TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta strojní

Identifikace dynamických vlastností gyroskopického stabilizátoru

Bakalářská práce

Studijní program: B2301 – Strojní inženýrství
Studijní obor: 2301R000 – Strojní inženýrství

Autor práce: **Petr Cejpa**
Vedoucí práce: Ing. Michal Sivčák, Ph.D.

Liberec 2016

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta strojní
Akademický rok: **2015/2016**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Petr Cejpa**
Osobní číslo:	**S13000035**
Studijní program:	**B2301 Strojní inženýrství**
Studijní obor:	**Strojní inženýrství**
Název tématu:	**Identifikace dynamických vlastností gyroskopického stabilizátoru**
Zadávající katedra:	**Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti**

Zásady pro vypracování:

Sestavte zjednodušený model gyroskopického stabilizátoru a s jeho pomocí identifikujte základní dynamické vlastnosti stabilizátoru, zejména přenosovou charakteristiku a vlastní frekvence systému. Výsledky porovnejte s experimentálním měřením. Na základě zjištěných skutečností identifikujte optimální pracovní oblast stabilizátoru.

1) Seznamte se s fungováním MBS softwaru (MapleSIM).
2) Sestavte model stabilizátoru s využitím MBS softwaru.
3) Určete přenosovou charakteristiku linearizovaného systému a jeho vlastní frekvence.
4) Navrhněte a proveďte experiment ověřující předchozí výpočet.
5) Identifikujte optimální pracovní oblast stabilizátoru.

Rozsah grafických prací: **dle potřeby**

Rozsah pracovní zprávy: **cca. 30 stran.**

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

[1] **SLAVÍK, J., STEJSKAL, V., ZEMAN, V.** *Základy dynamiky strojů*, **Praha, Vydavatelství ČVUT, 1997. ISBN 80-01-01622-6**
[2] **TŮMA, J.** *Zpracovaní signálů získaných z mechanických systémů*, **Praha, Sdělovací technika Praha, 1997, ISBN 80-901936-1-7**

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Michal Sivčák, Ph.D.**
Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

Datum zadání bakalářské práce: **18. listopadu 2015**

Termín odevzdání bakalářské práce: **18. února 2017**

prof. Dr. Ing. Petr Lenfeld
děkan

L.S.

doc. Ing. Iva Petríková, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 1. března 2016

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum: 23.6. 2016

Podpis: Čejka

Abstrakt

Práce se zabývá vytvořením matematického modelu gyroskopického stabilizátoru a stanovením jeho přenosové charakteristiky spolu s vlastními frekvencemi. Tento model je vytvořen na základě ověřovacího modelu v prostředí MBS (multibody simulation) softwaru MapleSIM. Matematický model respektuje nelineární chování vlnovcových pružin aplikovaných v systému. Po analýze dat výsledků simulací chování matematického modelu gyroskopického stabilizátoru, byly stanoveny vlastní frekvence systému a určena optimální pracovní oblast stabilizátoru.

Klíčová slova: matematický model, gyroskopický stabilizátor, přenosová charakteristika, vlastní frekvence, vlnovcová pružina.

Abstract

The aim of this work is to create a mathematical model of the gyroscopic stabilizer and determine its transfer characteristics along with their own frequencies. This model is developed based on a simplified physical model in MBS software MapleSim. Mathematical model respects the nonlinearity of the bellows spring system. After analyzing the data results of simulations of mathematical model, were determine natural frequency of the system and determined optimum work area of Stabilizer.

Keywords: mathematical model, gyroscopic stabilizer, transfer characteristic, natural frequency, bellows spring.

Poděkování

Rád bych poděkoval všem, kteří mi při vypracovávání této bakalářské práce poskytovali nezbytnou podporu.

Především bych rád poděkoval Ing. Michalu Sivčákovi, Ph.D. za odborné vedení mé bakalářské práce a za jeho značnou ochotu při konzultacích. Dále také Bc. Lubomíru Sivčákovi za technickou podporu v laboratoři.

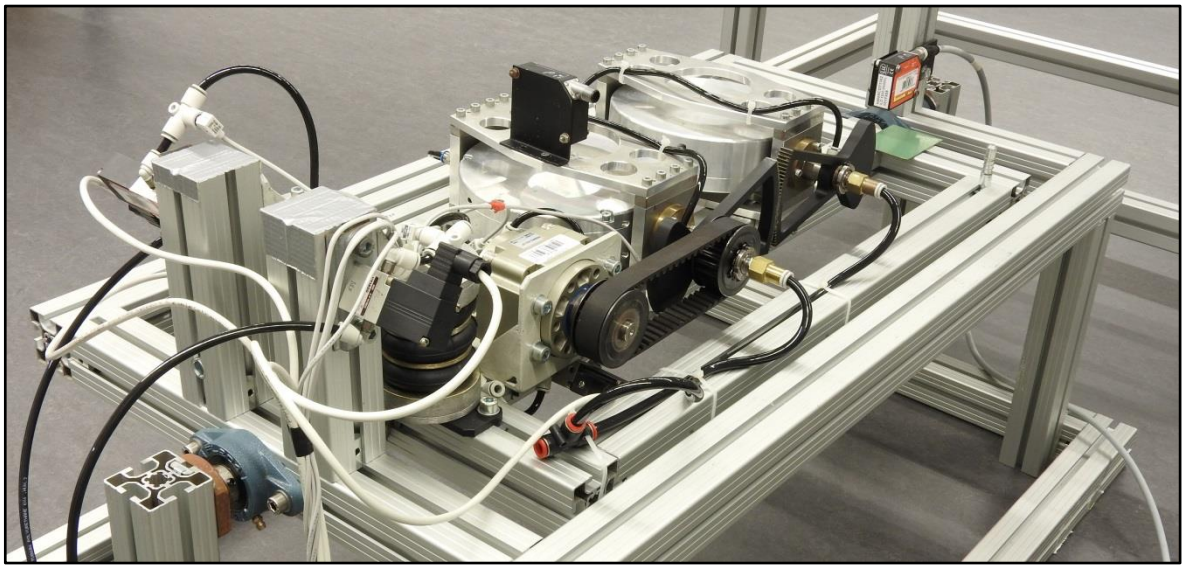
Obsah

Úvod

Stabilizační systém, kterým se tato práce zabývá, je experimentální zařízení využívající gyroskopického efektu pro stabilizaci v aktivním i pasivním režimu. Zmíněné zařízení bylo zkonstruováno jako ověřovací model principu gyroskopické stabilizace. Zařízení využívá pneumatických pružin, gyroskopů a aktivní regulace k docílení značné inertnosti stabilizované části systému vůči vnějšímu buzení.

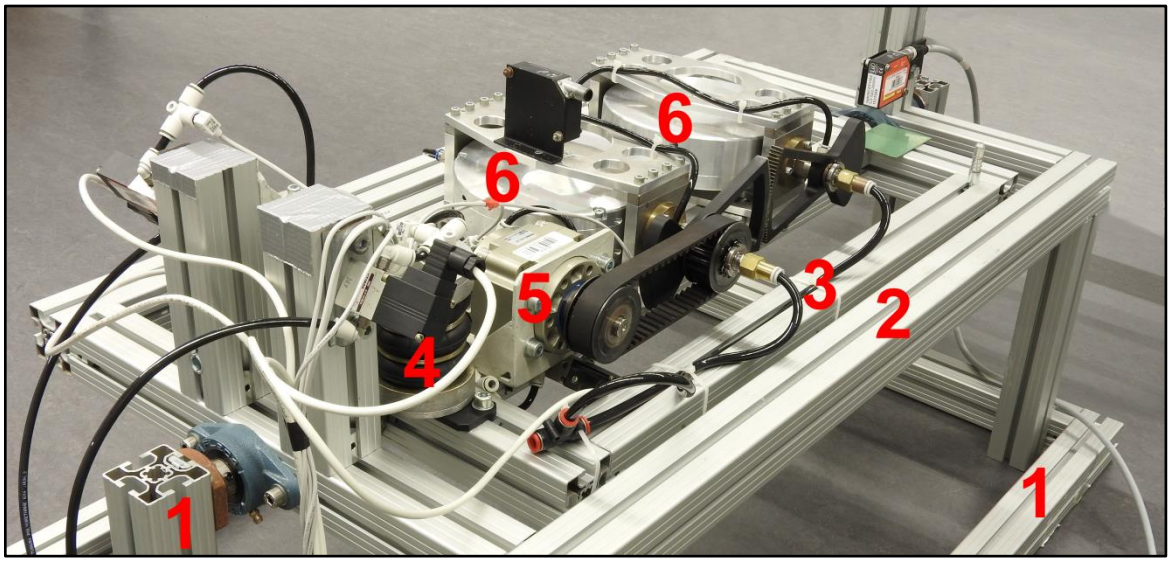
Úkolem této bakalářské práce je sestavení matematického modelu gyroskopického stabilizátoru pomocí softwaru typu MBS (multibody simulation) a určení jeho přenosové charakteristiky a vlastních frekvencí. Dále na základě těchto skutečností určit optimální pracovní oblast stabilizátoru. Výsledky získané simulací budou ověřeny experimentem.

Pro vytvoření matematického modelu byl použit software MapleSim 2015 vyvinutý společností Maplesoft. Data získaná během experimentu byla zpracována v prostředí Maple 2015.



1. Reálný model

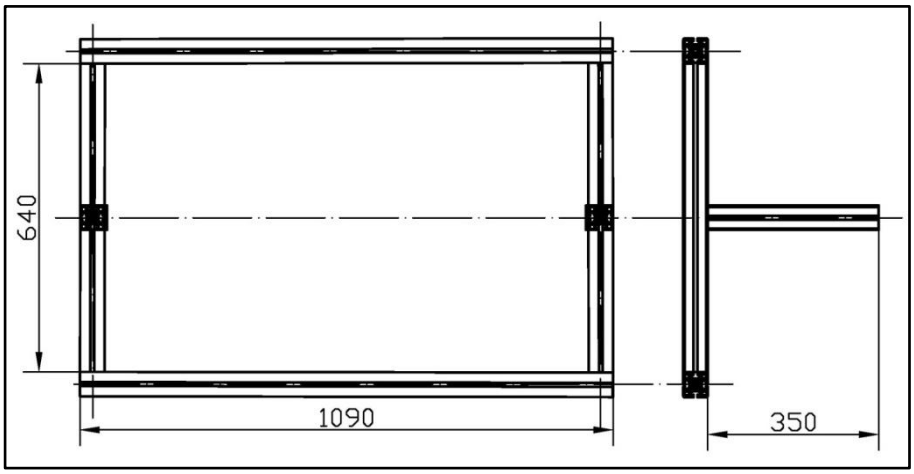
Stabilizační systém (obrázek 1) je složen ze statického rámu (1), vnějšího rámu (2), vnitřního rámu (3), vlnovcových pružin (4), pneumatického motoru (5), gyroskopů (6). Na obrázku je sestava v servisní poloze, což znamená, že všechny



Obrázek 1: Reálný model gyroskopického stabilizátoru v servisní poloze.
(1) statický rám, (2) vnější rám, (3) vnitřní rám, (4) vlnovcové pružiny, (5) pneumatický motor, (5) gyroskopy.

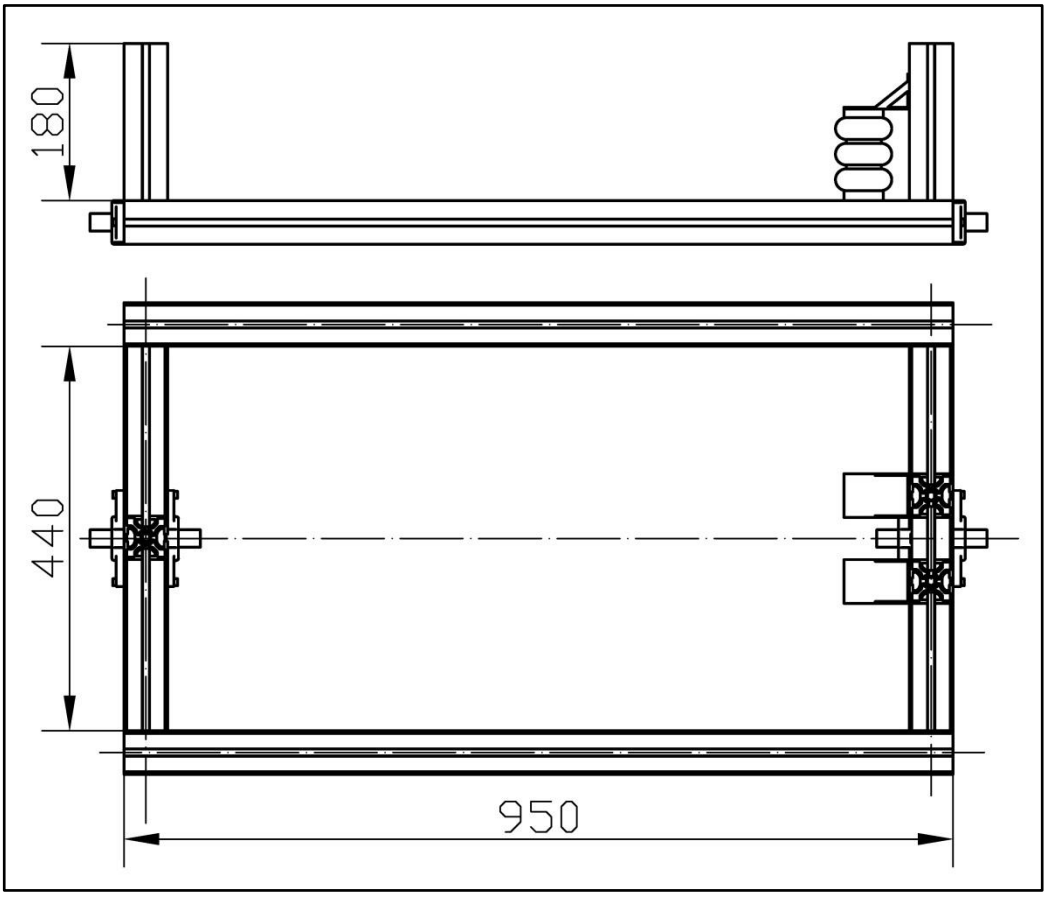
části, kromě statického rámu, jsou otočeny o sto osmdesát stupňů oproti provozní poloze. Většinu nosných částí konstrukce tvoří profilové tyče z hliníkové slitiny 50 x 50 mm od firmy MayTec s délkovou hustotou 2,20 kg/m.

První částí je statický rám, který tvoří podporu pro celý systém. Sestává se z šesti profilových tyčí o celkové hmotnosti 9,10 kg a následujících rozměrech.



Obrázek 2: Základní rozměry statického rámu.

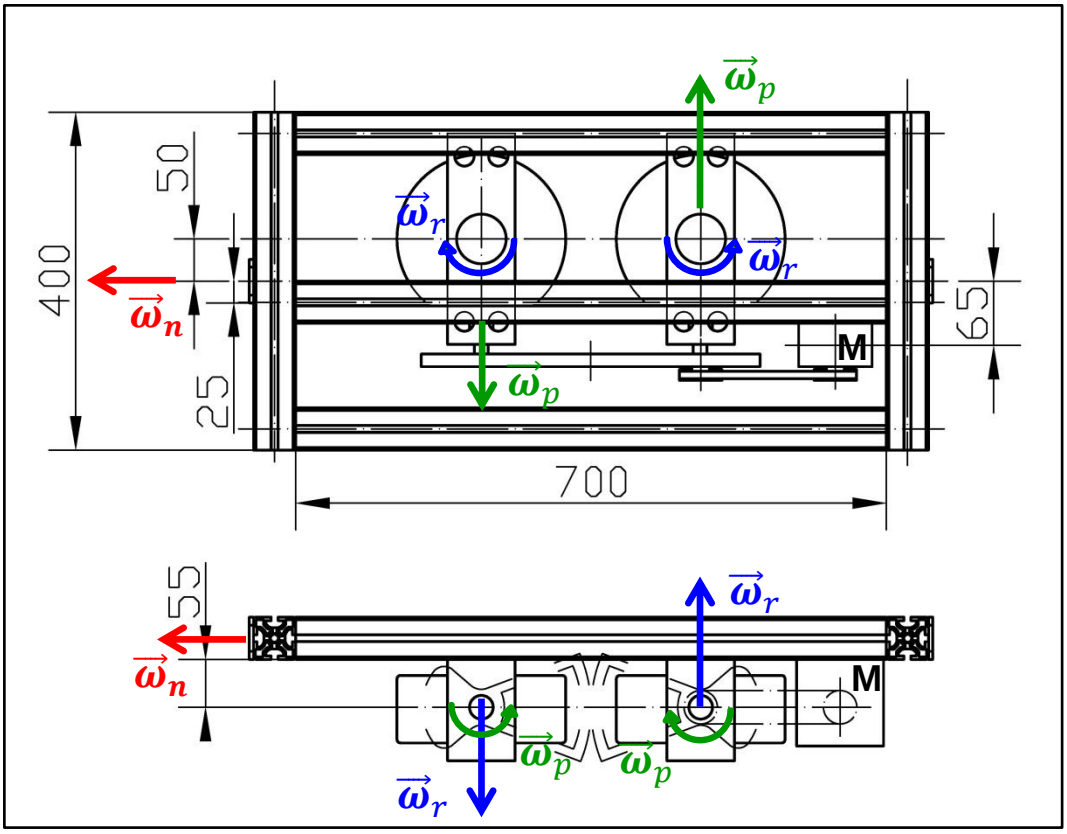
Druhou částí je vnější rám (obrázek 3), na který je přiváděn budící signál v podobě silových impulzů. Rám je spojen s vnitřním a statickým rámem pomocí rotační vazby. K rámu jsou připojeny pneumatické vlnovcové pružiny, které tvoří pružné spojení mezi vnějším rámem a vnitřním rámem. Na této části je také umístěn bezkontaktní snímač polohy, ten zaznamenává natočení mezi vnějším a vnitřním rámem.



