

Spolehlivost automatických výrobních systémů

.

ING. LADISLAV MAIXNER, CSc.
RNDr. ZORA KOLNÍKOVÁ

UNIVERZITNÍ KNIHOVNA
TECHNICKÉ UNIVERZITY V LIBERCI



3146088189

Praha 1984

SNTL – NAKLADATELSTVÍ
TECHNICKÉ LITERATURY

Kniha shrnuje matematické metody používané při hodnocení spolehlivosti automatického výrobního systému s diskretním výrobním procesem. Pojednává o optimalizaci skladby systému vzhledem ke kapacitám mezioperačních zásobníků, taktu jednotlivých strojů a zálohování. Jsou zde použity matematické modely automatických výrobních systémů založené na teorii pravděpodobnosti a speciálně na teorii náhodných procesů, popř. na stochastické simulaci. Použité metody jsou ukázány na řadě praktických příkladů.

Obsah

PŘEDMLUVA	7
1 ÚVOD	11
1.1 Spolehlivost a automatizace	11
2 SPOLEHLIVOST AUTOMATICKÝCH STROJŮ	17
2.1 Charakteristiky spolehlivosti	17
2.1.1 Doba bezporuchového provozu	17
2.1.2 Doba obnovování provozuschopnosti	20
2.1.3 Funkce obnovy a hustoty obnovy	21
2.1.4 Použitá rozložení pravděpodobnosti	23
2.1.5 Pohotovost	30
2.1.6 Součinitel operační pohotovosti	34
2.1.7 Aplikace exponenciálního rozložení	35
2.2 Empirické stanovení charakteristik spolehlivosti	39
2.2.1 Technické prostředky pro registraci provozu automatu	40
2.2.2 Vyhodnocení experimentálních dat	45
2.2.3 Rozložení pravděpodobnosti souboru experimentálních údajů	50
3 ZÁLOHOVÁNÍ AUTOMATŮ	54
3.1 Zálohování bez obnovy	55
3.2 Jednásobné zálohování s obnovou	58
3.3 Jednásobná nezatížená substituční záloha	62
3.3.1 Přibližný výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu	66
3.4 Jednásobná zatížená substituční záloha	70
3.4.1 Přibližný výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu	75
3.5 Nezatížená záloha s prodloužením při zařazení	78
3.6 Zálohy s obecným rozložením pravděpodobnosti	81
4 SPOLEHLIVOST SYSTÉMU NEZÁVISLÝCH AUTOMATŮ	90
4.1 Obecný případ n automatů	91
4.1.1 Překročení mezního stavu	95
4.1.2 Střední doba přechodu procesu do stavu s	96
4.2 Výrobní systém s q seřizovači	97
4.3 Zálohy v systému nezávislých automatů	104
5 JEDNOPROUDÉ AUTOMATICKÉ LINKY	108
5.1 Spolehlivostní charakteristiky pevné linky	111
5.2 Aplikace Markovových řetězců při vyvážení modelu pružné linky	117
5.2.1 Algoritmus modelu	117
5.2.2 Využití modelu k analýze provozu automatické linky	123

Ve vývojových laboratořích, konstrukčních kancelářích a výrobních dílnách, vznikají neustále nové výrobní stroje i celé automatické výrobní systémy. Lze pozorovat trvalý růst složitosti těchto výrobních strojů, způsobený především pronikáním elektroniky a řídicí techniky do výroby. Budují se stále rozsáhlejší komplexy automatických výrobních strojů, od kterých se očekává výrazný pokles nároků na pracovní sílu. Běžně dosahovaný stupeň automatizace podstatně snižuje četnost přímé obsluhy strojů.

V těchto podmínkách výrazně vystupuje do popředí potřeba zajistit vysokou spolehlivost každého výrobního zařízení a zvláště pak výrobního systému jako celku. Spolehlivost je jedním z rozhodujících faktorů pro ekonomickou efektivnost nasazení výrobního stroje, pro hospodárné využití materiálu, obsluhu, pracovního místa a v neposlední řadě i pro výhlednou jakost výrobků.

Problématické spolehlivosti výrobních strojů a výrobních systémů se nevěnuje péče odpovídající jejímu významu. Spolehlivostní pozorování s vyhodnocením a odhadem spolehlivostních ukazatelů jak celku, tak jednotlivých mechanismů se děje jen zřídka. Charakteristiky spolehlivosti výrobních strojů jsou známy jen výjimečně. Při projektování nových automatických výrobních systémů nejsou k dispozici informace o spolehlivosti analogických automatů, ani jejich části. Nelze proto s dostatečnou přesností už předem vytvořit podmínky pro dosažení vyhovující spolehlivosti celého výrobního systému.

S růstem počtu prvků výrobního systému rostou nároky na jejich spolehlivost v souvislosti s požadavkem vyhovující spolehlivosti systému jako celku. Je nutné řešit otázky zvyšování spolehlivosti jednotlivých mechanismů a zařízení, zvýšení spolehlivosti automatů, zajištění spolehlivosti výrobních systémů, výběru vhodných pracovních podmínek (režimů), vyhodnocení záloh, stanovení optimálních intervalů preventivních prohlídek apod.

S ohledem na tyto konkrétní potřeby technické praxe je kniha věnována matematickým metodám hodnocení ukazatelů spolehlivosti automatických výrobních systémů. Zachycuje problematiku stanovení experimentál-

5.2.3	Redukce počtu stavů	128
5.3	Stochastická simulace provozu pružné linky	131
5.3.1	Deklarace proměnných veličin matematického modelu	131
5.3.2	Algoritmus simulace provozu linky	133
5.3.3	Ukončení simulace	134
5.4	Vliv zálohování na spolehlivost linky	135
5.5	Analýza provozu pružné automatické linky	141
6	APLIKACE MARKOVÝCH PROCESŮ PŘI VYTVÁŘENÍ MODELU PROVOZU PRUŽNÉ LINKY	149
6.1	Postup při vytváření matematického modelu pro $q_1 \neq q_2$	150
6.1.1	Množina stavů	150
6.1.2	Přechod mezi stavy	152
6.1.3	Soustava Kolmogorových diferenciálních rovnic	155
6.2	Limitní pravděpodobnosti stavů pro $q_1 \neq q_2$	158
6.2.1	Určení konstant pro $q_1 > q_2$	164
6.2.2	Určení konstant pro $q_1 < q_2$	167
6.3	Stanovení základních charakteristik jednoduše linky	169
6.4	Matematický model linky pro $q_1 = q_2$	176
6.4.1	Odvodzení modelu	176
6.4.2	Limitní pravděpodobnosti stavů a základní charakteristiky linky	178
6.5	Možnosti zobecnění výsledků	183
7	VÍCEPROUDÉ AUTOMATICKÉ LINKY	191
7.1	Pracoviště s paralelně uspořádanými automaty	193
7.1.1	Aproximace automatem s maximálním výkonem	194
7.1.2	Aproximace průměrnými hodnotami	196
7.2	Stochastický model víceproudé linky	198
8	OPTIMALIZACE NÁVRHU AUTOMATICKÉHO VÝROBNÍHO SYSTÉMU	202
8.1	Optimalizace pevné automatické linky	202
8.2	Optimalizace pružné automatické linky	208
9	OPTIMALIZACE PREVENTIVNÍ ÚDRŽBY AUTOMATŮ A AUTOMATICKÝCH VÝROBNÍCH SYSTÉMŮ	215
9.1	Současný výskyt obnovy a preventivní údržby	216
9.2	Periodická obnova a preventivní údržba	226
9.3	Optimalizace preventivní údržby pevné automatické linky	232
10	JAKOST VÝROBKŮ ZHOTOVENÝCH NA AUTOMATICKÝCH STROJÍCH	240
10.1	Stanovení počtu výrobků ovlivněných poruchou automatu	240
10.2	Vliv doby obnovování provozuschopnosti	244
10.3	Jakost výrobků zhotovených automatickými výrobními systémy	249
10.3.1	Systém n nezávislých strojů	249
10.3.2	Automatická linka s pevnou vazbou	250
10.3.3	Pružná automatická linka	255
	DOPORUČENÁ A POUŽITÁ LITERATURA	256

ních charakteristik spolehlivosti automatů a zaměřuje se především na řešení spolehlivosti automatických výrobních systémů v etapě jejich projektování.

Definice a odvození důležitých ukazatelů spolehlivosti jednotlivých automatů spolu se statistickým vyhodnocením souborů experimentálních dat vztahujících se na dobu bezporuchového provozu a dobu obnovování provozuschopnosti jsou obsahem druhé kapitoly. Následující kapitola přináší vyhodnocení několika základních typů substituční zálohy automatů. Jsou odvozeny vztahy pro charakteristiky spolehlivosti náhradního automatů pro zálohovaný automat.

Spolehlivost automatického výrobního systému složeného z určitého počtu stejných a navzájem nezávislých automatů je řešena v kapitole čtvrté. Vedle odvození všech důležitých charakteristik základního systému je pozornost zaměřena i na systémy s omezenou kapacitou seřizovačů a na vliv záloh na provozní vlastnosti systému.

Rozboru spolehlivosti dalšího typu automatických výrobních systémů, který představuje jednoproudá automatická linka, je věnována pátá kapitola. Vedle pevné linky je zvláštní pozornost věnována analýze provozních vlastností pružných automatických linek. Je popsáno využití matematického modelu pružné linky na bázi Markovových řetězců a stochastická simulace provozu automatické linky. S použitím matematických modelů je vyšetřován vliv zálohování automatů na provoz linky. Jiný typ matematického modelu pro vyšetřování spolehlivostních vlastností pružné automatické linky je uveden v kapitole šesté. Aparát Markovových procesů umožňuje popis provozních vlastností linky se dvěma automaty. K rozšíření analýzy na linky s více automaty se využívá tzv. soudčitel přenosu ztrát. Šestou kapitolu zpracovala RNDr. Z. Kolníková, všechny ostatní jsou dílem Ing. L. Maixnera, CSc.

V další kapitole lze nalézt prostředky spolehlivostní analýzy víceprůtokových automatických linek. Prokazatelně nejúčinnějším nástrojem je dosud stochastická simulace. Je popsán matematický model a předvedeno jeho využití. Problematiku optimalizace automatických linek naznačuje kapitola osmá. Vhodná ekonomická účelová funkce je využita pro stanovení optimálního zálohování a pro vyhodnocení optimálních kapacit mezioperačních zásobníků pružné linky.

Výpočet optimálních intervalů preventivní údržby jednotlivých automatů a pevné automatické linky je obsahem předposlední kapitoly. Výpočet respektuje dva hlavní způsoby organizace preventivní údržby. V poslední, desáté kapitole je naznačen možný vliv poruchovosti automatů i automa-

tických výrobních systémů na jakost výrobků. Jakostní výrobky mohou produkovat pouze dostatečně spolehlivé výrobní stroje. Je uvedeno matematické stanovení míry vzájemného ovlivnění.

Účtí všech popsanych metod je demonstrováno na příkladech, které napomáhají objasnění matematických výrazů a usnadňují pochopení jejich fyzikálního významu.

Záměr poskytnout čtenáři vyčerpávající přehled metodiky projektování spolehlivosti automatických výrobních systémů si vynutil vedle zařazení původních metod i využití některých osvědčených přístupů včetně jejich aplikace na automatické výrobní systémy. Použití matematické metody nepatří mnohdy ve své zdůvodňovací fázi k nejjednodušším, výsledné vztahy jsou však zpravidla srozumitelné i bez znalosti speciálních matematických disciplín.

Autoři považují za svou povinnost poděkovat všem, kteří přispěli jakýmkoliv způsobem ke zpracování a vydání knihy. Zvláště děkují recenzentům RNDr. Milanu Ullrichovi, CSc., a Ing. Karlu Svobodovi, CSc., za cenné rady a připomínky, které přispěly ke zkvalitnění díla.

Ladislav Maixner

1.1 SPOLEHLIVOST A AUTOMATIZACE

K základním úkolům technického rozvoje ve výrobní základně patří vývoj, konstrukce a výroba výkonných výrobních strojů. Podle podmínek vznikají jednocelové i víceúčelové výrobní stroje s určitým stupněm automatizace.

V sériové výrobě je pozornost zaměřena na vývoj výkonných automatických výrobních strojů, na nichž se uskutečňuje celý technologický postup daného výrobku nebo součástky. Tato tzv. komplexní automatizace se vyznačuje spojením celé řady výrobních automatů do automatických výrobních systémů. Uspořádání strojů může být různé, od umístění automatických strojů pro jednotlivé operace do samostatných dílen až po jednocelové automatické linky.

U každého výrobního stroje (ať už jde o zcela samostatné zařízení, nebo je stroj zařazen do systému komplexní automatizace) hodnotíme především jeho provozní vlastnosti – pracovní takt, pořizovací náklady, nároky na obsluhu, nároky na seřízení a údržbu, vliv na pracovní prostředí, požadavky na pracovní prostor, návaznost na sousední technologické operace, kvalitu provedení technologické operace a spolehlivost.

Spolehlivost je jedna z nejdůležitějších provozních vlastností výrobního zařízení podstatně ovlivňujících ekonomickou efektivnost jeho nasazení. Význam spolehlivosti ještě vzroste při seskupení výrobních strojů do výrobních systémů vzhledem ke vzájemnému ovlivňování. Teoretický výkon, daný taktem stroje, nepodává výčerpávající informaci o jeho provozních vlastnostech, pokud neznáme alespoň některý z ukazatelů charakterizujících spolehlivost zařízení.

Naše úvahy zaměříme na vyhledání hlavních charakteristik (resp. ukazatelů) spolehlivosti automatického výrobního stroje. Budeme přitom používat stručného pojmu automat. Na základě charakteristik spolehlivosti jednotlivých automatů odvodíme spolehlivostní charakteristiky celých výrobních systémů.

Automatem budeme chápat výrobní stroj s vlastním řízením, který při

realizaci technologického postupu vykonává pracovní i pomocné činnosti jedné nebo více technologických operací. Kontrola a seřízení mohou být vyhrazeny obsluze. Automatický výrobní systém je výrobní systém, ve kterém se všechny technologické operace realizují na automatech, až na některé pomocné operace, jako např. upínání výrobku na paletu, kontrolní měření apod.

Orientace na hodnocení spolehlivosti automatů souvisí především s všeobecným rozvojem automatizace, se zvyšováním počtu automatických strojů ve výrobních provozech a v neposlední řadě se skutečností, že automat nepředpokládá trvalou obsluhu (kromě kontroly a doplňování polotovarů a odebrání hotových výrobků), která by byla schopna řadu poruch okamžitě eliminovat a touto cestou zajistit vyhovující výkon automatu.

Funkce výrobního zařízení s trvalou obsluhou je ovlivňována subjektivními vlastnostmi jednotlivých pracovníků obsluhy. Podává-li se nalézt dostatečně přesné zobecnění spolehlivostních charakteristik zařízení s ruční obsluhou, především distribuční funkci dob bezporuchového provozu a dob obnovování provozuschopnosti, můžeme využít prakticky všech ukazatelů i pro hodnocení spolehlivosti těchto strojů.

Ve shodě s [6] budeme spolehlivostí automatů i automatických výrobních systémů rozumět vlastnost objektů, spočívající ve schopnosti plnit požadované funkce při zachování provozních ukazatelů v daných mezích a v čase podle stanovených technických podmínek. Je důležité si uvědomit, že konkrétní hodnoty ukazatelů spolehlivosti jsou vázány na technický stav automatu, na kvalitu vstupního materiálu, polotovarů a všech energií a na způsob provedení oprav a údržby. Změní-li se některá z těchto podmínek, mohou se změnit i charakteristiky spolehlivosti.

Spolehlivost chápeme jako komplexní vlastnost objektu, zahrnující např. bezporuchovost, životnost, udržovatelnost, opravitelnost i kombinace těchto vlastností. Udržovatelnost v obecném smyslu zahrnuje opravitelnost i vlastní udržovatelnost, spočívající ve způsobilosti předebrání poruch předepsanou údržbou. Podobně pohotovost vyjadřuje komplexní vlastnost zahrnující bezporuchovost a opravitelnost objektu v podmínkách provozu. Pohotovost charakterizujeme funkcí pohotovosti $K_p(t)$ a součinitelem K_p .

Automaty budeme vesměs považovat za obnovované objekty, jejichž schopnost plnit požadovanou funkci se po obnově obnovuje. Obnovou automatu rozumíme jev spočívající v obnově schopnosti objektu po poruše plnit požadované funkce podle technických podmínek. Obnovu chápeme jako alternativní pojem k pojmu

porucha a označujeme jím právě okamžik přechodu automatu do provozuschopného stavu.

Obnova automatu je důsledek opravy, popř. výměny části nebo celého automatu po poruše. Dobu, po kterou tato činnost probíhá, nazýváme doba obnovování provozuschopnosti. Vlastní činnost, zahrnující detekci poruch, lokalizaci poruchy, odstranění zjištěných nedostatků (opravu nebo výměnu) a kontrolu správné funkce, budeme nazývat obnovování provozuschopnosti. Vždy budeme předpokládat, že při vzniku poruchy automatu se okamžitě zahájí práce na obnovování provozuschopnosti.

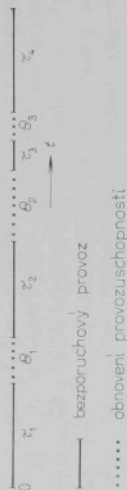
Pokud by tento předpoklad nebylo možno přijmout, musí být odvozené charakteristiky vhodné upraveny. Pouze v případě, že v zadání úlohy o spolehlivosti systému je uveden omezený počet seřizovačů, může se automat vyskytovat i ve stavu čekání na obnovu provozuschopnosti. Další předpoklad, který budeme trvale uplatňovat, spočívá v tom, že při obnově se z hlediska spolehlivosti dostane automat do výchozího stavu. V podstatě to znamená, že následující doba bezporuchového provozu má právě rozložení $F(t)$.

Obnovení provozuschopnosti automatu uskutečňuje seřizovač, údržbář, popř. celá skupina pracovníků, zahrnující různé kvalifikace - strojní mechanik, údržbář silnoproudého elektrotechnického vybavení, elektronik, technolog atd. Pro zjednodušení budeme jednotku uskutečňující obnovu provozuschopnosti označovat pojmem seřizovač, ať už se jedná o jednoho pracovníka, nebo o celou skupinu.

Výrobní automat, který sledujeme, se v libovolném okamžiku nachází zpravidla v některém z následujících stavů:

1. Bezporuchový provoz (automat v daném taktu produkuje výrobky).
2. Obnovování provozuschopnosti (uskutečňuje se některá fáze opravy, popř. výměny části nebo celého stroje).
3. Čekání na obnovu provozuschopnosti (v daném okamžiku není pro automat v poruše k dispozici volný seřizovač).
4. Čekání na příslus výrobků od předchozího automatu, popř. na odebrání výrobků následujícím automatem (tento prostoje je typický pro funkci automatů v automatických linkách).
5. Preventivní údržba (na automatu se uskutečňují předem plánované údržbové práce, které mají za následek obnovu automatu).
6. Organizační prostoje (přestávky v práci, seřízení na jiný typ výrobku, přerušení dodávky energií, čekání na práci, přísun vadného materiálu apod.)

Ve většině případů zkoumáme funkci automatu ve smyslu střídání dob bezpečového provozu a dob obnovování provozuschopnosti, jak znázorňuje obr. 1. Komplexním ukazatelem takto chápané činnosti automatu je součinitel pohotovosti. Skutečné technické využití automatu v průběhu dvousměnného provozu však ovlivňují i všechny ostatní druhy pro-



Obr. 1. Schéma provozu automatu

stojů. Jejich časové trvání je vždy ovlivněno konkrétními provozními podmínkami, které jsou u automatů v různých podmínkách odlišné

K hodnocení výkonu automatu s uvažováním všech ostatních druhů protů stojí za uvedení tzv. skutečného středního výkonu automatu za dvě směny a označme ho V_s (ks/2 směny). Předpokládáme, že v rámci dvousměnného provozu máme k dispozici právě střední dobu $d = 14$ h, v jejímž průběhu může být automat v bezporuchovém provozu nebo ve stavu obnovování provozuschopnosti. Doba do plné délky dvousměnného provozu zahrnuje organizační prostoj, preventivní údržbu apod. Hodnota $d = 14$ h je zvolena jednotně pro potřebu příkladů v textu. Pro aplikované výpočty je nutno stanovit d s ohledem na konkrétní podmínky. Skutečný výkon získáme ze vztahu

$$V_s = dK_n V.$$

V součinu se vyskytuje součinitel pohotovosti K_p automatu a teoretický výkon V ($\text{ks} \cdot \text{h}^{-1}$). Teoretický výkon je odvozen z taktu automatu ϑ ($\text{s} \cdot \text{ks}^{-1}$)

$$V = \frac{3600}{g}.$$

Je zřejmé, že pro plánování nelze uvažovat celý skutečný výkon, ale skutečný výkon V_s snížený o zmekovitost výrobku a o procento taktů výrobního automatu, při kterých se neuskutečnila technologická operace. Vliv těchto faktorů není v příkladech uvažován. Pokud jejich vliv bude natolik výrazný, že jej zanedbat nelze (např. při optimalizačních výpočtech), postačí upravit

V_s vhodným součinitelem, vyjadřujícím kvantitativně snížení středního skutečného výkonu.

Pro výpočet návratnosti prostředků vynaložených na opatření zlepšující společlivost je nutné uvažovat roční fond pracovní doby využitelný pro bezporuchový provoz a pro obnovení provozuschopnosti. Vylučujeme organizační prostoje. Vezmeme-li 250 pracovních dní v roce, pak roční časový fond je $w = 250 \cdot d = 3500$ h.

Matematická teorie spolehlivosti je vybudována na širokém využití teorie pravděpodobnosti, teorie náhodných procesů (Markovovy řetězce, Markovovy procesy) a matematické statistiky s využitím některých dalších speciálních matematických disciplín, jako např. Laplaceova transformace, matematický počet, řešení soustav lineárních rovnic a řešení diferenciálních rovnic. I když jsou cesty k odvození potřebných vztahů mnohdy poměrně složité, výsledky jsou interpretovány zpravidla v natolik jednoduché formě, že jejich lze využít i bez znalosti speciálních matematických disciplín.

Ukazatele spolehlivosti automatů i automatických výrobních systémů jsou odvozeny v pokud možno co nejobecnější formě. Pokud naproti obecnost nemožňuje přijatelnou formu odvození, je použito pouze exponentiální rozložení, které pro své jednoduché matematické vyjádření podstatně snižuje náročnost některých výpočtů.

Je-li matematický popis automatického výrobního systému neschůdný, používá se metoda stochastické simulace na matematickém modelu, který tvoří program pro číselový počítač. Všechny popsané modely výrobních systémů byly vytvořeny v jazyce Fortran pro počítač TESLA 200. Stochastická simulace se ukázala jako velmi účinný i dostatečně přesný prostředek analýzy spolehlivosti výrobních systémů.

Každá náhodná veličina X má svoji distribuční funkci $F_X(x)$. Pokud existuje střední hodnota $M[X]$ náhodné veličiny X , je obecně definována Lebesgueovým-Stieltjesovým integrálem

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_X(x)$$

i pro náhodné veličiny, pro které neexistuje hustota pravděpodobnosti. Existuje-li taková funkce $f_X(x)$ (hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X), že

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy,$$

pak střední hodnotu můžeme stanovit pomocí Riemannova integrálu

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

Pro všechny náhodné veličiny, které budeme ve svých úvahách využívat, budeme znát hustotu pravděpodobnosti a budeme předpokládat existenci střední hodnoty. Zápis střední hodnoty náhodné veličiny Lebesgueovým-Stieltjesovým integrálem budeme přesto využívat v případě odvozování zcela obecných vztahů, resp. v případě, že pro hustotu pravděpodobnosti nebude definováno označení.

Argumentem používaných funkcí bude zpravidla čas t . Definičním oborem těchto funkcí jsou všechna nezáporná reálná čísla, tj. interval $\langle 0, \infty \rangle$. Této skutečnosti můžeme přizpůsobit i integrační meze. Pro střední hodnotu náhodné veličiny vyjadřující dobu trvání jistého jevu vezmeme

$$E[X] = \int_0^{\infty} t f_X(t) dt.$$

2 Spolehlivost automatických strojů

Spolehlivost automatických výrobních systémů budeme zkoumat na základě spolehlivosti jednotlivých automatů, z nichž je výrobní systém vytvořen. Výrobní automat je prvkem výrobního systému a jeho vlastnosti jsou rozhodující pro spolehlivost celého systému. Kvantitativní hodnocení spolehlivosti automatu se uskutečňuje pomocí celé řady charakteristik, resp. ukazatelů. Pro nejdůležitější charakteristiky spolehlivosti automatu, které budeme používat při hodnocení výrobních systémů, uvedeme jejich definice, popř. odvození a fyzikální význam.

Činnost automatu budeme v souladu s obr. 1 chápat jako střídání dob bezporuchového provozu $\tau_1, \tau_2, \dots$ a dob obnovování provozuschopnosti $\theta_1, \theta_2, \dots$. Vylučujeme veškeré provozní a organizační prostoje. Doba bezporuchového provozu i doba obnovování provozuschopnosti mají charakter náhodných veličin a budeme předpokládat jejich vzájemnou nezávislost. Náhodnou veličinu odpovídající době bezporuchového provozu označíme τ , dobu obnovování provozuschopnosti vyjádříme náhodnou veličinou θ . Je zřejmé, že k popisu spolehlivosti automatu použijeme teorii pravděpodobnosti. Matematický aparát teorie pravděpodobnosti dovoluje definovat přímo některé důležité charakteristiky spolehlivosti automatu, ostatní charakteristiky získáme odvozením.

2.1. CHARAKTERISTIKY SPOLEHLIVOSTI

2.1.1 Doba bezporuchového provozu

Náhodná veličina τ , vyjadřující dobu bezporuchového provozu, je spojitá náhodná veličina s distribuční funkcí $F(t)$. Hodnota distribuční funkce vyjadřuje pravděpodobnost, že doba bezporuchového provozu τ bude menší než t nebo rovna t , tj.

$$F(t) = P(\tau \leq t). \quad (1)$$

Známe-li distribuční funkci, snadno odvodíme tzv. pravděpodobnost bez-

poruchového provozu $R(t)$,

$$R(t) = 1 - F(t) = P(\tau > t), \quad (2)$$

vyjadřující pravděpodobnost, že doba bezporuchového provozu bude delší než t .

Má-li distribuční funkce ve všech bodech derivaci

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}, \quad (3)$$

pak je funkce $f(t)$ hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny τ .

Střední doba T bezporuchového provozu automatu je v souladu s teorií pravděpodobnosti dána integrálem

$$T = E[\tau] = \int_0^{\infty} t f(t) dt. \quad (4)$$

Pro rozptyl $D[\tau]$ náhodné veličiny τ platí

$$D[\tau] = \int_0^{\infty} \{t - E[\tau]\}^2 f(t) dt. \quad (5)$$

Speciální funkci používanou v matematické teorii spolehlivosti je intenzita poruch $\lambda(t)$. Intenzitu poruch definujeme výrazem

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}. \quad (6)$$

Poněvadž současně

$$\lambda(t) = - \frac{R'(t)}{R(t)} = - \frac{d}{dt} [\ln R(t)], \quad (7)$$

dostaneme

$$R(t) = 1 - F(t) = \exp \left(- \int_0^t \lambda(t) dt \right). \quad (8)$$

Střední dobu bezporuchového provozu lze rovněž vyjádřit pomocí $\lambda(t)$ a $R(t)$ vztahy

$$T = \int_0^{\infty} t R(t) \lambda(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (9)$$

Jednoduchými úvahami si nyní pokusíme objasnit význam intenzity poruch. Hledíme podmíněnou pravděpodobnost $P(t, t + \Delta t)$ toho, že

automat bude v bezporuchovém provozu v intervalu $(t, t + \Delta t)$ – jev A , nebo když v intervalu $(0, t)$ neměl poruchu – jev B .

Zřejmě platí

$$P(t, t + \Delta t) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (10)$$

S použitím pravděpodobnosti bezporuchového provozu dostaneme

$$P(t, t + \Delta t) = \frac{R(t + \Delta t)}{R(t)}. \quad (11)$$

Pravděpodobnost $Q(t, t + \Delta t)$ výskytu poruchy právě v intervalu $(t, t + \Delta t)$, když $\tau > t$, je

$$\begin{aligned} Q(t, t + \Delta t) &= P(\tau \leq t + \Delta t | \tau > t) = 1 - P(t, t + \Delta t) = \\ &= \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)}. \end{aligned} \quad (12)$$

V limitě pro $\Delta t \rightarrow 0$ platí

$$Q(t, t + \Delta t) \approx - \frac{R'(t)}{R(t)} \Delta t = \lambda(t) \Delta t. \quad (13)$$

Intenzita poruch $\lambda(t)$ charakterizuje spolehlivost automatu v každém časovém okamžiku. Intenzitu poruch lze chápat jako hustotu podmíněné pravděpodobnosti výskytu poruchy v časovém okamžiku t , když v intervalu $(0, t)$ pracoval automat bez poruchy.

Předpokládejme, že jsme zaznamenali N dob bezporuchového provozu automatu. Z toho v $n(t)$ případech, byla doba bezporuchového provozu menší než t nebo rovna t a $\Delta n(t)$ je počet případů, kdy porucha nastala právě v intervalu $(t, t + \Delta t)$. Je-li Δt dostatečně malé a $\Delta n(t)$ dostatečně velké, můžeme za použití statistické definice pravděpodobnosti [10] a vzhledem ke vztahu (7) rovněž napsat

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= - \frac{R'(t)}{R(t)} \approx \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t R(t)} \approx \\ &\approx \frac{\frac{1}{N} [N - n(t) - (N - n(t + \Delta t))]}{\Delta t \frac{N - n(t)}{N}} = \frac{\Delta n(t)}{\Delta t [N - n(t)]}. \end{aligned} \quad (14)$$

Podle tohoto vztahu je intenzita poruch $\lambda(t)$ ekvivalentní počtu poruch za jednotku času vztahnému na celkový počet poruch $[N - n(t)]$, kterým předcházela bezporuchový provoz delší než t .

2.1.2 Doba obnovování provozuschopnosti

Náhodná veličina, jakou je doba obnovování provozuschopnosti Θ , postihuje vlastnosti automatu spojené s dobou trvání obnovování provozuschopnosti automatu po jeho poruše. Vždy předpokládáme, že po skončení obnovování provozuschopnosti je zařízení ve výchozím stavu. Během doby obnovování provozuschopnosti se uskuteční jak opravy mechanismů a vybavení stroje, tak výměny čisti stroje, a až v krajním případě i náhrada celého automatu ekvivalentním automatem.

Distribuční funkci spojitě náhodné veličiny Θ označíme $G(t)$, hustotu pravděpodobnosti, jestliže existuje, $g(t)$.

Zřejmě

$$G(t) = P(\Theta \leq t) \quad (15)$$

a v případě, že $G(t)$ má pro všechna $t \geq 0$ spojitou první derivaci,

$$g(t) = \frac{dG(t)}{dt} \quad (16)$$

Pravděpodobnost $N(t)$ neuskutečnění obnovy v čase t je dána vztahem

$$N(t) = P(\Theta > t) = 1 - G(t) \quad (17)$$

Pro střední dobu obnovování provozuschopnosti ϕ platí

$$\phi = E[\Theta] = \int_0^{\infty} t g(t) dt \quad (18)$$

Rozptyl náhodné veličiny Θ je dán vztahem

$$D[\Theta] = \int_0^{\infty} \{t - E[\Theta]\}^2 g(t) dt \quad (19)$$

Analogicky k intenzitě poruch $\lambda(t)$ definujeme intenzitu obnov $\mu(t)$ výrazem

$$\mu(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = \frac{N'(t)}{N(t)} \quad (20)$$

Snadno lze obráceně vyjádřit distribuční funkci pomocí intenzity obnov

$$G(t) = 1 - \exp \left(- \int_0^t \mu(t) dt \right) \quad (21)$$

Pro střední dobu obnovování provozuschopnosti rovněž platí

$$\phi = \int_0^{\infty} t N(t) \mu(t) dt = \int_0^{\infty} N(t) dt \quad (22)$$

2.1.3 Funkce obnovy a hustoty obnovy

Předpokládáme, že je nutno zajistit provoz automatu po dobu t , a nás zajímá, kolikrát bude provoz přerušen poruchou automatu. Doby mezi dokončením jednotlivých obnovování provozuschopnosti automatu označíme $x_1, x_2, x_3, \dots$. Doby obnovování provozuschopnosti a doby bezporuchového provozu jsou vesměs nezávislé náhodné veličiny. Při řešení této úlohy jsou možná dvě pojetí:

A) Předpokládáme okamžitou obnovu automatu, tj. $\Theta_i = 0$ pro $i = 1, 2, \dots$. Pro doby mezi obnovami platí $x_1 = \tau_1, x_2 = \tau_2, \dots$. Automat je neustále v bezporuchovém provozu, přerušovaném poruchami, přičemž doby obnovování provozuschopnosti neregistrujeme. Distribuční funkce $F(t)$ dob mezi obnovami je v tomto případě ekvivalentní $F(t)$, tj. $\bar{F}(t) = F(t)$.

B) Předpokládáme doby obnovování provozuschopnosti automatu o jisté konečné délce, dané rozložením $G(t)$. Doby mezi obnovami jsou dány vztahy $x_1 = \tau_1 + \Theta_1, x_2 = \tau_2 + \Theta_2, x_3 = \tau_3 + \Theta_3, \dots$. Pro distribuční funkci $F(t)$ platí

$$\bar{F}(t) = \int_0^{\infty} F(t - x) dG(x) \quad (23)$$

a pro její Laplaceův obraz

$$\bar{F}(p) = p F(p) G(p), \quad (24)$$

kde $F(p), G(p)$ jsou Laplaceovy obrazy funkcí $F(t), G(t)$.

Počet poruch, resp. počet obnov $n(t)$ v intervalu $(0, t)$ je náhodná veličina. Nechť $T_r = x_1 + x_2 + \dots + x_r$ je doba do výskytu r -té obnovy a $F_r(t)$ je distribuční funkce náhodné veličiny T_r , tj.

$$F_r(t) = P(T_r \leq t).$$

S pomocí teorie pravděpodobnosti lze odvodit pro $F_r(t)$ rekurentní vzorec

$$F_r(t) = \int_0^t F_{r-1}(t-x) d\bar{F}(x), \quad r > 1, \quad (25)$$

když $E_1(t) = \bar{F}(t)$.

Střední počet obnov v intervalu $(0, t)$, nazývaný též funkce obnovy $H(t)$, dostaneme ze vztahu

$$H(t) = E[v(t)] = \sum_{r=0}^{\infty} r P(v(t) = r). \quad (26)$$

Odtud

$$H(t) = \sum_{r=0}^{\infty} r [F_r(t) - F_{r+1}(t)] = \sum_{r=1}^{\infty} F_r(t). \quad (27)$$

Pro dostatečně velká t se $H(t)$ blíží hodnotě t/γ , přesněji [4],

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{\gamma}, \quad (28)$$

kde $\gamma = \int_0^{\infty} [1 - \bar{F}(t)] dt$ je střední hodnota doby mezi následujícími obnovami. Vztah (28) bývá nazýván základní větou teorie obnovy. Je zřejmé, že počet obnov automatu při zajišťování doby provozu o době t nejsnadněji odhadneme právě veličinou t/γ .

Z (27) snadno odvodíme tzv. integrační rovnici teorie obnovy

$$H(t) = \bar{F}(t) + \int_0^t H(t-x) d\bar{F}(x). \quad (29)$$

Zavedeme

$$H(p) = \mathcal{L}\{H(t)\} = \int_0^{\infty} H(t) e^{-pt} dt; \quad (30)$$

$$F(p) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} F(t) e^{-pt} dt$$

a s použitím Laplaceovy transformace dostaneme

$$H(p) = \frac{\bar{F}(p)}{1 - p\bar{F}(p)}. \quad (31)$$

Funkci obnovy $H(t)$ můžeme získat z (31) zpětnou Laplaceovou transformací.

Má-li distribuční funkce $\bar{F}(t)$ ve všech bodech $t \geq 0$ derivaci $\bar{F}'(x)$,

pak z (29) můžeme odvodit integrační rovnici pro hustotu obnovy

$$h(t) = \bar{f}(t) + \int_0^t h(t-x) \bar{f}(x) dx. \quad (32)$$

Jestliže

$$h(p) = \mathcal{L}\{h(t)\} \quad \text{a} \quad \bar{f}(p) = \mathcal{L}\{\bar{f}(t)\}, \quad (33)$$

dostaneme s použitím Laplaceovy transformace pro hustotu obnovy vztah

$$h(p) = \frac{\bar{f}(p)}{1 - \bar{f}(p)}. \quad (34)$$

V teorii obnovy má rovněž velký význam tzv. Blackwellova věta [4]. Blackwell dokázal, že pro libovolné $\omega > 0$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [H(t + \omega) - H(t)] = \frac{\omega}{\gamma}. \quad (35)$$

Nechť $Q(t)$ je libovolná nezáporná rostoucí funkce definovaná pro $t \geq 0$, patříci do $L_1(0, \infty)$ (tj. mající integrál na $(0, \infty)$). S použitím Blackwelloy věty odvodil W. L. Smith vztah

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} Q(t-u) dH(u) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} Q(y) dy. \quad (36)$$

Věta bývá nazývána hlavní věta teorie obnovy.

