

Vysoká škola: strojní a textilní

Katedra: sklář. a keram. strojů

Fakulta: strojní

Školní rok: 1980/81

## DIPLOMOVÝ ÚKOL

pro Romana V i n š e

obor 23-21-8 stroje a zařízení pro chemický, potravinářský  
a spotřební průmysl

Protože jste splnil..... požadavky učebního plánu, zadává Vám vedoucí katedry ve smyslu směrnice ministerstva školství a kultury o státních závěrečných zkouškách tento diplomový úkol:

Název tématu: Výpočet pevnosti skleněného obalu.

Pokyny pro vypracování:

1. Seznámení se současnými a perspektivními způsoby výroby skleněných obalů.
2. Seznámení s teorií výpočtu tenkých skořepin středově souměrných.
3. Výpočet napjatosti, která vzniká ve spodní části láhve EVRO při vnitřním přetlaku se zřetelem na tloušťku stěny láhve.
4. Zhodnocení technické a ekonomické důležitosti zadaného úkolu.

Pro účely přelomu se řadí tento úkol  
k úkolům pro státní závěrečné zkoušky  
v oboru strojní a textilní průmysl  
a spotřební průmysl.

V. VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A  
TEXTILNÍ  
Knihovna  
Č. 1, STUDENT  
Č. 461 17

Rozsah grafických laboratorních prací: cca 40 stran textu včetně příslušných výpočtů a grafů.

Rozsah průvodní zprávy:

Seznam odborné literatury:

Gorbatov N., Valenta J.: Statika skořepin a skořepinových konstrukcí, SNTL 1972  
Placák V., Kunc J.: Výpočet napjatosti skořepin, SNTL 1966  
Prošek A.: Výpočet dimenzí láhví z plastů, diplomová práce 1977

Vedoucí diplomové práce:

Ing. Jitka Kvapilová

Konsultanti:

Ing. Křivánková, Sklo Union Teplice

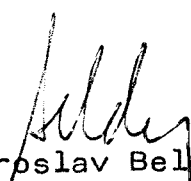
Datum zahájení diplomové práce:

15. 9. 1980

Datum odevzdání diplomové práce:

12. 6. 1981

L. S.

  
Doc. Ing. Jaroslav Belda, CSc.,  
Vedoucí katedry

  
Doc. RNDr. Bohuslav Stříž, CSc.  
Děkan

**VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ V LIBERCI**  
**NOSITELKA ŘÁDU PRÁCE**

**FAKULTA STROJNÍ**

**Obor 23 - 21 - 8**

**Stroje a zařízení pro chemický, potravinářský  
a spotřební průmysl**

**Zaměření**

**sklářské a keramické stroje**

**Katedra sklářských a keramických strojů**

**VÝPOČET PEVNOSTI SKLENĚNÉHO OBALU**

**ROMAN VINEŠ**

**Vedoucí práce: Ing. Jitka Kvapilová, VŠST Liberec**

**Konsultant: Ing. Křivánková, Sklo Union Teplice**

**Rozsah práce a příloh**

**Počet stran: 46**

**Počet obrázků: 9**

**Počet tabulek: 6**

**Počet příloh: 4**

*KSK/ŠK*

**2. června 1981**

"Místopřisežně prohlašuji, že jsem diplomovou práci  
vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury."

V Liberci 2. června 1981

Roman Ulně

## **OBSAH**

**Seznam použitých skratek a symbolů**

**Úvod**

- 1. Současné a perspektivní způsoby výroby skleněných obalů**
  - 1.1 Současný stav**
  - 1.2 Nedostatky při současném tvarování skleněných obalů**
    - 1.2.1. Úprava viskozity a dávkování**
    - 1.2.2. Dávka kapky**
    - 1.2.3. Tvarování**
  - 1.3. Perspektivní způsoby výroby skleněných obalů**
  - 1.4. Láhev EVRO**
- 2. Teoretická část**
  - 2.1. Základní rovnice tenkostěnných rotačních skořepin**
  - 2.2. Válcová skořepina**
  - 2.3. Amuloidová skořepina**
  - 2.4. Deska**
- 3. Výpočet**
  - 3.1. Zjednodušený výpočet**
    - 3.1.1. Výpočet napětí skořepiny**
    - 3.1.2. Výpočet napětí desky**
  - 3.2. Výpočet s amuloidovým přechodem**
    - 3.2.1. Okrajové podmínky**
    - 3.2.2. Průběhy napětí, jednotkových sil a momentů**
- 4. Technické a ekonomické zhodnocení**
- 5. Závěr**
- 6. Seznam příloh**
- 7. Seznam použité literatury**

# **Seznam použitých skratek a symbolů**

|                                |                                                   |
|--------------------------------|---------------------------------------------------|
| $E$ .....                      | modul pružnosti [MPa]                             |
| $N_1, N_2$ .....               | jednotkové normální síly [ $MNm^{-1}$ ]           |
| $S_1, S_2$ .....               | jednotkové smykové síly [ $MNm^{-1}$ ]            |
| $Q_1, Q_2$ .....               | jednotkové posouvající síly [ $MNm^{-1}$ ]        |
| $M_1, M_2$ .....               | jednotkové ohybové momenty [MN]                   |
| $M_{12}, M_{21}$ ...           | jednotkové kroutící momenty [MN]                  |
| $M$ .....                      | staticky neurčitý ohybový moment [MN]             |
| $Q$ .....                      | staticky neurčitá posouvající síla [ $MNm^{-1}$ ] |
| $D$ .....                      | jednotková ohybová tuhost skořepiny [ $MNm$ ]     |
| $D_2$ .....                    | jednotková ohybová tuhost desky [ $MNm$ ]         |
| $x, y, z$ .....                | souřadnice                                        |
| $u, v, w, \xi, \eta$ ..        | posuvy [m]                                        |
| $h$ .....                      | tloušťka skořepiny [m]                            |
| $h_2$ .....                    | tloušťka dna [m]                                  |
| $p$ .....                      | vnitřní přetlak [MPa]                             |
| $\epsilon_1, \epsilon_2$ ..... | poněrné deformace                                 |
| $\kappa_1, \kappa_2$ .....     | směry křivosti                                    |
| $\beta$ .....                  | součinitel útlumu [ $m^{-1}$ ]                    |
| $\varphi$ .....                | úhel otočení tečny meridiánu [ $^\circ$ ]         |
| $\sigma_{\theta 0}$ .....      | osové ohybové napětí [MPa]                        |
| $\sigma_{\theta 2}$ .....      | obvodové ohybové napětí [MPa]                     |
| $\sigma_{\theta m}$ .....      | osové membránové napětí [MPa]                     |
| $\sigma_{\theta m}$ .....      | obvodové membránové napětí [MPa]                  |
| $\sigma_a^I$ .....             | osové napětí na vnějším vlákne [MPa]              |
| $\sigma_t^I$ .....             | obvodové napětí na vnějším vlákne [MPa]           |
| $\sigma_c^I$ .....             | osové napětí na vnitřním vlákne [MPa]             |
| $\sigma_t^I$ .....             | obvodové napětí na vnitřním vlákne [MPa]          |
| $\sigma_r^I$ .....             | radiální napětí na vnějším vlákne [MPa]           |
| $\sigma_r^I$ .....             | radiální napětí na vnitřním vlákne [MPa]          |

$\sigma_{Pt}$  ..... mez pevnosti v tahu [MPa]  
 $\sigma_{Pd}$  ..... mez pevnosti v tlaku [MPa]  
 $\mu$  ..... Poissonova konstanta  
 $a, a_1, r, r_0, r_1, r_2$  ... poloměry [m]  
 $\varphi$  ..... úhel amyloidové skořepiny [°]

## ÚVOD

Průmyslová výroba je rozhodující pro rozvoj národního hospodářství a zvyšování jeho efektivnosti. Úkoly pro jeho další rozvoj byly stanoveny na XVI. sjezdu KSČ a v jeho závěrech. Sklářský průmysl, který je důležitým odvětvím našeho lehkého průmyslu, uspokojuje potřeby československého národního hospodářství, ale protože ve výrobě skla je dosahováno vysokého zhodnocení domácích surovin, jsou sklářské výrobky zároveň výhodným vývozním artiklem.

Rozvoj sklářského průmyslu je zaměřen především na rozšíření výroby technických výrobků pro další výrobní spotřebu a snižování jeho energetické náročnosti. Plán vědeckotechnického rozvoje na 7. pětiletku zadal úkoly, které věnují mimořádnou pozornost modernizaci výrobní základny. Zvýšení úrovně tvarovacích strojů a forem dosahovat vyššího zhodnocení domácích surovin.

Pevnost vytvářených lahví závisí na řadě faktorů. K nejdůležitějším činitelům patří mechanické vlastnosti obalového skla, tvar výrobku, tloušťka stěny a její rovnoměrnost. Špičky napětí vznikají v oblasti přechodu mezi válcovou částí láhve a dnem láhve. Tím je také omezena minimální tloušťka stěny výrobku.

Úkolem diplomové práce je podat obraz o napjatosti, která vzniká ve spodní části láhve EVRO při vnitřním přetlaku s ohledem na tloušťku stěny láhve. Pro výpočty byla použita teorie tenkostěnných rotačních skořepin.

## 1. Současné a perspektivní způsoby výroby skleněných obalů

### 1.1 Současný stav

V současné době se většina obalového lahvového skla vyrábí dvakrátfoukacím způsobem na řadových strojích.

Stanice řadových strojů jsou uspořádány vedle sebe v jednotlivých sekcích. Formy se neotáčejí, ale stojí a pouze se otevírají nebo zavírají. Dávkování je kapkové, kdy kapky jsou rozváděny do jednotlivých předních forem ve stanicích činnosti výsuvných hlav žlábků, stabilizačních žlábků a odchylovačů. Po pádu kapky skloviny do přední formy dosedne na kuželovou plochu nálevky safukovací hlava a stlačený vzduch vtlačí sklovinu do dutiny ústní formy a vyformuje ústí láhve do konečného tvaru. Po vytvoření ústí láhve kolem zasunutého ústníku se safukovací hlava a nálevka zvednou, safukovací hlava se přisune zpět na přední formu tak, že tvoří dno přední formy. Ústník se vysune a tímto otvorem se vhání stlačený vzduch, který vyfoukne sklovinu do přední formy, takže baňka má tvar dutiny přední formy. Po vyfouknutí baňky je staženo vodítko ústníku, uvolní se přední forma, zdvihne se safukovací hlava, otevře se přední forma a baňka držaná v ústní formě je přenesena inverzním mechanismem do konečné formy. Konečná forma se uzavře, ústní forma se uvolní a přesune do výchozí polohy. Baňka je zavěšena za ústí v konečné formě a prohřívá se teplem akumulovaným ve sklovině. Baňka se vlastní vahou protahuje, až dosedne na dno konečné formy a foukací hlavou přisunutou na ústí baňky se přivádí stlačený vzduch, kterým je baňka rozfouknuta do dutiny konečné formy. Po odnětí takového množství tepla kovovou konečnou formou, aby sklovina stuhla a láhev si držela svůj tvar se

odsune foukací hlava, láhev je kleštěmi uchopena pod ústím, konečná forma se otevře a výrobek je přenesen na odstávkovou desku, kde je ochlazován proudícím vzduchem. Po době vyvozené intervalem pracovního cyklu, se láhev přesune na dopravník, který dopravuje výrobky k chladicí peci.

