

Vysoká škola: **VŠST Liberec**

Fakulta: **strojní**

Katedra: **technické kybernetiky**

Školní rok: **1981/82**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

pro **s. Vojtěch M a l ý**

obor **automatizované systémy řízení výrobních procesů
ve strojírenství**

Vedoucí katedry Vám ve smyslu nařízení vlády ČSSR č. 90/1980 Sb., o státních závěrečných zkouškách a státních rigorózních zkouškách, určuje tuto diplomovou práci:

Název tématu: **Adaptivní regulátor využívající pro hledání optima
metody největšího spádu**

Zásady pro vypracování:

- 1) Prostudovat literaturu podle seznamu.
- 2) Navrhnout adaptivní regulátor pro řízení lineární dynamické soustavy využívající pro hledání optima metody největšího spádu.
- 3) Vypracovat program pro počítač RPP 16S pro ověření vlastností navrženého adaptivního regulátoru.
- 4) Zhodnotit dosažené výsledky.

**VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ
Ústřední knihovna
LIBEREC 1, STUDENTSKÁ 8
PSČ 461 17**

Autorské právo se řídí směrnicemi
MŠK pro státní záv. zkoušky č.j. 31
727/62-III/2 ze dne 13. července
1962-Věstník MŠK XVIII, sešit 24 ze
dne 31. 8. 1962 § 17 aut. z. č. 115/53 Sb.

V 172/82 S

KTK/ASR-15

Rozsah grafických prací:

Rozsah průvodní zprávy:

50 stran

Seznam odborné literatury:

1. Hanuš, B., Balda, M.: Základy technické kybernetiky, I. a II. část; skripta VŠST Liberec a ČVUT Praha; Liberec, Praha 1980.
2. Hanuš, B.: Optimalizace systému řízení; skripta VŠST Liberec, 1978.
3. Astrem, K.I.: Introduction to Stochastic Control Theory; Academic Press, 1970.
4. Hanuš, B.: Základy teorie lineárního impulsního regulačního obvodu, I. díl; skripta VŠST Liberec, 1972.
5. Hanuš, B., Janček, B., Kracík, V.: Adaptivní regulace - několik poznámek. Výzkumná zpráva KTK-0075; VŠST Liberec 1981.
6. Hanuš, B., Janček, B., Kracík, V.: Adaptivní regulace s průběžnou identifikací, poznámky č.2. Výzkumná zpráva KTK-0077, VŠST Liberec 1981.
7. Trdla, J.: Analýza algoritmu adaptivního regulátoru, jehož částí je rekurzivní metoda identifikace. Diplomová práce, VŠST Liberec 1981.

Vedoucí diplomové práce:

Ing. Bedřich Janček

Datum zadání diplomové práce:

15.9.1981

Termín odevzdání diplomové práce:

4.6.1982



Alaxin
Doc. Ing. Ján Alaxin, CSc.

Vedoucí katedry

Stříž
Doc. RNDr. Bohuslav Stříž, CSc.

Děkan

v Liberci dne 10.9. 81
..... 10

VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ V LIBERCI
nositelka Řádu práce
Fakulta strojní
Obor 23-40-8

Katedra technické kybernetiky

ADAPTIVNÍ REGULÁTOR VYUŽÍVAJÍCÍ PRO HLEDÁNÍ MINIMA
METODY NEJVĚTŠÍHO SPÁDU

Vojtěch Malý

Vedoucí práce: Ing. Bedřich Janeček
Katedra technické kybernetiky
VŠST Liberec

KTK ASŘ SF - 031

Rozsah práce a příloh

Počet stran: 54

Počet příloh a tabulek: 3+4

Počet obrázků: 6

Počet výkresů: 0

Počet modelů nebo jiných příloh: 0

Místopříseřně prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval
samostatně s použitím uvedené literatury.

V Liberci dne 5.6. 1982

Vojtěch Maš

OBSAH

Seznam použitých značek	5
1. Úvod	6
1.1. Uvedení řešené problematiky	6
2. Základní předpoklady identifikace	8
3. Diskrétní regulátor, který reguluje s minimálním rozptylem lineární dynamický systém se vstupujícími stochastickými poruchami	10
4. Identifikace lineárních dynamických soustav metodou největšího spádu	13
5. Volba příkladů	19
5.1. Příklad č. 1	19
5.2. Příklad č. 2	21
6. Stabilita základního regulačního obvodu	23
6.1. Stabilita základního regulačního obvodu se soustavou I. řádu	26
6.2. Stabilita základního regulačního obvodu se soustavou II. řádu	30
7. Metoda identifikace soustav pomocí klasické metody nejmenších čtverců	32
8. Popis programu	35
9. Porovnání algoritmu obou srovnávaných metod	39
9.1. Adaptační cyklus	39
9.2. Rychlost konvergence	42
9.3. Rychlost výpočtu 1 adaptačního kroku	42
9.4. Posouzení z hlediska rozptylu a střední hodnoty odhadu	43
9.5. Hodnocení přesnosti konvergence	43
10. Závěr	52
Seznam literatury	53
Seznam příloh	54

SEZNAM POUŽITÝCH ZNAČEK

- $Y /t/$ - spojitá funkce času, výstup z regulované soustavy v čase t
- $Y /p/$ - Laplaceův obraz spojité výstupní veličiny z regulované soustavy
- $Y /z/$ - obraz spojité výstupní veličiny v Z-transformaci
- $Y /j/$ - výstupní veličina z regulované soustavy v čase J
- $U /t/$ - vstup do regulované soustavy v čase t
- $U /p/$ - Laplaceův obraz spojité vstupní veličiny do regulované soustavy
- $U /j/$ - vstupní veličina do regulované soustavy v čase j
- D - porucha
- t - spojitý čas
- j - diskrétní čas
- ΔT - perioda vzorkování
- a_1, a_2 - koeficienty diferenční rovnice regulované soustavy
- b_1, b_2
- $Y_m /j/$ - výstupní veličina z modelu regulované soustavy
- $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2$ - odhady koeficientů a_1, a_2, b_1, b_2 v k -tém adaptačním kroku
- $e/j/$ - odchylka výstupní veličiny z regulované soustavy od výstupní veličiny z modelu regulované soustavy v čase j
- σ^2 - rozptyl
- $E \hat{a}_1$ atd - střední hodnota odhadů koeficientů

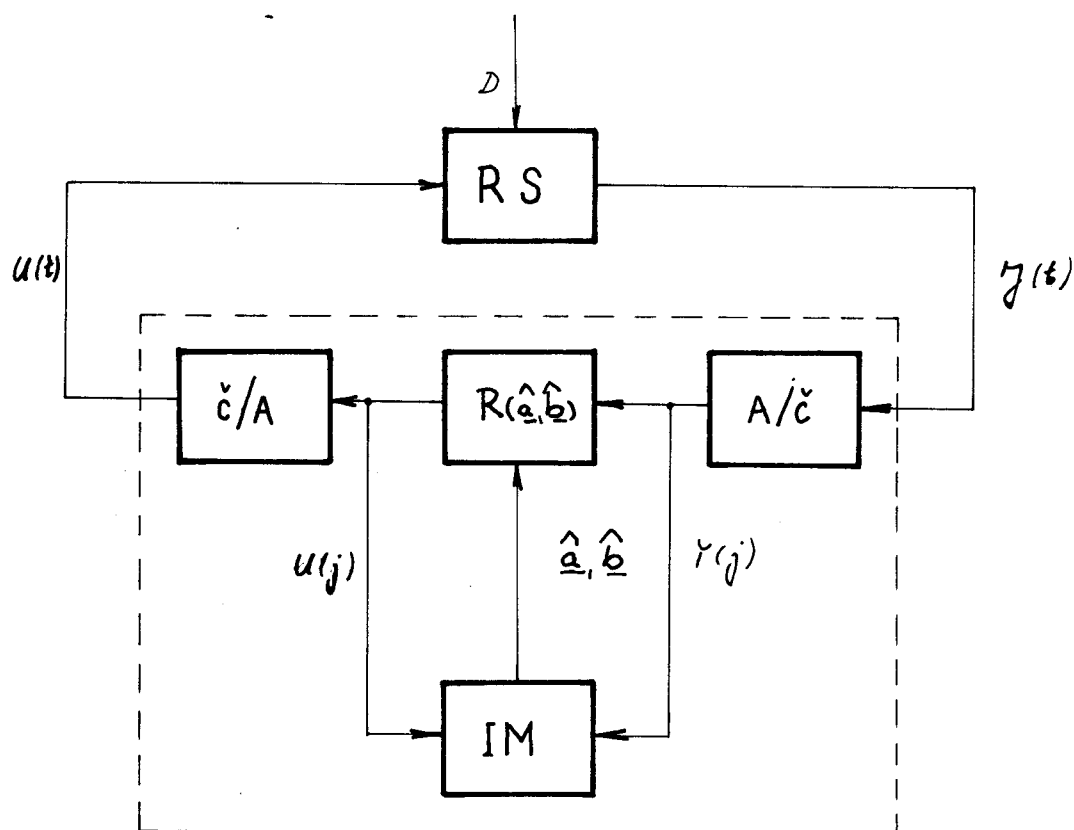
1. ÚVOD

V současnosti zaznamenáváme prudký rozvoj techniky, která pomáhá člověku odstraňovat namáhavou a jednotvárnou práci ve všech sférách života lidské společnosti. Technický rozvoj se týká především elektroniky a mikroelektroniky, důsledná elektronizace a automatizace zavedená v hlavních odvětvích národního hospodářství má za následek velké zvýšení společenské produktivity práce, jakož i úsporu surovin a zdrojů energie, čímž se mohutně podílí na zvýšení životní úrovně pracujících. Automatizace sebou přináší i optimální řízení technologických procesů. V optimálním řízení se v současné době začínají spojité regulátory nahrazovat číslicovými. Tato náhrada je způsobena potřebou přenášet velké množství informací a jejich ukládání a zpracování. Příčinou vyřazování spojitých regulátorů není však jen úroveň techniky, ale hlavně možnost nasazení číslicového počítače pro řízení, které dnes představuje nejdokonalější způsob řízení procesů, neboť dovoluje velmi pružně měnit řídicí algoritmy i strukturu řídicích obvodů v závislosti na změnách kritérií řízení, vyvolanými vnějšími okolnostmi. U spojitých regulátorů se po dobu regulace mění struktura regulátoru jen zřídka. Tyto spojité regulátory lze dnes bez problémů nahradit regulátory číslicovými.