2.1.4 Použitá rozložení pravděpodobnosti

Všechny dosud uvedené charakteristiky spolehlivosti automatů byly definovány zcela obecně. Typ rozložení pravděpodobnosti náhodných veličin lze volit a konkrétní charakteristiky odvodit s využitím obecných vztahů. Předpokládáme pouze existenci spojitě distribuční funkce, mající pro všechna $t \geq 0$ derivaci.

Postupným rozvojem teorie spolehlivosti a především vyhodnocováním experimentálních pozorování strojů a zařízení byly zjišťovány empirické charakteristiky rozložení pravděpodobnosti. Jejich charakter je náhodný, a proto usílí o zjištění objektivního popisu spolehlivosti automatu musí směřovat ke stanovení matematického modelu. Matematickým modelem v našem případě je rozložení pravděpodobnosti dob bezporuchového provozu, popř. dob obnovování provozuschopnosti, které podle nějakého kritéria nejlépe odpovídá experimentálním výsledkům.

V teorii spolehlivosti se nejčastěji používá exponenciální, Weibullovo, gama, normální a logaritmicke-normální rozložení pravděpodobnosti. Popis jednotlivých rozložení uvedene pro označení spojené s náhodnou veličinou τ – dobou bezporuchového provozu. Charakterizovat náhodnou veličinu Θ (dobu obnovování provozuschopnosti) lze naprosto stejně, pouze použijeme odpovídajících symbolů.

Nejčastěji používaným rozložení v teorii spolehlivosti je exponenciální rozložení s distribuční funkcí

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (37)$$

a s hustotou pravděpodobnosti

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad (38)$$

$$f(t) = 0, \quad t < 0.$$

Pro $\lambda t \ll 1$ můžeme nahradit $e^{-\lambda t}$ prvními dvěma členy mocninné řady a

$$F(t) \approx \lambda t. \quad (39)$$

Dále platí

$$E[\tau] = T = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}, \quad (40)$$

$$D[\tau] = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (41)$$

$$R(t) = e^{-\lambda t}. \quad (42)$$

Pro intenzitu poruch (6) dostaneme

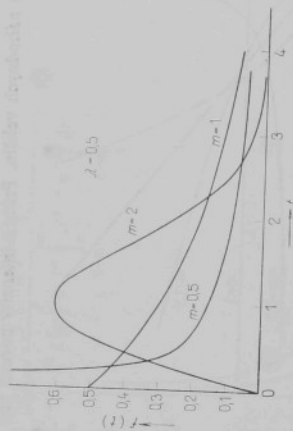
$$\lambda(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda. \quad (43)$$

Má-li náhodná veličina τ (resp. Θ) exponenciální rozložení, je intenzita poruch (resp. intenzita obnov) rovna konstantě λ (resp. μ). Důsledkem této vlastnosti je, že pravděpodobnost vzniku poruchy v libovolném okamžiku bezporuchového provozu je stejná, tzn., že nezávisí na době, po kterou byl automat v bezporuchovém provozu. Obdobně pravděpodobnost obnovy v jistém okamžiku nezávisí na době trvání obnovování provozuschopnosti. Exponenciálním rozložení lze proto popsat spolehlivost automatů, u kterých převažují náhle poruchy nad postupnými.

Právě pro tuto důležitou vlastnost je exponenciální rozložení nejčastěji

používaným rozložení při hodnocení spolehlivosti automatů. Provoz automatu, jehož doba bezporuchového provozu i doba obnovování provozuschopnosti jsou náhodné veličiny s exponenciálním rozložením, lze popsat Markovovým procesem [28]. Aparát Markovových procesů podstatně usnadňuje všechny výpočty vycházející z dynamického procesu střídání bezporuchového provozu a dob obnovování provozuschopnosti automatu. Obecnějším rozložením je Weibullovo rozložení s distribuční funkcí

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t^m} \quad (44)$$



Obr. 2. Hustota pravděpodobnosti Weibullova rozložení

a hustotu pravděpodobnosti (obráz. 2)

$$f(t) = m\lambda t^{m-1} e^{-\lambda t^m} \quad \text{pro } t \geq 0, \quad (45)$$

$$f(t) = 0 \quad \text{pro } t < 0.$$

Platí

$$E[\tau] = T = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)}{\lambda^{1/m}}, \quad (46)$$

$$D[\tau] = \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \right] \frac{1}{\lambda^{2/m}}, \quad (47)$$

kde

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx \quad (48)$$

je tzv. funkce gama.

Pokud je m celé číslo, můžeme použít vztahu

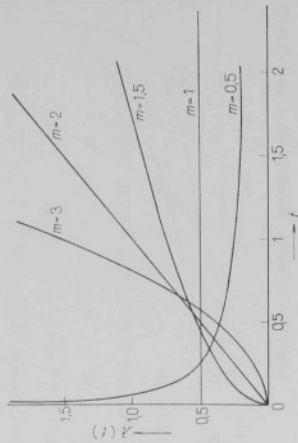
$$\Gamma(m) = (m-1)! \quad (49)$$

Pro $m = 1$ je Weibullovo rozložení ekvivalentní exponenciálnímu rozložení.

Intenzita poruch je dána vztahem

$$\lambda(t) = m\lambda t^{m-1} \quad (50)$$

Proti exponenciálnímu rozložení obsahuje Weibullovo rozložení další parametr m . Proto lze Weibullovým rozložením lépe vyjádřit některé složitější případy náhodných veličin. Průběh intenzity poruch pro $\lambda = 0,5$



Obr. 3. Průběh intenzity poruch Weibullova rozložení pro některá m

na obr. 3 dokumentuje, jak rozmanité průběhy intenzity poruch Weibullovo rozložení zachycuje: od výrazně klesající přes konstantní a lineárně rostoucí funkci až k exponenciální funkci intenzity poruch $\lambda(t)$.

Weibullovo rozložení bývá využíváno při popisu spolehlivosti elektronických zařízení.

Rozložení gama má hustotu pravděpodobnosti

$$f(t) = \frac{\lambda^m t^{m-1}}{\Gamma(m)} e^{-\lambda t} \quad \text{pro } t \geq 0, \quad (51)$$

$$f(t) = 0 \quad \text{pro } t < 0.$$

Pro distribuční funkci platí

$$F(t) = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \int_0^t x^{m-1} e^{-\lambda x} dx, \quad (52)$$

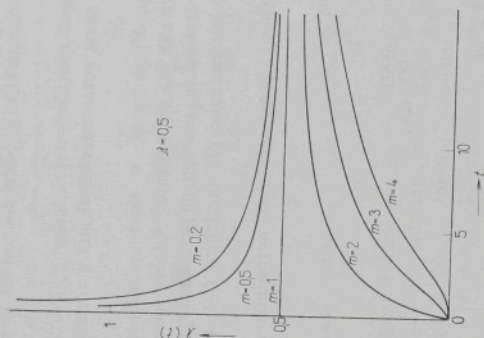
přičemž

$$E[\tau] = T = \frac{m}{\lambda}, \quad (53)$$

$$D[\tau] = \frac{m}{\lambda^2}. \quad (54)$$

Intenzita poruch je dána vztahem

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^m t^{m-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(m) - \lambda^m \int_0^t x^{m-1} e^{-\lambda x} dx}. \quad (55)$$



Obr. 4. Průběh intenzity poruch gama rozložení pravděpodobnosti

Na obrázku 4 je naznačen průběh intenzity poruch $\lambda(t)$ pro $\lambda = 0,5$ a pro vybrané hodnoty m .

Jestliže $X_1, X_2, \dots, X_m$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným exponenciálním rozložením s parametrem λ , pak náhodná veličina $(X_1 + X_2 + \dots + X_m)$ je náhodná veličina s rozložením gama. V tomto případě je m přirozené číslo a hustotu pravděpodobnosti můžeme vyjádřit

$$f(t) = \frac{\lambda^m t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda t}. \quad (56)$$

Pro intenzitu poruch pak platí

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^m t^{m-1}}{(m-1)! \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}}. \quad (57)$$

Pro $m = 1$ přechází gama rozložení v rozložení exponenciální s konstantní intenzitou poruch λ . Pro $m > 1$ intenzita poruch roste, tzn., že s dobou využívání automatu se zvyšuje pravděpodobnost vzniku poruchy. Situaci, kdy s růstem doby využití automatu klesá pravděpodobnost vzniku poruchy, popisuje případ $m < 1$.

Gama rozložení má přímou souvislost s rozložením χ^2 . Pro $\lambda = \frac{1}{2}$ je hustota pravděpodobnosti gama rozložení ekvivalentní s rozložením χ^2 s $k = 2m$ stupni volnosti.

Normální rozložení pravděpodobnosti, v teorii pravděpodobnosti i v technice nejčastěji používané, má své aplikace i v teorii spolehlivosti. Je využitelné u automatů s převážujícími postupnými poruchami vyvolanými fyzikálními, popř. chemickými změnami při opotřebení částí automatu během doby využívání.

Pro hustotu pravděpodobnosti a distribuční funkci normálního rozložení platí známé vztahy

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma}} e^{-\frac{(t-T)^2}{2\sigma^2}}, \quad (58)$$

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(x-T)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (59)$$

příčmě

$$E[\tau] = T; \quad D[\tau] = \sigma^2. \quad (60)$$

Velmi často používáme tzv. normované normální rozložení. Má-li náhodná veličina τ normální rozložení $N(T, \sigma)$, pak náhodná veličina $Y = (\tau - T)/\sigma$, charakterizovaná hustotou pravděpodobnosti $\varphi(y)$ a distribuční funkcí $\Phi(y)$, má normované normální rozložení. Platí

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad (61)$$

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (62)$$

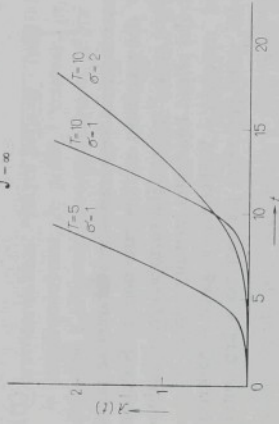
$$E[Y] = 0; \quad D[Y] = 1. \quad (63)$$

$$\varphi\left(\frac{t-T}{\sigma}\right) = \sigma f(t), \quad (64)$$

$$\Phi\left(\frac{t-T}{\sigma}\right) = F(t). \quad (65)$$

Intenzita poruch

$$\lambda(t) = \frac{e^{-\frac{(t-T)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{(2\pi)\sigma} - \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(x-T)^2}{2\sigma^2}} dx} = \frac{\frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{t-T}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{t-T}{\sigma}\right)} \quad (66)$$



Obr. 5. Intenzita poruch při normálním rozložení dob bezporuchového provozu

je pro některá T a σ vynesena v obr. 5. Je zřejmá její výrazná závislost na době provozu automatu, odpovídající postupnému opotřebení dílů, mechanismů a částí automatu. Normální rozložení pravděpodobnosti lze použít v případě, že $T \gg \sigma$, řekněme alespoň $T \geq 4\sigma$. V opačném případě použijeme tzv. useknuté normální rozložení [25].

Spolehlivost elektronických zařízení lze v některých případech modelovat rovněž logaritmicko-normálním rozložením pravděpodobnosti. Hustotu pravděpodobnosti logaritmicko-normálního rozložení lze vyjádřit vztahem

$$f(t) = \frac{M}{t\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log t - \log T_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad (67)$$

kde $M = \log e = 0,4343$.

Náhodná veličina má logaritmicko-normální rozložení, jestliže logaritmus této náhodné veličiny má normální rozložení. Pro distribuční funkci platí

$$F(t) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\log t - \frac{(z-z_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(z-z_1)^2}{2\sigma_1^2}} dz, \quad (68)$$

kde $z = \log t$, $z_1 = \log T_1$.

A dále

$$E[\tau] = T_1 e^{\frac{\sigma_1^2}{2M^2}}, \quad (69)$$

$$D[\tau] = T_1^2 e^{M^2} \left[e^{\frac{\sigma_1^2}{2M^2}} - 1 \right] = E[\tau] \left\{ \frac{E^2[\tau]}{T_1^2} - 1 \right\}. \quad (70)$$

Intenzita poruch

$$\lambda(t) = \frac{\frac{M}{t} e^{-\frac{(\log t - \log T_1)^2}{2\sigma_1^2}}}{\sigma_1 \sqrt{(2\pi) - \int_0^{\log t - \frac{(z-z_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(z-z_1)^2}{2\sigma_1^2}} dz}}. \quad (71)$$

Při aplikaci normálního a logaritmicko-normálního rozložení se velmi intenzivně projevuje vliv doby provozu na intenzitu poruch. S dobou provozu intenzita monotónně roste. Exponenciální rozložení pravděpodobnosti reprezentuje další krajní případ případ konstantní intenzity poruch.

Zbývající dvě uvedená rozložení – Weibullovo a gama – poskytují možnost popsat při vhodné volbě parametrů jak rostoucí a konstantní, tak i klesající průběh intenzity poruch.

2.1.5 Pohotovost

Při analýze provozu automatu z obr. 1 jsme dosud náhodnou veličinu dobu bezporuchového provozu a náhodnou veličinu dobu obnovování provozuschopnosti zkoumali odděleně. Pro vyhodnocení využití automatu v provozních podmínkách je nutné definovat syntetické charakteristiky, postihující současně vlastnosti obou náhodných veličin. Jednou z nejdůležitějších charakteristik tohoto typu je tzv. funkce (resp. součinitel) pohotovosti. Funkci pohotovosti $K_p(t)$ automatu rozumíme pravděpodobnost, že zařízení bude v libovolném okamžiku schopno provozu.

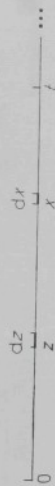
Předpokládáme, že doba bezporuchového provozu a doba obnovování provozuschopnosti automatu jsou nezávislé náhodné veličiny s distribu-

ními funkcemi $F(t)$ a $G(t)$ a hustotami pravděpodobnosti $f(t)$, $g(t)$. V čase $t = 0$ nechť je automat v provozu. Pak v čase t bude automat v provozu pouze v následujících dvou případech:

a) Doba bezporuchového provozu automatu je větší než t . Pravděpodobnost výskytu tohoto jevu je

$$R(t) = 1 - F(t).$$

b) V čase $z < t$ nastane porucha automatu. Porucha je odstraněna v čase x , přičemž $z \leq x \leq t$ (obr. 6). Snadno odvodíme, že:



Obr. 6. Cyklus jedné obnovy pro odvození funkce pohotovosti

- pravděpodobnost výskytu poruchy v intervalu $(z, z + dz)$ je $f(z) dz$;
- pravděpodobnost, že právě v intervalu $(x, x + dx)$ bude porucha odstraněna a obnovena provozuschopnost, je $g(x - z) dx$;
- pravděpodobnost, že v čase t bude automat provozuschopný, když je provozuschopný v okamžiku x , je $K_p(t - x)$.

Tedy pro pravděpodobnost výskytu druhého případu dostáváme

$$\int_0^t \int_0^{t-x} K_p(t-x) f(z) g(x-z) dz dx.$$

Oba případy jsou neslučitelné a vyčerpávají všechny možnosti, které mohou nastat. Pro funkci pohotovosti automatu zřejmě platí integrální rovnice

$$K_p(t) = R(t) + \int_0^t \int_0^{t-x} K_p(t-x) f(z) g(x-z) dz dx. \quad (72)$$

Pro řešení rovnice (72) lze užít Laplaceovu transformaci [8]. Rovnici převeďme na tvar

$$K_p(t) = A(t) + \int_0^t K_p(t-x) B(x) dx, \quad (73)$$

kde

$$A(t) = R(t), \quad B(t) = \int_0^t f(z) g(t-z) dz. \quad (74)$$

Uvažíme-li vlastnosti Laplaceovy transformace, zřejmě platí

$$A(p) = \mathcal{L}\{A(t)\} = \bar{R}(p), \quad (75)$$

$$B(p) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(z) g(t-z) dz\right\} = f(p) g(p), \quad (76)$$

kdýž $F(p)$, $G(p)$, $f(p)$, $g(p)$ jsou Laplaceovy obrazy funkcí $F(t)$, $G(t)$, $f(t)$, $g(t)$. Současně vezmeme

$$K_p(p) = \int_0^\infty K_p(t) e^{-pt} dt = \mathcal{L}\{K_p(t)\}. \quad (77)$$

Z (73) dostaneme

$$K_p(p) = A(p) + K_p(p) B(p). \quad (78)$$

Poněvadž

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}, \quad g(t) = \frac{dG(t)}{dt},$$

platí pro Laplaceovy obrazy vztahy

$$f(p) = p F(p) = 1 - p \bar{R}(p), \quad (79)$$

$$g(p) = p G(p) = 1 - p \bar{N}(p), \quad (80)$$

kde $\bar{R}(p)$ a $\bar{N}(p)$ jsou Laplaceovy obrazy pravděpodobnosti $R(t)$ bezporuchového provozu a pravděpodobnosti $N(t)$ neuskutečnění obnovy.

Pro $K_p(p)$ můžeme proto na základě vztahu (78) postupně odvodit

$$K_p(p) = \frac{\bar{R}(p)}{1 - f(p) g(p)}, \quad (81)$$

popř.

$$K_p(p) = \frac{\bar{R}(p)}{p[\bar{R}(p) + \bar{N}(p) - p \bar{R}(p) \bar{N}(p)]}. \quad (82)$$

Zpětnou Laplaceovou transformací pro konkrétní hustoty pravděpodobnosti $f(t)$, $g(t)$ lze odvodit vlastní funkci pohotovosti $K_p(t)$.

Limitu

$$K_p = \lim_{t \rightarrow \infty} K_p(t) \quad (83)$$

označujeme jako součinitel pohotovosti K_p . Z teorie Laplaceovy transfor-

mace [8] víme, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_p(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p K_p(p). \quad (84)$$

Aplikujeme-li tuto vlastnost obrazů a originálů funkcí ve vztahu (82), dostaneme

$$K_p = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\bar{R}(p)}{\bar{R}(p) + \bar{N}(p) - p \bar{R}(p) \bar{N}(p)}. \quad (85)$$

Odtud

$$K_p = \frac{\bar{R}(0)}{\bar{R}(0) + \bar{N}(0)}. \quad (86)$$

Avšak

$$\bar{R}(p) = \int_0^\infty R(t) e^{-pt} dt, \quad (87)$$

$$\bar{N}(p) = \int_0^\infty N(t) e^{-pt} dt, \quad (88)$$

a tedy

$$\bar{R}(0) = \int_0^\infty R(t) dt = T; \quad \bar{N}(0) = \int_0^\infty N(t) dt = \Phi. \quad (89)$$

Pro součinitel pohotovosti dostáváme jednoduchý vztah

$$K_p = \frac{T}{T + \Phi}. \quad (90)$$

Součinitel pohotovosti vyjadřuje pravděpodobnost, že za ustáleného provozu bude v libovolném okamžiku automat provozuschopný.

Vezmeme nyní interval, během kterého došlo u sledovaného automatu k n poruchám a n obnovám (obr. 1).

Je-li

$$\psi_n = \sum_{i=1}^n \tau_n; \quad \varphi_n = \sum_{i=1}^n \theta_n, \quad (91)$$

vyjadřuje zlomek

$$\frac{\psi_n}{\psi_n + \varphi_n} \quad (92)$$

poměrnou část intervalu, během kterého je automat provozuschopný. V sou-

ladu se zákony velkých čísel z teorie pravděpodobnosti platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_n}{n} = T, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{n} = \Phi, \quad (93)$$

a tedy

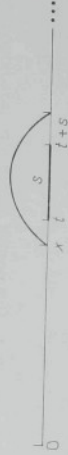
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_n}{\psi_n + \varphi_n} = \frac{T}{T + \Phi}. \quad (94)$$

Součinitel pohotovosti vyjadřuje rovněž poměrnou část intervalu, během které je automat v provozu. Tuto vlastnost součinitele pohotovosti budeme využívat při posuzování využití automatu v daných časových intervalech. Druhou část intervalu, ve které probíhalo obnovení provozuschopnosti automatu, charakterizujeme součinitelem prostoje K_{pr} , pro který platí

$$K_{pr} = 1 - K_p = \frac{\Phi}{T + \Phi}. \quad (95)$$

2.1.6 Součinitel operační pohotovosti

Stanovme nyní pravděpodobnost $P(t, s)$ bezporuchového provozu automatu v intervalu $(t, t + s)$ (obráz. 7). Bezporuchový provoz automatu v tomto intervalu může nastat ve dvou případech:



Obr. 7. Bezporuchový provoz automatu v intervalu o délce s

a) Automat pracuje bez poruchy po dobu větší než $t + s$. Pravděpodobnost tohoto jevu je $R(t + s)$.

b) V okamžiku x ($0 < x \leq t$) byla uskutečněna obnova automatu. V intervalu $(x, t + s)$ pracoval automat bez poruchy.

Pravděpodobnost výskytu druhého jevu odvodíme pomocí funkce obnovy $H(t)$ [2]. Označíme-li $h(t) = H'(t)$, můžeme pravděpodobnost výskytu obnovy automatu v intervalu $(x, x + dx)$ vyjádřit výrazem $h(x) dx$. Pro pravděpodobnost druhého jevu platí

$$\int_0^{t+s} R(t + s - x) h(x) dx = \int_0^{t+s} R(t + s - x) dH(x). \quad (96)$$

Pravděpodobnost $P(t, s)$ můžeme vyjádřit vztahem

$$P(t, s) = R(t + s) + \int_0^t R(t + s - x) dH(x). \quad (97)$$

Vezmeme

$$P(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t, s). \quad (98)$$

Pravděpodobnost $P(s)$ se podle [6] nazývá součinitel operační pohotovosti a označuje se K_{op} . Vyjadřuje pravděpodobnost, že automat bude provozuschopný v libovolném okamžiku a tímto okamžikem počínaje bude během daného časového intervalu pracovat bez poruchy.

K odvození pravděpodobnosti $P(s)$ použijeme hlavní větu teorie obnovy (36). Vezmeme $Q(y) = R(x + s)$. Funkce R splňuje všechny podmínky hlavní věty. Dostaneme

$$P(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t, s) = \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty R(x + s) dx, \quad (99)$$

kde pro případ B (čl. 2.1.3) $\gamma = T + \Phi$. Po substituci $x + s = u$ dostáváme konečný výraz

$$P(s) = K_{op} = \frac{1}{T + \Phi} \left[T - \int_0^s R(u) du \right]. \quad (100)$$

Všechny charakteristiky spolehlivosti automatu byly definovány zcela obecně pro libovolné rozložení obou náhodných veličin. Pro jednotlivé konkrétní případy je nutno vlastní charakteristiky odvodit.

2.1.7 Aplikace exponenciálního rozložení

V praxi se exponenciální rozložení používá velmi často. V oblasti teoretických výpočtů umožňuje zjednodušit některé jinak velmi komplikované výpočty. Hustota pravděpodobnosti doby bezporuchového provozu a doby obnovení provozuschopnosti a ostatní veličiny pro exponenciální rozložení s parametrem λ , $\mu > 0$ mají tvar

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}; \quad g(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad (101)$$

distribuční funkce

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad G(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad (102)$$

pravděpodobnost bezporuchového provozu (resp. pravděpodobnost neuskutečnění obnovy)

$$R(t) = e^{-\lambda t}; \quad N(t) = e^{-\mu t}, \quad (103)$$

intenzita poruch (resp. obnov)

$$\lambda(t) = \lambda; \quad \mu(t) = \mu \quad (104)$$

a střední hodnoty náhodných veličin jsou

$$T = \frac{1}{\lambda}; \quad \Phi = \frac{1}{\mu}. \quad (105)$$

Konstantní intenzita poruch i obnov umožňuje využít pro výpočet ukazatelů pohotovosti teorii Markovových procesů. Způsob odvození ukazatelů pohotovosti pomocí absolutních pravděpodobností Markovova procesu, modelujícího provoz automatu, je uveden např. v [19].

V našem případě využijeme k výpočtu obecný výraz (82). Zřejmě

$$\bar{R}(p) = \mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\} = \frac{1}{p + \lambda}; \quad (106)$$

$$\bar{N}(p) = \mathcal{L}\{e^{-\mu t}\} = \frac{1}{p + \mu}. \quad (107)$$

Dosadíme-li do (82), dostaneme

$$K_p(p) = \frac{p + \mu}{p(p + \mu + \lambda)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p + \mu + \lambda} = \frac{ap + a(\lambda + \mu) + bp}{p(p + \mu + \lambda)}.$$

Odtud

$$a + b = 1, \quad a(\lambda + \mu) = \mu \Rightarrow a = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad b = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (108)$$

Po dosazení

$$K_p(p) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{p} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{p + \mu + \lambda} \quad (109)$$

a po zpětné transformaci

$$K_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K_p(p)\} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}. \quad (110)$$

Pro součinitel pohotovosti a prostojů platí

$$K_p = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \quad K_{pr} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (111)$$

Funkci obnovy $H(t)$ a hustotu obnovy $h(t)$ stanovíme pro oba případy z čl. 2.1.3.

A. Předpokládáme, že z provozu automatu registrujeme pouze doby bezporuchového provozu. Vznik poruchy zaznamenáme, registrovaná doba obnovování provozuschopnosti je vždy nulová. Pak

$$\bar{F}(t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (112)$$

a pro Laplaceův obraz platí

$$\bar{F}(p) = \frac{\lambda}{p(p + \lambda)}. \quad (113)$$

Dosadíme do (31)

$$H(p) = \frac{\bar{F}(p)}{1 - p \bar{F}(p)} = \frac{\lambda}{p^2} \quad (114)$$

a po zpětné Laplaceově transformaci obdržíme

$$H(t) = \lambda t. \quad (115)$$

Obdobně

$$\bar{f}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \Rightarrow \bar{f}(p) = \frac{\lambda}{p + \lambda}. \quad (116)$$

Dosadíme-li do (34), platí

$$h(p) = \frac{\bar{f}(p)}{1 - \bar{f}(p)} = \frac{\lambda}{p} \Rightarrow h(t) = \lambda. \quad (117)$$

B. Doby bezporuchového provozu se střídají s dobami obnovování provozuschopnosti. Vezměme Laplaceův obraz distribuční funkce doby bezporuchového provozu a doby obnovování provozuschopnosti

$$F(p) = \frac{\lambda}{p(p + \lambda)}, \quad G(p) = \frac{\mu}{p(p + \mu)} \quad (118)$$

a dosadíme do (24). Dostaneme

$$\bar{F}(p) = \frac{\lambda \mu}{p(p + \lambda)(p + \mu)}. \quad (119)$$

Dosadíme do (31)

$$H(p) = \frac{\bar{F}(p)}{1 - p \bar{F}(p)} = \frac{\lambda \mu}{p^2(p + \lambda + \mu)} \quad (120)$$

a nakonec dostaneme

$$H(t) = \frac{\lambda \mu}{(\lambda + \mu)^2} [e^{-(\lambda + \mu)t} + (\lambda + \mu)t - 1]. \quad (121)$$

Zřejmě

$$\bar{f}(p) = p \bar{F}(p) = \frac{\lambda \mu}{(p + \lambda)(p + \mu)}. \quad (122)$$

Vzhledem k (34) platí

$$h(p) = \frac{\bar{f}(p)}{1 - \bar{f}(p)} = \frac{\lambda \mu}{p(p + \lambda + \mu)} \quad (123)$$

a odtud

$$h(t) = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} [1 - e^{-(\lambda + \mu)t}]. \quad (124)$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu automatu v intervalu $(t, t + s)$ stanovíme ze vztahu (97). V úvahu budeme brát pouze reálný provoz automatu, ve kterém se střídají doby bezporuchového provozu s dobami obnovování provozuschopnosti. Použijeme funkci obnovy podle vztahu (121), resp. hustotu obnovy (124).

$$\begin{aligned} P(t, s) &= R(t + s) + \int_0^s R(t + s - x) h(x) dx = \\ &= e^{-(t+s)} + \int_0^s e^{-\lambda(t+s-x)} \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} [1 - e^{-(\lambda + \mu)x}] dx. \end{aligned} \quad (125)$$

Po integraci a úpravě dostáváme

$$P(t, s) = \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \right] e^{-\lambda s} = K_p(t) e^{-\lambda s}. \quad (126)$$

Součinitel operační pohotovosti lze stanovit ze vztahu (100), popř. přímo limitním přechodem ve vztahu (126)

$$K_{op} = P(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t, s) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda s} = K_p e^{-\lambda s}. \quad (127)$$

2.2 EMPIRICKÉ STANOVENÍ CHARAKTERISTIK SPOLEHLIVOSTI

Zcela zásadní význam pro hodnocení spolehlivosti automatů mají experimentální výsledky. Prakticky ve všech případech lze charakteristiky spolehlivosti automatů odhadovat pouze na základě pozorování provozu automatů. Jen pokud známe spolehlivost jednotlivých částí automatu, lze vyjádřit výslednou spolehlivost celého systému (automatu) matematickou cestou.

Automat je pro naše účely zpravidla dvouhodnotová soustava, která se může vyskytovat pouze v provozu nebo ve stavu obnovování provozuschopnosti. Výsledkem pozorování budou proto dvě posloupnosti, posloupnost $\{t_{ij}\}_{i=1}^n$ dob provozu automatu mezi poruchami a posloupnost $\{y_i\}_{i=1}^n$ dob obnovování provozuschopnosti. Počet zaznamenaných hodnot je n . Zpracování obou posloupností je po formální stránce zcela shodné, proto se budeme zabývat pouze posloupností $\{t_{ij}\}_{i=1}^n$.

Velkou pozornost je nutné věnovat podmínkám, za kterých pozorování automatu probíhá. K vnějším podmínkám provozu automatu patří teplota a vlhkost vzduchu, chvění a otřesy základů stroje, stabilita vstupních parametrů energetických přípojek – elektrického proudu, tlakového vzduchu apod. Pro jednu zkoušku by se měly vnější podmínky pohybovat v takových mezích, aby jejich změny působení neměly podstatný vliv na spolehlivost automatu. Je-li nutné vyšetřit spolehlivost automatu i za jiných vnějších podmínek, pak se uskuteční další pozorování.

K vnějším podmínkám zřejmě náleží i působení obsluhy. Obsluha nesmí zasahovat do chodu automatu, aniž by zásah byl zaregistrován. Děle trvající zásah, který je v zájmu udržení, resp. obnovy provozu nutný, avšak nevyžaduje u běžného provozu vypnutí stroje, je nutné uskutečnit při současném odstavení stroje. Kratší zásahy o délce několika sekund se provedou bez vypínání chodu automatu a je nutné je zaregistrovat do zvláštního záznamu. Zásahy se dodatečně pojmomu do hodnocení spolehlivosti. Aby výsledky pozorování nebyly ovlivněny subjektivními vlastnostmi obsluhy, je výhodné střídání obsluhy během zkoušky.

Podstatný vliv na spolehlivost provozu výrobního automatu má jakost materiálu a polotovarů vstupujících do automatu. Fyzikální vlastnosti materiálu, tolerance parametrů polotovarů se v průběhu času mění. Při sledování spolehlivosti automatu musíme dbát na to, aby ani materiál ani polotovary nevykazovaly odchylky od jakosti předepisované výrobními

předpisů. V opačném případě by došlo ke zkreslení spolehlivostních charakteristik odvozených z pořízených záznamů.

Potřebný matematický aparát pro hodnocení spolehlivostních charakteristik automatu na základě souboru experimentálních údajů poskytuje matematická statistika. Učebnice matematické statistiky obsahují podrobné postupy odhadů charakteristik souborů a postupy testování předpokladů (hypotéz) o souborech. Na problematiku spolehlivosti jsou tyto metody aplikovány především v [11], [25] a [7]. Některé základní postupy pro bezprostřední použití jsou uvedeny v čl. 2.2.2.

2.2.1 Technické prostředky pro registraci provozu automatu

Sledování provozu výrobních automatů není většinou příliš složitá záležitost. Kontrolní čidla, registrojící dílečnou činnost automatu, způsobí při zjištění závady zastavení stroje. Pak stačí sledovat stav pohonu automatu. Pokud však chceme vyhodnotit vliv jednotlivých částí automatu na celkovou spolehlivost, je nutné zajistit u všech čidel registraci všech stavů automatu, které mohou způsobit zastavení automatu.

Registraci stavů automatu, popř. jeho částí, můžeme zabezpečit několika způsoby:

a) Ruční záznam

Pověřený pracovník je vybaven stopkami (hodinami) a zaznamenává do formuláře okamžik vzniku poruchy a okamžik obnovy automatu. Vzor formuláře pro ruční záznam údajů je např. v [19]. Výhoda využití vyčleněného pracovníka pro sledování spolehlivosti automatu spočívá především v tom, že může zaznamenat všechny průvodní jevy, které souvisí s výskytem poruchy i s následující obnovou. Může se osvědčit i grafický náčrt situace při poruše. Pověřený pracovník zakreslí do předem připraveného schématu mechanismu polohu nástrojů a polotovárů při poruše. Tyto náčrty mohou posloužit konstruktérům ke zjištění příčin poruch.

Ruční snímání a záznam dob bezporuchového provozu a dob obnovování provozuschopnosti nelze doporučit pro vyšší frekvenci střídání stavů. Větší počet změn stavů v intervalech kratších než 1 min nemůže už obsluha zodpovědně zachytit a je nutno použít záznamovou techniku.

b) Registrační přístroje

Pro záznam provozu automatu jsou využitelné běžné registrační přístroje řady ZiRg a ZeRg. Registrační přístroje ZiRg mají možnost od 1 záznamu o šířce 120 mm až do 4 záznamů o šířce 55 mm. Jeden přístroj umožňuje zaznamenat stavy nejvýše 4 automatů nebo jejich částí. Volba rychlosti posunu papíru je v rozmezí 10 až 36 000 mm · h⁻¹. Možnosti přístroje při záznamu dvoustavových soustav zůstávají nevyužité. Nevýhodou užívá se možnosti záznamu spojité veličiny po celé šířce. Provoz automatu je zaznamenán pouze dvěma polohami písaře a skokovými změnami.

Speciálně konstruovanými přístroji pro záznam časových intervalů a provozních dějů jsou zapisovače časových intervalů ZeRg 160. Jednotlivé stavy automatu musíme být schopni opět převést na napěťové impulsy. Zapisovač o rozměrech 170 × 160 × 360 je určen pro záznam dvacetisamostatných časových závislostí. Impulsy se zaznamenávají na iregistrační pás s metalizovanou vrstvou ve tvaru přerušované čáry. Pás je posouván rychlostí volitelnou v rozmezí 10 až 36 000 mm · h⁻¹. K zapisovači je dodáváno přidavné zařízení pro sečítání impulsů Npl 160. Sečítání impulsů je možné až do dvaceti samostatných časových záznamů sadou pětímístných nenulovaných elektromechanických počítadel.

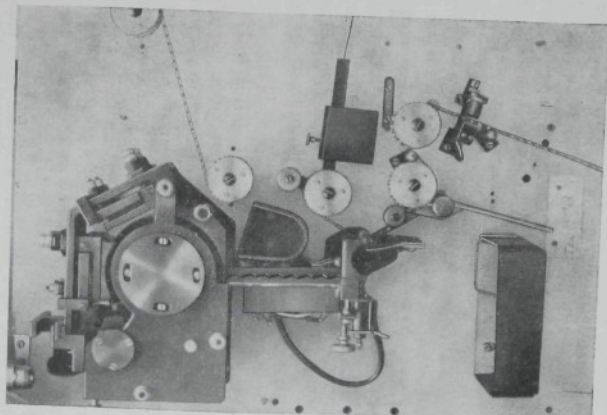
Přednosti registračních přístrojů a zapisovačů je dokonalý grafický záznam provozu automatu. Při delších zkouškách však může působit potíže vyhodnocení záznamu. Délku časových intervalů je nutno ze záznamu ručně odměřit a převést na číselnou posloupnost.

Příklad použití: V automatické lince na výrobu rezistorů se v základním zařízení (obr. 8) zakládají polotovary rezistorů do transportní pásky. Polotovary se z vibračního zásobníku transportují do násypky. Fotocidlo sleduje naplnění násypky a ovládá chod vibračního zásobníku. Z násypky se odeberají jednotlivé rezistory a předávají do mechanismu na rovnání drátových vývodů. Z něho rezistory padají do tzv. kaskádového zásobníku. Zakládací mechanismus odeberá rezistory z kaskády a zakládá je do pásky. Na začátku, uprostřed a na konci kaskády jsou umístěna tři čidla, kontrolující stav zásoby. Klesne-li zásoba na minimum, vypíná se zakládání. Zakládání spouští automaticky až střední čidlo, je-li zakryto. Je-li kaskáda plná, vypíná horní čidlo chod rovnacího mechanismu. Mechanismus se opět rozběhne při odclonění středního čidla.

Poruchovost zakládacího zařízení vyžadovala trvalý dozor obsluhy. K rozboru spolehlivosti zakládacího zařízení se přistoupilo, protože bylo

třeba

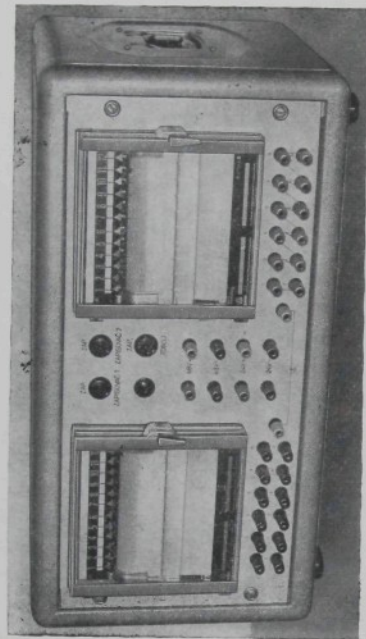
- zjistit místa s největším podílem na poruchovosti zařízení;
- zhodnotit spolehlivost zařízení před provedením úprav, aby bylo možno kvantitativně vyhodnotit zlepšení.