## 1.2 Nedostatky při současném tvarování skleněných obalů

### 1.2.1 Úprava viskozity a dávkování

Potřeba skloviny se neustále mění, vícesekční řadové stroje a tvarování dvoukapkou a tříkapkou zvýšily kapacitní požadavky na současné feedry a předpeci.

Celkové nároky na ovládání teploty kapky jsou v rozmezí  $\pm 1^\circ\text{C}$ . Skutečný rozdíl mezi bodem, ve kterém se teplota měří a sklovinou, která je ve styku se dnem kanálu předpeci a vertikálně se stěnami kanálu činí až  $10^\circ\text{C}$ .

### 1.2.2 Dávka kapky

Teplotní homogenita kapky, jak je zajištěna předpecí a feedrem je znehodnocena systémem žlábkového rozdělování kapky, který je používán ke všem sekcím lahvovacích strojů. Žlábkové dávkovací zařízení je používáno proto, že tyto stroje jsou výlučně vícesekční, uspořádané v řadě a jsou zásobovány z jednoho feedru.

Žlábkové dávkovací zařízení způsobuje tyto nedostatky:

- u lahvovacích strojů je čas, který proběhne mezi odstřížením kapky a jejím dopadem do formy různý mezi jednotlivými sekcemi
- doba styku skloviny s kovem je tedy různá a tím jsou různé teploty na povrchu kapek dopravovaných do různých sekcí
- jako funkce proběhnuté dráhy se sklovina různě deformuje a v důsledku toho kapky mění tvar a teplotu

- žlábkové dávkovací zařízení vyžaduje vysoké hladiny skloviny, aby byla zajištěna vysoká rychlost kapky umožňující dodržet rychlosti moderních strojů

Vyloučení této metody dopravy kapky má základní důležitost a přímé skápnutí kapky by mělo mít prioritu v nové koncepci tvarování.

### 1.2.3. Tvarování

V procesu tvarování mají řadové stroje vyrábějící obaly dvakrát-foukacím způsobem následující nedostatky:

- použitím žlábkového dávkovacího zařízení není možné dosáhnout homogenní viskozity kapky v přední formě
- inverzní mechanismus je ztrátou důležitého tvarovacího času
- vztah mezi časem přední formy a konečné formy je v podstatě stejný
- čas pro spätné prehřátí baňky je malý

### 1.3 Perspektivní způsoby výroby skleněných obalů

Velikým přínosem pro tvarování je výroba úzkohrdlých lahví lisofoukací metodou. Tento postup se poprvé objevil u firmy Hoya v roce 1968. Lisofoukací metoda proti dvakrát-foukací metodě zajišťuje daleko lepší rozdělení skloviny, a to umožňuje vyrábět láhve stejné pevnosti podstatně lehčí.

U budoucích strojů by mělo být zajištěno:

- pro tvarování se použije lisofoukací postup
- použije se systém dávkování přímým pádem kapky
- odstraní se potřeba inverzního mechanismu nebo použití stávajícího systému přední formy
- zajistí se přiměřené množství času pro konečnou formu ve vztahu k času přední formy

- zajistí se přiměřený čas pro znovuprohřátí předlisku dříve než začne defukování v konečné formě
- stroje budou přesně ovladatelné v každé části procesu
- tvarování a odnímání tepla

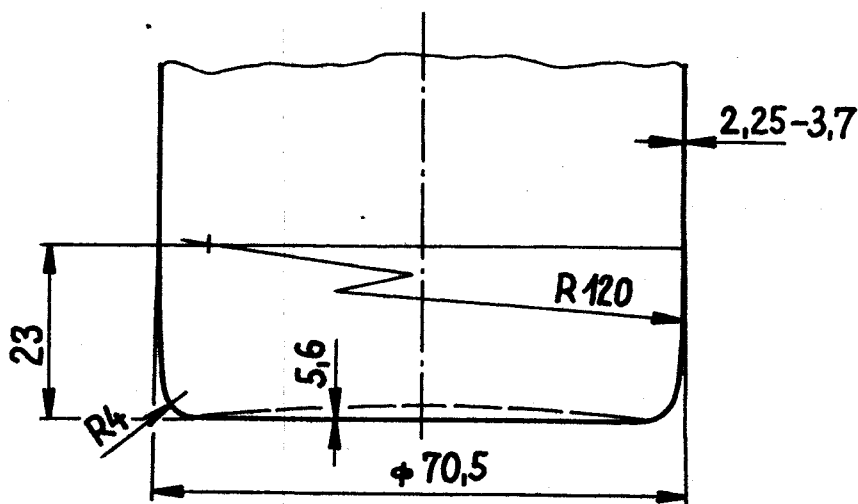
Těmto požadavkům odpovídají stroje Heye 6-12 a Heye 1-2. Stroj Heye 6-12 se sestává ze dvou kontinuálně se otáčejících, nesáviálně mechanicky poháněných a přesně synchronizovaných stolů. Jedna ze šesti stanic se používá k vytvarování předlisku lisováním skloviny pomocí plunžru pohybujícího se vertikálně směrem dolů středem ústní formy a zbývajících dvanáct stanic se používá k vyfukování konečného tvaru. Tyto dva stoly jsou vzájemně spojeny nekonečným pásem s drážky ústních forem, přičemž první část nese vytvarovaný předlisek ke konečné formě, zatímco ten se při tom prohřívá a natahuje a druhá část nese vyfouknutou láhev nad stejnou rychlostí se pohybujícím konvejerem, kde ji ústní forma uvolní k přepravě a další manipulaci.

Stroj má při dvoukapkovém postupu výkon až 600 lahví/min a je schopen vyrábět láhve o současně používaných vahách, stejně jako ultralehké láhve budoucnosti, u nichž by mohla být požadována tloušťka stěny dokonce jen asi 0,5 mm.

Dvoustolový stroj Heye 1-2 je v podstatě vývojem stroje Heye 6-12 a splňuje tytéž podmínky, jen s tím rozdílem, že produkční kapacita je 80 lahví/min při dvoukapce.

#### 1.4. Láhev EVRO

Výpočet je proveden v kritickém místě spodní části láhve, v přechodu mezi válcovou částí láhve a dnem láhve. Spodní část láhve je na obr.1.



Obr.1

Podle požadavku Sklo Union Teplice je dno láhve počítáno jako rovná deska. Výpočet je proveden pro tlak  $p=1,5$  MPa a  $p=2,0$  MPa. Analooidový přechod o poloměru  $R=120$  mm není ve výpočtu uvažován, neboť uvedená metoda není pro něj vhodná. Analooid o poloměru  $r=4$  mm nespĺňuje úplně podmínku tenkostěnnosti. Z těchto důvodů budou napětí ve skutečnosti poněkud menší než vycházejí podle výpočtu.

Mechanické vlastnosti obalového skla

$$E = 72000 \text{ MPa}$$

$$\mu = 0,23$$

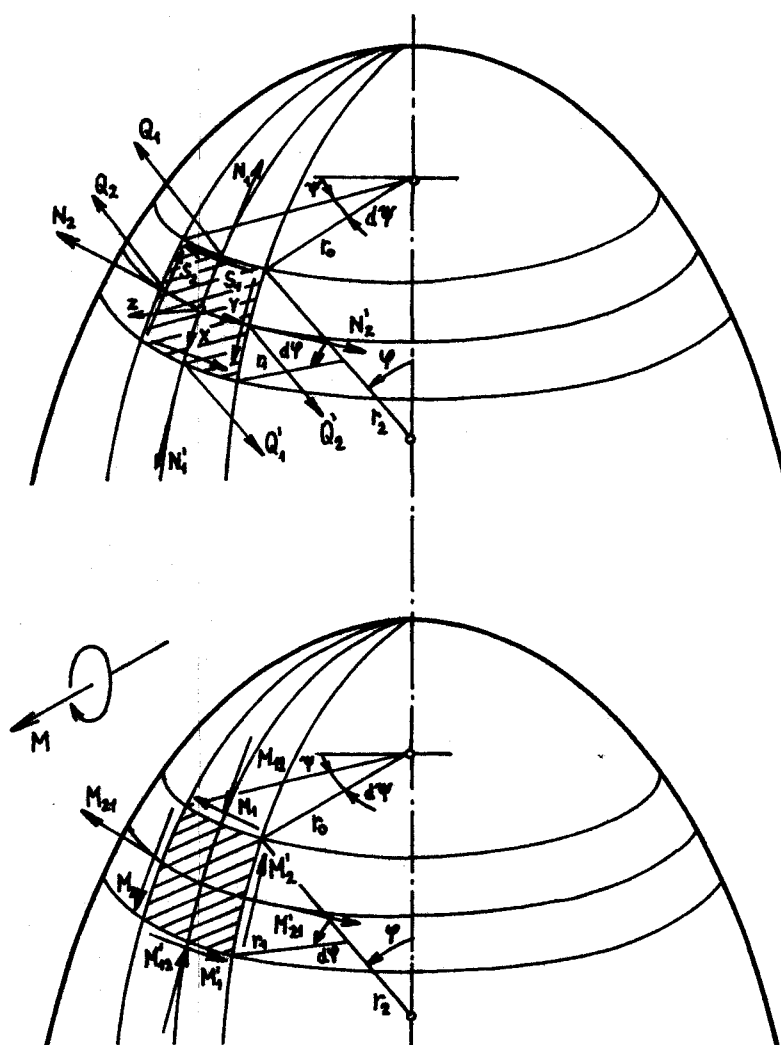
$$\sigma_{pt} = 60 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{pd} = 10 \sigma_{pt}$$

## 2. TEORETICKÁ ČÁST

### 2.1 Základní rovnice tenkostěnných rotačních skořepin

Základní rovnice pro tenkostěnné rotační skořepiny jsou odvozeny použitím tzv. technické lineární teorie skořepin. Kladné smysly jednotkových sil a momentů jsou znázorněny na obrázku 2.