V případě číslicové regulace se často jedná o regulátory adaptivní. Ty mají oproti klasickým regulátorům tu výhodu, že dokáží dosáhnout optimálního stavu systému při neúplné nebo malé počáteční znalosti systému, nebo při měnících se podmínkách činnosti systému.

1.1 UVEDENÍ ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY

V práci budeme rozebírat problém adaptivní regulace s průběžnou identifikací regulované soustavy, jejíž princip je znázorněn na obr. 1.



Obr.1 - Adaptivní regulační obvod

RS - - regulovaná soustava

$R/\hat{a}, \hat{b}$ - regulátor, jehož parametry se mění v závislosti na odhadech parametrů regulované soustavy

IM - - identifikace pomocí zvoleného modelu regulované soustavy

$\hat{a}, \hat{b}$ - vektory odhadů koeficientů diferenční rovnice regulované soustavy

$$\hat{a} / k / = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 / k / \\ \hat{a}_2 / k / \\ \vdots \\ \hat{a}_n / k / \end{bmatrix}$$

$$\hat{b} / k / = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 / k / \\ \hat{b}_2 / k / \\ \vdots \\ \hat{b}_m / k / \end{bmatrix}$$

A/Č - - analogo-číslicový převodník

Č/A - - číslicovo-analogový převodník

D - - stochastická porucha

[] - - adaptivní regulátor

Z obr.1 je vidět, že spojitá výstupní veličina regulované soustavy $Y /t/$ je v A/Č převodníku převedena na diskrétní signál $Y /j/$, který vstupuje do regulátoru R a také do identifikačního bloku IM. Regulátor vypočte akční signál $U /j/$, který vstupuje přes Č/A převodník, kde se změní na spojitou akční veličinu $U /t/$.

Současně $U /j/$ vstupuje do bloku IM, kde se provede identifikace výpočtem odhadů parametrů diferenční rovnice regulované soustavy, a to za pomoci všech signálů $U /j/$ a $Y /j/$, které do bloku IM vstoupily. Použitím vypočtených odhadů parametrů diferenční rovnice regulované soustavy se provede přestavení koeficientů diferenční rovnice regulátoru.

Tato práce navrhuje algoritmus adaptivní regulace soustavy s jednou výstupní a jednou vstupní veličinou. Regulátor je navržen podle kritéria minimálního rozptylu regulované veličiny. Vždy po jistém počtu regulačních kroků je provedena identifikace soustavy metodou největšího spádu. Práce dále porovná účinnost této gradientní metody s klasickou metodou nejmenších čtverců.

2. ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY IDENTIFIKACE

Mějme danou regulovanou soustavu, jejíž chování je popsáno diferenční rovnicí v tzv. regresním tvaru.

$$y(j) = a_1 \cdot y(j-1) + a_2 \cdot y(j-2) + b_1 \cdot u(j-1) + b_2 \cdot u(j-2) + d(j) \quad (1)$$

kde

$y /j/$ - je výstupní veličina regulované soustavy v čase j

j - je diskrétní čas /ozn. též pouze čas/

$u /j/$ - je vstupní veličina regulované soustavy v čase j

$d /j/$ - je posloupnost náhodných veličin

Model regulované soustavy uvažujeme ve tvaru

$$y_m(j) = \hat{a}_1(k) \cdot y(j-1) + \hat{a}_2(k) \cdot y(j-2) + \hat{b}_1(k) \cdot u(j-1) + \hat{b}_2(k) \quad (2)$$

kde

$y_m(j)$ - je výstupní veličina modelu regulované soustavy

$\hat{a}_1(k)$, $\hat{a}_2(k)$, $\hat{b}_1(k)$, $\hat{b}_2(k)$ jsou odhady koeficientů

a_1 , a_2 , b_1 , b_2 regulované soustavy v k -tém kroku adaptace.

Hodnota výstupní veličiny modelu regulované soustavy je predikcí výstupu skutečné regulované soustavy

$$y_m(j) = y(j) - e(j)$$

kde $e(j)$ je chyba predikce.

Jestliže platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{i=-N}^{+N} d_i = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{i=-N}^{+N} d_i \cdot d_{(i+j)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } j \neq 0 \\ \sigma^2 & \text{pro } j = 0 \end{cases} \quad (4)$$

pak nazvěme náhodnou veličinu d diskretním bílým šumem. Rovnicí regulátoru, který reguluje s minimálním rozptylem veličinu $y(j)$

tj.

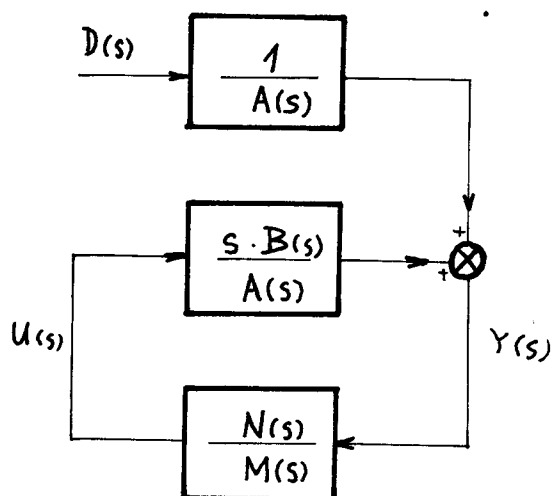
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{i=-N}^{+N} y_i^2 \rightarrow \min. \quad (5)$$

získáme z podmínky

$$y(j) = d(j) \quad (6)$$

3. DISKRÉTNÍ REGULÁTOR, KTERÝ REGULUJE S MINIMÁLNÍM ROZPTYLEM LINEÁRNÍ DYNAMICKÝ SYSTÉM SE VSTUPUJÍCÍMI STOCHASTICKÝMI PORUCHAMI

V této kapitole si odvodíme rovnici diskrétního regulátoru, který reguluje výstupní veličinu y soustavy, viz obr. 2



obr. 2 - Diskrétní regulační obvod

kde

$D /s/$ - obraz poruchy v Z - transformaci, kde $Z^{-1} = s$

$Y /s/$ - obraz výstupní veličiny regulované soustavy v Z - transformaci, kde $Z^{-1} = s$

$U /s/$ - obraz vstupní veličiny regulované soustavy v Z - transformaci kde $Z^{-1} = s$

Nechť jsou polynomy:

$$A(s) = 1 - a_1 s - a_2 s^2$$

$$B(s) = b_1 s$$

$$M(s) = 1 + m_1 s + m_2 s^2 + \dots$$

$$N(s) = n_0 + n_1 s + n_2 s^2 + \dots$$

(7)

V regulačním obvodu dle obr. 2 pak platí

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{D(s)} &= \frac{\frac{1}{A(s)}}{1 - \frac{B(s)}{A(s)} \cdot \frac{N(s)}{M(s)}} = \frac{\frac{1}{1 - a_1 s - a_2 s^2}}{1 - \frac{b_1 s}{1 - a_1 s - a_2 s^2} \cdot \frac{N(s)}{M(s)}} = \\ &= \frac{M(s)}{M(s) - s[a_1 M(s) - b_1 N(s)] - s^2 a_2 M(s)} = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

kde $q_0 = 1$

Dále tedy

$$Y(j) = q_0 d(j) + q_1 d(j-1) + q_2 d(j-2) + \dots \quad (9)$$

kde $d(j)$ je posloupnost nekorelovaných stejně rozdělených veličin, pro něž platí podmínky (3) a (4).

Regulátor, který reguluje s minimálním rozptylem, má minimalizovat funkcionál

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y(j)^2$$

po dosazení (9)

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} d(j-i) \cdot q_i \right)^2$$

Po rozepsání

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left\{ q_0^2 \cdot \sum_{j=0}^{n-1} d_{(j)}^2 + q_1^2 \cdot \sum_{j=0}^{n-1} d_{(j)}^2 + q_2^2 \cdot \sum_{j=0}^{n-1} d_{(j)}^2 + \dots \right\} =$$

$$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} q_j \right) \cdot \sigma^2 = \sigma^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} q_j \quad (10)$$

Tento regulátor, který minimalizuje rozptyl regulované veličiny

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} Y_{(j)}^2$$

minimalizuje též sumu kvadrátů váhové funkce uzavřeného regulačního obvodu

$$J = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} q_j^2 \right) \cdot \sigma^2 = \sigma^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} q_j^2$$

abychom uvedené kritérium mohli minimalizovat musí být konečná, tzn.

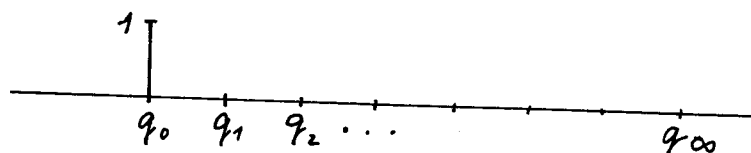
$$\sum_{j=0}^{\infty} q_j^2 = \text{konst.} < \infty$$

z čehož vyplývá

$$\lim_{j \rightarrow \infty} q_j = 0 \quad (11)$$

Tj. hodnoty váhové funkce uzavřeného regulačního obvodu musí konvergovat k nule.