Obrázek 3:Základní rozměry vnějšího rámu.

Vnitřní rám (obrázek 4) je část systému, která je stabilizována. Tato podsestava je osazena dvěma gyrokopy, které jsou vzájemně spojeny čelním ozubením. Na spojené precesní osy gyroskopů je přiváděn točivý moment z pneumatického motoru, který je součástí zpětnovazební regulace. Užití většího počtu gyroskopických jednotek je pouze z důvodu získání většího gyroskopického momentu, bez vlivu na princip fungování jednoosé stabilizace.

Díky spřažení gyroskopů v reálném modelu a opačnému smyslu rotace setrvačníků lze v MBS modelu oba gyroskopy s výhodou nahradit pouze jedním, s dvojnásobným momentem setrvačnosti. Na obrázku 4 je znázorněna vzájemná závislost mezi smysly úhlových rychlostí. Pro orientaci vektorů je uvažováno pravidlo pravé ruky. Pokud se vnitřní rám natočí o kladný úhel z rovnovážné polohy, dojde k tatočení setrvačníku kolem precesní osy, ve smyslu určeném jeho vlastní rotací (značená modře). Tato interakce funguje i opačně. Pokud dojde k natočení setrvačníku kolem precesní osy (například pneumatickým motorem), natočí se naopak rám. Této skutečnosti je využito při zpětnovazební regulaci.



Obrázek 4: Vnitřní rám s gyroskopy a pneumatickým motorem, závislost mezi úhlovými rychlostmi. $\vec{\omega}_r$ – vlastní rotace setrvačníku, $\vec{\omega}_n$ – rotace rámu, $\vec{\omega}_p$ – precesní rotace, M – pneumatický motor

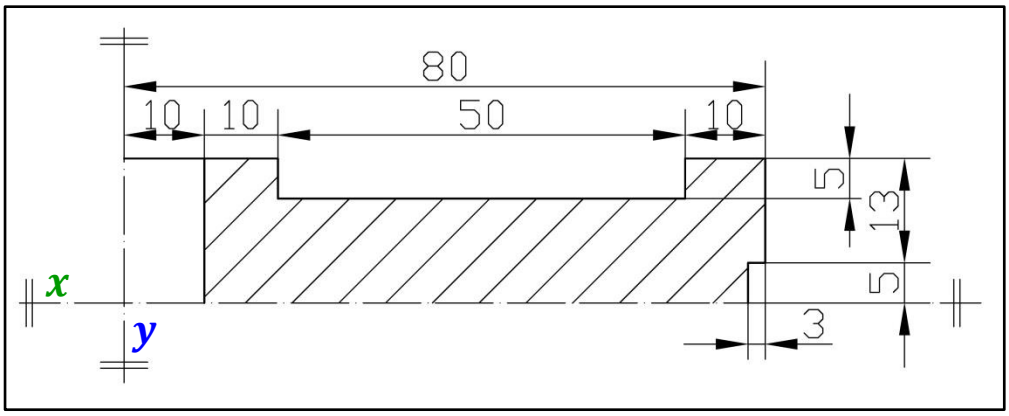
1.1. Hmotové charakteristiky systému

Důležitým vstupem do MBS modelu jsou hmotové charakteristiky jednotlivých částí sestavy. Vzhledem ke kinematickým vazbám a rozložení hmoty kolem osy rotace rámů, jsou zásadní hmotnosti a momenty setrvačnosti.

1.1.1. Hmotové charakteristiky setrvačníku

Po rozebrání gyroskopu byly změřeny rozměry setrvačníku (obrázek 5) a zaznamenána jeho hmotnost. Osa Y na obrázku 6 je hlavní osou setrvačnosti.

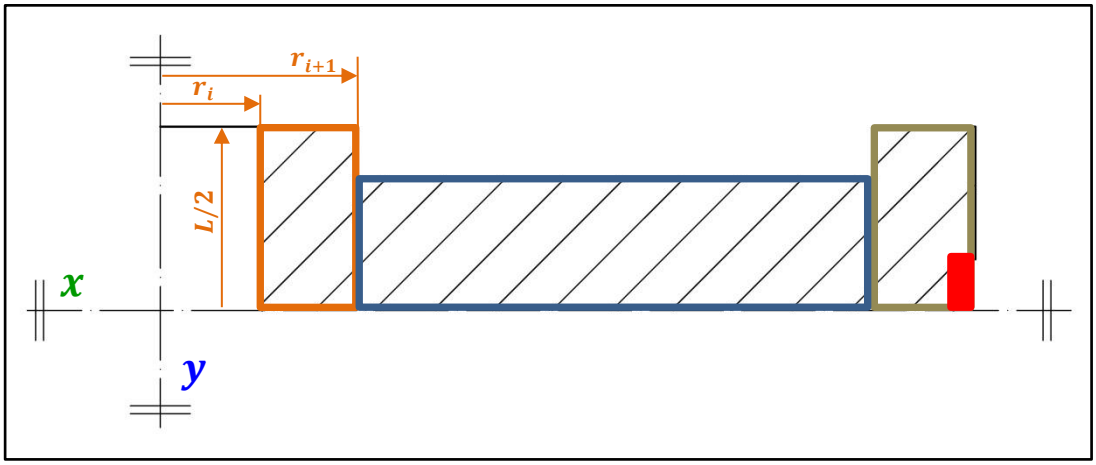
Obrázek 5: Setrvačník.



Obrázek 6: Rozměry setrvačníku.

Pro vytvoření MBS modelu je nutné vypočítat momenty setrvačnosti k ose X a Y. Moment setrvačnosti k ose Z je shodný s momentem setrvačnosti vůči ose X díky osové symetrii setrvačníku.

Výpočet momentu setrvačnosti J_y byl proveden jako součet dílčích momentů setrvačností tlustostěnných plášťů válce, jejichž řezy jsou vyšrafovány. Od tohoto součtu byl poté odečten moment setrvačnosti tlustostěnného pláště



Obrázek 7: Rozdělení setrvačníku na oblasti, pro stanovení momentu setrvačnosti.

válce, jehož řez je označen červeně. Myšlené oblasti, na které byl setrvačník rozdělen, jsou zobrazeny na obrázku 7. Moment setrvačnosti tlustostěnného pláště válce o vnitřním poloměru r_i a vnějším poloměru r_{i+1} je dán vztahem

$$J_{y_i} = \frac{1}{2} m (r_{i+1}^2 + r_i^2). \tag{1.1}$$

Pro určení momentu setrvačnosti J_x je využito opět součtu dílčích momentů setrvačností již zavedených podoblastí a následného odečtu výřezu označeného červeně. Moment setrvačnosti tlustostěnného válce o ose x je dán vztahem

$$J_{x_i} = \frac{1}{12} m (3 \cdot r_{i+1}^2 + 3 \cdot r_i^2 + L^2). \tag{1.2}$$

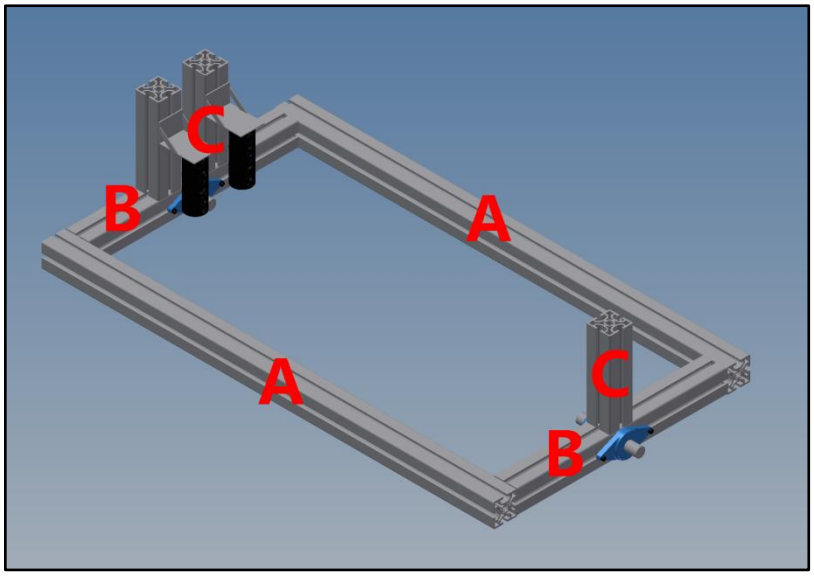
Parametry potřebné pro vstup do MBS modelu jsou v tabulce 1.

Tabulka 1: Hmotnostní charakteristiky setrvačníku.

$\boldsymbol{J_y}$	$13{,}480 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2]$
$\boldsymbol{J_x}$	$8{,}886 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2]$

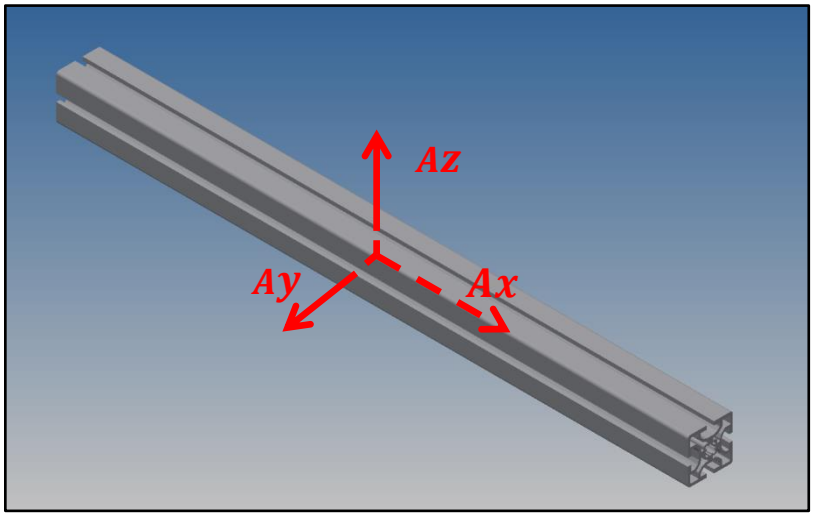
1.1.2. Hmotové charakteristiky vnějšího rámu

Vnější rám sestavy (obrázek 8) má pouze jeden stupeň volnosti a proto postačí výpočet pouze jednoho kvadratického momentu. Pro výpočet momentu setrvačnosti vnějšího rámu bylo vhodné rám rozdělit na tři myšlené části A, B, C a celkový moment setrvačnosti určit jako součet momentů setrvačností dílčích částí.



Obrázek 8: Rozdělení vnějšího rámu pro výpočet momentu setrvačnosti.

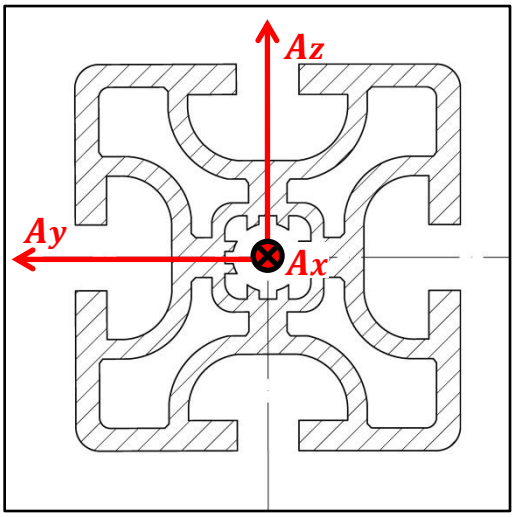
Výpočet momentu setrvačnosti části A byl proveden ve třech krocích. V prvním kroku byl určen moment setrvačnosti jednoho ze dvou profilů



Obrázek 9: Náhradní souřadnicový systém části A.

v náhradním souřadnicovém sytému, který má počátek v těžišti vybraného profilu. Pro předpokládanou rotaci rámu jen kolem jedné osy postačí pro část A pouze

moment setrvačnosti kolem osy x, v náhradním souřadnicovém systému. Tato hodnota byla kvůli složitosti tvaru profilu získána z 3D modelu v programu



Obrázek 10: Průřez profilové tyče tvořící rám.

Autodesk Inventor 2015. Ve druhém kroku je využito Steinerovi věty

$$J'_{xA} = J''_{xA} + m \cdot r^2, \tag{1.3}$$

pro zahrnutí vzdálenosti tyče od osy otáčení. A ve třetím kroku je takto získaný moment setrvačnosti vynásoben dvěma, pro doplnění profilu na druhé straně. Mezivýsledky jsou uvedeny v tabulce 2.

Tabulka 2: Hodnoty pro určení momentu setrvačnosti částí A.

$\boldsymbol{J''_{xA}}$	$10 \cdot 10^{-4}$ [kg · m^2]
$\boldsymbol{J'_{xA}}$	0,127 [kg · m^2]
m	2,090 [kg]
r	0,450 [m]
$\boldsymbol{J_{xA}}$	0,253[kg · m^2]

Při výpočtu momentu setrvačnosti části B je nejdříve proveden výpočet na jednom z dílů. Osa rotace součásti tentokrát prochází kolmo k ose rovnoběžné s jejím nejdelším rozměrem. Pro tento případ je využito vzorce

$$J_{xB} = \frac{1}{12} \cdot m \cdot (b^2 + l^2), \tag{1.4}$$

kde l je délkou profilové tyče. A v posledním kroku je tato hodnota vynásobena počtem profilových prvků tvořících část B. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 3.

Moment setrvačnosti části C je určen analogicky. Prvně je určena kýžená hmotová charakteristika v těžišti jedné ze tří profilových tyčí podle vzorce (1.5) a následně je opět využito Steinerovi věty. Výsledky uvádí tabulka 4.

Tabulka 4: Hodnoty pro určení momentu setrvačnosti části C.

$\boldsymbol{J''_{xC}}$	$4{,}125 \cdot 10^{-5}\ [\mathrm{kg \cdot m^2}]$
$\boldsymbol{J'_{xC_1}}$	$5{,}278 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{kg \cdot m^2}]$
$\boldsymbol{J'_{xC_2}}$	$6{,}23 \cdot 10^{-3} [\mathrm{kg \cdot m^2}]$
$\mathbf{r_1}$	$0{,}115\ [\mathrm{m}]$
$\mathbf{r_2}$	$0{,}125\ [\mathrm{m}]$
$\boldsymbol{J_{xC}}$	$0{,}018\ [\mathrm{kg \cdot m^2}]$

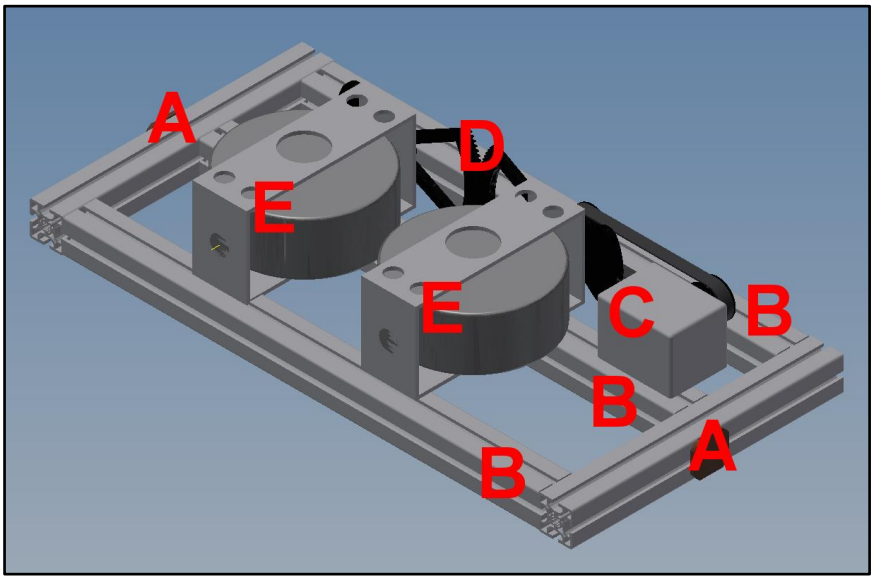
Tabulka 3: Hodnoty pro určení momentu setrvačnosti části B.

$\boldsymbol{J'_{xB}}$	$0{,}016\ [\mathrm{kg \cdot m^2}]$
$\boldsymbol{m}$	$0{,}968\ [\mathrm{kg}]$
$\boldsymbol{l}$	$0{,}440\ [m]$
$\boldsymbol{J_{xB}}$	$0{,}032\ [\mathrm{kg \cdot m^2}]$

Při zanedbání ostatních částí vnitřního rámu, které díky své poloze a hmotnosti lze považovat za nepodstatné z hlediska vlivu na celkový výsledek, je výsledný moment setrvačnosti rámu $J_{x2} = 0{,}303\ [\mathrm{kg \cdot m^2}]$.

1.1.3. Hmotové charakteristiky vnitřního rámu

Vnitřní rám (obrázek 11) je z hlediska výpočtu momentu setrvačnosti k ose rotace systému nejrozmanitější částí. Výpočet pro všechny části je obdobný jako u rámu číslo dvě, proto zde nebude uváděn celý postup. Příspěvky čidel a nutné kabeláže do celkového momentu setrvačnosti jsou zanedbány. Výsledky jsou zaznamenány v tabulce 5.