Obr. 2

Rovnice rovnováhy mají tvar

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (N_1 r_0) + r_1 \frac{\partial S_1}{\partial \psi} - N_2 r_1 \cos \varphi - Q_1 r_0 + r_1 r_0 X = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (S_1 r_0) + r_1 \frac{\partial N_2}{\partial \psi} + S_2 r_1 \cos \varphi - Q_1 r_1 \sin \varphi + r_1 r_0 Y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (Q_1 r_0) + r_1 \frac{\partial Q_2}{\partial \psi} + N_2 r_1 \sin \varphi + N_1 r_0 - r_1 r_0 Z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (M_{12} r_0) + r_1 \frac{\partial M_2}{\partial \psi} + M_{21} r_1 \cos \varphi - r_1 r_0 Q_2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (M_1 r_0) + r_1 \frac{\partial M_{21}}{\partial \psi} - M_2 r_1 \cos \varphi - r_1 r_0 Q_1 = 0$$

$$S_1 + \frac{M_{12}}{r_1} = S_2 + \frac{M_{21}}{r_2} \quad (1)$$

Poslední rovnice je identitou, a proto se jí pro řešení deformace a napjatosti tenkostěnných skořepin nepoužívá.

Deformační rovnice mají tvar

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{r_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial v}{\partial \psi} + u \cos \varphi + w \sin \varphi \right)$$

$$\omega = \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v}{r_0} \cos \varphi$$

$$\kappa_1 = -\frac{1}{r_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) - \frac{1}{r_1^3} \left( u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial r_1}{\partial \varphi}$$

$$\kappa_2 = -\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \frac{1}{r_0 r_1} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cos \varphi - \frac{w}{r_2^2} - \frac{u}{r_1 r_2^2} \frac{\partial r_2}{\partial \psi}$$

$$\tau = -\frac{2}{r_1 r_0} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \psi} - \frac{r_1}{r_0} \frac{\partial w}{\partial \psi} \cos \varphi \right) - \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \left( \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{1}{r_1} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{v}{r_0} \cos \varphi \right)$$

(2)

Jednotkové síly a momenty jsou pak dány vzorci

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ \frac{1}{r_1} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{w}{r_1} - \frac{\mu}{r_0} \left( \frac{\partial v}{\partial \psi} + u \cos \varphi + w \sin \varphi \right) - \right. \\ \left. - \frac{h^2}{12} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \frac{1}{r_1} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} + w + \frac{1}{r_1} \left( u - \frac{\partial w}{\partial \psi} \right) \frac{\partial r_1}{\partial \psi} \right] \right\}$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial v}{\partial \psi} + u \cos \varphi + w \sin \varphi \right) + \frac{\mu}{r_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \psi} + w \right) - \right. \\ \left. - \frac{h^2}{12} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \left( \frac{1}{r_0} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r_0 r_1} \frac{\partial w}{\partial \psi} \cos \varphi + \frac{w}{r_0^2} + \frac{u}{r_1 r_2^2} \frac{\partial r_2}{\partial \psi} \right) \right]$$

$$S_1 = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left\{ \left[ 1 + \frac{h^2}{12} \frac{(r_2 - r_1)^2}{r_1^2 r_2^2} \right] \left( \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v}{r_0} \cos \varphi \right) + \right. \\ \left. + \frac{h^2}{12} \frac{2(r_2 - r_1)}{r_1^2 r_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \psi} - \frac{r_1}{r_0} \frac{\partial w}{\partial \psi} \cos \varphi \right) \right\}$$

$$S_2 = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left\{ \left[ 1 - \frac{h^2}{12} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2} \right] \left( \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v}{r_0} \cos \varphi \right) - \right. \\ \left. - \frac{h^2}{12} \frac{2(r_2 - r_1)}{r_1^2 r_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \psi} - \frac{r_1}{r_0} \frac{\partial w}{\partial \psi} \cos \varphi \right) \right\}$$

$$M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left\{ \frac{1}{r_1^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{1}{r_1} \left( \frac{\partial w}{\partial \psi} - u \right) \frac{\partial r_1}{\partial \psi} \right] + \right. \\ \left. + \mu \left( \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r_0 r_1} \frac{\partial w}{\partial \psi} \cos \varphi + \frac{w}{r_2^2} + \frac{u}{r_1 r_2^2} \frac{\partial r_2}{\partial \psi} \right) - \frac{1}{r_2} \left[ \frac{1}{r_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \psi} + w \right) + \frac{\mu}{r_0} \left( \frac{\partial v}{\partial \psi} + \right. \right. \right.$$

$$+ u \cos \varphi + w \sin \varphi \Big] \Big] \Big\}$$

$$M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left\{ \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r_0 r_1} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{w}{r_2^2} + \frac{u}{r_1 r_2^2} \frac{\partial r_2}{\partial \varphi} + \frac{\mu}{r_1^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r_2} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} - u \right) \frac{\partial r_2}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{r_1} \left[ \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cos \varphi + w \sin \varphi \right) + \frac{\mu}{r_2} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right) \right] \Big\}$$

$$M_{12} = -\frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \left[ \frac{1}{r_1 r_0} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \psi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) - \frac{1}{r_2^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cos \varphi - \right. \right.$$

$$\left. - v \sin \varphi \cos \varphi \right) - \frac{1}{2r_2} \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v \cos \varphi}{r_0} \right) \Big]$$

$$M_{21} = -\frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \left[ \frac{1}{r_1 r_0} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \psi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) - \frac{1}{r_0^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cos \varphi - \right. \right.$$

$$\left. - v \sin \varphi \cos \varphi \right) - \frac{1}{2r_1} \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v \cos \varphi}{r_0} \right) \Big]$$

(3)

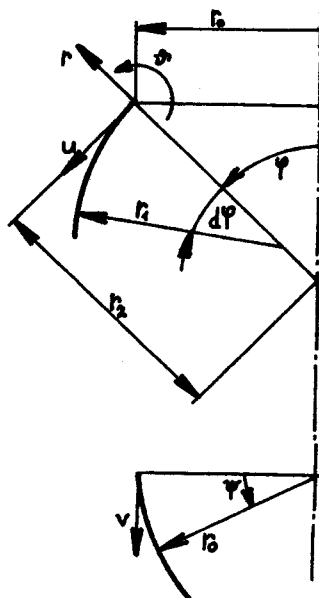
Pro rotační skořepiny základních geometrických tvarů jsou zvoleny tyto zjednodušené tvary deformačních rovnic

$$\epsilon_1 = \frac{1}{r_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{r_0} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u \cos \varphi + w \sin \varphi}{r_0}$$

$$\omega = \frac{1}{r_1} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r_0} \cos \varphi$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{r_1^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)$$



Obr. 3

$$\varkappa_2 = \frac{1}{r_0^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \Psi} \sin \varphi - \frac{\partial^2 w}{\partial \Psi^2} \right) + \frac{\cos \varphi}{r_1 r_0} \left( u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)$$

$$\tau = \frac{1}{r_1 r_0} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \Psi} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{\partial u}{\partial \Psi} \right)$$

(4)

kde  $\varphi = \frac{1}{r_1} \left( u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)$  je úhel pootočení tečny k meridi-  
ánu po deformaci.

Kladné smysly posuvů a natočení hlavních řezů skořepiny po de-  
formaci jsou na obrázku 3.

Jednotkové síly a momenty pak nabudou jednoduššího tvaru

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \frac{1}{r_1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{w}{r_1} + \frac{\mu}{r_0} \left( \frac{\partial v}{\partial \Psi} + u \cos \varphi + w \sin \varphi \right) \right]$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial v}{\partial \Psi} + u \cos \varphi + w \sin \varphi \right) + \frac{\mu}{r_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right) \right]$$

$$S_1 = S_2 = \frac{Eh(1-\mu)}{2(1-\mu^2)} \omega = \frac{Eh(1-\mu)}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \Psi} - \frac{v}{r_0} \cos \varphi \right)$$

$$M_2 = -D(\varkappa_2 + \mu \varkappa_1) = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left[ \frac{1}{r_0^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \Psi} \sin \varphi - \frac{\partial^2 w}{\partial \Psi^2} \right) + \frac{\cos \varphi}{r_1 r_0} \left( u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{r_1^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]$$

$$M_1 = -D(\varkappa_1 + \mu \varkappa_2) = -D \left[ \frac{1}{r_1^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\mu}{r_0^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \Psi} \sin \varphi - \frac{\partial^2 w}{\partial \Psi^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\mu \cos \varphi}{r_1 r_0} \left( u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$$M_{12} = M_{21} = -D(1-\mu)\tau = \frac{D(1-\mu)}{r_1 r_0} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \Psi} - \frac{\partial u}{\partial \Psi} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi \right)$$

(5)

## 2.2 VÁLCOVÁ SKOŘEPINA

Pro souřadnicový systém podle obr. 2 platí

$$r_1 = r_2 = a, \quad \frac{1}{r_1} = 0, \quad \varphi = \alpha, \quad \psi = \beta$$

Rovnice rovnováhy mají podle Vlasova pro válcovou kruhovou skořepinu tvar

$$\frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_2}{\partial \beta} + aX = 0$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S_1}{\partial \alpha} + Q_2 + aY = 0$$

$$-N_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} + aZ = 0$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} - \frac{\partial M_2}{\partial \beta} - aQ_2 = 0$$

$$\frac{\partial M_{21}}{\partial \beta} - \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} - aQ_2 = 0$$

(6)

Zjednodušené vztahy pro jednotkové síly a jednotkové momenty jsou stanoveny z rovnic (5) pro  $r_1 d\varphi = dx$

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) \right]$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

$$S_1 = S_2 = \frac{(1-\mu)Eh}{2(1-\mu)^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)$$

$$M_1 = D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\mu}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$$M_z = D \left[ \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{(1-\mu)D}{a} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (7)$$

Dále podle (6) platí

$$Q_1 = \frac{D}{a} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x} - \frac{1-\mu}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} \right)$$

$$Q_2 = D \left[ (1-\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{1}{a} \right] \quad (8)$$

kde  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  je jednotková ohybová tuhost skořepiny

Po dosazení z (7) do (6) mají zjednodušené základní rovnice kruhových válcových skořepin tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\mu}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{1-\mu^2}{Eh} a q_r$$

$$\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + a \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = - \frac{1-\mu^2}{Eh} a q_r$$

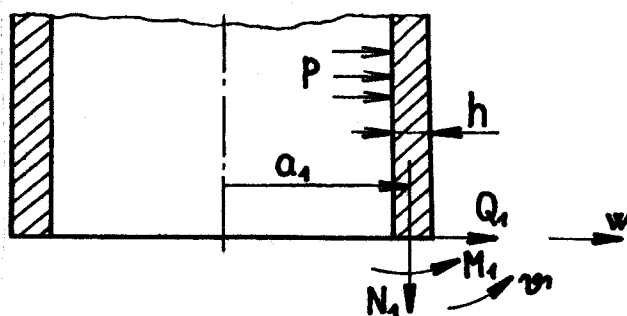
$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{a \partial \varphi} + \frac{w}{a} + \frac{h^2}{12} \left( a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{a^3 \partial \varphi^4} \right) = \frac{1-\mu^2}{Eh} a q_z \quad (9)$$

Pro válcovou kruhovou skořepinu zatíženou přetlakem a okrajovými účinky podle obr. 4 je z důvodu osové symetrie  $v=0$  a  $\partial/\partial \varphi = \partial^2/\partial \varphi^2 = 0$ .