V (8) tedy máme řadu impulsů /čísel/ vyjadřující průběh váhové funkce, viz obr. 3



obr. 3 - Průběh váhové funkce po zásahu zadaného regulátoru

$$q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots = Q(s)$$

$$Q(0) = q_0 + q_1 \cdot 0 + q_2 \cdot 0 + \dots$$

$$q_0 = 1$$

(12)

Z (8)

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = 1 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = D(s)$$

Dostaneme tedy podmínku

$$y(j) = d(j)$$

(pohled 12)

4. IDENTIFIKACE LINEÁRNÍCH DYNAMICKÝCH SOUSTAV METODOU NEJVĚTŠÍHO SPÁDU

Pro potřeby sestavení programu pro číslicový počítač byla provedena změna indexování diferenčních rovnic (1),(2)

Uvažujeme regulovanou soustavu popsanou diferenční rovnicí

$$y(j) = a_1 y(j-m) + a_2 y(j-m+1) + \dots + a_n y(j-1) + \\ + b_1 u(j-m) + b_2 u(j-m+1) + \dots + b_m u(j-1) + d(j) \quad (13)$$

a její model

$$\hat{y}_m(j) = \hat{a}_1(k) \cdot y(j-m) + \hat{a}_2(k) \cdot y(j-m+1) + \dots + \hat{a}_n(k) \cdot y(j-1) + \\ + \hat{b}_1(k) \cdot u(j-m) + \hat{b}_2(k) \cdot u(j-m+1) + \dots + \hat{b}_m(k) \cdot u(j-1), \quad (14)$$

kde k označuje k - tý krok adaptace,
 $\hat{b}_m / 0 /$ značí, že odhad koeficientu b_m jsme provedli jen jednou na počátku adaptace.

Pro kratší zápis dále uvažujme, že

$$m = 2$$

$$n = 2$$

Takže regulovaná soustava a její model budou popisovány následujícími diferenčními rovnicemi.

$$y(j) = a_1 y(j-2) + a_2 y(j-1) + b_1 u(j-2) + b_2 u(j-1), \quad (15)$$

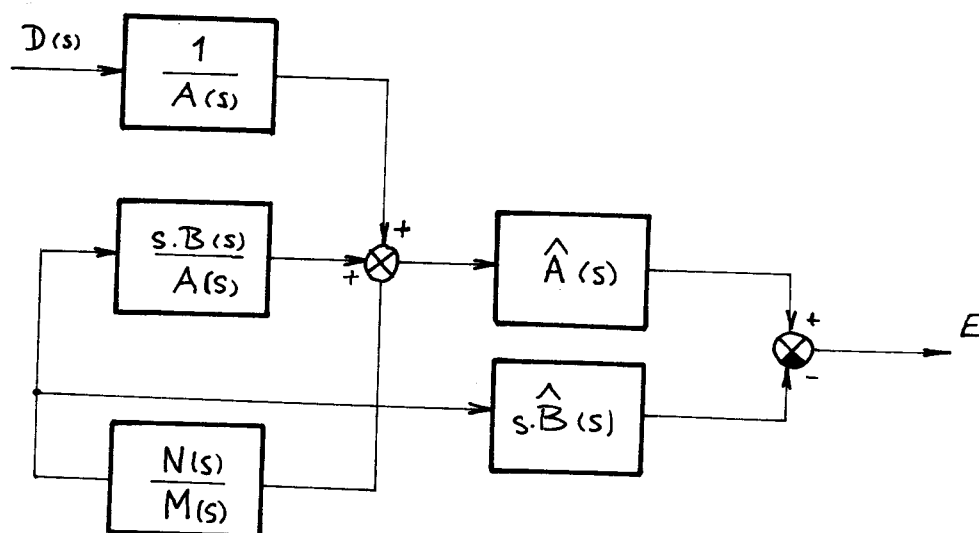
$$y_m(j) = \hat{a}_1(k) \cdot y(j-2) + \hat{a}_2 \cdot y(j-1) + \hat{b}_1(k) \cdot u(j-2) + \hat{b}_2(k) \cdot u(j-1) \quad (16)$$

Regulátor, který na základě znalosti modelu regulované soustavy reguluje veličinu $y(j)$ s minimálním rozptylem / viz (5), (6) a kapitola 3. / za podmínek (3), (4), je popsán vztahem

$$u(j) = -\frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2(0)} \cdot y(j-1) - \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} \cdot y(j) - \frac{\hat{b}_1(k)}{\hat{b}_2(0)} \cdot u(j-1) \quad (17)$$

Identifikace modelu regulované soustavy je provedena nalezením minima funkcionálu kvadrátů odchylek výstupní veličiny regulované soustavy a modelu /tedy kvadrátů chyb predikce $e(j)$ /

Praktické získání chyby predikce znázorňuje níže uvedený obr. 3



obr. 3

Minimalizujeme tedy kritérium

$$J(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^2(j,k) \quad (18)$$

kde

$$e(j,k) = y(j) - \hat{a}_1(k) \cdot y(j-2) - \hat{a}_2(k) \cdot y(j-1) - \hat{b}_1(k) \cdot u(j-2) - \hat{b}_2(k) \cdot u(j-1)$$

$$e(j,k) = y(j) - y_m(j)$$

Jeden adaptační krok provádíme za n regulačních kroků, kde za n volíme velké číslo /teoreticky $n \rightarrow \infty$ /. V každém adaptačním kroku provedeme minimalizaci kritéria J / k / metodou největšího spádu.

Poznámka: OBECNÝ POSTUP OPTIMALIZAČNÍ METODY NEJVĚTŠÍHO SPÁDU

Uvažujme, že při $k+1$ - ním optimalizačním kroku vycházíme z vektoru $\hat{\underline{a}}$ / k /.

Určíme hodnotu gradientu kritéria J v $\hat{\underline{a}}$ / k / . Následující hodnotu $\hat{\underline{a}}$ / $k+1$ / vypočteme podle vztahu

$$\hat{\underline{a}}(k+1) = \hat{\underline{a}}(k) - \lambda \cdot \nabla J(\hat{\underline{a}}(k)) \quad (19)$$

kde λ je koeficient určující velikost kroku ve směru gradientu. Koeficient λ určíme tak, abychom ve směru gradientu ∇J / $\hat{\underline{a}}/k$ / nalezli minimum kritéria

$$J(\hat{\underline{a}}(k+1)) = J(\hat{\underline{a}}(k) - \lambda \cdot \nabla J(\hat{\underline{a}}(k)))$$

tuto podmínku vyjádříme

$$\frac{\alpha J(\hat{\underline{a}}(k) - \lambda \cdot \nabla J(\hat{\underline{a}}(k)))}{\alpha \lambda} = 0 \quad (20)$$

Z výše uvedené poznámky plynou vztahy pro výpočet vývoje koeficientů

$$\begin{aligned}\hat{a}_1(k+1) &= \hat{a}_1(k) - \lambda \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_1(k)} \\ \hat{a}_2(k+1) &= \hat{a}_2(k) - \lambda \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_2(k)} \\ \hat{b}_1(k+1) &= \hat{b}_1(k) - \lambda \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{b}_1(k)}\end{aligned}\quad (21)$$

$\hat{b}_m / 0 /$ - pevný koeficient, tj. odhad proveden pouze jednou.

Koeficient λ určíme /viz (20)/ z podmínky

$$\frac{\partial J(k+1)}{\partial \lambda} = 0 \quad (22)$$

Ve vztazích (21) vyjádříme

$$\begin{aligned}\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_1(k)} &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n e(j,k) \cdot \frac{\partial e(j,k)}{\partial \hat{a}_1(k)} = - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n e(j,k) \cdot y(j-2) \\ \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_2(k)} &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n e(j,k) \cdot \frac{\partial e(j,k)}{\partial \hat{a}_2(k)} = - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n e(j,k) \cdot y(j-1) \\ \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{b}_1(k)} &= \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n e(j,k) \cdot \frac{\partial e(j,k)}{\partial \hat{b}_1(k)} = - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n e(j,k) \cdot u(j-2)\end{aligned}\quad (23)$$

Stejně postupujeme při výpočtu dalších koeficientů v případě soustav vyšších řádů.

Derivace

$$\frac{\partial e(j,k)}{\partial \hat{a}_1(k)}, \frac{\partial e(j,k)}{\partial \hat{a}_2(k)}, \frac{\partial e(j,k)}{\partial \hat{b}_1(k)}$$

se nazývají citlivostní funkce

Nyní řešíme vztah (18)
vyjádříme

$$J(k+1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^2(j, k+1) \quad (24)$$

kde

$$e(j, k+1) = \gamma(j) - \hat{a}_1(k+1) \cdot \gamma(j-2) - \hat{a}_2(k+1) \cdot \gamma(j-1) - \\ - \hat{b}_1(k+1) \cdot u(j-2) - \hat{b}_2(k+1) \cdot u(j-1)$$

za $\hat{a}_1 / k+1 /$, $\hat{a}_2 / k+1 /$ atd. dosadíme dle (21), pak můžeme dále psát

$$= \gamma(j) - [\hat{a}_1(k) - \lambda \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_1(k)}] \cdot \gamma(j-2) - [\hat{a}_2(k) - \lambda \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_2(k)}] \cdot \gamma(j-1) - \\ - [\hat{b}_1(k) - \lambda \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{b}_1(k)}] \cdot u(j-2) - \hat{b}_2(k) \cdot u(j-1)$$

po úpravě

$$= e(j, k) - \lambda \left[\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_1(k)} \cdot \gamma(j-2) + \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_2(k)} \cdot \gamma(j-1) + \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{b}_1(k)} \cdot u(j-2) \right]$$

Vyjádříme nyní koeficient λ

$$\frac{d J(k+1)}{d \lambda} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n e(j, k+1) \frac{d e(j, k+1)}{d \lambda} = - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \left\{ e(j, k) - \right. \\ \left. - \lambda \left[\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_1(k)} \cdot \gamma(j-2) + \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_2(k)} \cdot \gamma(j-1) + \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{b}_1(k)} \cdot u(j-2) \right] \right\} \cdot \\ \cdot \left[\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_1(k)} \cdot \gamma(j-2) + \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_2(k)} \cdot \gamma(j-1) + \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{b}_1(k)} \cdot u(j-2) \right] = 0$$

Konečně dostaneme rovnici

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_1(k)} \cdot \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=1}^n e(j,k) \cdot \gamma(j-2) + \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_2(k)} \cdot \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=1}^n e(j,k) \cdot \gamma(j-1) + \\
 & + \frac{\partial J(k)}{\partial \hat{b}(k)} \cdot \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=1}^n e(j,k) \cdot u(j-2) = - \left[\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_1(k)} \right]^2 - \left[\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_2(k)} \right]^2 - \left[\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{b}(k)} \right]^2 = \\
 & = 1 \cdot \left\{ \left[\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_1(k)} \right]^2 \cdot \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \gamma^2(j-2) - \left[\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_2(k)} \right]^2 \cdot \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \gamma^2(j-1) + \right. \\
 & + \left[\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{b}(k)} \right]^2 \cdot \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=1}^n u^2(j-2) + 2 \cdot \left[\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_1(k)} \right] \cdot \left[\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_2(k)} \right] \cdot \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \gamma(j-2) \cdot \\
 & \cdot \gamma(j-1) + 2 \cdot \left[\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_1(k)} \right] \cdot \left[\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{b}(k)} \right] \cdot \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \gamma(j-2) \cdot u(j-2) + \\
 & + 2 \cdot \left[\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{a}_2(k)} \right] \cdot \left[\frac{\partial J(k)}{\partial \hat{b}(k)} \right] \cdot \frac{2}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \gamma(j-1) \cdot u(j-2) \Big\} \\
 & \qquad \qquad \qquad (25)
 \end{aligned}$$

Pro výpočet jednoho adaptačního kroku (21) vypočteme λ z rovnice (25) .