Obr. 8. Automat na založení rezistorů do pásky

K registraci provozu zařízení byl použit registrační přístroj na obr. 9. Na jeho vstup byly napojeny následující impulsy:

1. čidlo násytky,
2. horní čidlo kaskády,
3. střední čidlo kaskády,
4. dolní čidlo kaskády,
5. ruční ovládání vibračního zásobníku,

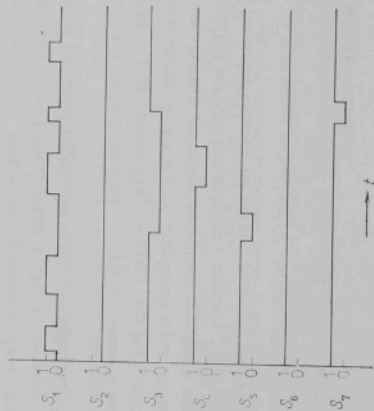


Obr. 9. Přístroj pro registraci poruch

6. ruční ovládání rovnacího mechanismu,
7. ruční ovládání základacího mechanismu.

Příklad záznamu je v obr. 10. Ze záznamu byly vyhodnoceny následující posoupnosti:

1. Doba obnovování provozuschopnosti vibračního zásobníku a násytky.
2. Doba obnovování provozuschopnosti rovnacího mechanismu.



Obr. 10. Záznam činnosti základacího zařízení

3. Doba obnovení provozuschopnosti základního mechanismu.
4. Doba bezporuchového provozu základního zařízení (zakládací mechanismus byl v činnosti).
5. Doba obnovení provozuschopnosti základního zařízení.

Bylo mimo jiné zjištěno, že na poruchách základního zařízení se podstatně podílejí poruchy v násypce. Zásah obsluhy byl nutný průměrně jednou za dvě minuty.

c) Procesografy (sledovací přístroje)

Do skupiny procesografů patří všechna speciální zařízení pro sledování stavů přístrojů. Procesografy registrují vždy provoz celého souboru zařízení a mohou být různě vybaveny.

Procesograf Vlati (MLR) je určen k trvalému sledování až 30 strojů. Stavby stroje mohou být signalizovány automaticky i ručně. Ruční signalizace pomocí tlačítek umožňuje registrovat vedle vlastního chodu a poruch zařízení ještě další situace, např. dobu seřizování stroje na nový výrobek, čekání na přísun nové výrobní dávky apod. Centrální procesografu zaznamenává stavby strojů jednak graficky na záznamový papír, jednak na děrnou pásku. Na děrnou pásku se údaje zaznamenávají ve zvoleném pořadí v časových intervalech 2 až 5 minut. Procesograf je rovněž vybaven světelnou signalizací stavů strojů pro okamžitý vizuální přehled, který je nutný pro dispečerské řízení výroby. Přímé spojení dispečera s obsluhou strojů je zabezpečeno telefonním spojením.

Podobné zařízení ke sledování běhu pracovního procesu a časového využití až patnácti NC pracovišť bylo zkonstruováno v ZPS Gottwaldov. Základem zařízení je soustava počítačů registrující v minutách jednotlivé stavby stroje.

Speciální zařízení pro sledování montážních strojů byla sestavena a sestrojena ve VÚMA Nové Město nad Váhom [16]. V první fázi byl využit registrací přístroj, který záznamem skoku o plné amplitudě signalizoval úspěšnou montáž, záznamem skoku o poloviční amplitudě zmetkový kus a přerušením skokových záznamů poruchu montážního automatu. Ve druhé fázi byl záznam přes řídící jednotku ukládán na děrnou pásku a vyhodnocován na počítači.

Procesografy a speciální sledovací přístroje dodává více výrobců. Mohou mít charakter jak trvale zabudovaných zařízení sloužících k dispečerskému řízení výroby, tak zařízení pro zkušební účely.

d) Řídící počítače

V současné době se s minipočítači (k nimž se řadí i mikropočítače) setkáváme takřka na všech výzkumných a vývojových pracovištích. Tato technika proniká velmi rychle i přímo do výroby. Pro zkušební účely není proto ve většině případů problémem využít ke sledování spolehlivosti výrobního zařízení řídící počítač.

Signály o chodu a prostoji strojů je nutno elektronicky odvodit od napájení hlavní jednotky a přes polovodičové nebo kontaktní vstupy vést do paměti počítače. Stav jednotlivých čidel je periodicky snímán s malou periodou a v paměti jsou zaznamenávány pouze změny stavu s časovým údajem. Z těchto dat snadno odvodíme hledané časové posloupnosti, které můžeme podrobit dalšímu statistickému průzkumu.

Řídící počítače s vhodnými periferiemi poskytují rozsáhlé možnosti pro různé formy vyšetřování spolehlivosti automatů.

2.2.2 Vyhodnocení experimentálních dat

Záznamy sledování bezporuchového provozu automatů mají formu posloupnosti časových úseků $\{t_i\}_{i=1}^n$. Přitom t_i je doba bezporuchového provozu mezi poruchou $i - 1$ a i . Předpokládáme, že po obnově je automat vždy ve výchozím stavu, a proto nezkoumáme experimentální údaje jako posloupnost, ale pouze jako soubor čísel bez registrace pořadí.

Vyhodnocení souboru experimentálních dat se řeší v matematické statistice. Aplikace na problematiku spolehlivosti jsou např. v [25], [7], [19], proto uvedeme bez zdůvodňování pouze některé základní vztahy.

Odhad střední doby $\bar{T}$ bezporuchového provozu ze souboru experimentálních dat se určí vztahem

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i. \quad (128)$$

Pro různé soubory dat (při pozorování stejného automatu) se bude odhad lišit. Odhad $\bar{T}$ má zřejmě náhodný charakter. Vedle tohoto tzv. bodového odhadu střední doby bezporuchového provozu je proto vhodné stanovit i intervalový odhad. Vyhledáváme horní mez t_H a dolní mez t_D tzv. konfidenčního intervalu. Požadujeme, aby s pravděpodobností $(1 - \alpha)$ se skutečná střední doba bezporuchového provozu nacházela v mezích konfi-

denčního intervalu. Z této podmínky lze odvodit vztahy pro obě meze

$$t_D = \frac{2n\bar{T}}{\chi^2_{2n, 1-\frac{\alpha}{2}}}, \quad (129)$$

$$t_H = \frac{2n\bar{T}}{\chi^2_{2n, \frac{\alpha}{2}}}, \quad (130)$$

kde $\chi^2_{2n, 1-\frac{\alpha}{2}}; \chi^2_{2n, \frac{\alpha}{2}}$ je $1 - \alpha/2$, resp. $\alpha/2$ kvantil χ^2 rozložení pro $2n$ stupňů volnosti; tabulky jsou obsaženy v [25], [19].

Rozptýl dob bezporuchového provozu odhadujeme tzv. empirickým rozptylem s^2 ze vztahu

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{T})^2. \quad (131)$$

Empirickou distribuční funkci $F_n(t)$ definujeme výrazem

$$F_n(t) = \frac{n(t)}{n}, \quad (132)$$

kde $n(t)$ je počet pozorování, kdy doba bezporuchového provozu byla menší než t nebo rovna t . Necht Δt je malý časový interval (popř. časová jednotka), pak pro empirickou hustotu pravděpodobnosti $f_n(t)$ dostáváme

$$f_n(t) = \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{n \Delta t}. \quad (133)$$

Pro empirickou intenzitu poruch $\lambda_n(t)$ platí

$$\lambda_n(t) = \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{[n - n(t)] \Delta t}. \quad (134)$$

Pro větší počet naměřených hodnot rozdělíme interval, vymezený maximální a minimální hodnotou, na jednotlivé třídy a zjišťujeme četnost výskytu experimentálních hodnot v jednotlivých třídách. Distribuční funkci, hustotu pravděpodobnosti i intenzitu poruch odvodíme z těchto četností (viz např. [7]).

Statistický význam odhadu spolehlivostních charakteristik je závislý na době pozorování automatu, popř. na počtu zaregistrovaných poruch. Požadujeme, aby absolutní chyba stanovení T odhadem T byla menší než $\bar{T}$ pro zvolené δ . Označme

$$r_1 = 1 + \delta. \quad (135)$$

Pro dané r_1 a zvolenou pravděpodobnost α ($\alpha = 0,2; 0,1; 0,02$) v tabulce [19] popř. [25] nalezneme m_1 . Hodnota m_1 vyjadřuje počet poruch nutný k tomu, aby absolutní chyba δT byla větší než chyba odvozená z konfidenčního intervalu o pravděpodobnosti α . Ze vztahu

$$t_{m_1} = \frac{1}{2} T \chi^2_{2m_1, 2\alpha}, \quad (136)$$

kde T je očekávaná střední doba bezporuchového provozu (odhadneme) a $\chi^2_{2m_1, 2\alpha}$ je α_1 kvantil χ^2 rozložení, dostaneme dobu sledování automatu t_{m_1} , během které dojde s pravděpodobností α_1 minimálně k m_1 poruchám.

Příklad 1:

a) Podle předběžného pozorování se průměr doby bezporuchového provozu jednoúčelového automatu pohybuje kolem hodnoty $T' = 3,5$ h. Stanovte dobu pozorování automatu tak, aby rozdíl průměru T zaznamenaných dob bezporuchového provozu a skutečné střední doby bezporuchového provozu T byl v absolutní hodnotě menší než $0,3 T$, tj. $\delta = 0,3$. Volte $\alpha = 0,2$, $\alpha_1 = 0,95$.

Řešení: Zřejmě

$$r_1 = 1 + \delta = 1,3$$

a z tabulky 31 [19] pro $r_1 = 1,3$, $\alpha = 0,2$ dostáváme $m_1 \doteq 30$. Kvantil $\chi^2_{2m_1, 2\alpha} = \chi^2_{60; 0,95}$ nalezneme v tabulce 30 [19] a podle (136) dostaneme

$$t_{m_1} = \frac{1}{2} T' \chi^2_{60; 0,95} = \frac{1}{2} \cdot 3,5 \cdot 79,1 = 138,4 \doteq 140 \text{ h.}$$

Abychom z experimentálních výsledků vyhodnotili střední dobu bezporuchového provozu s danou přesností, musíme sledovat automat tak, aby byl v provozu alespoň 140 h.

b) Při pozorování jednoúčelového automatu byly zaznamenaný následující doby bezporuchového provozu: 20; 0,6; 16,4; 1,35; 0,3; 3,7; 0,9; 1,9; 1,95; 0,65; 1,9; 1,05; 5,2; 9,1; 0,6; 4,95; 7,45; 0,1; 5,95; 2,4 h. Zjistěte základní charakteristiky souboru naměřených údajů.

Řešení: Vzhledem k tomu, že $n = 20$, $\sum_{i=1}^{20} t_i = 86,45$ h, dostaneme

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = 4,32 \text{ h.}$$

Konfidenční interval vyhlédáme pro $\alpha = 0,1$. Z tabulek [25], [19] dostá-

$$\text{vámé } \chi^2_{40;0,95} = 55,8; \chi^2_{40;0,05} = 26,5,$$

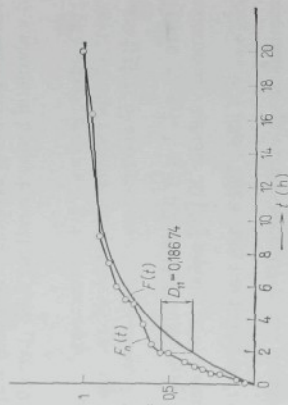
$$t_D = \frac{2 \cdot 20 \cdot 4,32}{55,8} = 3,10 \text{ h.}$$

$$t_H = \frac{2 \cdot 20 \cdot 4,32}{26,5} = 6,52 \text{ h.}$$

$$s^2 = \frac{556,01}{19} = 29,26.$$

S pravděpodobností 0,9 je skutečná střední doba bezporuchového provozu v intervalu (3,10; 6,52). Pro empirický rozptyl podle (131) platí

V tabulce 1 jsou obsaženy hodnoty empirické distribuční funkce $F_n(t)$. Jejich grafický záznam je v obr. 11 srovnán s teoretickou distribuční funkcí



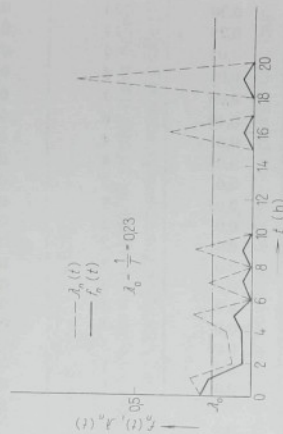
Obr. 11. Průběh empirické a teoretické distribuční funkce pro příklad 1

exponenciálního rozložení pro $T = 4,32$ h. Můžeme-li toto exponenciální rozložení pravděpodobnosti považovat za model pro experimentální soubor údajů, lze testovat např. Kolmogorovovým-Smirnovovým testem shody distribučních funkcí [19], [25]. Kritická hodnota tohoto testu je absolutní hodnota maximálního rozdílu empirické a teoretické distribuční funkce. V našem případě $D_{11} = 0,18674$. Kritickou hodnotu pro $\alpha = 0,01$ a $n = 20$ dostaneme z tabulky 34 [19]: $D_{20;0,01} = 0,352$. Vzhledem k tomu, že $D_{11} < D_{20;0,01}$, nevyloučil test možnost považovat teoretické rozložení za model pro soubor experimentálních dat.

Tab. 1. Hodnoty empirické distribuční funkce, hustoty pravděpodobnosti a intenzity poruch

t	$F_n(t)$	$f(t)$	$\lambda_n(t)$
1	0,1	0,05	0,300
2	0,3	0,10	0,357
3	0,6	0,20	0,377
4	0,6	0,05	0,111
5	0,65	0,05	0,125
6	0,9	0,05	0,143
7	1,05	0,10	0,333
8	1,35	0,05	0,0
9	1,9	0,05	0,0
10	1,9	0,05	0,333
11	1,95	0,05	0,0
12	2,4	0,05	0,0
13	3,7	0,05	0,0
14	4,95	0,05	0,0
15	5,2	0,05	0,0
16	5,95	0,05	0,0
17	7,45	0,05	0,500
18	9,1	0,0	0,0
19	16,4	0,0	1,00
20	20,0	0,0	0,0
1	0,05	0,30	0,300
2	0,10	0,25	0,357
3	0,20	0,05	0,111
4	0,20	0,05	0,125
5	0,25	0,05	0,143
6	0,30	0,05	0,175
7	0,35	0,10	0,333
8	0,40	0,05	0,0
9	0,50	0,05	0,333
10	0,55	0,05	0,0
11	0,60	0,05	0,0
12	0,65	0,05	0,0
13	0,70	0,05	0,0
14	0,75	0,05	0,0
15	0,80	0,05	0,0
16	0,85	0,05	0,500
17	0,90	0,05	0,0
18	0,95	0,0	1,00
19	0,990	0,0	0,0
20	1,00	0,0	0,0
1	0,05	0,30	0,300
2	0,10	0,25	0,357
3	0,20	0,05	0,111
4	0,20	0,05	0,125
5	0,25	0,05	0,143
6	0,30	0,05	0,175
7	0,35	0,10	0,333
8	0,40	0,05	0,0
9	0,50	0,05	0,333
10	0,55	0,05	0,0
11	0,60	0,05	0,0
12	0,65	0,05	0,0
13	0,70	0,05	0,0
14	0,75	0,05	0,0
15	0,80	0,05	0,0
16	0,85	0,05	0,500
17	0,90	0,05	0,0
18	0,95	0,0	1,00
19	0,990	0,0	0,0
20	1,00	0,0	0,0

Hodnoty empirické hustoty pravděpodobnosti $f_n(t)$ a empirické intenzity poruch $\lambda_n(t)$ jsou rovněž zachyceny v tab. 1 a vyneseny v obr. 12. Pro výpočet obou charakteristik bylo zvoleno $\Delta t = 1$ h.



Obr. 12. Průběh empirické hustoty pravděpodobnosti a intenzity poruch

2.2.3 Rozložení pravděpodobnosti souboru experimentálních údajů

Jako výsledek sledování spolehlivosti automatického zařízení získáme posloupnost dob bezporuchového provozu $\{t_{ij}\}_{i=1}^n$. Snadno sestavíme graf i tabulku empirické distribuční funkce. Nyní mohou nastat v zásadě čtyři případy:

a) Na základě už provedených analýz spolehlivosti automatu je znám typ teoretického rozložení pravděpodobnosti a distribuční funkce a jeho parametry. Distribuční funkce je definována náhodná proměnná, v tomto případě doba bezporuchového provozu. Teoretické rozložení je modelem pro doby bezporuchového provozu a charakterizuje tzv. základní soubor. Experimentální výsledky jsou výběrem z tohoto základního souboru. Testem χ^2 nebo Kolmogorovým-Smirnovovým testem [25], [19] lze zjistit, zda výběr (experimentální hodnoty) pochází z daného základního souboru. Výsledek testu potvrdí nebo vyloučí hypotézu. Pokud test potvrdí, že experimentální hodnoty vyhovují teoretickému rozložení, můžeme i nadále považovat teoretické rozložení za model vhodný pro popis dob bezporuchového provozu automatu. Bude-li výsledek testu negativní je zřejmé, že se změnila vlastnosti automatu, okolní podmínky vstupních polotovarů.

b) Známé typ rozložení pravděpodobnosti dob bezporuchového provozu,

avšak neznáme jeho parametry. Odhadneme parametry rozložení pravděpodobnosti pomocí experimentálních údajů. Takto získaný model pak použijeme pro test shody s empirickou distribuční funkcí. Pokud je výsledek testu pozitivní, použijeme modelu k popisu spolehlivostních vlastností automatu, dokud nevznikne rozpor s novými experimentálními údaji.

c) Neznáme typ rozložení pravděpodobnosti dob bezporuchového provozu. Je nutné sestavit graf empirické hustoty pravděpodobnosti. Ohodnotíme především polohu maximální hodnoty a symetrii. Ze známých rozložení vybereme jedno nebo i více rozložení, která by mohla nejlépe plnit funkci modelu pro empirickou hustotu pravděpodobnosti. Pro toto rozložení pravděpodobnosti odhadneme z experimentálních hodnot jejich parametry. Dávají-li dvě rozložení přibližně stejné výsledky, volíme rozložení s parametry, jejichž výpočet je snadnější.

Vhodnou pomůckou pro odhad rozložení pravděpodobnosti základního souboru k danému souboru empirických dat jsou tzv. pravděpodobnostní sítě. Do pravděpodobnostní sítě pro zvolené rozložení pravděpodobnosti vyneseme empirickou distribuční funkci. Pokud empirická data vyhovují zvolenému typu rozložení, blíží se tvar empirické distribuční funkce, přímce, popř. je možno grafický záznam empirické distribuční funkce na pravděpodobnostním papíře přímkou velmi dobře vyrovnat. V opačném případě vezmeme pravděpodobnostní síť pro jiný typ rozložení a zkoumáme znovu linearitu závislosti.

d) Předpokládáme, že známe několik souborů údajů o pozorování bezporuchového provozu jednoho automatu. Empirické hustoty pravděpodobnosti avšak vykazují značné odchylky a nelze jednoznačně stanovit teoretické rozložení pravděpodobnosti, které by mohlo sloužit jako zobecněný model. Tento jev může způsobit řada okolností: Mění se vlastnosti automatu, podmínky činnosti automatu při každém pozorování byly různé, záznamy o bezporuchovém provozu byly chybně vedeny apod. Analýza těchto možných příčin nesrovnalostí ve výsledcích může objasnit jejich původ. Metody matematické statistiky umožňují rovněž na pravděpodobnostním principu testovat, zda dva empirické soubory údajů mohou pocházet ze stejného základního souboru [25]. Těmito tzv. neparametrickými testy zjistíme, zda jsou odchylky empirických rozložení statisticky závažné a prokazatelné. Jestliže rozbor možných příčin odchylek ve výsledcích nevedl k jejich objasnění a testy empirických souborů ukazují na statisticky závažné rozdíly, nelze příměně jednoduchým způsobem stanovit model pravděpodobnosti bezporuchového provozu.

Pro získání teoretického rozložení pravděpodobnosti, které má sloužit jako model pro danou fyzikální veličinu (dobu bezporuchového provozu), musíme stanovit odhady parametrů podle dosažených experimentálních údajů. Podrobně se touto problematikou zabývá matematická statistika a speciálně teorie bodových odhadů. Pro účely hodnocení spolehlivostních experimentálních údajů jsou metody popsány především v [25], [11], [7]. Ukažeme proto pouze základní vztahy pro odhady parametrů nejčastěji používaných rozložení pravděpodobnosti.

Vztah (128) definuje odhad $\bar{T}$ střední doby bezporuchového provozu automatu. Pomocí $\bar{T}$ snadno stanovíme odhad $\bar{\lambda}$ intenzity poruch jako jediného parametru *exponenciálního rozložení*. Platí

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\bar{T}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i}. \quad (137)$$

Položíme $\lambda \approx \bar{\lambda}$ a předpokládáme, že doba bezporuchového provozu automatu jako náhodná veličina má distribuční funkci

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Weibullovo rozložení má distribuční funkci (44) se dvěma parametry λ, m . Parametr λ odhadujeme veličinou $\bar{\lambda}$ a parametr m veličinou $\bar{m}$ ze vztahů

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\bar{m}} \sum_{i=1}^n t_i^m, \quad (138)$$

$$y = \frac{1}{\bar{m}} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^m \ln t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^m} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i. \quad (139)$$

Rovnice pro neznámé $\bar{\lambda}$ a $\bar{m}$ lze poměrně jednoduše řešit kombinací výpočtů na číslicovém počítači s grafickým záznamem. Pro zvolenou posloupnost hodnot $\bar{m}$ stanovíme ze (139) hodnoty y a závislost vyneseme do grafu. Průsečík získané křivky a křivky $y = 1/m$ je hledaný kořen $\bar{m}$. Odhad parametru $\bar{\lambda}$ vypočteme ze vztahu (138). Jiný způsob řešení soustavy rovnic je např. v [7].

Odhady parametrů *gama rozložení* $\bar{\lambda}, \bar{m}$ získáme ze vztahů

$$\ln \left(\frac{1}{\bar{m}} \sum_{i=1}^n t_i \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i = \gamma(\bar{m}), \quad (140)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{n\bar{m}}{\sum_{i=1}^n t_i}. \quad (141)$$

K vypočtenému $\gamma(\bar{m})$ z rovnice (140) nalezneme v tabulce III.8. [7] hodnotu $\bar{m}$. Dosadíme do (141) a stanovíme i odhad $\bar{\lambda}$ druhého parametru *gama rozložení*.

Odhady parametrů *normálního rozložení* μ, σ^2 se stanoví známými vztahy

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i, \quad (142)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{T})^2. \quad (143)$$

Je-li nutno vybudovat na základě experimentálních výsledků teoretický model pro danou náhodnou veličinu, vezmeme, jako ve všech ostatních případech $\mu \approx \bar{T}, \sigma^2 \approx s^2$.

Logaritmicko-normální rozložení má taková náhodná veličina, jejíž logaritmus má normální rozložení. Odhady parametrů logaritmicko-normálního rozložení (67) T_1, σ_1^2 označíme $\bar{T}_1, \bar{\sigma}_1^2$. Pro jejich výpočet použijeme

$$\log \bar{T}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log t_i, \quad (144)$$

$$\bar{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\log t_i - \log \bar{T}_1)^2. \quad (145)$$

Vztahy (144), (145) platí v případě, že logaritmicko-normální rozložení bylo definováno v souladu se vztahy (67), (68) pro dekadický logaritmus náhodné veličiny.

dosáhneme zvýšení pohotovosti výrobního zařízení, které se projeví ve zvýšení výkonu. Kvantitativní hodnocení zlepšení spolehlivosti výrobního zařízení při záruční zálohy je nutné pro zjištění ekonomické efektivity. Z tohoto důvodu se budeme zabývat vyhodnocením některých forem zálohování.

3.1 ZÁLOHOVÁNÍ BEZ OBNOVY

Každé využití automatického výrobního zařízení předpokládá vznik poruchy a její opravu. V některých případech však obnovení provozuschopnosti zařízení není možné bezprostředně po vzniku poruchy. Nemusí být vždy k dispozici příslušný specialista nebo obnova zařízení nelze bezprostředně uskutečnit v daných provozních podmínkách.

Ve výpočtem středisku např. mívají největší poruchovost elektro-mechanické periferie počítače (elektrický psací stroj, děrovač pásky apod.). Technici počítače jsou zpravidla orientováni na centrální jednotku a paměť a opravy těchto periférií zabezpečují specialisté. Jejich činnost ve středisku je periodická a v době své přítomnosti uvedou do provozu všechna vadná zařízení. Pro zajištění nepřetržité funkce výpočetního systému je k dispozici několik záložních zařízení těchto méně spolehlivých periférií.

Mějme soustavu jednoho automatu a záložního automatu v nezatiženém stavu. Při poruše automatu se okamžitě připojuje záložní automat. Okamžik poruchy soustavy je dán okamžikem vzniku poruchy i u záložního automatu. Zjistíme pravděpodobnost bezporuchového provozu a střední dobu bezporuchového provozu daného systému v případě, že $F_1(x)$, $F_2(x)$ jsou distribuční funkce dob bezporuchového provozu automatu a zálohy.

V podstatě se jedná o zjištění distribuční funkce náhodné veličiny ekvivalentní součtu dob bezporuchového provozu automatu a zálohy. Z teorie pravděpodobnosti [23] je známo, že distribuční funkci $F(x)$ doby bezporuchového provozu soustavy můžeme zjistit ze vztahu

$$F(x) = \int_0^x F_1(x-y) dF_2(y) \quad (146)$$

a pro střední dobu T_s bezporuchového provozu soustavy platí

$$T_s = \int_0^\infty x dF(x). \quad (147)$$

Má-li doba bezporuchového provozu automatu i zálohy exponenciální

Skutečný výkon automatického výrobního zařízení značně ovlivňuje jeho spolehlivost. Skutečný výkon nemusí být v souladu s požadavky, které klademe na zařízení. Provozní vlastnosti výrobního zařízení lze zlepšit dvěma způsoby.

Především lze usilovat o zlepšení spolehlivosti a o případné zvýšení výkonu zařízení. Úpravy zařízení jsou spojeny s náklady na vývoj a zhotovení dokumentace a s náklady na vlastní rekonstrukci a uvedení do provozu. Náklady na zlepšování spolehlivosti však nerostou lineárně v závislosti např. na růstu součinitele pohotovosti, ale podstatně rychleji. Od jisté hranice je další zlepšování parametrů zařízení neefektivní. Při posuzování ekonomičnosti bereme v úvahu přínos zvýšeného skutečného výkonu zařízení a současně veškeré náklady spojené s rekonstrukcí i s provozem zařízení.

Druhou možnou cestou k dosažení stejného cíle je zálohování. Zálohování může mít nejrůznější formy. Zálohovat můžeme pouze jeden prvek, součást, mechanismus automatu nebo celý automat ekvivalentním strojem. Prvek nebo automat v záloze zatěžujeme na místo poškozeného v okamžiku vzniku poruchy. Budeme tedy používat výlučně formu substituční zálohy. Na rozdíl od toho spočívá záloha v trvalém připojení záložních prvků k základnímu systému.

Prvek v záloze se může vyskytovat v několika různých stavech:

1. *Nezatižená záloha:* Záložní prvek není v zatižovacím režimu, nemůže u něho vzniknout porucha. Zpravidla rovněž předpokládáme, že v okamžiku zafazení, resp. spuštění je pravděpodobnost vzniku poruchy nulová.
2. *Odležená záloha:* Záložní prvek plní funkci v mírnějším pracovním režimu.
3. *Zatížená záloha:* Záložní prvek plní svoji funkci ve stejném pracovním režimu jako zálohovaný. Na prvu v záloze může vzniknout porucha.

K popisu činnosti zálohovaného systému je nutné připojit informaci o organizaci údržbové činnosti (zda se prvek opraví okamžitě po výskytu poruchy, nebo se udržuje provoz až do vyčerpání všech záložních prvků a pak se opraví všechny najednou).

Je zřejmé, že zařazením záložních prvků, popř. celých záložních automatů,

rozložení se stejnou intenzitou poruch λ , pak ze (146) lze odvodit, že doby bezporuchového provozu soustavy mají gama rozložení druhého řádu s parametrem λ a hustotou pravděpodobnosti

$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \quad (148)$$

Střední doba bezporuchového provozu bude

$$T_s = \frac{2}{\lambda}. \quad (149)$$

Výpočet můžeme zobecnit i na celkový počet n automatů s intenzitou poruch λ ($n - 1$ automatů tvoří nezátěženou zálohu), pak dostaneme

$$f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0; \quad n = 1, 2, \dots, \quad (150)$$

tj. hustota pravděpodobnosti gama rozložení n -tého řádu s parametrem λ . Charakteristiky rozložení jsou dány vztahy:

$$\text{střední hodnota } T_s = n/\lambda, \quad (151)$$

$$\text{rozptyl } \sigma^2 = n/\lambda^2. \quad (152)$$

Pravděpodobnost $R_s(t)$ bezporuchového provozu lze určit z definice

$$\begin{aligned} R_s(t) &= 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(x) dx = \\ &= \left[1 + \lambda t + \frac{1}{2} \lambda^2 t^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \lambda^{n-1} t^{n-1} \right] e^{-\lambda t}. \end{aligned} \quad (153)$$

Pro dva automaty dostaneme

$$R_s(t) = e^{-\lambda t} (1 + \lambda t). \quad (154)$$

Vezměme nyní případ, kdy řídicí počítač ovládá složité technologické zařízení a při poruše počítače hrozí havárie celého zařízení (elektrárna, letadlo apod.). Bývá účelné v těchto případech použít záložního řídicího počítače, který musí pracovat ve stejném režimu, zpracovávat stejné údaje jako hlavní počítač, aby byl kdykoli schopen převzít jeho funkci.

Zobecníme-li tento případ, máme v soustavě k dispozici n automatů, které pracují současně a naprosto nezávisle a porucha soustavy nastane, jestliže všechny automaty budou v poruše. Nechť distribuční funkce každého automatu je $F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)$. Pro pravděpodobnost $R_s(t)$ bezporucho-

vého provozu soustavy zřejmě platí

$$R_s(t) = 1 - F_1(t) F_2(t) \dots F_n(t), \quad (155)$$

pro distribuční funkci

$$F_s(t) = F_1(t) F_2(t) \dots F_n(t) \quad (156)$$

a střední dobu bezporuchového provozu systému

$$T_s = \int_0^\infty t dF_s(t). \quad (157)$$

Předpokládejme nyní, že systém tvoří n automatů s exponenciálním rozložením dob bezporuchového provozu s intenzitou poruch λ .

Pak

$$F_1(t) = F_2(t) = \dots = F_n(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (158)$$

a odtud

$$R_s(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n.$$

Pro tento případ

$$\begin{aligned} T_s &= \int_0^\infty R_s(t) dt = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\lambda t})^n] dt = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Speciálně pro nejednodušší automat a jednu zálohu ($n = 2$) dostaneme

$$F_s(t) = (1 - e^{-\lambda t})^2, \quad (160)$$

$$R_s(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^2 = e^{-\lambda t} (2 - e^{-\lambda t}), \quad (161)$$

$$T_s = \frac{3}{2\lambda}. \quad (162)$$

Příklad 2:

Výpočetní středisko je vybaveno třemi stejnými děrovači dřevě pásky. Jejich doba bezporuchového provozu má exponenciální rozložení, pro které $\lambda = 0,02 \text{ h}^{-1}$. Stanovte střední dobu bezporuchového provozu a pravděpodobnost bezporuchového provozu děrovačů, je-li používán vždy jen jeden děrovač. Určete pravděpodobnost bezporuchového provozu po dobu $t = 16 \text{ h}$.

Řešení: Pro $n = 3$ dostaneme z (150)

$$f(t) = \frac{1}{2} \lambda^3 t^2 e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

a dosadíme do (153)

$$R_3(t) = 1 - \frac{1}{2} \lambda^3 \int_0^t x^2 e^{-\lambda x} dx = \left[1 + \lambda t + \frac{1}{2} \lambda^2 t^2 \right] e^{-\lambda t}.$$

Pro $\lambda = 0,02$

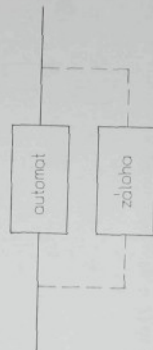
$$R_3(16) = (1 + 0,02t + 0,0002t^2) e^{-0,02t},$$

$$T_3 = \frac{3}{0,02},$$

$$R_3(16) = (1 + 0,02 \cdot 16 + 0,0002 \cdot 256) e^{-0,02 \cdot 16} = 0,99576.$$

3.2 JEDNONÁSOBNÉ ZÁLOHOVÁNÍ S OBNOVOU

Budeme se zabývat rozbořem činnosti nejčastěji se vyskytující soustavy tvořené automatem s jednou zálohou (obr. 13). Předpokládáme,



Obr. 13. Automat se zálohou

že doba bezporuchového provozu automatu i zálohy má exponenciální rozložení s parametrem λ a λ_1 . Doby obnovování provozuschopnosti obou zařízení necht' mají distribuční funkci $G(t)$ a hustotu pravděpodobnosti $g(t)$. Je zřejmé, že $\lambda_1 = 0$ platí pro nezátíženou zálohu a pro $\lambda_1 = \lambda$ dostaneme případ zatížené zálohy ekvivalentním automatem.

Automat je v provozu až do své poruchy. V okamžiku poruchy přebírá jeho funkci záloha a automat je ve stavu obnovování provozuschopnosti. Jestliže do obnovy záloha neustále pracuje, vymění si role a automat se stane záložním. Vznikne-li během doby obnovování provozuschopnosti automatu porucha i na záložním stroji, opravuje se okamžitě i záloha a

pracovat začne první automat, u kterého byla porucha odstraněna. Druhý automat pak v okamžiku obnovy přejímá funkci zálohy.

Nejdůležitější charakteristikou spolehlivosti provozu zálohované soustavy je pravděpodobnost bezporuchového provozu $p(t)$ soustavy v časovém intervalu $\langle 0, t \rangle$. Při odvození $p(t)$ lze podle [11] rozložit bezporuchový provoz systému na následující případy:

a) V intervalu $\langle 0, t \rangle$ se nevyskytla žádná porucha. Pravděpodobnost $p_a(t)$ tohoto jevu je

$$p_a(t) = e^{-(\lambda + \lambda_1)t}. \quad (163)$$

b) První porucha automatu nastala v čase $x < t$. Až do doby t pracuje bez poruchy záložní automat. Pravděpodobnost výskytu jevu je

$$p_b(t) = (\lambda + \lambda_1) \int_0^t e^{-(\lambda + \lambda_1)x} [1 - G(t - x)] e^{-\lambda(t-x)} dx. \quad (164)$$

c) První porucha automatu nastala v čase $x < t$. V čase y ($x < y < t$) se uskutečnila obnova automatu a v čase $(t - y)$ pracovala soustava bez poruchy. Dostaneme

$$p_c(t) = (\lambda + \lambda_1) \int_0^t p(t - y) e^{-\lambda y} \int_0^y e^{-\lambda_1 x} g(y - x) dx dy. \quad (165)$$

Všechny tři jevy jsou neslučitelné, proto pro pravděpodobnost $p(t)$ bezporuchového provozu zálohované soustavy platí

$$\begin{aligned} p(t) &= p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) = \\ &= e^{-(\lambda + \lambda_1)t} + (\lambda + \lambda_1) \int_0^t e^{-(\lambda + \lambda_1)x} [1 - G(t - x)] e^{-\lambda(t-x)} dx + \\ &+ (\lambda + \lambda_1) \int_0^t p(t - y) e^{-\lambda y} \int_0^y e^{-\lambda_1 x} g(y - x) dx dy \end{aligned} \quad (166)$$

a po úpravě

$$p(t) = A(t) + \int_0^t p(t - y) B(y) dy, \quad (167)$$

kde

$$A(t) = e^{-(\lambda + \lambda_1)t} + (\lambda + \lambda_1) \int_0^t e^{-(\lambda + \lambda_1)x} [1 - G(t - x)] e^{-\lambda(t-x)} dx,$$

$$B(t) = (\lambda + \lambda_1) e^{-\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda_1 x} g(t - x) dx.$$

Integrační rovnici (167) budeme řešit s využitím Laplaceovy transformace. Výraz $A(t)$ lze upravit na tvar

$$A(t) = e^{-(\lambda + \lambda_1)t} + \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda_1} e^{-\lambda t} - \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda_1} e^{-(\lambda + \lambda_1)t} - e^{-\lambda t}(\lambda + \lambda_1) \int_0^t e^{-\lambda_1 x} G(t-x) dx.$$

Odtud

$$\mathcal{L}\{A(t)\} = A(p) = \frac{1}{p + \lambda + \lambda_1} + \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{p + \lambda} - \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{p + \lambda + \lambda_1} - (\lambda + \lambda_1) \frac{1}{p + \lambda + \lambda_1} G(p + \lambda_1),$$

přičemž $G(p) = \mathcal{L}\{G(t)\}$.