Jestliže je délka válce  $l \geq x_0$ , kde  $x_0 = \frac{\pi \sqrt{a_1 h}}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}$

lze vzájemný účinek okrajů zanedbat a výpočty od okrajových

jednotkových sil a momentů počítat pro nekonečně dlouhý válec.



Obr. 4

Z rovnice (9) plyne

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{a} w \right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{a} w = \frac{1-\mu^2}{Eh} N_1 \quad (10)$$

Druhá rovnice (9) odpadá a z třetí rovnice (9) dostaneme

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3} p \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \quad (11)$$

$$\text{kde } \beta^4 = \frac{3(1-\mu^2)}{a_1^3 h^3}$$

Řešení rovnice (11) je součtem homogenního a partikulárního řešení

$$w = \frac{a_1^2}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) p + [(c_5 + c_6) \cos \beta x - (c_5 - c_6) \sin \beta x] \frac{1}{2\beta} e^{-\beta x} \quad (12)$$

$$w = (c_6 \sin \beta x + c_5 \cos \beta x) e^{-\beta x} \quad (13)$$

Z rovnic (7) a (8) dostaneme

$$N_1 = \frac{a_1}{2} p \quad (14)$$

$$N_2 = \frac{Eh^2 e^{-\beta x}}{2a_1} [(c_s + c_6) \cos \beta x - (c_s - c_6) \sin \beta x] + pa_1 \quad (15)$$

$$M_1 = D \left\{ [(c_s - c_6) \cos \beta x + (c_s + c_6) \sin \beta x] \beta e^{-\beta x} \right\} \quad (16)$$

$$M_2 = \mu M_1 \quad (17)$$

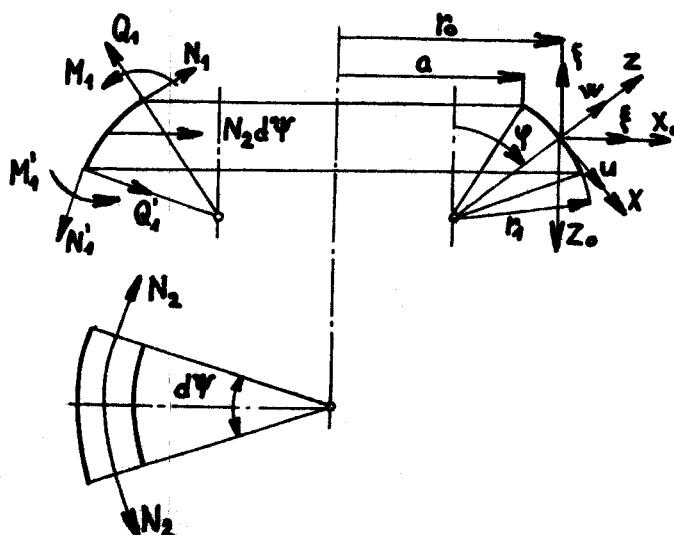
$$Q_1 = \frac{Eh^2}{ma_1} (c_6 \cos \beta x - c_s \sin \beta x) e^{-\beta x} \quad (18)$$

$$\text{kde } m = \sqrt{12(1-\mu^2)}$$

### 2.3 Anuloidová skořepina

Protože jde o rotačně symetrickou napjatost a deformaci anuloidové skořepiny, odpadnou jednotkové síly  $S_1, S_2, Q_2$  a jednotkové kroutící momenty  $M_{12}$  a složky posuvů  $v$ . Na základě tohoto zjednodušení je odvozeno jednodušší řešení bez odvození obecných rovnic.

Na obrázku 5 jsou jednotkové síly a momenty působící v hlavních řezech tenkostěnné anuloidové skořepiny.



Obr. 5

Složkové výminky rovnováhy jsou psány ve směru rotační osy anuloidu a ve směru kolmém na tuto osu.

$$\frac{d}{d\varphi} [(N_1 \cos \varphi - Q_1 \sin \varphi) r] - N_2 r_1 + X_0 r_1 r = 0$$

$$\frac{d}{d\varphi} [(N_1 \sin \varphi + Q_1 \cos \varphi) r] + Z_0 r_1 r = 0$$

$$\frac{d(M_1 r)}{d\varphi} - M_2 r_1 \cos \varphi - Q_1 r_1 r = 0$$

(19)

Jednotkové síly  $N_1, N_2, Q_1$  se dají vyjádřit pomocí Meissnerovy funkce  $V(\varphi)$ .

Proto je zvolena substituce

$$N_2 = -\frac{1}{r_1} \frac{dV}{d\varphi} \quad (20)$$

Po dosazení z (20) do (19) dostaneme po integraci

$$\begin{aligned} (N_1 \cos \varphi - Q_1 \sin \varphi) r &= V - \int_{\varphi_0}^{\varphi} X_0 r_1 r d\varphi \\ (N_1 \sin \varphi - Q_1 \cos \varphi) r &= - \int_{\varphi_0}^{\varphi} Z_0 r_1 r d\varphi + (N_{10} \sin \varphi_0 + Q_{10} \cos \varphi_0) r_0 \end{aligned} \quad (21)$$

Z těchto rovnic plyne

$$\begin{aligned} N_1 r &= -V \cos \varphi + \phi_1(\varphi) \\ Q_1 r &= V \sin \varphi + \phi_2(\varphi) \end{aligned} \quad (22)$$

kde

$$\begin{aligned} \phi_1(\varphi) &= -\sin \varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi} Z_0 r_1 r d\varphi - \cos \varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi} X_0 r_1 r d\varphi + P_{0z} r_0 \sin \varphi \\ \phi_2(\varphi) &= -\cos \varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi} Z_0 r_1 r d\varphi + \sin \varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi} X_0 r_1 r d\varphi + P_{0z} r_0 \cos \varphi \end{aligned} \quad (23)$$

Zde je  $P_{0z} = N_{10} \sin \varphi_0 + Q_{10} \cos \varphi_0$ .

Složky  $N_{10}, Q_{10}$  jsou jednotkové síly v řezu  $\varphi = \varphi_0$ .

Deformační rovnice (4) mají v tomto případě tvar

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{r_1} \left( \frac{du}{d\varphi} + w \right) \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{r} (u \cos \varphi + w \sin \varphi) = \frac{\xi}{r} \\ \kappa_1 &= -\frac{1}{r_1} \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{r} w \cos \varphi \end{aligned} \quad (24)$$

Zde  $\xi = u \cos \varphi + w \sin \varphi$  je radiální složka posuvu.

Jednotkové síly a ohybové momenty jsou dány vzorci (5).

Diferenciální rovnice určující tvar Meissnerovy funkce  $V(\varphi)$  je stanovena z deformačních rovnic

$$\frac{dF}{d\varphi} = \left( \frac{du}{d\varphi} + w \right) \cos \varphi - \left( u - \frac{dw}{d\varphi} \right) \sin \varphi = r_1 (\varepsilon_1 \cos \varphi - \nu \sin \varphi) \quad (25)$$

Současně je podle (24)

$$\frac{dF}{d\varphi} = r \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} + \varepsilon_2 \frac{dr}{d\varphi} = r \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} + \varepsilon_2 r_1 \cos \varphi \quad (26)$$

Porovnáním (25) a (26) dostaneme vztah mezi veličinami  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  a  $\nu$

$$r \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} = r_1 [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos \varphi - \nu \sin \varphi] \quad (27)$$

Dosazením do (27) za  $\varepsilon_1$  a  $\varepsilon_2$  z rovnic (5) a za  $N_1$  a  $N_2$  z rovnic (20) a (22) je získána diferenciální rovnice pro neznámou funkci  $V$

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2} + \frac{r_1}{r} \frac{dV}{d\varphi} \cos \varphi - \frac{r_1^2}{r^2} V \cos^2 \varphi + \mu \frac{r_1}{r} \sin \varphi = \nu \frac{Ehr_1^2}{r^2} + r_1^2 \psi_1(\varphi) \quad (28)$$

$$\text{kde } \psi_1(\varphi) = - \left[ \frac{1}{r_1^2} \phi_1(\varphi) \cos \varphi + \frac{\mu}{r_1 r} \frac{d\phi_1(\varphi)}{d\varphi} \right] \quad (29)$$

Dosazením do druhé rovnice (19) z rovnice (5) a (22) a po úpravě je získána druhá základní rovnice

$$\frac{d^2 \nu}{d\varphi^2} + \frac{r_1}{r} \frac{d\nu}{d\varphi} \cos \varphi - \frac{r_1^2}{r^2} \nu \cos^2 \varphi - \mu \frac{r_1}{r} \nu \sin \varphi = - \frac{r_1^2 V}{r^2 D} \sin \varphi + r_1^2 \psi_2(\varphi) \quad (30)$$

$$\text{kde } \psi_2(\varphi) = - \frac{\phi_2(\varphi)}{Dr} \quad (31)$$

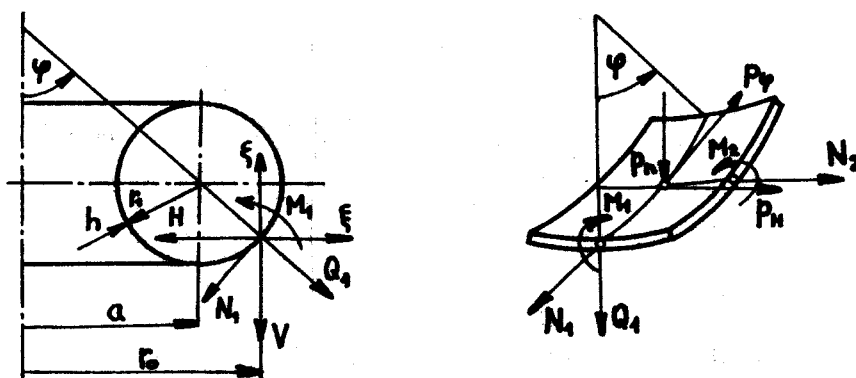
Zavedením diferenciálního operátoru

$$L( ) = \frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{r_1 \cos \varphi}{r} \frac{d}{d\varphi} ( ) - \frac{r_1^2}{r^2} \cos^2 \varphi ( ) \quad (32)$$

a substitucí  $r = r_2 \sin \varphi$  jsou rovnice (28) a (30) přepsány na tvar

$$\begin{aligned} L(V) + \frac{r_1}{r_2} V \mu &= \frac{E h r_1^2}{r_2} v + r_1 \psi(\varphi) \\ L(v) - \frac{r_1}{r_2} v \mu &= \frac{r_1 V}{D r_2} + r_1^2 \psi(\varphi) \end{aligned} \quad (33)$$