5. VOLBA PŘÍKLADŮ

Pro ověření navrženého algoritmu byly zvoleny dva příklady regulovaných soustav. V dalším si tyto regulované soustavy zadané obrazovými přenosy formulovanými v Laplaceově transformaci převedeme do diferenčních rovnic v tzv. regresním tvaru viz (1) .

5.1. PŘÍKLAD č. 1

Máme spojitou regulovanou soustavu popsanou přenosem

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{Tp+1} \quad (26)$$

kde

$Y(p)$ = Laplaceův obraz spojitě výstupní veličiny regulované soustavy

$U(p)$ = Laplaceův obraz spojitě vstupní veličiny regulované soustavy

Nyní provedeme diskretizaci spojitě regulované soustavy převedením přenosu regulované soustavy do Z - transformace.

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p} - \frac{T}{Tp+1} \quad \frac{1}{p} \doteq \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{T}{Tp+1} = \frac{T}{T} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{T}} \doteq \frac{z}{z - e^{-\frac{pT}{T}}} \sim \frac{1}{1 - s \cdot e^{-\frac{pT}{T}}} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Dále bude} \\ z^{-1} = s \end{array} \right]$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-s \cdot e^{-\frac{pT}{T}}} \quad (27)$$

po úpravách tedy dostaneme přenos

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s(1 - e^{-\frac{\Delta T}{T}})}{1 - s(1 + e^{-\frac{\Delta T}{T}}) + s^2 e^{-\frac{\Delta T}{T}}} \quad (28)$$

kde ΔT je perioda vzorkování

Přenos dále rozepíšeme

$$Y(s) \cdot (1 - s(1 + e^{-\frac{\Delta T}{T}}) + s^2 e^{-\frac{\Delta T}{T}}) = U(s) \cdot (s(1 - e^{-\frac{\Delta T}{T}})) \quad (29)$$

Rovnici (29) přepíšeme nyní snadno na diferenční rovnici

$$y(j) - y(j-1) \cdot (1 + e^{-\frac{\Delta T}{T}}) + y(j-2) \cdot e^{-\frac{\Delta T}{T}} = (1 - e^{-\frac{\Delta T}{T}}) \cdot u(j-1) \quad (30)$$

Obecný popis naší regulované soustavy tedy je

$$y(j) = a_1 y(j-1) + a_2 y(j-2) + b_1 u(j-1) + d(j) \quad (31)$$

kde

$Y / j /$ - je výstupní veličina regulované soustavy v čase j

$U / j /$ - je vstupní veličina regulované soustavy v čase j

j - je diskrétní čas

$d / j /$ - je posloupnost nekorelovaných stejně rozdělených náhodných veličin, pro které platí vztahy (3) a (4)

Zvolme

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\Delta T}{T}} &= 0,5 & \Rightarrow & a_2 = -0,5 \\ (1 + e^{-\frac{\Delta T}{T}}) &= 1,5 & \Rightarrow & a_1 = 1,5 \\ (1 - e^{-\frac{\Delta T}{T}}) &= 0,5 & \Rightarrow & b_1 = 0,5 \end{aligned} \quad (32)$$

Dostáváme tedy konečný tvar diferenční rovnice regulované soustavy

$$y(j) = 1,5 y(j-1) - 0,5 y(j-2) + 0,5 u(j-1) + d(j) \quad (33)$$

5.2. PŘÍKLAD č.2

V tomto příkladě odvodíme diferenční rovnici regulované soustavy vyššího řádu.

Mějme obrazový přenos spojité soustavy

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(Tp+1)^2} \quad (34)$$

Význam použitých veličin je stejný jako v kapitole 5.1.

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{T^2 p (p + \frac{1}{T})^2} = \frac{1}{p} + \frac{b}{p + \frac{1}{T}} - \frac{1}{T(p + \frac{1}{T})} \stackrel{!}{=} \\ \frac{1}{T^2 p} = \frac{p + \frac{1}{T}}{p} + b(p + \frac{1}{T}) - \frac{1}{T} ; b = \left[\frac{1}{T^2 p} \right]_{p = -\frac{1}{T}} = \left[\frac{-1}{T^2 p^2} \right]_{p = -\frac{1}{T}} \\ b = \underline{\underline{-1}}$$

$$\stackrel{!}{=} F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{T}} - \frac{1}{T(p + \frac{1}{T})^2} \doteq 1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}} \doteq \\ \doteq \{Z\}_{z^{-1}=s} = \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-s \cdot e^{-\frac{\Delta T}{T}}} - \frac{\Delta T}{T} \cdot \frac{s \cdot e^{-\frac{\Delta T}{T}}}{(1-s \cdot e^{-\frac{\Delta T}{T}})^2} \stackrel{!}{=} \quad (35)$$

Volíme

$$e^{-\frac{\Delta T}{T}} = 0,5$$

$$e^{\frac{\Delta T}{T}} = 2,0$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \ln 2$$

(36)

$$\frac{z}{s} \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-0,5s} - \ln 2 \cdot \frac{0,5s}{(1-0,5s)^2} =$$

$$= \frac{(1-0,5s)^2 - (1-0,5s) \cdot (1-s) - \ln 2 \cdot s \cdot 0,5 (1-s)}{(1-s) \cdot (1-0,5s)^2} =$$

Po roznásobení a algebraické úpravě dostáváme

$$= \frac{s \cdot 0,5 \cdot (1 - 2 \ln 2) - s^2 (\ln 2 \cdot 0,5 - 0,5)}{1 - 2s + 1,25s^2 - 0,25s^3}$$

$$= - \frac{0,15s + 0,1s^2}{1 - 2s + 1,25s^2 - 0,25s^3}$$

(37)

Tento přenos dále rozepíšeme

$$Y(s) \cdot (1 - 2s + 1,25s^2 - 0,25s^3) = U(s) \cdot (0,15s + 0,1s^2) \quad (38)$$

Rovnici (38) převedeme do obecného tvaru diferenční rovnice.

$$y(j) - 2 \cdot y(j-1) + 1,25 y(j-2) - 0,25 y(j-3) = 0,15 u(j-1) + 0,1 u(j-2) + d(j) \quad (39)$$

$$y(j) = 2 y(j-1) - 1,25 y(j-2) + 0,25 y(j-3) + 0,15 u(j-1) + 0,1 u(j-2) + d(j) \quad (40)$$

Rovnice (40) v obecném tvaru zní

$$y(j) = a_1 y(j-1) + a_2 y(j-2) + a_3 y(j-3) + b_1 u(j-1) + b_2 u(j-2) \quad (41)$$

6. STABILITA ZÁKLADNÍHO REGULAČNÍHO OBVODU

Pro funkci adaptivního procesu musíme zadat počáteční odhad koeficientů. Je nutné sestrojit oblast stability, ze které vyplynou velikosti počátečních odhadů takové, aby jejich volba nespůsobila nestabilitu regulačního obvodu. Vlivem této nestability by se znemožnil adaptační proces. Stabilitu regulačního obvodu lze vyšetřovat, jestliže jeden adaptační krok trvá n regulačních kroků.

U lineárních spojitých soustav se dosáhne stability, jestliže soustava je popsána takovou diferenciální rovnicí, že kořeny w_i příslušné charakteristické rovnice jsou obecně komplexní s vesměs zápornou reálnou částí, tj. leží vesměs v levé polo-rovině Gaussovy roviny

$$\operatorname{Re} w_i < 0 \quad (42)$$

Levá strana charakteristické rovnice je přitom totožná se jmenovatelem obrazového přenosu převedeného na jednoduchý zlomek. Vyplývá z toho, že řešení diferenciální rovnice příslušné lineární spojité soustavy je

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot e^{w_i t} + y_{part}(t) \quad (43)$$

Pro konečnou hodnotu $y(t)$ v ustáleném stavu $t \rightarrow \infty$ je nutné aby exponent $w_i \cdot t$, kde w_i je kořenem charakteristické rovnice, měl zápornou reálnou složku.