Poněvadž

$$G(t) = \int_0^t g(z) dz \Rightarrow G(p + \lambda) = \frac{\bar{g}(p + \lambda)}{p + \lambda},$$

kde $\mathcal{L}\{g(t)\} = \bar{g}(p)$, dostaneme nakonec

$$A(p) = \frac{p + \lambda + (\lambda + \lambda_1)[1 - \bar{g}(p + \lambda)]}{(p + \lambda)(p + \lambda + \lambda_1)}. \quad (168)$$

Obdobně

$$\mathcal{L}\{B(t)\} = B(p) = \frac{(\lambda + \lambda_1)\bar{g}(p + \lambda)}{p + \lambda + \lambda_1}. \quad (169)$$

Zavedeme

$$\mathcal{L}\{p(t)\} = P(p) \quad (170)$$

a vzhledem k vlastnostem Laplaceovy transformace obdržíme z (167)

$$P(p) = A(p) + P(p)B(p). \quad (171)$$

Odtud po úpravách

$$P(p) = \frac{p + \lambda + (\lambda + \lambda_1)[1 - \bar{g}(p + \lambda)]}{(p + \lambda)[p + \lambda + \lambda_1 - (\lambda + \lambda_1)\bar{g}(p + \lambda)]}. \quad (172)$$

Obdrželi jsme Laplaceův obraz pro pravděpodobnost bezporuchového provozu automatu se zálohou. Je zřejmé, že jeho použití je vázáno na znalost

hustoty rozložení pravděpodobnosti $g(t)$ dob obnovování provozuschopnosti.

Podle (9) a vzhledem k základní definici Laplaceovy transformace platí pro střední dobu bezporuchového provozu

$$T = \int_0^\infty p(t) dt = \int_0^\infty e^{-0 \cdot t} p(t) dt = P(0). \quad (173)$$

Označíme-li $\alpha = 1 - \bar{g}(\lambda)$, dostaneme ze (172) a (173)

$$T = \frac{1}{\alpha(\lambda + \lambda_1)} + \frac{1}{\lambda}. \quad (174)$$

Vyšetřeme nyní případ exponenciálního rozložení dob obnovování provozuschopnosti automatů, tj.

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \Rightarrow \bar{g}(p + \lambda) = \frac{\mu}{p + \mu + \lambda}, \quad (175)$$

a tedy

$$\bar{g}(\lambda) = \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

Současně

$$\alpha = 1 - \bar{g}(\lambda) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}. \quad (176)$$

Po dosazení α ze (176) do (174) dostáváme

$$T = \frac{2\lambda + \mu + \lambda_1}{\lambda(\lambda + \lambda_1)}. \quad (177)$$

Pro nezatiženou zálohu $\lambda_1 = 0$,

$$T' = \frac{2\lambda + \mu}{\lambda^2} \quad (178)$$

a pro zatiženou zálohu, kde $\lambda_1 = \lambda$,

$$T'' = \frac{3\lambda + \mu}{2\lambda^2}. \quad (179)$$

Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy při exponenciálním rozložení dob obnovování provozuschopnosti po dosazení za $\bar{g}(p + \lambda)$ ze (175) do (172) obdržíme

$$P(p) = \frac{p + 2\lambda + \lambda_1 + \mu}{p^2 + p(2\lambda + \lambda_1 + \mu) + \lambda^2 + \lambda\lambda_1}. \quad (180)$$

Originál $p(t)$ funkce $P(p)$ nalezneme zpětnou Laplaceovou transformací. Označme

$$\begin{aligned} a &= 2\lambda + \lambda_1 + \mu, \\ b &= \lambda^2 + \lambda\lambda_1, \\ p_1 &= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d, \\ p_2 &= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d, \\ d &= 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2 - b\right)} = \sqrt{[(\lambda_1 + \mu)^2 + 4\lambda\mu]}, \end{aligned} \quad (181)$$

přičemž používáme pouze kladné odmocniny. Pokud λ, μ jsou nenulové, jak je běžné u reálných automatů, je $a > 0, d > 0$ a p_1, p_2 jsou dvě různá reálná kladná čísla. Pro $P(p)$ ze (180) postupně dostaneme

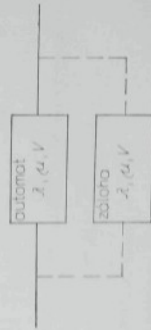
$$P(p) = \frac{p+a}{p^2+ap+b} = \frac{p+a}{(p+p_1)(p+p_2)}, \quad (182)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{P(p)\} = p(t) = \frac{a+d}{2d} e^{-\frac{1}{2}(a-d)t} - \frac{a-d}{2d} e^{-\frac{1}{2}(a+d)t}. \quad (183)$$

Vztahem (183) je definována pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy pro exponenciální rozložení dob bezporuchového provozu i dob obnovování provozuschopnosti. Konstanty a, d dosazujeme podle (181), když λ_1 volíme podle typu zálohy.

3.3 JEDNONÁSOBNÁ NEZATÍŽENÁ SUBSTITUČNÍ ZÁLOHA

K automatu je přiřazena záloha, kterou představuje další ekvivalentní automat (obr. 14). Během provozu automatu je záloha v klidu,



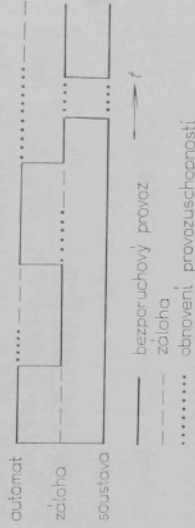
Obr. 14. Zálohování automatu ekvivalentním automatem

nemůže na ní vzniknout porucha. V okamžiku vzniku poruchy automatu je spuštěn záložní automat. Po obnově se automat stává záložním. Jestliže se v době obnovování provozuschopnosti porouchá i záložní automat, zahájí se okamžitě obnovování i jeho provozuschopnosti. Doba bezporu-

chového provozu a doba obnovování provozuschopnosti necht' má exponenciální rozložení.

Soustava automatů s jednonásobnou nezatíženou zálohou se může nacházet pouze v následujících třech stavech (funkce soustavy je na obr. 15).

1. Oba automaty jsou provozuschopné, jeden je v činnosti, druhý je odstaven v záloze (stav 1),



Obr. 15. Schéma činnosti soustavy s nezatíženou zálohou

2. Jeden z automatů je v činnosti, druhý se opravuje (stav 2).
3. Oba automaty se opravují (stav 3). Pravděpodobnost současně obnovy obou automatů je velmi malá, proto ji zanedbáváme.

Pravděpodobnosti výskytu jednotlivých stavů v čase t postupně označíme $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$. Činnost zkoumané soustavy lze popsat aparátem homogeních Markovových procesů. Pravděpodobnosti $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ pak mají význam absolutního rozložení pravděpodobnosti. Pro intenzity pravděpodobnosti přechodů platí

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= -\lambda, & \mu_{21} &= \mu, & \mu_{31} &= 0, \\ \mu_{12} &= \lambda, & \mu_{22} &= -(\mu + \lambda), & \mu_{32} &= 2\mu, \\ \mu_{13} &= 0, & \mu_{23} &= \lambda, & \mu_{33} &= -2\mu. \end{aligned} \quad (184)$$

Dosaďme do soustavy Kolmogorových diferenciálních rovnic pro absolutní rozložení pravděpodobnosti a dostaneme

$$\begin{aligned} p_1'(t) &= -\lambda p_1(t) + \mu p_2(t), \\ p_2'(t) &= \lambda p_1(t) - (\mu + \lambda) p_2(t) + 2\mu p_3(t), \\ p_3'(t) &= \lambda p_2(t) - 2\mu p_3(t). \end{aligned} \quad (185)$$

Předpokládáme, že zálohovaná soustava vychází ze stavu 1. Soustavu diferenciálních rovnic budeme řešit Laplaceovou transformací s počáteční

podmínkou

$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0, \quad p_3(0) = 0. \quad (192)$$

Nechť

$$\mathcal{L}\{p_1(t)\} = P_1(p), \quad \mathcal{L}\{p_2(t)\} = P_2(p), \quad \mathcal{L}\{p_3(t)\} = P_3(p), \quad (186)$$

pak

$$p P_1(p) - 1 = \lambda P_1(p) + \mu P_2(p), \quad (187)$$

$$p P_2(p) = \lambda P_1(p) - (\mu + \lambda) P_2(p) + 2\mu P_3(p), \quad (188)$$

$$p P_3(p) = \lambda P_2(p) - 2\mu P_3(p)$$

a odvětví

$$P_1(p) = \frac{p + 2\mu}{\lambda} P_3(p), \quad (189)$$

$$P_2(p) = \frac{1}{p + \lambda} + \frac{\mu(p + 2)}{\lambda(p + \lambda)} P_3(p).$$

Za $P_1(p)$ a $P_2(p)$ dosadíme ze (188) do druhé rovnice soustavy (187) a pro $P_3(p)$ obdržíme

$$P_3(p) = \frac{2}{p[p^2 + p(3\mu + 2\lambda) + 2 + 2\mu^2 + 2\mu\lambda + \lambda^2]}. \quad (190)$$

Označme

$$a = \frac{1}{2}(3\mu + 2\lambda),$$

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{(\mu^2 + 4\mu\lambda)},$$

$$s_1 = a - b,$$

$$s_2 = a + b.$$

Pro $P_3(p)$ ze (189) postupně platí

$$P_3(p) = \frac{\lambda^2}{s_1 s_2} \frac{1}{p \left(\frac{1}{s_1} p + 1 \right) \left(\frac{1}{s_2} p + 1 \right)}, \quad (191)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{P_3(p)\} &= p_3(t) = \\ &= \frac{\lambda^2}{\mu^2 + (\mu + \lambda)^2} \left[1 + \frac{1}{\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}} \left(\frac{1}{s_1} e^{-s_1 t} - \frac{1}{s_2} e^{-s_2 t} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda^2}{\mu^2 + (\mu + \lambda)^2} \left[1 - \frac{a + b}{2b} e^{-(a-b)t} + \frac{a - b}{2b} e^{-(a+b)t} \right]. \quad (192)$$

Analýza činnosti zálohované soustavy s použitím Markovova procesu slouží především ke stanovení funkce pohotovosti $K_p(t) = p_1(t) + p_2(t)$. Avšak pro každé $t > 0$ je $p_1(t) + p_2(t) = 1 - p_3(t)$ a pro určení funkce pohotovosti postačuje, známe-li $p_3(t)$, tj.

$$\begin{aligned} K_p(t) &= 1 - p_3(t) = \\ &= \frac{2\mu^2 + 2\mu\lambda}{\mu^2 + (\mu + \lambda)^2} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 + (\mu + \lambda)^2} \left[\frac{a + b}{2b} e^{-(a-b)t} - \frac{a - b}{2b} e^{-(a+b)t} \right]. \end{aligned} \quad (193)$$

Stanovme nyní limitní pravděpodobnosti π_1, π_2, π_3 , pro které

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = \pi_i, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p'_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (194)$$

Použijeme opět soustavu (185) a dostaneme

$$\begin{aligned} -\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 &= 0, \\ \lambda\pi_1 - (\mu + \lambda)\pi_2 + 2\mu\pi_3 &= 0, \\ \lambda\pi_2 - 2\mu\pi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (195)$$

Homogenní soustavu lineárních rovnic vyřešíme s podmínkou $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Pak

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{2\mu^2}{\mu^2 + (\mu + \lambda)^2}, \\ \pi_2 &= \frac{2\mu\lambda}{\mu^2 + (\mu + \lambda)^2}, \\ \pi_3 &= \frac{\lambda^2}{\mu^2 + (\mu + \lambda)^2}. \end{aligned} \quad (196)$$

Součinitel pohotovosti K_p soustavy s nezatiženou zálohou je dán vztahem

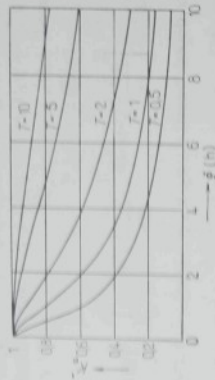
$$K_p = \lim_{t \rightarrow \infty} K_p(t) = \pi_1 + \pi_2 = \frac{2\mu^2 + 2\mu\lambda}{\mu^2 + (\mu + \lambda)^2}. \quad (197)$$

Graficky je závislost (197) součinitele pohotovosti K_p na střední době bezporuchového provozu automatu $T = 1/\lambda$ a střední době obnovování provozuschopnosti $\phi = (1/\mu)$ zachycena na obr. 16.

Určeme přírůstek δ_n součinitele pohotovosti soustavy s nezatiženou

zálohou a automatu bez zálohy (90):

$$\delta_s = K'_s - K_s = \frac{2\mu^2\lambda + \mu\lambda^2}{(\mu + \lambda)[\mu^2 + (\mu + \lambda)^2]} \quad (198)$$



Obr. 16. Graf závislosti součinitele pohotovosti K'_s na T, Φ

Nasazení zálohy se musí vždy hodnotit v souvislosti s ekonomickou efektivností. Jestliže V [ks/h] je teoretický výkon automatu, d (h) využitelná část dvou pracovních směn, pak skutečný výkon V_s soustavy za dvě směny je dán vztahem

$$V_s = K'_s \cdot d \cdot V \quad [\text{ks/2 směny}] \quad (199)$$

Použijeme-li ve vztahu (199) přírůstek δ_s , tj. $V_s = \delta_s \cdot d \cdot V$, dostáváme vztah pro přírůstek výkonu automatu se zálohou za dvě směny v kusech.

3.3.1 Přibližný výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu

Pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy s nezáložnou zálohou je s použitím (183) dána vztahem

$$p(t) = \frac{a + d}{2d} e^{-\frac{a}{2d}(t-\delta)} - \frac{a - d}{2d} e^{-\frac{1}{2}(a+\delta)t}, \quad (200)$$

kde $a = 2\lambda + \mu$, $d = \sqrt{(\mu^2 + 4\lambda\mu)}$.

Podle [11] lze pravděpodobnost bezporuchového provozu automatu s nezáložnou zálohou s použitím střední doby bezporuchového provozu soustavy T' (178)

$$T' = \frac{2\lambda + \mu}{\lambda^2}$$

vyjádřit přibližně vztahem:

$$p(t) \approx \bar{p}(t) = e^{-\frac{t}{T'}} = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2\lambda + \mu}} = e^{-\frac{\lambda^2 t}{a}} \quad (201)$$

s relativní chybou řádu

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^2. \quad (202)$$

Výše jsme přesný (200) i aproximační (201) vztah pro pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy.

Platí

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{a}{d} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2\lambda + \mu}{\sqrt{(\mu^2 + 4\lambda\mu)}} = 1 \quad (203)$$

a

Pro klesající (dostatečně malé) λ lze $\frac{1}{2}(a - d)$ aproximovat výrazem $\lambda^2/(2\lambda + \mu)$.

Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{a + d}{2d} = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{a - d}{2d} = 0,$$

je zřejmé, že pro $\lambda \rightarrow 0$ se blíží první člen ve vztahu (200) aproximačnímu vzorci (201), zatímco součinitel u druhého členu se blíží nule.

Použití vztahu (201) pro pravděpodobnost bezporuchového provozu umožňuje při dostatečně malém λ aproximovat soustavu s nezáložnou zálohou jediným náhradním automatem se střední dobou bezporuchového provozu T' (178) a pravděpodobností bezporuchového provozu $\bar{p}(t)$.

Předpokládáme, že doby obnovování provozuschopnosti soustavy s nezáložnou zálohou, tj. doby, kdy se automat i záloha zároveň opravují, můžeme rovněž aproximovat exponenciálním rozložením. Střední dobu obnovování provozuschopnosti náhradního automatu stanovíme z podmínky rovnosti součinitelů pohotovosti.

Součinitel pohotovosti $\bar{K}_p$ náhradního automatu je podle (90) dán vztahem

$$\bar{K}_p = \frac{T'}{T' + \Phi'}, \quad (204)$$

současně však musí podle (197)

$$\bar{K}_p = K'_p = \frac{2\mu^2 + 2\mu\lambda}{\mu^2 + (\mu + \lambda)^2} \quad (205)$$

Dosadíme-li $T' = (2\lambda + \mu)/\lambda^2$ podle (178), dostaneme

$$\phi' = \frac{2\lambda + \mu}{2\mu(\mu + \lambda)}.$$

Tím jsme získali všechny potřebné charakteristiky náhradního automatu (ij. T' , ϕ'), za předpokladu, že λ je dostatečně malé a doba obnovování provozuschopnosti soustavy má exponenciální rozložení.

Příklad 3: Určete všechny základní charakteristiky soustavy s jedno-násobnou nezátíženou substituční zálohou. Pro automat i zálohu platí $\lambda = 0,3 \text{ h}^{-1}$, $\mu = 2 \text{ h}^{-1}$ (předpokládáme exponenciální rozložení).

Řešení: Funkce pohotovosti soustavy je podle (193) dána vztahem

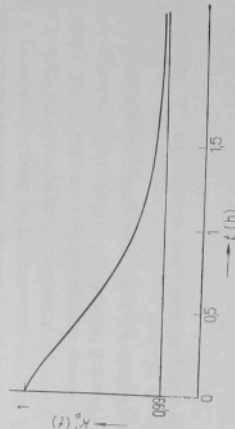
$$a = \frac{1}{2}(3\mu + 2\lambda) = \frac{1}{2}(6 + 0,6) = 3,300,$$

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{(\mu^2 + 4\mu\lambda)} = \frac{1}{2}\sqrt{(4 + 2,4)} = 1,265,$$

$$K'_p(t) = \frac{2\mu^2 + 2\mu\lambda}{\mu^2 + (\mu + \lambda)^2} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 + (\mu + \lambda)^2} \cdot \left[\frac{a + b}{2b} e^{-(a-b)t} - \frac{a - b}{2b} e^{-(a+b)t} \right] =$$

$$= 0,990 + 0,017 e^{-2,035t} - 0,007 e^{-4,565t}.$$

Průběh funkce pohotovosti je vyneseno v obr. 17. Pro součinitel pohotovosti



Obr. 17. Funkce pohotovosti soustavy s nezátíženou zálohou z příkladu 3

(197) platí

$$K'_p = \lim_{t \rightarrow \infty} K'_p(t) = 0,990 \quad (= 99 \%).$$

Limitní pravděpodobnosti π_1 , π_2 , π_3 získáme podle vztahů (196)

$$\pi_1 = \frac{2\mu^2}{\mu^2 + (\mu + \lambda)^2} = 0,861,$$

$$\pi_2 = \frac{2\mu\lambda}{\mu^2 + (\mu + \lambda)^2} = 0,129,$$

$$\pi_3 = \frac{\lambda^2}{\mu^2 + (\mu + \lambda)^2} = 0,010.$$

Přístětek součinitele pohotovosti vlivem zařazení nezátížené zálohy je podle (198)

$$\delta_a = \frac{2\mu^2\lambda + \mu\lambda^2}{(\mu + \lambda)[\mu^2 + (\mu + \lambda)^2]} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,09}{2,3 \cdot 9,29} = 0,121 \quad (= 12,1 \%).$$

Ze vztahu (200) odvodíme pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy

$$a = 2\lambda + \mu = 0,6 + 2 = 2,600,$$

$$d = \sqrt{(\mu^2 + 4\mu\lambda)} = \sqrt{(4 + 4 \cdot 0,3 \cdot 2)} = 2,530,$$

a konečně

$$p(t) = \frac{a + d}{2d} e^{-\frac{1}{2}(a-d)t} - \frac{a - d}{2d} e^{-\frac{1}{2}(a+d)t} = 1,014 e^{-0,035t} - 0,014 e^{-2,565t}.$$

Střední doba bezporuchového provozu soustavy (178) je

$$T' = \frac{2\lambda + \mu}{\lambda^2} = \frac{0,6 + 2}{0,3^2} = 28,889 \text{ h}$$

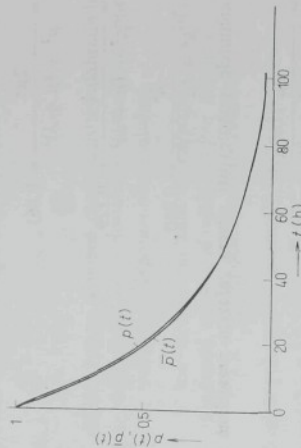
a odtud aproximací vztah (201) pro pravděpodobnost bezporuchového provozu

$$\bar{p}(t) = e^{-t/T'} = e^{-0,0346t}.$$

Průběh přesné i aproximací pravděpodobnosti bezporuchového provozu

je na obr. 18. Aproximační vztah je zatížen relativní chybou řádu

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^2 = \left(\frac{0,3}{2,3}\right)^2 = 0,017 (= 1,7 \%).$$



Obr. 18. Pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy s nezatíženou zálohou z příkladu 3

Vzhledem k tomu, že podle (205) je

$$\Phi' = \frac{2\lambda + \mu}{2\mu(\mu + \lambda)} = \frac{0,6 + 2}{4 \cdot 2,3} = 0,283 \text{ h,}$$

má náhradní automat $T' = 28,889 \text{ h}$, $\Phi' = 0,283 \text{ h}$.

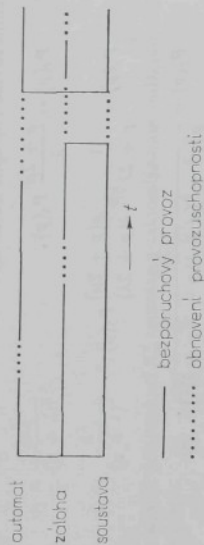
3.4 JEDNONÁSOBNÁ ZATÍŽENÁ SUBSTITUČNÍ ZÁLOHA

Přejdeme k vyšetřování případu z obr. 14, kdy jednonásobná záloha pracuje v zatíženém stavu. V podstatě to znamená, že oba automaty pracují ve shodném režimu. Porucha může vzniknout i na stroji v záloze.

Práci vykonává automat. Při poruše přebírá jeho funkci záloha a automat je opraven. Uskuteční-li se obnova ještě za chodu zálohy, vymění si automaty roli. Původní záloha vykonává funkci soustavy i nadále a opravený automat přechází do stavu zatížené zálohy. Jestliže během obnovování provozuschopnosti automatu vznikne porucha i na záloze, zahájí se okamžitě obnovování provozuschopnosti i zálohy a první opravený automat obnoví funkci systému.

V souladu s obr. 14 předpokládáme, že oba automaty jsou shodné a mají exponenciální rozložení dob bezporuchového provozu a dob obnovování provozuschopnosti s parametry λ, μ . Soustava automatu a zatížené zálohy se může nacházet v následujících třech stavech (funkce soustavy je na obr. 19):

1. Oba automaty pracují (stav 1). Současný vznik poruchy u obou automatů vylučujeme pro jeho malou pravděpodobnost.
2. Jeden z obou automatů pracuje, druhý se opravuje (stav 2).
3. Oba automaty se opravují (stav 3). Vylučujeme současnou obnovu obou automatů pro její malou pravděpodobnost.



Obr. 19. Schéma činnosti soustavy se zatíženou zálohou

Vhodným matematickým modelem pro vyšetřování vlastností soustavy s jednonásobnou zatíženou zálohou je opět teorie Markovových procesů. Označme $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ absolutní rozložení jednotlivých stavů. Pro intenzity pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými stavy platí

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= -2\lambda, & \mu_{21} &= \mu, & \mu_{31} &= 0, \\ \mu_{12} &= 2\lambda, & \mu_{22} &= -(\mu + \lambda), & \mu_{32} &= 2\mu, \\ \mu_{13} &= 0, & \mu_{23} &= \lambda, & \mu_{33} &= -2\mu. \end{aligned} \quad (206)$$

Soustava Kolmogorových diferenciálních rovnic pro absolutní rozložení pravděpodobnosti má tvar

$$\begin{aligned} p_1'(t) &= -2\lambda p_1(t) + \mu p_2(t), \\ p_2'(t) &= 2\lambda p_1(t) - (\mu + \lambda) p_2(t) + 2\mu p_3(t), \\ p_3'(t) &= \lambda p_2(t) - 2\mu p_3(t). \end{aligned} \quad (207)$$

V počátečním okamžiku nechť je soustava ve stavu 1. K řešení soustavy

(207) použijeme opět Laplaceovy transformace s počáteční podmínkou

$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = 0, \quad p_3(0) = 0,$$

když

$$\mathcal{L}\{p_1(t)\} = P_1(p), \quad \mathcal{L}\{p_2(t)\} = P_2(p), \quad \mathcal{L}\{p_3(t)\} = P_3(p) \quad (208)$$

Dostaneme

$$p P_1(p) - 1 = -2\lambda P_1(p) + \mu P_2(p), \quad (209)$$

$$p P_2(p) = 2\lambda P_1(p) - (\mu + \lambda) P_2(p) + 2\mu P_3(p),$$

$$p P_3(p) = \lambda P_2(p) - 2\mu P_3(p).$$

Řešením rovnice postupně dostaneme

$$P_2(p) = \frac{p + 2\mu}{\lambda} P_3(p),$$

$$P_1(p) = \frac{1}{p + 2\lambda} + \frac{\mu(p + 2\mu)}{\lambda(p + 2\lambda)} P_3(p), \quad (210)$$

$$P_3(p) = \frac{2\lambda^2}{p[p^2 + 3(\mu + \lambda)p + 2(\mu + \lambda)^2]}.$$

Označíme-li $s_1 = \mu + \lambda$, $s_2 = 2(\mu + \lambda)$, dostaneme po úpravě pro $P_3(p)$

$$P_3(p) = \frac{2\lambda^2}{s_1 s_2} \frac{1}{p \left(\frac{p}{s_1} + 1 \right) \left(\frac{p}{s_2} + 1 \right)}. \quad (211)$$

S použitím tabulek originálů k obrazům funkcí po Laplaceově transformaci

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{P_3(p)\} &= p_3(t) = \frac{2\lambda^2}{s_1 s_2} \left[1 + \frac{1}{\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}} \left(\frac{1}{s_1} e^{-s_1 t} - \frac{1}{s_2} e^{-s_2 t} \right) \right] = \\ &= \frac{\lambda^2}{(\mu + \lambda)^2} [1 - 2e^{-(\mu + \lambda)t} + e^{-2(\mu + \lambda)t}]. \end{aligned} \quad (212)$$

Stejně jako při nezátížené záloze platí pro funkci pohotovosti $K_p''(t)$ zatížené zálohy

$$\begin{aligned} K_p''(t) &= p_1(t) + p_2(t) = 1 - p_3(t) = \\ &= \frac{\mu^2 + 2\mu\lambda}{(\mu + \lambda)^2} + \frac{\lambda^2}{(\mu + \lambda)^2} [2e^{-(\mu + \lambda)t} - e^{-2(\mu + \lambda)t}]. \end{aligned} \quad (213)$$

Limitní pravděpodobnost π_1, π_2, π_3 jednotlivých stavů musí splňovat homogenní soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} -2\pi_1 + \mu\pi_2 &= 0, \\ 2\pi_1 - (\mu + \lambda)\pi_2 + 2\mu\pi_3 &= 0, \\ \lambda\pi_2 - 2\mu\pi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (214)$$

a podmínku

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.$$

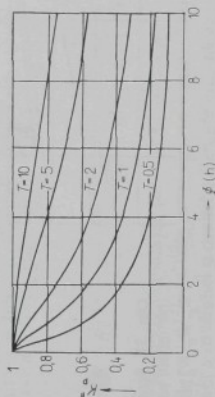
Odtud

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\mu^2}{(\mu + \lambda)^2}, \\ \pi_2 &= \frac{2\mu\lambda}{(\mu + \lambda)^2}, \\ \pi_3 &= \frac{\lambda^2}{(\mu + \lambda)^2}. \end{aligned} \quad (215)$$

Pro součinitel pohotovosti K_p'' soustavy s jednonásobnou zatíženou zálohou zřejmě platí

$$K_p'' = \lim_{t \rightarrow \infty} K_p''(t) = \pi_1 + \pi_2 = \frac{\mu^2 + 2\mu\lambda}{(\mu + \lambda)^2}. \quad (216)$$

Průběh závislosti K_p'' na T a ϕ je na obr. 20.

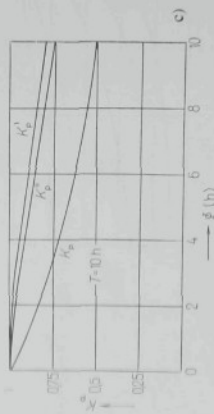
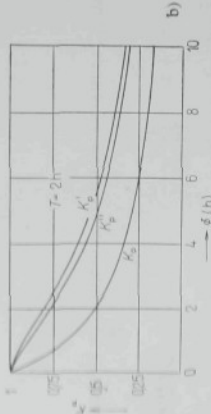
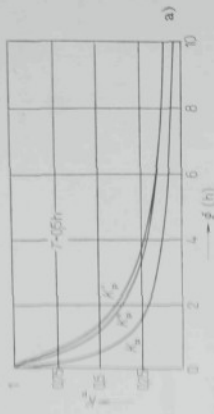


Obr. 20. Graf závislosti K_p'' na T a ϕ

Přídrušek δ_z součinitele pohotovosti K_p'' vzhledem k pohotovosti automatu bez zálohy můžeme stanovit ze vztahu

$$\delta_z = K_p'' - K_p = \frac{\mu\lambda}{(\mu + \lambda)^2}. \quad (217)$$

$$\delta_a - \delta_s = \frac{\mu^2 \lambda^2}{(\mu + \lambda)^2 [\mu^2 + (\mu + \lambda)^2]} > 0, \quad (218)$$



Obr. 21. Srovnání součinitelů pohotovosti K_p, K_p', K_p'' pro některá T

je přírůstek součinitele pohotovosti při nezátžené záloze vždy vyšší než při zatížení zálohy. Tato skutečnost je pro vybrané hodnoty $T = 1/\lambda$ v závislosti na $\phi = 1/\mu$ graficky zachycena na obr. 21. Pro úplnost je zakreslen průběh i součinitele pohotovosti K_p automatu bez zálohy.

Pro skutečný výkon V_s dostaneme

$$V_s = K_p'' dV [ks/2 \text{ sm}^2 \text{ny}]. \quad (219)$$

3.4.1 Přibližný výpočet pravděpodobnosti bezporuchového provozu

Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy se zatíženou zálohou podle (183) dostaneme

$$p(t) = \frac{a+d}{2d} e^{-\frac{1}{2}(a-d)t} - \frac{a-d}{2d} e^{-\frac{1}{2}(a+d)t}, \quad (220)$$

přičemž $a = 3\lambda + \mu$, $d = \sqrt{[(\lambda + \mu)^2 + 4\mu\lambda]}$.

Pravděpodobnost bezporuchového provozu (220) pro střední dobu bezporuchového provozu soustavy (179)

$$T'' = \frac{3\lambda + \mu}{2\lambda^2}$$

lze podle [11] aproximovat výrazem

$$p(t) \approx \bar{p}(t) = e^{-\frac{t}{T''}} = e^{-\frac{2\lambda^2 t}{3\lambda + \mu}} = e^{-\frac{2\lambda^2 t}{a}} \quad (221)$$

s relativní chybou řádu

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^2. \quad (222)$$

Zřejmě platí

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{a}{d} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{3\lambda + \mu}{\sqrt{[(\lambda + \mu)^2 + 4\lambda\mu]}} = 1. \quad (223)$$

a

$$\frac{1}{2}(a-d) = \frac{4\lambda^2}{3\lambda + \mu + \sqrt{[(\lambda + \mu)^2 + 4\lambda\mu]}}.$$

Pro $\lambda \rightarrow 0$ (dostatečně malá) je $(a+d)/2d \rightarrow 1$. Výraz $\frac{1}{2}(a-d)$ lze aproximovat výrazem $2\lambda^2/a$, a tedy první člen ve vztahu (220) se blíží aproximačnímu vztahu u součinitele u druhého členu se blíží nule.

Náhradní automat soustavy se zatíženou zálohou má exponenciální rozložení dob bezporuchového provozu se střední dobou bezporuchového provozu (179)

$$T'' = \frac{3\lambda + \mu}{2\lambda^2}.$$

Předpokládáme, že i v případě zatížené zálohy mají doby obnovování

právochopnosti soustavy exponenciálně rozložení se střední dobou obnovování pravomocnosti θ' . Součinitel pohotovosti $\bar{K}_p$ náhradního automatu je dán vztahem

$$\bar{K}_p = \frac{T'}{T' + \theta'} \quad (224)$$

Podle (216) $\bar{K}_p = K_p' = \frac{\mu^2 + 2\mu\lambda}{(\mu + \lambda)^2}$

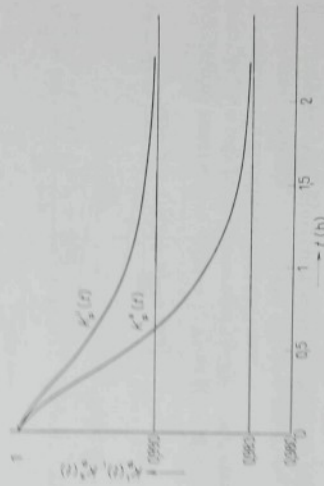
a s využitím (179)

$$\theta' = \frac{3\lambda + \mu}{2\mu(\mu + \lambda)} \quad (225)$$

Příklad 4. Určete základní charakteristiky soustavy s jednorázovou zatíženou substituční zálohou. Pro automata i zálohu platí $\lambda = 0.3 \text{ h}^{-1}$, $\mu = 2 \text{ h}^{-1}$ (předpokládáme exponenciální rozložení).

Řešení: Pro funkci pohotovosti soustavy $K_p'(t)$ podle (213) dostaneme

$$\begin{aligned} K_p'(t) &= \frac{\mu^2 + 2\mu\lambda}{(\mu + \lambda)^2} + \frac{\lambda^2}{(\mu + \lambda)^2} [2e^{-(\mu + \lambda)t} - e^{-2(\mu + \lambda)t}] = \\ &= 0.993 + 0.034e^{-2.3t} - 0.017e^{-4.6t}. \end{aligned}$$



Obr. 22. Průběh funkce pohotovosti soustavy se zatíženou zálohou

Na obrázku 22 je zachycen průběh funkce pohotovosti $K_p''(t)$. Pro srovnání je vynesena funkce pohotovosti $K_p'(t)$ soustavy s nezatíženou zálohou.

Podle (215) pro limitní pravděpodobnosti platí

$$\pi_1 = \frac{\mu^2}{(\mu + \lambda)^2} = 0.756,$$

$$\pi_2 = \frac{2\mu\lambda}{(\mu + \lambda)^2} = 0.227,$$

$$\pi_3 = \frac{\lambda^2}{(\mu + \lambda)^2} = 0.017$$

a pro součinitel pohotovosti podle (216)

$$K_p'' = \pi_1 + \pi_2 = 0.983 (= 98.3\%).$$

Vlivem zatížení zátěže je součinitel K_p'' o δ_z větší než součinitel pohotovosti samotného automatu, tj. podle (217)

$$\delta_z = \frac{\mu\lambda}{(\mu + \lambda)^2} = \frac{0.6}{5.29} = 0.113 (= 11.3\%).$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu odvodíme podle (220)

$$a = 3\lambda + \mu = 2.900,$$

$$d = \sqrt{[(\lambda + \mu)^2 + 4\lambda\mu]} = 2.773,$$

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{a + d}{2d} e^{-\frac{1}{2}(a-d)t} - \frac{a - d}{2d} e^{-\frac{1}{2}(a+d)t} = \\ &= 1.023 e^{-0.0635t} - 0.023 e^{-2.8365t}. \end{aligned}$$

Pro střední dobu T'' bezporuchového provozu podle (179) dostaneme

$$T'' = \frac{3\lambda + \mu}{2\lambda^2} = 16.111 \text{ h}$$

a pro aproximaci pravděpodobnosti bezporuchového provozu soustavy ze vztahu (221)

$$\bar{p}(t) = e^{-\frac{t}{T''}} = e^{-0.062t}.$$

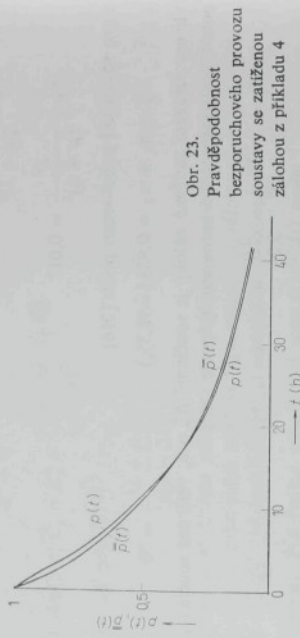
Na obrázku 23 je zachycen průběh přesné i aproximační pravděpodobnosti bezporuchového provozu.

Relativní chyba aproximace je řádu

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^2 = 0.017 (= 1.7\%).$$

Střední dobu obnovování provozuschopnosti náhradního automatu určíme z výrazu (225)

$$\Phi'' = \frac{3\lambda + \mu}{2\mu(\mu + 2\lambda)} = 0,279 \text{ h.}$$



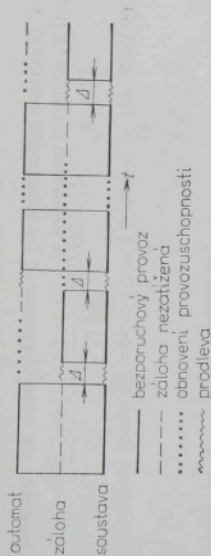
3.5 NEZATÍŽENÁ ZÁLOHA S PRODLEVOU PŘI ZAŘAZENÍ

Dosud jsme při rozboru spolehlivosti soustav s nezatíženými zálohami předpokládali, že při poruše automatu lze teoreticky ihned uvést zálohu do provozu a nahradit jí činnost automatu. V některých případech však nelze tento předpoklad přijmout, poněvadž výrazně zkruskuje provozní a spolehlivostní charakteristiky soustavy. Do výpočtu musíme zahrnout časovou prodlevu při každém zařazení záložního automatu.

Nechť provoz soustavy s nezatíženou zálohou popsaný v čl. 3.3 probíhá podle obr 24. Při zařazení záložního automatu do provozu je nutný časový interval Δ pro uvedení automatu do chodu. Je zřejmé, že prodleva při spuštění snižuje součinitel pohotovosti soustavy, a tím i celkovou výtežnost systému. Ke stanovení změny součinitele pohotovosti musíme určit střední počet $\bar{n}$ zařazení záložního automatu během střední doby bezporuchového provozu soustavy.