Zavedením složek  $H$  a  $V$  jednotkových sil  $N_1$  a  $Q_1$  a označení podle obr. 6 nabudou rovnice (33) tvaru



Obr. 6

$$(1 + \lambda \sin \varphi) v'' + \lambda v' \cos \varphi - \left( \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} + \mu \lambda \sin \varphi \right) v' = v \chi \sin \varphi - v \Omega \cos \varphi$$

$$(1 + \lambda \sin \varphi) \chi'' + \lambda \chi \cos \varphi - \left( \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} - \mu \lambda \sin \varphi \right) \chi = -v \sin \varphi +$$

$$+ \lambda \cos \varphi \left( \mu + \frac{\lambda \sin \varphi}{1 + \lambda \cos \varphi} \right) \Omega - \lambda P_n - \frac{\mu \lambda^2 P_r}{1 + \lambda \sin \varphi} \quad (34)$$

kde

$$\nu = \frac{m r_1^2}{a h}$$

$$\lambda = \frac{r_1}{a}$$

$$\chi = \frac{m r H}{E h^3}$$

$$\Omega = \frac{m r V}{E h^3}$$

$$P_n = \frac{m r^2}{E h^3} P_n$$

$$P_r = \frac{m r^2}{E h^3} P_r$$

Za působení jen vnitřního tlaku  $p_r = p$ ,  $p_\varphi = 0$  je

$$\chi_\varphi = \chi - P(2 + \lambda \sin \varphi) \cos \varphi$$

$$\bar{P} = \frac{p r_1}{E h} \frac{1}{2}$$

$$\bar{A} = \frac{p r_1}{E h} A$$

$$A = (1 + \lambda \sin \varphi_0) v_0 - \frac{p r_1 (2 + \lambda \sin \varphi_0) \sin \varphi_0}{2} \quad (35)$$

$v_0$  je osová složka vnitřních sil v řezu  $\varphi = \varphi_0$ .

Zavedením operátoru

$$L(\ ) = \frac{1 + \lambda \sin \varphi}{\lambda \sin \varphi} \frac{d^2(\ )}{d\varphi^2} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{d(\ )}{d\varphi} - \frac{\lambda \cos^2 \varphi}{(1 + \lambda \sin \varphi) \sin \varphi} (\ ) \quad (36)$$

jsou rovnice (34) přepsány do tvaru

$$\begin{aligned} L(v) - \mu v &= \frac{v}{\lambda} \chi_\varphi - \frac{v \cos \varphi}{\lambda \sin \varphi} \bar{A} \\ L(\chi_\varphi) + \mu \chi_\varphi &= -\frac{v}{\lambda} v + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \left( \mu + \frac{\lambda \sin \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} \right) \bar{A} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\lambda}{1 + \lambda \sin \varphi} \bar{P} \end{aligned} \quad (37)$$

Jestliže je  $v \gg \lambda$ , tj.  $r_1/h \gg 1$ , jsou rovnice (37) zjednodušeny

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \left[ (1 + \lambda \sin \varphi) \frac{dv}{d\varphi} \right] &= v \chi_\varphi \sin \varphi - v \bar{A} \cos \varphi \\ \frac{d}{d\varphi} \left[ (1 + \lambda \sin \varphi) \frac{d\chi_\varphi}{d\varphi} \right] &= -v \sin \varphi v \end{aligned} \quad (38)$$

a spojeny v jednu rovnici pro novou proměnnou  $\eta$

$$\frac{d}{d\varphi} \left[ (1 + \lambda \sin \varphi) \frac{d\eta}{d\varphi} \right] + i v \eta \sin \varphi = -i v \bar{A} \cos \varphi \quad (39)$$

Homogenní a partikulární řešení rovnice (39) má tvar

$$\eta_1 = \eta_{1R} + i \eta_{1i}, \quad \eta_2 = \eta_{2R} + i \eta_{2i}, \quad \frac{\eta_\varphi}{\bar{A}} = \eta_{\varphi R} + i \eta_{\varphi i} \quad (40)$$

kde  $\eta_\varphi$  je partikulární řešení.

Základní proměnné  $v, \chi_\varphi$  anuloidové skořepiny jsou pak dány funkcemi

$$\begin{aligned} v &= c_1 \eta_{1R} + c_2 \eta_{1I} + c_3 \eta_{2R} + c_4 \eta_{2I} + \bar{A} \eta_{\varphi I} \\ \chi_\varphi &= c_1 \eta_{1I} - c_2 \eta_{1R} + c_3 \eta_{2I} - c_4 \eta_{2R} - \bar{A} \eta_{\varphi R} \end{aligned} \quad (41)$$

$c_1$  až  $c_4$  jsou integrační konstanty určené v okrajových podmínkách.

Rovnice (20), (22) a (5) vedou ke vztahům, které vyjadřují složky vnitřních sil a momentů v závislosti na  $v, \chi_\varphi$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{Eh^2}{ma} \left[ \frac{-\chi_\varphi \sin\varphi + \bar{A} \cos\varphi}{1 + \lambda \sin\varphi} \right] \\ N_1 &= \frac{Eh^2}{ma} \left[ \frac{\chi_\varphi \cos\varphi + \bar{A} \sin\varphi + \bar{P}(2 + \lambda \sin\varphi)}{1 + \lambda \sin\varphi} \right] \\ N_2 &= \frac{Eh^2}{mr_1} \left( \frac{d\chi_\varphi}{d\varphi} + \lambda \bar{P} \right) \\ M_1 &= -\frac{D}{r_1} \left( \frac{dv}{d\varphi} + \mu \frac{\lambda \cos\varphi}{1 + \lambda \sin\varphi} v \right) \\ M_2 &= -\frac{D}{r_1} \left( \mu \frac{dv}{d\varphi} + \frac{\lambda \cos\varphi}{1 + \lambda \sin\varphi} v \right) \end{aligned} \quad (42)$$

Radiální složka posuvu  $\xi$  je určena ze vzorce (24)

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{h}{m} \left[ \left( \frac{1}{\lambda} + \sin\varphi \right) \frac{d\chi_\varphi}{d\varphi} - \mu \chi_\varphi \cos\varphi - \mu \bar{A} \sin\varphi + \bar{P}(1 - 2\mu + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \sin\varphi - \mu \lambda \sin\varphi) \right] \end{aligned} \quad (43)$$

Axiální složka posuvu  $\xi$  je určena ze vzorce (27)

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = v r_1 \cos\varphi \quad (44)$$

Řešení (40) mají tvar

$$\eta_{sR} = \sum_{l=0}^3 \sum_{m=0}^6 \lambda^m v^{2l} F^{sR}(2l, m)$$

$$\eta_{si} = \sum_{l=0}^3 \sum_{m=0}^6 \lambda^m v^{2l+1} F^{si}(2l+1, m)$$

$$\frac{d\eta_{sR}}{d\psi} = \sum_{l=0}^3 \sum_{m=0}^6 \lambda^m v^{2l} \frac{dF^{sR}(2l, m)}{d\psi}$$

$$\frac{d\eta_{si}}{d\psi} = \sum_{l=0}^3 \sum_{m=0}^6 \lambda^m v^{2l+1} \frac{dF^{si}(2l+1, m)}{d\psi}$$

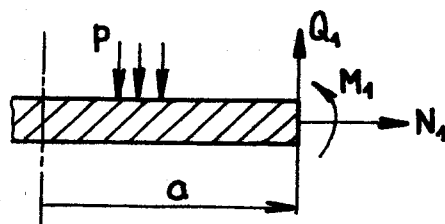
(45)

$$s = 1, 2, \psi$$

Hodnoty F-funkcí a jejich derivace jsou sestaveny do tabulek v [1].

## 2.4 Deska

K řešení byla použita Kirchhoffova teorie tenkých desek



Obr.7

Základní diferenciální rovnice má tvar

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r w) \right] = -\frac{r}{2D_2} p \quad (46)$$

Odtud plyne

$$w = -\frac{r^3}{16D_2} p + \frac{c_7}{2} r + \frac{c_8}{r} \quad (47)$$

Protože ve středu desky není otvor

$$c_8 = 0$$

Pak pro vnitřní jednotkové síly a momenty platí

$$M_1 = -D_2 \left[ \frac{dw}{dr} + \mu \frac{w}{r} \right] = D_2 \left[ (1+\mu) \left( -\frac{c_7}{2} \right) + \frac{pr^2(3+\mu)}{16D_2} \right]$$

$$M_2 = -D_2 \left[ \frac{w}{r} + \mu \frac{dw}{dr} \right] = D_2 \left[ (1+\mu) \left( -\frac{c_7}{2} \right) + \frac{pr^2(1+3\mu)}{16D_2} \right]$$

$$N_1 = N_2 = C_9 \quad (48)$$

axiální posuv

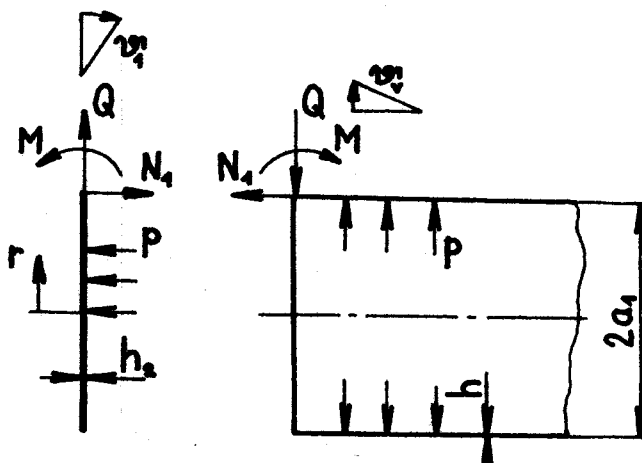
$$u = -\frac{c_7 r^2}{4} + \frac{pr^4}{64D_2} + C_{10} \quad (49)$$

$$w = 0$$

### 3. VÝPOČET

#### 3.1 Zjednodušený výpočet

Při tomto výpočtu není uvažován analoidový přechod mezi deskou a válcem. Zjednodušené spojení desky s válcem je na obr. 8



Obr. 8

Z rovnice (46) pro  $r = a$ , plyne

$$D_2 \left[ \frac{dw}{dr} + \mu \frac{w}{r} \right] = - \left( M + Q \frac{h_2}{2} \right) \quad (50)$$

odtud 
$$C_1 = \frac{2(M + Q \frac{h_2}{2})}{D_2} + \frac{2a_1^2}{16D_2} p \quad (51)$$

Po dosazení do rovnice (47) vyjde

$$w(r) = \frac{r}{16D_2} p \left( \frac{3+\mu}{1+\mu} a_1^2 - r^2 \right) - \frac{r}{(1+\mu)D_2} \left( M + Q \frac{h_2}{2} \right) \quad (52)$$

Pak natočení okraje desky

$$w_1 = \frac{a_1^3}{8(1+\mu)D_2} p - \frac{a_1}{(1+\mu)D_2} \left( M + Q \frac{h_2}{2} \right) \quad (53)$$

$$D_2 = \frac{Eh_2^3}{12(1-\mu^2)}$$

Působení síly  $Q$  se zvětší poloměr desky o  $d_1$

$$d_1 = \frac{Qa_{11}}{M} (1-\mu) \quad (54)$$

Deformační podmínky pro společný úhel otočení a pro společný radiální posuv jsou

$$Ev_1 = Ma_{11} - Qa_{12}$$

$$E\left(d_1 - \frac{h_1}{2}v_1\right) = p \frac{a_1^2}{h} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) + Ma_{21} - Qa_{22} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{4a_1^2\beta^3}{h} & a_{12} &= a_{21} = \frac{2a_1^2\beta^2}{h} \\ a_{22} &= \frac{2a_1^2\beta}{h} \end{aligned} \quad (56)$$

Dosazením do rovnice (55) se vztahů (53), (54) a (56) a vyčíslením vyjde staticky neurčitá posouvající síla  $Q$  a staticky neurčitý ohybový moment  $M$ .