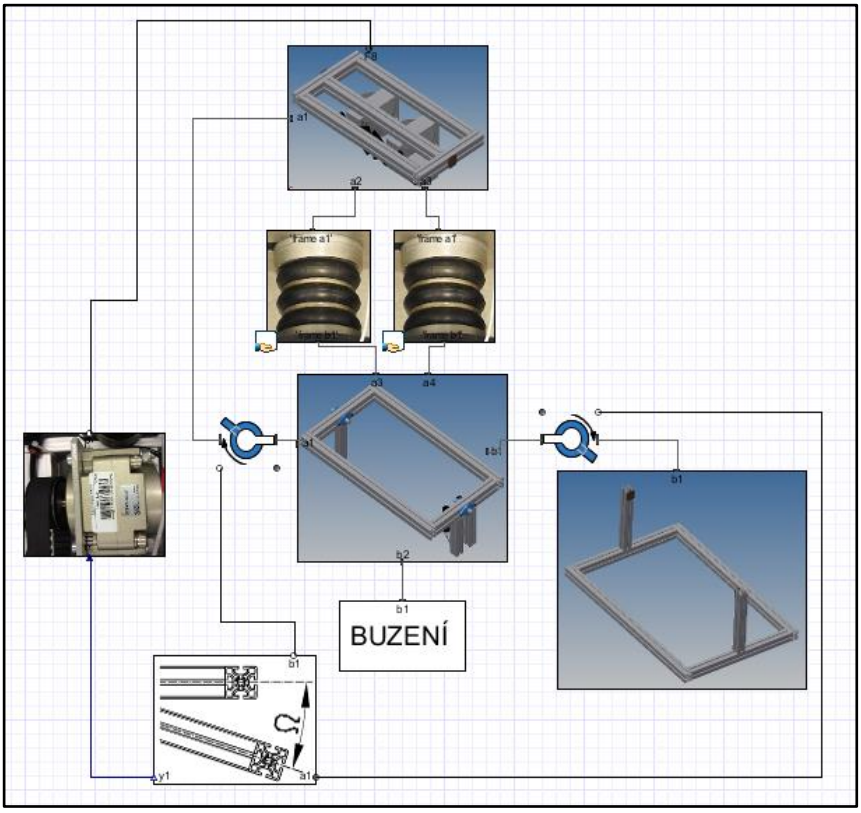
Obrázek 11: Vnitřní rám.

Tabulka 5: Hodnoty pro určení momentu setrvačnosti vnitřního rámu.

J_{xA}	$0{,}024\ [\mathrm{kg \cdot m^2}]$	J_{xD}	$0{,}014\ [\mathrm{kg \cdot m^2}]$
J_{xB}	$0{,}097\ [\mathrm{kg \cdot m^2}]$	J_{xE}	$0{,}620\ [\mathrm{kg \cdot m^2}]$
J_{xC}	$0{,}012\ [\mathrm{kg \cdot m^2}]$	J_{x3}	$0{,}767\ [\mathrm{kg \cdot m^2}]$

1.2. MBS model sestavy

Tvorba MBS modelů v prostředí MapleSim probíhá prostřednictvím tvorby vazeb mezi programovými bloky a určováním jejich parametrů. Každý blok reprezentuje hmotu, vazbu, geometrii, nebo matematický výraz, s nastavitelnými parametry. Vybrané programové bloky je možné seskupovat do subbloků reprezentovaných jedinou ikonou, což pochopitelně značně zvyšuje přehlednost v celkovém modelu. MBS systém reprezentovaný hlavními subbloky je zachycen na obrázku 12.



Obrázek 12: Vývojové schéma v prostředí MapleSim. (Obsah jednotlivých subbloků je uveden v příloze.)

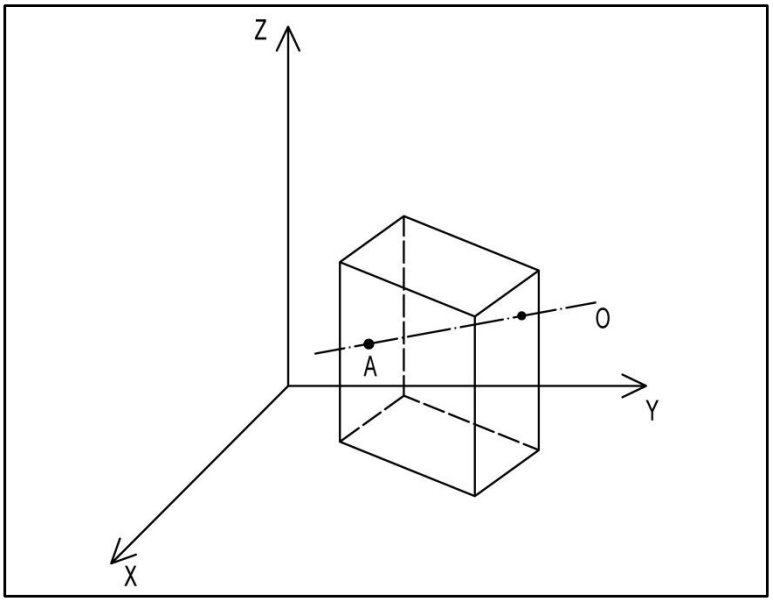
V závislosti na skutečném systému, je MBS model postaven ze tří hlavních subbloků. Ty reprezentují jednotlivé rámy. Obsahují jejich vzájemnou polohu, rozměry a hmotové charakteristiky. Subbloky rámů jsou stejně jako jejich reálná předloha spojeny pomocí rotační vazby, které jsou znázorněné nejmenšími ikonami v modelu. Silová interakce mezi vnějším a vnitřním rámem je realizována jejich vzájemným propojením přes subbloky vlnovcových pružin. Aktivní regulace probíhá v závislosti na hodnotě vzájemného natočení vnějšího a vnitřního rámu, ta je znázorněna příslušnou ikonou v levém dolním rohu. Tato hodnota je přiváděna

do subbloku pneumatického motoru, který také obsahuje proporcionální regulaci. Výstupní veličinou z této ikony je točivý moment přiváděný na precesní osu gyroskopů obsažených v subbloku výstupního rámu. Prostřednictvím této aktivní regulace jsou výrazně eliminovány změny polohy vnitřního rámu, způsobené přiváděným silovým buzením na vnější rám.

2. Teorie gyroskopu

2.1. Eulerovy úhly

Mějme dáno obecné těleso v trojrozměrném prostoru, ve zvolené inerciální vztažné soustavě X, Y, Z. Pokud těleso nemá kinematické vazby, náleží mu právě šest stupňů volnosti. Zvolíme-li obecný bod A uvnitř tělesa a zamezíme-li jeho pohybu vůči souřadnicovému systému X, Y, Z odebereme tělesu tři stupně volnosti. [1] Těleso nyní může vykonávat prostorovou rotaci kolem tohoto bodu, kterým zároveň prochází okamžitá osa rotace O (obrázek 13). Bod A se nyní stává středem sférického pohybu a těleso může vykonávat sférický pohyb.

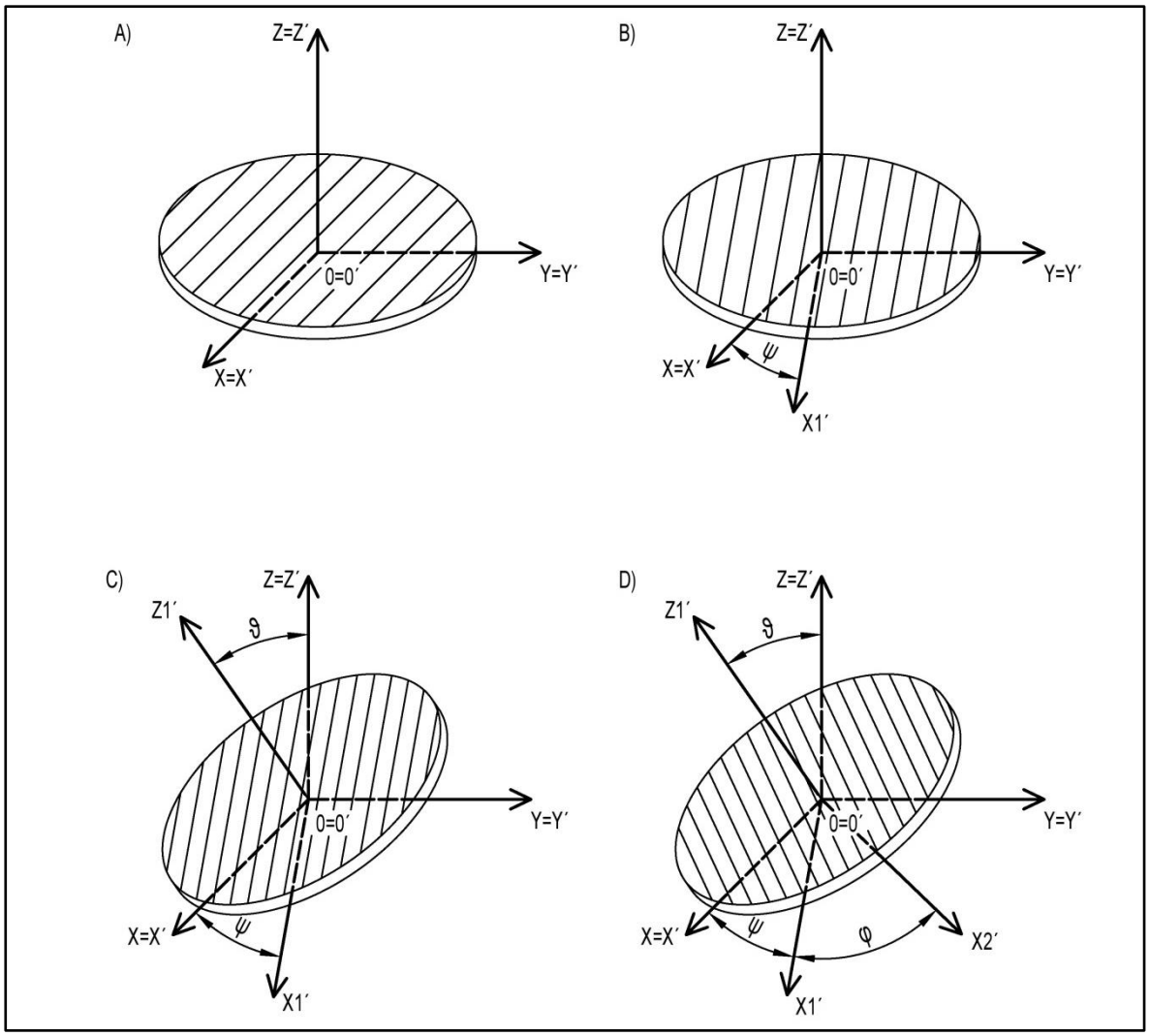


Obrázek 13: Těleso v inerciální vztažné soustavě X, Y, Z.

Okamžitá úhlová rychlost rotace tělesa charakterizována vektorem $\vec{\omega}$ se v inerciální vztažné soustavě s časem mění a vektor $\vec{\omega}$ můžeme rozložit do tří vzájemně různých směrů. Jedním z možných způsobů je rozklad na rotace kolem os inerciální vztažné soustavy na složky ω_x, ω_y, ω_z. Z hlediska představy rotace konkrétního tělesa je výhodnější zavedení rozkladu rotace do Eulerových úhlů. Ty lze zavést následujícím způsobem.

Zvolíme znovu inerciální vztažnou soustavu X, Y, Z se středem O, vůči které budeme popisovat pohyb tělesa. Na tělese určíme lokální souřadnicový systém X', Y', Z' se středem O' umístěným v nehybném bodě tělesa (v předchozím

případě jej reprezentoval bod A). Lokální souřadnicový systém tělesa umístíme tak, že $0' = 0$, $X' = X$, $Y' = Y$, $Z' = Z$ (obrázek 14A). Provedeme-li rotaci kolem osy Z o úhel ψ, přejde osa X' lokálního souřadnicového systému do polohy $X1'$ (obrázek 14B). V této poloze nyní provedeme rotaci kolem osy $X1'$ o úhel ϑ (obrázek 14C), kde původní osa Z' shodná s osou Z přejde do polohy $Z1'$. Poslední rotaci provedeme kolem právě vzniklé osy $Z1'$ o úhel φ (obrázek 14D).



Obrázek 14: Eulerovy úhly.

Úhly ψ, ϑ, φ jsou Eulerovy úhly. Pro snadnou identifikaci nazýváme ψ úhlem vlastní rotace, ϑ úhlem nutačním, φ úhlem precesním. Okamžité úhlové rychlosti v Eulerově systému získáme derivací změny těchto úhlů podle času.

Podle prvního a druhého pootočení tělesa (obrázek 14A, 14B) lze sestavit i převodní vztahy mezi úhlovými rychlostmi v kartézském systému a Eulerově systému.

$$\omega_x = \dot{\vartheta}, \qquad \omega_y = \dot{\psi}\sin(\vartheta), \qquad \omega_z = \dot{\psi}\cos(\vartheta) \tag{2.0}$$

2.2. Silové účinky

Při určování silových účinků k osám základního souřadnicového systému X, Y, Z při obecné rotaci tělesa se souřadnicovým systémem X',Y',Z' lze vycházet z druhého Newtonova zákona

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{2.1}$$

aplikovaného na rotační pohyb. Je tedy nutné místo hybnosti definovat moment hybnosti

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times (m_i \vec{v_i}). \tag{2.2}$$

Kde *n* je počet bodů tělesa, m_i hmotnost i-tého bodu tělesa a vektory $\vec{r_i}$, $\vec{v_i}$ jsou polohovým vektorem a vektorem rychlosti tělesa i-tého bodu v lokálním souřadnicovém systému tělesa. Rychlost $\vec{v_i}$ je možné vyjádřit vektorovým součinem

$$\vec{v_i} = \vec{\omega} \times \vec{r_i} = \tag{2.3}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \vec{\imath}(\omega_y z_i - \omega_z y_i) + \vec{\jmath}(\omega_z x_i - \omega_x z_i) + \vec{k}(\omega_x y_i - \omega_y x_i),$$

kde jsou jednotkové vektory $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ jednotkovými vektory lokálního souřadnicového systému tělesa. Po provedení vektorového součinu takto vyjádřené rychlosti, získáme skalární složky vektoru momentu hybnosti vzhledem k souřadnicovému systému tělesa

$$\mathrm{b_x} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \mathrm{m_i}(\mathrm{y_i^2} + \mathrm{z_i^2})\omega_\mathrm{x} - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m_i x_i y_i}\omega_\mathrm{y} - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m_i x_i z_i}\omega_\mathrm{z}, \tag{2.4}$$

$$\mathrm{b_y} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \mathrm{m_i}(x_\mathrm{i}^2 + \mathrm{z_i^2})\omega_\mathrm{y} - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m_i x_i y_i}\omega_\mathrm{x} - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m_i y_i z_i}\omega_\mathrm{z,} \tag{2.5}$$

$$\mathrm{b_z} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \mathrm{m_i}(y_\mathrm{i}^2 + \mathrm{x_i^2})\omega_\mathrm{z} - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m_i x_i z_i}\omega_\mathrm{x} - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m_i y_i z_i}\omega_\mathrm{y}. \tag{2.6}$$

Po zavedení substitucí momentů setrvačností J a deviačních momentů D se zápis složek vektoru hybnosti zkrátí na následující tvar

$$b_x = J_x\omega_x - D_{xy}\omega_y - D_{xz}\omega_z, \tag{2.7}$$

$$b_y = J_y\omega_y - D_{xy}\omega_x - D_{yz}\omega_z, \tag{2.8}$$

$$b_z = J_z\omega_z - D_{xz}\omega_x - D_{yz}\omega_y. \tag{2.9}$$

Abychom mohli takto zavedený moment hybnosti v soustavě X', Y', Z', kde jsou časové derivace bázových vektorů různé od nuly, aplikovat pro výpočet silových účinků k inerciální vztažné soustavě X, Y, Z je nutné zavést vztah mezi časovými změnami hybností v obou soustavách

$$\frac{d\overrightarrow{b_c}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{b_l}}{dt} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{b_l}. \tag{2.10}$$

Kde $\vec{\omega}$ je úhlová rychlost lokálního souřadnicového systému X', Y', Z' vůči souřadnicovému systému X, Y, Z. Hybnost tělesa vzhledem k lokálnímu souřadnicovému systému je $\overrightarrow{b_l}$ a vzhledem k inerciální souřadnicové soustavě $\overrightarrow{b_c}$. Pokud rovnici (2.10) rozepíšeme do složek, získáme

$$\frac{d\overrightarrow{b_c}}{dt} = \frac{db_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{db_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{db_z}{dt}\vec{k} + \vec{\omega} \times \left(b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}\right). \tag{2.11}$$

Pro přehlednost zavedeme značení první časové derivace tečkou nad derivovanou veličinou a po provedení vektorového součinu a rozdělení do složek vyjdou vztahy

$$\dot{b}_{c_x} = \dot{b}_{l_x} + \omega_y b_{l_z} - \omega_z b_{l_y} = M_x, \tag{2.12}$$

$$\dot{b}_{c_y} = \dot{b}_{l_y} + \omega_z b_{l_x} - \omega_x b_{l_z} = M_y, \tag{2.13}$$

$$\dot{b}_{c_y} = \dot{b}_{l_z} + \omega_x b_{l_y} - \omega_y b_{l_x} = M_z. \tag{2.14}$$

Rovnice (2.12, 2.13, 2.14) jsou obecným tvarem Eulerových rovnic. Z nichž můžeme za použití vztahu

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{M} \tag{2.15}$$

určit silové momenty působící na souřadnicové osy inerciální soustavy X, Y, Z.

