rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{\tau_2 s + 1}{s(\tau_1 s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{1 - \frac{\tau_2}{\tau_1}}{s + \frac{1}{\tau_1}} \quad (2-10)$$

Při použití slovníku Z transformace

$$\frac{1}{s} - \frac{1 - \frac{\tau_2}{\tau_1}}{s + \frac{1}{\tau_1}} \div \frac{1}{1 - q} = \frac{1 - \frac{\tau_2}{\tau_1}}{1 - q \exp\left(-\frac{T}{\tau_1}\right)} = \frac{\frac{\tau_2}{\tau_1} + q \left[1 - \frac{\tau_2}{\tau_1} - \exp\left(-\frac{T}{\tau_1}\right)\right]}{(1 - q) \left[1 - q \exp\left(-\frac{T}{\tau_1}\right)\right]} \quad (2-11)$$

Diskrétní přenos soustavy (2-9) je

$$\frac{y}{u} = \frac{\frac{\tau_2}{\tau_1} + q \left[1 - \frac{\tau_2}{\tau_1} - \exp\left(-\frac{T}{\tau_1}\right)\right]}{1 - q \exp\left(-\frac{T}{\tau_1}\right)} = \frac{b_0 + b_1 q}{1 + a_1 q} \quad (2-12)$$

Tento diskretní přenos soustavy ale nemůžeme použít k návrhu číslicového regulátoru. Důvodem je to, že číslicový regulátor - počítač nejprve změří výstupní veličinu y_j soustavy, pak tuto informaci zpracuje a provede akční zásah - nastaví novou hodnotu řídicí veličiny u_j . Jelikož měříme nejprve y_j a potom určíme u_j (a ne obráceně), musíme v diskretní přechodové charakteristice f_j vynulovat její počáteční hodnotu pro $j = 0$. Tato počáteční hodnota je rovna velikosti nespojitosti prvního druhu na spojitě přechodové charakteristice $f(t)$ v čase $t=0$. Převod Laplaceova přenosu soustavy do Z přenosu ale tuto úvahu v sobě neobsahuje. Použitelný diskretní přenos soustavy pro účel návrhu regulátoru získáme z rovnosti (2-12) tak, že od pravé strany této rovnosti odečteme b_0 , což je velikost diskutované nespojitosti prvního druhu. Výsledný diskretní přenos soustavy (2-9) je

$$\frac{y}{u} = \frac{b_0 + b_1 q}{1 + a_1 q} - b_0 = q \frac{\beta_0}{1 + a_1 q} \quad (2-13)$$

což je formálně stejný výraz jako (2-8).

Je možno jednoduše ověřit, že soustavy řádu r bez dopravního zpoždění mají diskretní přenos ve tvaru

$$\frac{y}{u} = q \frac{b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + \dots + b_{r-1} q^{r-1}}{1 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots + a_r q^r} = q \frac{B}{A} \quad (2-14)$$

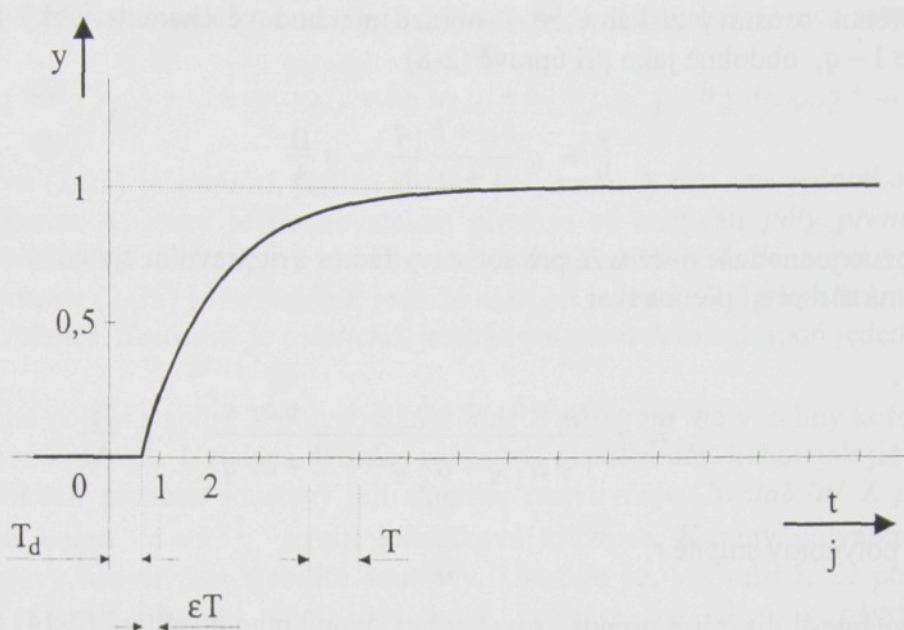
A je polynom stupně r ,

B je polynom stupně $r-1$.

Diskutujme dále soustavy s dopravním zpožděním. Pro jednoduchost uvažujme opět soustavu 1. řádu se zesílením 1. Laplaceův přenos této soustavy je

$$\frac{y}{u} = \frac{1}{\tau s + 1} \exp(-T_d s) \quad (2-15)$$

T_d je dopravní zpoždění. Uvažujme nejprve, že dopravní zpoždění T_d je menší než perioda vzorkování T , $0 < T_d < T$. Nejprve najdeme Laplaceův obraz přechodové charakteristiky soustavy bez dopravního zpoždění a rozložíme jej na parciální zlomky, viz (2-4). Nyní použijeme slovník Z transformace, ale ne již s nulovým ε . Význam koeficientu ε ve slovníku Z transformace byl již vysvětlen v poznámce 2-2. Vztah dopravního zpoždění T_d , koeficientu ε , indexu j a času t je zobrazen na obr.2-6, kde je přechodová charakteristika soustavy (2-15).



Obr.2-6

Z obrázku je zřejmé, že $T_d + \varepsilon T = T$, takže

$$\varepsilon = \frac{T - T_d}{T} \quad (2-16)$$

Pro takto vypočítané ε nalezneme ve slovníku Z transformace obrazy parciálních zlomků (2-4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} &\div \frac{1}{1 - q} - \frac{\exp\left(\frac{-\varepsilon T}{\tau}\right)}{1 - q \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)} = \\ &= \frac{1 - \exp\left(\frac{-\varepsilon T}{\tau}\right) + q \left[\exp\left(\frac{-\varepsilon T}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) \right]}{(1 - q) \left[1 - q \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) \right]} = \\ &= \frac{b_0 + b_1 q}{(1 - q) [1 + a_1 q]} \div f_j \end{aligned} \quad (2-17)$$

Ovšem pozor, první nenulová hodnota funkce f_j v rovnici (2-17) je již pro $j = 0$. Abychom získali Z obraz přechodové charakteristiky diskutované soustavy (2-15) musíme funkci f_j posunout o 1 doprava, tj. (2-17) vynásobíme q . Diskuze tohoto posunu byla již provedena, viz.(2-7). Z obraz přechodové charakteristiky soustavy (2-15) je

$$q \frac{b_0 + b_1 q}{(1 - q) [1 + a_1 q]} \quad (2-18)$$

Diskrétní přenos soustavy získáme ze Z obrazu přechodové charakteristiky tak, že (2-18) vynásobíme $1 - q$, obdobně jako při úpravě (2-8)

$$\frac{y}{u} = q \frac{b_0 + b_1 q}{1 + a_1 q} = q \frac{B}{A} \quad (2-19)$$

Je možno jednoduše ověřit, že pro soustavy řádu r s dopravním zpožděním T_d , $0 < T_d < T$ má diskretní přenos tvar

$$\frac{y}{u} = q \frac{b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + \dots + b_r q^r}{1 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots + a_r q^r} = q \frac{B}{A} \quad (2-20)$$

A, B jsou polynomy stupně r .

Porovnáme-li diskretní přenosy soustav bez dopravního zpoždění (2-14) a s dopravním zpožděním (2-20) menším než je perioda vzorkování, vidíme, že se formálně liší pouze v stupni polynomu B , při $T_d = 0$ je koeficient $b_r = 0$.

Z přenos soustavy (2-20) upravíme

$$(1 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots + a_r q^r) y = q (b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + \dots + b_r q^r) u \quad (2-21)$$

Rovnici (2-21) v časové oblasti odpovídá diferenční rovnice modelu soustavy

$$y_j + a_1 y_{j-1} + a_2 y_{j-2} + \dots + a_n y_{j-r} = b_0 u_{j-1} + b_1 u_{j-2} + b_2 u_{j-3} + \dots + b_r u_{j-r-1} \quad (2-22)$$

Rovnice (2-22) platí pro soustavy s dopravním zpožděním T_d , $0 < T_d < T$, pro $T_d = 0$ je koeficient $b_r = 0$.

Pro soustavy s dopravním zpožděním $T_d > T$ sestavíme diskretní model následujícím postupem. Označíme

$$v - 1 = \text{trunc}(T_d / T) \quad (2-23)$$

$\text{trunc}(x)$ je funkce, která vypočte celočíselnou část x . Celé číslo v vyhovuje též nerovnosti

$$(v - 1) T < T_d < v T \quad (2-24)$$

Vypočteme upravené dopravní zpoždění $T_{d\text{modif}} = T_d - (v - 1) T$, $T_{d\text{modif}} < T$. Pro takto upravené dopravní zpoždění již budeme postupovat obdobně jako u soustavy (2-15), nebo v případě, že $T_{d\text{modif}} = 0$ potom budeme postupovat obdobně jako u soustavy (2-1). Diskretní model soustavy řádu r s dopravním zpožděním $T_d > 0$ je

$$\frac{y}{u} = q^v \frac{B}{A} \quad (2-25)$$

v je celé číslo vypočtené z (2-23), $v > 0$,

A je polynom stupně r ,

B je polynom stupně $r-1$ jestliže T_d je celočíselným (i nulovým) násobkem T , jinak je stupně r .

Diskrétnímu Z přenosu modelu soustavy (2-25) odpovídá diferenční rovnice soustavy

$$y_j + a_1 y_{j-1} + a_2 y_{j-2} + \dots + a_r y_{j-r} = b_0 u_{j-v} + b_1 u_{j-v-1} + b_2 u_{j-v-2} + \dots + b_r u_{j-v-r} \quad (2-26)$$

Soustava (2-25) je **stabilní**, jestliže kořeny polynomu **A** leží vně jednotkové kružnice. Kořeny polynomu **A**, který je jmenovatelem přenosu se nazývají **póly přenosu**. Kořeny polynomu **B**, který je čitatелеm přenosu se nazývají **nulové body** a nebo pouze **nuly přenosu**. **Soustava** (2-25) je **nestabilní**, jestliže alespoň jeden kořen polynomu **A** leží uvnitř jednotkové kružnice. **Soustava** je **astatická**, jestliže polynom **A** má alespoň jeden kořen $q = 1$

Zavedme pojem stabilní Z polynom. **Stabilní Z polynom** má všechny kořeny $q = z^{-1}$ vně jednotkové kružnice. Uvedená definice může být diskutabilní, neboť jak již bylo řečeno polynom v čitateli přenosu soustavy její stabilitu neovlivňuje. **Nestabilní Z polynom** má alespoň jeden kořen $q = z^{-1}$ uvnitř jednotkové kružnice. Kořeny polynomu v čitateli přenosu soustavy neovlivňují stabilitu soustavy. Ukazuje se, viz odst.5, že poloha kořenů polynomu v čitateli přenosu vůči jednotkové kružnici má vliv na návrh stabilního zpětnovazebního číslicového regulátoru.

Obdobné pojmy zavedeme i pro polynomy v Laplaceově transformaci. **Stabilní Laplaceův polynom** má všechny kořeny v levé polorovině. **Nestabilní Laplaceův polynom** má alespoň jeden kořen v pravé polorovině.

Ukažme, jak dopravní zpoždění soustavy (2-15) ovlivňuje polohu kořenu polynomu **B**, polynomu v čitateli Z přenosu soustavy. Kořen polynomu **B**, viz (2-17) je

$$q = -\frac{b_0}{b_1} = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon T}{\tau}\right) - 1}{\exp\left(-\frac{\varepsilon T}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)} \quad (2-27)$$

Pro $T_d = 0.1 T$ je $\varepsilon = 0.9$, pro $T_d = 0.9 T$ je $\varepsilon = 0.1$, viz (2-16). Uvedme tabulku hodnot kořene polynomu **B** v závislosti na dopravním zpoždění soustavy (2-15) při volbě $\tau = 1 \text{ sec}$, $T = 0.2 \text{ sec}$.

T_d	ε	kořen polynomu B
0.1 T	0.9	-9.9598
0.47504 T	0.52496	-1.0
0.9 T	0.1	-0.1226

Tab.2-1

Z tabulky je zřejmé, že pro dopravní zpoždění T_d , $0 < T_d < 0.47504 T$, je polynom **B** stabilní (jeho kořen leží vně jednotkové kružnice), pro T_d , $0.47504 T < T_d < T$ je polynom **B** nestabilní. Hodnota 0.47504 byla získána iteračním výpočtem a je zaokrouhlená.

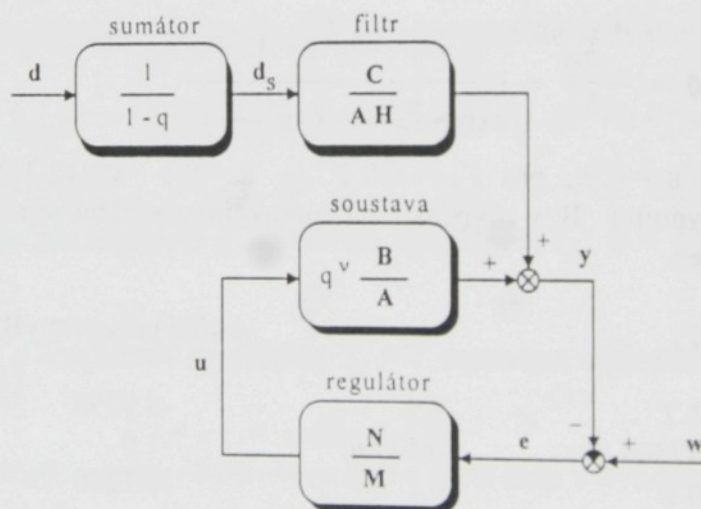
Poznámka 2-3: Soustavu, která má v čitateli Z přenosu nestabilní polynom nazveme **soustavou s neminimálně fázovým Z přenosem**. Soustavu, která má v čitateli Laplaceova přenosu nestabilní polynom nazveme **soustavou s neminimálně fázovým Laplaceovým přenosem**. Soustavě s neminimálně fázovým Laplaceovým přenosem nemusí odpovídat neminimálně fázový Z přenos.

Poznámka 2-4: Prozatím jsme předpokládali, že čas zpracování informace na počítači je podstatně kratší, než je perioda vzorkování. Pro velmi rychlé soustavy tento předpoklad již nemusí být splněn. V tomto případě dobu zpracování informace na počítači myšleně zahrneme do dopravního zpoždění soustavy.

Poznámka 2-5: Uvažujme Z přenos soustavy (2-15). *Soustava*, jejíž polynom A má alespoň jeden kořen $q = 1$ se nazývá *astatická*. V Laplaceově přenosu má astatická soustava ve jmenovateli polynom, který má alespoň jeden kořen $s = 0$. Pól přenosu leží v počátku souřadného systému. V případě jednoho pólu v počátku souřadnic astatická soustava obsahuje v přímé cestě jeden integrátor bez zpětné vazby. Příklad astatické dynamické soustavy je stejnosměrný motor pohánějící suport obráběcího stroje. Výstupní veličinou je poloha suportu, vstupní veličinou je elektrické napětí přiváděné na vstup motoru.

3. Číslicový regulační obvod.

V technické praxi vždy do regulačního obvodu vstupuje nenulová žádaná hodnota w regulované veličiny y . V regulačním obvodu na obr.3-1 prozatím budeme uvažovat, že porucha d je nulová. Proč porucha d vstupuje do sumátoru bude diskutováno v následujícím textu.



Obr.3-1

Na obr.3-1 A, B, C, H, M, N jsou polynomy proměnné q . Budeme uvažvat že w je jednotkový skok. Běžným požadavkem na kvalitu regulace je, aby v ustáleném stavu, pro $j \rightarrow \infty$, bylo $y_j = w_j = 1$, $e_j = 0$, což je požadavek nulové regulační odchylky v ustáleném stavu. Z obr.3-1 při použití blokové algebry vyjádříme regulační odchylku

$$e = \frac{1}{1 + q^v \frac{BN}{AM}} w \quad (3-1)$$

Obraz jednotkového skoku v Z transformaci je

$$\frac{1}{1-q}, \quad q = z^{-1} \quad (3-2)$$

Z obraz regulační odchylky je

$$e = \frac{AM}{(1-q)(AM + q^V BN)} \quad (3-3)$$

Použijme větu o konečné hodnotě funkce f_j na Z obraz funkce (3-3)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} e_j = e_\infty = \lim_{q \rightarrow 1} (1-q) \frac{AM}{(1-q)(AM + q^V BN)} =$$

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{AM}{AM + q^V BN} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{R}{P} \quad (3-4)$$

P , R jsou polynomy proměnné q , $P = AM + q^V BN$, $R = AM$. Jestliže polynom R nebude mít kořen $q = 1$, potom

$$e_\infty = \frac{\sum \text{koef. polynomu } R}{\sum \text{koef. polynomu } P} \neq 0 \quad (3-5)$$

Požadavek nulové regulační odchylky v ustáleném stavu splníme jen tak, že polynom R bude obsahovat kořen $q = 1$.

Soustavy astatické jsou takové soustavy, jejichž polynom A ve jmenovateli přenosu má alespoň jednonásobný kořen $q = 1$ a ostatní kořeny leží vně jednotkové kružnice. U astatických soustav požadavek nulové regulační odchylky v ustáleném stavu je splněn. **Soustava statická** je stabilní soustavou. U statické soustavy je pro nenulovou hodnotu vstupní veličiny ustálená hodnota výstupní veličina též nenulová. Statická charakteristika statické lineární soustavy je přímka se směrnici k , nebo $-k$, $0 < k < \infty$.

Zavedená terminologie nemá název pro nestabilní soustavy, jejichž jmenovatel přenosu má též kořen $q = 1$. Důvodem je skutečnost, že takovéto soustavy v technice prakticky neexistují.