Vzhledem ke (178) dostáváme

$$\bar{n} = \frac{T'}{T} - 1 = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda} = 1 + \frac{\mu}{\lambda}, \quad (226)$$



Obr. 24. Činnost nezatížené zálohy s prodlevou při zařazení

$$T = \frac{1}{\lambda}, \quad T' = \frac{2\lambda + \mu}{\lambda^2}.$$

Součinitel pohotovosti K_p' jednonásobné nezatížené substituční zálohy s prodlevou Δ je určen vztahem

$$K_p' = \frac{T'}{T' + \bar{n}\Delta + \Phi'}, \quad (227)$$

přičemž

$$\Phi' = \frac{2\lambda + \mu}{2\mu(\mu + \lambda)}$$

podle (205).

Ztráty způsobené prodlevami při spuštění záloh vyjadřuje součin $\bar{n}\Delta$. S využitím součinitele pohotovosti K_p snadno stanovíme skutečný výkon V_s soustavy:

$$V_s = K_p' dV \quad [ks/2 \text{ směňy}]. \quad (228)$$

Pro výpočty charakteristik spolehlivosti a výtežnosti výrobních systémů se zařazenými zálohovanými automaty bývá vhodné nalézt parametry tzv. náhradního automatu, který aproximuje činnost soustavy. Pro soustavu s nezatíženou zálohou s prodlevou lze jako střední dobu provozu náhradního automatu použít hodnotu T' a střední dobu obnovování provozuschopnosti $(\Phi' + \bar{n}\Delta)$ za předpokladu exponenciálního rozložení pravděpodobnosti obou náhodných veličin.

Ze vztahu (227) vyplývá, že s růstem prodlevy Δ klesá součinitel využití K_p' . Aby použití soustavy s nezatíženou zálohou s prodlevou Δ bylo efektivní, musí prodleva Δ splňovat několik podmínek:

1. Součinitel podobnosti K_p by neměl být menší než součinitel podobnosti K_p automatu samostatně, tj.

$$K_p' > K_p \quad (229)$$

a po dosazení

$$\frac{T'}{T' + \bar{n}\Delta + \phi'} > \frac{\mu}{\mu + \bar{n}} \quad (230)$$

Upravíme-li tuto nerovnost, dostaneme

$$\Delta < \frac{(\bar{n} + \mu)(\bar{n} + 2\mu)}{2\mu(\bar{n} + \mu)^2} \quad (231)$$

Pokud prodleva Δ splňuje podmínku (230), dosáhneme zařazením nezátížených záloh do prodlevy většího skutečného výkonu. Zda to bude ekonomické, zjistíme, zahrneme-li do výpočtu náklady na pořízení a provoz zálohy a zisk ze skutečného zvýšení výkonu.

2. Je-li možno zálohu udržovat rovněž v zatíženém stavu, bude použit nezátížená záloha s prodlevou Δ oprávněné v případě, že platí

$$K_p' > K_p \quad (231)$$

tj.

$$\frac{T'}{T' + \bar{n}\Delta + \phi'} > \frac{\mu^2 + 2\mu\lambda}{(\mu + \lambda)^2} \quad (232)$$

Pro úpravu opět odvodíme, že

$$\Delta < \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)^2} \quad (233)$$

Splňuje-li prodleva Δ nerovnost (232), je z hlediska skutečného výkonu soustavy výhodnější použít nezátíženou zálohu. V opačném případě dosáhneme se zatíženou zálohou vyššího středního výkonu soustavy.

Příklad 5:

Výčetné vliv nezátížené zálohy s prodlevou $\Delta = 0,2$ h automatu ($\lambda = 0,4$ h⁻¹, $\mu = 1,5$ h⁻¹, $V = 800$ ks h⁻¹, $d = 14$ h) na skutečný výkon automatu. Posouďte vliv zatížené zálohy.

Řešení:

Pro skutečný výkon automatu bez záloh postupně dostaneme

$$K_p = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{1,5}{1,5 + 0,4} = 0,789; \quad V_s = K_p dV = 884,2 \text{ ks/2 směny.}$$

Podle (230) platí

$$\frac{(2\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)^2} = \frac{2,3 \cdot 3,4}{3 \cdot 1,9^2} = 0,722 > \Delta.$$

Zařazení nezátížené zálohy s prodlevou $\Delta = 0,2$ přinese zvýšení skutečného výkonu.

Z (232) je

$$\frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)^2} = \frac{0,4}{2 \cdot 1,9^2} = 0,053 < \Delta.$$

Z hlediska výkonu je vhodnější zařazení zatížené zálohy, jak vyplývá i z následujícího výpočtu.

Užitím (178) a (205) dostaneme

$$T' = \frac{2\lambda + \mu}{\lambda^2} = \frac{2,3}{0,4^2} = 14,375 \text{ h,}$$

$$\phi' = \frac{2\lambda + \mu}{2\mu(\mu + \lambda)} = \frac{2,3}{3 \cdot 1,9} = 0,404 \text{ h}$$

a dále

$$\bar{n} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda} = \frac{1,9}{0,4} = 4,75,$$

$$K_p' = \frac{T'}{T' + \bar{n}s + \phi'} = \frac{14,375}{14,375 + 4,75 \cdot 0,2 + 0,404} = 0,914,$$

$$V_s' = K_p' dV = 0,914 \cdot 14800 = 10237 \text{ ks/2 směny,}$$

$$K_p'' = \frac{\mu^2 + 2\mu\lambda}{(\mu + \lambda)^2} = \frac{1,5^2 + 2 \cdot 1,5 \cdot 0,4}{1,9^2} = 0,956,$$

$$V_s'' = K_p'' \cdot dV = 0,956 \cdot 14800 = 10707 \text{ ks/2 směny.}$$

Použijeme-li zatíženou zálohu automatu, dosáhneme výkonu 10707 ks/2 směny, zatímco při nezátížené záloze s prodlevou to bude pouze 10237 ks/2 směny.

3.6 ZÁLOHY S OBECNÝM ROZLOŽENÍM PRAVDĚPODOBNOSTI

Ve všech dosud analyzovaných případech jsme předpokládali, že doby bezporuchového provozu automatu i zálohy mají exponenciální rozložení. Tento předpoklad umožňoval poměrně snadný výpočet pravdě-

podobnosti bezporuchového provozu (172) i střední doby bezporuchového provozu (174). Za dalšího předpokladu, že i doby obnovování provozuschopnosti automatu i zálohy mají exponenciální rozložení, jsme stanovili funkce pohotovosti (193), (213) i součinitele pohotovosti (197), (216) pro automat s nezatiženou zálohou. Podářilo se rovněž najít parametry náhradního automatu s exponenciálním rozložením pravděpodobnosti doby bezporuchového provozu i doby obnovování provozuschopnosti aproximujícího automat se zálohou.

Pro zálohování automatu s distribuční funkcí dob bezporuchového provozu $F(t)$ a distribuční funkcí $G(t)$ dob obnovování bezporuchového provozu stejným autematem jsou v [11] odvozeny vztahy pro střední dobu bezporuchového provozu i aproximační vztahy pro pravděpodobnost bezporuchového provozu.

Vezměme nezatiženou zálohu; pro střední dobu T' bezporuchového provozu platí

$$T' = T_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right), \quad (233)$$

kde

$$T_1 = \int_0^\infty t \, dF(t) \quad \text{a} \quad \alpha = \int_0^\infty [1 - G(t)] \, dF(t). \quad (234)$$

Jestliže je pravděpodobnost vzniku poruchy systému α malá, pak lze pravděpodobnost $p(t)$ bezporuchového provozu vyjádřit přibližným vzorcem:

$$p(t) \approx e^{-\frac{\alpha t}{T_1}}. \quad (235)$$

Pro střední dobu T'' bezporuchového provozu automatu se zatiženou zálohou podle [11] platí

$$T'' = \frac{1}{2} T_2 \left[\left(1 + \frac{T_1}{T_2} \right)^2 - 1 \right], \quad (236)$$

kde

$$T_1 = \int_0^\infty t \, dF(t) \quad \text{a} \quad T_2 = \int_0^\infty t \, dG(t). \quad (237)$$

Pro pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy se zatiženou zálohou platí přibližný vzorec:

$$p(t) \approx e^{-t/T''}. \quad (238)$$

Další analýzu provozních vlastností automatu se zálohou s obecným

rozložením náhodných veličin uskutečníme metodou stochastické simulace na počítači.

Podstatou matematického modelu funkce automatu se zálohou jsou posloupnosti dob bezporuchového provozu i dob obnovování provozuschopnosti s daným rozložením, ze kterých se výpočtem odvozuje posloupnost dob bezporuchového provozu a dob obnovování provozuschopnosti celého systému.

Předpokládáme, že počítač, na kterém realizujeme stochastický model, je vybaven generátorem pseudonáhodných čísel s rovnoměrným rozložením v intervalu $(0, 1)$. Vzniká úloha transformace náhodné veličiny ξ s rovnoměrným rozložením pravděpodobnosti na náhodnou veličinu η s danou distribuční funkcí $F_\eta(\tau)$. Je-li $a \leq \tau \leq b$, pak distribuční funkce zobrazuje interval $\langle a, b \rangle$ na interval $\langle 0, 1 \rangle$, a naopak. Pro každé $\xi_j \in \langle 0, 1 \rangle$ existuje $\tau_j \in \langle a, b \rangle$ pro $j = 1, 2, \dots$, takové, že

$$\xi_j = F(\tau_j), \quad (239)$$

$$\tau_j = F^{-1}(\xi_j). \quad (240)$$

Zřejmě platí

$$P(F^{-1}(t) \leq \tau) = P(t \leq F(\tau)) = F(\tau). \quad (241)$$

Je-li ve vztahu (240) ξ_j realizace náhodné veličiny s rovnoměrným rozložením v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, pak τ_j je realizace náhodné veličiny s distribuční funkcí $F(\tau)$.

Vztahu (240) lze využít pro generování hodnot náhodné veličiny s daným rozložením, s využitím generátoru pseudonáhodných čísel v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Pro exponenciální rozložení s parametrem λ dostaneme

$$\xi_j = 1 - e^{-\lambda \tau_j} \quad \text{a} \quad \text{odtud} \quad (242)$$

$$\tau_j = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi_j), \quad (243)$$

popř.

$$\tau_j = -\frac{1}{\lambda} \ln \xi_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (244)$$

Obdobně pro Weibullovo rozložení platí

$$\xi_j = 1 - e^{-\lambda \tau_j^m}, \quad (245)$$

Po inverzi

$$\tau_j = \left(-\frac{1}{\lambda} \ln \xi_j \right)^{1/m}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (246)$$

V obecném případě však problém vede k řešení transcendentní rovnice

$$F(\tau_j) - \xi_j = 0 \quad (247)$$

pro neznámé τ_j , které je možné pouze číselnými metodami (separace kořenů, metoda Newtonova, regula falsi apod.)

Vezmeme-li gama rozložení, pak

$$\xi_j = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \int_0^{\tau_j} x^{m-1} e^{-\lambda x} dx, \quad (248)$$

a tedy

$$\int_0^{\tau_j} x^{m-1} e^{-\lambda x} dx - A \xi_j = 0, \quad A = \frac{\Gamma(m)}{\lambda^m}. \quad (249)$$

Pro daná m, λ stanovíme numerickou cestou se zvoleným krokem Δ posloupnost hodnot integrálu ve vztahu (249) v intervalu $(0, A)$. Hodnotu integrálu mezi jednotlivými body pak interpolujeme lineární, popř. kvadratickou závislostí.

Nechť pro generovanou hodnotu ξ_j ($j = 1, 2, \dots$) pseudonáhodného čísla s rovnoměrným rozložením pravděpodobnosti leží hodnota $A \xi_j$ právě mezi body $\bar{\tau}_j, \bar{\tau}_{j+1}$, kterým odpovídají hodnoty integrálu $I(\bar{\tau}_j), I(\bar{\tau}_{j+1})$. Při lineární interpolaci stanovíme hledanou hodnotu τ_j ze vztahu

$$\tau_j = \bar{\tau}_j + \frac{\bar{\tau}_{j+1} - \bar{\tau}_j}{I(\bar{\tau}_{j+1}) - I(\bar{\tau}_j)} [A \xi_j - I(\bar{\tau}_j)]. \quad (250)$$

Přesnost číselné metody závisí především na volbě kroku Δ , tj. na hustotě dělení intervalu $(0, A)$.

Přímé využití vztahu (240) pro generování posloupnosti pseudonáhodných čísel s daným rozložením pravděpodobnosti přináší mnohdy komplikované výpočty, zvláště nelze-li vyjádřit τ_j jako explicitní funkci ξ_j , jak jsme viděli u gama rozložení. Složitý algoritmus podstatně prodlužuje výpočet každé hodnoty posloupnosti. Proto se často používají přibližné metody.

Posloupnost pseudonáhodných čísel s normálním rozložením získáme při použití limitních vět teorie pravděpodobnosti. Mějme posloupnost nezávislých náhodných veličin $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ s rovnoměrným rozložením

v intervalu $(0, 1)$. Náhodná veličina ζ_j pro kterou

$$\zeta_j = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \quad (251)$$

má pro $n \rightarrow \infty$ normální rozložení, přičemž $E[\zeta_j] = n/2$, $D[\zeta_j] = n/12$. Posloupnost $\{\tau_j\}_{j=1,2,\dots}$ pseudonáhodných čísel s normálním rozložením $N[\mu, \sigma]$ dostaneme z transformační formule

$$\tau_j = \sigma \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n (2\zeta_i - 1) + \mu}; \quad j = 1, 2, \dots \quad (252)$$

Ukazuje se, že i při poměrně malých n ($n = 4$ až 6) je shoda rozložení souboru hodnot τ_j s normálním rozložením velmi dobrá.

Posloupnost pseudonáhodných čísel $\{\tau_j\}_{j=1,2,\dots}$ s logaritmicko-normálním rozložením pravděpodobnosti (68) s parametry $z_1 = \log T_1$ a σ_1 stanovíme při využití posloupnosti $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ pseudonáhodných čísel s rozložením $N(0, 1)$. Zřejmě platí

$$\log \tau_j = z_1 + \xi_j \sigma_1 \quad (253)$$

a odtud

$$\tau_j = 10^{z_1 + \xi_j \sigma_1} = T_1 10^{\xi_j \sigma_1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (254)$$

Metod pro generování pseudonáhodných čísel s daným rozložením pravděpodobnosti je nepoměrně více. Zde jsme se omezili na základní metody generování čísel s některými rozloženími pravděpodobnosti používanými v teorii spolehlivosti.

V matematickém modelu je systém automatu se zálohou (ekvivalentním automatem) zadán následujícími údaji:

- typ zálohy (nezatížená, zatížená),
- rozložení dob bezporuchového provozu (distribuční funkce),
- rozložení dob obnovování provozuschopnosti (distribuční funkce),
- konstanty pro okamžik ukončení simulace.

K výstupním údajům patří zejména:

- doba simulovaného provozu,
- empirická distribuční funkce dob bezporuchového provozu systému,
- empirická distribuční funkce dob obnovování provozuschopnosti systému,
- průměrná doba bezporuchového provozu,
- průměrná doba obnovování provozuschopnosti,
- odhad součinitele pohotovosti systému.

a odtud (233)

$$T' = T_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) = 1,772 \left(1 + \frac{1}{0,048} \right) = 38,69 \text{ h.}$$

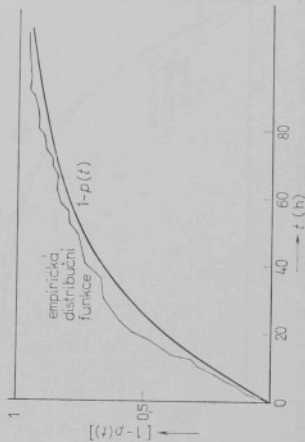
Pravděpodobnost bezporuchového provozu soustavy můžeme aproximovat vztahem (235):

$$p(t) = e^{-\frac{\alpha}{T_1} t} \approx e^{-0,027t}.$$

Využitím matematického modelu byly získány následující výsledky:

doba simulace	3 000,8 h
strojový čas počítače T 200	5 min
průměrná doba bezporuchového provozu soustavy	32,46 h
průměrná doba obnovování provozuschopnosti soustavy	0,16 h
doba bezporuchového provozu	2 986,4 h, tj. 99,5%
doba obnovování provozuschopnosti	14,4 h, tj. 0,5%

Empirická distribuční funkce dob bezporuchového provozu je vynesena na obr. 25. Pro srovnání je naznačen průběh aproximační funkce $[1 - p(t)]$.



Obr. 25. Empirická a přibližná distribuční funkce dob bezporuchového provozu zálohované soustavy z příkladu 6

Příklad 7:

Doba bezporuchového provozu automatu se zatíženou zálohou má Weibullovo rozložení s parametry $\lambda_1 = 0,2$, $m_1 = 1,6$, stejně jako doba

Oba automaty v modelu jsou rovnocenné a nelze označit jeden z nich trvale jako záložní. Simulace začíná z časového okamžiku nula, kdy jsou oba automaty provozuschopné. V případě nezátížené zálohy generujeme první dobu bezporuchového provozu τ_1 . Současně generujeme další dobu bezporuchového provozu τ_2 a dobu obnovování provozuschopnosti θ_1 . Je-li $\tau_2 < \theta_1$, pak generujeme θ_2 a $\tau_1 + \tau_2$ je první realizace doby bezporuchového provozu systému. Hodnota $\min\{\theta_1 - \tau_2, \theta_2\}$ je první realizace doby obnovování provozuschopnosti systému. Je-li $\tau_2 > \theta_1$, generujeme τ_3 , θ_2 a opět testíme relaci $\tau_3 < \theta_2$ a pokračujeme podobně.

V průběhu simulace jednotlivé realizace v paměti počítače uchováváme a zároveň načítáme při současně registraci počtu realizací. K rozhodnutí o ukončení simulace využijeme nejlépe odhadované hodnoty součinitele pohotovosti nebo prostoje systému. Odhad součinitele pohotovosti získáme jako poměrnou část doby bezporuchového provozu systému vztahem k celkové době simulace. Metodika pro využití Čebyševovy nerovnosti pro stanovení okamžiku ukončení simulace je podrobněji objasněna v čl. 5.3.3.

Stochastická simulace je vhodná pro podrobné prošetření provozních vlastností zálohovaného automatu.

Příklad 6:

Vezměme automat s nezátíženou zálohou ekvivalentním automatem. Doba bezporuchového provozu automatu i jeho zálohy má Weibullovo rozložení $F(t)$ s parametry $\lambda = 0,25$, $m = 2$; doba obnovování provozuschopnosti vykazuje exponenciální rozložení $G(t)$ s parametrem $\mu = 3 \text{ h}^{-1}$. Stanovte odhad střední doby bezporuchového provozu a střední doby obnovování provozuschopnosti soustavy aproximačním výpočtem i stochastickou simulací.

Řešení:

Podle (234) a (46)

$$T_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)}{\lambda^{1/m}} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{0,25}} = \sqrt{(\pi)} = 1,772 \text{ h.}$$

Dále stanovíme

$$\alpha = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} m \lambda^{m-1} e^{-\lambda t^m} dt = 0,5 \int_0^{\infty} t e^{-3t - 0,25t^2} dt \approx 0,048$$

obnovování provozuschopnosti, když $\lambda_2 = 1$, $m_2 = 1,25$. Stochastickou simulací stanovte odhad střední doby bezporuchového provozu a střední doby obnovování provozuschopnosti soustavy.

Řešení:

Pro střední doby T_1 , T_2 (237) s ohledem na (46) dostáváme

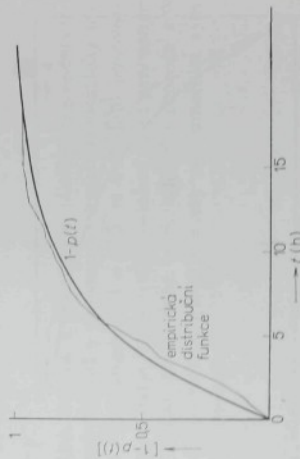
$$T_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1,6} + 1\right)}{0,2^{1/1,6}} = 2,451 \text{ h}, \quad T_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1,25} + 1\right)}{1} = 0,931 \text{ h}$$

Pro střední dobu T^w bezporuchového provozu soustavy podle (236) platí

$$T^w = \frac{1}{2} 0,931 \left[\left(1 + \frac{2,451^2}{0,931} \right) - 1 \right] \doteq 5,677 \text{ h}$$

a přibližná formule (238) pravděpodobnosti bezporuchového provozu je

$$p(t) = e^{-\frac{t}{T^w}} = e^{-0,176t}$$



Obr. 26. Empirická a přibližná distribuční funkce dob bezporuchového provozu zálohované soustavy z příkladu 7

Výsledky stochastické simulace:

doba simulace 3 000,6 h
strojový čas počítače T 200 5 min
průměrná doba bezporuchového provozu soustavy 5,87 h

průměrná doba obnovování provozuschopnosti soustavy 0,44 h
doba bezporuchového provozu 2 793,4 h,
tj. 93,1%
doba obnovování provozuschopnosti 207,2 h,
tj. 6,9%

Empirická distribuční funkce doba bezporuchového provozu je na obr. 26 spolu s přibližnou funkcí $[1 - p(t)]$. Z grafů na obr. 25 i 26 je zřejmé, že přibližná distribuční funkce postihuje vlastnosti zálohovaného automatu jen velmi hrubě. Analýza těchto soustav stochastickou simulací není tedy jen možná, ale pro zjištění dostatečně přesných výsledků přímo nutná.

4 Spolehlivost systému nezávislých automatů

Analýzujeme případ výrobní dílny vybavené určitým počtem např. soustružnických automatů, automatických navijecích strojů pro svitky elektrolytických kondenzátorů nebo komplexních automatických linek. Společné znaky těchto výrobních systémů lze shrnout do následujících bodů:

- a) Dílna je vybavena určitým počtem stejných a zaměnitelných automatických zařízení. Počet označíme n .
- b) Hospodářské vedení vyžaduje od dílny jistý plánovaný denní výkon.
- c) Dílna je vybavena určitou kapacitou pracovníků a pracovišť zajišťujících opravy zařízení v poruše.

Přívod i opravy zařízení jsou na sobě naprosto nezávislé.

Při projektování výrobního systému tohoto typu je nutno vyřešit především tyto otázky:

1. Volba optimálního počtu strojů pro zajištění plánovaného denního výkonu.
2. Optimální počet seřizovačů.
3. Prošetření naléhavosti zařazení výrobních strojů jako záloh.

Při hodnocení vybudovaného výrobního systému se vedení výrobního střediska zajímá o

- zjištění rezerv ve výkonu výrobního systému,
- stanovení vlivu spolehlivosti strojů na výkon střediska,
- stupeň využití pracovišť pro obnovu strojů (resp. seřizovačů).

Všechny tyto problémy lze zkoumat s využitím analýzy provozu výrobního systému na matematickém modelu. Použitý aparát vyžaduje splnění některých předpokladů. Především budeme předpokládat, že charakteristiky spolehlivosti všech automatů výrobního systému jsou stejné a známé. Doby bezporuchového provozu i doby obnovování provozuschopnosti mají exponenciální rozložení.

Při modelování činnosti strojů budeme sledovat pouze bezporuchový provoz a obnovování provozuschopnosti. Všechny ostatní prodlevy (doplnění materiálu, změna zakázky, přestávky v práci) budou pro výpočet

skutečného celkového výkonu kumulovány a odečteny z časového fondu dvou nebo více směn podle určeného režimu.

Nemají-li náhodné veličiny exponenciální rozložení pravděpodobnosti, lze analyzovat tento výrobní systém metodou stochastické simulace.

4.1 OBECNÝ PŘÍPAD n AUTOMATŮ

Řekneme, že systém n automatů je v čase t ve stavu k , jestliže se vyskytuje v poruše právě k automatů, přičemž $0 \leq k \leq n$. Vzhledem k předpokladům lze činnost systému modelovat homogenním Markovovým procesem. Tento speciální Markovův proces je někdy nazýván proces rozmožňování a úmrtí a je aplikovatelný i mimo oblast techniky.

Intenzity pravděpodobnosti přechodu procesu mezi jednotlivými stavy definujeme těmito vztahy:

$$\begin{aligned} \mu_{00} &= -\lambda_0, \\ \mu_{01} &= \lambda_0, \\ \mu_{ij} &= \lambda_i \quad i = 1, 2, \dots, (n-1); \quad j = i+1 \\ \mu_{ij} &= \mu_i \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = i-1 \\ \mu_{ij} &= -(\lambda_i + \mu_i); \quad i = 1, 2, \dots, (n-1); \quad j = i \\ \mu_{nn} &= -\mu_n, \\ \mu_{ij} &= 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j \neq i-1, \quad i, i+1 \\ &\quad i > n, \quad j > n \end{aligned} \quad (255)$$

Předpokládáme, že $\lambda_i, i = 0, 1, \dots, n-1; \mu_j, j = 1, 2, \dots, n$ jsou nenulová kladná čísla. Počáteční rozložení pravděpodobnosti definujeme v souladu se zvyklostmi i praxí vztahy

$$\pi_0(0) = 1; \quad \pi_1(0) = \pi_2(0) = \dots = \pi_n(0) = 0, \quad (256)$$

tzn. že při spuštění jsou všechny automaty provozuschopné.

Systém Kolmogorových diferenciálních rovnic pro absolutní rozložení pravděpodobnosti stavů Markovova procesu má tvar:

$$\begin{aligned} \pi'_0(t) &= -\lambda_0 \pi_0(t) + \mu_1 \pi_1(t), \\ \pi'_k(t) &= \lambda_{k-1} \pi_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) \pi_k(t) + \mu_{k+1} \pi_{k+1}(t), \\ \pi'_n(t) &= \lambda_{n-1} \pi_{n-1}(t) - \mu_n \pi_n(t). \end{aligned} \quad (257)$$

$k = 1, 2, \dots, n-1,$

Soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu budeme řešit s využitím Laplaceovy transformace.

Položme

$$\mathcal{L}\{\pi_k(t)\} = a_k(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \pi_k(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (258)$$

Současně platí

$$\mathcal{L}\{\pi_0'(t)\} = p \mathcal{L}\{\pi_0(t)\} - 1, \quad (259)$$

$$\mathcal{L}\{\pi_k'(t)\} = p \mathcal{L}\{\pi_k(t)\}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Soustavu diferenciálních rovnic (257) vynásobíme e^{-pt} a integrujeme.

Dostaneme

$$\begin{aligned} (\lambda_0 + p) a_0(p) - \mu_1 a_1(p) &= 1, \\ -\lambda_{k-1} a_{k-1}(p) + (\lambda_k + \mu_k + p) a_k(p) - \mu_{k+1} a_{k+1}(p) &= 0, \\ &\quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ -\lambda_{n-1} a_{n-1}(p) + (\mu_k + p) a_n(p) &= 0. \end{aligned} \quad (260)$$

Tuto soustavu lineárních rovnic řešíme podle Cramerova pravidla:

$$a_k(p) = \frac{\Delta_{n,k}(p)}{\Delta_{n+1}(p)}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (261)$$

přičemž

$$\Delta_{n+1}(p) = \begin{vmatrix} \lambda_0 + \mu_0 + p & -\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda_0 & \lambda_1 + \mu_1 + p & -\mu_2 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_2 + \mu_2 + p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\lambda_{n-2} & \lambda_{n-1} + \mu_{n-1} + p & -\mu_n \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda_{n-1} & \lambda_n + \mu_n + p \end{vmatrix}, \quad (262)$$

resp.

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1}(p) &= (\lambda_n + \mu_n + p) \Delta_n(p) - \lambda_{n-1} \mu_n \Delta_{n-1}(p), \\ \Delta_0 &= 1; \quad \Delta_1(p) = \lambda_0 + \mu_0 + p. \end{aligned} \quad (263)$$

Rekurentní vztah (263) lze snadno odvodit pouze uplatněním pravidla o výpočtu determinantu. Zřejmě $\mu_0 = 0$, $\lambda_n = 0$ jsou pomocné veličiny.

Pro $\Delta_{n,k}(p)$ platí

$$\Delta_{n,k}(p) = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1} \Delta_{n-k}(p, \lambda_k, \mu_{k+1}, \dots, \lambda_n, \mu_{k+1}, \dots, \mu_n), \quad (264)$$

kde $\Delta_{n-k}(p)$ je příslušný subdeterminant řádu $n-k$.

Absolutní rozložení pravděpodobnosti Markovova procesu dostaneme zpětnou Laplaceovou transformací výrazů (261). Lze dokázat, že polynom $\Delta_{n+1}(p)$ má pro nenulová kladná $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, $\lambda_n = 0$, jeden kořen nulový a ostatní reálné záporné [11].

Pak obdržíme vztahy

$$\pi_k(t) = \pi_k + \sum_{i=1}^n A_{ki} e^{-\alpha_i t}, \quad (265)$$

kde $(-\alpha_i)$ jsou kořeny polynomu $\Delta_{n+1}(p)$ a A_{ki} součinitele rozkladu racionální lomené funkce. Konstanty π_k jsou limitní pravděpodobnosti Markovova procesu, nezávislé na počátečním rozložení. Sřední hodnotu Markovova procesu určíme ze vztahu

$$m(t) = \sum_{i=1}^n i \pi_i(t) \quad (266)$$

a pro rozptyl platí

$$\sigma^2(t) = \sum_{i=1}^n i^2 \pi_i(t) - m^2(t). \quad (267)$$

Číselný výpočet absolutního rozložení pravděpodobnosti je pro procesy s větším počtem stavů poměrně komplikovaný. Jak vyplývá z algoritmu výpočtu, je nutné hledat kořeny polynomů vyšších řádů a provádět rozklad racionální lomené funkce na zlomky s parametrem p ve jmenovateli v první mocnině. Tam, kde stanovení absolutního rozložení pravděpodobnosti není zcela nezbytné pro sledování vývoje procesu z počátečního stavu, se omezujeme na výpočet limitního rozložení pravděpodobnosti a charakteristik z něho vyplývajících.

V souladu s teorií Markovových procesů stanovíme limitní pravděpodobnosti z homogenní soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1, \\ 0 &= \lambda_{k-1} \pi_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k) \pi_k + \mu_{k+1} \pi_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ 0 &= \lambda_{n-1} \pi_{n-1} - \mu_n \pi_n, \end{aligned} \quad (268)$$

za podmínky

$$\sum_{i=0}^n \pi_i = 1. \quad (269)$$

Označme

$$\mu_k \pi_k - \lambda_{k-1} \pi_{k-1} = A_k; \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Pak soustavu (268) můžeme přepsat do tvaru

$$A_1 = 0; \quad A_{k+1} - A_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1; \quad A_n = 0.$$

Odtud

$$A_k = 0 \quad \text{pro } k = 1, \dots, n$$

a

$$\pi_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \pi_{k-1}, \quad (270)$$

či

$$\pi_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \pi_0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (271)$$

π_0 stanovíme z podmínky (269).

S pomocí limitního rozložení pravděpodobnosti můžeme vypočítat střední stav $\bar{k}$, Markovova procesu ze vztahu

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^n k \pi_k. \quad (272)$$

Předpokládáme nyní, že po odečtení organizmačních a ostatních prostojů (přestávky, doplňování materiálu, seřizování na novou zakázku) je v průběhu dvou směrů k dispozici právě d hodin pro vstupy procesů výrobního systému. Střední výkon V_k systému za dvě směny, stanovený s vyznačením limitních pravděpodobností, udává vztah

$$V_k = dV \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) \pi_i \quad (\text{ks/2 směny}). \quad (273)$$

Kde V je teoretický výkon v kusech jednotko automaticky za hodinu.

Střední výkon V_k je v podstatě limitou průměrné skutečných dělních výkonů pro větší počty pozorování při činné spolehlivosti systému. Při sestavení plánu výroby lze počítat s V_k jako s nejnižším dosažitelným, dělním výkonem.

Vztah (273) nevyhovuje v uvedeném formě pro výrobní systémy se zálohami. V součtu je nutné vhodně volit činitel $n-i$, vyjadřující počet automatů v provozu.

4.1.1 Překročení mezního stavu

Zvolme jistou úroveň m Markovova procesu a pokusme se zjistit pravděpodobnost toho, že během zvoleného času t nedosáhne proces ani v jednom případě zvoleného mezního stavu m . Úloha souvisí s případem, kdy je ve sledovaném provozu nutno zajistit v čase t s vysokou pravděpodobností činnost určitého počtu automatů.

Úlohu vyřešíme vyhodnocením procesu, ve kterém je stav m stavem absorpčním, přičemž jsou ostatní konstanty procesu shodné s původním daným procesem, tj.

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_k &= \lambda_k, \quad \bar{\mu}_k = \mu_k \quad \text{pro } k < m, \\ \bar{\lambda}_m &= \bar{\mu}_m = 0. \end{aligned} \quad (274)$$

Pravděpodobnost, že původní proces v intervalu $(0, t)$ alespoň jednou dosáhne stavu m , je rovna pravděpodobnosti toho, že v čase t se tento pomocný Markovův proces nachází ve stavu m . Hledanou pravděpodobnost $\pi_m(t)$ získáme z následující soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \pi'_0(t) &= -\lambda_0 \pi_0(t) + \mu_1 \pi_1(t), \\ \pi'_k(t) &= \lambda_{k-1} \pi_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) \pi_k(t) + \mu_{k+1} \pi_{k+1}(t), \quad (275) \\ &\quad k = 1, 2, \dots, m-2, \\ \pi'_{m-1}(t) &= \lambda_{m-2} \pi_{m-2}(t) - (\lambda_{m-1} + \mu_{m-1}) \cdot \pi_{m-1}(t), \\ \pi'_m(t) &= \lambda_{m-1} \pi_{m-1}(t). \end{aligned}$$

Po Laplaceově transformaci má soustava diferenciálních rovnic tvar

$$\begin{aligned} (\lambda_0 + p) a_0(p) - \mu_1 a_1(p) &= 1, \\ -\lambda_{k-1} a_{k-1}(p) + (\lambda_k + \mu_k + p) a_k(p) - \mu_{k+1} a_{k+1}(p) &= 0, \\ &\quad k = 1, 2, \dots, m-2, \\ -\lambda_{m-2} a_{m-2}(p) + (\lambda_{m-1} + \mu_{m-1} + p) a_{m-1}(p) &= 0, \\ -\lambda_{m-1} a_{m-1}(p) + p a_m(p) &= 0. \end{aligned} \quad (276)$$

* Zřejmé platí

$$a_m(p) = \frac{\Delta_{mm}(p)}{\Delta_{m+1}(p)}, \quad (277)$$

kde

$$\begin{aligned}\Delta_{mm}(p) &= \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{m-1}, \\ \Delta_{m+1}(p) &= p \Delta_m(p) = p[(\lambda_{m-1} + \mu_{m-1} - p) \Delta_{m-1} - \\ &\quad - \mu_{m-1} \lambda_{m-2} \Delta_{m-2}] \\ \text{a současně } \Delta_0 &= 1, \Delta_1 = \lambda_0 + p.\end{aligned}\quad (278)$$

Odtud

$$a_m(p) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}{p \Delta_m(p)} \quad (279)$$

a

$$\pi_m(t) = \mathcal{L}^{-1}\{a_m(p)\}. \quad (280)$$

4.1.2 Střední doba přechodu procesu do stavu s

Označme T_{ki} střední dobu přechodu procesu ze stavu k do stavu i . Zřejmě platí

$$T_s = T_{0s} = T_{01} + T_{12} + \dots + T_{s-1,s}. \quad (281)$$

Střední dobu T_s přechodu procesu ze stavu 0 do stavu s odvodíme pomocí střední doby přechodu $T_{k,k+1}$. Střední doba T_s je ekvivalentní střední době, po kterou je proces ve stavu $i < s$.

Vytvoříme pomocný Markovův proces o počtu stavů $k+1$. Všechny intenzity pravděpodobnosti přechodu pro $i \leq k$ jsou shodné s intenzitami původního procesu a $\lambda_{k+1} = 0$.

Náhodné intervaly, v nichž je proces ve stavu $k+1$, se střídají se stavy $i < k+1$. Poněvadž je Markovův proces homogenní, mají doby setrvání procesu ve stavu $k+1$ distribuční funkci

$$1 - e^{-\mu_{k+1}t}.$$

Tedy střední doba setrvání procesu ve stavu $k+1$ je

$$\bar{T} = \frac{1}{\mu_{k+1}}. \quad (282)$$

Všechny intervaly, ve kterých je proces ve stavu $i < k+1$, začínají vždy stavem k a končí stavem $k+1$. Střední hodnota těchto intervalů je hledaná hodnota $T_{k,k+1}$.