2.2.1. Silové účinky pro případ gyroskopu

Pokud použijeme Eulerovy rovnice v obecném tvaru na případ sférického pohybu, dojde k jejich výraznému zjednodušení. Mějme těleso s osou symetrie Z', která prochází počátkem SS X, Y, Z, který je středem sférického pohybu tělesa a zároveň počátkem SS X', Y', Z´. Při sférickém pohybu můžeme opět rozložit rotaci lokálního souřadnicového systému tělesa X', Y', Z' okolo inerciální vztažné soustavy X, Y, Z do složek

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{\imath} + \omega_y \vec{\jmath} + \omega_z \vec{k}. \tag{2.16}$$

A u rotace souřadnicového systému tělesa zbyde pouze jedna možná rotace reprezentována úhlovou rychlostí $\dot{\varphi}$, což je rotace kolem osy Z', hlavní osy setrvačnosti tělesa. Pak úplný vztah pro úhlovou rychlost má tvar rovnice

$$\overrightarrow{\omega_V} = \omega_x \vec{\imath} + \omega_y \vec{\jmath} + (\omega_z + \dot{\varphi})\vec{k}. \tag{2.17}$$

Úhlové zrychlení tělesa vzhledem systému X', Y', Z' je dáno $\ddot{\varphi}\vec{k}$ a vůči souřadnicovému systému X, Y, Z vztahem

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}_x \vec{\imath} + \dot{\omega}_y \vec{\jmath} + \dot{\omega}_z \overrightarrow{k}. \tag{2.18}$$

Jelikož vztah (2.10) je platný pro libovolný vektor v soustavách X, Y, Z a X', Y', Z', lze ho použít i pro určení výsledného úhlového zrychlení k souřadnicovému systému X, Y, Z které je dáno vztahem

$$\dot{\overrightarrow{\omega_V}} = \dot{\vec{\omega}} + \ddot{\varphi}_c. \tag{2.19}$$

Kde pro určení $\ddot{\varphi}_c$ použijeme právě modifikovanou rovnici (2.10). V tomto případě tedy vychází vztah

$$\frac{d^2\overrightarrow{\varphi_c}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{\varphi_l}}{dt^2} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{\dot{\varphi}_l}, \tag{2.20}$$

který použijeme v rovnici (2.19) a dostaneme vektor výsledného zrychlení k souřadnicovému systému X, Y, Z

$$\dot{\overrightarrow{\omega_V}} = \dot{\vec{\omega}} + \ddot{\varphi}\vec{k} + \vec{\omega} \times \dot{\varphi}\vec{k} \tag{2.21}$$

a po provedení vektorového součinu a rozložení do složek tvar

$$\dot{\omega}_{V_x} = (\dot{\omega}_x + \omega_y\dot{\varphi})\vec{\imath}, \tag{2.22}$$

$$\dot{\omega}_{V_y} = \left(\dot{\omega}_y + \omega_x\dot{\varphi}\right)\vec{\jmath}, \tag{2.23}$$

$$\dot{\omega}_{V_z} = (\dot{\omega}_z + \ddot{\varphi})\vec{k}. \tag{2.24}$$

Ve zvoleném tělese je osa Z' hlavní osou setrvačnosti tělesa, pak jsou deviační momenty k osám rovny nule a pro osové momenty setrvačnosti platí rovnosti

$$J_x = J_y = J_X = J_Y = J, \tag{2.25}$$

$$J_z = J_Z = J_0. \tag{2.26}$$

Když vztahy (2.25, 2.26) a (2.7, 2.8, 2.9) společně s rovnicemi (2.22, 2.23, 2.24) dosadíme do obecného tvaru Eulerových rovnic (2.12, 2.13, 2.14) dostaneme momenty sil k souřadnicovým osám X, Y, Z pro sférický pohyb tělesa

$$J\dot{\omega}_x + (J_0 - J)\omega_y\omega_z + J_0\omega_y\dot{\varphi} = M_x, \tag{2.27}$$

$$J\dot{\omega}_y + (J - J_0)\omega_x\omega_z - J_0\omega_x\dot{\varphi} = M_y, \tag{2.28}$$

$$J_0(\dot{\omega}_z + \ddot{\varphi}) = M_{z.} \tag{2.29}$$

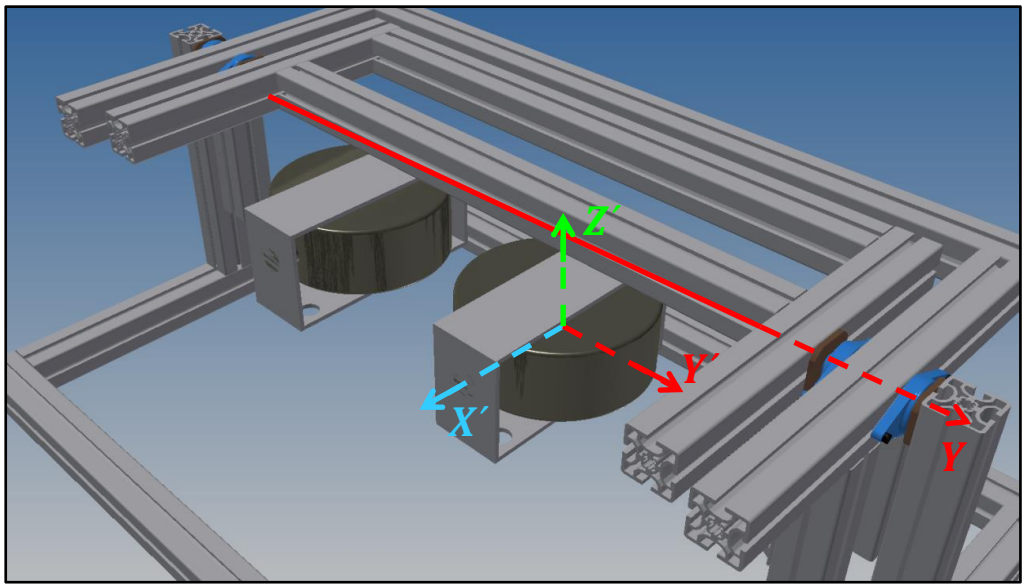
Pro snadnější orientaci v úhlových rychlostech lze dosadit z rovnice (2.0) a vyjde tvar

$$J\ddot{\vartheta} + (J_0 - J)\dot{\psi}^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) + J_0\sin(\vartheta)\dot{\psi}\dot{\varphi} = M_x, \tag{2.30}$$

$$J\ddot{\psi}\sin(\vartheta) + 2J\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos(\vartheta) - J[\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos(\vartheta)]\dot{\vartheta} = M_y, \tag{2.31}$$

$$J_0[\ddot{\psi}\cos(\vartheta) + \ddot{\varphi} - \dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin(\vartheta)\,] = M_{z.} \tag{2.32}$$

V případě zkoumaného stabilizačního systému probíhá vlastní rotace v počátečním stavu kolem osy Z', ve virtuálním modelu značené zelenou barvou.



Obrázek 15: Lokální souřadnicový systém gyroskopického stabilizátoru.

Precesní pohyb setrvačníku probíhá v jeho lokálním souřadnicovém systému kolem osy X'. Nutační rotace je v systému natočení gyroskopu v ose Y (značené červeně), což je přenesené buzení vnějšího rámu na vnitřní rám pomocí pneumatických pružin.

V případě gyroskopického stabilizátoru je moment hybnosti setrvačníků využíván pro zamezení rotace výstupního rámu kolem osy Y. Točivý moment, kterým působí setrvačníky proti natočení výstupního rámu, můžeme na základě předešlých rovnic určit pomocí vztahu

$$2J\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos(\vartheta) - J[\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos(\vartheta)]\dot{\vartheta} = M_{y.} \tag{2.31}$$

Pro představu o silových interakcích uvažujme pevné spojení mezi gyroskopy, namísto kinematické vazby ozubením. Tím bychom zamezili možné precesní rotaci. Dále předpokládejme výchozí polohu výstupního rámu a setrvačníků, kdy má výstupní rám nulovou výchylku a gyroskopy nulové precesní natočení. Tím se vztah (2.31) zjednoduší na tvar

$$J\dot{\psi}\dot{\vartheta} = M_y \tag{2.33}$$

a za J můžeme dosadit součet momentů setrvačností obou setrvačníků. Pokud bychom v takovém případě otáčeli výstupním rámem konstantní úhlovou rychlostí jednoho radiánu za sekundu, a setrvačníky by byly roztočený na otáčky $10\,000\ min^{-1}$, působil by proti smyslu rotace rámu točivý moment o velikosti $14\ Nm$.

3. Pneumatické pružiny

Silová interakce mezi vnějším a vnitřním rámem gyroskopického stabilizátoru je zprostředkována pomocí vlnovcových pružin. V reálném modelu jsou taktéž součástí aktivní regulace. Díky dynamickému řízení tlaku v pružinách je možné spolu s pneumatickým motorem aktivně působit proti změně vzájemné polohy vnějšího a vnitřního rámu. V matematickém modelu je moment vyvozený aktivní regulací tlaku v pružinách zahrnut do momentu pneumatického motoru. V obou případech má zatěžovací charakteristika těchto pružin zásadní vliv na odezvu systému vůči vnějšímu buzení. Pro nasimulování pneumatické pružiny je nutné znát tvar zatěžovací charakteristiky, tedy funkce ve tvaru $F=F(p0,x)$, kde $p0$ je parametrem počátečního přetlaku v pružině při zástavbové délce l_0 a x je proměnnou výchylkou od zástavbové délky.

3.1. Odvození zatěžovací charakteristiky

První úvahou a přípustným zjednodušením je předpoklad, že vzduch uvnitř pružiny je ideálním plynem a při stlačování pružiny dochází k isotermické kompresi. Lze tedy psát stavovou rovnici ideálního plynu pro vzduch uvnitř pružiny

$$p \cdot V = konstanta. \tag{3.1}$$

Síla jako funkce tlaku a efektivní plochy je dána vztahem

$$F(x) = p(x) \cdot S_{ef}(x), \tag{3.2}$$

kde tlak i plocha jsou funkcemi stlačení pružiny. Posledním zjednodušujícím předpokladem je, že efektivní plocha je lineární funkcí posuvu ve směru x

$$S_{ef} = S_0 + S_1 \cdot x. \tag{3.3}$$

Z těchto předpokladů zle již sestavit požadovanou zatěžovací charakteristiku.

Z rovnice (3.1) lze funkci tlaku vyjádřit pomocí počátečních hodnot tlaku a objemu v závislosti na proměnném objemu, který je jistě funkcí posuvu

$$p = \frac{p_0 \cdot V_0}{V(x)}. \tag{3.4}$$

Dále lze pro elementární stlačení pružiny napsat diferenciální vztah mezi objemem a efektivní plochou

$$dV = -S_{ef}(x)\, dx. \tag{3.5}$$

Ten lze integrovat za použití vhodných mezí, a po dosazení z rovnice (3.3)

$$\int_{V_0}^{V} dV = -\int_{0}^{x} (S_0 + S_1 x)\, dx. \tag{3.6}$$

Po integraci získáme funkci objemu pružiny v závislosti na jejím stlačení

$$V = V_0 - \left(S_0 x + \frac{1}{2} S_1 x^2\right). \tag{3.7}$$

Tento výsledek dosadíme do rovnice (3.4) a získáme tvar rovnice závislosti tlaku závislé jen na stlačení pružiny

$$p = \frac{p_0 \cdot V_0}{V_0 - \left(S_0 x + \frac{1}{2} S_1 x^2\right)}. \tag{3.8}$$

Tuto rovnici společně s rovnicí (3.3) dosadíme do vztahu (3.2) a získáme závislost síly, kterou pružina působí, jako funkci závislou na posuvu

$$F = \frac{p_0 \cdot V_0 \cdot (S_0 + S_1 \cdot x)}{V_0 - \left(S_0 x + \frac{1}{2} S_1 x^2\right)}. \tag{3.9}$$

Takto získaná rovnice bere v úvahu pouze síly způsobené stlačeným vzduchem uvnitř pružiny, bez vlivu okolního prostředí. Aby byla úvaha o silovém působení stlačeného vzduchu uvnitř pružiny správná, je nutné brát v potaz i sílu způsobenou atmosférickým tlakem vně vlnovcové pružiny.

Atmosférický tlak působí svým silovým účinkem proti smyslu síly vyvozené tlakem uvnitř pružiny

$$F = \left[\frac{p_0 \cdot V_0}{V_0 - \left(S_0 x + \frac{1}{2} S_1 x^2\right)} - p_{atm}\right] \cdot (S_0 + S_1 \cdot x). \tag{3.10}$$

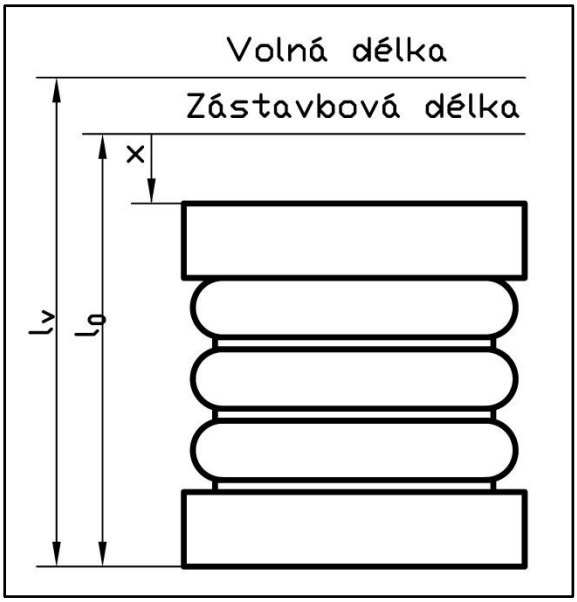
Pro přiblížení matematického modelu realitě je nutné brát v úvahu i tuhost způsobenou samotnou pryží. Vzhledem ke konstrukci pružiny a rozsahu očekávaných deformací je uvažována pryžová část, jako lineární pružina

$$F_K = k(l_V - l_0 + x). \tag{3.11}$$

Kde k je tuhostí vlnovce, l_V je volnou délkou pružiny (délka volně ložené pružiny při $p = p_{atm}$), l_0 zástavbovou délkou. Po sečtení rovnic (3.10) a (3.11) dostaneme konečný vztah pro sílu vyvolanou deformací pneumatické pružiny

$$F = \left[\frac{p_0 \cdot V_0}{V_0 - \left(S_0 x + \frac{1}{2} S_1 x^2\right)} - p_{atm}\right] \cdot (S_0 + S_1 \cdot x) + k(l_V - l_0 + x). \tag{3.12}$$

V této rovnici je na pravé straně šest koeficientů, parametr p_0 a jediná proměnná x (obrázek 16). Některé z koeficientů bude nutné určit, některé jsou již známé.



Obrázek 16: Zavedení posuvu x.

3.2. Určení koeficientů modelu pneumatické pružiny

Jedinými známými koeficienty v rovnici (3.12) jsou délky pružiny. Pro nalezení zbylých koeficientů je nutné provést experimentální měření. To bylo možné uskutečnit na zatěžovacím zařízení TIRAtest. Informace o vybavení jsou uvedeny v tabulce 6 a podmínky při měření jsou popsány v tabulce 7.

Tabulka 6: Potřebné vybavení pro měření.

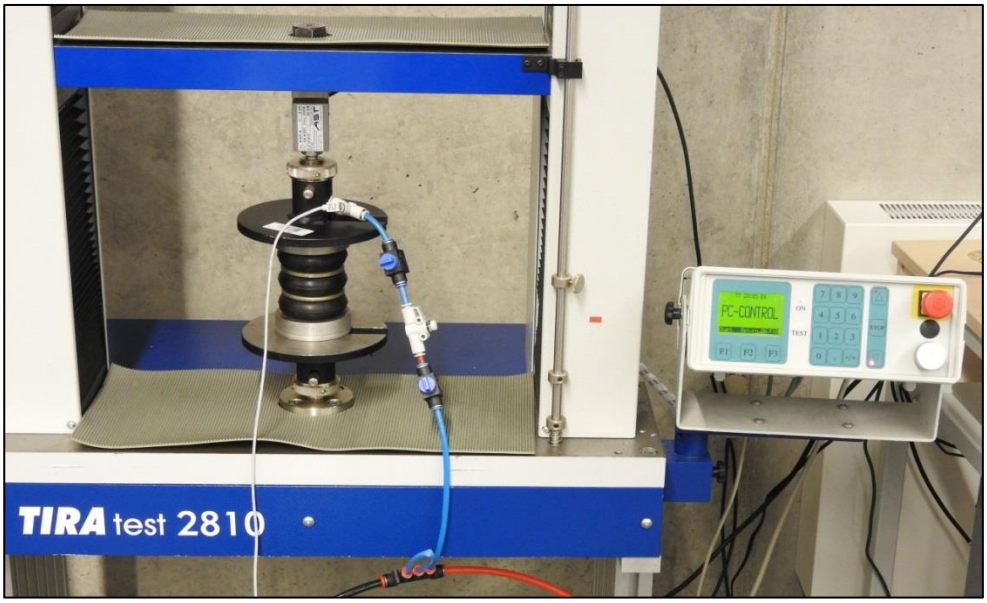
Pneumatická vlnovcová pružina	DUNLOP $2\ {}^{3}/_{4} \times 3$
Zatěžovacím zařízením	TIRAtest
Senzor tlaku v pružině	SMC PSE540 – R06 1
Měřící ústředna	DEWE 43
Program pro záznam dat z tlakového senzoru	DWSoft
Program pro záznam dat ze zatěžovacího zařízení	TIRAtest
Program pro zpracování dat	SciDaVis

Tabulka 7: Podmínky při měření.