Soustavy, jejichž polynom A ve jmenovateli přenosu nemá kořen $q = 1$ mohou být stabilní a nestabilní. U těchto soustav požadavek nulové regulační odchylky v nulovém stavu je splněn jen tehdy, jestliže kořen $q = 1$ má polynom M jmenovatele přenosu regulátoru. Jestliže o tomto kořenu víme, můžeme tento kořen z polynomu M vyjmout a člen s přenosem

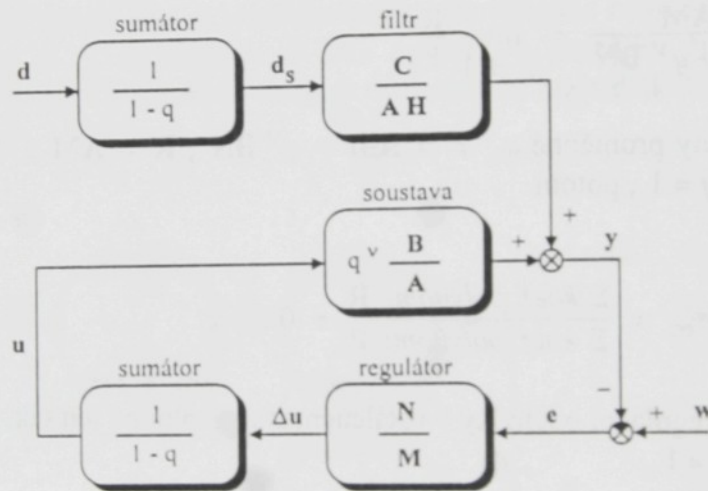
$$\frac{1}{1-q} \quad (3-6)$$

zapojíme do regulačního obvodu na př. za regulátor. Přenos (3-6) je Z obrazem jednotkového skoku. Člen s tímto Z přenosem je sumátor, zdůvodnění je uvedeno v následujícím textu.

Splnění požadavku nulové regulační odchylky ve spojitých regulačních obvodech se dosahuje zapojením integrační složky PID regulátoru. Sumátor v číslicovém regulačním obvodu odpovídá integrátoru ve spojitém regulačním obvodu. Jelikož v následujícím textu budeme při návrhu regulátorů minimalizovat rozšířené kvadratické kritérium, tuto úvahu o sumátoru v regulačním obvodu bychom vlastně ani nemuseli provést a kořen $q = 1$ by vyšel jako kořen polynomu M regulátoru. Jestliže zapojíme sumátor do regulačního obvodu předem, snížíme počet matematických operací při výpočtu regulátoru. *Pro stabilní statické a nestabilní soustavy (jejichž Z přenos nemá pól $q = 1$) budeme tedy uvažovat regulátor, za kterým v sérii je zapojen sumátor, viz obr.3-2. Pro astatické soustavy budeme uvažovat regulátor bez sumátoru, viz obr.3-1.*

V následujícím textu budeme navrhovat optimální regulátor též pro případ, že do regulačního obvodu z obr.3-1 nebo z obr.3-2 vstoupí porucha d ve tvaru jednotkového impulsu. Kdybychom nepoužili na diskutovaných schématech sumátor s přenosem

$\frac{ds}{d} = \frac{1}{1-q}$, při návrhu regulátoru by byl vypočítán polynom regulátoru N tak, aby jeden jeho kořen byl $q = 1$. Došlo by k nežádoucímu zkrácení s polynomem $1 - q$ sumátoru, který je v regulačním obvodu na obr.3-2 zapojen za regulátorem.



Obr.3-2

V regulačním obvodu na obr.3-2 jsou zapojeny dva členy s přenosem $\frac{1}{1-q}$. Vybereme jeden,

jehož přenos je
$$\frac{u}{\Delta u} = \frac{1}{1-q} \quad (3-7)$$

Vysvětleme, že tento člen je *sumátor*. Rovnici (3-7) upravíme a zapíšeme v čase

$$\begin{aligned} (1-q) u &= \Delta u, \\ u_j - u_{j-1} &= \Delta u_j \end{aligned}$$

Uvedenou rekursivní rovnici je možno nahradit součtem

$$u_j = \sum_{i=0}^j \Delta u_i,$$

takže člen s přenosem (3-7) je možno nazvat sumátorem.

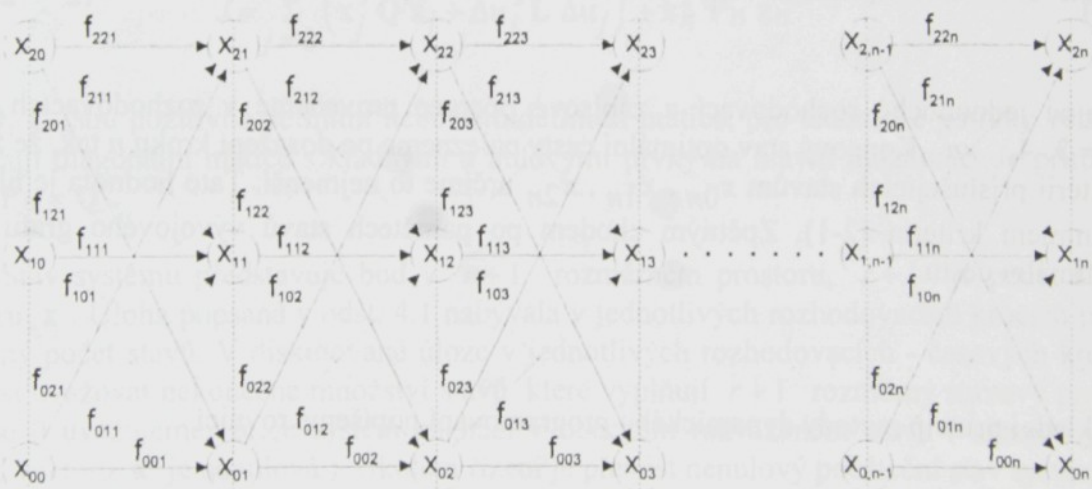
Poznámka 3-1: Do regulačních obvodů na obr.3-1 a obr.3-2 vstupuje porucha d_s do bloku, který jsme označili názvem filtr. Tento filtr má přenos $\frac{C}{AH}$. Budeme-li uvažovat $H = 1$, potom přenosem filtru jsou popsány poruchy, které vstupují v kterémkoliv místě do struktury regulované soustavy. Jestliže poruchy ještě před vstupem do regulované soustavy procházejí jinou dynamickou soustavou, potom přenos filtru je $\frac{C}{AH}$.

4. Dynamické programování

Vysvětlíme princip této metody nejprve na jednoduché diskrétní úloze. Pro řízení dynamického systému bude tato úloha zevšeobecněna.

4.1 Dynamické programování použité pro sekvenční rozhodovací úlohu s konečným počtem stavů v každém sekvenčním rozhodovacím kroku

Mějme nalézt cestu orientovaným grafem uvedeným na obr.4-1 tak, aby součet penalizací na této cestě byl minimální. V grafu penalizací f_{klj} je označena cesta z uzlu $x_{k,j-1}$ do uzlu x_{lj} .



Obr.4-1

Součet penalizací při průchodu jakoukoliv cestou uvedeným grafem z jednoho libovolného počátečního uzlu (z uzlu x_{00} , nebo x_{10} , nebo x_{20}) do libovolného koncového uzlu (do uzlu x_{0n} , nebo x_{1n} , nebo x_{2n}) označíme

$$J = \sum_{j=1}^n f_{klj} \quad (4-1)$$

Rovnici (4-1) nazveme optimalizačním kritériem. V uvedeném orientovaném grafu je zadána množina možných výchozích uzlů a množina možných koncových uzlů. Uvedená optimalizační úloha je úlohou s volným počátkem a volným koncem. Pokud by byl orientovaným grafem zadán jeden výchozí uzel, hovořili bychom o úloze s pevným počátkem. Pokud by byl orientovaným grafem zadán jeden koncový uzel, hovořili bychom o úloze s pevným koncem. Uvedené typy počátku a konce orientovaného grafu změní pouze první a poslední optimalizační krok metody dynamického programování.

Základní princip metody dynamického programování je jednoduchý. Místo vyhodnocování všech možných průchodů, cest uvedeným grafem nalezneme optimální cestu efektivnějším postupem, který je popsán v následujícím textu. Ke stavu x_{01} v rozhodovacím kroku $j = 1$, viz (4-1), nalezneme ze tří možných cest končících v tomto stavu tu, která má nejmenší penalizaci, tuto penalizaci a číslo příslušné cesty (0, 1 nebo 2) zapíšeme na paměťová místa příslušející stavu x_{01} . Penalizaci zapsanou na paměťové místo příslušející stavu x_{01} nazveme minimem kritéria příslušejícího tomuto stavu. Totéž provedeme ve stavech x_{11} , x_{21} .

Ke stavu x_{02} v rozhodovacím kroku $j = 2$ nalezneme ze tří možných cest končících v tomto stavu tu, pro kterou součet její penalizace a minima kritéria příslušejícího výchozímu stavu této cesty je minimální. Uvedený minimální součet nazveme opět minimem kritéria příslušejícího stavu x_{02} a zapíšeme jej na paměťové místo příslušející tomuto stavu. Na toto paměťové místo zapíšeme i číslo vybrané cesty. Totéž provedeme ve stavech x_{12} , x_{22} .

Stejně jednoduché rozhodovací a zápisové operace provedeme v rozhodovacích krocích $j = 3, 4, \dots, n$. Koncový stav optimální cesty nalezneme po dosažení kroku n tak, že z minim kritérií příslušejících stavům x_{0n} , x_{1n} , x_{2n} určíme to nejmenší. Tato hodnota je hledaným minimem kritéria (2-1). Zpětným chodem po pamětech stavů vývojového grafu určíme optimální cestu.

Základní princip metody dynamického programování popíšeme rovnicí

$$\min J(x_{lj}) = \min_k \left\{ f_{k,l,j-1} + \min J(x_{k,j-1}) \right\} \quad (4-2)$$

pro $j = 1$ až n , pro $l = 0$ až 2 a pro $k = 0$ až 2 ,
při definování $\min J(x_{k0}) = 0$ pro $k = 0$ až 2 .

Rovnice (4-2) se nazývá **Bellmanova**. Uvedené řešení úlohy je provedeno ve směru vzrůstajícího indexu j . Rozborem úlohy je zřejmé, že úlohu je možno řešit i ve směru klesajícího indexu j , tj. při postupu proti šipkám orientovaného grafu.

4.2 Dynamické programování použité pro číslicové řízení lineárních dynamických systémů

Lineární dynamický systém MIMO (multi input, multi output ... systém s více vstupními a více výstupními veličinami) popíšeme rovnicemi

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{A} \mathbf{x}_{j-1} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_{j-1} \quad (4-3)$$

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{C} \mathbf{x}_j \quad (4-4)$$

kde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ jsou matice,

$\mathbf{x}$ je vektor stavových veličin soustavy,

$\Delta \mathbf{u}$ je vektor přírůstků vstupních - řídicích - akčních veličin soustavy,

$\mathbf{y}$ je vektor výstupních veličin soustavy,

indexy j , $j-1$ vyjadřují příslušnost vektorů k diskrétnímu času. V následujícím textu budeme index j nazývat časem.

Poznámka 4-1: V rovnici (4-3) jsme použili vektor přírůstků řídicích veličin $\Delta \mathbf{u}_{j-1}$ místo vektoru řídicích veličin $\mathbf{u}_{j-1}$, jak je běžné v literatuře, viz [kn2/78], [kn1/82], [sk1/79]. Do popisu *statického systému* jsme zařadili i sumátory na řídicích veličinách. Takovýto popis statického systému je výhodný při řešení minimalizace rozšířeného kvadratického kritéria, ve kterém jsou penalizovány i přírůstky řídicích veličin. Takže v (4-3), (4-4) má matice $\mathbf{B}$ $(r+1)$ řádků a *jeden* sloupec, je rozměru $(r+1, 1)$, $\mathbf{A}$ je rozměru $(r+1, r+1)$, $\mathbf{C}$ je rozměru $(1, r+1)$.

Rozšířené kvadratické kritérium kvality regulace zapíšeme

$$J = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\mathbf{x}_j^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_j + \Delta \mathbf{u}_j^T \mathbf{L} \Delta \mathbf{u}_j \right) + \mathbf{x}_n^T \mathbf{P}_n \mathbf{x}_n \quad (4-5)$$

kde $\mathbf{Q}$, $\mathbf{L}$ jsou pozitivně definitní nebo semidefinitní matice, pro technické potřeby většinou postačují diagonální matice s kladnými a nulovými prvky na hlavní diagonále. Je přirozené volit $\mathbf{P}_n = \mathbf{Q}$.

Stav systému představuje bod v $r+1$ rozměrném prostoru, $r+1$ je počet složek vektoru $\mathbf{x}$. Úloha popsána v odst. 4.1 nabývala v jednotlivých rozhodovacích krocích pouze konečný počet stavů. V diskutované úloze v jednotlivých rozhodovacích - časových krocích je třeba uvažovat nekonečné množství stavů, které vyplňují $r+1$ rozměrný stavový prostor. V čase 0 uvažujeme, že se systém nachází v obecném rozváženém stavu (alespoň jedna složka vektoru $\mathbf{x}$ je nenulová). Úkolem řízení je převést nenulový počáteční stav systému do počátku diskutovaného prostoru - do nulového stavu (všechny složky stavového vektoru mají být nulové) při nalezení minima kritéria (4-5). Budeme prozatím předpokládat, že v průběhu uvedeného řízení nebude soustava buzena dalšími poruchami. V technických úlohách se nejčastěji uvažuje, že počáteční nenulový stav systému je vybuzen skokovou poruchou. V následujícím textu ukážeme, že skoková, nebo impulzní porucha je dostatečně obecná pro návrh regulátoru. Úlohu budeme řešit proti směru plynutí času, tj. pro $j = n-1, n-2, \dots, 0$. Tento postup volíme z toho důvodu, že při úpravě Bellmanovy rovnice využijeme rovnice (4-3) (nemusíme tuto rovnici upravovat pro záporně plynoucí čas). **Bellmanova rovnice** pro diskutovanou úlohu má tvar

$$\min J(\mathbf{x}_j) = \min_{\Delta \mathbf{u}_j} \left\{ \mathbf{x}_j^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_j + \Delta \mathbf{u}_j^T \mathbf{L} \Delta \mathbf{u}_j + \min J(\mathbf{x}_{j+1}) \right\}$$

pro $j = n-1$ (při snižování proměnné j) až do $j = 0$

(4-6)

Vývoj stavu soustavy - cesty přechodu z rozhodovacího kroku j do kroku $j+1$ jsou určeny velikostí přírůstků řídicích veličin $\Delta \mathbf{u}_j$. Penalizace - přírůstek součtového kvadratického kritéria v j -tém kroku je $\mathbf{x}_j^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_j + \Delta \mathbf{u}_j^T \mathbf{L} \Delta \mathbf{u}_j$.

Bellmanovu rovnici pro start úlohy, pro $j = n-1$, zapíšeme

$$\begin{aligned} \min J(\mathbf{x}_{n-1}) &= \min_{\Delta \mathbf{u}_{n-1}} \left\{ \mathbf{x}_{n-1}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{n-1} + \Delta \mathbf{u}_{n-1}^T \mathbf{L} \Delta \mathbf{u}_{n-1} + \min J(\mathbf{x}_n) \right\} = \\ &= \min_{\Delta \mathbf{u}_{n-1}} \left\{ \mathbf{x}_{n-1}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{n-1} + \Delta \mathbf{u}_{n-1}^T \mathbf{L} \Delta \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{x}_n^T \mathbf{P}_n \mathbf{x}_n \right\} \end{aligned} \quad (4-7)$$

Počáteční hodnotu optimalizačního kritéria pro $j = n$ jsme definovali

$$\min J(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_n^T \mathbf{P}_n \mathbf{x}_n \quad (4-8)$$

Dokažme indukcí, že existuje posloupnost pozitivně semidefinitních matic $\mathbf{P}_j$ taková, že

$$\min J(\mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_j^T \mathbf{P}_j \mathbf{x}_j \quad (4-9)$$

⊕ Začátek důkazu

Posloupnost matic $\mathbf{P}_j$ budeme počítat při postupné minimalizaci Bellmanovy rovnice (4-6). Dosadíme (4-9) do pravé strany rovnice (4-6) a pro úpravu použijme rovnici soustavy (4-3).

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}_j} \left\{ \mathbf{x}_j^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_j + \Delta \mathbf{u}_j^T \mathbf{L} \Delta \mathbf{u}_j + \mathbf{x}_{j+1}^T \mathbf{P}_{j+1} \mathbf{x}_{j+1} \right\} = \\ = \min_{\Delta \mathbf{u}_j} \left\{ \mathbf{x}_j^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_j + \Delta \mathbf{u}_j^T \mathbf{L} \Delta \mathbf{u}_j + \left(\mathbf{x}_j^T \mathbf{A}^T + \Delta \mathbf{u}_j^T \mathbf{B}^T \right) \mathbf{P}_{j+1} \left(\mathbf{A} \mathbf{x}_j + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_j \right) \right\} \end{aligned} \quad (4-10)$$

Použijme formální úpravy

$$\Delta \mathbf{u}_j^T \mathbf{L} \Delta \mathbf{u}_j + \mathbf{x}_j^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_j^T & \mathbf{x}_j^T \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_j \\ \mathbf{x}_j \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_j + \mathbf{A} \mathbf{x}_j = \Lambda \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_j \\ \mathbf{x}_j \end{bmatrix}.$$

Matice Ω je složena ze submatic $\mathbf{L}, \mathbf{Q}$ a matic s nulovými prvky $\Omega = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}$,
matice Λ je složena ze submatic $\mathbf{B}, \mathbf{A}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$.

(4-10) přepíšeme

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_j} \left\{ \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_j^T & \mathbf{x}_j^T \end{bmatrix} \left(\Omega + \Lambda^T \mathbf{P}_{j+1} \Lambda \right) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_j \\ \mathbf{x}_j \end{bmatrix} \right\} \quad (4-11)$$

Podle struktury vektoru $\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_j \\ \mathbf{x}_j \end{bmatrix}$ rozložíme symetrickou matici $\Omega + \Lambda^T \mathbf{P}_{j+1} \Lambda$ na submatice a tyto submatice označíme

$$\Omega + \Lambda^T \mathbf{P}_{j+1} \Lambda = \begin{bmatrix} \chi & \zeta^T \\ \zeta & \Theta \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

Uvedenou matici rozložíme na součin dolní trojúhelníkové matice s jedničkami na hlavní diagonále, diagonální matice a transponované uvedené trojúhelníkové matice. Tento součinný rozklad se nazývá LD rozklad (lower diagonal decomposition), nebo též U-D rozklad [sb1/80].

$$\begin{aligned} \Omega + \Lambda^T \mathbf{P}_{j+1} \Lambda &= \begin{bmatrix} \chi & \zeta^T \\ \zeta & \Theta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0}^T \\ \Gamma & \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^T & \Gamma^T \\ \mathbf{0} & \Psi^T \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Phi \mathbf{D}_u \Phi^T & \Phi \mathbf{D}_u \Gamma^T \\ \Gamma \mathbf{D}_u \Phi^T & \Gamma \mathbf{D}_u \Gamma^T + \Psi \mathbf{D}_x \Psi^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-13)$$

Φ, Ψ jsou spodní trojúhelníkové matice s jedničkami na diagonále (nad diagonálou mají nuly),

Γ je obdélníková matice,

$\mathbf{0}$ je obdélníková matice s nulovými prvky,

$\mathbf{D}_u, \mathbf{D}_x$ jsou diagonální matice,

podle zavedeného označení je $\chi = \Phi \mathbf{D}_u \Phi^T$, $\zeta^T = \Phi \mathbf{D}_u \Gamma^T$, $\Theta = \Gamma \mathbf{D}_u \Gamma^T + \Psi \mathbf{D}_x \Psi^T$.