Vzhledem k tomu, že pracujeme s Markovovým procesem, jsou obě náhodné veličiny nezávislé a pro limitní pravděpodobnost $\bar{\pi}_{k+1}$ z pomocného procesu platí

$$\bar{\pi}_{k+1} = \frac{T}{T + T_{k,k+1}}. \quad (283)$$

Podle (271) pro pomocný proces platí

$$\bar{\pi}_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \bar{\pi}_0 = \Theta_i \bar{\pi}_0, \quad \sum_{j=0}^{k+1} \Theta_j \bar{\pi}_0 = 1,$$

a tedy

$$\bar{\pi}_i = \frac{\Theta_i}{\sum_{j=0}^{k+1} \Theta_j}; \quad i = 1, 2, \dots, k+1. \quad (284)$$

Upravme vztah (283) a dosadíme za $\bar{\pi}_{k+1}$ podle (284)

$$T_{k,k+1} = \frac{1 - \bar{\pi}_{k+1}}{\bar{\pi}_{k+1} \bar{\pi}_{k+1}} = \frac{\sum_{i=0}^{k+1} \Theta_i - \Theta_{k+1}}{\lambda_k \Theta_k}.$$

Odtud

$$T_{k,k+1} = \frac{\sum_{i=0}^k \Theta_i}{\lambda_k \Theta_k} = \frac{\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \pi_j}{\lambda_k \pi_k} \quad (285)$$

a

$$T_s = T_{0s} = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\sum_{i=0}^k \Theta_i}{\lambda_k \Theta_k} = \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{j=0}^k \frac{\pi_j}{\lambda_k \pi_k}, \quad (286)$$

kde

$$\Theta_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}. \quad (287)$$

Všechny vztahy v čl. 4.1 jsou odvozené pro obecné intenzity přechodů mezi jednotlivými stavy. Při řešení jednotlivých výrobních systémů je nutno volit intenzity pravděpodobností podle konkrétních podmínek.

4.2 VÝROBNÍ SYSTÉM S q SERIZOVAČI

Automatický výrobní systém obsahuje n stejných strojů, pro jejichž opravy je k dispozici q serizovačů ($0 \leq q \leq n$), a vyžaduje-li to situace, i příslušný počet pracovníků údržby. Všechni serizovači jsou rovnocenní a po jejich zásahu je zařízení uvedeno zcela do výchozího stavu.

Matematický model tohoto výrobního systému odvodíme ze soustavy rovnic (257). Intenzity poruch každého automatu označíme λ_i , intenzitu obnovy μ_i . Pro intenzity pravděpodobnosti přechodů pak dostaneme:

$$\begin{aligned}\mu_{00} &= -n\lambda, & i &= 0, 1, \dots, n-1; & j &= i+1 \\ \mu_{ij} &= (n-i)\lambda; & i &= 1, 2, \dots, q; & j &= i-1 \\ \mu_{ij} &= i\mu; & i &= 1, 2, \dots, q; & j &= i \\ \mu_{ij} &= -[(n-i)\lambda + i\mu]; & i &= 1, 2, \dots, q; & j &= i-1 \\ \mu_{ij} &= q\mu; & i &= q+1, \dots, n; & j &= i-1 \\ \mu_{ij} &= -[(n-i)\lambda + q\mu]; & i &= q+1, \dots, n; & j &= i \\ \mu_{ij} &= 0; & i &= 1, 2, \dots, n; & j &\neq i-1, i, i+1\end{aligned}\quad (288)$$

Zřejmě tedy platí

$$\begin{aligned}\lambda_i &= (n-i)\lambda; & \text{pro } i &= 0, 1, \dots, n-1; \\ \mu_i &= i\mu; & \text{pro } i &= 1, 2, \dots, q, \\ \mu_i &= q\mu; & \text{pro } i &= q+1, q+2, \dots, n.\end{aligned}\quad (289)$$

Pro takto definované intenzity poruch a intenzity obnovy lze použít všech dosud odvozených vztahů. Na dvou příkladech budou demonstrovány aplikace odvozených charakteristik spolehlivosti výrobního systému.

Příklad 8:

Stanovte absolutní rozložení pravděpodobnosti a ostiatní spolehlivostní charakteristiky výrobní soustavy tvořené dvěma automaty, když $\lambda = 0,1 \text{ h}^{-1}$, $\mu = 1 \text{ h}^{-1}$. Zjistěte skutečný výkon V_s soustavy, je-li k dispozici jeden seřizovač. Teoretický výkon každého automatu je $V = 650 \text{ ks} \cdot \text{h}^{-1}$ a $d = 14 \text{ h}$.

Řešení:

Vzhledem k označení, které bylo použito v (208), zřejmě platí $\lambda_0 = 2\lambda = 0,2$; $\lambda_1 = \lambda = 0,1$; $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 1$. Po dosazení do (257)

$$\begin{aligned}\pi'_0(t) &= -0,2 \pi_0(t) + \pi_1(t), \\ \pi'_1(t) &= 0,2 \pi_0(t) - 1,1 \pi_1(t) + \pi_2(t), \\ \pi'_2(t) &= 0,1 \pi_1(t) - \pi_2(t).\end{aligned}$$

Odtud s použitím Laplaceovy transformace

$$(p + 0,2) a_0(p) - a_1(p) = 1,$$

$$\begin{aligned}-0,2 a_0(p) + (p + 1,1) a_1(p) - a_2(p) &= 0, \\ -0,1 a_1(p) + (p + 1) a_2(p) &= 0.\end{aligned}$$

Podle Cramerova pravidla dostaneme

$$\begin{aligned}a_0(p) &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & p+1,1 & -1 \\ 0 & -0,1 & p+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+0,2 & -1 & 0 \\ -0,2 & p+1,1 & -1 \\ 0 & -0,1 & p+1 \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{p^3 + 2,3p^2 + 1,22p}{p^3 + 2,4p + 1} = \frac{p^2 + 2,1p + 1}{p(p + 1,470)(p + 0,830)} = \\ &= \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 1,470} + \frac{C}{p + 0,830} = \\ &= \frac{Ap^2 + 2,3Ap + 1,22A + Bp^2 + 0,830Bp + Cp^2 + 1,470Cp}{p(p + 1,470)(p + 0,830)}.\end{aligned}$$

Konstanty A, B, C stanovíme ze vztahů

$$\begin{aligned}A + B + C &= 1, \\ 2,3A + 0,830B + 1,470C &= 2,1, \\ 1,22A &= 1, \\ A &= 0,820, \\ B &= 0,078, \\ C &= 0,102,\end{aligned}$$

a dostaneme

$$a_0(p) = \frac{0,820}{p} + \frac{0,078}{p + 1,470} + \frac{0,102}{p + 0,830}.$$

Po zpětné Laplaceově transformaci obdržíme definitivně

$$\pi_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\{a_0(p)\} = 0,820 + 0,078 e^{-1,470t} + 0,102 e^{-0,830t}.$$

Stejným postupem pro zbývající dvě funkce dostaneme

$$\begin{aligned}\pi_1(t) &= 0,164 - 0,100 e^{-1,470t} - 0,064 e^{-0,830t}, \\ \pi_2(t) &= 0,016 + 0,023 e^{-0,470t} - 0,039 e^{-0,830t}.\end{aligned}$$

Pro limitní rozložení pravděpodobnosti zřejmě platí

$$\pi_0 = 0,820; \quad \pi_1 = 0,164; \quad \pi_2 = 0,016.$$

Sřední hodnota zkoumaného procesu je podle (266) dána funkcí

$$m(t) = \pi_1(t) + 2\pi_2(t) = 0,196 - 0,054 e^{-1,470t} - 0,142 e^{-0,830t},$$

přičemž zřejmě střední stav $k_s = 0,196$.

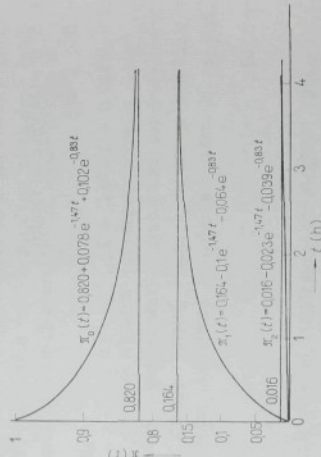
Rozpísl podle (267)

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= \pi_1(t) + 4\pi_2(t) - m^2(t) = 0,189 + 0,013 e^{-1,470t} - \\ &- 0,164 e^{-0,830t} - 0,003 e^{-2,940t} - 0,020 e^{-1,660t} - \\ &- 0,015 e^{-2,300t}. \end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že obě funkce splňují předpokládané limitní podmínky:

$$m(0) = 0; \quad \sigma^2(0) = 0;$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0,196; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma^2(t) = 0,189.$$



Obr. 27. Průběh absolutního rozložení pravděpodobnosti

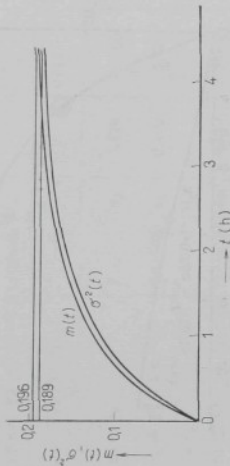
Průběh absolutního rozložení pravděpodobnosti je na obr. 27, průběh $m(t)$ a $\sigma^2(t)$ na obr. 28. Výpočet středního výkonu V_s za dvě směny podle (273) je v tab. 2.

Podle tabulky je $V_s = 16\,416,4$ ks/2 směny.

Odvodíme nyní pravděpodobnost dosažení mezního stavu $m = 2$ v čase t .

Podle (279) dostáváme

$$\begin{aligned} a_2(p) &= \frac{2\lambda\lambda}{p[(\lambda + \mu + p)(2\lambda + p) - 2\lambda\mu]} = \\ &= \frac{0,02}{p(p + 1,284)(p + 0,016)} = \frac{1}{p} + \frac{0,013}{p + 1,284} - \frac{1,013}{p + 0,016}. \end{aligned}$$



Obr. 28. Graf střední hodnoty $m(t)$ a rozptylu $\sigma^2(t)$ náhodného procesu z příkladu 8

Tab. 2. Výpočet středního výkonu pro příklad 8

Stav i	π_i	$dV(2-i)$	$dV(2-i)\pi_i$
0	0,820	18 200	14 924,0
1	0,164	9 100	1 492,4
2	0,016	—	—
Σ	1,000	—	16 416,4

Po zpětné Laplaceově transformaci

$$\bar{\pi}_2(i) = 1 + 0,013 e^{-1,284t} - 1,013 e^{-0,016t}.$$

Pro mezní stav $m = 1$ dostáváme obdobně

$$a_1(p) = \frac{2\lambda}{p(2\lambda + p)} = \frac{0,2}{p(p + 0,2)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + 0,2},$$

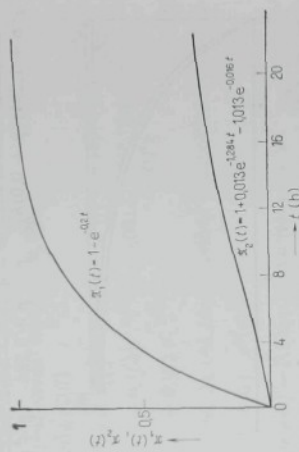
odtud

$$\bar{\pi}_1(i) = 1 - e^{-0,2t}.$$

Průběh obou funkcí je obr. 29.

Střední doba přechodu ze stavu 0 do stavu 1 podle (286)

$$T_1 = \frac{\pi_0}{2\lambda\pi_0} = 5 \text{ h}$$



Obr. 29. Průběh pravděpodobnosti dosažení mezních stavů

a střední doba přechodu ze stavu 0 do stavu 2

$$T_2 = \sum_{k=0}^2 \frac{\pi_k}{\lambda_k \pi_k} = \frac{\pi_0}{2\lambda\pi_0} + \frac{\pi_0 + \pi_1}{\lambda\pi_1} = 65 \text{ h.}$$

Daný výrobní systém je schopen produkovat průměrně $V_s = 16\,416,4$ ks/2 směny. Pokud se nezmění charakteristiky spolehlivosti a čistý fond pracovní doby zůstane zachován, je to maximální denní výkon, se kterým můžeme v ročních plánech počítat. Seřizovač bude průměrně plně využit pro opravy pouze po $(1 - \pi_0)100 = 18\%$ času v intervalu $d = 14$ h, tj. po 2,52 h. Střední doba současně chodu obou automatů je 5 h. Do stavu, kdy jsou oba stroje v poruše, se dostane soustava ze stavu, kdy jsou oba stroje v provozu, v průměru jednou za 65 h.

Příklad 9:

Výrobní systém obsahuje 5 soustružnických automatů s parametry $V = 120 \text{ ks} \cdot \text{h}^{-1}$, $\lambda = 0,125 \text{ h}^{-1}$, $\mu = 1 \text{ h}^{-1}$, $d = 14$ h. Jaký je střední denní výkon V_s při jednom seřizovači, tj. $q = 1$? Jak se zvýší střední výkon, zvýší-li se počet seřizovačů na 2? Stanovte časové vytížení obou seřizovačů.

Řešení:

Pro $q = 1$ dostaneme

$$\lambda_i = (5 - i)\lambda, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1; \quad \mu_i = \mu, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Výpočet limitních pravděpodobností podle (271) a středního výkonu obsahuje tab. 3, kde $\lambda/\mu = 0,125$.

Tab. 3. Výpočet V'_s pro $q = 1$ z příkladu 9

Stav i	Výpočet π_i	π_i	$dV(5 - i)$	$dV(5 - i)\pi_i$
0	$\pi_0 = \pi_0$	1	π_0	4 024
1	$\pi_1 = 5\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0$	0,625 00	π_0	2 009
2	$\pi_2 = 20\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi_0$	0,312 50	π_0	756
3	$\pi_3 = 60\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\pi_0$	0,117 18	π_0	188
4	$\pi_4 = 120\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4\pi_0$	0,029 28	π_0	23
5	$\pi_5 = 120\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5\pi_0$	0,003 60	π_0	—
Σ	—	2,087 56	π_0	7 000

Střední denní výkon $V'_s = 7\,000$ ks/2 směny. Pravděpodobnost, že jeden nebo více strojů bude čekat na opravu, je $(1 - \pi_0 - \pi_1) = 0,222$. Poměrně vysokou pravděpodobnost prostojů alespoň jednoho stroje snížíme zarazením dalšího seřizovače. Pro $q = 2$ dostáváme $\lambda_i = (5 - i)\lambda$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$; $\mu_i = \mu$; $\mu_i = 2\mu$, $i = 2, 3, 4, 5$. Výpočet uspořádáme do tab. 4. Střední výkon výrobního systému při dvou seřizovačích $V''_s = 7\,437,4$ ks/2 směny je o 6,2% vyšší proti výkonu systému s jedním seřizovačem. Pravděpodobnost, že jeden nebo více strojů bude čekat na opravu, je $\pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 0,018$. Jeden seřizovač je využit po 44,9% a druhý 10,4% provozního času.

Stejným postupem lze zkoumat i vliv zlepšení spolehlivosti automatů.

Tab. 4. Výpočet V_q^m pro $q = 2$ z příkladu 9

Stav i	Výpočet π_i	π_i	π_i	$dV(5-i)$	$dV(5-i)\pi_i$
0	$\pi_0 = \pi_0$	1	π_0	8 400	4 628,4
1	$\pi_1 = 5 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \pi_0$	0,625	π_0	6 720	2 318,4
2	$\pi_2 = 10 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0$	0,156 25	π_0	5 040	433,4
3	$\pi_3 = 15 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \pi_0$	0,029 30	π_0	3 360	53,8
4	$\pi_4 = 15 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \pi_0$	0,003 66	π_0	1 680	3,4
5	$\pi_5 = 7,5 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 \pi_0$	0,000 22	π_0	—	—
Σ	—	1,814 43	π_0	—	7 437,4

Předpokládáme, že se podařilo snížit intenzitu poruch o 20%, tj. na $\bar{\lambda} = 0,1$ h⁻¹. Vyhodnotíme-li výkon s jedním seřizovačem podobnou tabulkou, zjistíme, že střední výkon je 7 330 ks/2 směny, tj. o 4,7% vyšší než v původním výrobním systému.

4.3 ZÁLOHY V SYSTÉMU NEZÁVISLÝCH AUTOMATŮ

Zálohy ve výrobních systémech s nezávisle pracujícími automaty se vyskytují především tam, kde je nezbytné zajistit rovnoměrnou produkci dle s určitým omezeným počtem pracovníků, který je schopen udržovat v provozu právě jen n automatů. Záložní automaty jsou spouštěny v okamžiku poruchy některého z automatů v souvislosti s uvolněním obsluhy a předním automatu neschopného provozu seřizovači do opravy. Záložní automaty, které jsou zcela ekvivalentní s ostatními automaty, mohou být v zatíženém i nezatíženém stavu.

Předpokládáme, že obsluha je schopna zajišťovat provoz právě n automatů, přičemž dalších u automatů je udržováno ve stavu zatíženém rezervy

a v automatů tvoří nezatíženou rezervu. Dílna má k dispozici q seřizovačů. Celkový počet automatů ve výrobním systému je $N = n + u + v$.

Každý automat, na kterém vznikla porucha, se okamžitě nahradí autem v zatíženém stavu. Každý automat ze zatížených záloh je nahrazen autem z nezatížených záloh, pokud se porouchal, popř. když byl zafázen mezi automaty v provozu. Každý automat po obnově přechází do nezatížené zálohy. Stavem systému budeme chápat počet automatů, které mají v daném okamžiku poruchu.

K vytvoření modelu výrobního systému se záložními automaty lze opět použít Markovův proces rozmnožování a úmrtí z čl. 4.1. Definujme nyní intenzity poruch $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ a intenzity obnovy $\mu_1, \dots, \mu_n$ z (255) pro systém se zatíženými i nezatíženými zálohami. Platí:

$$\begin{aligned}\lambda_i &= (n + u) \lambda; & i &= 0, 1, \dots, v \\ \lambda_i &= (u + n + v - i) \lambda; & i &= v + 1, v + 2, \dots, N - 1 \\ \mu_i &= i \mu; & i &= 1, 2, \dots, q - 1 \\ \mu_i &= q \mu; & i &= q, q + 1, \dots, N.\end{aligned}\quad (290)$$

Tab. 5. Výpočet V_q pro $q = 2$ z příkladu 10

Stav i	Výpočet π_i	π_i	π_i	$dV(6-i)$	$dV(6-i)\pi_i$
0	$\pi_0 = \pi_0$	1	π_0	504 000	161 280
1	$\pi_1 = 6 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \pi_0$	1,2	π_0	420 000	161 280
2	$\pi_2 = 15 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0$	0,6	π_0	336 000	64 512
3	$\pi_3 = 30 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \pi_0$	0,24	π_0	252 000	19 404
4	$\pi_4 = 45 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \pi_0$	0,072	π_0	168 000	3 864
5	$\pi_5 = 45 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 \pi_0$	0,014 4	π_0	84 000	336
6	$\pi_6 = 22,5 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^6 \pi_0$	0,001 44	π_0	—	—
Σ	—	3,127 84	π_0	—	410 676

Příklad 10:

Dílna má být vybavena zaměnitelnými automatickými stroji s parametry $\lambda = 0,4 \text{ h}^{-1}$, $\mu = 2 \text{ h}^{-1}$ o teoretickém výkonu $V = 6000 \text{ ks} \cdot \text{h}^{-1}$. Vedení dílny disponuje obsluhou právě pro 6 strojů a dvěma seřizovači. Navrhnete zálohu tak, aby byl zajištěn střední denní výkon $V_s = 470\,000 \text{ ks/2 směny}$ při $d = 14$.

Řešení:

Zhodnotíme nejprve výrobní systém bez záloh při $n = 6$, $q = 2$. Zřejmé

$$\lambda_i = (6 - i) \lambda \quad \text{pro } i = 0, 1, \dots, 5;$$

$$\mu_i = \mu, \quad \mu_i = 2\mu \quad \text{pro } i = 2, 3, \dots, 6.$$

Tab. 6. Výpočet V_s pro $q = 2$, $n = 6$, $v = 2$ z příkladu 10

Stav i	Výpočet π_i	π_i	π_i	Teoretický výkon	Skutečný výkon
0	$\pi_0 = \pi_0$	1	π_0	504 000	136 584
1	$\pi_1 = 6 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \pi_0$	1,2	π_0	504 000	164 304
2	$\pi_2 = 18 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 \pi_0$	0,72	π_0	504 000	98 280
3	$\pi_3 = 54 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^3 \pi_0$	0,432	π_0	420 000	49 140
4	$\pi_4 = 135 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^4 \pi_0$	0,216	π_0	336 000	19 824
5	$\pi_5 = 270 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^5 \pi_0$	0,086 4	π_0	252 000	5 796
6	$\pi_6 = 405 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^6 \pi_0$	0,025 92	π_0	168 000	1 176
7	$\pi_7 = 405 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^7 \pi_0$	0,005 184	π_0	84 000	168
8	$\pi_8 = 202,5 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^8 \pi_0$	0,000 518	π_0	—	—
Σ	—	3,686 022	π_0	—	475 272

Výpočet je shrnut do tab. 5 ($\lambda/\mu = 0,2$).

Střední výkon systému šesti automatů je $V_s = 410\,676 \text{ ks/2 směny}$. Rozdíl požadovaného výkonu a dosaženého výkonu je $59\,324 \text{ ks/2 směny}$. Jeden samostatný automat s obsluhou vyrobí za den $dVK_p = 14 \cdot 6\,000 \cdot 2/2,4 = 70\,000 \text{ ks/2 směny}$. Využití automatu v systému automatů bude podstatně nižší, proto zvolíme dva automaty v nezátžené záloze s možností okamžitého přepnutí do provozuschopného stavu. Tedy pro $n = 6$, $q = 2$, $v = 2$, $u = 0$, $N = n + v = 8$ dostáváme

$$\lambda_i = 6\lambda; \quad i = 0, 1, 2,$$

$$\lambda_i = (8 - i) \lambda; \quad i = 3, 4, \dots, 7,$$

$$\mu_i = \mu;$$

$$\mu_i = 2\mu; \quad i = 2, 3, \dots, 8.$$

Vezmeme-li v úvahu vztahy (271) pro limitní rozložení pravděpodobnosti, můžeme výpočet uspořádat do tabulky (tab. 6).

Výrobní systém šesti automatů se dvěma automaty v nezátžené záloze má střední výkon $V_s = 475\,272 \text{ ks/2 směny}$; splňuje tedy podmínky zadání.

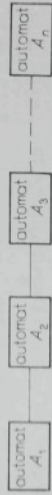
Celková bilance činnosti daného výrobního systému se zálohami je zachycena v tab. 7.

Tab. 7. Přehled stavů výrobního systému z příkladu 10

i	π_i	Počet automatů			Počet seřizovačů	
		v provozu	v záloze	v opravě	čekajících v činnosti	čekajících na opravu
0	0,271	6	2	0	0	2
1	0,326	6	1	1	1	1
2	0,195	6	0	2	2	0
3	0,117	5	0	2	2	0
4	0,059	4	0	2	2	0
5	0,023	3	0	2	3	0
6	0,007	2	0	2	4	0
7	0,002	1	0	2	5	0
8	0,000	0	0	2	6	0

5 Jednoprúdové automatické linky

Ekonomicky výhodným prostředkem pro sériovou a hromadnou výrobu jsou automatické linky. Základním typem je jednoprúdová linka (obr. 30), kterou tvoří n automatických strojů seřazených v technologické posloupnosti. Každá operace se vykonává pouze na jednom stroji. Mezi-



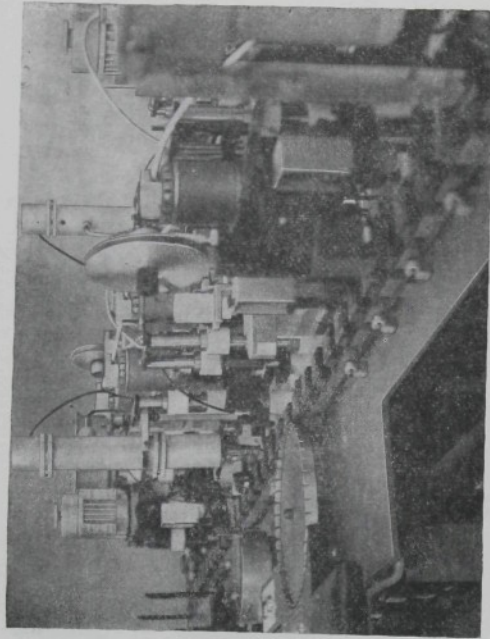
Obr. 30. Jednoprúdová automatická linka s pevnou vazbou

operační transport výrobků zabezpečuje automatický dopravník, který v okamžiku převzetí z i -ého automatu předává výrobek do automatu $(i + 1)$ -ního. Dopravník tak vytváří pevnou vazbu mezi automaty. Automatické stroje zařazené do linky s pevnou vazbou (resp. pevné linky) pracují zcela synchronně ve společném taktu.

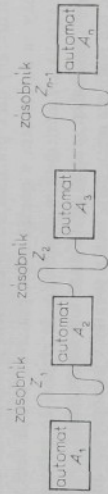
Montážní linka na elektrolytické miniaturní kondenzátory (obr. 31) je příkladem jednoprúdové automatické linky s pevnou vazbou. Mezioperační dopravník tvoří krokující řetěz s pružně upevňujícími unášeči. V první operaci se do aretovaného unášeče založí základní díl, hliníkové pouzdro, a v dalších operacích se doplní postupně všechny ostatní díly. Za každou montážní operaci je kontrola, která automaticky zastaví chod linky, jestliže nebyl dodán v libovolné operaci určitý počet dílů (3; 5 apod.)

Mezioperační doprava výrobků v jednoprúdové automatické lince může být zdokonalena zařazením mezioperačních zásobníků (obr. 32). Základní charakteristikou zásobníku je jeho kapacita, tj. počet výrobků, které může zásobník pojmut. Automat může dodávat do zásobníku výrobky v taktu odlišném od taktu automatu, který výrobky ze zásobníku odebírá. V tomto smyslu zabezpečuje mezioperační zásobník asynchronní chod automatů v lince.

Je-li zásobník naplněn, tzn., že počet výrobků který obsahuje, je shodný s jeho kapacitou, je zablokována činnost předchozího stroje. Odblokování předchozího automatu je možné po odebrání alespoň jednoho výrobku



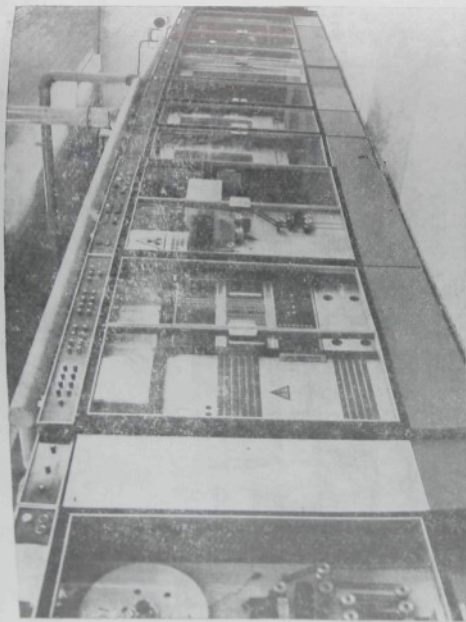
Obr. 31. Automatická linka pro montáž elektrolytických kondenzátorů



Obr. 32. Jednoprúdová automatická linka s pružnou vazbou

ze zásobníku. Některé systémy ruší tikování až po oděrpání jisté části zásoby. Na pokles zásoby na nulu je vězín chod následujícího automatu. Opětovné spuštění automatu je možné po dodání alespoň jednoho výrobku do zásobníku, popř. může být spojeno s dosažením jisté minimální úrovně zásob.

Mezioperační zásobníky včle toho, že umožňují asynchronní činnost automatů zařazených v lince, kompenzují do jisté míry vzrůstající vliv poruch automatů. Poručla kteréhokoliv automatu v pevné lince znamená zastavení celé linky. Dejde-li k poruše automatu v pružné lince, může celý



Obr. 33. Pružná automatická linka pro výrobu rezistorů s kovovou vrstvou

jemu předřazený úsek pracovat až do naplnění předřazeného zásobníku a část linky za autorem v poruše může pracovat, dokud není vyčerpána zásoba výrobků v následujícím zásobníku. Je zřejmé, že zařazením mezioperačních zásobníků se snižují ztráty z prostojů automatů.

Jeden typ realizace mezioperačních zásobníků v jednoproudé automatické lince je na obr. 33. Vrstvové válcové rezistory jsou v průběhu výroby na lince založeny do transportní pásky. Páska je nesena soustavou hnacích a hnáných kladek. Kladky zásobníku nemají pohon. Vstup i výstup zásobníku ovládají mechanismy navazujících automatů. Spodní řada kladek každého zásobníku je uložena na svisle pohyblivém ramenu. Poloha ramena definuje délku pásky v zásobníku, a tím i počet rezistorů umístěných v zásobníku. Chod sousedních automatů je rovněž ovládan spínači v krajních polohách pohyblivého ramena zásobníku.

Automatické linky na obr. 30 a 32 jsou v jistém smyslu krajní případy možných variant sestavení automatů do jednoproudé linky. Mezioperační zásobníky mohou být zřejmě zařazeny pouze na některých místech linky tak, aby se dosáhlo maximálního využití automatů i zásobníků. Vazba

některých automatů může být pevná a na ostatních místech předávání výrobků mohou být zařazeny mezioperační zásobníky. Tento případ řešíme tak, že převádíme linku s kombinovanými vazbami automatů na pružnou linku. Části linek s pevnou vazbou vyhodnotíme jako pevnou linku a dále charakterizujeme jako jediný automat. Tímto postupem vyloučíme pro účely výpočtu všechny pevné vazby v lince a řešíme pouze pružnou automatickou linku z obr. 32.

Pro výpočty spolehlivosti automatických linek budeme předpokládat, že známe spolehlivostní charakteristiky všech automatů zařazených v lince. Především distribuční funkci $F(t)$ dob bezporuchového provozu a $G(t)$ dob obnovování provozuschopnosti. Znalost distribučních funkcí je zpravidla podmiňována experimentálními daty a jejich vyhodnocením.

Velmi časté je hodnocení spolehlivosti systému v období jeho projekce, kdy jsme omezeni na odhad spolehlivostních parametrů automatů na základě dosavadních zkušeností a experimentálních výsledků podobných zařízení.

Ze spolehlivostních vlastností automatů zařazených v lince budeme odvozovat charakteristiky spolehlivosti celé automatické linky. Ve všech jednotlivých případech je však nezbytné definovat obsah pojmu spolehlivost linky i jednotlivě ukazatele. Spolehlivost automatické linky jako celku má základní význam pro úroveň využitelnosti linky, a tím pro ekonomické parametry celé linky. V tomto pojetí spočívá základní význam hodnocení spolehlivosti automatických linek.

5.1 SPOLEHLIVOSTNÍ CHARAKTERISTIKY PEVNÉ LINKY

Nechť distribuční funkce dob bezporuchového provozu i -tého automatu z obr. 30 je $F_i(t)$, distribuční funkce dob obnovování provozuschopnosti $G_i(t)$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Označíme-li ekvivalentním způsobem i pravděpodobnost $R_i(t)$ bezporuchového provozu, platí zřejmě pro pravděpodobnost $R_L(t)$ bezporuchového provozu celé linky vztah

$$R_L(t) = R_1(t) R_2(t) \dots R_n(t). \quad (291)$$

Do tohoto vztahu dosadíme podle (8), $\lambda_i(t)$ jsou intenzity poruch jednotlivých automatů. Dostaneme

$$R_L(t) = \exp \left\{ - \int_0^t [\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \dots + \lambda_n(t)] dt \right\} =$$

$$= \exp \left(- \int_0^t \lambda_i(t) dt \right), \quad (292)$$

kde $\lambda_i(t)$ je intenzita poruch pevné linky, přičemž

$$\lambda_i(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \dots + \lambda_n(t). \quad (293)$$

Pro distribuční funkci $F_i(t)$ dob bezporuchového provozu pevné linky platí

$$F_i(t) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^t [\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \dots + \lambda_n(t)] dt \right\}. \quad (294)$$

Jestliže doby bezporuchového provozu všech automatů mají exponenciální rozložení s parametry $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, dostaneme velmi jednoduché vztahy

$$F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}, \quad (295)$$

$$\lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \quad (296)$$

$$T_i = \frac{1}{\lambda_i}. \quad (297)$$

Je zřejmé, že doba bezporuchového provozu pevné linky má pro tento případ rovněž exponenciální rozložení s intenzitou poruch λ_i a střední dobu bezporuchového provozu T_i .

Předpokládáme, že pevná automatická linka je v bezporuchovém provozu po dobu z . Pravděpodobnost, že v následujícím malém intervalu Δz vznikne porucha i -tého automatu, je podle (13) $\lambda_i(z) \Delta z$. Pro pravděpodobnost vzniku poruchy libovolného automatu v lince, a tím celé linky podobně platí $\lambda_i(z) \Delta z$. Podmíněná pravděpodobnost $P_i(z)$ vzniku poruchy právě i -tého automatu, když v intervalu $(z, z + \Delta z)$ vznikla porucha linky, je zřejmé dána vztahem

$$P_i(z) = \frac{\lambda_i(z) \Delta z}{\lambda_i(z) \Delta z} = \frac{\lambda_i(z)}{\lambda_i(z)}. \quad (298)$$

Předpokládáme, že v okamžiku spuštění linky po obnově libovolného automatu jsou ve výchozím stavu rovněž všechny ostatní automaty zařazené v lince. Můžeme-li přijmout tento předpoklad, pak pro distribuční funkci $G_i(z)$ dob obnovování provozuschopnosti linky v čase z platí

$$G_i(z) = P_i(\theta \leq t) = \sum_{i=1}^n P_i(z) G_i(t),$$

$$G_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i(z)}{\lambda_i(z)} G_i(t). \quad (299)$$

Distribuční funkce $G_i(t)$ dob obnovování provozuschopnosti linky je závislá na okamžiku vzniku poruchy vzhledem k poslednímu obnověni provozu.

Odtud pro hustotu pravděpodobnosti $g_i(t)$ dob obnovování provozuschopnosti linky lze snadno odvodit

$$g_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i(z)}{\lambda_i(z)} g_i(t), \quad (300)$$

přičemž $g_i(t)$ jsou hustoty pravděpodobnosti dob obnovování provozuschopnosti jednotlivých automatů. Označíme-li ϕ_i střední doby obnovování provozuschopnosti automatů, platí pro střední dobu obnovování provozuschopnosti celé linky ϕ_z vztah

$$\phi_z = \int_0^\infty t g_z(t) dt = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i(z)}{\lambda_i(z)} \int_0^\infty t g_i(t) dt = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i(z)}{\lambda_i(z)} \phi_i. \quad (301)$$

K podstatnému zjednodušení výpočtu ukazatelů dochází v případě, že rozložení dob bezporuchového provozu všech automatů je exponenciální. Předpoklad o úplném obnověni všech automatů v lince při spuštění linky ztrácí v tomto případě svůj význam a distribuční funkce $G_i(t)$ dob obnovování provozuschopnosti linky je dána vztahem

$$G_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i} G_i(t). \quad (302)$$

Pro střední dobu ϕ_i obnovování provozuschopnosti linky dostaneme

$$\phi_i = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i} \phi_i. \quad (303)$$

Vykazují-li doby obnovování provozuschopnosti všech automatů rovněž exponenciální rozložení s parametrem λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, je střední doba obnovování provozuschopnosti určena vztahem

$$\phi_i = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}. \quad (304)$$

Jak vyplývá ze vztahů (294), (299), nemusí se vždy podařit získat dostateč-

ně jednoduché výrazy pro výsledné distribuční funkce $F_i(t)$, $G_i(t)$ tak, aby byly využitelné pro další výpočty. V tom případě je vhodné hodnotit automatickou linku s pevnou vazbou jako jediný automat a z experimentálních výsledků sledování provozu linky vyhodnotit přímo příslušné distribuční funkce a jejich parametry.

První i druhý přístup vede ke stanovení spolehlivosti pevné linky jako jediného celku. Distribuční funkce $F_i(t)$, $G_i(t)$ umožňují výpočet i všech ostatních charakteristik, např. výpočet ukazatele pohotovosti.

Součinitel pohotovosti pevné automatické linky můžeme stanovit i na základě následující úvahy. Součinitel pohotovosti vyjadřuje v podstatě pravděpodobnost, že automatická linka bude v libovolném okamžiku t v provozu. Sledujeme činnost linky v nějakém časovém intervalu. Nechtě v průběhu tohoto intervalu byla linka po dobu s v bezporuchovém provozu. K době s přiřadíme střední hodnotu $E[\theta(s)]$, po kterou byla linka ve stavu obnovování provozuschopnosti. Součinitel pohotovosti můžeme vyjádřit vztahem

$$K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s + E[\theta(s)]} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{E[\theta(s)]}{s}} \quad (305)$$

V automatické lince o n automatech vznikají na jednotlivých automatech zcela nezávislé poruchy. Po obnově je automat ve výchozím stavu. Okamžiky obnovy definují proces obnovy ve smyslu varianty A čl. 2.1.3. Funkci obnovy i -tého automatu $i = 1, 2, \dots, n$ označíme $H_i(s)$, funkci obnovy celé linky $H(s)$.

Zřejmě platí

$$H(s) = \sum_{i=1}^n H_i(s) \quad (306)$$

a pro střední dobu obnovování provozuschopnosti linky, vztahující se na dobu bezporuchového provozu linky o délce s , dostaneme

$$E[\theta(s)] = \sum_{i=1}^n \Phi_i H_i(s). \quad (307)$$

Vzhledem k základní větě obnovy (28) platí

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \Phi_i H_i(s)}{s} = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i}{T_i} \quad (308)$$

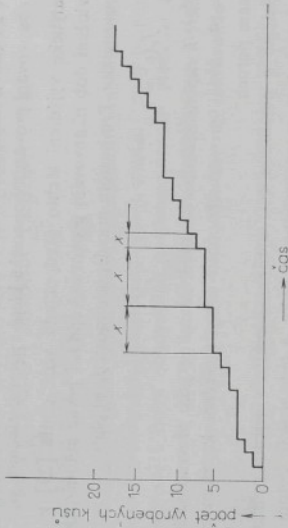
a pro součinitel pohotovosti automatické linky s pevnou vazbou obdržíme

$$K_p = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i}{T_i}}. \quad (309)$$

Zcela odlišného přístupu k hodnocení spolehlivosti pevné linky je použito v [29]. Metodika je vhodná především pro pevné automatické linky s větší dobou taktu, jaké se vyskytují např. u automatických linek na triskové obrábění, a pro linky s proměnným pracovním taktům.