Zástavbová délka pružiny l_0	109 [mm]
Volná délka pružiny l_V	115 [mm]
Teplota vzduchu v laboratoři	20,8 [°C]
Atmosférický tlak	100,9 [kPa]
Posun příčníku zatěžovacího zařízení	$\pm$ 10 [mm]
Normální normovaný tlak	98,692 [kPa]

3.2.1. Naměřená data

Záznam průběhu zatěžovacích charakteristik byl prováděn pro osm hodnot klidových tlaků (hodnota tlaku při nulové výchylce od zástavbové délky). Pro každý nastavený klidový tlak p_0 bylo provedeno celkem pět zatěžovacích cyklů na zařízení TIRAtest (obrázek 16). Při zanedbání hystereze pružiny vznikl po zpracování dat diagram 1.



Obrázek 16: Zatěžovací zařízení.

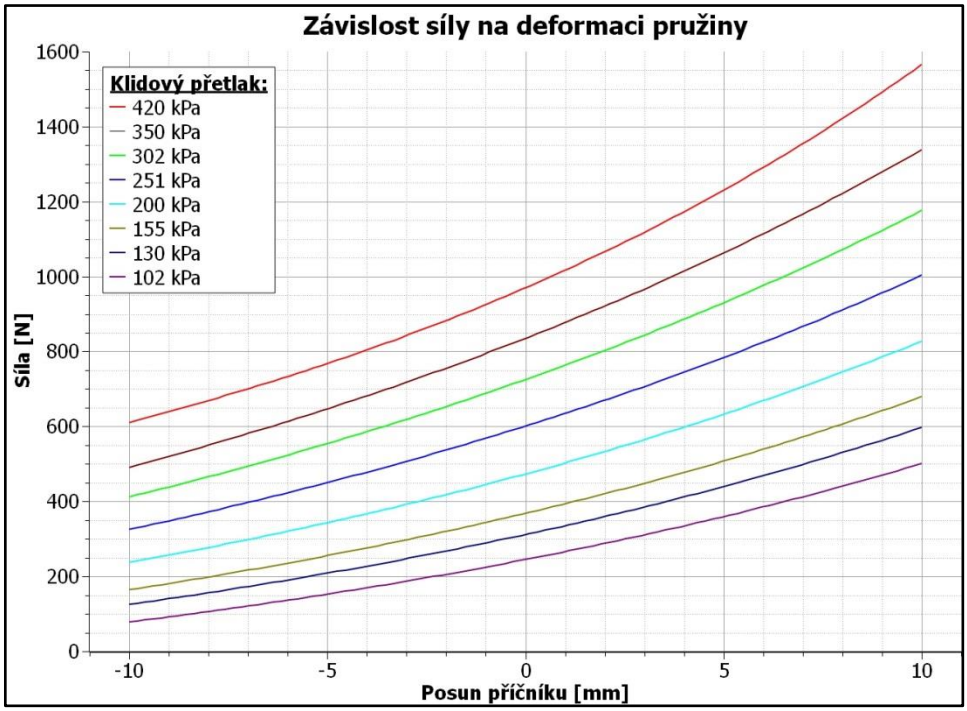


Diagram 1: Průběhy zatěžovacích charakteristik vlnovcové pružiny.

3.2.2. Výpočet koeficientů rovnice vlnovcové pružiny

Z naměřených hodnot a znalosti délek pneumatické pružiny lze snadno určit koeficienty S_0 a k. Je-li známá síla a tlak při nulové výchylce (tabulka 8), přejde vztah (3.12) po dosazení $x = 0$ do tvaru (3.13). V tomto zápisu je jedinou proměnnou tlak p_0 v první mocnině, a ten je znám. Po malé úpravě rovnice (3.13) je zřejmé, že se jedná o funkci přímky (3.14), která je lineární regresí naměřených hodnot (graf 1).

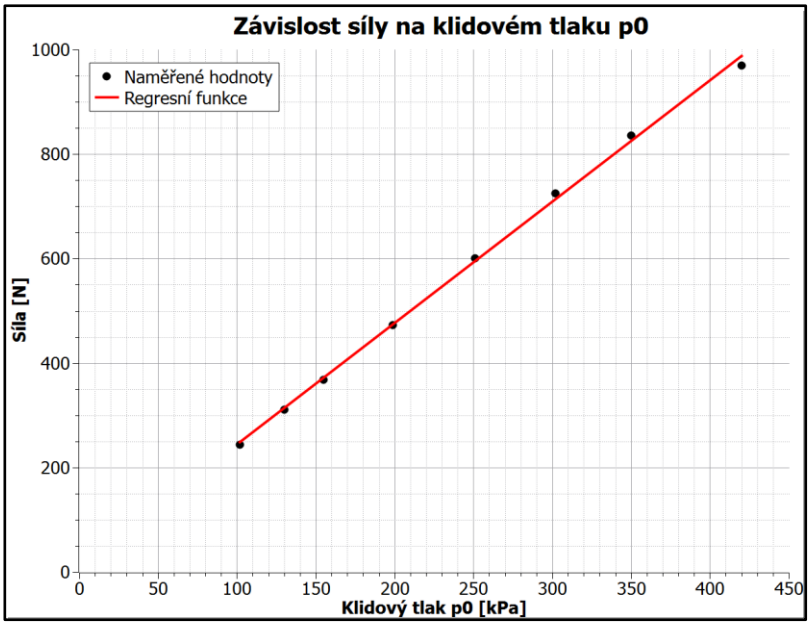
$$F = \left[\frac{p_0 \cdot V_0}{V_0 - \left(S_0 x + \frac{1}{2} S_1 x^2\right)} - p_{atm}\right] \cdot (S_0 + S_1 \cdot x) + k(l_V - l_0 + x) \tag{3.12}$$

$$F_{(x=0)} = (p_0 - p_{atm}) \cdot S_0 + k(l_V - l_0) \tag{3.13}$$

$$F_{(x=0)} = A\tilde{x} + B \tag{3.14}$$

Tabulka 8: Síly vyvozené pružinou při zástavbové délce a daném přetlaku v pružině.

Číslo měření	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Přetlak [kPa]	420	350	302	251	199	155	130	102
Síla [N]	970	835	725	601	473	368	311	244



Graf 1: Lineární regrese naměřených hodnot při $x = 0$.

Koeficient A v předpisu přímky je hledanou plochou S_0. Tuhost pryžové části pružiny získáme vyjádřením z koeficientu B

$$k = \frac{B}{(l_v - l_0)}. \tag{3.15}$$

Výsledky takto získaných konstant jsou v tabulce 9.

Tabulka 9: Hodnoty koeficientů rovnice vlnovcové pružiny.

Koeficient	A	B	k	S_0
Hodnota	$2{,}32 \cdot 10^{-3}$	$11{,}292$	$1882\ N/m$	$2{,}32 \cdot 10^{-3} m^2$

V tuto chvíli zbývá určit koeficient S_1 a koeficient V_0. Získání těchto konstant vyžaduje již sofistikovanější metodu.

3.2.3. Metoda nejmenších čtverců

Máme již známý funkcionál (3.12), tedy množinu všech funkcí odpovídajících různým hodnotám koeficientů V_0 a S_1. A hledáme právě takové hodnoty V_0 a S_1, pro které předpis (3.12) nabývá naměřených hodnot s co nejmenší odchylkou od skutečného průběhu zatěžovací charakteristiky, na intervalu $x\epsilon(-10\,;\,+10)\ mm$. Pro ideální případ, kdy by byly průběhy obou funkcí totožné, lze tento požadavek zapsat do tvaru

$$(F' - F)^2 = 0. \tag{3.16}$$

Kde F' je hodnota odvozené funkce (3.12), pro hodnotu posuvu x a F je naměřená hodnota síly na reálné pružině při stlačení x. Rozdíl těchto dvou funkcí můžeme považovat za funkci odchylky $T(x, V_0, S_1)$

$$(F'(x, V_0, S_1) - F(x))^2 = T(x, V_0, S_1). \tag{3.17}$$

A protože budeme hledat minimum této funkce, ve smyslu nejmenší odchylky v absolutní hodnotě od síly naměřené na reálné pružině, umocníme tento rozdíl na druhou. Po dosazení zvoleného posuvu x, se stane funkce odchylky závislá pouze na hledaných koeficientech V_0 a S_1. Ovšem pro získání průběhu zatěžovací

funkce, který kopíruje reálná data co nejvěrněji, je nutné brát v potaz odchylku těchto funkcí na celém intervalu posuvů. Takový výpočet však není prakticky možný, protože v tomto zápisu může x nabývat hodnot všech reálných čísel. Ovšem pro dosažení přijatelné přesnosti postačí x ve zvolených diskrétních hodnotách. Po této úvaze přejde rovnice (3.17) do tvaru

$$\sum_{Q=1}^{880} \left(F'(x_{100\cdot Q}, V_0, S_1) - F(x_{100\cdot Q})\right)^2 = T(V_0, S_1). \tag{3.18}$$

Při měření bylo získáno 88000 hodnot síly, posuvu a tlaku. Pro dosažení uspokojivé přesnosti postačí 880 hodnot z celého souboru. Minimum této funkce nalezneme pomocí parciálních derivací, dle hledaných parametrů

$$\frac{\partial T(V_0, S_1)}{\partial V_0} = 0, \qquad \frac{\partial T(V_0, S_1)}{\partial S_1} = 0. \tag{3.19}$$

Řešení takto rozsáhlé soustavy nelineárních rovnic je nutné hledat numericky. Praktická realizace této úlohy byla provedena v programu Maple, soubor s řešením je součástí přílohy této bakalářské práce. Shrnutí všech koeficientů pro funkci (3.12) je v tabulce 10. Konstanty V_0, S_1 mají na výsledný tvar funkce zásadní vliv, proto je nutné uvádět je na šest platných cifer.

Tabulka 10: Hodnoty koeficientů rovnice vlnovcové pružiny.

Koeficient	l_0	l_V	k	S_0
Hodnota	$109\ mm$	$115\ mm$	$1882\ N/m$	$2{,}32 \cdot 10^{-3} m^2$
Koeficient	S_1	V_0		
Hodnota	$0{,}09594\ m^2$	$1{,}81657 \cdot 10^{-4} m^3$		

3.2.4. Srovnání matematického modelu a skutečné pružiny

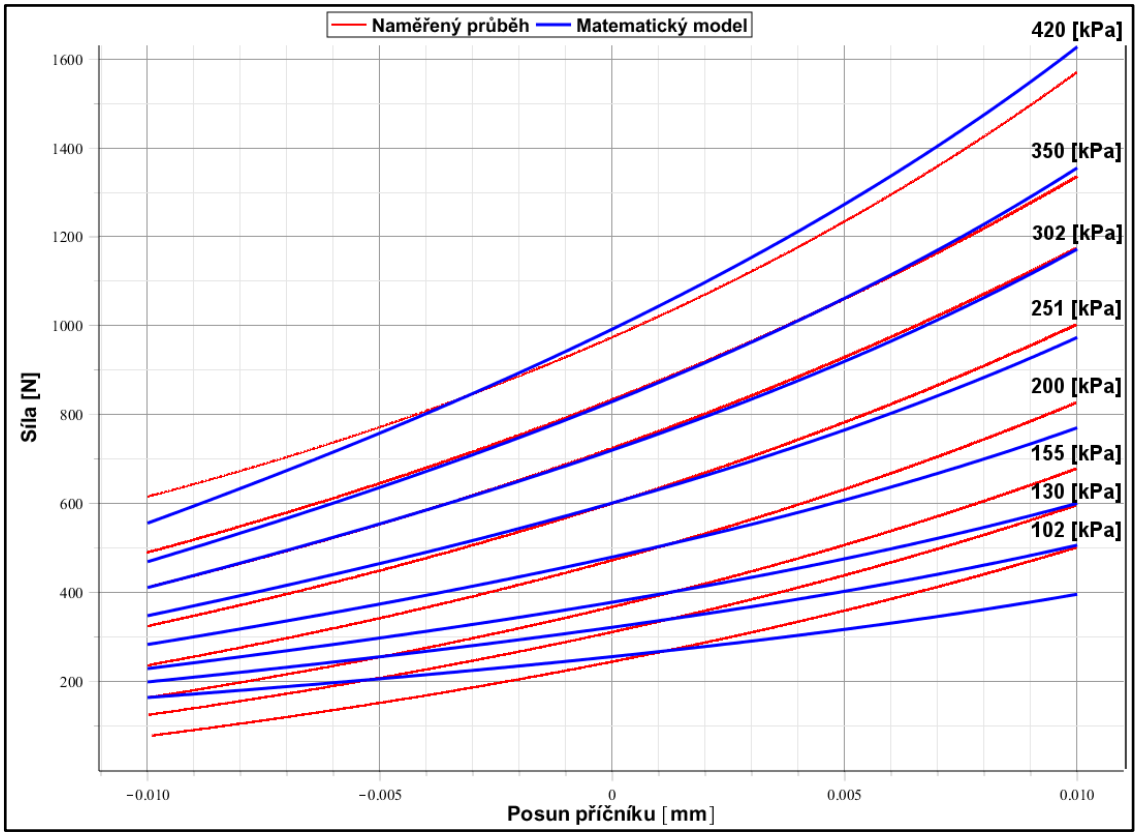


Diagram 2: Porovnání průběhu matematického modelu pružiny s reálnou pružinou.

Díky zavedeným zjednodušením během odvozování (izotermická komprese vzduchu uvnitř vlnovcové pružiny, změna efektivní plochy jako lineární funkce posuvu, lineární tuhost pryže) se pracovní oblast modelu zúžila na interval 250 kPa až 350 kPa. Při srovnání průběhů skutečné charakteristiky pružiny a matematického modelu se ukázalo, že ideální pracovní oblastí, pro provedení experimentu na skutečném gyroskopickém stabilizátoru, jsou přetlaky v pneumatické pružině blízké přetlaku 300 kPa.

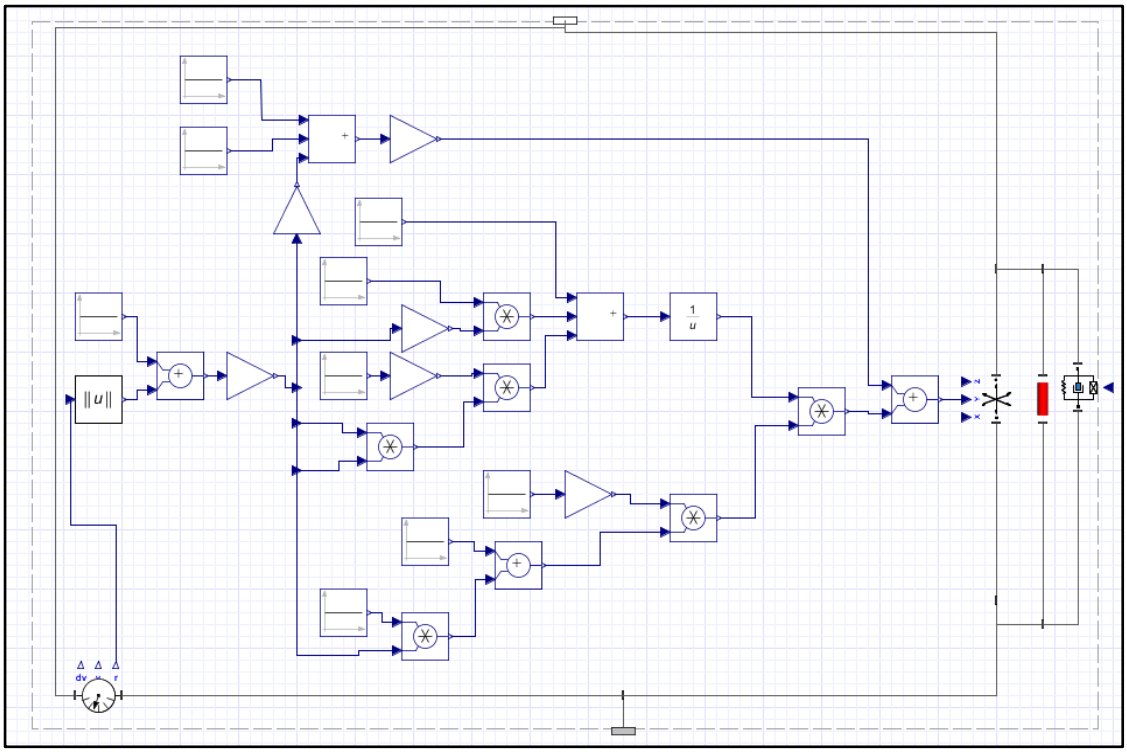
3.2.5. Simulační schéma pružiny v programu MapleSim

Obrázek 17:
Vlnovcová pružina.