Poznámka 4-2: Matice χ, ζ, Θ ve (4-13) mají mít index $j-1$, matice $\Phi, \Psi, \Gamma, \mathbf{D}_u, \mathbf{D}_x$ index j . Tento index vyjadřuje jejich příslušnost k $j-1$ nebo k j -tému rozhodovacímu - optimalizačnímu - časovému kroku. Z důvodu zjednodušení zápisu jsme tento index prozatím vynechali.

Poznámka 4-3: V případě soustavy SISO (s jednou vstupní a jednou výstupní veličinou)

χ je skalár,

ζ je vektor,

Φ je skalár a jeho hodnota je 1,

Γ je vektor,

$\mathbf{0}$ je vektor s nulovými prvky,

$\mathbf{D}_u$ je skalár.

Do části (4-11), kterou minimalizujeme dosadíme (4-13) a upravíme

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_j^T & \mathbf{x}_j^T \end{bmatrix} (\Omega + \Lambda^T \mathbf{P}_{j+1} \Lambda) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_j \\ \mathbf{x}_j \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_j^T & \mathbf{x}_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \mathbf{D}_u \Phi^T & \Phi \mathbf{D}_u \Gamma^T \\ \Gamma \mathbf{D}_u \Phi^T & \Gamma \mathbf{D}_u \Gamma^T + \Psi \mathbf{D}_x \Psi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_j \\ \mathbf{x}_j \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta \mathbf{u}_j^T \Phi \mathbf{D}_u \Phi^T \Delta \mathbf{u}_j + \mathbf{x}_j^T \Gamma \mathbf{D}_u \Phi^T \Delta \mathbf{u}_j + \Delta \mathbf{u}_j^T \Phi \mathbf{D}_u \Gamma^T \mathbf{x}_j + \mathbf{x}_j^T (\Gamma \mathbf{D}_u \Gamma^T + \Psi \mathbf{D}_x \Psi^T) \mathbf{x}_j = \\
&= (\Delta \mathbf{u}_j^T \Phi + \mathbf{x}_j^T \Gamma) \mathbf{D}_u (\Phi^T \Delta \mathbf{u}_j + \Gamma^T \mathbf{x}_j) + \mathbf{x}_j^T \Psi \mathbf{D}_x \Psi^T \mathbf{x}_j
\end{aligned} \tag{4-14}$$

Minimum výrazu - kvadratické formy (4-14) vzhledem k $\Delta \mathbf{u}_j$ je dosaženo, jestliže

$$\begin{aligned}
&\Phi^T \Delta \mathbf{u}_j + \Gamma^T \mathbf{x}_j = 0, \\
&\Delta \mathbf{u}_j = -(\Phi^T)^{-1} \Gamma^T \mathbf{x}_j
\end{aligned} \tag{4-15}$$

a hodnota tohoto minima je

$$\min J(\mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_j^T \Psi \mathbf{D}_x \Psi^T \mathbf{x}_j \tag{4-16}$$

Jak je uvedeno v poznámce 4-2 v předcházejícím textu, matice $\Phi, \Psi, \Gamma, \mathbf{D}_u, \mathbf{D}_x$ mají být označeny indexem j , který vyjadřuje příslušnost těchto matic k j -tému optimalizačnímu kroku. Nyní již k uvedeným maticím index j připsáme. Přepíšeme nejprve rovnice (4-15) a (4-16).

$$\Delta \mathbf{u}_j = -(\Phi_j^T)^{-1} \Gamma_j^T \mathbf{x}_j = \mathbf{R}_j (-\mathbf{x}_j) \tag{4-17}$$

$$\min J(\mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_j^T \Psi_j \mathbf{D}_{x_j} \Psi_j^T \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j^T \mathbf{P}_j \mathbf{x}_j \tag{4-18}$$

(4-17) je rovnice optimálního stavového regulátoru pro j -tý výpočtový krok. V této rovnici jsme součin matic $(\Phi_j^T)^{-1} \Gamma_j^T$ označili $\mathbf{R}_j$. Důvod, proč jsme záporné znaménko ponechali v (4-17) u vektoru $\mathbf{x}_j$ je vyjádření záporné zpětné vazby v regulačním obvodu.

$$\mathbf{R}_j = (\Phi_j^T)^{-1} \Gamma_j^T \tag{4-19}$$

V rovnici (4-18) jsme součin matic $\Psi_j \mathbf{D}_{x_j} \Psi_j^T$ označili $\mathbf{P}_j$.

$$\mathbf{P}_j = \Psi_j \mathbf{D}_{x_j} \Psi_j^T \tag{4-20}$$

Matice $\mathbf{P}_{j+1}$ je pozitivně semidefinitní. LD rozklad matice $\Omega + \Lambda^T \mathbf{P}_{j+1} \Lambda$, viz (4-13) a rovnice (4-20) zajišťují, že i $\mathbf{P}_j$ je maticí pozitivně semidefinitní.

⊖ Konec důkazu

Bellmanovu rovnici (4-6) můžeme zapsat

$$\mathbf{x}_j^T \mathbf{P}_j \mathbf{x}_j = \min_{\Delta \mathbf{u}_j} \left\{ \mathbf{x}_j^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_j + \Delta \mathbf{u}_j^T \mathbf{L} \Delta \mathbf{u}_j + \mathbf{x}_{j+1}^T \mathbf{P}_{j+1} \mathbf{x}_{j+1} \right\} \tag{4-21}$$

Tato rovnice, pro počáteční $j = n - 1$ a při snižování proměnné j až do $j = 0$, je rekurzivní a vyjadřuje předpis, jak počítat posloupnost pozitivně semidefinitních matic $\mathbf{P}_j$, vyjdeme-li z počáteční hodnoty $\mathbf{P}_n = \mathbf{Q}$.

Uvedli jsme postup pro výpočet posloupnosti matic $\mathbf{P}_j$. Při použití (4-20) musíme provádět v každém j -tém optimalizačním kroku úplný součinný LD rozklad (4-13), t.zn. musíme počítat všechny matice $\Phi_j, \Psi_j, \Gamma_j, \mathbf{D}_{u_j}, \mathbf{D}_{x_j}$. Uvedme postup, který bude výpočtově méně náročný. Při LD rozkladu budeme počítat pouze matice $\Phi_j, \Gamma_j, \mathbf{D}_{u_j}$, provedeme jen část LD rozkladu. Ze (4-13) je zřejmé, že

$$\Theta_{j+1} = \Gamma_j \mathbf{D}_{u_j} \Gamma_j^T + \Psi_j \mathbf{D}_{x_j} \Psi_j^T.$$

Při použití (4-20)

$$\Theta_{j+1} = \Gamma_j \mathbf{D}_{u_j} \Gamma_j^T + \mathbf{P}_j,$$

takže

$$\mathbf{P}_j = \Theta_{j+1} - \Gamma_j \mathbf{D}_{u_j} \Gamma_j^T \quad (4-22)$$

Při použití (4-22) místo (4-20) pro výpočet $\mathbf{P}_j$ můžeme provést jen část LD rozkladu.

Rekurzivní *algoritmus dynamického programování* pro návrh optimálního stavového regulátoru pro j -tý optimalizační krok obsahuje tyto výpočty:

- 1) výpočet matice $\Omega + \Lambda^T \mathbf{P}_{j+1} \Lambda$ na základě znalosti matice $\mathbf{P}_{j+1}$, matic soustavy $\mathbf{B}, \mathbf{A}$ a váhových matic $\mathbf{L}, \mathbf{Q}$ rozšířeného kvadratického kritéria, viz (4-5), (4-8) a popis úprav rovnice (4-10),
- 2) výpočet matic $\Phi_j, \Gamma_j, \mathbf{D}_{u_j}$ v součinném LD rozkladu (4-13),
- 3) výpočet matice $\mathbf{P}_j$ z (4-22).

Matici optimálního stavového regulátoru jsme ve (4-17) označili $\mathbf{R}_j$. Posloupnost těchto matic pro $j = n-1, n-2, n-3, \dots$ konverguje k matici, kterou označíme $\mathbf{R}_0$. V ověřovacích příkladech se vždy jednalo řádově o desítky rekurzivních optimalizačních kroků výpočtu, kdy bylo dosaženo prakticky ustálené hodnoty matice $\mathbf{R}_0$. Není třeba si pamatovat posloupnost matic $\mathbf{P}_j$ pro $j = n-1, n-2, n-3, \dots$, můžeme si pamatovat jen poslední vypočtenou matici $\mathbf{P}_j$ a po několika počátečních optimalizačních krocích můžeme z této matice vypočítávat matici stavového regulátoru $\mathbf{R}_j$, který můžeme zapojit do regulačního obvodu. Rekurzivním výpočtem můžeme matici $\mathbf{R}_j$ i v průběhu regulace upřesňovat. Doplníme-li rekurzivní výpočet regulátoru rekurzivním algoritmem identifikace, získáme kvalitní adaptivní regulátor.

V regulačním obvodu použijeme rovnici regulátoru

$$\Delta \mathbf{u}_j = \mathbf{R}_0 \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_j \end{pmatrix} \quad (4-23)$$

Popišme další algoritmické zjednodušení rekurzivního výpočtu stavového regulátoru metodou dynamického programování pro SISO soustavy. Uvažujme statickou SISO soustavu s dopravním zpožděním menším než je perioda vzorkování, jejíž diferenční rovnice je (2-22). Uvažujme, že tato soustava je zapojena v regulačním obvodu se sumátorem, viz obr.3.2. Pro zjednodušení zápisu budeme uvažovat soustavu třetího řádu, jejíž diferenční rovnice je

$$y_j + a_1 y_{j-1} + a_2 y_{j-2} + a_3 y_{j-3} = b_0 u_{j-1} + b_1 u_{j-2} + b_2 u_{j-3} + b_3 u_{j-4} \quad (4-24)$$

Přenos této soustavy je

$$\frac{y}{u} = q \frac{B}{A}$$

Přenos soustavy a sumátoru je

$$\frac{y}{\Delta u} = q \frac{B}{(1-q)A} = q \frac{B}{\alpha} \quad (4-25)$$

Označili jsme $(1-q)A = \alpha$. Diferenční rovnici soustavy třetího řádu a sumátoru zapíšeme

$$y_j + \alpha_1 y_{j-1} + \alpha_2 y_{j-2} + \alpha_3 y_{j-3} + \alpha_4 y_{j-4} = b_0 \Delta u_{j-1} + b_1 \Delta u_{j-2} + b_2 \Delta u_{j-3} + b_3 \Delta u_{j-4} \quad (4-26)$$

Rovnici (4-26) přepíšeme na soustavu diferenčních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} x_{0j} &= -\alpha_1 x_{0,j-1} + x_{1,j-1} && + b_0 \Delta u_{j-1} \\ x_{1j} &= -\alpha_2 x_{0,j-1} && + x_{2,j-1} && + b_1 \Delta u_{j-1} \\ x_{2j} &= -\alpha_3 x_{0,j-1} && + x_{3,j-1} && + b_2 \Delta u_{j-1} \\ x_{3j} &= -\alpha_4 x_{0,j-1} && && + b_3 \Delta u_{j-1} \\ y_j &= x_{0j} \end{aligned} \quad (4-27)$$

Tato soustava rovnic je stavovým popisem soustavy a je jednou možnou formou přepisu rovnice (4-26) na soustavu rovnic prvního řádu. Soustava rovnic (4-27) z hlediska minimalizace kritéria (4-5) je výhodná z toho důvodu, že stavová veličina x_{0j} je výstupní veličinou soustavy y_j a v kritériu (4-5) pro technické účely postačuje uvažovat

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

V kritériu (4-5) pro SISO soustavu je L skalár a označíme jej $L = \kappa$. Pro SISO soustavu pak rozšířené kvadratické kritérium zapíšeme

$$J = \sum_{j=0}^{n-1} (y_j^2 + \kappa \Delta u_j^2) + y_n^2 \quad (4-29)$$

V dynamickém programování rekurzivní výpočtové kroky opakujeme a pro řízení uvažujeme limitní matice, ke kterým diskutované matice konvergují. Z tohoto důvodu uvedené rozšířené kvadratické kritérium můžeme zapsat

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n (y_j^2 + \kappa \Delta u_j^2) = \sum_{j=0}^{\infty} (y_j^2 + \kappa \Delta u_j^2) \quad (4-30)$$

κ je váhový koeficient, jehož zvětšováním se regulační pochody zpomalují.

Ve (4-12) potom

$$\Lambda = \begin{bmatrix} b_0 & -\alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_2 & -\alpha_3 & 0 & 0 & 1 \\ b_3 & -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vzhledem k uvedené struktuře matice Λ a budeme-li provádět všechny rekurzivní kroky dynamického programování tak, jak popíšeme v následujícím textu, můžeme všechny

výpočty dynamického programování provádět pouze na prvcích **trojúhelníkové matice, která je rozměru řád soustavy + 3**. Pro soustavu třetího řádu je rozměru 6, t.j. má $\frac{1+6}{2} * 6 = \frac{7*6}{2} = 21$ prvků, pro soustavu čtvrtého řádu je rozměru 7, t.j. má $\frac{8*7}{2} = 28$ prvků. Uvedená trojúhelníková matice je částí symetrické matice a my ji v dalším popise budeme zobrazovat jako naddiagonální. Označíme ji **W**. Zavedme u této matce následující strukturu, kterou popíšeme pro diskutovanou SISO soustavu třetího řádu. Do spodní části matce **W** umístíme prvky matce **P_{j+1}**. Při popisu matice **W** pro tyto prvky použijeme označení

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ . & x & x & x & x & x \\ . & . & p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ . & . & . & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ . & . & . & . & p_{22} & p_{23} \\ . & . & . & . & . & p_{33} \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

Do paměti počítače nebudeme ukládat prvky označené tečkami. Písmenem *x* jsme prozatím označili prvky, jejichž význam budeme diskutovat v následujícím textu. Pro start dynamického programování jsme uvedli, že použijeme **P_n = Q**. Takže počáteční struktura matice **W** je

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ . & x & x & x & x & x \\ . & . & 1 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 \end{bmatrix} .$$

Popišme nejprve část algoritmu dynamického programování, součin matic **P_{j+1} Λ** pro obecný *j*-tý výpočtový krok.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{j+1} \Lambda &= \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{01} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{02} & p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{03} & p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & -\alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_2 & -\alpha_3 & 0 & 0 & 1 \\ b_3 & -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c_0 & e_0 & p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ c_1 & e_1 & p_{01} & p_{11} & p_{12} \\ c_2 & e_2 & p_{02} & p_{12} & p_{22} \\ c_3 & e_3 & p_{03} & p_{13} & p_{23} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Písmeny *c₀* až *c₃*, *e₀* až *e₃* jsme označili prvky vzniklé uvedeným součinem matic. Pokračujme ve výpočtu součinu matic **Λ^T P_{j+1} Λ**.

$$\Lambda^T \mathbf{P}_{j+1} \Lambda = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & e_0 & p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ c_1 & e_1 & p_{01} & p_{11} & p_{12} \\ c_2 & e_2 & p_{02} & p_{12} & p_{22} \\ c_3 & e_3 & p_{03} & p_{13} & p_{23} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} f_{00} & f_{01} & c_0 & c_1 & c_2 \\ f_{01} & f_{11} & e_0 & e_1 & e_2 \\ c_0 & e_0 & p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ c_1 & e_1 & p_{01} & p_{11} & p_{12} \\ c_2 & e_2 & p_{02} & p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

Písmeny f_{00} , f_{01} , f_{11} jsme označili další prvky vzniklé uvedeným součinem matic. Dále k matici $\Lambda^T \mathbf{P}_{j+1} \Lambda$ přičteme matici Ω , což představuje přičtení κ a 1 k prvkům f_{00} a f_{11} matice $\Lambda^T \mathbf{P}_{j+1} \Lambda$,

$$\Omega + \Lambda^T \mathbf{P}_{j+1} \Lambda = \begin{bmatrix} f_{00} + \kappa & f_{01} & c_0 & c_1 & c_2 \\ f_{01} & f_{11} + 1 & e_0 & e_1 & e_2 \\ c_0 & e_0 & p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ c_1 & e_1 & p_{01} & p_{11} & p_{12} \\ c_2 & e_2 & p_{02} & p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (4-33)$$

Je zřejmé, že doposud prováděné výpočtové kroky můžeme provádět na trojúhelníkové matici $\mathbf{W}$ která v této fázi výpočtu bude mít strukturu

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} f_{00} + \kappa & f_{01} & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ \cdot & f_{11} + 1 & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ \cdot & \cdot & p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ \cdot & \cdot & \cdot & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p_{22} & p_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p_{33} \end{bmatrix} \quad (4-34)$$

Abychom spočítali matici $\mathbf{P}_j$ musíme provést část LD součinného rozkladu (4-13) matice $\Omega + \Lambda^T \mathbf{P}_{j+1} \Lambda$, t.j. spočítat matice $\Phi_j, \Gamma_j, \mathbf{D}_{u_j}$. Prvky matice $\Omega + \Lambda^T \mathbf{P}_{j+1} \Lambda$ nyní označíme podle (4-13) a popíšeme kroky tohoto LD rozkladu

$$\Omega + \Lambda^T \mathbf{P}_{j+1} \Lambda = \begin{bmatrix} \chi & \zeta^T \\ \zeta & \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi & \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_0 & \Theta_{00} & \Theta_{01} & \Theta_{02} & \Theta_{03} \\ \zeta_1 & \Theta_{01} & \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \zeta_2 & \Theta_{02} & \Theta_{12} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \zeta_3 & \Theta_{03} & \Theta_{13} & \Theta_{23} & \Theta_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0}^T \\ \Gamma & \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^T & \Gamma^T \\ \mathbf{0} & \Psi^T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_1 & \Psi_{01} & 1 & 0 & 0 \\ \Gamma_2 & \Psi_{02} & \Psi_{12} & 1 & 0 \\ \Gamma_3 & \Psi_{03} & \Psi_{13} & \Psi_{23} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Du & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{x0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{x3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \Gamma_0 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \\ 0 & 1 & \Psi_{01} & \Psi_{02} & \Psi_{03} \\ 0 & 0 & 1 & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Psi_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

V této fázi výpočtu již prvky matice **W** označíme

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \chi & \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & x \\ \cdot & \Theta_{00} & \Theta_{01} & \Theta_{02} & \Theta_{03} & x \\ \cdot & \cdot & \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \Theta_{22} & \Theta_{23} & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Theta_{33} & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x \end{bmatrix}, \quad (4-36)$$

x jsme označili prvky, které nás v současné fázi výpočtu nezajímají.