Autor nevychází ze spolehlivosti jednotlivých strojů zařazených do linky. Základním pojmem je cyklus výroby, tj. interval výroby jednoho výrobku označený X , který je odvozen od okamžiku, kdy výrobky opouštějí linku. Interval X je proměnný a je dán součtem doby U na vykonání technologických operací a dobou V přípravy stroje k vykonání operace, tzv. dobou obnovování provozuschopnosti. Platí

$$X = U + V. \quad (310)$$



Obr. 34. Výroba na automatické lince

Charakter produkce na automatické lince s delším taktům, charakterizované veličinami X , U , V , je na obr. 34. Všechny tři veličiny jsou náhodné veličiny, proto je analýza činnosti linky zaměřena na zjištění jejich hustot pravděpodobnosti.

Rozmanitost vlivů je zdůvodněno použitím normálního rozložení pro charakteristiku dob uskutečnění technologické operace. Je-li $\bar{u}$ střední doba trvání operace a $u_{\min}$ minimální doba trvání operace, dostáváme pro hustotu

pravděpodobnosti $f_e(u)$ vztah

$$f_e(u) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma}} e^{-\frac{(u-\bar{u})^2}{2\sigma^2}}, \quad (311)$$

kde

$$\sigma = \sqrt{\bar{u} - u_{\min}}. \quad (312)$$

Rozložení doby přípravy linky k vykonání dalšího taktu, tj. v podstatě doby obnovování provozuschopnosti linky, je určeno za následujících předpokladů:

1. Příčin poruch linky je mnoho a jsou rozmanité.
2. Počet příčin roste se zmenšením střední doby obnovování provozuschopnosti linky a klesá s prodlužováním střední doby obnov provozuschopnosti.
3. Doby obnovování provozuschopnosti linky po poruchách způsobených stejnou příčinou mají normální rozložení.
4. V každém z těchto normálních rozložení roste rozptyl s růstem střední doby obnovování provozuschopnosti a klesá s jejím zkrácením.

Analytické vyjádření těchto předpokladů vede podle [29] k závěru, že rozložení dob obnovování provozuschopnosti pevné automatické linky je exponenciální. Pro hustotu pravděpodobnosti $f_T(v)$ platí

$$f_T(v) = k e^{-kv}. \quad (313)$$

Parametr k exponenciálního rozložení odvodíme jako převrácenou hodnotu dob obnovování provozuschopnosti linky vzhledem ke všem možným příčinám poruch.

Označme q poměrnou část výrobních cyklů, v jejichž průběhu bylo nutno obnovovat provozuschopnost linky, a tedy $u \neq 0$. Potom $(1 - q)$ je poměrná část cyklů, ve kterých $u = 0$. Vzhledem k tomu platí pro hustotu pravděpodobnosti $f_d(x)$ dob trvání cyklu vztah

$$f_d(x) = (1 - q)f_e(x) + q \int_{-\infty}^{\infty} f_e(u)f_T(x - u) du. \quad (314)$$

Pro dosazení a úpravách dostaneme

$$f_d(x) = \frac{1 - q}{\sqrt{(2\pi)\sigma}} e^{-\frac{(x-\bar{u})^2}{2\sigma^2}} + qk e^{-k(x-\bar{u})}. \quad (315)$$

Velikost q můžeme rovněž stanovit ze vztahu

$$q = \lambda \bar{u} \quad (316)$$

s pomocí intenzity poruch linky, kterou jsme označili λ .

Označíme-li $\bar{t} = 1/k$ střední dobu obnovování provozuschopnosti, pak za předpokladu, že poměr $\bar{u}/\bar{t}$ je dostatečně malý, dostaneme z (315) pro střední dobu cyklu $\bar{x}$ vztah

$$\bar{x} = \bar{u} + q\bar{t}. \quad (317)$$

Odtud pro součinitel pohotovosti pevné linky platí

$$K_p = \bar{u}/\bar{x}. \quad (318)$$

K úplnému popisu spolehlivosti pevné automatické linky je nutné stanovit z experimentálních údajů čtyři parametry: $\bar{u}$, σ , k , q . S jejich znalostí lze použít všech uvedených vztahů, zvláště (315), a pro technicko-ekonomické hodnocení vztahu (318).

5.2 APLIKACE MARKOVOVÝCH ŘETĚZCŮ PŘI VYTVÁŘENÍ MODELU PRUŽNÉ LINKY

5.2.1 Algoritmus modelu

Abychom mohli využít k řešení spolehlivosti pružné automatické linky teorii Markovových řetězců (např. [28]), musí mít doby bezporuchového provozu i doby obnovování provozuschopnosti všech automatů v pružné lince z obr. 32 exponenciální rozložení. Intenzity poruch, intenzity obnovy a takty jednotlivých automatů označíme po řadě: $\lambda_1, \mu_1, \vartheta_1; \lambda_2, \mu_2, \vartheta_2; \dots; \lambda_n, \mu_n, \vartheta_n$.

Vyhledáme automat s nejmenším taktem, který označíme ϑ . Zřejmá platí

$$\vartheta \leq \vartheta_i; i = 1, 2, \dots, n.$$

Činnost linky v modelu budeme sledovat v časových okamžicích daných posloupností $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde $t_k = k\vartheta$.

Každý automat v lince může nabývat pouze tří stavů. Pro i -tý automat A_i :

$A_i = 0 \dots$ automat má poruchu, nepracuje,

$A_i = 1 \dots$ automat je v provozu, vyrábí,

$A_i = 2 \dots$ automat je provozuschopný, čeká na přísun výrobků do předchozího zásobníku, popř. na uvolnění místa v zásobníku následujícím.

Stav r -tého zásobníku Z_r je dán počtem výrobků uložených v zásobníku. Kapacitu r -tého mezioperačního zásobníku označíme Z_r^* , $r = 1, 2, \dots, n-1$.

V každém časovém okamžiku nabývá linka určitého stavu s , přičemž

$$s = (A_1, Z_1, A_2, Z_2, \dots, Z_{n-1}, A_n). \quad (319)$$

Množinu všech možných stavů linky označíme $M = \{s\}$, počet stavů S . Model pružné linky je založen na přiřazování stavů linky z množiny M jednotlivým časovým okamžikům. Doby bezporuchového provozu i doby obnovování provozuschopnosti automatů jsou náhodné veličiny. Proto i stav linky v okamžiku t_k můžeme charakterizovat náhodnou veličinou X_k , přičemž

$$X_k = \sum_{s \in M} P(\{X_k = s\}) = 1. \quad (320)$$

Posloupnost náhodných veličin $\{X_k\}_{k=0}^\infty$ je diskretní náhodný proces a pro stav linky v okamžiku t_k platí

$$X_k = [A_1(k), Z_1(k), A_2(k), Z_2(k), \dots, A_n(k)]. \quad (321)$$

Jakákoli změna stavu automatů v modelu linky se může uskutečnit pouze v časových okamžicích daných posloupností $\{t_k\}_{k=0}^\infty$. Sousední automaty pracují naprosto nezávisle, na základě nabídky a poptávky výrobků ze zásobníků. Nejsem možné vzájemné přechody mezi stavy 0 a 2. Při vzniku stavu 0, popř. 2, zůstávají i zpracovávané výrobky v automatu a po obnovení stavu 1 se dokončí. Pro pravděpodobnost přechodu samostatně m -tého automatu z jednoho stavu do druhého v intervalu $\langle t_{k-1}, t_k \rangle$ platí

$$\begin{aligned} P_m(1 \rightarrow 0) &= P(A_m(k) = 0 / A_m(k-1) = 1) = \\ &= P(\tau_m \leq k\beta / \tau_m > (k-1)\beta) = \\ &= \frac{P((k-1)\beta < \tau_m \leq k\beta)}{1 - P(\tau_m \leq (k-1)\beta)} = \frac{F_m(t_k) - F_m(t_{k-1})}{1 - F_m(t_{k-1})} = 1 - e^{-\lambda_m \beta}, \end{aligned} \quad (322)$$

$$\begin{aligned} P_m(1 \rightarrow 1) &= P(A_m(k) = 1 / A_m(k-1) = 1) = \\ &= P(\tau_m > k\beta / \tau_m > (k-1)\beta) = \\ &= \frac{1 - P(\tau_m \leq k\beta)}{1 - P(\tau_m \leq (k-1)\beta)} = \frac{1 - F_m(t_k)}{1 - F_m(t_{k-1})} = e^{-\lambda_m \beta}. \end{aligned} \quad (323)$$

Během intervalu $\langle (k-1)\beta, k\beta \rangle$ se stav r -tého zásobníku může nejvýše

o jeden výrobek zvýšit nebo snížit, popř. může zůstat nezměněn. V matematickém modelu provozu automatické linky předpokládáme, že doba do dokončení výrobku v automatu v intervalu $\langle (k-1)\beta, k\beta \rangle$ je náhodná veličina s rovnoměrným rozložením. Potom pravděpodobnost ζ_m odebrání jednoho výrobku z $(m-1)$ -ního zásobníku během intervalu β udává vztah

$$\zeta_m = \frac{\beta}{\theta_m}. \quad (324)$$

Jev charakterizovaný pravděpodobností ζ_m je identický s případem dodání jednoho výrobku do m -tého zásobníku během intervalu β a oba mají stejnou pravděpodobnost.

Varianty možných přechodů stavu automatu A_m ($m = 2, 3, \dots, n-1$) budeme zkoumat za následujících předpokladů:

A. Předpoklad: $Z_{m-1}(k-1) > 0$, $Z_m(k-1) < (Z_m^* - 1)$. Alternativy možných přechodů a odpovídající pravděpodobnosti přechodů jsou v tab. 8 (viz též vztahy (322), (323)). Je zřejmé, že stav $A_m(k)$ závisí pouze na $A_m(k-1)$.

Tab. 8. Pravděpodobnosti přechodu pro předpoklad A

$A_m(k-1)$	$A_m(k)$	Pravděpodobnost přechodu
0	0	$\exp(-\mu_m \beta)$
0	1	$1 - \exp(-\mu_m \beta)$
1	0	$1 - \exp(-\lambda_m \beta)$
1	1	$\exp(-\lambda_m \beta)$

B. Předpoklad: $Z_{m-1}(k-1) = 0$, $Z_m(k-1) < (Z_m^* - 1)$. Pravděpodobnosti všech možných přechodů v tab. 9 dokumentují závislost stavu $A_m(k)$ na stavech $A_{m-1}(k-1)$, $A_m(k-1)$.

C. Předpoklad: $Z_{m-1}(k-1) > 0$, $Z_m(k-1) = (Z_m^* - 1)$. Analýzu všech možných přechodů ukazuje tab. 10. Stav $A_m(k)$ závisí na stavech $A_m(k-1)$, $A_{m+1}(k-1)$.

D. Předpoklad: $Z_{m-1}(k-1) > 0$, $Z_m(k-1) = Z_m^*$. Stav $A_m(k)$ pro tento případ závisí podle tab. 11 na stavech $A_m(k-1)$, $A_{m+1}(k-1)$.

E. Předpoklad: $Z_{m-1}(k-1) = 0$, $Z_m(k-1) = Z_m^* - 1$.

Tab. 9. Pravděpodobnosti přechodu pro předpoklad B

$A_{m-1}(k-1)$	$A_m(k-1)$	$A_m(k)$	Pravděpodobnost přechodu
1	1	2	1
1	2	2	$1 - \zeta_{m-1}$
1	2	1	ζ_{m-1}
0	1	2	1
0	2	2	$\zeta_m \exp(-\lambda_m \beta)$
0	2	1	$(1 - \zeta_m) \exp(-\lambda_m \beta)$
1	1	1	$1 - \exp(-\lambda_m \beta)$
1	1	0	$\zeta_m(1 - \zeta_{m-1}) \exp(-\lambda_m \beta)$
1	1	2	$[(1 - \zeta_m) + \zeta_m \zeta_{m-1}] \exp(-\lambda_m \beta)$
1	1	1	$1 - \exp(-\lambda_m \beta)$
0	1	0	$\zeta_m \exp(-\lambda_m \beta)$
0	1	2	$(1 - \zeta_m) \exp(-\lambda_m \beta)$
0	1	1	$1 - \exp(-\lambda_m \beta)$
0	2	2	$1 - \exp(-\mu_m \beta)$
0	2	0	$\exp(-\mu_m \beta)$
0	2	1	$(1 - \zeta_{m-1})(1 - \exp(-\mu_m \beta))$
0	2	2	$\zeta_{m-1}(1 - \exp(-\mu_m \beta))$
0	2	0	$1 - \exp(-\mu_m \beta)$
0	2	1	$\exp(-\mu_m \beta)$
0	2	2	$\exp(-\mu_m \beta)$

Tab. 10. Pravděpodobnosti přechodu pro předpoklad C

$A_{m-1}(k-1)$	$A_m(k-1)$	$A_m(k)$	Pravděpodobnost přechodu
1	1	2	$\zeta_m \exp(-\lambda_m \beta)$
1	1	1	$(1 - \zeta_m) \exp(-\lambda_m \beta)$
1	1	0	$1 - \exp(-\lambda_m \beta)$
1	1	2	$\zeta_m(1 - \zeta_{m+1}) \exp(-\lambda_m \beta)$
1	1	1	$[(1 - \zeta_m) + \zeta_m \zeta_{m+1}] \exp(-\lambda_m \beta)$
1	1	0	$1 - \exp(-\lambda_m \beta)$
0	1	2	$\zeta_m \exp(-\lambda_m \beta)$
0	1	1	$(1 - \zeta_m) \exp(-\lambda_m \beta)$
0	1	0	$1 - \exp(-\lambda_m \beta)$
0	2	2	$1 - \exp(-\mu_m \beta)$
0	2	1	$\exp(-\mu_m \beta)$
0	2	0	$\exp(-\mu_m \beta)$

Tab. 11. Pravděpodobnosti přechodu pro předpoklad D

$A_{m+1}(k-1)$	$A_m(k-1)$	$A_m(k)$	Pravděpodobnost přechodu
2	2	2	1
1	2	2	$1 - \zeta_{m+1}$
1	2	1	ζ_{m+1}
0	2	2	1
2,0	0	2	$\exp(-\mu_m \beta)$
2,0	0	2	$1 - \exp(-\mu_m \beta)$
1	0	2	$\exp(-\mu_m \beta)$
1	0	1	$\zeta_{m+1}(1 - \exp(-\mu_m \beta))$
1	0	2	$(1 - \zeta_{m+1})(1 - \exp(-\mu_m \beta))$

Vezměme např.:

$$P(A_m(k)/A_{m-1}(k-1) = 2, A_m(k-1) = 1, A_{m+1}(k-1) = 1) = \\ = (1 - \zeta_m) e^{-\lambda_m \beta}.$$

Je zřejmé, že pravděpodobnosti možných přechodů dostaneme vhodným výběrem přechodů z případů B, C a eventuálním součinem pravděpodobností.

F. Předpoklad: $Z_{m-1}(k-1) = 0$, $Z_m(k-1) = Z_m^*$. Pravděpodobnosti možných přechodů získáme z případů B a D. Stav $A_m(k)$ pro případ E i F závisí na $A_{m-1}(k-1)$, $A_m(k-1)$, $A_{m+1}(k-1)$.

Předpoklady A, B, C, D, E, F vyčerpávají všechny možnosti přechodů $A_m(k-1) \rightarrow A_m(k)$ při všech stavech sousedních zásobníků. Stav $A_m(k)$ závisí pouze na stavech $A_{m-1}(k-1)$, $A_m(k-1)$, $A_{m+1}(k-1)$, $Z_{m-1}(k-1)$, $Z_m(k-1)$.

Pravděpodobnosti přechodu pro první a poslední automat v lince jsou poněkud odlišné. Jejich rozbor však snadno zjistíme, že stav $A_1(k)$ závisí pouze na $A_1(k-1)$, $A_2(k-1)$, $Z_1(k-1)$, $Z_1(k-1)$ a stav $A_n(k)$ na $A_{n-1}(k-1)$, $A_n(k-1)$, $Z_{n-1}(k-1)$.

Zkoumáme nyní možné přechody stavu zásobníku $Z_r(k-1)$, kde $r = 1, 2, \dots, n-1$, $k = 1, 2, \dots$. Předpokládáme nejprve, že $0 < Z_r(k-1) < Z_r^*$. Všechny pravděpodobnosti přechodů jsou uvedeny v tab. 12.

Je-li $Z_r(k-1) = Z_r^*$, pak $Z_r(k) = Z_r^*$ nebo $Z_r(k) = Z_r^* - 1$. Změna stavu nastane v případě, že $A_{r+1}(k-1) = 1$ s pravděpodobností ζ_{r+1} .

Tab. 12. Pravděpodobnosti přechodu stavů zásobníku

$A_k(k-1)/A_{k+1}(k-1)$	Pravděpodobnost přírůstku výrobku v zásobníku	Pravděpodobnost zachování stavu v zásobníku	Pravděpodobnost úbytku výrobku v zásobníku
2	2	1	0
2	1	$1 - \zeta_{r+1}$	ζ_{r+1}
2	0	1	0
1	2	$1 - \zeta_r$	0
1	1	$(1 - \zeta_r)(1 - \zeta_{r+1}) + \zeta_{r+1}$	$(1 - \zeta_r)\zeta_{r+1}$
1	0	ζ_r	0
0	2	1	0
0	1	$1 - \zeta_{r+1}$	ζ_{r+1}
0	0	1	0

Obdobně pro $Z_k(k-1) = 0$ může nastat $Z_k(k) = 0$ nebo $Z_k(k) = 1$. Stav $Z_k(k) = 1$ může nastat pouze v případě, že $A_k(k-1) = 1$ a to s pravděpodobností ζ_r .

Z výsledku průzkumu vlastností pravděpodobností přechodů plyne, že pro náhodný proces X_k a libovolné přirozené k platí

$$P(X_k | X_{k-1}, X_{k-2}, \dots, X_0) = P(X_k | X_{k-1}) \quad (325)$$

a že náhodný proces X_k je Markovův řetězec, poněvadž splňuje tzv. Markovovu podmínku.

Jestliže vyloučíme z množiny stavů M všechny stavy, které nejsou dosažitelné, dostaneme množinu M^* s konečným počtem stavů Q , přičemž $Q \leq S$. Dá se ukázat, že Markovův řetězec na množině stavů M^* je nerozložitelný neprerodický homogenní řetězec. Za těchto podmínek existují čísla $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_Q$ taková, že pro každý stav s_j z množiny M^*

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(n)}, \quad (i = 1, 2, \dots, Q), \quad (326)$$

a tato čísla jsou jediným řešením soustavy lineárních rovnic

$$\pi_j = \sum_{i=1}^Q \pi_i p_{ij}, \quad \text{přičemž} \quad \sum_{i=1}^Q \pi_i = 1, \quad (327)$$

$$\sum_{i=1}^Q \pi_i = 1, \quad (328)$$

Čísla $\pi_1, \dots, \pi_Q$, nazývaná limitní pravděpodobnosti, umožňují rozdělit libovolnou, dostatečně dlouhou dobu využití linky na části podle jednotlivých stavů množiny M^* a libovolným způsobem charakterizovat prostoje linky.

5.2.2 Využití modelu k analýze provozu automatické linky

Použití modelu je vázáno na znalost parametrů exponenciálního rozložení dob bezporuchového provozu a dob obnovování provozuschopnosti automatů zařazených v lince z obr. 32, jejich taktu a kapacit všech meziperačních zásobníků.

Stav linky kontrolujeme v koncových bodech intervalů. Tím se zanáší do výpočtu systematická chyba. Prodlužuje se doba bezporuchového provozu i doba trvání poruch, a tím nastává prodloužení T i ϕ každého automatu [19]. V modelu používáme intenzity poruch a intenzity obnovy až po korekci. Korigované intenzity pro m -tý automat určíme ze vztahů

$$\lambda_m = \frac{1}{\frac{2}{\lambda_m} - \frac{g}{1 - e^{-\lambda_m g}}}, \quad \bar{\mu}_m = \frac{1}{\frac{2}{\mu_m} - \frac{g}{1 - e^{-\mu_m g}}} \quad (329)$$

Intervalové snímání stavů ovlivňuje i dobu, po kterou jsou automaty ve stavu 2. Tento vliv se nedá předem vymejit. Neovlivňuje však běžně požadovanou přesnost výpočtů.

Konstrukci vlastního modelu uskutečneme v následujících krocích:

1. Vybereme minimální takt podle vztahu

$$g = \min \{g_1, g_2, \dots, g_n\}. \quad (330)$$

Korigujeme intenzity poruch a intenzity obnovy podle vztahů (329).

2. Vytvoříme množinu M stavů linky tak, že vyčerpáme všechny varianty stavů jednotlivých automatů a zásobníků.

3. Redukci množiny M vytvoříme množinu M^* možných stavů linky. Například, je-li $0 < Z_{r-1} < Z_r^*$, $0 < Z_r < Z_r^*$, nemůže být $A_r = 2$; je-li $Z_r = 0$, pak $A_{r+1} \neq 1$ apod.

4. Vypočítáme prvky matice (p_{ij}) , tj. pravděpodobnosti přechodu ze stavu i do stavu j během intervalu o délce g pro $i, j = 1, 2, \dots, Q$.

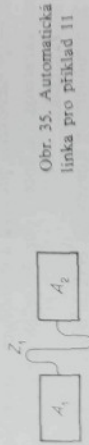
5. Sestavíme soustavu lineárních rovnic (327). Poslední rovnici nahradíme podmínkou (328).

6. Na číslcovém počítaci řešíme soustavu lineárních rovnic pro neznámé limitní pravděpodobnosti $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_9$.

7. Dosažené výsledky podrobíme logické kontrole a využijeme pro zhodnocení spolehlivosti dané pružné automatické linky.

příklad 11:

Mějme pružnou automatickou linku, sestavenou ze dvou automatů A_1, A_2 a mezioperačního zásobníku Z_1 (obr. 35), kde $\lambda_1 = 2 \text{ h}^{-1}$, $\mu_1 =$



Obr. 35. Automatická linka pro příklad 11

$= 20 \text{ h}^{-1}$, $\lambda_2 = 2,5 \text{ h}^{-1}$, $\mu_2 = 50 \text{ h}^{-1}$, $Z^* = 2 \text{ ks}$. Taky obou automatů jsou stejné: $\theta_1 = \theta_2 = 1/60 \text{ h} \cdot \text{ks}^{-1}$. Při vzniku poruchy kteréhokoliv automatu se neprodleně přistoupí k obnovování provozuschopnosti. Slatovně limitní pravděpodobnosti možných stavů linky.

Řešení: Délka intervalů, ve kterých budeme sledovat provoz linky Markovovým řetězcem, bude $\theta = 1/60$. Množina možných stavů $s = (A_1, Z_1, A_2)$ obsahuje následujících 12 stavů:

$$\begin{aligned} s_1 &= (0, 0, 0) & s_5 &= (1, 1, 0) & s_9 &= (0, 1, 1) \\ s_2 &= (1, 0, 0) & s_6 &= (2, 2, 0) & s_{10} &= (1, 1, 1) \\ s_3 &= (0, 1, 0) & s_7 &= (0, 0, 1) & s_{11} &= (0, 0, 2) \\ s_4 &= (0, 2, 0) & s_8 &= (1, 0, 1) & s_{12} &= (1, 0, 2) \end{aligned}$$

Pro korigované intenzity poruch a intenzity obnovy dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= 2, 034 089 & \mu_1 &= 24, 269 159 \\ \tilde{\lambda}_2 &= 2, 553 569 & \mu_2 &= 95, 035 015 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} p_1 &= e^{-\tilde{\lambda}_1 \cdot \theta} = 0,667 320 & p_5 &= e^{-\tilde{\lambda}_2 \cdot \theta} = 0,205 170 \\ p_2 &= 1 - e^{-\tilde{\lambda}_1 \cdot \theta} = 0,332 680 & p_6 &= 1 - e^{-\tilde{\lambda}_2 \cdot \theta} = 0,794 830 \\ p_3 &= e^{-\tilde{\lambda}_1 \cdot \theta} = 0,966 667 & p_7 &= e^{-\tilde{\lambda}_2 \cdot \theta} = 0,958 333 \\ p_4 &= 1 - e^{-\tilde{\lambda}_1 \cdot \theta} = 0,033 333 & p_8 &= 1 - e^{-\tilde{\lambda}_2 \cdot \theta} = 0,041 667 \end{aligned}$$

Soustava lineárních rovnic (327) má tvar

$$\begin{aligned} -0,863 086\pi_1 + 0,027 805\pi_7 &= 0 \\ 0,068 256\pi_1 - \pi_2 + 0,013 862\pi_7 &= 0 \\ 0,006 839\pi_2 - 0,863 086\pi_3 + 0,001 389\pi_8 + 0,027 805\pi_9 &= 0 \\ -0,863 086\pi_4 + 0,006 839\pi_5 + 0,001 389\pi_{10} &= 0 \\ 0,198 331\pi_2 + 0,068 256\pi_3 - \pi_5 + 0,040 278\pi_8 + 0,013 862\pi_9 &= 0 \\ 0,068 256\pi_4 + 0,198 331\pi_5 - 0,794 830\pi_6 + 0,040 278\pi_{10} &= 0 \\ 0,026 494\pi_2 + 0,530 406\pi_3 - \pi_7 + 0,031 944\pi_8 + 0,639 514\pi_9 &= 0 \\ &+ 0,033 333\pi_{12} \\ 0,768 336\pi_2 + 0,264 424\pi_3 - 0,073 611\pi_8 + 0,318 819\pi_9 &= 0 \\ &+ 0,966 667\pi_{12} \\ 0,530 406\pi_4 + 0,026 494\pi_5 - \pi_9 + 0,031 944\pi_{10} &= 0 \\ 0,264 424\pi_6 + 0,768 336\pi_5 + 0,794 830\pi_6 - 0,073 611\pi_{10} &= 0 \\ 0,530 406\pi_1 + 0,639 515\pi_7 - 0,332 680\pi_{11} &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 + \pi_8 + \pi_9 + \pi_{10} + \pi_{11} + &+ \pi_{12} = 1 \end{aligned}$$

Součinitel $P_{7,1}$ u druhého členu v první rovnici je pravděpodobnost přechodu ze stavu $s_7 = (0, 0, 1)$ do stavu $s_1 = (0, 0, 0)$. Přechod se uskuteční v případě, že A_1 zůstane během intervalu θ ve stavu obnovování provozuschopnosti a na automatu A_2 vznikne porucha. Zřejmě $P_{7,1} = P_1 \cdot P_8 = 0,027 805$. Podobně stanovíme pravděpodobnosti přechodů pro všechny ostatní případy. Pokud přechod není reálný, rovná se odpovídající pravděpodobnost nule.

Řešením soustavy lineárních rovnic dostaneme následující limitní pravděpodobnosti přechodů:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0,000 759 58 & \pi_5 &= 0,015 700 53 & \pi_9 &= 0,015 700 53 \\ \pi_2 &= 0,000 378 68 & \pi_6 &= 0,027 506 00 & \pi_{10} &= 0,464 010 01 \\ \pi_3 &= 0,001 121 33 & \pi_7 &= 0,023 578 12 & \pi_{11} &= 0,046 535 50 \\ \pi_4 &= 0,000 871 10 & \pi_8 &= 0,380 639 18 & \pi_{12} &= 0,023 199 44 \end{aligned}$$

Součinitel pohotovosti automatu A_2 , kterým můžeme charakterizovat stupeň využití automatické linky, je

$$K_p = \pi_7 + \pi_8 + \pi_9 + \pi_{10} = 0,883 928.$$

Pro vlastní prostojie $\bar{K}_p$ automatu A_2 platí

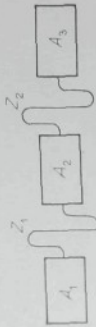
$$\bar{K}_p = \sum_{i=1}^6 \pi_i = 0,046\ 338$$

a pro prostojie $\bar{K}_{pr}$ vyvolané čekáním na prázdný zásobník Z_1 dostaneme

$$\bar{K}_{pr} = \pi_{11} + \pi_{12} = 0,069\ 735.$$

Příklad 12:

Pružnou automatickou linku tvoří tři automaty a dva mezioperační



Obr. 36. Automatická linka pro příklad 12

zásobníky (obr. 36) s exponenciálním rozložením dob bezporuchového provozu a dob obnovování provozuschopnosti, pro které:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\ \text{h}^{-1} & \mu_1 &= 20\ \text{h}^{-1} & \theta_1 &= \theta_2 = \theta_3 = 1/60\ \text{h} \cdot \text{ks}^{-1} \\ \lambda_2 &= 2,5\ \text{h}^{-1} & \mu_2 &= 50\ \text{h}^{-1} & Z_1^* &= Z_2^* = 2\ \text{ks} \\ \lambda_3 &= 2\ \text{h}^{-1} & \mu_3 &= 50\ \text{h}^{-1} \end{aligned}$$

Obnovování provozuschopnosti každého automatu je zahájeno okamžitě po vzniku poruchy. Stanovte limitní pravděpodobnosti možných stavů linky. Linka vznikla rozšířením linky z příkladu 11 o jeden zásobník a jeden automat.

Řešení: Volíme $\theta = 1/60$. Redukci intenzit poruch a intenzit obnovy obdržíme hodnoty ekvivalentní hodnotám $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ z předchozího příkladu a současně $\bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda}_1; \bar{\mu}_3 = \bar{\mu}_2$:

Počet stavů linky pro všechny varianty stavů automatů a zásobníků, tj. počet prvků množiny M , je $S = 3^3 \cdot 3^2 = 243$. Vyloučením stavů, jejichž výskyt není reálný, vytvoříme množinu M^* s počtem $Q = 72$ stavů. Pro nalezení limitních pravděpodobností všech stavů je nutné sestavit soustavu 72 rovnic podle definovaných pravidel. Využijeme pravděpodobnosti p_i až p_8 z příkladu 11. Ke stanovení jednotlivých pravděpodobností přechodu použijeme ještě pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} p_9 &= e^{-\bar{\mu}_3 \theta} = 0,205\ 170 & p_{11} &= e^{-\bar{\lambda}_3 \theta} = 0,966\ 667 \\ p_{10} &= 1 - e^{-\bar{\mu}_3 \theta} = 0,794\ 830 & p_{12} &= 1 - e^{-\bar{\lambda}_3 \theta} = 0,033\ 333 \end{aligned}$$

Soustava 72 lineárních rovnic byla sestavena a řešena na počítači T 200 Gaussovou eliminační metodou. Byly získány následující výsledky (v zá-

vorkách za označením limitních pravděpodobností jsou uvedeny jednotlivé stavy — A_1, Z_1, A_2, Z_2, A_3).

$\pi_1(0, 0, 0, 0) = 0,000\ 001\ 78$	$\pi_{37}(0, 0, 0, 0, 1) = 0,000\ 445\ 23$
$\pi_2(1, 0, 0, 0) = 0,000\ 001\ 33$	$\pi_{38}(1, 0, 0, 1) = 0,000\ 221\ 98$
$\pi_3(0, 1, 0, 0) = 0,000\ 003\ 15$	$\pi_{39}(0, 1, 0, 1) = 0,000\ 659\ 63$
$\pi_4(0, 2, 0, 0) = 0,000\ 004\ 59$	$\pi_{40}(0, 2, 0, 1) = 0,000\ 490\ 29$
$\pi_5(1, 1, 0, 0) = 0,000\ 003\ 07$	$\pi_{41}(1, 1, 0, 1) = 0,009\ 750\ 90$
$\pi_6(2, 2, 0, 0) = 0,000\ 167\ 99$	$\pi_{42}(2, 2, 0, 1) = 0,014\ 752\ 30$
$\pi_7(0, 0, 1, 0) = 0,000\ 020\ 46$	$\pi_{43}(0, 0, 1, 1) = 0,014\ 494\ 50$
$\pi_8(1, 0, 1, 0) = 0,000\ 251\ 26$	$\pi_{44}(1, 0, 1, 1) = 0,225\ 770\ 00$
$\pi_9(0, 1, 1, 0) = 0,000\ 017\ 78$	$\pi_{45}(0, 1, 1, 1) = 0,010\ 180\ 00$
$\pi_{10}(1, 1, 1, 0) = 0,000\ 678\ 62$	$\pi_{46}(1, 1, 1, 1) = 0,297\ 318\ 00$
$\pi_{11}(0, 0, 2, 0) = 0,000\ 339\ 65$	$\pi_{47}(0, 0, 2, 1) = 0,012\ 813\ 80$
$\pi_{12}(1, 0, 2, 0) = 0,000\ 169\ 31$	$\pi_{48}(1, 0, 2, 1) = 0,006\ 388\ 39$
$\pi_{13}(0, 0, 1, 1) = 0,000\ 014\ 81$	$\pi_{49}(0, 0, 0, 2) = 0,000\ 068\ 54$
$\pi_{14}(1, 0, 1, 1) = 0,000\ 007\ 38$	$\pi_{50}(1, 0, 0, 2) = 0,000\ 034\ 17$
$\pi_{15}(0, 1, 0, 1) = 0,000\ 021\ 96$	$\pi_{51}(0, 1, 0, 2) = 0,000\ 103\ 53$
$\pi_{16}(0, 2, 0, 1) = 0,000\ 016\ 72$	$\pi_{52}(0, 2, 0, 2) = 0,000\ 151\ 27$
$\pi_{17}(1, 1, 0, 1) = 0,000\ 311\ 81$	$\pi_{53}(1, 1, 0, 2) = 0,000\ 100\ 25$
$\pi_{18}(2, 2, 0, 1) = 0,000\ 510\ 32$	$\pi_{54}(2, 2, 0, 2) = 0,006\ 148\ 96$
$\pi_{19}(0, 0, 1, 1) = 0,000\ 472\ 84$	$\pi_{55}(0, 0, 1, 0, 2) = 0,001\ 046\ 35$
$\pi_{20}(1, 0, 1, 1) = 0,007\ 254\ 19$	$\pi_{56}(1, 0, 1, 0, 2) = 0,019\ 103\ 10$
$\pi_{21}(0, 1, 1, 1) = 0,000\ 331\ 73$	$\pi_{57}(0, 1, 1, 0, 2) = 0,000\ 585\ 96$
$\pi_{22}(1, 1, 1, 1) = 0,009\ 718\ 16$	$\pi_{58}(1, 1, 1, 0, 2) = 0,023\ 816\ 70$
$\pi_{23}(0, 0, 2, 1) = 0,000\ 479\ 39$	$\pi_{59}(0, 0, 2, 0, 2) = 0,026\ 185\ 30$
$\pi_{24}(1, 0, 2, 1) = 0,000\ 238\ 98$	$\pi_{60}(1, 0, 2, 0, 2) = 0,013\ 052\ 40$
$\pi_{25}(0, 0, 2, 0) = 0,000\ 008\ 95$	$\pi_{61}(0, 0, 0, 1, 1) = 0,000\ 185\ 25$
$\pi_{26}(1, 0, 0, 2) = 0,000\ 004\ 46$	$\pi_{62}(1, 0, 0, 1, 1) = 0,000\ 092\ 43$
$\pi_{27}(0, 1, 0, 2) = 0,000\ 013\ 23$	$\pi_{63}(0, 1, 0, 1, 1) = 0,000\ 274\ 55$
$\pi_{28}(0, 2, 0, 2) = 0,000\ 011\ 56$	$\pi_{64}(0, 2, 0, 1, 1) = 0,000\ 251\ 78$
$\pi_{29}(1, 1, 0, 2) = 0,000\ 159\ 97$	$\pi_{65}(1, 1, 0, 1, 1) = 0,003\ 099\ 75$
$\pi_{30}(2, 2, 0, 2) = 0,000\ 340\ 28$	$\pi_{66}(2, 2, 0, 1, 1) = 0,007\ 321\ 76$
$\pi_{31}(0, 0, 2, 2) = 0,000\ 232\ 88$	$\pi_{67}(0, 0, 1, 1, 1) = 0,006\ 472\ 75$
$\pi_{32}(1, 0, 2, 2) = 0,000\ 116\ 09$	$\pi_{68}(1, 0, 1, 1, 1) = 0,071\ 456\ 10$
$\pi_{33}(0, 1, 2, 2) = 0,000\ 345\ 03$	$\pi_{69}(0, 1, 1, 1, 1) = 0,006\ 021\ 29$
$\pi_{34}(0, 2, 2, 2) = 0,000\ 325\ 33$	$\pi_{70}(1, 1, 1, 1, 1) = 0,177\ 974\ 00$
$\pi_{35}(1, 1, 2, 2) = 0,003\ 718\ 85$	$\pi_{71}(0, 0, 2, 1, 1) = 0,004\ 368\ 74$
$\pi_{36}(2, 2, 2, 2) = 0,010\ 295\ 50$	$\pi_{72}(1, 0, 2, 1, 1) = 0,002\ 193\ 98$

Provoz linky můžeme charakterizovat posledním automatem. Pro součinitel pohotovosti automatu Λ_3 platí

$$K_p = \sum_{i=3}^{48} \pi_i + \sum_{j=6}^{73} \pi_j = 0,873\ 00.$$

Prostojte automatu $\bar{K}_{pr}$ vyvolané čekáním na prázdný meziperační zásobník Z_2 jsou

$$\bar{K}_{pr} = \sum_{i=49}^{60} \pi_i = 0,090\ 36$$

a vlastní prostojte

$$\bar{K}_{pr} = 1 - K_p - \bar{K}_{pr} = 0,036\ 64.$$

5.2.3 Redukce počtu stavů

Oba dosud uvedené příklady svědčí o tom, že s počtem automatů a zásobníků v lince výrazně roste počet stavů linky, a tím nároky na sestavení pravděpodobnostní matice a řešení soustavy lineárních rovnic. Každé opatření vedoucí ke snížení rozsahu pravděpodobnostní matice rozšiřuje možnosti využití Markovových řetězců k vytvoření modelu pružné automatické linky. Ukážeme způsob, jak lze bez zmenšení přesnosti výpočtů redukovat počet neznámých v soustavě lineárních rovnic pro výpočet limitních pravděpodobností.