V globálním zobrazení MBS modelu v prostředí MapleSim jsou vlnovcové pružiny reprezentovány submodelem obsaženým pod ikonou, která je zobrazena na obrázku 17. Tento submodel reprezentuje funkci zatěžovací charakteristiky rovnice (3.12), sestavenou mocí blokové algebry programu MapleSim (obrázek 18).

$$F = \left[\frac{p_0 \cdot V_0}{V_0 - \left(S_0 x + \frac{1}{2} S_1 x^2\right)} - p_{atm}\right] \cdot (S_0 + S_1 \cdot x) + k(l_V - l_0 + x) \tag{3.12}$$

Sestavení zmíněné funkce má počátek v levém dolním rohu, kde je vyhodnocována vzdálenost mezi vetknutými konci pružiny. Protože se jedná o trojrozměrný model, je nutné tento signál převést z vektorové veličiny na skalární, určením délky vektoru. Od této hodnoty je následně odečtena zástavbová délka

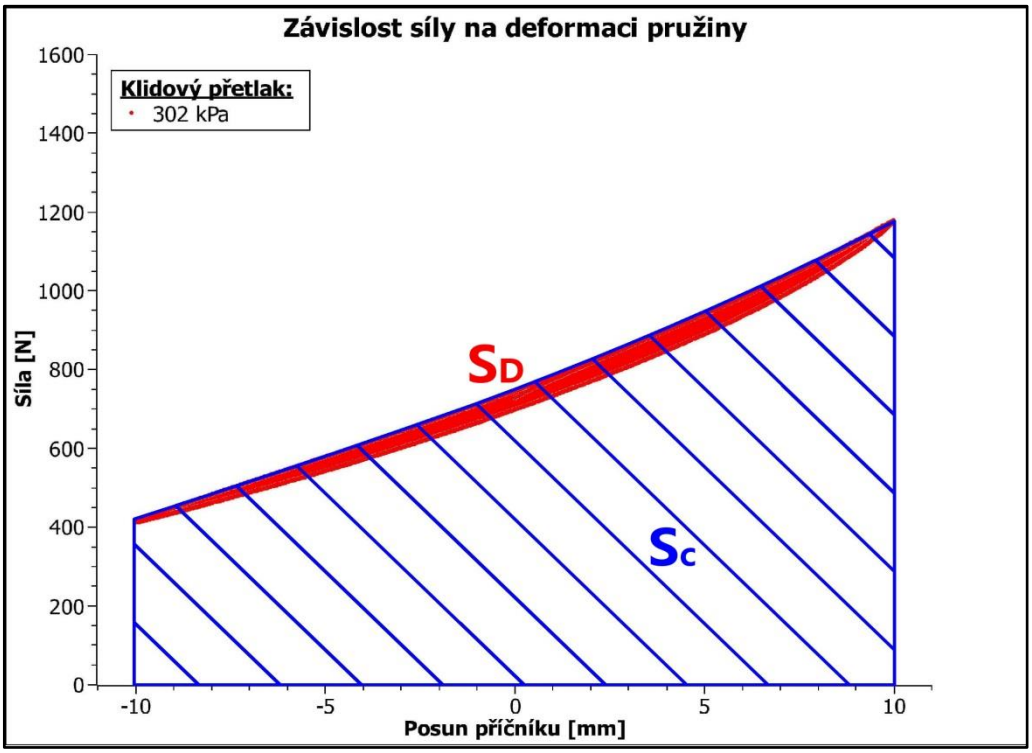


Obrázek 18: Blokové schéma modelu pružiny v programu MapleSim.

pružiny a signál převeden na metrické jednotky. Z toho bodu je rozváděn jako proměnná x do všech členů rovnice obsahujících tuto proměnnou. Tyto členy rovnice jsou realizovány pomocí vhodného propojení čtyř bloků: konstanta,

násobení konstantou, součet, násobení. Výstup takto sestavené funkce je napojen na blok generující sílu mezi dvěma body v modelovém prostoru, v přímé závislosti na vstupním signálu. Paralelně k těmto bodům je na pravé straně pracovní prostoru připojen blok realizující útlum pružiny.

Pro ověření možnosti zanedbání koeficientu tlumení byl vypočten podíl plochy S_D a plochy S_C (obrázek 19), nebo-li poměr disipované energie ku energii dodané. Disipovaná energie je vyjádřena obsahem plochy obrazce ohraničeného shora křivkou zatěžovací charakteristiky pružiny při stlačení a zdola křivkou zatěžovací charakteristiky při uvolňování pružiny. Celková energie dodaná pružině je rovna ploše pod zatěžovací křivkou při stlačování pružiny. Obsahy zmíněných



Obrázek 19: Disipovaná energie při pracovním cyklu pružiny.

ploch byly vypočítány pomocí integrálního počtu z aproximačních funkcí, kopírujících skutečné průběhy naměřených hodnot. Po stanovení obsahu ploch S_D a S_C byla po triviálním výpočtu

$$\theta = \frac{S_D}{S_C} = 0{,}037 \tag{3.20}$$

stanovena hodnota $\theta = 0{,}037$. Tato hodnota jen potvrzuje původní předpoklad možnosti zanedbání tlumení pružiny.

4. Přenosová charakteristika

Zkoumaná sestava gyroskopického stabilizátoru je systémem, který dynamicky reaguje na poruchu. Touto poruchou je natočení vnitřního rámu z rovnovážné polohy. Porucha vzniká přenesením výchylky vnějšího rámu na vnitřní rám pomocí vlnovcových pružin. Výchylka vnějšího rámu z rovnovážné polohy je tedy buzením systému.

4.1.1. Určení přenosové charakteristiky

Jedním ze způsobů jak lze popsat reakci systému na buzení je určení obrazového přenosu $G(j\omega)$. [2] Ten je definován jako poměr Fourierova obrazu výstupní veličiny $U(j\omega)$ k Fourierovu obrazu vstupní veličiny $Y(j\omega)$ při nulových počátečních podmínkách systému a vstupního signálu

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}. \tag{4.1}$$

z obrazového přenosu lze následně určit i přenosovou charakteristiku zpětnou Fourierovou transformací součinu obrazového přenosu a výstupní veličiny.

$$h(j\omega) = \mathcal{F}^{-1}[G(j\omega) \cdot U(j\omega)] \tag{4.2}$$

Pro analytické určení obrazového přenosu a tedy přenosové charakteristiky, je nutné znát úplný matematický popis celého systému. Určení obrazového přenosu analyticky, pomocí soustavy diferenciálních rovnic, není pro složitější systém, jakým je i zkoumaný gyroskopický stabilizátor, nejefektivnější metodou. Tou je určení přenosové charakteristiky měřením.

Při tomto měření se do systému v ustáleném stavu přivede vstupní signál $u(t)$, kterým je vychýlení vnějšího rámu. Hodnoty tohoto signálu a signálu výstupního $y(t)$, kterým je výchylka vnitřního rámu, jsou zaznamenávány v diskrétních okamžicích. Určení přenosové charakteristiky v diskrétním bodě i je pak dáno

$$H(i) = \frac{F[y(i)]}{F[u(i)]}. \tag{4.3}$$

5. Vlastní frekvence systému

Identifikace vlastních frekvencí systému a určení jeho optimální pracovní oblasti je založeno na analýze průběhu přenosové charakteristiky. To vyžaduje převod naměřených signálů z časové do frekvenční domény za využití diskrétní Fourierovi transformace.

5.1. Fourierova transformace

5.1.1. Fourierovy řady

Analyzování nebo aproximace netriviální periodické funkce $f(t)$ je nesnadnou úlohou. [3] Ovšem pokud tato funkce splňuje určité podmínky, lze ji sestavit ze součtu řady sinů a kosinů o různých parametrech, tedy ze součtu funkcí triviálních. Původní funkce ovšem musí být periodická, tedy ve tvaru rovnice

$$f(t) = f(t + k \cdot T), \tag{5.1}$$

kde t je proměnnou, T je periodou a $k = 0,\ \pm 1, \pm 2, \ldots$. Dále musí mít tato funkce a její derivace konečný počet bodů nespojitostí a konečné jednostranné limity. [4] Poté lze tuto funkci na intervalu $\langle n, n + 2\pi \rangle$ rozvinout v řadu

$$f'(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt\omega_0) + b_k \sin(kt\omega_0)], \tag{5.2}$$

kde k je přirozeným číslem a $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Symbol ω_0 je označován jako základní harmonická složka a jeho násobky $k\omega_0$, jako vyšší harmonické. Tato trigonometrická řada je Fourierovou řadou funkce $f(t)$ v intervalu $\langle n, n + 2\pi \rangle$.

Přičemž pro určení koeficientů této řady platí vztahy

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{n}^{n+2\pi} f(t)dt, \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{n}^{n+2\pi} f(t)\,cos(kt\omega)\,dt, \tag{5.3}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{n}^{n+2\pi} f(t)\sin(kt\omega)\,dt,$$

které vychází ze skutečnosti, že funkce sinus a kosinus jsou vzájemně ortogonální. (Dva vektory ve vektorovém prostoru jsou ortogonální, pokud jejich skalární součin je nulový.)

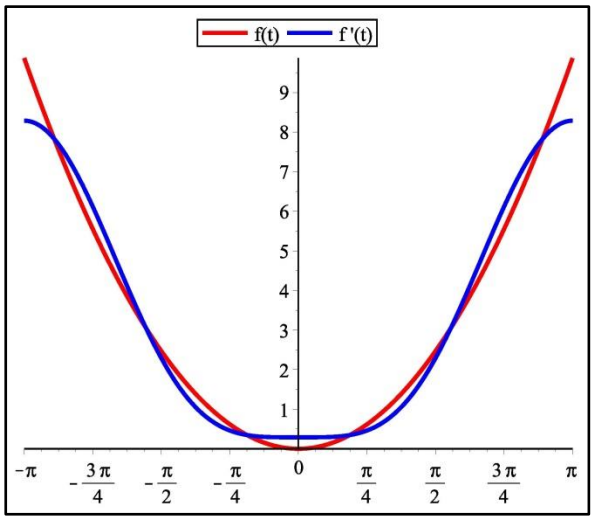
Pro demonstraci předešlých vztahů budeme aproximovat například funkci $f(t) = t^2$ na definičním oboru $< -\pi; \pi >$, který bude myšlenou periodou této funkce. Počet sčítaných dvojic trigonometrických funkcí zvolíme $k\epsilon < 0; 1; 2 >$, při $\omega_0 = 1$. V tomto určitém případě přejde obecný vztah (5.2) do konkrétní podoby

$$f'(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(t) + b_1\sin(t) + a_2\cos(2t) + b_2\sin(2t). \tag{5.4}$$

Po určení koeficientů a_k a b_k v tabulce 11, můžeme vidět přesnost shody Fourierovy řady a zvolené funkce pro dané k na grafu 2.

Tabulka 11: Koeficienty harmonických složek Fourierovi řady.

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3}$
$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(t)\,dt = -4$
$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(2t)\,dt = 1$
$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin(t)\,dt = 0$
$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin(2t)\,dt = 0$



Graf 2: Porovnání průběhu funkce f(t) a aproximační funkce odvozené z Fourierovi řady.

Rozvoj harmonických funkcí ve Fourieru řadu můžeme také zapsat ve spektrálním tvaru

$$f'(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{mk} \cdot \sin(k\omega_0 t + \vartheta), \tag{5.5}$$
$$B_{mk} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \qquad \vartheta = arctg\left(\frac{a_k}{b_k}\right).$$

Díky rozšíření argumentu funkce sinus o fázový posun ϑ, lze získat vhodný součet hodnot sinů a kosinů jen při použití funkce sinus. [4] Koeficienty a_k a b_k se určují zcela shodně jako v předchozím případě. Při využití Eulerova vzorce

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + jsin(\omega_0 t), \tag{5.6}$$

lze převést funkci $\sin(\omega_0 t)$ do součtu exponenciálních funkcí

$$2jsin(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t) + jsin(\omega_0 t) - \cos(-\omega_0 t) - jsin(-\omega_0 t), \tag{5.7}$$
$$2jsin(\omega_0 t) = e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t} \rightarrow \sin(\omega_0 t) = -\frac{1}{2}j\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right). \tag{5.8}$$

Tento vztah bude později využit pro rozklad $f'(t)$. Dále ještě zavedeme substituci za součin koeficientu B_{mk} a exponenciální funkce v rovnicích

$$R_{mk} = B_{mk} \cdot e^{j\vartheta k} = B_{mk}[\cos(\vartheta) + jsin(\vartheta)] = b_k + ja_k, \tag{5.9}$$
$$R_{mk}^* = B_{mk} \cdot e^{-j\vartheta k} = B_{mk}[\cos(\vartheta) - jsin(\vartheta)] = b_k - ja_k.$$

Po takto zavedených dílčích substitucích, lze již odvodit vztahy mezi trigonometrickým a komplexním tvarem Fourierovy řady

$$B_{mk} \cdot \sin(k\omega_0 t + \vartheta) = -\frac{1}{2}j \cdot B_{mk}\left(e^{j(k\omega_0 t + k\vartheta)} - e^{-j(k\omega_0 t + k\vartheta)}\right) \tag{5.10}$$

$$= -\frac{1}{2}j \cdot B_{mk}\left(e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{jk\vartheta} - e^{-jk\omega_0 t} \cdot e^{-jk\vartheta}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}j\left(R_{mk} \cdot e^{jk\omega_0 t} - R_{mk}^* \cdot e^{-jk\omega_0 t}\right) =$$

$$= \frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega_0 t} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_0 t} = A_k e^{jk\omega_0 t} + A_k^* e^{-jk\omega_0 t} =$$

$$= A_k e^{jk\omega_0 t} + A_{-k} e^{-jk\omega_0 t}$$

Výsledné výrazy využívající předchozí vztahy jsou uváděny jako definiční vzorce Fourierovy řady v komplexním tvaru

$$f'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \cdot e^{jk\omega_0 t}, \quad A_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt. \tag{5.11}$$

Obdobně jako koeficienty a_k a b_k v trigonometrickém tvaru, i zde je koeficient A_k činitelem, který násobí součet sinu a kosinu o příslušných argumentech pro dané k. O koeficientu $|A_k|$ lze tedy hovořit jako o hodnotě určující míru zastoupení sinu a kosinu o dané frekvenci ve Fourierově řadě.

5.1.2. Fourierova transformace

V předchozí kapitole byla ukázána aproximace funkce $\mathrm{f(t)} = \mathrm{t}^2$ na definičním oboru $< -\pi; \pi >$. Jelikož jednou z podmínek pro použití Fourierova rozvoje byla periodicita aproximované funkce, byl interval $< -\pi; \pi >$ považován za periodu této funkce. Toto tvrzení je samozřejmě zcela mylné a mimo zmíněný interval funkce $\mathrm{f'(t)}$ nabývá zcela odlišných hodnot než funkce původní.

Podmínku periodicity pro vztah (5.11) však lze pominout, pokud provedeme následující úvahu. Každá periodická funkce je složena z periodicky se opakujících úseků, které obsahují funkci neperiodickou. [5] Pokud tedy bude perioda T transformované periodické funkce nekonečně dlouhá, můžeme transformovat neperiodickou funkci uvnitř této periody. Aplikací zmíněné úvahy pro vztah určující koeficient A_k získáme následující odvození

$$A_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt \rightarrow T \cdot A_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt, \tag{5.12}$$

$$\left| T \rightarrow \infty, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0, \quad \Delta\omega_0 \rightarrow 0 \right|$$

$$\lim_{T\rightarrow\infty} T \cdot A_k = \lim_{T\rightarrow\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}.$$

Zavedením nekonečně dlouhé periody se amplitudy většiny harmonických složek dané koeficientem A_k, blíží nule, ale stejně tak rozdíly frekvencí mezi jednotlivými harmonickými složkami. Pro geometrickou představu lze tyto dvě veličiny charakterizovat jako strany infinitezimálního obdélníku. Jak je ale patrné z předcházejícího odvození, limitní součet těchto infinitezimálních dílků je finitní, a jeho výsledkem je funkce $F(j\omega)$. Ta je spojitou funkcí frekvence, které přiřazuje vždy právě jednu hodnotu míry jejího zastoupení v nekonečné Fourierově řadě. Výsledek $\mathcal{F}\{f(t)\}$ je označován jako přímá Fourierova transformace.

Stejnou úvahu aplikujeme i na výpočet samotné aproximační funkce $f'(t)$

$$f'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} (TA_k) \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot \frac{1}{T} = \tag{5.13}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (TA_k) \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (TA_k) \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0 =$$

$$\left| T \rightarrow \infty, \quad \Delta\omega_0 \rightarrow d\omega, \quad \sum \rightarrow \int \quad \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (TA_k) \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot \Delta\omega \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega = f(t),$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}.$$

Jak se dalo díky předchozím tvrzením předpokládat, limitní součet součinů míry výskytu A_k a součtu sinu a kosinu o daných frekvencích tvoří aproximační funkci $f'(t)$. Ovšem v limitním případě, kdy je součet tvořen nekonečným počtem sinů a kosinů o všech frekvencích, je odchylka aproximační funkce od průběhu původní funkce nekonečně malá. Proto už není třeba tuto funkci tvořenou nekonečnou řadou goniometrických funkcí nazývat aproximační, ale zle ji považovat za funkci původní. Operace $\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$ je označována jako zpětná Fourierova transformace.

5.1.3. Diskrétní Fourierova transformace

Výsledkem předešlé kapitoly byly vztahy pro provedení Fourierovy transformace na spojité funkci v definičním oboru $< -\infty; \infty >$. Pokud ovšem budeme chtít studovat kmitání reálné soustavy, tedy analyzovat funkci popisující výchylku soustavy od rovnovážné polohy v čase, nebudeme mít k dispozici explicitní vyjádření funkce $f(t)$, jako v předešlém případě. Její vyjádření tentokrát musíme získat záznamem hodnot z experimentálního měření. Tento fakt předznamenává skutečnost, že získaná funkce bude mít z obou stran omezený definiční obor délkou záznamu měření. A navíc záznam nebude spojitý, ale budou zapsány pouze hodnoty funkce v diskrétních časových okamžicích. Aby bylo možné provést transformaci takovéhoto signálu, je nutné původní vztah pro výpočet Fourierovy transformace spojitého signálu modifikovat. [6] Nehledáme tedy spojitou funkci $F(j\omega)$, ale pouze diskrétní hodnotu $F[n]$. Ta je hodnotou distribuční funkce frekvence v bodě n. V rovnici (5.12) tedy na levé straně provedeme záměnu symbolu funkce závislé na frekvenci za označení funkční hodnoty v diskrétním bodě frekvence o kmitočtu n. Na pravé straně se obdobně změní označení funkce amplitudy výchylky závislé na čase $f(t)$, na funkční hodnotu této funkce v bodě k. A po aplikaci ekvivalentních vztahů mezi diskrétními a spojitými veličinami v zápisu (5.14), je nutné ještě zaměnit symbol integrálu s neurčitými mezemi za symbol sumy s mezemi určitými.