### 3.1.1 Výpočet napětí skořepiny

$$M_1 = e^{-\beta x} \left[ MV\sqrt{2} \sin\left(\beta x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{Q}{\beta} \sin(\beta x) \right]$$

$$M_2 = \mu M_1 \quad (57)$$

$$N_2 = 2a_1\beta^2 e^{-\beta x} \left[ MV\sqrt{2} \cos\left(\beta x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{Q}{\beta} \cos(\beta x) \right] \quad (58)$$

Ve skořepině vzniká osové ohybové napětí

$$\sigma_{ao} = \frac{6M_1}{h^2} \quad (59)$$

$$\text{obvodové} \quad \sigma_{to} = \mu \sigma_{ao} \quad (60)$$

Membránová napětí ve skořepině pak jsou

$$\begin{aligned}\sigma_{am} &= \frac{p a_1}{2h} \\ \sigma_{tm} &= \frac{p a_1}{h} + \frac{N_1}{h}\end{aligned}\quad (61)$$

Výsledná napětí na vnějším vlákne

$$\begin{aligned}\sigma_a^I &= \sigma_{am} - \sigma_{ao} \\ \sigma_t^I &= \sigma_{tm} - \sigma_{to}\end{aligned}\quad (62)$$

Výsledná napětí na vnitřním vlákne

$$\begin{aligned}\sigma_a^I &= \sigma_{am} + \sigma_{ao} \\ \sigma_t^I &= \sigma_{tm} + \sigma_{to}\end{aligned}\quad (63)$$

### 3.1.2. Výpočet napětí desky

$$\begin{aligned}M_1 &= \frac{p}{16} (3 + \mu)(a_1^2 - r^2) - \left( N + Q \frac{h_1}{2} \right) \\ M_2 &= \frac{p}{16} \left[ (3 + \mu) a_1^2 - (1 + 3\mu) r^2 \right] - \left( N + Q \frac{h_1}{2} \right)\end{aligned}\quad (64)$$

Na vnějším povrchu vzniká radiální a obvodové napětí

$$\begin{aligned}\sigma_r^I &= \frac{6M_1}{h_1^2} + \frac{Q}{h_1} \\ \sigma_t^I &= \frac{6M_2}{h_1^2} + \frac{Q}{h_1}\end{aligned}\quad (65)$$

Na vnitřním povrchu vzniká radiální a obvodové napětí

$$\begin{aligned}\sigma_r^I &= \frac{Q}{h_2} - \frac{6M_1}{h_2^2} \\ \sigma_t^I &= \frac{Q}{h_2} - \frac{6M_2}{h_2^2}\end{aligned}\quad (66)$$

Zjednodušený výpočet byl proveden na počítači Hewlett

Packart Model 9830A. Výsledky jsou uvedeny v tab. 1, 2, 3, 4.

Tab. 1 pro válec  $p=1,5$   $h=h_2=2,25$  [mm]

$$M=1,7748 \cdot 10^{-4}$$

$$Q=3,1498 \cdot 10^{-2} \quad \sigma_{am}=11,6666$$

| $x$ [mm] | $M_1$                   | $\sigma_{a0}$ | $\sigma_{tm}$ | $\sigma_{to}$ |
|----------|-------------------------|---------------|---------------|---------------|
| 0        | $1,7748 \cdot 10^{-4}$  | 210,3447      | 284,8860      | 48,3793       |
| 2        | $2,1138 \cdot 10^{-4}$  | 250,5216      | 184,7947      | 57,6200       |
| 4        | $2,0325 \cdot 10^{-4}$  | 240,8830      | 108,4104      | 55,4031       |
| 6        | $1,7274 \cdot 10^{-4}$  | 204,7297      | 54,9926       | 47,0878       |
| 8        | $1,3367 \cdot 10^{-4}$  | 158,4284      | 21,1935       | 36,4885       |
| 10       | $9,4831 \cdot 10^{-5}$  | 112,3921      | 2,6413        | 25,8502       |
| 12       | $6,1076 \cdot 10^{-5}$  | 72,3868       | -5,0476       | 16,6490       |
| 14       | $3,4470 \cdot 10^{-5}$  | 40,8534       | -5,7032       | 9,3963        |
| 16       | $1,5245 \cdot 10^{-5}$  | 18,0686       | -2,3574       | 4,1558        |
| 18       | $2,5891 \cdot 10^{-6}$  | 3,0686        | 2,7893        | 0,7058        |
| 20       | $-4,7911 \cdot 10^{-6}$ | -5,6784       | 8,2816        | -1,3060       |
| 22       | $-8,2895 \cdot 10^{-6}$ | -9,8246       | 13,2643       | -2,2597       |
| 24       | $-9,1787 \cdot 10^{-6}$ | -10,8784      | 17,3234       | -2,5020       |
| 26       | $-8,5009 \cdot 10^{-6}$ | -10,0751      | 20,3566       | -2,3173       |
| 28       | $-7,0370 \cdot 10^{-6}$ | -8,3401       | 22,4248       | -1,9182       |
| 30       | $-5,3223 \cdot 10^{-6}$ | -6,3079       | 23,6929       | -1,4508       |
| $x$ [mm] | $\sigma_a^I$            | $\sigma_a^I$  | $\sigma_t^I$  | $\sigma_t^I$  |
| 0        | 222,0114                | -198,6780     | 333,2653      | 236,5067      |
| 2        | 262,1882                | -238,8549     | 242,4147      | 127,1747      |
| 4        | 252,5497                | -229,2163     | 163,8135      | 53,0074       |
| 6        | 216,3964                | -193,0630     | 102,0804      | 7,9047        |
| 8        | 170,0951                | -146,7617     | 57,6320       | -15,2451      |
| 10       | 124,0588                | -100,7254     | 28,4914       | -23,2089      |
| 12       | 84,0535                 | -60,7201      | 11,6013       | -21,6967      |
| 14       | 52,5200                 | -29,1867      | 3,6931        | -15,0994      |
| 16       | 29,7353                 | -6,4019       | 1,7983        | -6,5132       |
| 18       | 14,7353                 | 8,5981        | 3,4951        | 2,0836        |
| 20       | 5,9883                  | 17,3450       | 6,9755        | 9,5876        |
| 22       | 1,8421                  | 21,4913       | 11,0046       | 15,5239       |
| 24       | 0,7882                  | 22,5451       | 14,8243       | 19,8284       |
| 26       | 1,5915                  | 21,7418       | 18,0393       | 22,6739       |
| 28       | 3,3265                  | 20,0068       | 20,5066       | 24,3431       |
| 30       | 5,3588                  | 17,9745       | 22,2421       | 25,1437       |

Tab. 2 pro desku  $p=1,5$   $h_1=2,25[\text{mm}]$   
 $M=1,7748 \cdot 10^{-4}$   $Q=3,1498 \cdot 10^{-2}$

| $r[\text{mm}]$ | $G_r^I$   | $G_t^I$  | $G_r^I$   | $G_t^I$   |
|----------------|-----------|----------|-----------|-----------|
| 0              | 201,2964  | 201,2964 | -173,2986 | -173,2986 |
| 2,5            | 199,0533  | 200,1228 | -171,0556 | -172,1250 |
| 5              | 192,3242  | 196,6020 | -164,3264 | -168,6042 |
| 7,5            | 181,1089  | 190,7339 | -153,1111 | -162,7361 |
| 10             | 165,4075  | 182,5186 | -137,4097 | -154,5208 |
| 12,5           | 145,2200  | 171,9561 | -117,2222 | -143,9583 |
| 15             | 120,5464  | 159,0464 | -92,5486  | -131,0486 |
| 17,5           | 91,3867   | 143,7895 | -63,3889  | -115,7917 |
| 20             | 57,7408   | 126,1853 | -29,7431  | -98,1875  |
| 22,5           | 19,6089   | 106,2339 | 8,3889    | -78,2361  |
| 25             | -23,0091  | 83,9353  | 51,0069   | -55,9375  |
| 27,5           | -70,1133  | 59,2895  | 98,1111   | -31,2917  |
| 30             | -121,7036 | 32,2964  | 149,7014  | -4,2986   |
| 32,5           | -177,7800 | 2,9561   | 205,7778  | 25,0417   |
| 35             | -238,8425 | -28,7314 | 266,3403  | 56,7292   |

Tab. 3 pro válec  $p=2,0$

$h=h_2=2,25$  [mm]