Pro SISO soustavu Φ je skalár a jeho hodnota je 1. Ze (4-35) vypočteme část součinu matic

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_1 & \Psi_{01} & 1 & 0 & 0 \\ \Gamma_2 & \Psi_{02} & \Psi_{12} & 1 & 0 \\ \Gamma_3 & \Psi_{03} & \Psi_{13} & \Psi_{23} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Du & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{x0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{x3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \Gamma_0 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \\ 0 & 1 & \Psi_{01} & \Psi_{02} & \Psi_{03} \\ 0 & 0 & 1 & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Psi_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} Du & Du\Gamma_0 & Du\Gamma_1 & Du\Gamma_2 & Du\Gamma_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (4-37)$$

Prvky označené tečkami ve (4-36) nemusíme počítat. Z porovnání (4-35) a (4-36) vyplývá pro SISO soustavu

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{uj} &= D_{uj} = \chi_{j+1} \quad , \\ \Gamma_j &= \frac{1}{\chi_{j+1}} \zeta_{j+1} \end{aligned} \quad (4-38)$$

Nyní již pro poslední část jednoho kroku dynamického programování zbývá z (4-22) vypočítat matici $\mathbf{P}_j$. Pro tento výpočet ještě rozepíšeme část symetrické matice $\Gamma_j \mathbf{D}_{uj} \Gamma_j^T$

$$\Gamma_j \mathbf{D}_{uj} \Gamma_j^T = \frac{1}{\chi_{j+1}} \begin{bmatrix} \zeta_1^2 & \zeta_1 \zeta_2 & \zeta_1 \zeta_3 & \zeta_1 \zeta_4 \\ . & \zeta_2^2 & \zeta_2 \zeta_3 & \zeta_2 \zeta_4 \\ . & . & \zeta_3^2 & \zeta_3 \zeta_4 \\ . & . & . & \zeta_4^2 \end{bmatrix} \quad (4-39)$$

Je zřejmé, že pro SISO soustavu se potřebná část algoritmu LD rozkladu zredukovala pouze na výpočet (4-39). Pokud symetrickou matici $\mathbf{P}_j$ začneme počítat od pravého spodního prvku počínaje po řádcích ve směru nahoru, viz (4-22), (4-36) a (4-39) potom všechny popsane operace můžeme provést na prvcích již diskutované trojúhelníkové matice $\mathbf{W}$, jejíž obsah před výpočtem $\mathbf{P}_j$ je uveden v (4-36). Novou matici $\mathbf{P}_j$ budeme do matice $\mathbf{W}$ ukládat na pozici předcházející matice $\mathbf{P}_{j+1}$, viz (4-31).

Rovnici stavového regulátoru počítáme z (4-19). Jak již bylo uvedeno, v případě SISO soustavy Φ_j je skalár a jeho hodnota je 1. Matice stavového regulátoru v případě SISO regulované soustavy je řádkovým vektorem (maticí s jedním řádkem).

V literatuře se uvádí postup, kdy vektor stavu soustavy je určován estimátorem stavu [kn2/78], [kn1/82], [sk1/79]. Uvedme postup výpočtu diferenční rovnice číslicového regulátoru. V tomto případě estimátor stavu soustavy, jako oddělený algoritmus již nebudeme používat.

4.3 Výpočet diferenční rovnice číslicového regulátoru z rovnice stavového regulátoru

V předcházejícím odstavci, kdy jsme diskutovali návrh číslicového stavového regulátoru jsme uvažovali, že regulovaná soustava se v počátečním čase nachází v libovolném rozváženém stavu a metodou dynamického programování jsme navrhli stavový regulátor, který soustavu vyreguluje do ustáleného - nulového stavu. Na regulované soustavě její rozvážený stav je vždy způsoben vstupem poruch. Uvažujme nejprve poruchu, která vstoupí do soustavy zobrazené na obr.3-2. Uvažujme, že soustava má menší dopravní zpoždění než je perioda vzorkování, t.j. $v = 1$, takže

$$y = q \frac{B}{(1-q) A} \Delta u + \frac{C}{(1-q) AH} d \quad (4-50)$$

Předpokládejme nejprve, že pro polynomy $C = 1$, $H = 1$. Tímto předpokladem definujeme t.zv. regresní model regulované soustavy.

$$y = q \frac{B}{(1-q) A} \Delta u + \frac{1}{(1-q) A} d, \quad (1-q) A y = q B \Delta u + d \quad (4-51)$$

Zapišme tuto rovnici jako diferenční rovnici soustavy třetího řádu

$$y_j + \alpha_1 y_{j-1} + \alpha_2 y_{j-2} + \alpha_3 y_{j-3} + \alpha_4 y_{j-4} = b_0 \Delta u_{j-1} + b_1 \Delta u_{j-2} + b_2 \Delta u_{j-3} + b_3 \Delta u_{j-4} + d_j \quad (4-52)$$

Porucha d v (4-51) není vynásobena polynomem, ve (4-52) se porucha d_j pouze přičítá. Z tohoto důvodu se popis systému (4-51) nazývá regresním modelem (na základě porovnání s regresní rovnicí v metodě nejmenších čtverců). Rovnici (4-52) přepíšeme na soustavu diferenčních rovnic prvního řádu, obdobně jako jsme přepsali rovnici (4-24)

$$\begin{aligned} x_{0j} &= -\alpha_1 x_{0,j-1} + x_{1,j-1} & + b_0 \Delta u_{j-1} + d_j \\ x_{1j} &= -\alpha_2 x_{0,j-1} & + x_{2,j-1} & + b_1 \Delta u_{j-1} \\ x_{2j} &= -\alpha_3 x_{0,j-1} & + x_{3,j-1} & + b_2 \Delta u_{j-1} \\ x_{3j} &= -\alpha_4 x_{0,j-1} & & + b_3 \Delta u_{j-1} \\ y_j &= x_{0j} \end{aligned}$$

Tuto soustavu rovnic můžeme upravit

$$\begin{aligned} x_{0j} &= y_j \\ x_{1j} &= -\alpha_2 y_{j-1} - \alpha_3 y_{j-2} - \alpha_4 y_{j-3} + b_1 \Delta u_{j-1} + b_2 \Delta u_{j-2} + b_3 \Delta u_{j-3} \\ x_{2j} &= -\alpha_3 y_{j-1} - \alpha_4 y_{j-2} & + b_2 \Delta u_{j-1} + b_3 \Delta u_{j-2} \\ x_{3j} &= -\alpha_4 y_{j-1} & + b_3 \Delta u_{j-1} \end{aligned} \quad (4-53)$$

Rovnicemi (4-53) je proveden výpočet vektoru stavu regulované soustavy z měřených veličin na regulované soustavě a akčních zásahů regulátoru. Všimněme si, že v případě vstupu impulzní poruchy d_j , nebo při vstupu posloupnosti impulzních poruch, je vektor stavu soustavy vypočítáván bez chyby.

Soustavu rovnic (4-53) můžeme též zapsat

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{T} (-\mathbf{z}_j), \quad (4-54)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ 0 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & -b_2 & -b_3 & 0 \\ 0 & -\alpha_4 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_j = \begin{bmatrix} -y_j \\ -y_{j-1} \\ -y_{j-2} \\ -y_{j-3} \\ \Delta u_{j-1} \\ \Delta u_{j-2} \\ \Delta u_{j-3} \end{bmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{z}_j$ nazveme *vektorem pozorování*. Dosadíme-li (4-54) do rovnice regulátoru (4-23), získáme rovnici, která je diferenční rovnicí regulátoru.

$$\Delta u_j = \mathbf{R}_0 \mathbf{T} \mathbf{z}_j \quad (4-55)$$

Vyjádříme diferenční rovnici regulátoru (4-55) pro diskutovanou statickou soustavu třetího řádu. Pro tuto soustavu prvky matice - řádkového vektoru $\mathbf{R}_0$ označíme

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}, \text{ takže}$$

$$\Delta u_j = -r_0 y_j + (\alpha_2 r_1 + \alpha_3 r_2 + \alpha_4 r_3) y_{j-1} + (\alpha_3 r_1 + \alpha_4 r_2) y_{j-2} + \alpha_4 r_1 y_{j-3} - \\ - (b_1 r_1 + b_2 r_2 + \alpha_4 r_3) \Delta u_{j-1} - (b_2 r_1 + b_3 r_2) \Delta u_{j-2} - b_3 r_1 \Delta u_{j-3} \quad (4-56)$$

Diferenční rovnici (4-56) můžeme též zapsat jako přenos

$$\Delta u = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{M}} (-y), \quad (4-57)$$

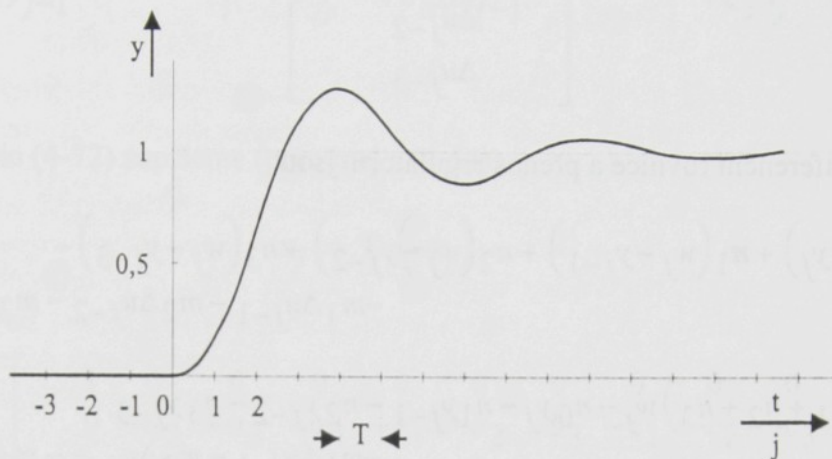
kde pro diskutovanou regulovanou soustavu $\mathbf{N} = n_0 + n_1 q + n_2 q^2 + n_3 q^3$,
 $\mathbf{M} = 1 + m_1 q + m_2 q^2 + m_3 q^3$.

Pro porovnání s (4-56) přepíšeme přenos regulátoru (4-57) do diferenční rovnice

$$\Delta u_j = -n_0 y_j - n_1 y_{j-1} - n_2 y_{j-2} - n_3 y_{j-3} - m_1 \Delta u_{j-1} - m_2 \Delta u_{j-2} - m_3 \Delta u_{j-3} \quad (4-58)$$

Tento regulátor vyreguluje impulzní poruchu, která vstoupí do regresního modelu soustavy (4-51), (4-52) tak, že je dosaženo minima rozšířeného kvadratického kritéria (4-30). Regulátor vyreguluje tuto poruchu optimálně. V tomto případě byly v regulačním obvodu z obr.3-2 voleny polynomy $\mathbf{C} = 1$, $\mathbf{H} = 1$. Diskutovaná *porucha* je *neměřená*, neboť regulátor získá informaci o jejím vstupu do regulačního obvodu z hodnot veličiny y_j .

Diskutujeme případ, že porucha $\mathbf{d}$ bude nulová a při nulových počátečních podmínkách bude $\mathbf{w}$ jednotkový skok. Pod pojmem nulové počáteční podmínky rozumíme $y_j = 0$ pro $j \leq 0$, $u_j = 0$ pro $j < 0$. Uvažujme, že při regulaci průběh veličiny y je přibližně zobrazen na obr.4-2.



Obr.4-2

V čase $j \rightarrow \infty$ chceme aby $y_j = w_j = 1$. Regulační odchylku $e_j = w_j - y_j$ použijeme v rovnicích (4-54),(4-55),(4-56) a (4-57) místo veličiny $-y_j$. V rovnici (4-54) vektor $\mathbf{z}_j$ bude

$$\mathbf{z}_j = \begin{bmatrix} w_j - y_j \\ w_{j-1} - y_{j-1} \\ w_{j-2} - y_{j-2} \\ w_{j-3} - y_{j-3} \\ \Delta u_{j-1} \\ \Delta u_{j-2} \\ \Delta u_{j-3} \end{bmatrix} \quad (4-58)$$

Tímto zachováme stabilitu regulačního obvodu, ale pro $j=0$ z rovnice (4-58) vypočteme

$$\text{stav } \mathbf{z}_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \text{ Tento stav je chybný, správný stav je } \mathbf{z}_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \text{ Úvaha o}$$

správném stavu soustavy vyplývá z obr.4-2. Správné stavy soustavy spočteme v průběhu regulačního pochodu tehdy, jestliže struktura vektoru $\mathbf{z}_j$ bude

$$z_j = \begin{bmatrix} w_j - y_j \\ w_j - y_{j-1} \\ w_j - y_{j-2} \\ w_j - y_{j-3} \\ \Delta u_{j-1} \\ \Delta u_{j-2} \\ \Delta u_{j-3} \end{bmatrix} \quad (4-59)$$

Odpovídající diferenční rovnice a přenos regulátoru jsou

$$\begin{aligned} \Delta u_j &= n_0(w_j - y_j) + n_1(w_j - y_{j-1}) + n_2(w_j - y_{j-2}) + n_3(w_j - y_{j-3}) - \\ &\quad - m_1 \Delta u_{j-1} - m_2 \Delta u_{j-2} - m_3 \Delta u_{j-3} = \\ &= (n_0 + n_1 + n_2 + n_3)w_j - n_0 y_j - n_1 y_{j-1} - n_2 y_{j-2} - n_3 y_{j-3} - \\ &\quad - m_1 \Delta u_{j-1} - m_2 \Delta u_{j-2} - m_3 \Delta u_{j-3} \end{aligned} \quad (4-60)$$

$$\Delta u = \frac{sn}{M} w - \frac{N}{M} y, \quad sn = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 \quad (4-61)$$

Regulátor (4-60), (4-61) optimálně reguluje, jestliže do regulačního obvodu z obr.3-2 při $C=1$, $H=1$ vstoupí neměřená impulzní porucha d a nebo při skokové změně žádané hodnoty w .

Uvedeným postupem navržený regulátor byl ověřován v průmyslu a v laboratoři. Tento regulátor vyhověl požadavkům na kvalitu regulace při vstupu běžných poruch, které do regulovaných soustav vstupovaly. Regulátor vyhověl i při změnách žádané hodnoty w - v programovém regulátoru vypalovací pece [čal/88], kdy žádaná hodnota byla měněna v každém regulačním kroku podle zadaného plánu.

Přesto se může v technické praxi objevit požadavek vypočítat *optimální regulátor pro poruchu vstupující do regulačního obvodu na obr.3-2. Uvažujme ještě zjednodušený případ, kdy polynom $H=1$.* Rovnici (4-50) upravíme

$$(1-q) A y = q B \Delta u + C d \quad (4-70)$$

Pro diskutovanou regulovanou statickou soustavu třetího řádu bude diferenční rovnice, odpovídající (4-70)

$$\begin{aligned} y_j + \alpha_1 y_{j-1} + \alpha_2 y_{j-2} + \alpha_3 y_{j-3} + \alpha_4 y_{j-4} &= b_0 \Delta u_{j-1} + b_1 \Delta u_{j-2} + b_2 \Delta u_{j-3} + b_3 \Delta u_{j-4} + \\ &\quad + c_0 d_j + c_1 d_{j-1} + c_2 d_{j-2} + c_3 d_{j-3} \end{aligned} \quad (4-71)$$

Vlastní výpočet stavového regulátoru bude stejný jako v případě návrhu regulátoru pro regresní model regulované soustavy (4-51),(4-52). Soustava rovnic pro vyjádření vektoru stavu soustavy ale bude (porovnej s (4-53))

$$\begin{aligned}
x_{0j} &= y_j \\
x_{1j} &= -\alpha_2 y_{j-1} - \alpha_3 y_{j-2} - \alpha_4 y_{j-3} + b_1 \Delta u_{j-1} + b_2 \Delta u_{j-2} + b_3 \Delta u_{j-3} + \\
&\quad + c_1 d_j + c_2 d_{j-1} + c_3 d_{j-2} \\
x_{2j} &= -\alpha_3 y_{j-1} - \alpha_4 y_{j-2} + b_2 \Delta u_{j-1} + b_3 \Delta u_{j-2} + c_2 d_j + c_3 d_{j-1} \\
x_{3j} &= -\alpha_4 y_{j-1} + b_3 \Delta u_{j-1} + c_3 d_j
\end{aligned} \tag{4-72}$$

Soustavu rovnic (4-72) zapíšeme (porovnej s (4-54))

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{T} \begin{pmatrix} -\mathbf{z}_j \end{pmatrix}, \tag{4-73}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & -c_1 & -c_2 & -c_3 \\ 0 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & -b_2 & -b_3 & 0 & -c_2 & -c_3 & 0 \\ 0 & -\alpha_4 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & -c_3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z}_j = \begin{bmatrix} -y_j \\ -y_{j-1} \\ -y_{j-2} \\ -y_{j-3} \\ \Delta u_{j-1} \\ \Delta u_{j-2} \\ \Delta u_{j-3} \\ d_j \\ d_{j-1} \\ d_{j-2} \end{bmatrix}.$$

Stejným postupem, jako jsme vypočítali polynomy přenosu regulátoru (4-61), vypočteme i polynomy diskutovaného regulátoru. V přenosu regulátoru bude ale i neměřená porucha $\mathbf{d}$ vstupující do soustavy na obr.3-2, za předpokladu $\mathbf{H} = 1$.

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{sn}{\mathbf{M}} \mathbf{w} - \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{M}} \mathbf{y} + \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{M}} \mathbf{d} \tag{4-74}$$

polynom $\mathbf{P}$ pro diskutovanou úlohu je $\mathbf{P} = p_0 + p_1 q + p_2 q^2$.

Poruchu d z rovnice regulátoru vyloučíme, d vypočteme z rovnice (4-70)

$$d = \frac{(1-q)A}{C} y - \frac{qB}{C} \Delta u \quad (4-75)$$

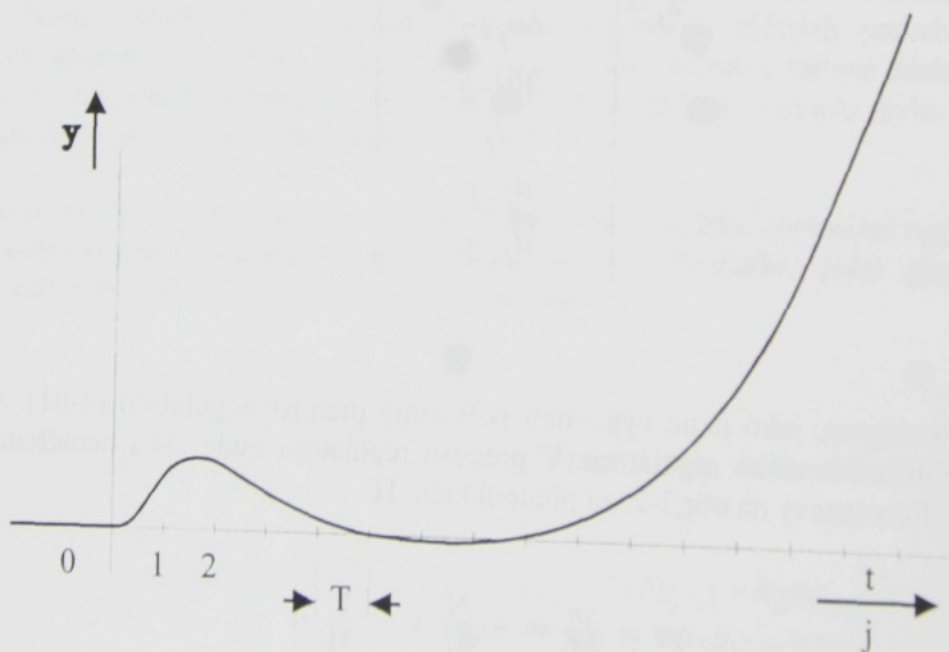
Po dosazení do (4-74)

$$(MC + qBP) \Delta u = snCw - (NC - (1-q)AP) y, \quad (4-76)$$

což je rovnice regulátoru, který optimálně vzhledem ke kritériu (4-30) vyreguluje impulzní neměřenou poruchu d vstupující do regulačního obvodu na obr.3-2, jestliže $H=1$ a optimálně též vyreguluje skokovou změnu žádané hodnoty w .