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} dt \tag{5.14}$$

$$\frac{t}{T} <=> \frac{n \cdot k}{N} \tag{5.15}$$

$$F[n] = \sum_{k=1}^{N} f[k] \cdot e^{\frac{-jk2\pi n}{N}} \tag{5.16}$$

Kde k je sumační index reprezentující pořadí naměřené hodnoty v čase měření, $f[k]$ je naměřená hodnota výchylky, j je komplexní jednotkou, N reprezentuje celkový počet naměřených hodnot. Pro sudý počet vzorků, tedy počet vzorků odpovídající jedné periodě, je možné zavést n jako řadu $n = 0,1,2, \dots, N$.

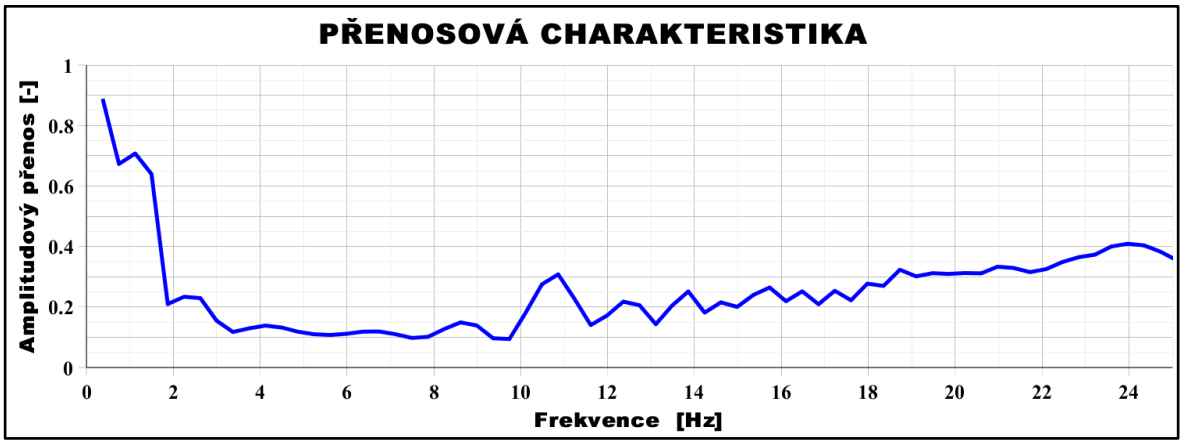
Díky stejnému principu je možné určit i zpětnou diskrétní Fourierovu transformaci

$$f[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F[n] \cdot e^{\frac{-jk2\pi n}{N}}. \tag{5.17}$$

6. Výsledky experimentu a simulace

6.1. Přenosová charakteristika matematického modelu

Na průběhu přenosové charakteristiky je vidět slabý efekt stabilizace v nízkých frekvencích. [7] To je způsobeno malým úhlovým zrychlením při těchto frekvencích a s ním spojených reakčních momentů, které působí proti smyslu buzení. Po celém rozsahu vyšetřovaných frekvencí nabývá průběh amplitudového přenosu hodnot menších než jedna. Systém tedy funguje jako stabilizátor v celém rozsahu vyšetřovaných frekvencí. Vzhledem k předpokládanému využití stabilizátoru byl rozsah zkoumaných frekvencí určen jako oblast do $25\ Hz$.



Graf 3: Přenosová charakteristika matematického modelu.

Ideální pracovní oblastí je pásmo frekvencí od $0\ Hz$ do $18\ Hz$, kde je amplitudový přenos většinu průběhu méně jak třetinový. Z průběhu amplitudového přenosu je patrné, že ve vyšetřovaném rozsahu kmitočtů se vyskytují vlastní frekvence systému v oblasti $0{,}5\ Hz$ a $11\ Hz$.

6.2. Přenosová charakteristika reálného modelu

Měření přenosové charakteristiky na reálném modelu bylo provedeno ve třech režimech. První měření bylo uskutečněno při nulových otáčkách gyroskopů a bez zpětnovazební regulace. Tento režim je v legendě značen jako „$VYPNUTÝ$“. Druhým režimem, značeným jako „$PASIVNÍ$“, bylo měření při pracovních otáčkách gyroskopů, bez zpětnovazební regulace. V tomto režimu systém funguje již jako stabilizátor, jak je vidět na amplitudovém přenosu, který nabývá hodnot výrazně nižších než jedna. Třetí měření v režimu „$AKTIVNÍ$“, bylo realizováno při pracovních otáčkách gyroskopů a aktivní zpětnovazební regulaci. Ta posouvá průběh přenosové charakteristiky k nižším hodnotám a zejména v nízkých frekvencích výrazně zlepšuje schopnost stabilizace systému. Zpětnovazební regulace rozšiřuje pracovní oblast stabilizátoru z intervalu $(2; 16)\ Hz$ na $(0; 20)\ Hz$.

Díky omezeným možnostem buzení je rozsah vyšetřovaných frekvencí $25\ Hz$. Ovšem s ohledem na praktické využití stabilizátoru je tento rozsah zcela dostačující.

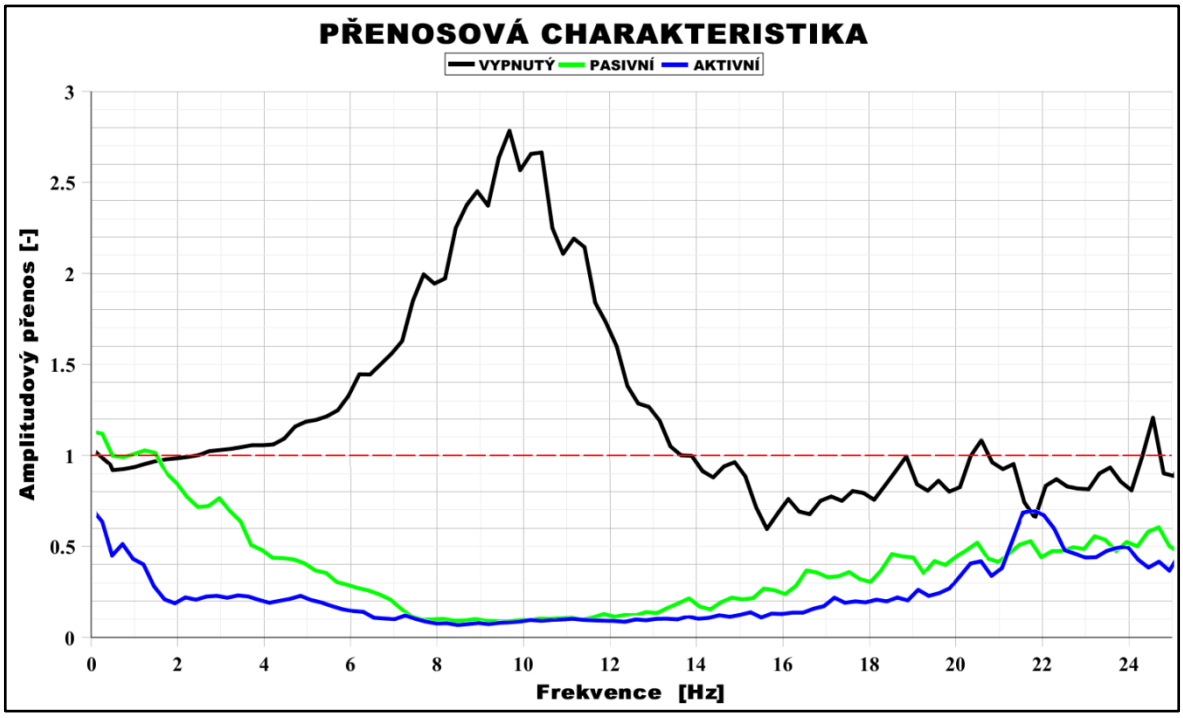
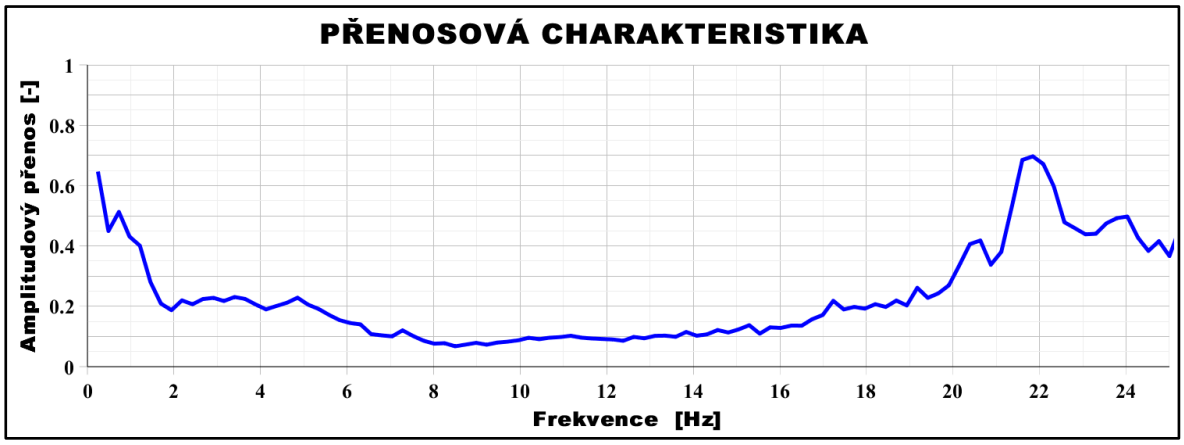


Diagram 3: Porovnání přenosových charakteristik reálného modelu.

6.3. Optimální pracovní oblast a vlastní frekvence

V pracovním režimu „$AKTIVNÍ$“ je celý průběh přenosové charakteristiky pod hodnotou jedna, systém tedy funguje jako stabilizátor na celém rozsahu vyšetřovaných frekvencí, což je pro konkrétní aplikace zcela zásadní. Za optimální pracovní oblast lze označit frekvenční rozsah od $0\,Hz$ do $20\,Hz$, kde je amplitudový přenos většinu průběhu méně jak třetinový.



Graf 4: Přenosová charakteristika reálného modelu.

Z pohledu na průběh přenosové charakteristiky jsou oblasti okolo $1\,Hz$ a $22\,Hz$ oblastmi výskytu vlastních frekvencí.

Relativně slabý efekt stabilizace v nízkých frekvencích má stejnou příčinu jako v matematickém modelu, tedy malé úhlové zrychlení vnitřního rámu a s ním spojený reakční moment. Druhou oblastní, kde lze předpokládat výskyt vlastních frekvencí bylo pásmo okolo $22\,Hz$. V těchto frekvencích ovšem již nezáleží na principu fungování stabilizátoru, ale na jeho konstrukci, která není dokonale tuhá.

6.4. Porovnání výsledků simulace a experimentu

Při vývoji matematického modelu bylo zjištěno, že největší vliv na přesnost modelu má vedle rozměrů systému zejména určení momentu hybnosti gyroskopů

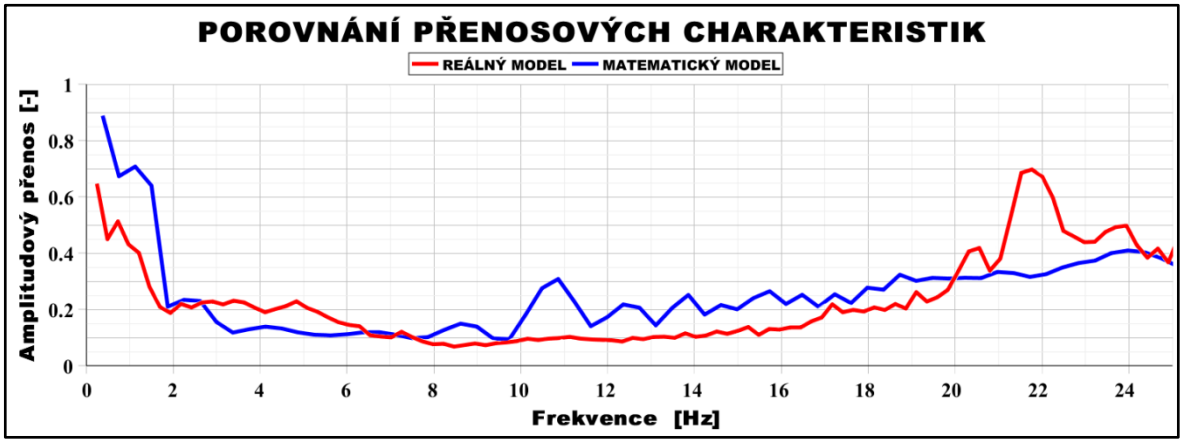


Diagram 6: Přenosová charakteristika matematického modelu a reálného modelu.

a matematický popis vlnovcových pružin. Tyto veličiny je možné poměrně snadno změřit a dosáhnout tak shody modelů v rozsahu amplitud. Na výsledný tvar přenosové charakteristiky mají ale vliv i hůře kvantifikovatelné veličiny, jako pasivní odpory, elastičnost rámů, montážní vůle, dopravní zpoždění zpětnovazební regulace. U nich lze předpokládat zapříčinění neshody mezi průběhy. I přesto zle hodnotit dosaženou shodu mezi matematickým modelem a ověřovacím modelem jako velmi dobrou.

7. Závěr

V programu MapleSim 2015 byl vytvořen matematický model gyroskopického stabilizátoru na základě rozměrů a hmotových charakteristik ověřovacího modelu. V matematickém modelu je nasimulováno chování vlnovcových pružin použitých v ověřovacím modelu. Tato simulace je založena na odvozené aproximační funkci, která vychází ze zjednodušeného fyzikálního modelu a zpracování experimentálních dat. Pro hledání koeficientů aproximační funkce byl vytvořen program v prostředí Maple. Pomocí matematického modelu gyroskopického stabilizátoru byla určena optimální pracovní oblast stabilizátoru, jako pásmo frekvencí $(0; 18)\,Hz$. Za oblasti výskytu vlastních frekvencí byly označeny kmitočty $0{,}5\,Hz$ a $11\,Hz$. Po ověření správnosti matematického modelu experimentem, byla zjištěna velmi dobrá shoda mezi matematickým modelem a ověřovacím modelem (6.4 Porovnání výsledků simulace a experimentu, diagram 6).

Před provedením experimentu na ověřovacím modelu bylo nutné provést kompletaci pneumatických prvků a doplnění snímačů polohy s jejich následnou kalibrací. Dále bylo nutné provést změny v řídícím algoritmu v prostředí LabVIEW, pro zajištění funkčnosti systému.

Pro zpracování dat z ověřovacího experimentu a simulace byly naprogramovány algoritmy v prostředí Maple. Na základě těchto dat byla ověřena shoda výsledků zjednodušeného matematického modelu a ověřovacího modelu.

Prototyp gyroskopického stabilizátoru nabízí mnoho možností jak tuto práci dále rozšířit. Jednou z nich je vytvoření komplexnějšího matematického modelu, který obsáhne problematiku pasivních odporů společně s elasticitou konstrukce. Společně s komplexnějším matematickým modelem je možné vytvořit sofistikovanější algoritmus řízení zpětnovazební regulace modelu reálného se zlepšením stabilizace zejména při nízkých frekvencích. Ovšem nejzajímavější možností je dle mého názoru návrh prakticky využitelné konstrukce gyroskopického stabilizátoru.

8. Použité zdroje

[1] CHARVÁT, Jaroslav. Mechanika. Liberec: Vysoká škola strojní a textilní v Liberci, 1978.

[2] TŮMA, Jiří. *Zpracování signálů získaných z mechanických systémů užitím FFT*. Vyd 2. Praha: Sdělovací technika, 1997. ISBN 8090193617.

[3] OLEHLA, Miroslav, Slavomír NĚMEČEK a Ivan ŠVARC. *Automatické řízení* [CD-ROM]. Vyd. 2. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2011. ISBN 9788073727321.

[4] BROKEŠOVÁ, Johana. *TEORETICKÉ ZÁKLADY FOURIEROVY SPEKTRÁLNÍ ANALÝZY*. Praha, 2008.

[5] MÁŠA, Pavel. Fourierovy řady. In: MÁŠA, Pavel. *Elektrické obvody 2* [online]. 2009, s. 26 [cit. 2016-05-13]. Dostupné z: http://amber.feld.cvut.cz/vyu/eo2/files/lectures/P1.pdf

[6] MÁŠA, Pavel. Fourierova transformace. In: MÁŠA, Pavel. *Elektrické obvody 2* [online]. 2009, s. 26 [cit. 2016-05-13]. Dostupné z: http://amber.feld.cvut.cz/vyu/eo2/files/lectures/P1.pdf

[7] SLAVÍK, Jaromír, Vladimír STEJSKAL a Vladimír ZEMAN. *Základy dynamiky strojů*. Praha: České vysoké učení technické, 1997, 319 s. ISBN 8001016226.