$M_z = 2,3664 \cdot 10^{-4}$

$Q_z = 4,1997 \cdot 10^{-2}$

$G_{am} = 15,5555$

| $x$ [mm] | $M_z$                   | $G_{ao}$  | $G_{tm}$ | $G_{to}$ |
|----------|-------------------------|-----------|----------|----------|
| 0        | $2,3664 \cdot 10^{-4}$  | 280,4596  | 379,8480 | 64,5057  |
| 2        | $2,8184 \cdot 10^{-4}$  | 334,0287  | 246,3929 | 76,8266  |
| 4        | $2,7099 \cdot 10^{-4}$  | 321,1773  | 144,5473 | 73,8708  |
| 6        | $2,3032 \cdot 10^{-4}$  | 272,9729  | 73,3234  | 62,7838  |
| 8        | $1,7823 \cdot 10^{-4}$  | 211,2379  | 28,2579  | 48,5847  |
| 10       | $1,2644 \cdot 10^{-4}$  | 149,8561  | 3,5217   | 34,4669  |
| 12       | $8,1435 \cdot 10^{-5}$  | 96,5157   | -6,7302  | 22,1986  |
| 14       | $4,5960 \cdot 10^{-5}$  | 54,4711   | -7,6042  | 12,5284  |
| 16       | $2,0327 \cdot 10^{-5}$  | 24,0915   | -3,1433  | 5,5410   |
| 18       | $3,4522 \cdot 10^{-6}$  | 4,0915    | 3,7191   | 0,9410   |
| 20       | $-6,3882 \cdot 10^{-6}$ | -7,5711   | 11,0421  | -1,7414  |
| 22       | $-1,1053 \cdot 10^{-5}$ | -13,0995  | 17,6857  | -3,0129  |
| 24       | $-1,2238 \cdot 10^{-5}$ | -14,5046  | 23,1018  | -3,3361  |
| 26       | $-1,1335 \cdot 10^{-5}$ | -13,4335  | 27,1422  | -3,0897  |
| 28       | $-9,3826 \cdot 10^{-6}$ | -11,1202  | 29,8998  | -2,5576  |
| 30       | $-7,0964 \cdot 10^{-6}$ | -8,4105   | 31,5906  | -1,9344  |
| $x$ [mm] | $G_a^I$                 | $G_o^I$   | $G_t^I$  | $G_c^I$  |
| 0        | 296,0152                | -264,9041 | 444,3537 | 315,3423 |
| 2        | 349,5843                | -318,4732 | 323,2195 | 169,5663 |
| 4        | 336,7329                | -305,6218 | 218,4180 | 70,6765  |
| 6        | 288,5285                | -257,4174 | 136,1072 | 10,5397  |
| 8        | 226,7934                | -195,6823 | 76,8427  | -20,3268 |
| 10       | 165,4117                | -134,3006 | 37,9886  | -30,9452 |
| 12       | 112,0713                | -80,9602  | 15,4684  | -28,9288 |
| 14       | 70,0267                 | -38,9156  | 4,9241   | -20,1326 |
| 16       | 39,6470                 | -8,5359   | 2,3978   | -8,6843  |
| 18       | 19,6470                 | 11,4641   | 4,6602   | 2,7781   |
| 20       | 7,9844                  | 23,1267   | 9,3007   | 12,7834  |
| 22       | 2,4561                  | 28,6550   | 14,6728  | 20,6986  |
| 24       | 1,0510                  | 30,0601   | 19,7658  | 26,4379  |
| 26       | 2,1220                  | 28,9891   | 24,0525  | 30,2319  |
| 28       | 4,4354                  | 26,6757   | 27,3422  | 32,4574  |
| 30       | 7,1451                  | 23,9661   | 29,6562  | 33,5250  |

Tab. 4 pro desku  $p=2,0$   $h_2=2,25$  [mm]

$$M=2,3664 \cdot 10^4$$

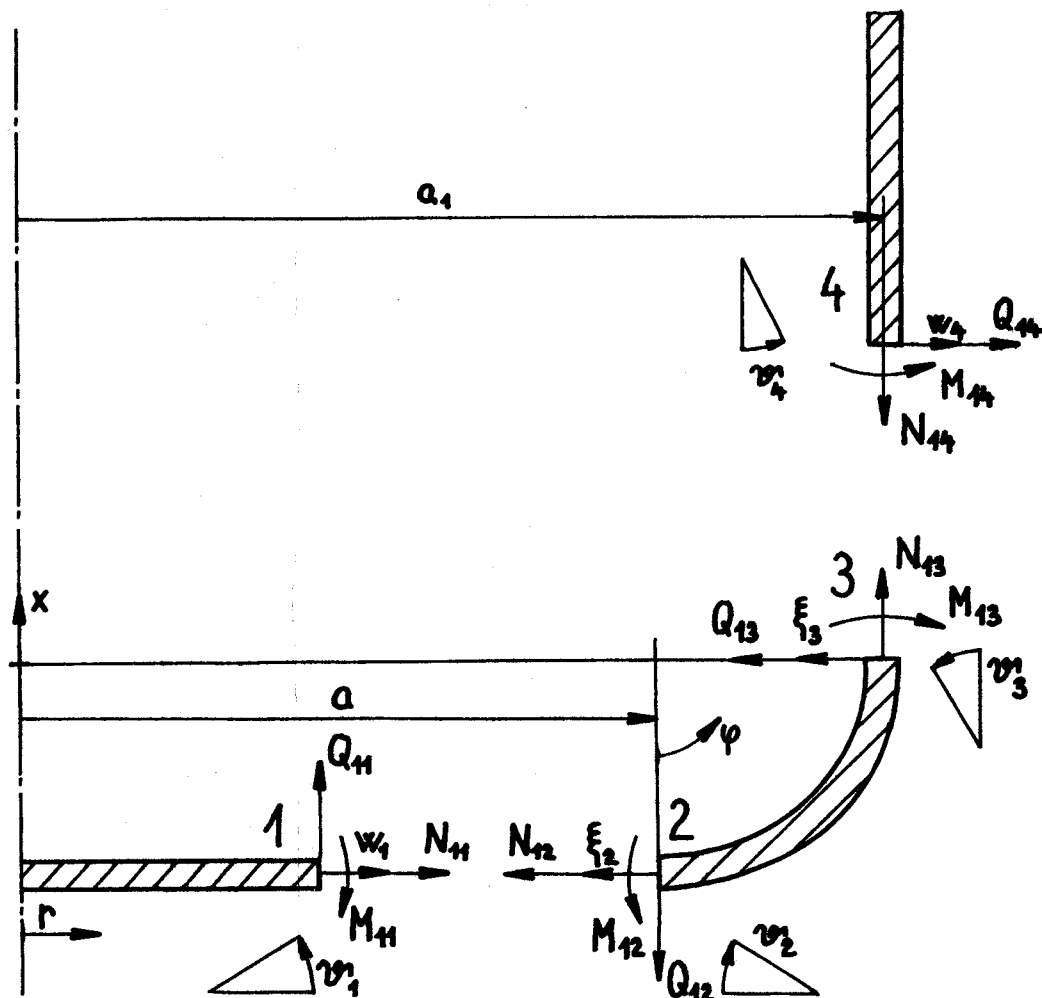
$$Q=4,1997 \cdot 10^2$$

| $r$ [mm] | $\sigma_r^I$ | $\sigma_t^I$ | $\sigma_r^{II}$ | $\sigma_t^{II}$ |
|----------|--------------|--------------|-----------------|-----------------|
| 0        | 268,3952     | 268,3952     | -231,0648       | -231,0648       |
| 2,5      | 265,4045     | 266,8304     | -228,0741       | -229,5000       |
| 5        | 256,4322     | 262,1359     | -219,1018       | -224,8055       |
| 7,5      | 241,4785     | 254,3119     | -204,1481       | -216,9815       |
| 10       | 220,5433     | 243,3582     | -183,2130       | -206,0278       |
| 12,5     | 193,6267     | 229,2748     | -156,2963       | -191,9444       |
| 15       | 160,7285     | 212,0619     | -123,3981       | -174,7315       |
| 17,5     | 121,8489     | 191,7193     | -84,5185        | -156,3889       |
| 20       | 76,9878      | 168,2470     | -39,6574        | -130,9167       |
| 22,5     | 26,1452      | 141,6452     | 11,1852         | -104,3148       |
| 25       | -30,6789     | 111,9137     | 68,0093         | -74,5833        |
| 27,5     | -93,4844     | 79,0526      | 130,8148        | -41,7222        |
| 30       | -162,2715    | 43,0619      | 199,6019        | -5,7315         |
| 32,5     | -237,0400    | 3,9415       | 274,3704        | 33,3889         |
| 35       | -317,7900    | -38,3085     | 355,1204        | 75,6389         |

### 3.2 Výpočet s anuloidovým přechodem

#### 3.2.1. Okrajové podmínky

Z okrajových podmínek jsou vypočteny integrační konstanty  $c_1$  až  $c_7$  a  $c_9$ . Jednotkové síly a momenty v anuloidovém přechodu mezi válcovou skořepinou a deskou jsou na obr.9.



Obr.9

Spoj 4 - 3 ( $z=0, \varphi=90^\circ$ )

$$M_{44} = M_{13}$$

$$Q_{44} = Q_{13}$$

$$w_4 = -\xi_3$$

$$v_4 = v_3$$

(67)

Spoj 2 - 1 ( $r=a, \varphi=0^\circ$ )

$$M_{12} = M_{11}$$

$$N_{12} = N_{11}$$

$$\xi_2 = 0$$

$$v_2 = -v_1$$

(68)

Z podmínky  $v_4 = v_3$  plyne  $c_5 = c_1$

$$Q_{44} = Q_{13} \text{ plyne } c_6 = c_2$$

Z podmierek (67) plyne

$$\frac{\beta r_1 c_1}{\left(\frac{d\eta_{2R}}{d\varphi}\right)_{\varphi=90^\circ}} - \frac{\beta r_1 c_2}{\left(\frac{d\eta_{2R}}{d\varphi}\right)_{\varphi=90^\circ}} + c_3 = 0$$

$$\frac{m}{2h\beta} c_1 + \frac{m}{2h\beta} c_2 - c_4 \left(\frac{d\eta_{2R}}{d\varphi}\right)_{\varphi=90^\circ} \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right) = \mu \bar{A} -$$

$$-P \left[1 - 2\mu + (1-\mu)\lambda\right] - \frac{a^2 m}{Eh^2} p \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

Z podmierek (68) plyne

$$c_1 \left[ \left(\frac{d\eta_{1R}}{d\varphi}\right)_{\varphi=0^\circ} + (\eta_{1R})_{\varphi=0^\circ} \mu \lambda \right] + c_2 \left[ \left(\frac{d\eta_{1i}}{d\varphi}\right)_{\varphi=0^\circ} + (\eta_{1i})_{\varphi=0^\circ} \mu \lambda \right] +$$

$$+ c_3 \left[ \left(\frac{d\eta_{2R}}{d\varphi}\right)_{\varphi=0^\circ} + (\eta_{2R})_{\varphi=0^\circ} \mu \lambda \right] + c_4 \left[ \left(\frac{d\eta_{2i}}{d\varphi}\right)_{\varphi=0^\circ} + (\eta_{2i})_{\varphi=0^\circ} \mu \lambda \right] - 4c_7(1+\mu)r_1 =$$

$$= -\bar{A} \left[ \left(\frac{d\eta_{\varphi i}}{d\varphi}\right)_{\varphi=0^\circ} + (\eta_{\varphi i})_{\varphi=0^\circ} \mu \lambda \right] - p \frac{r_1 a^2 (3+\mu)}{2D_2}$$

$$c_1 (\eta_{1R})_{\varphi=0^\circ} + c_2 (\eta_{1i})_{\varphi=0^\circ} + c_3 (\eta_{2R})_{\varphi=0^\circ} + c_4 (\eta_{2i})_{\varphi=0^\circ} + c_7 \frac{a}{2} =$$

$$= p \frac{a^3}{16D_2} - \bar{A} (\eta_{\varphi i})_{\varphi=0^\circ}$$

$$c_1 \left[ \left(\frac{d\eta_{1i}}{d\varphi}\right)_{\varphi=0^\circ} - (\eta_{1i})_{\varphi=0^\circ} \mu \lambda \right] - c_2 \left[ \left(\frac{d\eta_{1R}}{d\varphi}\right)_{\varphi=0^\circ} - (\eta_{1R})_{\varphi=0^\circ} \mu \lambda \right] + c_3 \left[ \left(\frac{d\eta_{2i}}{d\varphi}\right)_{\varphi=0^\circ} -$$

$$- (\eta_{2i})_{\varphi=0^\circ} \mu \lambda \right] - c_4 \left[ \left(\frac{d\eta_{2R}}{d\varphi}\right)_{\varphi=0^\circ} - (\eta_{2R})_{\varphi=0^\circ} \mu \lambda \right] = \bar{A} \left[ \left(\frac{d\eta_{\varphi R}}{d\varphi}\right)_{\varphi=0^\circ} - (\eta_{\varphi R})_{\varphi=0^\circ} \mu \lambda \right] -$$

$$-\bar{P}(1-2\mu)\lambda$$

$$\begin{aligned} & c_1(\eta_{1i})_{\varphi=0^\circ} - c_2(\eta_{1R})_{\varphi=0^\circ} + c_3(\eta_{2i})_{\varphi=0^\circ} - c_4(\eta_{2R})_{\varphi=0^\circ} - c_9 \frac{ma}{Eh^2} = \\ & = \bar{A}(\eta_{\varphi R})_{\varphi=0^\circ} - 2\bar{P} \end{aligned} \quad (69)$$