Pak je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_{part}(t) \quad (44)$$

Podobně můžeme vyjít při určování stability lineárních impulzních soustav z řešení průběhu výstupního signálu impulzní soustavy, který můžeme vyjádřit ve tvaru

$$Y(s) = \frac{s \cdot B(s)}{A(s)} \quad (45)$$

$Y(s)$ je obraz výstupního signálu

s_i - jsou kořeny charakteristické rovnice $A(s) = 0$

Soustava popsaná (45) bude stabilní, jestliže bude splněna podmínka

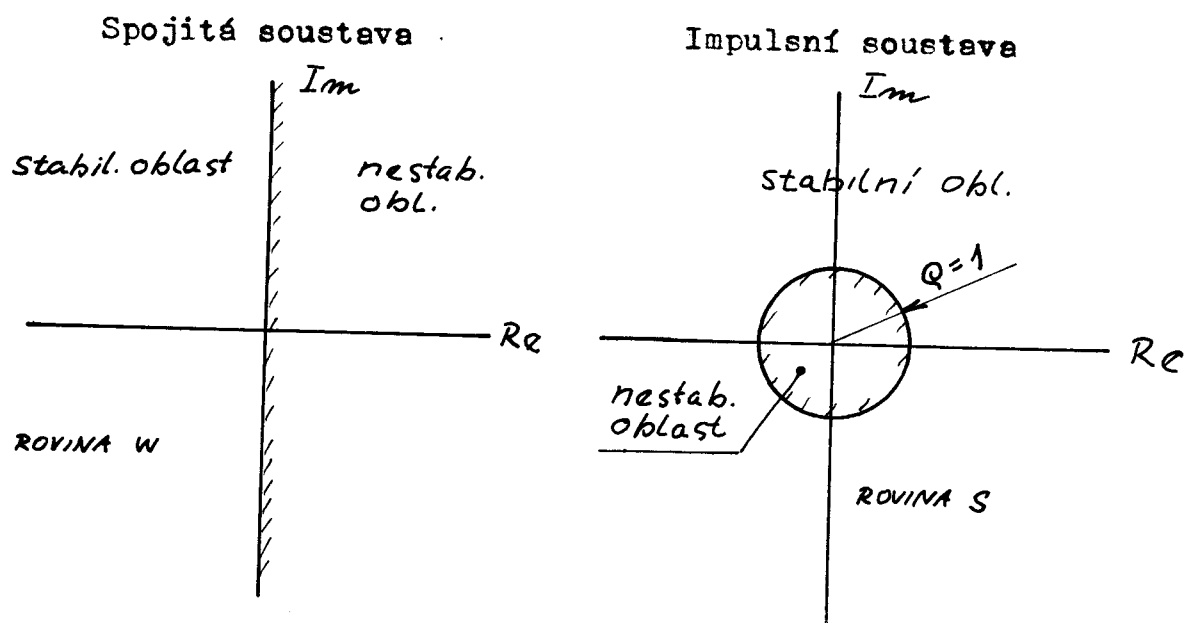
$$|s_i| > 1 \quad (46)$$

tj. kořeny charakteristické rovnice příslušné impulsní soustavě leží ~~vně~~ ^{vně} ~~vnitř~~ jednotkového kruhu se středem v počátku souřadnic Gaussovy roviny.

Podobně jako u soustav spojitých s odezvou výstupního signálu (43) vyplývá z polohy kořenů charakteristické rovnice v rovině w stabilní, nestabilní, či kmitavý stav, lze podobně

závěry učinit i u soustav impulzních, jestliže provedeme transformaci

$$S = \frac{W - 1}{W + 1} \quad (51)$$



obr.4 - Oblasti stability

Touto transformací provedeme konformní zobrazení vnějšku jednotkové kružnice do levé poloroviny Gaussovy roviny a vnitřku jednotkové kružnice do pravé poloroviny.

To nám umožní řešit stabilitu impulzních soustav jako u soustav spojitých a využít tak možnosti celého výpočtového aparátu vypracovaného pro spojité soustavy. Především jsou to algebraická kritéria umožňující usuzovat na stabilitu přímo z koeficientů charakteristické rovnice aniž by ji bylo třeba řešit.

V našem případě bylo použito známého Hurwitzova kritéria.

6.1. STABILITA ZÁKLADNÍHO REGULAČNÍHO OBVODU SE SOUSTAVOU

I. ŘÁDU.

Máme konkrétní regulovanou soustavu popsanou diferenční rovnicí (33) .

$$y(j) = 1,5 y(j-1) - 0,5 y(j-2) + 0,5 u(j-1) + d(j) \quad (52)$$

Tuto převedeme do Z - transformace /viz 29/

$$Y(z) = 1,5 Y(z) \cdot z^{-1} - 0,5 Y(z) \cdot z^{-2} + 0,5 U(z) \cdot z^{-1} + D(z) \quad (53)$$

Po zavedení substituce $z^{-1} = s$ a úpravě rovnice (52) dostaneme

$$(1 - 1,5s + 0,5s^2) Y(s) = 0,5s \cdot U(s) + D(s)$$

$$Y(s) = \frac{0,5s}{1 - 1,5s + 0,5s^2} U(s) + \frac{1}{1 - 1,5s + 0,5s^2} D(s) \quad (54)$$

Regulátor jsme popsali následující diferenční rovnicí /viz (17)/

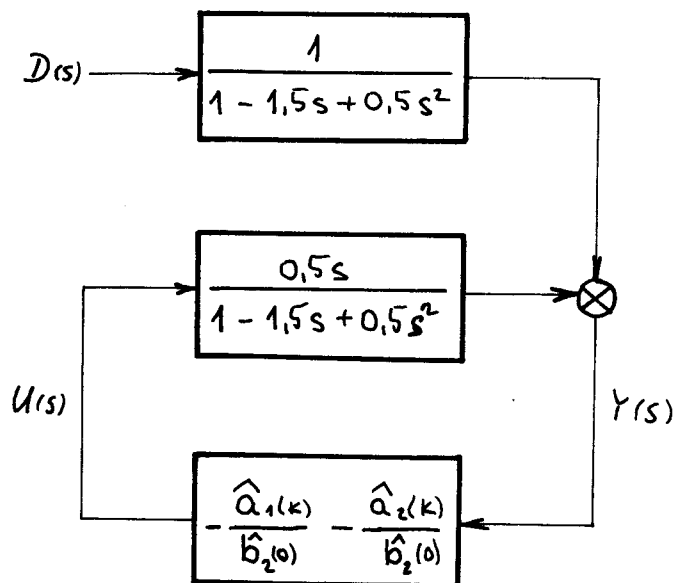
$$u(j) = - \frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2(0)} y(j) - \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} y(j-1) \quad (55)$$

Což v Z-transformaci + zavedené substituci $z^{-1} = s$ zní

$$U(s) = \left(- \frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2(0)} - \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} s \right) Y(s) \quad (56)$$

Impulzní přenos uzavřeného regulačního obvodu /viz obr.5 / je tedy

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 - 1,5s + 0,5s^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2(0)} + \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} s \right) \cdot \frac{1}{1 - 1,5s + 0,5s^2}} \quad (57)$$



obr. 5 - Uzavřený regulační obvod

Přenos (57) dále upravíme

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + \left(0,5 \left(\frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2(0)} - 1,5 \right) s + \left(0,5 + 0,5 \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} \right) s^2 \right)} \quad (58)$$

Pro zjednodušení zápisu následujícího textu jsme zavedli

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2(0)} \cdot 0,5 - 1,5 \\ c_2 &= \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} \cdot 0,5 + 0,5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + c_1 s + c_2 s^2}$$

Což po zavedení transformace (51) jest

$$\frac{Y(w)}{D(w)} = \frac{1}{1 + C_1 \frac{w-1}{w+1} + C_2 \frac{(w-1)^2}{(w+1)^2}}$$

tj.

$$\frac{Y(w)}{D(w)} = \frac{1}{w^2(1+C_1+C_2) + 2w(1-C_2) + (1-C_1+C_2)}$$

Charakteristická rovnice po dosazení a úpravě je

$$\begin{aligned} & w^2 \left(0,5 \frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2^*(0)} + 0,5 \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2^*(0)} \right) + \\ & + w \left(\frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2^*(0)} \right) + \\ & w^0 \left(- \frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2^*(0)} \cdot 0,5 + 0,5 \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2^*(0)} + 3 \right) \end{aligned} \quad (59)$$

Z koeficientů charakteristického polynomu sestavme Hurwitzovu matici

$$H = \begin{bmatrix} (1-C_2) & 0 \\ (1+C_1+C_2) & (1-C_1+C_2) \end{bmatrix}$$

(60)

Podmínkou stability je kladnost všech subdeterminantů Hurwitzovy matice

$$\begin{aligned} 1 - C_2 &> 0 \\ 1 + C_1 + C_2 &> 0 \\ 1 - C_1 + C_2 &> 0 \end{aligned}$$

(61)

Tj.

$$0,5 \frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2(0)} + 0,5 \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} > 0$$

$$0,5 - 0,5 \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} > 0$$

$$3 - 0,5 \frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2(0)} + 0,5 \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} > 0$$

Po úpravě dostaneme omezovací podmínky

$$\frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2(0)} + \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} > 0$$

$$\frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} < 1$$

(62)

$$\frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2(0)} + \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} < 6$$

Oblast stability základního regulačního obvodu se soustavou I.řádu je dána omezovacími podmínkami (62), což znázorňuje graf č. 1 na následující straně 71.

6.2. STABILITA ZÁKLADNÍHO REGULAČNÍHO OBVODU SE SOUSTAVOU

II. ŘÁDU

Máme regulovanou soustavu popsanou diferenční rovnicí

$$y(j) = 2y(j-1) - 1,25y(j-2) + 0,25y(j-3) + \\ + 0,15u(j-1) + 0,1u(j-2) + d(j)$$

Respektive její obraz v Z-transformaci

$$Y(z) = 2Y(z) \cdot z^{-1} - 1,25Y(z) \cdot z^{-2} + 0,25Y(z) \cdot z^{-3} + \\ + 0,15U(z) \cdot z^{-1} + 0,1U(z) \cdot z^{-2} + D(z) \quad (63a)$$

Rovnici (63a) upravíme a provedeme substituci $z^{-1} = s$

$$Y(s) \cdot (1 - 2s + 1,25s^2 - 0,25s^3) = U(s) \cdot (0,15s + 0,1s^2) + D(s) \quad (63)$$

$$\frac{0,15s + 0,1s^2}{1 - 2s + 1,25s^2 - 0,25s^3} U(s) + \frac{1}{1 - 2s + 1,25s^2 - 0,25s^3} D(s) \quad (64)$$

Diferenční rovnice regulátoru dle (6) pak bude

$$u(j) = - \frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2(0)} - \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} \quad (65)$$