Uvažujme v rovnici (4-76) $w=0$. Potom diferenční rovnice regulátoru, odpovídající (4-76), je vyššího řádu než je řád regulované soustavy. Z tohoto důvodu se můžeme domnívat, že polynomy $MC + qBP$ a $NC - (1-q)AP$ mají společného dělitele. Použití regulátoru (4-76) v regulačním obvodu i při vyšším řádu uvedených polynomů je výhodné. Tento regulátor, jak již bylo uvedeno, vyreguluje optimálně jak neměřenou impulzní poruchu d , tak i skokovou změnu žádané hodnoty w .

Při ověřování chování regulátoru (4-76) jsme ale zjistili, že v případě nestabilního polynomu C regulátor při ověřovacích výpočtech sice vstupní poruchu vyreguluje (jestliže v čase 0 začneme ověřovací výpočet z nulových počátečních hodnot regulačního obvodu a současně vstoupí do regulačního obvodu porucha), ale po krátkém čase se regulační obvod rozváží tak, jak je naznačeno na obr.4-3. Abychom příčinu tohoto rozvážení regulačního obvodu odstranili, seznámíme se s algebraickou teorií systémů.



Obr.4-3

5. Návrh číslicového regulátoru při použití algebraické teorie systémů

Návrh regulátoru provedeme při minimalizaci rozšířeného kvadratického kritéria. V tomto odstavci metoda řešení bude vysvětlena, nebude však plně algoritmicky rozpracována. Tento odstavec slouží především pro vysvětlení, jak odstranit rozvažování regulačního obvodu, jak bylo popsáno v předcházejícím odstavci. Uvedme několik potřebných teoretických poznatků, které budeme potřebovat k následující diskuzi.

⊕ Začátek doplňujícího textu

Z transformace posloupnosti reálných čísel f_i je popsána rovnicí

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^{-j}, \quad (5-1)$$

kde z je komplexní proměnná. Již v předcházejícím textu jsme zavedli $q = z^{-1}$, takže

$$F(q) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j q^j \quad (5-2)$$

Jak již bylo řečeno v poznámce k rovnici (2-3), v popisu regulačních obvodů při vstupu poruch jednotkový impuls a jednotkový skok jsou Z obrazy všech poloupností v lineárním regulačním obvodu racionální lomené funkce. Jestliže funkce $F(q)$ bude racionální lomenou funkcí, označíme ji f , nebo $f(q)$. Rovnici (5-2) zapíšeme

$$f(q) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j q^j \quad (5-3)$$

Uved'me příklad opačného postupu, máme racionální lomenou funkci f a chceme z polynomů této funkce vypočítat posloupnost čísel f_j . Necht'

$$f = \frac{R}{P} = \frac{r_0 + r_1 q + r_2 q^2}{1 + p_1 q + p_2 q^2},$$

potom posloupnost čísel f_j vypočteme buď dělením polynomů $\mathbf{R}$ a $\mathbf{P}$ podle postupu:

$$(r_0 + r_1 q + r_2 q^2) : (1 + p_1 q + p_2 q^2) = f_0 + f_1 q + f_2 q^2 + f_3 q^3 + \dots,$$

nebo výpočtem z diferenční rovnice

$$f_j = r_0 u_j + r_1 u_{j-1} + r_2 u_{j-2} - p_1 f_{j-1} - p_2 f_{j-2}$$

do které dosadíme $u_j = 1$ pro $j = 0$, $u_j = 0$ pro $j \neq 0$, $f_j = 0$ pro $j < 0$. Posloupnost u_j je jednotkovým impulzem. Takže

$$f_0 = r_0$$

$$f_1 = r_1 - p_1 f_0$$

$$f_2 = r_2 - p_1 f_1 - p_2 f_0$$

$$f_3 = -p_1 f_2 - p_2 f_1$$

$$f_4 = -p_1 f_3 - p_2 f_2$$

1

1

Jestliže existuje Z obraz posloupnosti čísel f_j a jestliže $\sum_{j=0}^{\infty} f_j^2$ je konečná, potom

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} F(q) F\left(\frac{1}{q}\right) \frac{dq}{q} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \sum_{j=0}^{\infty} f_j q^j \sum_{k=0}^{\infty} f_k q^{-k} \frac{dq}{q}, \quad (5-4)$$

neboť z teorie funkce komplexní proměnné [kn1/73] je známo, že

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} q^{-1} dq = 1, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} q^j dq = 0 \quad \text{jestliže } j \neq -1,$$

označení $\oint_{c_1}$ znamená integraci po jednotkové kružnici v kladném směru v rovině komplexní proměnné q , kladný směr pohybu po kružnici je chápán proti směru otáčení hodinových ruček, i je imaginární jednotka.

Poznámka 5-1: Pro posloupnosti čísel f_j , jejichž Z obrazy jsou r.l. funkce, postačující podmínkou pro konečnou hodnotu součtu $\sum_{j=0}^{\infty} f_j^2$ je $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = 0$.

Zapišme (5-4) pro posloupnost čísel, jejíž Z obraz je r.l. funkce

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} f(q) f\left(\frac{1}{q}\right) \frac{dq}{q} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \sum_{j=0}^{\infty} f_j q^j \sum_{k=0}^{\infty} f_k q^{-k} \frac{dq}{q} \quad (5-5)$$

R.l. funkci $f\left(\frac{1}{q}\right)$ označíme $\bar{f}$ a nazveme ji sdruženou k r.l. funkci $f(q)$, $f\left(\frac{1}{q}\right) = \bar{f}$, takže

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} f(q) f\left(\frac{1}{q}\right) \frac{dq}{q} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} f \bar{f} \frac{dq}{q} = \langle f, f \rangle \quad (5-6)$$

(5-6) nazveme skalárním součinem. Mějme dvě posloupnosti čísel f_j a g_j jejichž Z obrazy jsou racionální lomené funkce f a g . Jestliže $\sum_{j=0}^{\infty} f_j g_j$ je konečná, potom obobně jako v (5-5) a v (5-6) platí

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j g_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} f \bar{g} \frac{dq}{q} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} g \bar{f} \frac{dq}{q} = \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \quad (5-7)$$

Jednoduchým postupem si můžeme ověřit, že platí následující rovnosti

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle \quad (5-8a)$$

$$\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{g} \rangle + \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2, \mathbf{g} \rangle \quad (5-8b)$$

$$\langle c\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f}, c\mathbf{g} \rangle = c \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \quad c \text{ je reálné číslo, skalár} \quad (5-8c)$$

$$\langle \mathbf{f}\mathbf{h}, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\bar{\mathbf{h}} \rangle \quad (5-8d)$$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \left\langle \mathbf{f}\mathbf{h}, \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{h}} \right\rangle \quad (5-8e)$$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle q^k \mathbf{f}, q^k \mathbf{g} \rangle \quad (5-8f)$$

⊖ Konec doplňujícího textu

Uvažujme, že do regulačního obvodu na obr.3-2 vstoupila v čase nula porucha jednotkový impulz a žádaná hodnota byla nulová, $\mathbf{w} = 0$. Z obraz jednotkového impulzu je 1. Vyjádřeme Z obraz veličiny $\mathbf{e}$ jestliže v čase nula se regulační obvod nacházel v nulových počátečních podmínkách

$$\mathbf{e} = \frac{-\mathbf{C}}{\left(1 + \frac{q^v \mathbf{BN}}{(1-q)\mathbf{AM}}\right)(1-q)\mathbf{AH}} \quad (5-10)$$

Regulovaná soustava může být nestabilní. Polynom $\mathbf{A}$ můžeme rozložit na součin kořenových činitelů. Kořenový činitel, který má kořen vně jednotkové kružnice je stabilním kořenovým činitelem. Kořenový činitel, který má kořen uvnitř jednotkové kružnice je nestabilním kořenovým činitelem. *Součin stabilních kořenových činitelů polynomu $\mathbf{A}$ označíme $\mathbf{A}^+$, součin nestabilních kořenových činitelů polynomu $\mathbf{A}$ označíme $\mathbf{A}^-$.* Takže $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}^-$.

Poznámka 5-2: Polynom $\mathbf{H}$ v regulačním obvodu z obr.3-2 je stabilní. Kdyby polynom $\mathbf{H}$ byl nestabilní, potom r.l. funkce $\mathbf{u}$ by při řízení musela být též nestabilní. Podle mínění autora úlohu tohoto typu v průmyslových aplikacích není třeba řešit.

Upravíme (5-10)

$$\mathbf{e} = \frac{-\mathbf{C}}{\left((1-q)\mathbf{A}^- + \frac{q^v \mathbf{BN}}{\mathbf{A}^+ \mathbf{M}}\right) \mathbf{A}^+ \mathbf{H}} \quad (5-11)$$

Chceme vypočítat polynomy $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ regulátoru tak, aby bylo minimalizováno kritérium

$$J = \sum_{j=0}^{\infty} \left(e_j^2 + \kappa \Delta u_j^2 \right) \quad (5-12)$$

Přenos $\frac{N}{M}$ je ve jmenovateli zlomku v rovnici (5-11). Minimalizaci kvadratického kritéria (5-12) vzhledem k přenosu regulátoru $\frac{N}{M}$ budeme řešit následujícím postupem. V (5-11) je podíl $\frac{-C}{A^+ H}$ stabilní r.l. funkcí. Označíme

$$e = \frac{-C}{\left((1-q)A^- + \frac{q^v B^- N}{A^+ M} \right) A^+ H} = \frac{-C}{A^+ H} (F + q^v B^- x) = -(a x + b) \quad (5-13)$$

F je polynom. F je částí regulačního pochodu, který vzhledem ke zpoždění průchodu signálu regulovanou soustavou ($v \geq 1$) nemůže být regulátorem ovlivněn. Písmeny a, b jsme označili r.l. funkce $a = \frac{q^v B^- C}{A^+ H}$, $b = \frac{F C}{A^+ H}$. Polynom B^- je v (5-13) použit z toho důvodu, aby do následujícího výpočtu regulátoru nebyla zařazena matematická úprava, která by mohla způsobit případnou numerickou nestabilitu v regulačním obvodu. Diskuzi tohoto problému provedeme později. R.l. funkci x prozatím neznáme, budeme ji ale počítat místo přenosu regulátoru $\frac{N}{M}$. R.l. funkce x musí splnit požadavek stability r.l. funkce e , t.zn. *součin r.l. funkcí $a x$ musí být stabilní*. Ukažme nejprve, jak vypočteme polynom F , který budeme potřebovat pro minimalizaci rozšířeného kvadratického kritéria.

Z (5-13)

$$x = \frac{1 - F(1-q)A^- - F \frac{q^v B^- N}{A^+ M}}{q^v B^- \left((1-q)A^- + \frac{q^v B^- N}{A^+ M} \right)} = \frac{\frac{1 - F(1-q)A^-}{q^v B^-} - F \frac{B^+ N}{A^+ M}}{(1-q)A^- + \frac{q^v B^- N}{A^+ M}} \quad (5-14)$$

Součin r.l. funkcí $a x$ má být stabilní, takže v (5-14) ve zlomku $\frac{1 - F(1-q)A^-}{q^v B^-}$ musí dojít ke krácení čitatele a jmenovatele, musí být

$$\frac{1 - F(1-q)A^-}{q^v B^-} = G \quad (5-15)$$

G je polynom. Rovnici (5-14) přepíšeme

$$x = \frac{G - F \frac{B^+ N}{A^+ M}}{(1-q)A^- + \frac{q^v B^- N}{A^+ M}} \quad (5-16)$$

Neznámé polynomy F a G vypočteme z polynomiální rovnice, která vznikne úpravou (5-15)

$$(1-q)A^- F + q^v B^- G = 1 \quad (5-17)$$

(5-17) je *lineární diofantická rovnice*.

⊕ Začátek doplňujícího textu

Řecký matematik Diofantos [kn2/77] hledal pro rovnici

$$ax + by = c, \text{ kde } a, b, c \text{ jsou celá čísla,} \quad (5-18)$$

celočíslné řešení. Hledal celočíselné proměnné x a y , které rovnici (5-18) vyhovují. Později se zjistilo [kn1/78], že existuje podobnost mezi celočíselnou a polynomiální rovnicí. Prvočinitele, prvočísla součinného rozkladu celého čísla, odpovídají kořenovým činitelům součinného rozkladu polynomu. Polynomiální rovnici, odpovídající celočíselné rovnici (5-18) zapíšeme

$$AX + BY = C, \text{ A, B, C jsou známé polynomy,} \quad (5-19)$$

polynomy X a Y máme vypočítat. Lineární diofantická rovnice má řešení, jestliže největší společný dělitel polynomů A, B je i dělitelem polynomu C . Pro naše potřeby postačí předpoklad, že polynomy A a B jsou nesoudělné. Ani jeden kořen polynomu A není roven některému kořenu polynomu B . Obecné řešení X, Y rovnice (5-19) za předpokladu, že A a B jsou nesoudělné polynomy je

$$X = X_0 + BT, \quad Y = Y_0 - AT, \quad (5-20)$$

kde T je libovolný polynom. Rovnice (5-19) má nekonečně mnoho řešení. X_0, Y_0 je jedním z možných - partikulárních řešení rovnice (5-19). Výpočet jednoho partikulárního řešení rovnice (5-19) je možno provést metodou neurčitých koeficientů. Nyní již pro jednoduchý zápis toto partikulární řešení označíme pouze X, Y . Stupně polynomů A, B, C označíme $\delta A, \delta B, \delta C$. Pro naše potřeby postačí hledat řešení rovnice (5-19) při předpokladu $\delta A + \delta B > \delta C$. Stupně polynomů X, Y je možno určit z rovnic:

$$\delta X = \delta B - 1, \quad \delta Y = \delta A - 1 \quad (5-21)$$

Uvedme příklad výpočtu polynomů X a Y metodou neurčitých koeficientů.

⊕ Začátek příkladu

Nechť $A = 1 + a_1q + a_2q^2 + a_3q^3$, $B = b_0 + b_1q + b_2q^2$, $C = c_0 + c_1q$. Potom $X = x_0 + x_1q$, $Y = y_0 + y_1q + y_2q^2$.

Roznásobme

$$\begin{aligned} AX &= (1 + a_1q + a_2q^2 + a_3q^3)(x_0 + x_1q) = x_0 + a_1x_0q + a_2x_0q^2 + a_3x_0q^3 + \\ &\quad + x_1q + a_1x_1q^2 + a_2x_1q^3 + a_3x_1q^4 = \\ &= x_0 + (a_1x_0 + x_1)q + (a_2x_0 + a_1x_1)q^2 + (a_3x_0 + a_2x_1)q^3 + a_3x_1q^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{BY} &= (b_0 + b_1 q + b_2 q^2)(y_0 + y_1 q + y_2 q^2) = \\
&= b_0 y_0 + b_1 y_0 q + b_2 y_0 q^2 + \\
&\quad + b_0 y_1 q + b_1 y_1 q^2 + b_2 y_1 q^3 + \\
&\quad + b_0 y_2 q^2 + b_1 y_2 q^3 + b_2 y_2 q^4 = \\
&= b_0 y_0 + (b_1 y_0 + b_0 y_1) q + (b_2 y_0 + b_1 y_1 + b_0 y_2) q^2 + (b_2 y_1 + b_1 y_2) q^3 + b_2 y_2 q^4
\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin q na levé a pravé straně diofantické rovnice (5-19) získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
x_0 &+ b_0 y_0 &= c_0 \\
a_1 x_0 + x_1 + b_1 y_0 + b_0 y_1 &= c_1 \\
a_2 x_0 + a_1 x_1 + b_2 y_0 + b_1 y_1 + b_0 y_2 &= 0 \\
a_3 x_0 + a_2 x_1 &+ b_2 y_1 + b_1 y_2 &= 0 \\
a_3 x_1 &+ b_2 y_2 &= 0
\end{aligned}$$

Získali jsme 5 lineárních algebraických rovnic pro 5 neznámých. Z těchto rovnic koeficienty polynomů $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ vypočteme.

⊖ Konec příkladu

⊖ Konec doplňujícího textu

V rovnici (5-17) $\delta \mathbf{F} = \mathbf{v} + \delta \mathbf{B}^- - \mathbf{1}$, $\delta \mathbf{G} = \delta \mathbf{A}^-$. Uvedli jsme postup, jakým vypočteme polynom $\mathbf{F}$ a současně jsme vypočítali polynom $\mathbf{G}$. Polynom $\mathbf{F}$ budeme potřebovat při minimalizaci zobecněného kvadratického kritéria. Při minimalizaci tohoto kritéria vypočteme r.l. funkci $\mathbf{x}$. Polynom $\mathbf{G}$ budeme potřebovat pro výpočet přenosu regulátoru, jestliže již r.l. funkci $\mathbf{x}$ budeme mít vypočtenou. Uveďme tento výpočet. Upravme (5-16)

$$(1-q)\mathbf{A}^- \mathbf{x} + \frac{q^v \mathbf{B} \mathbf{N}}{\mathbf{A}^+ \mathbf{M}} \mathbf{x} = \mathbf{G} - \mathbf{F} \frac{\mathbf{B}^+ \mathbf{N}}{\mathbf{A}^+ \mathbf{M}}$$

$$\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{G} - (1-q)\mathbf{A}^- \mathbf{x}}{\mathbf{F} \frac{\mathbf{B}^+}{\mathbf{A}^+} + \frac{q^v \mathbf{B}}{\mathbf{A}^+} \mathbf{x}} = \frac{(\mathbf{G} - (1-q)\mathbf{A}^- \mathbf{x}) \mathbf{A}^+}{(\mathbf{F} + q^v \mathbf{B}^- \mathbf{x}) \mathbf{B}^+} \quad (5-22)$$

Regulační odchylka $\mathbf{e}$ je popsána rovnicí (5-13). Regulační odchylka musí být stabilní. Jelikož ji použijeme pro vyjádření rozšířeného kvadratického kritéria, musí být $\lim_{j \rightarrow \infty} e_j = 0$.