### 3.2.2. Průběhy napětí, jednotkových sil a momentů

Výpočet byl proveden na počítači Hewlett Packard Model 9830A. Výsledky jsou uvedeny v tab. 5 a 6.

Tab. 5 pro vales  $p=1,5$   $h=h_0=2,25$  [mm]

$$M_{A_0} = 1,8202 \cdot 10^{-4}$$

$$Q_{A_0} = -4,6528 \cdot 10^{-2}$$

| $x$ [mm] | $M_1$                   | $G_{a0}$  | $G_{tm}$ | $G_{to}$  |
|----------|-------------------------|-----------|----------|-----------|
| 0        | $1,8202 \cdot 10^{-4}$  | 174,7431  | -61,6378 | 40,1909   |
| 2        | $1,0081 \cdot 10^{-4}$  | 96,7835   | -59,5945 | 22,2602   |
| 4        | $4,2434 \cdot 10^{-5}$  | 40,7369   | -49,0116 | 9,3695    |
| 6        | $3,9703 \cdot 10^{-6}$  | 3,8115    | -34,7628 | 0,8766    |
| 8        | $-1,8570 \cdot 10^{-5}$ | -17,8276  | -20,0736 | -4,1003   |
| 10       | $-2,9340 \cdot 10^{-5}$ | -28,1661  | -6,8468  | -6,4782   |
| 12       | $-3,2095 \cdot 10^{-5}$ | -30,8115  | 3,9964   | -7,0866   |
| 14       | $-2,9930 \cdot 10^{-5}$ | -28,7323  | 12,2053  | -6,6084   |
| 16       | $-2,5192 \cdot 10^{-5}$ | -24,1841  | 17,9439  | -5,5624   |
| 18       | $-1,9531 \cdot 10^{-5}$ | -18,7499  | 21,5944  | -4,3125   |
| 20       | $-1,4002 \cdot 10^{-5}$ | -13,4416  | 23,6203  | -3,0916   |
| 22       | $-9,1931 \cdot 10^{-6}$ | -8,8254   | 24,4772  | -2,0298   |
| 24       | $-5,3598 \cdot 10^{-6}$ | -5,1454   | 24,5630  | -1,1834   |
| 26       | $-2,5338 \cdot 10^{-6}$ | -2,4324   | 24,1962  | -0,5595   |
| 28       | $-6,1588 \cdot 10^{-7}$ | -0,5912   | 23,6125  | -0,1360   |
| 30       | $5,5684 \cdot 10^{-7}$  | 0,5346    | 22,9725  | 0,1229    |
| $x$ [mm] | $G_a^I$                 | $G_a^I$   | $G_t^I$  | $G_t^I$   |
| 0        | 185,2431                | -164,2431 | -21,4469 | -101,8287 |
| 2        | 107,2835                | -86,2835  | -37,3343 | -81,8547  |
| 4        | 51,2369                 | -30,2369  | -39,6421 | -58,3810  |
| 6        | 14,3115                 | 6,6885    | -33,8861 | -35,6394  |
| 8        | -7,3276                 | 28,3276   | -24,1740 | -15,9733  |
| 10       | -17,6661                | 38,6661   | -13,3250 | -0,3686   |
| 12       | -20,3115                | 41,3115   | -3,0903  | 11,0830   |
| 14       | -18,2323                | 39,2323   | 5,5969   | 18,8137   |
| 16       | -13,6841                | 34,6841   | 12,3815  | 23,5062   |
| 18       | -8,2499                 | 29,2499   | 17,2819  | 25,9069   |
| 20       | -2,9416                 | 23,9416   | 20,5287  | 26,7119   |
| 22       | 1,6746                  | 19,3254   | 22,4473  | 26,5070   |
| 24       | 5,3546                  | 15,6454   | 23,3796  | 25,7464   |
| 26       | 8,0676                  | 12,9324   | 23,6368  | 24,7557   |
| 28       | 9,9088                  | 11,0912   | 23,4766  | 23,7485   |
| 30       | 11,0346                 | 9,9654    | 23,0954  | 22,8495   |

Tab. 6 pro desku  $p=1,5$   $h=2,25[\text{mm}]$

$$M_{q1} = 2,1672 \cdot 10^{-4}$$

$$Q_{q1} = 5,9838 \cdot 10^{-2}$$

| $r[\text{mm}]$ | $\sigma_r^I$ | $\sigma_t^I$ | $\sigma_r^{II}$ | $\sigma_t^{II}$ |
|----------------|--------------|--------------|-----------------|-----------------|
| 0              | 23,4423      | 23,4423      | 24,4281         | 24,4281         |
| 2,5            | 21,6255      | 22,4917      | 26,2449         | 25,3787         |
| 5              | 16,1748      | 19,6398      | 31,6956         | 28,2306         |
| 7,5            | 7,0905       | 14,8867      | 40,7799         | 32,9837         |
| 10             | -5,6277      | 8,2323       | 53,4981         | 39,6381         |
| 12,5           | -21,9795     | -0,3233      | 69,8499         | 48,1937         |
| 15             | -41,9652     | -10,7802     | 89,8356         | 58,6506         |
| 17,5           | -65,5845     | -23,1383     | 113,4549        | 71,0087         |
| 20             | -92,8377     | -37,3977     | 140,7081        | 85,2681         |
| 22,5           | -123,7245    | -53,5583     | 171,5949        | 101,4287        |
| 25             | -158,2452    | -71,6202     | 206,1156        | 119,4906        |
| 27,5           | -196,3995    | -91,5833     | 244,2699        | 139,4537        |
| 30             | -238,1877    | -113,4477    | 286,0581        | 161,3181        |

#### 4. Technické a ekonomické zhodnocení

Výsledky výpočtu ukazují, že ve spodní části láhve EVRO vznikají špičky napětí, které nedovolují ztenčení tloušťky stěny láhve. Tím ale není vyloučena možnost výroby a použití ultralehké láhve. Nové tvarovací stroje pracující lisofoukací metodou dosahují stejnoměrného rozdělení skloviny a umožňují vyrábět láhve o minimální tloušťce stěny 0,5 mm.

Pro tyto tenkostěnné výrobky jsou však nutné technologie pro jejich spevňování. Konečná technologie zatím k dispozici není.

První metodou je spevňování výměnou iontů, při níž jsou sodné ionty skloviny láhve vyměňovány za ionty draselné. Toto chemické temperování zajišťuje zvýšení odolnosti lahví proti trhlinám řádově o 75% a pevnost proti nárazu řádově o 100%. Zavedení této metody do průmyslové výroby brání pomalá rychlost chemického temperování.

Drahou metodou je povlečení láhve nebo její přepláštěvání vnějšího povrchu plastickou hmotou. Náklady na povlečení láhve jsou však poměrně vysoké, a proto se tato metoda příliš neuplatnila.

Výroba ultralehkých lahví je nutná z hlediska ekonomického, ale váhová úspora je podmíněna konečnou pevností láhve.

## 5. Závěr

Diplomová práce řeší napjatost ve spodní části láhve EVRO, v přechodu válcové části láhve do dna láhve. Přechod je proveden dvěma anuloidy, prvním o poloměru  $R=120$  mm, který není ve výpočtu uvažován, protože použitá výpočtová metoda pro tento není vhodná a druhým anuloidem o poloměru  $r=4$  mm. U této anuloidové skořepiny není úplně splněna podmínka tenkostěnnosti. Dno láhve, které je ve skutečnosti tvořeno kulovou plochou je počítáno jako tenká deska. Z těchto důvodů se budou vypočtená napětí poněkud lišit od skutečných.

V první části je vyřešena zjednodušená úloha, kdy válcová část je přímo spojena s deskou. Špičky napětí v tomto případě několikrát převyšují mez pevnosti v tahu skla.

Dále byl proveden výpočet pro anuloidový přechod mezi deskou a válcem. Špičky napětí jsou nižší než ve zjednodušeném výpočtu, ale stále převyšují mechanické vlastnosti obalového skla. Maximální špička napětí vzniká v anuloidové skořepině a převyšuje asi o 15% maximální špičku napětí ve válcové skořepině.

Odstranění tak vysokých hodnot napětí je možné zvětšením poloměru anuloidové skořepiny a zvětšením tloušťky stěny spodní části láhve.

Závěrem děkuji Ing. Jitce Kvapilové za pomoc při řešení na počítači Hewlett Packard Model 9830A, kterým je KMP VŠST Liberec vybavena.

## 6. Seznam příloh

Příloha 1: Program na výpočet napětí, jednotkových sil  
a momentů pro zjednodušený výpočet

Příloha 2: Program pro výpočet koeficientů soustavy rovnic  
pro okrajové podmínky

Příloha 3: Program na výpočet integračních konstant

Příloha 4: Program na výpočet napětí, jednotkových sil  
a momentů pro anuloidový přechod

## 7. Seznam použité literatury

- [1] Gorbатов N. - Valenta J.: Statika skořepin a skořepinových konstrukcí. SNTL, Praha 1972
- [2] Placák V. - Kunz J.: Výpočet napjatosti skořepin. SNTL, Praha 1966
- [3] Höschi C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL, Praha 1971
- [4] Prošek A.: Výpočet dimenzí lahví z plastů. Diplomová práce 1328/77
- [5] Hlaváček J.: Sklářské stroje. SNTL, Praha 1970
- [6] Přehled přednášek XI. mezinárodního sklářského kongresu. Praha 1977