Po úpravách dostaneme charakteristickou rovnici

$$1 + \left(\frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2(0)} + \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} \cdot s \right) \cdot \left(\frac{0,15s + 0,1s^2}{1 - 2s + 1,25s^2 - 0,25s^3} \right) = 0$$

po úpravě

$$3 + s(1,5 \cdot (\frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2(0)} - 6)) + s^2(\frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{b}_2(0)} + \frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} \cdot 1,5) + s^3(\frac{\hat{a}_2(k)}{\hat{b}_2(0)} - 0,75)$$

zavedeme transformaci

$$s = \frac{w-1}{w+1}$$

$\hat{a}_i(0)$ je počáteční estimate $\frac{\hat{a}_i(k)}{\hat{b}_2(k)}$, adol.

$$\begin{aligned} & 3(w^3 + 3w^2 + 3w + 1) + (w^3 + w^2 - w - 1) \cdot (1,5 \hat{a}_1(0) - 6) + \\ & + (w^3 - w^2 - w + 1) \cdot (\hat{a}_1(0) + 1,5 \hat{a}_2(0) + 3,75) + \\ & + (w^3 - 3w + 3w - 1) \cdot (\hat{a}_2(0) - 0,75) = \end{aligned}$$

$$w^3 [2,5 \hat{a}_1(0) + 2,5 \hat{a}_2(0)] = w^3 \cdot L1$$

$$w^2 [1,5 + 0,5 \hat{a}_1(0) - 4,5 \hat{a}_2(0)] = w^2 \cdot L2$$

(66)

$$w^1 [9 - 2,5 \hat{a}_1(0) + 1,5 \hat{a}_2(0)] = w^1 \cdot L3$$

$$w^0 [13,5 - 0,5 \hat{a}_1(0) + 0,5 \hat{a}_2(0)] = w^0 \cdot L4$$

Kde $L1, L2, L3, L4$ jsou výrazy, napsané v (66) v hranatých zámkách.

$$H = \begin{bmatrix} L2 & ; & L4 & ; & 0 \\ L1 & ; & L3 & ; & 0 \\ 0 & ; & L2 & ; & L4 \end{bmatrix}$$

(67)

$$\det H = 0$$

$$\det H = 54 - 132 \hat{a}_1(0) - 288 \hat{a}_2(0) + 48 \hat{a}_1 \hat{a}_2 - 32 \hat{a}_2^2(0) = 0 \quad (68)$$

$$\hat{a}_1 = \frac{-32 \hat{a}_2^2 - 288 \hat{a}_2 + 54}{-42 \hat{a}_2 + 132}$$

$$\hat{a}_1(0) = \underbrace{k_1 \hat{a}_2(0) + k_2}_{\text{PŘÍMKA}} + \underbrace{\frac{k_3}{132 - 42 \hat{a}_2(0)}}_{\text{HYPERBOLA}}$$

z čehož po dosazení řady čísel za $\hat{a}_2$ byl sestrojen graf č.2 na ~~straně~~ 29. ^{str. 42} Dale použijeme podmínku kladnosti koef. char. rce (66)

7. METODA IDENTIFIKACE SOUSTAV POMOCÍ KLASICKÉ METODY NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

V předchozím textu uvedený návrh regulátoru vycházel z minimalizace kriteria /viz (18) / metodou největšího spádu. Tuto minimalizaci provádíme v každém adaptačním kroku, přičemž jeden adaptační krok obsahuje n regulačních kroků.

Úkolem této práce je porovnat dva algoritmy adaptivní regulace, které se pouze odlišují způsobem identifikace regulované soustavy. Půjde o srovnání algoritmu adaptivní regulace s identifikací regulované soustavy klasickou metodou nejmenších čtverců a výše uvedeného algoritmu.

V dalším textu si nastíníme princip klasické metody nejmenších čtverců.

Minimalizujeme tedy kritérium

$$J = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^2(j) = \quad (69)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\eta(j) - \hat{a}_1(k+1) \cdot \eta(j-1) - \hat{a}_2(k+1) \cdot \eta(j-2) - \hat{b}_1(k+1) \cdot \mu(j-1) - \hat{b}_2(k+1) \cdot \mu(j-2)]^2 \quad (70)$$

Minimalizaci kritéria provádíme vzhledem ke koeficientům $\hat{a}_1 / k+1 /$, $\hat{a}_2 / k+1 /$, $\hat{b}_1 / k+1 /$, $\hat{b}_2 / k+1 /$

Z podmínek

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{a}_1(k+1)} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{a}_2(k+1)} = 0 \quad (71)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{b}_1(k+1)} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{b}_2(k+1)} = 0$$

získáme soustavu tzv. normálních rovnic

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\eta(j) - \hat{a}_1(k+1) \cdot \eta(j-1) - \hat{a}_2(k+1) \cdot \eta(j-2) - \hat{b}_1(k+1) \cdot \mu(j-1) - \hat{b}_2(k+1) \cdot \mu(j-2)] \cdot \eta(j-1) = 0$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\dots] \cdot \eta(j-2) = 0$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\dots] \cdot \mu(j-1) = 0 \quad (72)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\dots] \cdot \mu(j-2) = 0$$

Nevyjádřené výrazy v hranatých závorkách u soustavy rovnic (72) jsou stejné jako v první rovnici.

Soustavu rovnic (72) si formálně zapíšeme v maticovém tvaru

$$\underline{A} \hat{\underline{a}} = \underline{b} \quad (73)$$

kde

$\underline{A}$ - je symetrická matice soustavy

$\hat{\underline{a}}$ - je vektor neznámých koeficientů

$\underline{b}$ - je vektor pravých stran

Vektor $\hat{\underline{a}}$ vyjádříme pomocí inverzní matice soustavy takto

$$\hat{\underline{a}} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b} \quad (74)$$

Matice $\underline{A} =$

$$= \sum \begin{bmatrix} y^2(j-1) & y(j-2) \cdot y(j-1) & \mu(j-1) \cdot y(j-1) & \mu(j-2) \cdot y(j-1) \\ y(j-1) \cdot y(j-2) & y^2(j-2) & \mu(j-1) \cdot y(j-2) & \mu(j-2) \cdot y(j-2) \\ y(j-1) \cdot \mu(j-1) & y(j-2) \cdot \mu(j-1) & \mu^2(j-1) & \mu(j-2) \cdot \mu(j-1) \\ y(j-1) \cdot \mu(j-2) & y(j-2) \cdot \mu(j-2) & \mu(j-1) \cdot \mu(j-2) & \mu^2(j-2) \end{bmatrix} \quad (75)$$

8. POPIS PROGRAMU

Algoritmus adaptivního regulátoru regulujícího s minimálním rozptylem regulované veličiny, využívající ke své činnosti metody největšího spádu byl naprogramován v jazyce FORTRAN na počítači RPP - 16 S. Program umožňuje podrobné sledování adaptivního procesu.

POPIS HLAVNÍCH PROMĚNNÝCH A KONSTANT ADAPTAČNÍHO PROCESU

Diferenční rovnice

N1	- řád polynomu A
N2	- řád polynomu B
A /I/	- koeficienty $a_1 - a_n$ polynomu A
B /I/	- koeficienty $b_1 - b_m$ polynomu B
AE /I/	- odhady koeficientů $a_1 - a_n$
BE /I/	- odhady koeficientů $b_1 - b_m$
YS	- výstupní veličina regulované soustavy
YM	- výstupní veličina modelu regulované soustavy
E	- chyba predikce modelu

Adaptační proces

IA	-- pořadí adaptačního kroku
NA	- zvolený počet adaptačních kroků
IR	- pořadí regulačního kroku
NR	- zvolený počet regulačních kroků

Další důležité proměnné budou uvedeny v kapitole pojednávající o tištěných hodnotách.

VSTUPNÍ DATA

Program /viz příloha/ vyžaduje ke své činnosti zadání dat dle následujícího seznamu.

- $N1$ - typ integer, řád polynomu A
 $N2$ - typ integer, řád polynomu B
 NR - typ integer, počet regulačních kroků v jednom adaptačním
 NA - typ integer, počet adaptačních kroků
 C - typ real, konstanta používaná generátorem náhodných čísel
 $a_n - a_1$ - typ real, koeficienty diferenční rovnice regul. soustavy, polynomu A
 $b_m - b_1$ - typ real, koeficienty diferenční rovnice regulované soustavy, polynomu B
 $\hat{a}_n - \hat{a}_1$ - typ real, počáteční estimace koeficientů diferenční rovnice, polynomu A
 $\hat{b}_m - \hat{b}_1$ - typ real, počáteční estimace koeficientů diferenční rovnice, polynomu B

POPIS PROGRAMEM TIŠTĚNÝCH HODNOT

Program nás informuje o průběhu regulace prostřednictvím tiskárny /příkaz WRITELINE .../ a referenčního psacího stroje /příkaz WRITE OUTTYP .../.

Jestliže není stisknut žádný z klíčů operátorského pultu, pak se tisknou pouze hodnoty IA a vypočtené odhady koeficientů diferenční rovnice /SUBROUTINE TISV .../.

VÝZNAM STISKnutí JEDNOTLIVÝCH KLÍČŮ NA OPERÁTORSKÉM PULTU

/příkaz IF KEY ... /

Klíč č. 1 - tisk textu "KONEC ADAPTAČNÍHO CYKLU" na referenčním psacím stroji. Pro možnost měření rychlosti 1 adaptačního cyklu.