Pro přehlednost zapišme část (5-13)

$$\mathbf{e} = -\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{A}^+ \mathbf{H}} (\mathbf{F} + q^v \mathbf{B}^- \mathbf{x})$$

Regulační průběh veličiny Δu vyjádříme při použití (5-22) a (5-13)

$$\Delta u = \frac{N}{M} e = \frac{C (G - (1-q) A^- x)}{B^+ H} \quad (5-24)$$

Jelikož ve jmenovateli (5-24) je polynom $B^+ H$, průběh Δu je též stabilní a platí $\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta u_j = 0$. Takže v regulačním obvodu z obr.3-2 při vstupu impulzní poruchy d i veličina u je stabilní.

⊕ **Zdůvodnění, proč jsme na pravé straně rovnice (5-13) použili polynom B^-**

Zavedeme označení

$$e = \frac{-C}{\left((1-q)A^- + \frac{q^v BN}{A^+ M} \right) A^+ H} = \frac{-C}{A^+ H} (F + q^v x) \quad (5-25)$$

Oproti (5-13) jsme na pravé straně (5-25) nepoužili polynom B^- . Nyní prosíme čtenáře, aby obdobným postupem, jaký je uveden v předcházejícím textu vypočítal přenos regulátoru $\frac{N}{M}$. Tento nový přenos bude

$$\frac{N}{M} = \frac{(G - (1-q) A^- x) A^+}{(F + q^v x) B} \quad (5-26)$$

Nyní, obdobně jako v (5-24) vyjádříme Δu

$$\Delta u = \frac{C (G - (1-q) A^- x)}{B} \quad (5-27)$$

V případě, že polynom B bude nestabilní a B^- bude nesoudělný s polynomem C , Δu bude stabilní pouze tehdy, jestliže dojde ke krácení B^- vůči čitateli r.l. funkce $G - (1-q) A^- x$. R.l. funkci x budeme počítat, tak jak je uvedeno v následujícím textu. Požadavek, aby polynom B^- byl v čitateli r.l. funkce $G - (1-q) A^- x$ vyloučíme použitím (5-13) místo (5-25).

⊖ **Konec zdůvodnění**

Zopakujme rovnici (5-13)

$$\mathbf{e} = -\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{A}^+ \mathbf{H}} (\mathbf{F} + q^V \mathbf{B}^- \mathbf{x}) = -(\mathbf{a} \mathbf{x} + \mathbf{b}) ,$$

$$\mathbf{a} = \frac{q^V \mathbf{B}^- \mathbf{C}}{\mathbf{A}^+ \mathbf{H}} , \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{F} \mathbf{C}}{\mathbf{A}^+ \mathbf{H}} ,$$

V (5-24) zavedeme označení

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{\mathbf{C} (\mathbf{G} - (1-q) \mathbf{A}^- \mathbf{x})}{\mathbf{B}^+ \mathbf{H}} = \mathbf{c} \mathbf{x} + \mathbf{f} , \quad (5-31)$$

$$\mathbf{c} = -\frac{(1-q) \mathbf{A}^- \mathbf{C}}{\mathbf{B}^+ \mathbf{H}} , \quad \mathbf{f} = \frac{\mathbf{C} \mathbf{G}}{\mathbf{B}^+ \mathbf{H}} .$$

Racionální lomené funkce $\mathbf{e}$ a $\Delta \mathbf{u}$ dosadíme do rozšířeného kvadratického kritéria (5-12), které zapíšeme jako skalární součin, viz (5-6)

$$\begin{aligned} J &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(e_j^2 + \kappa \Delta u_j^2 \right) = \langle \mathbf{e} , \mathbf{e} \rangle + \kappa \langle \Delta \mathbf{u} , \Delta \mathbf{u} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{a} \mathbf{x} + \mathbf{b} , \mathbf{a} \mathbf{x} + \mathbf{b} \rangle + \kappa \langle \mathbf{c} \mathbf{x} + \mathbf{f} , \mathbf{c} \mathbf{x} + \mathbf{f} \rangle \end{aligned} \quad (5-32)$$

Při použití rovnic (5-8a) až (5-8f) můžeme (5-32) dále upravovat

$$\begin{aligned} J &= \langle \mathbf{a} \mathbf{x} , \mathbf{a} \mathbf{x} \rangle + 2 \langle \mathbf{a} \mathbf{x} , \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b} , \mathbf{b} \rangle + \kappa (\langle \mathbf{c} \mathbf{x} , \mathbf{c} \mathbf{x} \rangle + 2 \langle \mathbf{c} \mathbf{x} , \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{f} , \mathbf{f} \rangle) = \\ &= \langle \mathbf{a} \bar{\mathbf{a}} \mathbf{x} , \mathbf{x} \rangle + \kappa \langle \mathbf{c} \bar{\mathbf{c}} \mathbf{x} , \mathbf{x} \rangle + 2 \langle \mathbf{a} \mathbf{x} , \mathbf{b} \rangle + 2 \kappa \langle \mathbf{c} \mathbf{x} , \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{b} , \mathbf{b} \rangle + \kappa \langle \mathbf{f} , \mathbf{f} \rangle = \\ &= \langle (\mathbf{a} \bar{\mathbf{a}} + \kappa \mathbf{c} \bar{\mathbf{c}}) \mathbf{x} , \mathbf{x} \rangle + 2 \langle \mathbf{a} \mathbf{x} , \mathbf{b} \rangle + 2 \kappa \langle \mathbf{c} \mathbf{x} , \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{b} , \mathbf{b} \rangle + \kappa \langle \mathbf{f} , \mathbf{f} \rangle \end{aligned} \quad (5-33)$$

Vypočteme stabilní r.l. funkci $\mathbf{g}$, která vyhovuje rovnici

$$\mathbf{a} \bar{\mathbf{a}} + \kappa \mathbf{c} \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{g} \bar{\mathbf{g}} \quad (5-34)$$

Do (5-34) dosadíme z (5-30) a (5-31) a rovnici upravíme

$$\frac{q^{\nu} B^{-} C q^{-\nu} \overline{B^{-}} \overline{C}}{A^{+} H A^{+} \overline{H}} + \kappa \frac{(1-q) A^{-} C (1-q^{-1}) \overline{A^{-}} \overline{C}}{B^{+} H B^{+} \overline{H}} = g \overline{g} ,$$

$$C \overline{C} \left(\frac{B^{-} \overline{B^{-}}}{A^{+} H A^{+} \overline{H}} + \kappa \frac{(1-q) A^{-} (1-q^{-1}) \overline{A^{-}}}{B^{+} H B^{+} \overline{H}} \right) = g \overline{g} ,$$

$$\frac{C \overline{C}}{A^{+} B^{+} H A^{+} B^{+} \overline{H}} \left[B \overline{B} + \kappa (1-q) A (1-q^{-1}) \overline{A} \right] = g \overline{g} . \quad (5-35)$$

Z (5-35) je zřejmé, že pro výpočet r.l. funkce g postačí vypočítat polynom P , z rovnice

$$B \overline{B} + \kappa (1-q) A (1-q^{-1}) \overline{A} = P \overline{P} \quad (5-36)$$

Algoritmus řešení rovnice (5-36) pro libovolný řád soustavy je algoritmem iteračním. Tento algoritmus nebudeme diskutovat. V následujícím textu se dozvíme, že polynom P budeme počítat tak, aby měl pouze stabilní kořeny. Ale to již předbíháme, takže prozatím konstatujeme, že stabilní r.l. funkce

$$g = \frac{C P}{A^{+} B^{+} H} \quad (5-37)$$

Funkci g dosadíme do (5-33) a budeme tuto rovnici dále upravovat

$$J = \langle g x, g x \rangle + 2 \left\langle g x, \frac{b \overline{a}}{g} \right\rangle + 2 \kappa \left\langle g x, \frac{f \overline{c}}{g} \right\rangle + \langle b, b \rangle + \kappa \langle f, f \rangle \quad (5-38)$$

Zavedeme označení

$$m = \frac{b \overline{a}}{g} + \kappa \frac{f \overline{c}}{g} \quad (5-39)$$

Vyjádřeme r.l. funkci m

$$m = \frac{F C}{A^+ H} \frac{q^{-\nu} \overline{B^-} \overline{C}}{A^+ \overline{H}} \frac{\overline{A^+} \overline{B^+} \overline{H}}{\overline{C} \overline{P}} - \kappa \frac{C G}{B^+ H} \frac{(1-q^{-1}) \overline{A^-} \overline{C}}{B^+ \overline{H}} \frac{\overline{A^+} \overline{B^+} \overline{H}}{\overline{C} \overline{P}} =$$

$$= \frac{F C q^{-\nu} \overline{B}}{A^+ H \overline{P}} - \kappa \frac{C G (1-q^{-1}) \overline{A}}{B^+ H \overline{P}} \quad (5-40)$$

Rovnici (5-40) budeme diskutovat až dále v textu. Dosadíme (5-39) do (5-38)

$$J = \langle g x, g x \rangle + 2 \langle g x, m \rangle + \langle b, b \rangle + \kappa \langle f, f \rangle =$$

$$= \langle g x + m, g x + m \rangle - \langle m, m \rangle + \langle b, b \rangle + \kappa \langle f, f \rangle \quad (5-41)$$

R.l. funkce, které mají stupeň čitatele nižší než stupeň jmenovatele se nazývají ryzí r.l. funkce. Označme r.l. funkci m jako podíl dvou polynomů, $m = \frac{S}{R}$ a necht' $\delta S \geq \delta R$, potom

$$m = \frac{S}{R} = G + \frac{Z}{R} \quad (5-42)$$

R, S, G, Z jsou polynomy, $\frac{Z}{R}$ je ryzí r.l. funkcí, $\delta Z < \delta R$. R může být nestabilní polynom. Takže

$$m = G + \frac{Z}{R} = G + \frac{Z}{R^+ R^-} = G + \frac{U}{R^+} + \frac{V}{R^-} = m^+ + m^- \quad (5-43)$$

Stabilní část součtového rozkladu racionální lomené funkce m je $m^+ = G + \frac{U}{R^+}$, nestabilní část je $m^- = \frac{V}{R^-}$.

Ještě dříve, než dosadíme (5-40) do (5-38), diskutujme skalární součin $\langle \mathbf{m}^+, \mathbf{m}^- \rangle$.

$$\langle \mathbf{m}^+, \mathbf{m}^- \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \mathbf{m}^+(q) \mathbf{m}^-\left(\frac{1}{q}\right) \frac{dq}{q}$$

Funkce $\mathbf{m}^+(q)$ má všechny póly vně jednotkové kružnice. Funkce $\frac{1}{q} \mathbf{m}^-\left(\frac{1}{q}\right)$ má též všechny póly vně jednotkové kružnice. Vysvětleme toto tvrzení na příkladě.

⊕ Začátek příkladu

Necht'

$$\mathbf{m}^- = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{R}^-} = \frac{r_0 + r_1 q}{1 + r_1^- q + r_2^- q^2} = \frac{r_0 + r_1 q}{r_2^- (q - q_0)(q - q_1)}$$

q_0, q_1 jsou póly funkce $\mathbf{m}^-$. Tyto kořeny leží uvnitř jednotkové kružnice. Vyjádřeme funkci

$$\frac{1}{q} \mathbf{m}^-\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{q^{-1}(r_0 + r_1 q^{-1})}{r_2^-(q^{-1} - q_0)(q^{-1} - q_1)} = \frac{r_0 q + r_1}{r_2^-(1 - q_0 q)(1 - q_1 q)}$$

Póly funkce $\frac{1}{q} \mathbf{m}^-\left(\frac{1}{q}\right)$ jsou $\frac{1}{q_0}$ a $\frac{1}{q_1}$. Tyto póly leží vně jednotkové kružnice.

⊖ Konec příkladu.

Z Cauchyho věty, viz odst. 2.4 [kn1/73], vyplývá

$$\langle \mathbf{m}^+, \mathbf{m}^- \rangle = 0 \quad (5-44)$$

Dosadíme (5-43) do (5-41)

$$J = \langle \mathbf{g} \mathbf{x} + \mathbf{m}^+ + \mathbf{m}^-, \mathbf{g} \mathbf{x} + \mathbf{m}^+ + \mathbf{m}^- \rangle - \langle \mathbf{m}^+ + \mathbf{m}^-, \mathbf{m}^+ + \mathbf{m}^- \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle + \kappa \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle \quad (5-45)$$

$\mathbf{g}$ je stabilní r.l. funkce, viz (5-37). Předpokládejme, že součin r.l. funkcí $\mathbf{g} \mathbf{x}$ je též stabilní. Takže

$$\langle \mathbf{g} \mathbf{x} + \mathbf{m}^+, \mathbf{m}^- \rangle = 0 \quad (5-46)$$

Upravme (5-45)

$$J = \langle \mathbf{g} \mathbf{x} + \mathbf{m}^+, \mathbf{g} \mathbf{x} + \mathbf{m}^+ \rangle - \langle \mathbf{m}^+, \mathbf{m}^+ \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle + \kappa \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle \quad (5-47)$$

Minimum kritéria bude dosaženo, jestliže

$$x = - \frac{m^+}{g} \quad (5-48)$$

Součin r.l. funkcí ax má být stabilní, viz diskuzi (5-13). Vyjádřeme

$$ax = - \frac{q^v B^- C}{A^+ H} \frac{m^+ A^+ B^+ H}{C P} \quad (5-49)$$

Z (5-49) je zřejmé, že polynom P musí být stabilní. S touto podmínkou je nutno polynom P vypočítat z (5-36).

Jestliže polynom C je nestabilní, potom z jeho krácení v rovnici (5-49) vyplývá nebezpečí nestability regulace způsobené nesouladem modelu a skutečné soustavy. R.l. funkce

$$x = - \frac{m^+ A^+ B^+ H}{C P} \text{ je vypočtena na základě modelu, kdežto r.l. funkce } a = \frac{q^v B^- C}{A^+ H}$$

obsahuje polynomy skutečné soustavy. Krácení nestabilního polynomu C v (5-49), vzhledem k možnému nesouladu mezi modelem a skutečnou soustavou, nemůžeme provést. Jestliže polynom C je stabilní, potom z (5-48) jsme vypočítali r.l. funkci x z které vypočteme, viz (5-22), polynomy N, M regulátoru.

Jak vypočítat r.l. funkci x, jestliže polynom C je nestabilní? Uvedme příklad, kde nejprve vysvětlíme reflexi polynomu.

⊕ Začátek příkladu.

$$\text{Mějme ryzí r.l. funkci} \quad f = \frac{V}{U} = \frac{v_0 + v_1 q + v_2 q^2}{1 + u_1 q + u_2 q^2 + u_3 q^3},$$

nechť tato je stabilní, kořeny polynomu U leží vně jednotkové kružnice. R.l. funkce f je Z obrazem posloupnosti čísel f_j pro kterou $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = 0$. Kvadratické kritérium

$$J = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} f \bar{f} \frac{dq}{q} = \langle f, f \rangle \quad (5-50)$$

Polynom V rozložíme na součin kořenových činitelů.

$$V = v_0 + v_1 q + v_2 q^2 = v_2 (q - q_1) (q - q_2),$$

kořeny polynomu V jsou q_1, q_2 , mohou být stabilní i nestabilní.

Vyjádříme součin r.l. funkcí

$$\begin{aligned} f \bar{f} \frac{1}{q} &= \frac{v_2(q-q_1)(q-q_2)}{(1+u_1q+u_2q^2+u_3q^3)} \frac{v_2(q^{-1}-q_1)(q^{-1}-q_2)q^{-1}}{(1+u_1q^{-1}+u_2q^{-2}+u_3q^{-3})} = \\ &= \frac{v_2(q-q_1)(q-q_2)}{(1+u_1q+u_2q^2+u_3q^3)} \frac{v_2(1-q_1q)(1-q_2q)}{(q^3+u_1q^2+u_2q+u_3)} \end{aligned} \quad (5-51)$$

Je zřejmé, že v rámci čitatele (5-51) můžeme kořenové činitele

$$(q-q_1), (1-q_1q) \quad \text{a} \quad (q-q_2), (1-q_2q)$$

v uvedených dvojicích vzájemně libovolně vyměnit a hodnota kritéria (5-50) se nezmění. Tímto postupem získáme množinu čtyř r.l. funkcí f_1, f_2, f_3, f_4 , pro které je hodnota kritéria (5-50) je stejná. Tyto čtyři r.l. funkce mají v čitatelích polynomy V_1, V_2, V_3, V_4 , které v rámci diskutované výměny kořenových činitelů mají dvojice kořenů: V_1 má kořeny q_1, q_2 , V_2 má kořeny $q_1, \frac{1}{q_2}$, V_3 má kořeny $\frac{1}{q_1}, q_2$, V_4 má kořeny $\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}$. Uvedené čtyři polynomy nazveme **zrcadlovou množinou polynomu V**. Jsou-li kořeny q_1 a q_2 stabilní, potom kořeny $\frac{1}{q_1}$ a $\frac{1}{q_2}$ jsou nestabilní.

Na uvedeném příkladu vysvětleme reflexi polynomu. Necht' nyní kořen q_1 polynomu V je nestabilní a kořen q_2 je stabilní. **Reflexní polynom V^*** v tomto případě definujeme

$$V^* = v_2(1-q_1q)(q-q_2) \quad (5-52)$$

Z uvedeného příkladu je zřejmé, že **reflexní polynom je stabilní**. Při reflexi polynomu zaměníme nestabilní kořenové činitele stabilními. Zřejmě též platí

$$V \bar{V} = V^* \overline{V^*} \quad (5-53)$$

Pro stabilní V platí $V^* = V$.

Uveďme vlastnost množiny stabilních ryzích r.l. funkcí tvořenou zrcadlovou množinou polynomů čitatele a stabilním polynomem jmenovatele:

Mějme ryzí r.l. funkci $f = \frac{V}{U}$, kde V je nestabilní a U je stabilní polynom. Vypočtěme ryzí r.l. funkci $\frac{V^*}{U}$, kterou označíme f^* , $f^* = \frac{V^*}{U}$. Posloupnosti f_j a f_j^* jsou různé, ale

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (f_j^*)^2 \quad (5-54)$$

⊖ Konec příkladu

Nyní se vraťme k diskuzi, *jak vypočítat r.l. funkci x , jestliže polynom C je nestabilní.*

Z rozboru minimalizace rozšířeného kvadratického kritéria (5-32) a na základě, v textu dále uvedených, poznámek 5-3 a 5-4 vyplývá: uvedenou *úlohu výpočtu optimálního regulátoru budeme řešit pro soustavu na obr.3-2, kde však místo polynomu C použijeme reflexní polynom C^* .*

Z (5-48) potom vypočteme stabilní r.l. funkci x . Tuto funkci použijeme v (5-22) pro výpočet přenosu regulátoru.