9. Seznam použitého software

[1] Microsoft Corporation: Microsoft Office Word 2010
[2] Maple 2015
[3] MapleSim 2015
[4] SciDAVis 1.D009
[5] Autodesk Inventor Professional 2015
[6] AutoCAD 2016

10. Seznam příloh

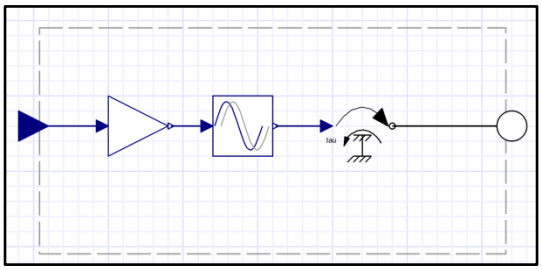
Příloha A: Simulační schémata použitých subbloků v MBS modelu

- Obr. A.1 - pneumatický motor
- Obr. A.2 - budící signál
- Obr. A.3 - statický rám
- Obr. A.4 - snímač výchylky
- Obr. A.5 - vnější rám
- Obr. A.6 - vnitřní rám
- Obr. A.7 - gyroskopy
- Obr. A.8 - vlnovcová pružina

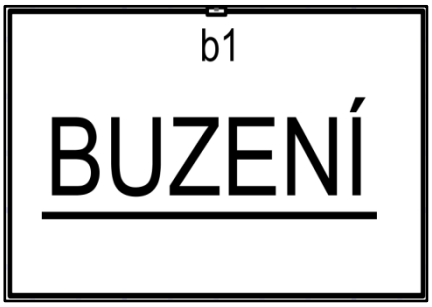
Datové CD obsahující:

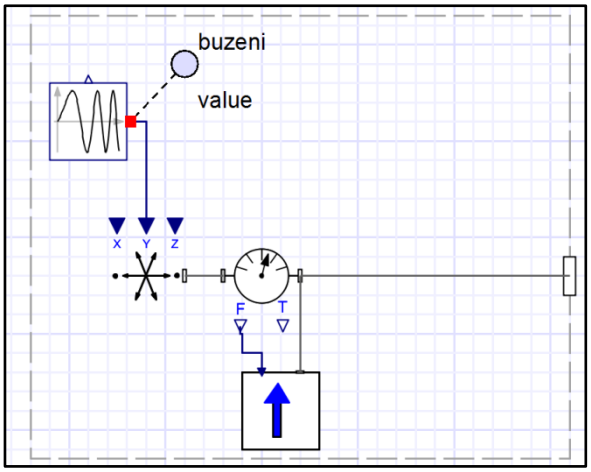
- Text práce ve formátu PDF
- Matematický model gyroskopického stabilizátoru v prostředí MapleSim
- Program pro vytvoření přenosové charakteristiky z naměřených signálů v prostředí Maple
- Program pro výpočet koeficientů funkcionálu metodou nejmenších čtverců v prostředí Maple

Příloha A: Simulační schémata použitých subbloků v MBS modelu

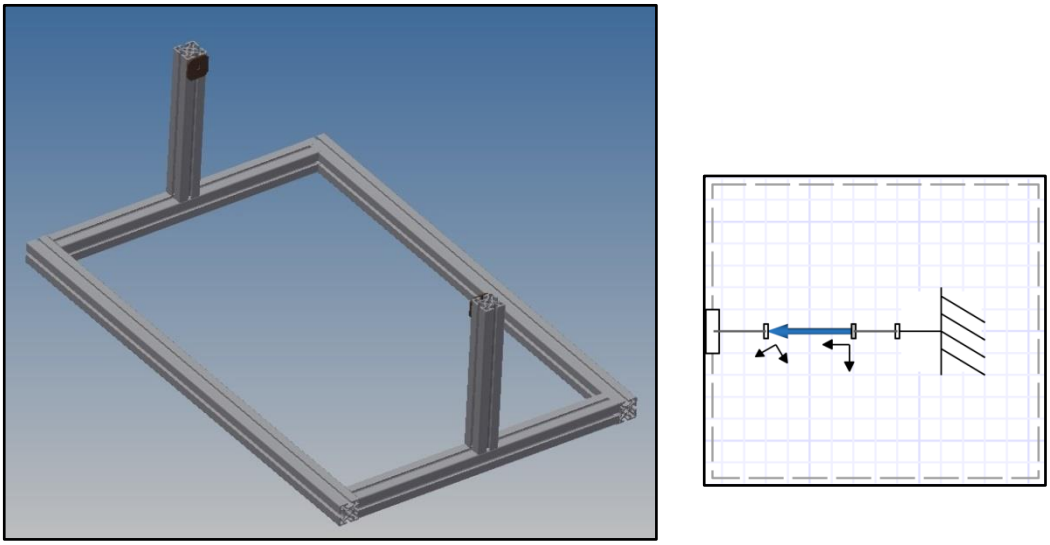


Obrázek A.1: Grafické znázornění subbloku pneumatického motoru (vlevo), a jeho simulační schéma (vpravo).

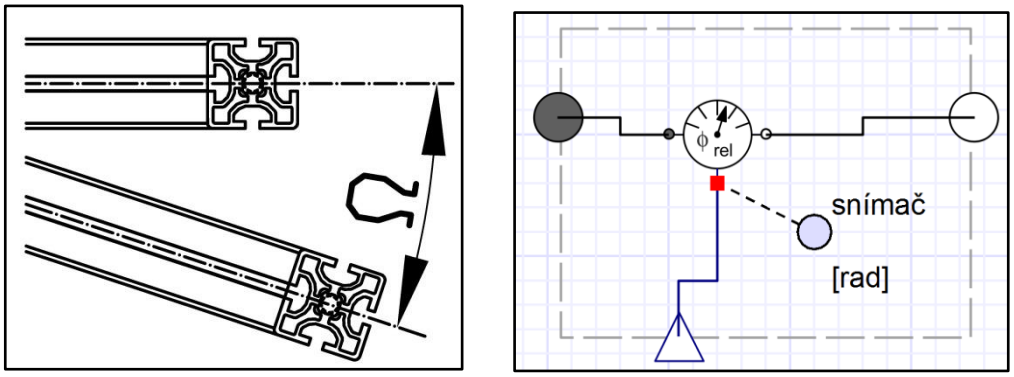




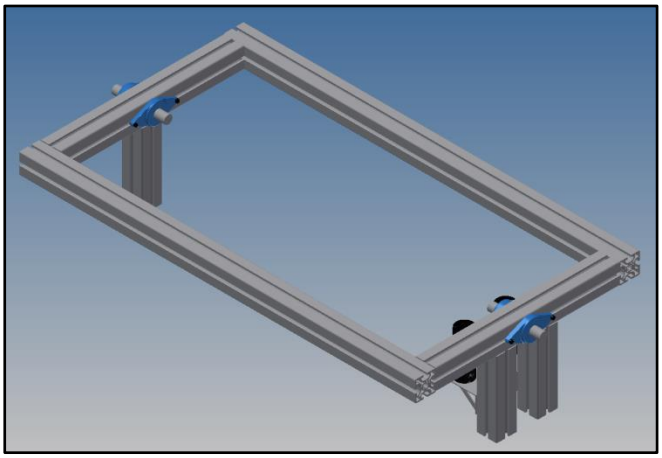
Obrázek A.2: Grafické znázornění subbloku budícího signálu (vlevo), a jeho simulační schéma (vpravo).

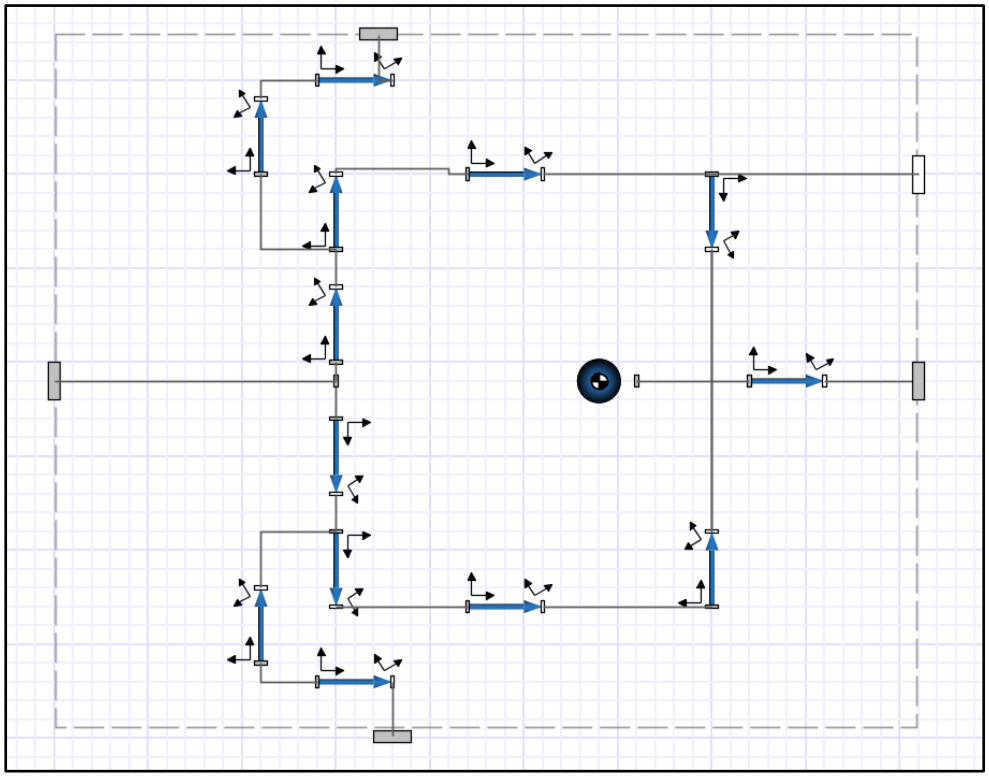


Obrázek A.3: Grafické znázornění subbloku statického rámu (vlevo), a jeho simulační schéma (vpravo).

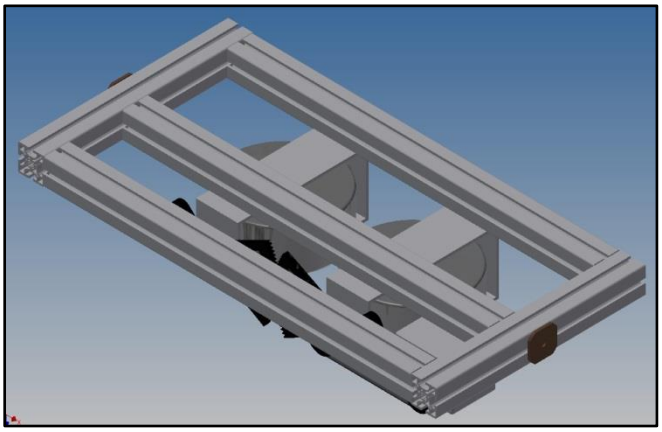


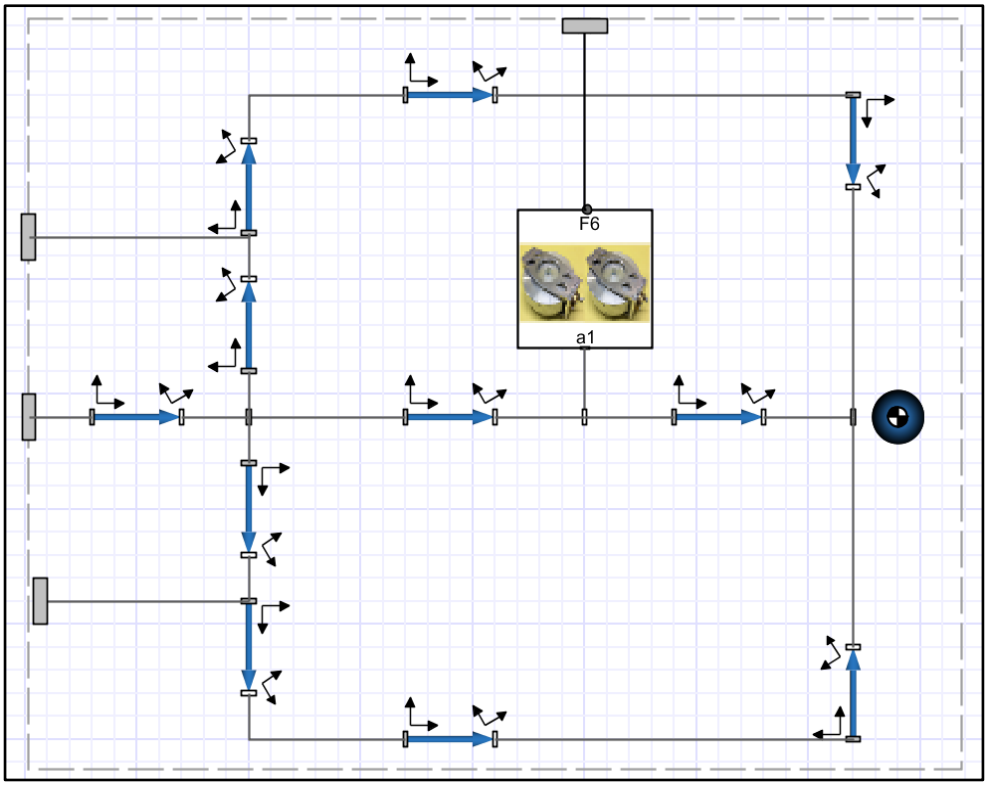
Obrázek A.4: Grafické znázornění subbloku snímače výchylky (vlevo), a jeho simulační schéma (vpravo).



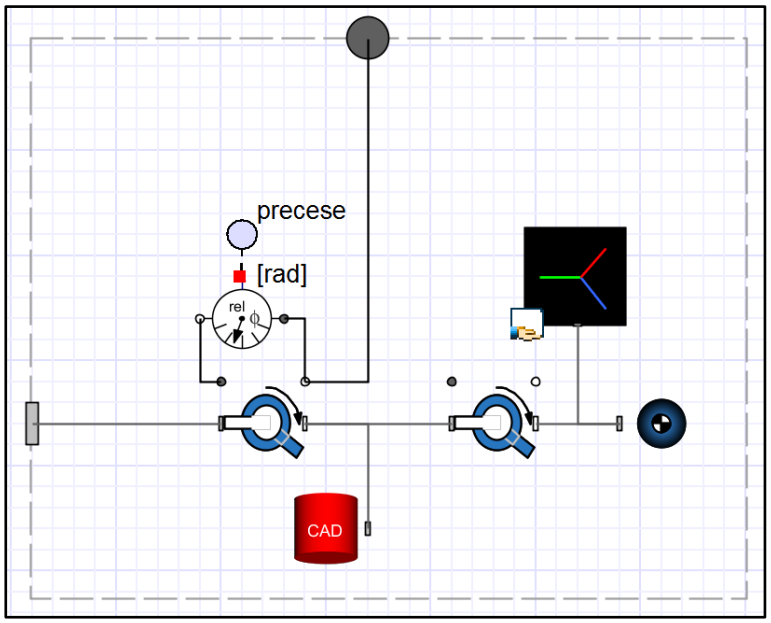


Obrázek A.5: Grafické znázornění subbloku vnějšího rámu (nahoře), a jeho simulační schéma (dole).

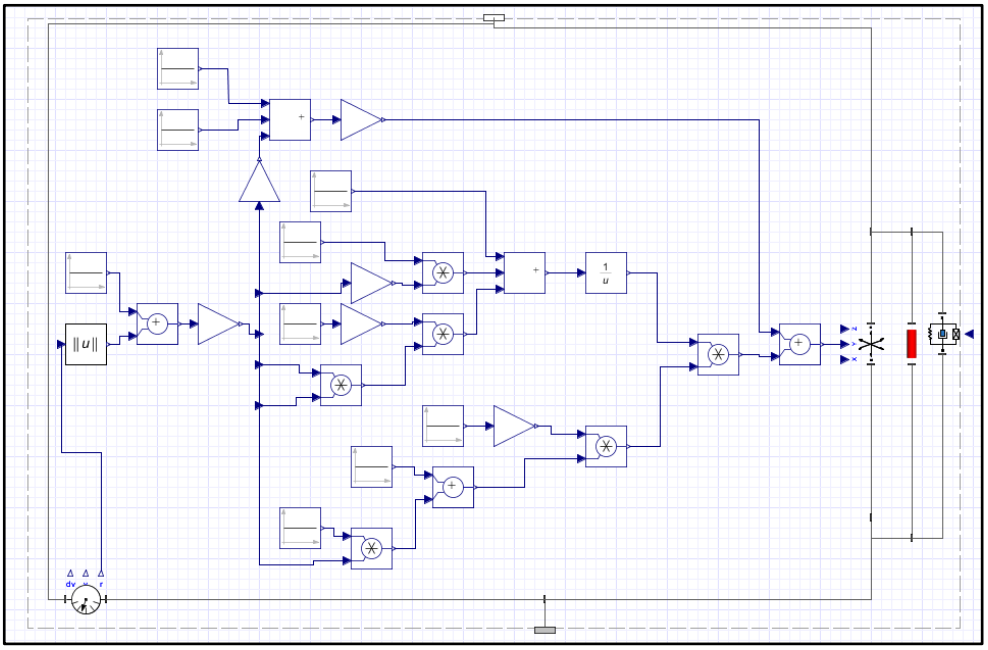




Obrázek A.6: Grafické znázornění subbloku vnitřního rámu (nahoře), a jeho simulační schéma (dole).



Obrázek A.7: Grafické znázornění subbloku gyroskopů (nahoře), a jeho simulační schéma (dole).



Obrázek A.8: Grafické znázornění subbloku vlnovcové pružiny (nahoře), a jeho simulační schéma (dole).