Klíč č. 15 - IA - pořadí adaptačního kroku
 IR - pořadí regulačního kroku
 YS - výstupní veličina regulované soustavy
 W - vektorový součin vektoru koeficientů polynomu A a vektoru výstupních veličin regulované soustavy

- W1 - vektorový součin vektoru koeficientů polynomu B a vektoru vstupních veličin regulované soustavy
- W2 - náhodná veličina D
- YM - výstupní veličina modelu regulované soustavy
- W3 - vektorový součin vektoru odhadů koeficientů polynomu A a vektoru výstupních veličin reg. soustavy
- W4 - vektorový součin vektoru odhadů koeficientů polynomu B a vektoru vstupních veličin reg. soustavy
- E - chyba predikce modelu regulované soustavy
- $\underline{Y}$ - vektor výstupních veličin reg. soustavy
- $\underline{U}$ - vektor vstupních veličin reg. soustavy
- Klíč č.14 - $\underline{DI}$ - součet součtů součinů $\underline{E} \cdot \underline{Y}$ tj. derivací (23)
- Klíč č.15 - IA - pořadí adaptačního kroku
- WLAM - součet kvadrátů derivací (23)
- WA - hodnoty součtů součinů $\underline{Y} \cdot \underline{Y}$ a $\underline{Y} \cdot \underline{U}$ v pravé straně rovnice (25)
- W - hodnota pravé strany rovnice (25)
- WLAM - hodnota koeficientu

POPIS PROCEDUR POUŽÍVANÝCH V ADAPTAČNÍM ALGORITMU

SUBROUTINE TISV /A,N/ -

Podprogram pro tisk vektoru, jehož prvky jsou v jednom řádku.
Kde A je identifikátor tištěného pole
N je počet prvků tištěného vektoru

SUBROUTINE NASV /A,B,C,N/

Podprogram pro násobení vektorů, kde

- A } jsou vektory, jejichž součin chceme počítat
B }
- C výsledek násobení
- N počet prvků násobených vektorů

REAL FUNCTION NAH /INIT/

Funkční procedura pro generování náhodných čísel.

Náhodné číslo se ukládá na identifikátor NAH .

Počáteční hodnota parametru INIT = 0.

SUBROUTINE GRAF /MZR,I,J,IM,JM,A/

Podprogram pro grafické znázornění veličin /bod po bodu/.

Kde

MZR - počet mezer mezi dvěma sousedními znaky

I - počet tištěných křivek

J - počet bodů tištěné křivky

IM - dimenze tištěného pole hodnot

JM - dimenze tištěného pole hodnot

A - identifikátor tištěného pole hodnot

REKURZIVNÍ VÝPOČET SOUČTU

Pro zjednodušení jsme použili při programování rekurzivního výpočtu součtů.

Počítejme např. součet

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x(j) \cdot y(j-1)$$

Pak

$$S_{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} x(j) \cdot y(j-1)$$

V programu pak můžeme psát

$$S_n = \frac{(n-1)}{n} S_{n-1} + x(n) \cdot y(n-1) \cdot \frac{1}{n}$$

9. POROVNÁNÍ ALGORITMU OBOU SROVNÁVANÝCH METOD

9.1. ADAPTAČNÍ CYKLUS

a. identifikace metodou největšího spádu

Uvedeďme si nyní instrukce použité pro identifikaci, psané v programovacím jazyce RPP - FORTRAN, pro číslicový počítač RPP 16 S:

```
      ⋮
      CI=IR
      CI1=IR-1
      CI1=CI1/CI
      DO 8 I=1,N
8      DI(I)=CI1*DI(I)+E*Y(I)/CI
      ⋮
      DO 9 I=1,N
      I1=I-1
      I2=I1*(N-(I-2)/2)
      I3=N-I1
      DO 9 J=1,I3
      I4=I2+J
      I5=J+I1
9      SU(I4)=CI1*SU(I4)+Y(J)*Y(I5)/CI
      ⋮
      W=0.0
      W1=0.2 E1
      DO 13 I=1,N
      I1=I-1
      I2=I1*(N-(I-2)/2)
      I3=N-I1
      IF(I-2),14,15,14
15  W1=0.4 E1
```

- výpočet derivace $\frac{\partial J}{\partial a_i}$
viz rce. (23)

- součet součinů $y \cdot y$
a $y \cdot u$ v pravé stě.
rce (25)

- pokrač. na další str.

```

14 DO 13 J=1,I3
    I4=I2+J
    I5=J+I1
13 W=W+W1*DI(J)*DI(I5)*SU(I4)
    :
    WLAM=0.0
    DO 12 I=1,N
12 WLAM=WLAM+DI(I)**2
    WLAM=WLAM/W
    :
    DO 16 I=1,N21
    I1=I+N1
16 AE(I1)=BE(I)
    DO 17 I=1,N
17 AE(I)=AE(I)+WLAM*DI(I)

```

- pravá strana rovnice 25
/pokrač./

-součet kvadrátů derivací $\frac{\partial J}{\partial a}$ (23) a výpočet parametru λ

výpočet odhadů koeficientů dif.rce.
/viz. vztahy (21) /

b.identifikace klasickou metodou nejmenších čtverců

```

PN=IR-NV1
PN1=IR-NV1+1
PN2=PN/PN1
DO 44 I=1,NV1
Y(I,1)=PN2*Y(I,1)+DA(I)*YW/PN1
DO 44 J=I,NV1
U(I,J)=PN2*U(I,J)+DA(I)*DA(J)/PN1
44 U(J,I)=U(I,J)

```

tato část programu slouží k vytvoření matice soustavy a vektoru pravých stran

```
CALL INVS(U,AA,I1,NV1,20)
```

inverze symetrické matice soustavy (75)

CALL NAS (AA,Y,AV,NV1,NV1,1,20,20,1)

:

součin inverzní symetrické matice soustavy a vektoru pravých stran /viz (74) /

Podprogramy použité k identifikaci klasickou metodou nejmen-
čtverců :

1/ podprogram pro výpočet inverzní symetrické matice

```
SUBROUTINE INVS (AV,A,IN,N,NR)
  DIMENSION AV(NR,NR),A(NR,NR)
  DIMENSION V(39)
  N1=N-1
  DO 1 I=1,N
    DO 1 J=1,N
      1 A(I,J)=AV(I,J)
      DO 2 K=1,N
        IF(A(1,1)) 3,4,3
      3 P=0.1 E1/A(1,1)
      DO 5 I=2,N
        5 V(I-1)=A(1,I)
      DO 6 I=1,N1
        Y=-V(I)*P
        A(I,N)=Y
      DO 6 J=1,N1
        6 A(I,J)=A(I+1,J+1)+V(J)*Y
      2 A(N,N)=-P
      DO 7 I=1,N
        DO 7 J=1,N
          A(I,J)=-A(I,J)
      7 A(J,I)=A(I,J)
      IN=0
      RETURN
  4 IN=1
  RETURN
END
```

2/ podprogram pro výpočet součinu dvou matic

```
SUBROUTINE NAS(A,B,C,L,M,N,LM,MM,NM)
  DIMENSION A(LM,MM),B(MM,NM),C(LM,NM)
  DO 1 I=1,L
    DO 1 J=1,N
      W=0.0
      DO 2 K=1,M
        2 W=W+A(I,K)*B(K,J)
        1 C(I,J)=W
      RETURN
    END
```

9.2. RYCHLOST KONVERGENCE

Na rychlost konvergence odhadů koeficientů diferenční rovnice regulované soustavy ke správným hodnotám můžeme usuzovat z následujících grafů.

Graf č. 3 - vývoj odhadů koeficientů diferenční rovnice 33 ,
při počátečním odhadu / estimaci /

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= 0.0 \\ \hat{a}_2 &= 1.0 \\ \hat{b}_1 &= 0.0 \\ \hat{b}_2 &= 0.5 \quad \hat{b}_2 / 0 / = 1.0 \end{aligned}$$

/identifikace met. nejv. spádu/

Graf č. 4 - vývoj odhadů koeficientů diferenční rovnice 33
za těchto podmínek jako v případě grafu č. 3, při identifikaci
klasickou metodou nejmenších čtverců / viz lit. [4] /

9.3. RYCHLOST VÝPOČTU JEDNOHO ADAPTAČNÍHO KROKU

Byly naměřeny následující hodnoty času potřebného pro identifikaci oběma srovnávanými metodami, a to :

1/met. největšího spádu 2.15 sec

2/klasická metoda nejmenších čtverců 3.35 sec

Rychlost byla měřena číslicovými elektronickými stopkami s přesností 1/10 sec. Měřené hodnoty času je však třeba chápat pouze orientačně

9.4. POSOUZENÍ Z HLEDISKA ROZPTYLU A STŘEDNÍ HODNOTY ODHADU

Pro vybraný soubor tj. hodnoty koeficientů v ustáleném stavu odhadu byl počítán rozptyl a střední hodnota na kalkulátoru TI 58, který pro výpočet těchto hodnot používá tyto vzorce :

Rozptyl

$$G_x^2 = \frac{\sum_1^N x^2 - \frac{(\sum_1^N x)^2}{N}}{N-1}$$

kde G_x^2 je rozptyl x

Střední hodnota

$$E_x = \frac{\sum_1^N x}{N}$$

Vypočtené hodnoty byly zaneseny do tabulek č. 1, 2, 3 a č. 4 .
Tabulka č. 1 a 2 byla získána z hodnot koeficientů identifikovaných pomocí klasické metody nejmenších čtverců, tabulka č. 3 a 4 pomocí metody největšího spádu.

Pozn.: symbol $E \hat{a}_1$, $E \hat{a}_2$ značí střední hodnotu odhadu .