Uvedeným způsobem vypočtená r.l. funkce x určuje optimální řízení pro množinu filtrů, viz obr.3-2, které mají v čitateli zrcadlovou množinu polynomů C . Toto optimální řízení je uvažováno vzhledem k minimalizaci rozšířeného kvadratického kritéria (5-32) při vstupu impulzní poruchy do regulačního obvodu z obr.3-2.

Úprava výpočetního postupu, jestliže polynom C je nestabilní:

V předcházejícím textu jsme uvedli postup jak získat r.l. funkci x , viz (5-36), (5-37), (5-43), (5-48) v případě stabilního polynomu C v regulačním obvodu na obr.3-2. Jestliže v regulačním obvodu z obr.3-2 použijeme místo polynomu C polynom C^* , nemusíme celý postup výpočtu opakovat a postupně měnit, stačí změnit rovnici (5-37) na

$$g = \frac{C^* P}{A^+ B^+ H} \quad (5-57)$$

Poznámka 5-3: Vraťme se k rovnici (5-40). V této rovnici je popsána r.l. funkce m . Tato funkce je v rovnicích (5-42) a (5-43) je rozložena na součet stabilní části m^+ a nestabilní části m^- . Všimněme si, že polynom C není ve jmenovateli rovnice r.l. funkce m , viz (5-40).

Poznámka 5-4: Všimněme si rovnice (5-49) v případě výpočtu regulátoru s reflexním polynomem C^* , viz (5-57). Rovnice (5-49) popisuje část rovnice (5-13) pro vyjádření regulační odchylky e . Pro diskutovaný regulátor zapojený do regulačního obvodu s polynomem C , můžeme rovnici (5-49) přepsat

$$a x = - \frac{q^v B^- C}{A^+ H} \frac{m^+ A^+ B^+ H}{C^* P} \quad (5-58)$$

Z již uvedené diskuze za rovnici (5-49) zopakujme: R.l. funkce $x = - \frac{m^+ A^+ B^+ H}{C^* P}$ je vypočtena na základě modelu, kdežto r.l. funkce $a = \frac{q^v B^- C}{A^+ H}$ obsahuje polynomy skutečné soustavy. Na pravé straně (5-58) je v čitateli C , ve jmenovateli C^* . Je možno krátit pouze stabilní kořenové činitele polynomu C .

Konec poznámky 5-4

Uvedme ještě **zkušenost, získanou ověřovacími výpočty**, viz [sk1/88]. Mějme regulační obvod, viz obr.3-2 s nestabilním polynomem C . Navrhne regulátor :

- pro nestabilní polynom C , a tento nestabilní polynom použijeme v (5-37) a vlastně tedy v průběhu všech optimalizačních výpočtů. (Tímto chybným postupem získáme regulátor se sklonem k nestabilitě, viz obr.4-3.) Jestliže model a soustava budou totožné, potom teoreticky k nestabilitě nedojde a hodnotu kritéria (5-32) označíme J_C .
- pro reflexní polynom C^* , postupem, který byl popsán v předcházejícím textu. Hodnotu kritéria (5-32) označíme J_{C^*} .

Zjistíme, že pro regulátor se sklonem k nestabilitě je kritérium J_C menší, než kritérium J_{C^*} pro navržený stabilní regulátor.

Poznámka 5-5: Diskutujme rovnici (5-15). V této rovnici krácení nestabilním polynomem B^- nepřináší nebezpečí nestability, neboť po zkrácení zlomku v (5-15) vznikne pouze polynom G . Malé změny v polynomu B^- způsobí malé změny v polynomu G . Tyto změny nezpůsobí nestabilitu navrženého regulátoru v uzavřeném regulačním obvodu. V případě rovnice (5-49) po zkrácení nestabilním polynomem C na pravé straně rovnice zůstává r.l. funkce, v které vzniká nebezpečí již diskutované nestability regulačního obvodu.

6. Doplněk k výpočtu číslicového regulátoru dynamickým programováním

Pokračujme v diskuzi o výpočtu optimálního regulátoru pro poruchu vstupující do regulačního obvodu na obr.3-2 v zjednodušeném případě, kdy polynom $H = 1$. Tato diskuze navazuje na text v odst.4.3, str.36, kde byla počítána diferenční rovnice regulátoru.

Jak již bylo řečeno v závěru předcházejícího odstavce, t.j. odst.5 : Z důvodu výpočtu stabilního regulátoru při použití algebraické teorie systémů se návrh regulátoru prováděl při náhradě polynomu C reflexním polynomem C*. Takto vypočtený regulátor se zapojil do regulačního obvodu s polynomem C.

Stejný postup provedeme při výpočtu diferenční rovnice regulátoru z rovnice stavového regulátoru. Všimněme si, že při výpočtu stavového regulátoru jsme polynom C nepoužili. Provedeme pouze úpravu rovnice (4-73), do transformační matice místo koeficientů c_1, c_2, c_3 polynomu C dosadíme koeficienty c_1^*, c_2^*, c_3^* reflexního polynomu C^* . Rovnici (4-73) přepíšeme a označíme ji (6-3)

$$x_j = T \begin{pmatrix} -z_j \end{pmatrix}, \quad (6-3)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & -c_1^* & -c_2^* & -c_3^* \\ 0 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & -b_2 & -b_3 & 0 & -c_2^* & -c_3^* & 0 \\ 0 & -\alpha_4 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & -c_3^* & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$z_j = \begin{bmatrix} -y_j \\ -y_{j-1} \\ -y_{j-2} \\ -y_{j-3} \\ \Delta u_{j-1} \\ \Delta u_{j-2} \\ \Delta u_{j-3} \\ d_j \\ d_{j-1} \\ d_{j-2} \end{bmatrix}.$$

Obdobně změníme i rovnici (4-76) a označíme ji (6-6)

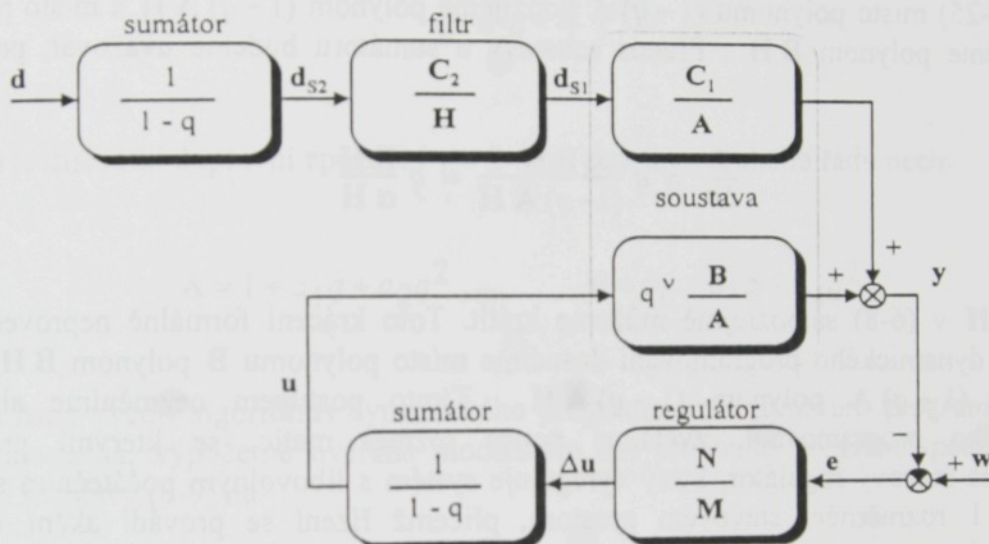
$$(M C^* + q B P) \Delta u = s n C^* w - (N C^* - (1-q) A P) y \quad (6-6)$$

Doposud jsme diskutovali návrh regulátoru metodou dynamického programování pro optimální vyregulování impulzní poruchy a skokové změny žádané hodnoty v regulačním obvodu z obr.3-2 za předpokladů o polynomech:

1) $C = 1$, $H = 1$,

2) $H = 1$.

Uvažujme dále, že v regulačním obvodu z obr.3-2 je H polynom. Vzhledem k poznámce 3-1, viz str.19, je vhodné strukturu obr.3-2 překreslit



Obr.6-1

Za předpokladu $C = C_1 C_2$ je regulační obvod na obr.6-1 stejný jako obvod na obr.3-2. V poznámce 3-1 se hovoří o jiné dynamické soustavě, kterou před vstupem do soustavy prochází porucha. Tato jiná dynamická soustava je na obr.6-1 označena názvem filtr s přenosem $\frac{d_{S1}}{d_{S2}} = \frac{C_2}{H}$. V odst.2,3,4 byl řád soustavy označován r , nyní jej označíme δA , $\delta A = r$, řád filtru na obr.6-1 je δH . V případě vstupu poruchy d do regulačního obvodu z obr.6-1 musíme pomocí veličiny Δu regulovat systém řádu $\delta A + \delta H + 1$, musíme regulovat rozváženou soustavu, filtr a sumátor (zapojený na obr.6-1 před filtrem). Veličina Δu ale prochází soustavou řádu $\delta A + 1$.

Důvod, proč hovoříme o veličině Δu a ne pouze o veličině u a tudíž k řádům diskutovaných soustav přičítáme jedničku je uveden v poznámce 4-1 na str.21.

Uvedme jednoduchý, programově ověřený, výpočet optimálního regulátoru metodou dynamického programování.

Z obr.6-1 je zřejmé, že

$$y = q \frac{B}{(1-q)A} \Delta u + \frac{C_1 C_2}{(1-q)AH} d = q \frac{B}{(1-q)A} \Delta u + \frac{C}{(1-q)AH} d, \quad (6-7)$$

$$(1-q)AHy = qBH\Delta u + Cd$$

Zopakujme, jak jsme doposud metodou dynamického programování navrhovali stavový regulátor: Tento regulátor jsme počítali tak, aby soustava z libovolného počátečního stavu v $\delta A + 1$ rozměrném stavovém prostoru byla převedena do nulového stavu, při dosažení minima rozšířeného kvadratického kritéria (4-5), nebo (4-30).

Jednoduchý postup výpočtu stavového regulátoru pro systém řádu $\delta A + \delta H + 1$ je, že v rovnici (4-25) místo polynomu $(1-q)A$ použijeme polynom $(1-q)AH$ a místo polynomu B použijeme polynom BH . Přenos soustavy a sumátoru budeme uvažovat, porovnej s (4-25),

$$\frac{y}{\Delta u} = q \frac{BH}{(1-q)AH} = q \frac{BH}{\alpha H} \quad (6-8)$$

Polynom H v (6-8) samozřejmě můžeme krátit. Toto krácení formálně neprovedeme do algoritmu dynamického programování dosadíme místo polynomu B polynom BH a místo polynomu $(1-q)A$ polynom $(1-q)AH$. Tímto postupem nezměníme algoritmus dynamického programování, zvětšíme pouze rozměr matic, se kterými pracujeme. Vypočítáme stavový regulátor, který vyreguluje systém s libovolným počátečním stavem v $\delta A + \delta H + 1$ rozměrném stavovém prostoru, přičemž řízení se provádí akční veličinou vstupující do soustavy, jejíž stav je určen pouze v $\delta A + 1$ rozměrném stavovém prostoru (v maticích popisujících chování sousoustavy k numerickému krácení polynomem H dochází). Tento jednoduchý postup splňuje požadavek výpočtu stavu a vývoje systému v $\delta A + \delta H + 1$ rozměrném stavovém prostoru systému, přičemž regulace je prováděna v $\delta A + 1$ rozměrném podprostoru.

V odst. 4.2 a 4.3 jsme uvedli postup, jak vypočítat diferenční rovnici regulátoru pro případy, kdy na obr 6-1 polynomy

1) $C_1 = C_2 = 1$, $H = 1$ (regresní model soustavy),

2) C_1 je polynom, $C_2 = 1$, $H = 1$.

Jestliže budeme počítat *optimální regulátor pro soustavu z obr.6-1*, bez jakýchkoliv omezujících předpokladů, potom postup výpočtu bude stejný jako v odst. 4.2 a 4.3, pouze do rovnic pro výpočet stavového regulátoru místo polynomu $(1-q)A$ použijeme polynom $(1-q)AH$ a místo polynomu B použijeme polynom BH . Uvedený postup je jednoduchý, není třeba algoritmus (program pro počítač) měnit, zvětšíme pouze rozměry matic se kterými v tomto algoritmu počítáme.

Doposud jsme dynamickým programováním řešili návrh regulátoru pro soustavu bez dopravního zpoždění a nebo s dopravním zpožděním menším než perioda vzorkování T . Na obr.6-1 jsme uvažovali $v = 1$. Jestliže *soustava má dopravní zpoždění větší než perioda vzorkování*, $v > 1$, potom jednoduchá modifikace dat programu spočívá ve zvýšení řádu regulované soustavy jednoduché modifikaci polynomů A , B diskrétního Z přenosu regulované soustavy. Uvedme příklad.

⊕ Začátek příkladu

Mějme vypočítat metodou dynamického programování optimální regulátor pro soustavu druhého řádu s dopravním zpožděním větším než je perioda vzorkování. Necht' Z přenos této soustavy je

$$\frac{y}{u} = q^2 \frac{B}{A} \quad (6-9)$$

V (6-9) je diskrétní dopravní zpoždění $v = 2$. Pro soustavu druhého řádu necht'

$$A = 1 + a_1 q + a_2 q^2, \quad B = b_0 + b_1 q + b_2 q^2.$$

Jelikož jsme uvedli algoritmus dynamického programování - strukturu programu pro $v = 1$, pak jednoduchá, výpočetně ověřená modifikace dat pro tento program spočívá v úpravě přenosu soustavy (6-9) na

$$\frac{y}{u} = q \frac{B_{\text{modif}}}{A_{\text{modif}}}, \quad (6-10)$$

kde

$$A_{\text{modif}} = 1 + a_1 q + a_2 q^2 + 0 q^3, \quad B_{\text{modif}} = 0 + b_0 q + b_1 q^2 + b_2 q^3.$$

⊖ Konec příkladu

7. Návrh regulátoru při náhodných poruchách

Mějme lineární dynamickou soustavu. Necht' vstupní veličina d_j této soustavy je posloupnost náhodných impulzů jejichž velikost se mění v časech jT . Měření výstupní veličiny y_j soustavy provádějme též v časech jT . Z přenos soustavy je r.l. funkce.

$$\frac{y}{d} = \frac{qB}{A} \quad (7-1)$$

Necht' do této soustavy při nulových počátečních podmínkách, vstoupí jednotkový impulz, jehož Z obraz je $1-q$. Veličinu y označíme g a nazveme ji váhovou funkcí soustavy.

$$g = \frac{qB}{A} (1-q) \quad (7-2)$$

R.l. funkce g je Z obrazem posloupnosti čísel $g_1, g_2, g_3, g_4, \dots$. Uvažujme, že A je stabilní polynom, takže $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j = 0$. Vyjádřeme y_j při známých hodnotách vstupní posloupnosti d_j

$$y_j = g_1 d_{j-1} + g_2 d_{j-2} + g_3 d_{j-3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} g_k d_{j-k} \quad (7-3)$$

Pravá strana rovnice (7-3) je t.zv. *konvolutorní součet*.

Necht' veličina d_j je jednou realizací stacionárního ergodického náhodného procesu [kn1/61],[sk1/70],[di1/84]. Náhodná veličina d_j je realizována v časech $j \in (-\infty, \infty)$.

Rozptyl této veličiny je

$$\sigma_d^2 = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\mu+1} \sum_{j=-\mu}^{\mu} d_j^2 \quad (7-4)$$

Korelační funkci veličiny d_j vypočteme

$$f_k = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\mu+1} \sum_{j=-\mu}^{\mu} d_j d_{j-k} \quad (7-5)$$

Necht' diskutovaná veličina d_j má korelační funkci $f_0 = \sigma_u^2$, $f_k = 0$ pro $k \neq 0$. Tuto veličinu nazveme *diskrétním bílým šumem*. Necht' tato veličina d_j vstupuje do soustavy v čase $j \in (-\infty, \infty)$. Vypočtěme rozptyl σ_y^2 veličiny y_j

$$\begin{aligned}
\sigma_y^2 &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\mu+1} \sum_{j=-\mu}^{\mu} y_j^2 = \\
&= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\mu+1} \sum_{j=-\mu}^{\mu} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k d_{j-k} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} g_m d_{j-m} \right) \right\} = \\
&= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\mu+1} \{ \dots + [g_1 d_{-2} + g_2 d_{-3} + g_3 d_{-4} + \dots] [g_1 d_{-2} + g_2 d_{-3} + g_3 d_{-4} + \dots] + \\
&\quad + [g_1 d_{-1} + g_2 d_{-2} + g_3 d_{-3} + \dots] [g_1 d_{-1} + g_2 d_{-2} + g_3 d_{-3} + \dots] + \\
&\quad + [g_1 d_0 + g_2 d_{-1} + g_3 d_{-2} + \dots] [g_1 d_0 + g_2 d_{-1} + g_3 d_{-2} + \dots] + \dots \}
\end{aligned} \tag{7-6}$$

Po roznásobení členů v hranatých závorkách v (7-6), při použití (7-5) a při již uvedeném předpokladu $f_0 = \sigma_u^2$, $f_k = 0$ pro $k \neq 0$, rovnici (7-6) upravíme

$$\sigma_y^2 = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\mu+1} \left\{ g_1^2 \left(\sum_{j=-\mu-1}^{\mu-1} d_j^2 \right) + g_2^2 \left(\sum_{j=-\mu-2}^{\mu-2} d_j^2 \right) + g_3^2 \left(\sum_{j=-\mu-3}^{\mu-3} d_j^2 \right) + \dots \right\},$$

takže

$$\sigma_y^2 = \sigma_d^2 \sum_{j=0}^{\infty} g_j^2 \tag{7-7}$$

⊕ Poznámka 7-1

V nekonečných součtech se při úpravě (7-6) na (7-7) vynulují všechny smíšené součty, na př.

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\mu+1} g_1 g_2 \left(\sum_{j=-\mu-1}^{\mu-1} d_j d_{j-1} \right) = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\mu+1} g_1 g_3 \left(\sum_{j=-\mu-1}^{\mu-1} d_j d_{j-2} \right) = 0,$$

atd. Toto vynulování je vyjádřeno již uvedenou podmínkou na korelační funkci diskrétního bílého šumu, $f_k = 0$ pro $k \neq 0$.

⊖ Konec poznámky 7-1

Při vstupu diskrétního bílého šumu do lineární dynamické soustavy je rozptyl σ_y^2 výstupní veličiny roven součinu rozptylu diskrétního bílého šumu σ_d^2 a součtu kvadrátů váhové funkce $\sum_{j=0}^{\infty} g_j^2$. Necht' diskutovaná soustava, s přenosem (7-2) je celým regulačním

obvodem. Chtějme návrhem regulátoru minimalizovat rozptyl σ_y^2 výstupní veličiny regulačního obvodu, jestliže do regulačního obvodu vstupují poruchy d_j , diskrétní bílý šum.