9.5. HODNOCENÍ PŘESNOSTI KONVERGENCE

Hodnoty odhadů koeficientů diferenční rovnice konvergují k hodnotám dle vztahu

$$\frac{\hat{a}_i}{\hat{b}_i(0)} = \frac{a_i}{b_2}$$

což pro soustavu (33) je

$$\frac{\hat{a}_i}{1,0} = \frac{a_i}{0,5}$$

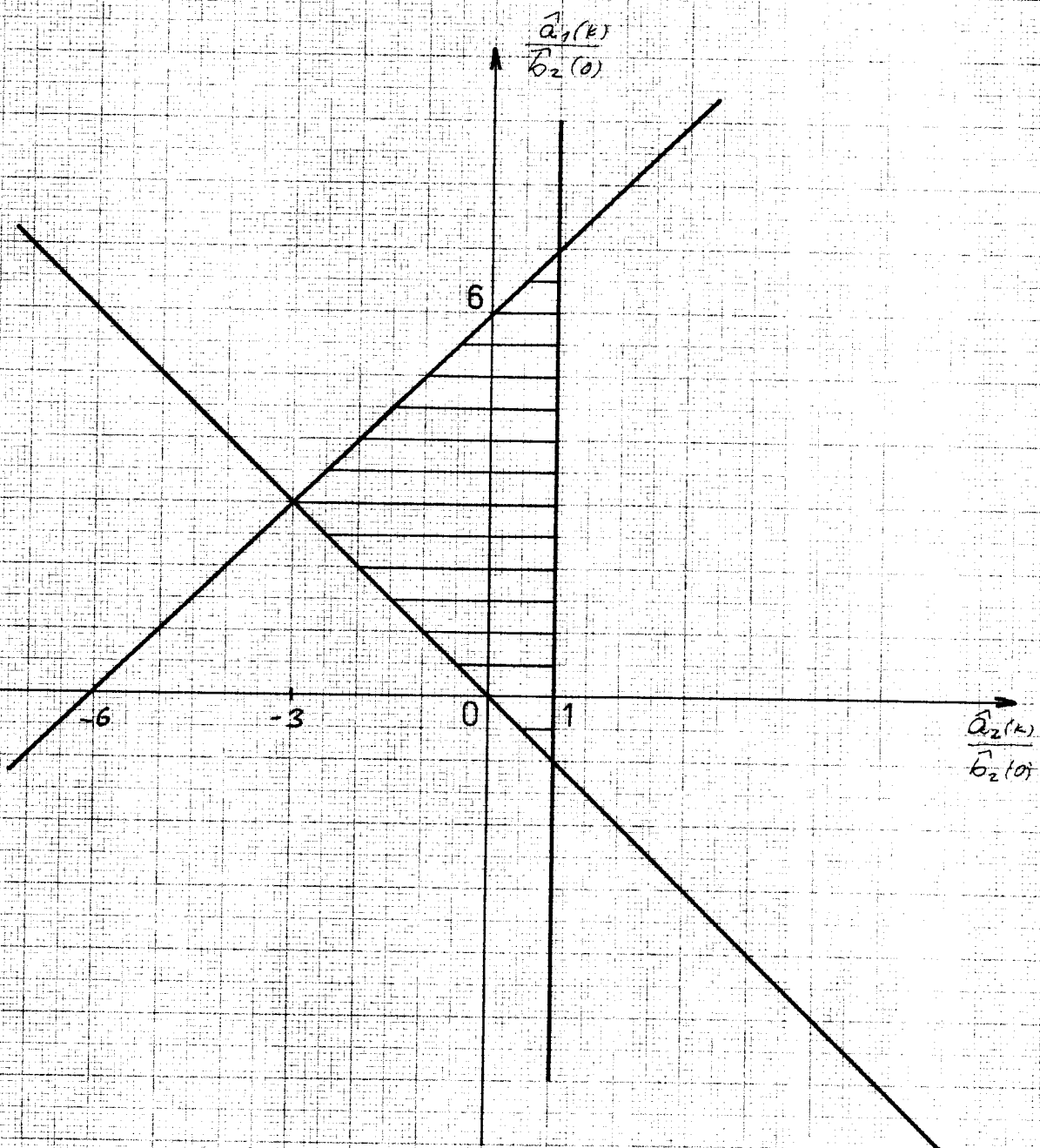
$\Downarrow$

$$\boxed{\hat{a}_i = 2 \cdot a_i}$$

Tedy konkrétně koeficienty a_1 , a_2 konvergují k těmto správným hodnotám :

$$a_1 = 3,0$$

$$a_2 = -1,0$$



GRAF č.1

Tabulka č.1

IA	$\hat{a}_1$	$\sigma^2 \hat{a}_1$	$E \hat{a}_1$
9	2,56	2,500 E-5	2,560
10	2,57	2,500 E-5	2,565
11	2,60	2,890 E-4	2,580
12	2,61	4,250 E-4	2,585
13	2,63	6,640 E-4	2,594
14	2,63	7,333 E-4	2,600
15	2,64	8,245 E-4	2,606
16	2,64	8,500 E-4	2,610
17	2,66	1,001 E-3	2,616
18	2,67	1,170 E-3	2,621
19	2,67	1,261 E-3	2,625
20	2,68	1,383 E-3	2,630
21	2,69	1,533 E-3	2,632
22	2,72	1,910 E-3	2,640
23	2,72	2,170 E-3	2,650
24	2,72	2,360 E-3	2,655
25	2,73	2,570 E-3	2,660
26	2,73	2,720 E-3	2,663
27	2,73	2,820 E-3	2,667
28	2,74	2,960 E-3	2,670
29	2,74	3,060 E-3	2,673
30	2,74	3,130 E-3	2,675

Kde $E \pm n$ se rozumí $10^{\pm n}$

Tabulka č.2

IA	$\hat{a}_2$	$G^2 \hat{a}_2$	$E \hat{a}_2$
9	-0,960	0	-0,960
10	-0,980	1,00 E-4	-0,970
11	-0,980	8,89 E-5	-0,973
12	-0,990	1,19 E-4	-0,978
13	-1,010	2,64 E-4	-0,984
14	-1,010	3,14 E-4	-0,988
15	-1,000	2,86 E-4	-0,990
16	-1,021	3,55 E-4	-0,994
17	-1,023	3,99 E-4	-0,997
18	-1,031	4,63 E-4	-1,001
19	-1,047	5,99 E-4	-1,005
20	-1,046	6,79 E-4	-1,008
21	-1,036	6,82 E-4	-1,010
22	-1,032	6,65 E-4	-1,012
23	-1,037	6,60 E-4	-1,014
24	-1,040	6,62 E-4	-1,015
25	-1,039	6,52 E-4	-1,016
26	-1,032	6,29 E-4	-1,017
27	-1,038	6,16 E-4	-1,018
28	-1,031	5,93 E-4	-1,019
29	-1,040	5,84 E-4	-1,020
30	-1,041	5,76 E-4	-1,021

Tabulka č.3

IA	a_1	a_1	$E a_1$
9	2,759	0	2,759
10	2,803	4,944 E-4	2,781
11	2,923	4,770 E-3	2,822
12	2,917	5,064 E-3	2,851
13	2,921	4,844 E-3	2,865
14	2,891	4,133 E-3	2,869
15	2,889	3,592 E-3	2,872
16	2,832	3,318 E-3	2,867
17	2,978	4,162 E-3	2,879
18	3,012	5,331 E-3	2,893
19	3,056	7,054 E-3	2,907
20	3,066	8,388 E-3	2,921
21	3,228	1,445 E-2	2,944
22	3,102	1,507 E-2	2,956
23	3,012	1,426 E-2	2,959
24	3,020	1,359 E-2	2,963
25	2,946	1,280 E-2	2,962
26	2,930	1,215 E-2	2,960
27	2,952	1,151 E-2	2,960
28	2,923	1,100 E-2	2,958
29	2,961	1,048 E-2	2,958
30	3,035	1,026 E-2	2,962

Tabulka č.4

IA	$\hat{a}_2$	$\sigma^2_{\hat{a}_2}$	$E \hat{a}_2$
9	-0,870	0	-0,870
10	-0,947	1,482 E-3	-0,909
11	-0,953	1,000 E-3	-0,923
12	-1,023	2,934 E-3	-0,948
13	-1,163	9,726 E-3	-0,991
14	-1,090	9,461 E-3	-1,008
15	-1,040	8,237 E-3	-1,012
16	-1,169	9,893 E-3	-1,032
17	-1,155	1,029 E-2	-1,046
18	-1,146	1,021 E-2	-1,056
19	-1,282	1,351 E-2	-1,076
20	-1,193	1,340 E-2	-1,086
21	-1,078	1,238 E-2	-1,085
22	-1,022	1,176 E-2	-1,081
23	-1,110	1,103 E-2	-1,083
24	-1,124	2,957 E-1	-0,945
25	-1,071	2,759 E-1	-0,954
26	-0,979	2,640 E-1	-0,955
27	-1,099	2,511 E-1	-0,963
28	-1,005	2,384 E-1	-0,965
29	-1,145	4,291 E-1	-0,864
30	-1,118	4,124 E-1	-0,876

10. ZÁVĚR

Byl odladěn program pro ověření adaptačního algoritmu regulace, který využívá metody největšího spědu pro identifikaci regulované soustavy. V práci jsou uvedeny výsledky příkladu použití uvedeného programu pro regulovanou soustavu 1. řádu. Na základě srovnání těchto výsledků s výsledky adaptivního algoritmu regulace, který pro identifikaci reg. soustavy používá klasické metody nejmenších čtverců, můžeme říci, že v práci popsaná metoda je z hlediska rychlosti konvergence koeficientů regulátoru srovnatelná s porovnávanou metodou. Z hlediska rychlosti výpočtu, počtu instrukcí programu a požadavků na kapacitu paměti číslicového počítače je popsaná metoda výhodnější než metoda porovnávaná. Podrobnější informace o zhodnocení dosažených výsledků podává kapitola 9.

V práci jsou též připraveny podklady pro ověření algoritmu adaptivní regulace pro soustavu 2. řádu.

Doporučujeme ověřit činnost adaptivního regulátoru pro soustavu 2. řádu, popřípadě řádů vyšších. Pro uvedené ověřování je možno použít programu popsaného v práci.

SEZNAM LITERATURY

- [1] Prof. Ing. B. Hanuš - Ing. B. Janeček - Ing. V. Kracík
Adaptivní regulace - několik poznámek
Adaptivní regulace s průběžnou identifikací
poznámky č.2, KTK 0075+0077
- [2] Ing. B. Janeček: Rozbor aplikace vyšších způsobů řízení
pro energetické procesy, KTK 0081
- [3] Prof. Ing. B. Hanuš CSc: Optimalizace systému řízení
Základy teorie lineárního impulsního obvodu,
skripta VŠST Liberec
- [4] Trdla J.: Analýza algoritmu adaptivního regulátoru, jehož částí
je rekurzivní metoda identifikace,
diplomová práce KTK 016/1981 - VŠST Liberec

SEZNAM PŘÍLOH DIPLOMOVÉ PRÁCE

- 1/ - Výpis programu /viz kapitola č. 8/
- 2/ - Záznam průběhu adaptace /numericky/
- 3/ - Záznam průběhu adaptace /graficky/

Pozn.: Konkrétní hodnoty, kterých jsme k výpočtu použili jsou uvedeny v záhlaví výsledků.