Rovnice (7-7) vyjadřuje, že místo minimalizace rozptylu σ_y^2 můžeme provést minimalizaci kvadratického kritéria $\sum_{j=0}^{\infty} g_j^2$, t.j. odezvy regulačního obvodu na impulzní poruchu.

Stejně závěry platí i pro rozšířené kvadratické kritérium (4-30).

8. Adaptivní regulace

Jeden možný typ adaptivního regulátoru získáme spojením rekurzivního algoritmu identifikace [sb1/80],[sb1/82] a návrhu regulátoru. V případě dynamického programování je návrh regulátoru též rekurzivním algoritmem. Při identifikaci v uzavřeném regulačním obvodu z obr.3-2 je obtížné vypočítat model soustavy při vstupu náhodných poruch d . Vysvětlení je možno provést jednoduchou úvahou.

Uvažujme, že v regulační obvodu na obr.3-2 je $w = 0$. Vyjádřeme veličiny y a u jestliže *do regulačního obvodu na obr.3-2 vstoupí porucha d*

$$y = \frac{C}{\left(1 + \frac{q^V BN}{(1-q)AM}\right)(1-q)AH} d = \frac{CM}{\{(1-q)AM + q^V BN\}H} d \quad (8-1)$$

$$u = \frac{CN}{\{(1-q)AM + q^V BN\}(1-q)H} d \quad (8-2)$$

Dělme rovnici (8-1) rovnicí (8-2)

$$\frac{y}{u} = \frac{(1-q)M}{N} \quad (8-3)$$

Model soustavy budeme při identifikaci počítat ve tvaru

$$\frac{y}{u} = \frac{q^V B}{A} \quad (8-4)$$

Při datech y , u , jejichž podíl je vyjádřen rovnicí (8-3), není možný výpočet koeficientů polynomů A , B .

Dále uvažujme, že v regulačním obvodu na obr.3-2 je $d = 0$. Vyjádřeme veličiny u a y jestliže *do regulačního obvodu na obr.3-2 vstoupí žádaná hodnota w*

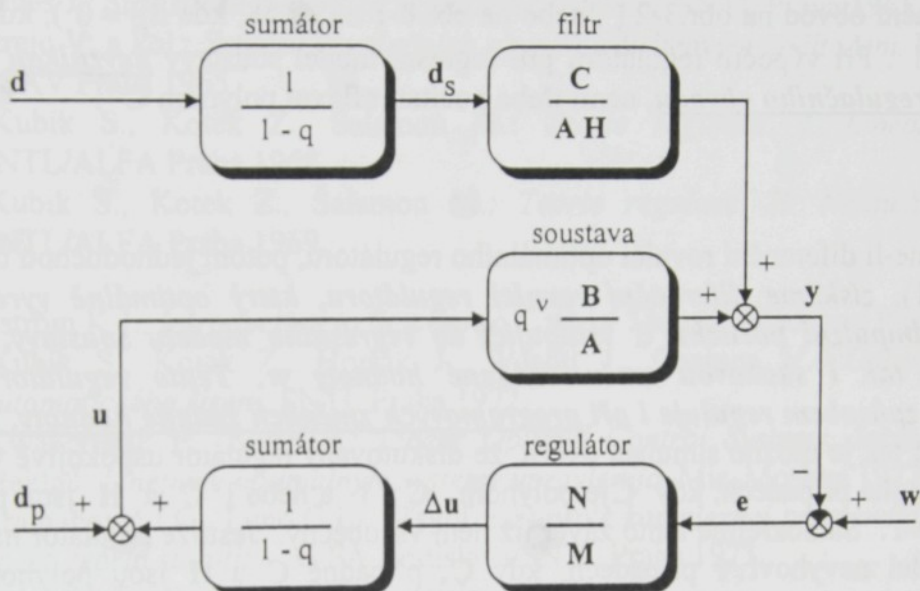
$$u = \frac{N}{\left(1 + \frac{q^V BN}{(1-q)AM}\right)(1-q)M} w = \frac{AN}{(1-q)AM + q^V BN} w \quad (8-5)$$

$$y = \frac{q^V BN}{(1-q)AM + q^V BN} w \quad (8-6)$$

Dělíme-li rovnici (8-6) rovnicí (8-5), získáme rovnici soustavy (8-4). Budeme-li provádět identifikaci v uzavřeném regulačním obvodu bez poruch při změnách žádané hodnoty,

získáme zřejmě hodnoty koeficientů polynomů A , B , samozřejmě za předpokladu, že jsme správně odhadli diskrétní dopravní zpoždění v a řád soustavy, t.j. stupně polynomů A , B .

Obdobnou úvahou, viz (8-5), (8-6), je možno ověřit, že stejný vliv na identifikaci v uzavřeném regulačním obvodu, jako mají změny w , mají i přídavné poruchy d_p přivedené do regulačního obvodu na obr.8-1. Přídavné poruchy jsou generovány řídicím systémem, tudíž *přídavné poruchy jsou poruchy měřené*.



Obr.8-1

Vstup poruch d do reálných soustav nemůžeme většinou zastavit nebo potlačit. *Numerické podmínky pro identifikaci můžeme pouze zlepšit změnami žádané hodnoty w nebo vstupem přídavných poruch d_p .* Identifikační algoritmus diskutovaného adaptivního regulátoru spustíme pouze při změnách veličin w , nebo d_p . Jestliže tyto veličiny budou delší čas konstantní, identifikaci vypneme. *Přídavné poruchy d_p , viz obr.8-1, budeme pro zlepšení numerických podmínek identifikace přivádět do regulačních obvodů, u kterých změny žádaných hodnot w nejsou povoleny.*

9. Závěr

Uveďme technické doporučení, které je platné jak pro návrh regulátoru metodou dynamického programování, tak i pro návrh regulátoru při použití algebraické teorie systémů:

Nejjednodušší a často i nejvhodnější algoritmus návrhu regulátoru pro lineární dynamické soustavy je výpočet regulátoru pro regresní model soustavy, viz odst. 4.1, 4.3, 5, t.j. pro regulační obvod na obr.3-2 (, nebo na obr.8-1 na str.58, kde $d_p = 0$), kdy polynomy $C = 1$, $H = 1$. Při výpočtu regulátoru pro regresní model soustavy nevznikají problémy s nestabilitou regulačního obvodu, nemá třeba počítat reflexní polynom C^ .*

Získáme-li diferenční rovnici optimálního regulátoru, potom jednoduchou úpravou, viz (4-60), (4-61), získáme *diferenční rovnici regulátoru, který optimálně vyreguluje jak neměřenou impulzní poruchu d vstupující do regresního modelu soustavy, náhodnou poruchu d , tak i skokovou změnu žádané hodnoty w . Tento regulátor technicky vyhovujícím způsobem reguluje i při programových změnách žádané hodnoty, na př. typu rampa*. Právě tak je možno simulací ověřit, že diskutovaný regulátor uspokojivě vyreguluje i poruchy v mnoha případech, kdy C je polynom, $C \neq 1$ a nebo i C a H jsou polynomy, $C \neq 1$ a $H \neq 1$. Samozřejmě tento závěr již není všeobecný. Jestliže regulátor navržený pro regresní model nevyhoví v případech, kdy C , případně C a H jsou polynomy, potom algoritmicky "mírně" složitější výpočet regulátoru dynamickým programováním je popsán v odst.6 a pro návrh regulátoru při použití algebraické teorie systémů je součástí popisu v odst.5. *Identifikovat při neměřených poruchách, nebo vypočítat na základě analýzy polynomy C a H pro tepelné a chemické soustavy bývá velmi obtížné.*

Předložená práce řeší regulaci lineárních systémů. Skutečné technické systémy můžeme popsat jako lineární často pouze v úzkých režimech činnosti. *Většina technických systémů jsou systémy nelineární. Přesto použití diskutovaných algoritmů návrhu číslicových regulátorů může být užitečným doplňkem programů pro regulaci dynamických soustav.*

Informace o průmyslovém a laboratorním ověřování metody dynamického programování pro výpočet diferenčních rovnic číslicových regulátorů jsou již uvedeny na str.6.

Poznámka: Je uvedena nejdůležitější literatura a literatura publikovaná autorem, mající vztah k diskutované problematice. Z výzkumných zpráv publikovaných autorem jsou uvedeny časově první a dále pouze nejdůležitější. U všech publikací autora je uveden rozsah stran. V textu nejsou provedeny odkazy na všechny uvedené publikace.

Knižní publikace:

- [kn1/61] Beneš J.: *Statistická dynamika regulačních obvodů*. SNTL Praha 1961.
- [kn1/65] Strejc V. a kol.: *Syntéza regulačních obvodů s číslicovým počítačem*. Nakladatelství ČSAV Praha 1965.
- [kn1/68] Kubík S., Kotek Z., Šalamon M.: *Teorie regulace. I. Lineární regulace*. SNTL/ALFA Praha 1968.
- [kn1/69] Kubík S., Kotek Z., Šalamon M.: *Teorie regulace. II. Nelineární regulace*. SNTL/ALFA Praha 1969.
- [kn1/70] Åström K.J.: *Introduction to Stochastic Control Theory*. Academic Press 1970.
- [kn1/72] Kubík S., Kotek Z., Hrušák J., Wachtl J., Chalupa V.: *Optimální systémy automatického řízení*. SNTL Praha 1972.
- [kn2/72] Kwakernaak H., Sivan R.: *Linear Optimal Control Systems*. John Wiley 1972. Překlad: *Linejnyje optimalnyje systemy upravlenija*. Mir, Moskva 1977.
- [kn1/73] Aramanovič I.G., Lunc G.L., El'sgol'c: *Funkcie komplexnej premennej, operátorový počet, teória stability*. ALFA Bratislava/SNTL Praha 1973.
- [kn2/77] Znáť Š.: *Teória čísel*. ALFA Bratislava, 1977.
- [kn1/78] Kučera V.: *Algebraická teorie diskrétního lineárního řízení*. Academia, Praha 1978.
- [kn2/78] Strejc V.: *Stavová teorie diskrétního lineárního řízení*. Academia, Praha 1978.
- [kn1/79] Kučera V.: *Discrete Linear Control - The Polynomial Equation Approach*. John Wiley 1979.
- [kn2/79] Vích R.: *Transformace Z a některá její použití*. Matematický seminář SNTL Praha 1979.
- [kn1/80] Franklin G.F., Powell J.D.: *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley 1980.
- [kn2/80] Zítek P.: *Simulace dynamických systémů*. SNTL Praha 1980.
- [kn3/80] Brunovský P.: *Matematická teória optimálneho riadenia*. ALFA/SNTL Praha 1980.
- [kn1/82] Nagrath I.J., Gopal M.: *Control Systems Engineering*. John Wiley 1982.
- [kn2/82] Kubík S., Kotek Z., Strejc V., Štecha J.: *Teorie automatického řízení I. Lineární a nelineární systémy*. SNTL/ALFA Praha 1982.
- [kn3/82] Kubík S., Kotek Z., Razím M., Hrušák J., Branžovský J.: *Teorie automatického řízení II. Optimální, adaptivní a učící se systémy*. SNTL/ALFA Praha 1982.
- [kn1/86] Balda M., Hanuš B. a kol.: *Základy technické kybernetiky*. SNTL/ALFA, Praha 1986.
- [kn1/89] Åström K.J., Wittenmark B.: *Adaptive Control*. Addison-Wesley 1989.
- [kn1/91] Kučera V.: *Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems*. Prentice Hall 1991.

Skripta a příručky:

- [sk1/70] Kadeřábek J., Kracík V.: *Úvod do teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a příbuzných oblastí*. Skripta VŠST Liberec 1970.
- [sk1/72] Hanuš B.: *Základy teorie lineárního impulsního regulačního obvodu. I.díl*. Skripta VŠST Liberec 1972.
- [sk2/72] Hanuš B.: *Základy teorie lineárního impulsního regulačního obvodu. II.díl*. Skripta VŠST Liberec 1972.
- [sk3/72] Hanuš B.: *Základy teorie lineárního impulsního regulačního obvodu. III.díl. Příklady k numerickým metodám*. Skripta VŠST Liberec 1972.
- [sk1/79] Štecha J.: *Obecná teorie systémů*. Skripta ČVUT Praha 1979.
- [sk1/81] Hanuš B.*, Janeček B.*, Kracík V.*, Mikulecký B.*: *Metoda návrhu víceparametrových číslicových regulačních systémů*. Metodická příručka, Ústav pro využití výpočetní techniky v řízení (ÚVVTR), Praha 1981, 101 stran, (* VŠST Liberec, ** ÚVVTR Praha).
- [sk1/88] Hanuš B., Kracík V., Tůma L.: *Algebraická metoda navrhování číslicových řídicích algoritmů*. Sešity INORGA, ASŘ 145, ročník XVI, Praha 1988.
- [sk1/92] Modrlák O.: *Teorie automatického řízení II. (Cvičení)*. Skripta VŠST Liberec 1992.
- [sk1/93] Zítek P.: *Základy automatického řízení*. Skripta ČVUT Praha 1993.

Disertační a habilitační práce:

- [di1/75] Peterka V.: *Číslicové řízení procesů s náhodnými poruchami a neurčitými charakteristikami*. Doktorská disertační práce. ČSAV UTIA Praha 1975.
- [di1/80] Svoboda J.: *Číslicové řízení spojitých technologických procesů*. Kandidátská disertační práce. ČVUT, fakulta strojní, Praha 1980.
- [di1/84] Janeček B.: *Návrh vhodných způsobů řízení vyššího typu, zvláště pak typu adaptivního, pro energetické procesy*. Kandidátská disertační práce. ČVUT, fakulta strojní, Praha 1984, 165 str. + přílohy.
- [di1/94] Janeček J.: *Příspěvek k algebraickému pojetí syntézy regulačního obvodu*. Habilitační práce. VŠST Liberec 1994.

Sborníky konferencí, seminářů a vědeckých prací:

- [sb1/70] Hanuš B., Janeček B., Modrlák O.: *Ověřování číslicové regulace v laboratoři VŠST*. Sborník vědeckých prací VŠST v Liberci, 1970, s. 81-89.
- [sb1/72] Hanuš B., Drozdová V., Janeček B., Modrlák O., Rindt E., Tuž J.: *Použití počítačů pro řízení*. Sborník vědeckých prací VŠST v Liberci, 1972, s. 123-132.
- [sb1/80] Hebký Z.: *U-D filtr pro průběžnou lineární regresi*. Ve zborníku přednášek zo IV. celoštátní konferencie ASRTP 80. ČSVTS Žilina
- [sb1/82] Peterka V., Böhm J., Halousková A., Kárný M., Maršík J.: *Algoritmy pro adaptivní mikroprocesorovou regulaci technologických procesů*. ČSAV UTIA Praha 1982.
- [sb1/89] Janeček B.: *Ověřování algoritmu adaptivní regulace*. Ve sborníku referátů: Automatická regulace a logické řízení '89. Žinkovy, ČSVTS Škoda Plzeň, str.61-65.
- [sb1/92] Janeček B., Modrlák O., Ceé T., Demjanovič P., Kočí J., Pavlík P.: *Program SIM for teaching and research activities*. In: CAE in ACT Prague 1992, ČVUT, p.118-121.

- [sb2/92] Farsi M.*, Karam K.*, Kracík V.** , **Janecek B.****: *Comparing Adaptive Generalized Predictive Controller and Optimal Controller*. In Abstracts of Papers of Systems Science XI International Conference, Wroclaw, Poland 1992, p.40.
(* University of Newcastle, UK, ** VŠST Liberec)
- [sb1/95] Farsi M.*, Karam K.Z.*, Abdalla H.H.*, **Janecek B.****: *A Knowledge-Based Approach for a Parallel Control Structure*. In Proceedings of the 12th International Conference on Systems Science, Wroclaw, Poland 1995, Vol.III, p.218-222.
(* University of Newcastle, UK, ** VŠST Liberec)
- [sb1/96] Hanuš B.*, Cýrys J.*, Hernych M.*, **Janeček B.***, Janeček J.*, Modrlák O.*, Sindelar R.**: *Control of Denox Process Reactor*. In Proceedings of the Mechatronics '96, Guimarães, Portugal 1996, Vol.2, p.451-454.
(* TU Liberec, ** ABB Kraftwerksleittechnik GmbH, Mannheim, Germany)

Odborné časopisy:

- [čal/64] Hanuš B.: *Číslicové řízení s omezujícími podmínkami na pohyb akčního členu*. Automatizace 7/64, str. 169-172.
- [čal/65] Hanuš B.: *Algoritmus řízení pro číslicový počítač při libovolné kombinaci vzorkovaných hodnot stavových veličin soustavy*. Automatizace 1/65, str. 1-6.
- [čal/88] **Janeček B.**, Grosman J., Klobouček J., Tůma P., Suchý J., Kracík J.: *Programový regulátor vypalovací pece s adaptivním algoritmem seřizování realizovaný na mikropočítači SAPI-1*. Automatizace 2/88, str. 40-44.

Výzkumné zprávy:

- [vy1/70] Hanuš B., **Janeček B.**: *Zkoušky číslicové regulace v Elektrárně Pruněřov. Regulační pochody s číslicovou regulací na přehříváku bloku č.6*. Výzkumná zpráva AU-0135, VŠST Liberec 1970, 60 str.
- [vy1/73] **Janeček B.**, Modrlák O.: *Výpočet řídicích algoritmů číslicového regulačního obvodu pro přímou číslicovou regulaci přehříváku bloku č.6*. Výzkumná zpráva Z-AS-021, VŠST Liberec 1973, 102 str.
- [vy1/81] **Janeček B.**: *Rozbor aplikace vyšších způsobů řízení pro energetické procesy*. Výzkumná zpráva KTK-0081, VŠST Liberec 1981, 97 str.
- [vy1/83] Kracík V.: *Algebraická syntéza řízení diskrétního systému*. Výzkumná zpráva KTK-0113, VŠST Liberec 1983.
- [vy1/84] Clarke D.W., Mohtadi C., Tuffs P.S.: *Generalized Predictive Control. Part 1: The Basic Algorithm*. Department of Engineering Science, Parks Road, Oxford, OX1 3PJ. Q.U.E.L. Report 1555/84.
- [vy2/84] Clarke D.W., Mohtadi C., Tuffs P.S.: *Generalized Predictive Control. Part 2: Extensions and Interpretations*. Department of Engineering Science, Parks Road, Oxford, OX1 3PJ. Q.U.E.L. Report 1557/84.
- [vy3/84] Kracík V., Tůma L.: *Doplňky a příklady k metodě algebraické syntézy regulátoru*. Výzkumná zpráva KTK-0129, VŠST Liberec 1984.
- [vy1/91] **Janeček B.**: *Adaptivní regulátor ve spojení s modelem turboexhaustorové stanice. Model na počítači PC*. Výzkumná zpráva KTK-0212, VŠST Liberec 1991, 16 str.
- [vy1/96] Cýrus J., **Janeček B.**, Lukeš J., Michna V., Tůma L.: *Control system for small fluidized-bed boilers*. Research report CONTR001, TU Liberec 1996.