Příklad 13: Řešte příklad 11 pro $Z_1^* = 8$ ks při stejných ostatních konstantách.

Řešení: Počet všech stavů je $S = 3^2 \cdot 9 = 81$, počet možných stavů $\bar{Q} = 36$. S použitím pravděpodobností p_1 až p_8 z příkladu 11 byla sestavena matice (p_{ij}) , $i, j = 1, 2, \dots, 36$, a vyřešena odpovídající soustava lineárních rovnic. Byly zjištěny následující hodnoty limitních pravděpodobností:

$$\begin{aligned} \pi_1(0, 0, 0) &= 0,000\ 515\ 76 & \pi_{19}(0, 0, 2) &= 0,031\ 597\ 53 \\ \pi_2(0, 1, 0) &= 0,000\ 761\ 38 & \pi_{20}(0, 0, 1) &= 0,016\ 009\ 50 \\ \pi_3(0, 2, 0) &= 0,000\ 591\ 47 & \pi_{21}(0, 1, 1) &= 0,010\ 660\ 63 \\ \pi_4(0, 3, 0) &= 0,000\ 459\ 48 & \pi_{22}(0, 2, 1) &= 0,008\ 281\ 62 \\ \pi_5(0, 4, 0) &= 0,000\ 356\ 94 & \pi_{23}(0, 3, 1) &= 0,006\ 433\ 51 \\ \pi_6(0, 5, 0) &= 0,000\ 277\ 29 & \pi_{24}(0, 4, 1) &= 0,004\ 997\ 82 \\ \pi_7(0, 6, 0) &= 0,000\ 215\ 41 & \pi_{25}(0, 5, 1) &= 0,003\ 882\ 52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_8(0, 7, 0) &= 0,000\ 167\ 34 & \pi_{26}(0, 6, 1) &= 0,003\ 016\ 10 \\ \pi_9(0, 8, 0) &= 0,000\ 130\ 00 & \pi_{27}(0, 7, 1) &= 0,002\ 343\ 03 \\ \pi_{10}(1, 0, 0) &= 0,000\ 257\ 12 & \pi_{28}(1, 0, 2) &= 0,015\ 752\ 38 \\ \pi_{11}(1, 1, 0) &= 0,010\ 660\ 63 & \pi_{29}(1, 0, 1) &= 0,258\ 453\ 33 \\ \pi_{12}(1, 2, 0) &= 0,008\ 281\ 62 & \pi_{30}(1, 1, 1) &= 0,149\ 266\ 97 \\ \pi_{13}(1, 3, 0) &= 0,006\ 433\ 51 & \pi_{31}(1, 2, 1) &= 0,115\ 956\ 82 \\ \pi_{14}(1, 4, 0) &= 0,004\ 997\ 82 & \pi_{32}(1, 3, 1) &= 0,090\ 080\ 11 \\ \pi_{15}(1, 5, 0) &= 0,003\ 882\ 52 & \pi_{33}(1, 4, 1) &= 0,069\ 978\ 00 \\ \pi_{16}(1, 6, 0) &= 0,003\ 016\ 10 & \pi_{34}(1, 5, 1) &= 0,054\ 361\ 84 \\ \pi_{17}(1, 7, 0) &= 0,002\ 343\ 03 & \pi_{35}(1, 6, 1) &= 0,042\ 230\ 55 \\ \pi_{18}(2, 8, 0) &= 0,004\ 104\ 80 & \pi_{36}(1, 7, 1) &= 0,069\ 245\ 51 \end{aligned}$$

Rozbor výsledků příkladu 13 ukazuje na jisté zákonitosti ve výsledných hodnotách limitních pravděpodobností. Především

$$\frac{\pi_3}{\pi_2} = \frac{\pi_{12}}{\pi_{11}} = \frac{\pi_{22}}{\pi_{21}} = \frac{\pi_{31}}{\pi_{30}} = q_1 = 0,77684$$

a současně

$$\begin{aligned} \pi_3 &= q_1 \pi_2 & \pi_{12} &= q_1 \pi_{11} & \pi_{21} &= \pi_{11} & \pi_{31} &= q_1 \pi_{30} \\ \pi_4 &= q_1^2 \pi_2 & \pi_{13} &= q_1^2 \pi_{11} & \pi_{22} &= \pi_{12} & \pi_{32} &= q_1^2 \pi_{30} \\ &: & : & : & : & : & : & : \\ \pi_9 &= q_1^7 \pi_2 & \pi_{17} &= q_1^6 \pi_{11} & \pi_{27} &= \pi_{17} & \pi_{35} &= q_1^6 \pi_{30} \end{aligned} \quad (331)$$

Uvedené vlastnosti pro případ stejných taktů jsou potvrzeny v modelu, který využívá Markovových procesů [29]. Ze vztahů je zřejmé, že limitní pravděpodobnosti se vzájemně liší právě násobkem konstanty nezávislé na kapacitě zásobníku. Dále

$$\frac{\pi_{18}}{\pi_{17}} = q_2 = 1,751\ 92, \quad \pi_{18} = q_2 \pi_{17}, \quad (332)$$

přičemž podle [29] je podíl obou pravděpodobností rovněž nezávislý na kapacitě zásobníku.

Znalost konstanty q_1 a pravděpodobností $\pi_2, \pi_{11}, \pi_{30}$ umožní určit podle (331) všechny ostatní limitní pravděpodobnosti výpočtem. Podobně z q_2 a π_{17} stanovíme π_{18} . Součinitele odvození v modelu Markovových procesů [29] však neodpovídají podmínkám matematického modelu.

Proto způsob nalezání konstant q_1, q_2 je nutno hledat v modelu Markovových řetězců.

Vezměme příklad 11, který je ekvivalentní příkladu 13 s tím, že kapacita zásobníku je pouze $Z^* = 2$ ks.

$$\pi_4(0, 2, 0) = q_1, \quad \pi_6(2, 2, 0) = q_2, \\ \pi_3(0, 1, 0) \quad \pi_5(1, 1, 0)$$

Konstanty q_1, q_2 můžeme stanovit při řešení linky s kapacitou $Z^* = 2$ ks, kdy řešíme pouze soustavu 12 lineárních rovnic. Linku s libovolnou kapacitou mezoperacionálního zásobníku můžeme řešit vzhlednou aplikací vztahů (331), (332) na soustavu lineárních rovnic. Redukci počtu stavů si ukážeme na aplikaci pro příklad 11.

Jak vyplývá ze vztahů (331), (332), postačí pro určení všech limitních pravděpodobností řešit soustavu (330) lineárních rovnic pouze pro neznámé $\pi_1, \pi_2, \pi_{10}, \pi_{11}, \pi_{19}, \pi_{20}, \pi_{28}, \pi_{29}, \pi_{30}, \pi_{36}$. Původní soustava 36 rovnic se redukuje na následující soustavu deseti lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} (p_{2,2} - 1)\pi_2 + p_{10,2}\pi_{20} + p_{11,2}\pi_{11} + p_{29,2}\pi_{29} &= 0 \\ p_{1,10}\pi_1 - \pi_{10} + p_{20,10}\pi_{20} &= 0 \\ p_{2,11}\pi_2 + p_{10,11}\pi_{10} + (p_{11,11} - 1)\pi_{11} &= 0 \\ p_{1,19}\pi_1 + (p_{19,19} - 1)\pi_{19} + p_{20,19}\pi_{20} &= 0 \\ p_{2,20}\pi_2 + p_{10,20}\pi_{10} + p_{11,20}\pi_{11} - \pi_{20} + p_{28,20}\pi_{28} + p_{29,20}\pi_{29} &= 0 \\ p_{1,28}\pi_1 + p_{19,28}\pi_{19} + p_{20,28}\pi_{20} - \pi_{28} &= 0 \\ p_{2,29}\pi_2 + p_{10,29}\pi_{10} + p_{11,29}\pi_{11} + p_{28,29}\pi_{28} + (p_{29,29} - 1)\pi_{29} &= 0 \\ p_{3,30}q_1\pi_2 + (p_{12,30}q_1 + p_{21,30})\pi_{11} + (p_{30,30} - 1)\pi_{30} &= 0 \\ p_{9,36}q_1^2\pi_2 + (p_{18,36}q_1^2q_1^6 + p_{27,36}q_1^6)\pi_{11} + (p_{36,36} - 1)\pi_{36} &= 0 \\ \pi_1 + A\pi_2 + \pi_{10} + B\pi_{11} + \pi_{19} + \pi_{20} + \pi_{28} + \pi_{29} + C\pi_{30} + \pi_{36} &= 1 \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} A &= 1 + q_1 + q_1^2 + \dots + q_1^7, \\ B &= 2(1 + q_1 + q_1^2 + \dots + q_1^6) + q_1^6q_2, \\ C &= 1 + q_1 + \dots + q_1^5. \end{aligned}$$

Výsledky řešení soustavy desíti lineárních rovnic potvrdily přijaté předpoklady.

5.3 STOCHASTICKÁ SIMULACE PROVOZU PRUŽNÉ LINKY

5.3.1 Deklarace proměnných veličin matematického modelu

Při stochastické simulaci provozu linky [26] na číslcovém počítači vycházíme ze známých spolehlivostních charakteristik jednotlivých automatů. Předpokládáme znalost distribučních funkcí $F_i(t)$ dob bezporuchového provozu automatů pro $i = 1, 2, \dots, n$, distribučních funkcí $G_i(t)$ dob obnovování provozuschopnosti, a tím i T_i a ϕ_i , tj. středních dob bezporuchového provozu a středních dob obnovování provozuschopnosti automatů. Výkon automatů označme q_i , jeho převratná hodnota je takt ϑ_i pro $i = 1, 2, \dots, n$. Podstatnou veličinou ovlivňující funkci pružné linky jsou kapacity mezoperacionálních zásobníků $Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_n^*$.

Vznikne-li na automatu porucha, je obnovování provozuschopnosti zahájeno, pouze je-li k dispozici volný seřizovač. Předpokládáme, že linku udržuje v provozu K seřizovačů, přičemž $1 \leq K \leq n$. Jsou-li všichni seřizovači vázání na opravu automatů, pak musí $(K + 1)$ -ní automat při poruše čekat na obnovu některého automatu.

Matematický model pro stochastickou simulaci provozu pružné linky kopíruje činnost reálné linky. Pomocí náhodných čísel jsou generovány doby bezporuchového provozu a doby obnovování provozuschopnosti automatů vzhledem k daným distribučním funkcím. Stav zásobníků a prostroje automatů čekajících na přísun, popř. na odebrání výrobků ze zásobníků se průběžně dopočítávají. Hodnocení činnosti modelu pružné linky je do značné míry shodné s hodnocením spolehlivostních vlastností skutečné linky.

V programu pro číslcový počítač je nutné pro popis linky deklarovat některé další veličiny. Celkový čas provozu linky od spuštění simulace je H . Stav i -tého automatu označme σ_i . To může nabývat pouze následujících hodnot

$$\begin{aligned} \sigma_i &= +1 \dots \text{automat vyrábí,} \\ \sigma_i &= -1 \dots \text{automat je v opravě,} \\ \sigma_i &= -2 \dots \text{automat čeká na seřizovače.} \end{aligned}$$

Prostroj automatů způsobený čekáním na přísun nebo odebrání výrobků ze zásobníku není nutno pro potřeby modelu považovat za samostatný stav. Velikost prostrojů stanovíme v každém kroku výpočtem.

Veličinou t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) označujeme délku časového intervalu měření od okamžiku H_i , po kterou i -tý automat setrvává ve stavu σ_i . Je-li $\sigma_i = +1$, je t_i doba, po kterou automat vyrábí, $\sigma_i = -1$ znamená, že t_i je doba obnovování provozuschopnosti, je-li $\sigma_i = -2$, je t_i interval, v němž i -tý automat čeká na seřizovače.

Je-li $\sigma_i = +1$, je i -tý automat schopen provozu. Jeho skutečná činnost závisí na předchozím zásobníku (není-li prázdný), na následujícím zásobníku (není-li plný) a po krajní meze obou zásobníků i na činnosti dalších automatů. Část doby t_i , po kterou i -tý automat skutečně vyrábí, označujeme u_i . Pro $\sigma_i = -1$; -2 je $u_i = 0$. Jinak zřejmě

$$0 \leq u_i \leq t_i.$$

Doby obnovování provozuschopnosti automatu po skončení čekání na seřizovače jsou zachycovány veličinami c_i . Pro libovolné i bude $c_i = 0$, je-li $\sigma_i = \pm 1$. Pokud $\sigma_i = -2$, pak do c_i se uloží generovaná doba obnovování provozuschopnosti. Po skončení čekání přijde automat do stavu $\sigma_i = -1$. Další použité veličiny:

Z_j – okamžitý stav j -tého zásobníku, $j = 1, 2, \dots, n-1$;

E_i – součet všech dob provozu i -tého automatu $i = 1, 2, \dots, n$;

R_i – součet všech dob čekání na seřizovače;

Q_i – součet dob čekání automatu na mezní stavy zásobníků;

P_i – součet dob čekání automatu na mezní stavy zásobníků;

V_k – součet všech dob zásahů k -tého seřizovače, $k = 1, 2, \dots, K$.

Předpokládáme, že počítáč, na kterém realizujeme stochastický model pružné automatické linky, je vybaven generátorem pseudonáhodných čísel s rovnoměrným rozložením v intervalu $(0, 1)$.

Metody transformace těchto pseudonáhodných čísel na čísla s daným rozložením pravděpodobnosti jsou uvedeny v čl. 3.6.

V okamžiku spuštění simulace linky je $H = 0$, všechny automaty jsou provozuschopné, tj. $\sigma_i = +1$, $i = 1, 2, \dots, n$, a všechny zásobníky prázdné. Pro každý automat stanovíme vzhledem k jeho distribuční funkci $F_i(t)$ dobu bezporuchového provozu s využitím algoritmu určení realizace náhodné veličiny s daným rozložením a uložíme ji do t_i .

Při poruše kteréhokoli automatu se stanoví obdobným postupem doba obnovování provozuschopnosti. Není-li volný seřizovač, zaznamená se doba obnovování provozuschopnosti na c_i .

5.3.2 Algoritmus simulace provozu linky

Algoritmus funkce modelu provozu automatické linky můžeme uspořádat do následujících bodů:

1. Po generování dob provozu všech automatů do první poruchy a vytvoření řady $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ stanovíme

$$t = t_m = \min(t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (333)$$

U m -tého automatu nastane první změna stavu od časového okamžiku H .

2. Stanovíme první aproximaci skutečných dob bezporuchového provozu automatů. Jestliže $\sigma_1 = -1, -2$, položíme $u_i = 0$, v případě $\sigma_1 = +1$ vezmeme $u_i = t$.

3. Položíme $u_{i+1} = 0$ pro i , pro které $u_i = 0$ a současně $Z_i = 0$.

4. Stav j -tého zásobníku X vypočítáme ze vztahu

$$X = Z_j + \frac{u_j}{\partial_j} - \frac{u_{j+1}}{\partial_{j+1}}. \quad (334)$$

Zřejmě musí platit

$$0 \leq X \leq Z_j^*. \quad (335)$$

Je-li některá nerovnost porušená, pak měníme doby provozu u_j , u_{j+1} následujícím způsobem:

$$a) \quad X < 0 \Rightarrow u_{j+1} = \partial_{j+1} \left(Z_j + \frac{u_j}{\partial_j} \right), \quad (336)$$

$$b) \quad X > Z_j^* \Rightarrow u_j = \partial_j \left(Z_j^* - Z_j + \frac{u_{j+1}}{\partial_{j+1}} \right). \quad (337)$$

Před prvním autem v lince se předpokládá neomezená zásoba a za posledním stále prázdný zásobník. Model musí být v tomto smyslu vybaven.

5. Pro $j = 1, 2, \dots, n-1$ opakujeme výpočet z bodu 4. a registrujeme počet oprav.

6. Pokud v 5. bodě nastala alespoň jedna oprava, opakujeme body 4. a 5. až do stavu, kdy nedošlo k žádné opravě.

7. Stanovíme stav zásobníků Z_j v lince na konci časového intervalu o délce t ze vztahu

$$Z_j = Z_j + \frac{u_j}{\partial_j} - \frac{u_{j+1}}{\partial_{j+1}}, \quad (338)$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1.$$

8. Pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ upravíme součty výsledné bilance:

- a) Jestliže $\sigma_i = +1$, pak $E_i = E_i + u_i$, $P_i = P_i + t - u_i$.
- b) Jestliže $\sigma_i = -1$, pak $\bar{Q}_i = Q_i + t$.
- c) Jestliže $\sigma_i = -2$, pak $\bar{R}_i = R_i + t$.

Poznámka: Pruhem jsou označeny nové hodnoty součtu, bez pruhu jsou původní hodnoty v předchozím kroku.

9. Připočítáme doby zásahů seřizovačů

$$\bar{V}_k = V_k + t, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (340)$$

v případě, že byli seřizovači v činnosti.

10. Uskutečnime posunutí časové osy pro čas $\bar{H} = H + t$.

1. Doby provozu automatů transformujeme podle vztahu

$$\bar{t}_i = t_i - t; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (341)$$

12. Pro m -tý automat nastane jedna z následujících variant:

a) Jestliže v čase H bylo $\sigma_m = -2$, pak v okamžiku

$$H + t \text{ bude } \sigma_m = -1; \quad t_m = c_m, \quad c_m = 0.$$

b) Jestliže v čase H bylo $\sigma_m = -1$, pak i v okamžiku

$$H + t \text{ bude } \sigma_m = +1 \text{ a generujeme } t_m.$$

c) Jestliže v čase H bylo $\sigma_m = +1$, pak stanovíme d_m ze vztahu

$$G_m(d_m) - \bar{\xi}_j = 0. \quad (342)$$

13. Jestliže v bodě 12. platila varianta c, stanovíme dobu $\bar{d}_m$, po které se nejdříve může realizovat oprava automatů:

a) Je-li $\bar{d}_m = 0$, pak je některý seřizovač volný a

$$\sigma_m = -1, \quad t_m = d_m.$$

b) Je-li $\bar{d}_m > 0$, není žádný seřizovač volný a

$$\sigma_m = -2, \quad t_m = \bar{d}, \quad c_m = d_m.$$

14. Návrat k bodu 1. a opakování celého procesu.

5.3.3 Ukončení simulace

Simulaci pružné automatické linky sledujeme stanovení výtěžnosti linky při daných kapacitách mezioperačních zásobníků a parametrech

automatů. Všechny automaty v lince musí projít za dostatečně dlouhé období v podstatě stejné množství výrobků. Výtěžnost linky lze tedy charakterizovat výtěžností libovolného automatu. Podle okolností volíme první, poslední, popř. nejpomalejší automat pro stanovení provozních charakteristik celé linky.

U vybraného automatu sledujeme prostoje, tj. poměr doby obnovy k celkové době simulace, vždy po každém výskytu poruchy. Pro vyhodnocení okamžiku ukončení simulace využijeme vlastností náhodných veličin popsanych Čebyševovou nerovností.

Nechť $s_1, s_2, \dots, s_{25}$ jsou prostoje vybraného automatu po 25 za sebou následujících poruchách. Postupně stanovíme průměr $\bar{s}$, směrodatnou odchylku σ a hodnotu zlomku

$$w = \left(\frac{\sigma}{\bar{s}} \right)^2, \quad (343)$$

kde ε je libovolné kladné číslo z Čebyševovy nerovnosti

$$P(|\bar{s} - s| \geq \varepsilon) \leq w. \quad (344)$$

Simulaci ukončí samočinně počítač v případě, že hodnota zlomku klesne pod zvolenou hodnotu, např. 0,1; 0,05 apod. Je-li hodnota vyšší, simulace pokračuje generováním dalších 25 dob prostojů vybraného automatu.

Důsledné sledování činnosti modelu a analýza dílčích výsledků umožňuje znalost postupnosti prostojů a všech mezivýsledků. Po ukončení simulace je nutno vytknout na tiskárně počítače alespoň následující údaje:

- dobu simulace H ,
- doby provozu jednotlivých automatů ($E_1, E_2, \dots, E_n$),
- doby čekání na seřizovače ($R_1, R_2, \dots, R_n$),
- doby trvání obnovování provozuschopnosti ($Q_1, Q_2, \dots, Q_n$),
- doby čekání automatů na mezní stavy zásobníků ($P_1, P_2, \dots, P_n$),
- součet dob zásahů seřizovačů ($V_1, V_2, \dots, V_k$) včetně jejich vyjádření v procentech.

5.4 VLIV ZÁLOHOVÁNÍ NA SPOLEHLIVOST LINKY

Spolehlivost jednotlivých automatů sestavených do jednoproudé linky bezprostředně ovlivňuje využitelnost linky. Při stejném taktu automatů nemůže být součinitel pohotovosti linky vyšší než součinitel pohotovosti

keréholkoli automatu. To ovšem znamená, že jediný nespolehlivý stroj v lince, popř. stroj s relativně dlouhou dobou obnovování provozuschopnosti, může zcela znemožnit dobré technické a spolehlivostní charakteristiky i všech ostatních strojů v lince.

Jestliže nelze jiným způsobem zlepšit nevyhovující provozní vlastnosti, můžeme použít zálohování. Dopravní systém automatické linky musíme vybudovat tak, aby při poruše automatu byly výrobky automaticky předávány a odebírány ze záložního automatu.

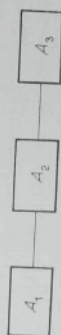
Využití záložního automatu pozitivně ovlivní výkon celé linky. Pokud automaty v lince vykazují exponenciální rozložení dob bezporuchového provozu i dob obnovování provozuschopnosti, lze s použitím závěrů kap. 3 snadno kvantitativně zhodnotit zlepšení provozních vlastností linky.

Na výpočet součinitele pohotovosti a prostojů lze navázat i výpočet ekonomické efektivity nasazení zálohy. Přínos zálohy vyjádříme např. přírůstkem zisku a porovnáme ho s pořizovacími náklady.

Způsob výpočtu ukážeme na příkladu.

Příklad 14:

V lince na obr. 37 s parametry v tab. 13 je z hlediska spolehlivosti výrazně nejslabším místem automat A_1 . Za předpokladu, že všechny náhodné



Obr. 37. Pevná automatická linka pro příklad 14

Tab. 13. Parametry pevné linky

Automat	A_1	A_2	A_3
λ_i (h^{-1}) μ_i (h^{-1})	1,25 2,5	0,5 4	0,5 4

veličiny mají exponenciální rozložení, spočítejte, zda je efektivní nasazení nezátžené zálohy ekvivalentním automatem, jsou-li parametry přepínacího zařízení $\lambda_p = 0,2 h^{-1}$, $\mu_p = 100 h^{-1}$, výkon linky 50 ks $\cdot min^{-1}$, pořizovací náklady na instalaci zálohy 95 tis. Kčs, zisk 0,02 Kčs/1 ks, roční časový fond 3500 h a zmetkovitost 10 %.

Řešení:

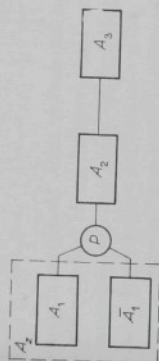
Pro intenzitu poruch λ_a a intenzitu obnov μ_a automatické linky platí

$$\lambda_a = \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 2,25 h^{-1}, \quad \mu_a = \frac{\lambda_a}{\sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_i}{\mu_i}} = 3 h^{-1}.$$

Součinitel pohotovosti je dán vztahem

$$K_p^a = \frac{\mu_a}{\mu_a + \lambda_a} = \frac{3}{3 + 2,25} = 0,571.$$

Zařízení zálohy je naznačeno na obr. 38, parametry v tab. 14. Automat A_1



Obr. 38. Automatická linka se záložním automatem a přepínacím zařízením

Tab. 14. Parametry linky se zálohou prvního automatu

Automat	A_1	$\bar{A}_1$	P	A_2	A_3
λ_i (h^{-1}) μ_i (h^{-1})	1,25 2,5	1,25 2,5	0,2 100	0,5 4	0,5 4

se zálohou $\bar{A}_1$ nahradíme jediným automatem A_2 , pro který podle (178) a (205) platí

$$T' = \frac{2\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1^2} = 3,2 h \Rightarrow \lambda' = 0,3125 h^{-1},$$

$$\phi' = \frac{2\lambda_1 + \mu_1}{2\mu_1(\mu_1 + \lambda_1)} = 0,267 h \Rightarrow \mu' = 3,75 h^{-1}.$$

Intenzitu poruch λ a intenzitu obnov μ linky sestavené ze sériově uspořádaných automatů A_2 , P , A_2 , A_3 snadno určíme ze vztahů

$$\lambda = \lambda' + \lambda_p + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,5125 h^{-1},$$

$$\mu = \frac{\lambda}{\frac{\lambda'}{\mu'} + \frac{\lambda_p}{\mu_p} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{\lambda_3}{\mu_3}} = 4,510 h^{-1}.$$

Pro součinitel pohotovosti K_p platí

$$K_p = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = 0,749.$$

Roční přírůstek výtežnosti linky V_r (ks) odvodíme z výrazu

$$V_r = (K_p - K_p^0) \cdot 3\,500 \cdot 60 \cdot 50 \cdot 0,9 = 1,682 \text{ mil. ks}$$

Roční přírůstek zisku je $0,02 V_r = 33\,642 \text{ Kčs/rok}$. Náklady vynaložené na pořízení zálohy mají tedy návratnost

$$\frac{95\,000}{33\,642} = 2,82 \text{ roku}.$$

Stejná situace nastává v pružné automatické lince. Mezioperační zásobníky kompenzují vliv poruch sousedních automatů jen do jisté míry a výtežnost celé linky může být podstatně ovlivněna jediným automatem. I v tomto případě můžeme jako jednu z technických variant řešení zařadit k automatu s nevhovujícími provozními vlastnostmi záložní automat. Je výhodné, můžeme-li ještě před zařazením zálohy výpočtem stanovit vliv záložního automatu na výtežnost linky a posoudit ekonomickou efektivnost opatření.

Vyhodnocení zařazení záložního automatu do pružné automatické linky uskutečneme v následujících krocích:

1. Podle charakteru činnosti zálohy (zatižená, nezatižená záloha) stanovíme intenzitu poruch a intenzitu obnov automatu náhradního.
2. Je-li nutné zahrnout do výpočtu i spolehlivost přepínacích míst v automatickém dopravním systému, vypočítáme výslednou intenzitu poruch a intenzitu obnov jako charakteristiky sériově řazených strojů - přepínací místo, náhradní automat, přepínací místo.
3. Realizaci druhého kroku získáme úplnou náhradu automatu se zálohou jediným náhradním automatem s vypočtenými parametry. Výtežnost pružné automatické linky stanovíme některou z metod obsažených v této nebo v následující kapitole.
4. Proponujeme ekonomický přínos nasazení záložního automatu.

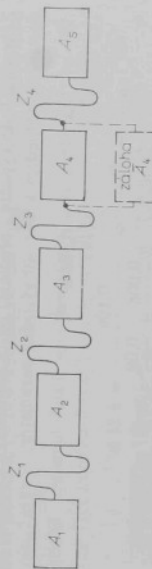
Naznačený způsob výpočtu je vhodný pro případ, že doby bezporuchového provozu a doby obnavování provozuschopnosti všech automatů v lince mají exponenciální rozložení. Neplatí-li tento předpoklad, jsme nuceni vytvořit speciální stochastický matematický model linky, na kterém

budeme simulovat činnost linky, a tím ověříme i její provozní vlastnosti a vliv záložního automatu.

Postup výpočtu podle bodů 1 až 4 si ukažeme na příkladu.

Příklad 15:

Mějme pružnou automatickou linku s pěti automaty podle obr. 39 a tab. 15. Porovnejte výtežnost linky a zálohy, ve které je automat A_4 záloho-



Obr. 39. Automatická linka pro příklad 15

Tab. 15. Zadáání pružné linky pro příklad 15

Automat	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
λ_i (h^{-1})	0,1	0,12	0,008	0,5	0,125
μ_i (h^{-1})	10	8	12	4	20
V_i (ks $\cdot h^{-1}$)	6000	5880	5880	5820	6300
Z_i^* (ks)	300	300	400	200	—

ván ekvivalentním automatem v zatíženém stavu. Obě přepínací místa v automatickém dopravníku vykazují $\lambda_p = 0,008 \text{ h}^{-1}$, $\mu_p = 30 \text{ h}^{-1}$.

Řešení:

Provozní vlastnosti linky z obr. 39 budeme charakterizovat provozními vlastnostmi posledního automatu. Simulaci provozu linky s využitím stochastického modelu jsme dostali následující výsledky:

simulovaná doba provozu zařízení	7 273,5 h
strojový čas počítáče T 200	52 min
doba provozu A_5	5 888,5 h, tj. 81,0%
vlastní prostoje A_5	47,4 h, tj. 0,6%
čekání A_5 na prázdný zásobník Z_4	13 337,6 h, tj. 18,4%

Zařadíme-li k A_4 záložní automat, dostaneme podle (179), (225) pro náhradní automat A'' parametry

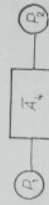
$$T'' = \frac{3\lambda_4 + \mu_4}{2\lambda_4} = \frac{1,5 + 4}{2 \cdot 0,25} = 11 \text{ h} \Rightarrow \lambda' = 0,09 \text{ h}^{-1},$$

$$\phi'' = \frac{3\lambda_4 + \mu_4}{2\mu_4(\mu_4 + 2\lambda_4)} = \frac{5,5}{8(4 + 1)} = 0,1375 \text{ h} \Rightarrow \mu' = 7,27 \text{ h}^{-1}.$$

Zahrneme-li do výpočtu i přepínací místa dopravníku s danými parametry, dostaneme vzhledem k obr. 40 výsledné parametry

$$\lambda = 2\lambda_p + \lambda' = 0,106 \text{ h}^{-1},$$

$$\mu = \frac{\lambda}{2 \frac{\lambda_p}{\mu_p} + \frac{\lambda'}{\mu'}} = \frac{0,106}{2 \frac{0,008}{30} + \frac{0,09}{7,27}} = 8,21 \text{ h}^{-1}.$$



Obr. 40. Náhradní automat v sérii, s přepínacími místy P_1, P_2

Pro výpočet na stochastickém modelu byly zadány parametry linky z tab. 15 s tím, že pro A_4 vezmeme $\lambda_4 = 0,106 \text{ h}^{-1}$ a $\mu_4 = 8,21 \text{ h}^{-1}$.

Výsledky:

simulovaná doba provozu zařízení strojový čas počítače T 200	3 091,4 h 22 min
doba provozu A_5	2 770,3 h, tj. 89,6%
vlastní prostoje A_5	18,2 h, tj. 0,6%
čekání A_5 na prázdný zásobník Z_4	302,9 h, tj. 9,8%

Roční výkon linky bez zálohy čtvrtého automatu při $w = 3\,500 \text{ h}$ ročního časového fondu a 10% zmetkovitosti bude

$$6\,300 \cdot 3\,500 \cdot 0,9 \cdot 0,810 \approx 16,07 \text{ mil. ks/rok.}$$

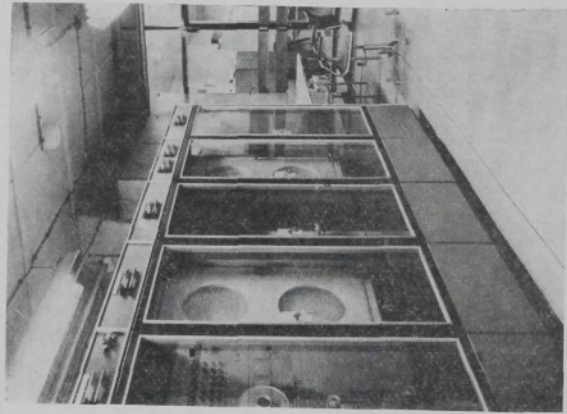
Při zařazení zálohy se zvýší výkon linky na

$$6\,300 \cdot 3\,500 \cdot 0,9 \cdot 0,896 \approx 17,78 \text{ mil. ks/rok, tj. o } 1,71 \text{ mil. ks/rok.}$$

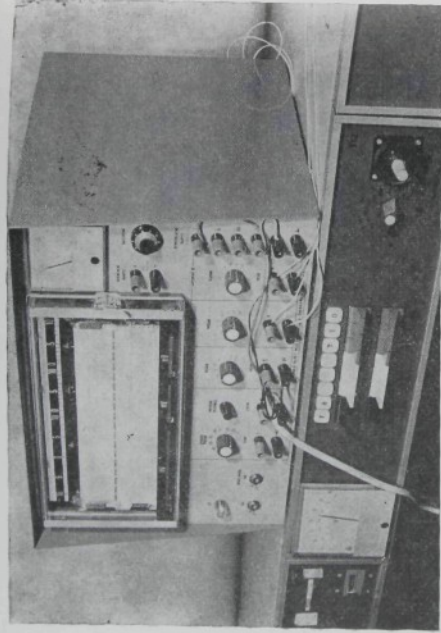
5.5 ANALÝZA PROVOZU PRUŽNÉ AUTOMATICKÉ LINKY

Hlavní podmínkou použití matematických modelů výrobních systémů popsaných v této kapitole je shoda výsledků simulace a skutečného provozu reálného výrobního zařízení. Verifikace matematického modelu je neoddelitelnou součástí jeho využití. Součástí ověření modelu musí být i stanovení stupně přiblížení funkcí reálného systému. Postup prací zabezpečujících ověření činnosti matematického modelu provozu pružného výrobního systému si ukažeme na příkladu automatické testovací linky pro výrobu rezistorů (obr. 41).

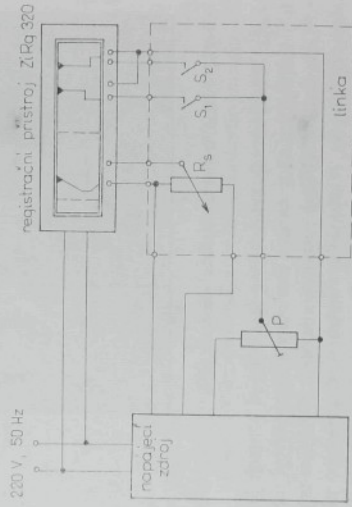
Automatická testovací linka je schematicky naznačena na obr. 42. Skládá se ze čtyř automatů o výkonu $L_1 = 124 \text{ ks} \cdot \text{min}^{-1}$, $L_2 = 121 \text{ ks} \cdot$



Obr. 41. Část pružné automatické linky pro testování rezistorů

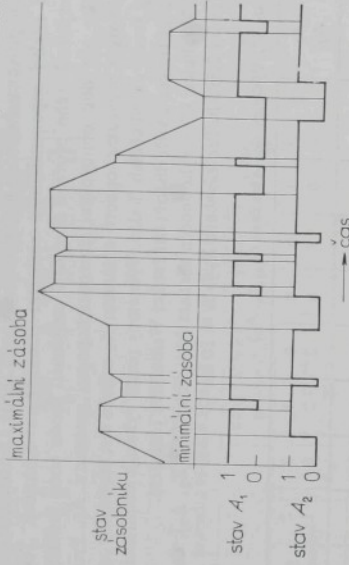


Obr. 44. Registrační přístroj ZIRg 320



Obr. 45. Zapojení registračního přístroje pro snímání provozních údajů

automatů je na obr. 46. Výhodnotíme-li požité záznamy, získáme posloupnost dob bezporuchového chodu, dob obnovování provozuschopnosti a dob čekání pro mezní stav zásobníku pro oba automaty. Ze záznamu



Obr. 46. Příklad záznamu registračního přístroje

stavu zásobníku odvodíme posloupnost dob setrvání zásobníku v mezních polohách.

U testovací linky byly pořízeny záznamy činnosti všech tří zásobníků vždy pouze se sousedními automaty. Proto je možno závěry hodnocení vztahovat vždy jen na příslušnou část linky. Výhodnocení záznamu sledování části (A_1, Z_1, A_2) o celkové době trvání 4,104 h (posuv papíru 1 cm = 1,25 min) je v tabulce 16.

Chod automatu je v tabulce označen 1, prostoje pro vlastní poruchu 0 a čekání pro mezní stav zásobníků 2. Stavů $A_1 = 1$, $A_2 = 2$; $A_1 = 2$, $A_2 = 1$ jsou důsledkem toho, že při vypnutí pohonu automatu v krajní poloze zásobníku se pohon znovu zapne až po vytvoření jisté rezervy v obsahu zásobníku ($\Delta = 90$ ks).

Současné v chodu byly oba automaty 53,7% z celkového času. Automat A_2 pracoval samostatně 18,1% času. O tuto dobu byly sníženy ztráty soustrojí působením meziperačního zásobníku. Pro odhady střední doby bezporuchového provozu a střední doby obnovování provozuschopnosti obou automatů postupně platí $T_1 = 1,23$ min, $\phi_1 = 0,52$ min, $T_2 = 3,47$ min, $\phi_2 = 0,82$ min. Poměrně krátké střední doby bezporuchového provozu ovlivňuje velmi nízká sériovost přesných rezistorů (během zkoušky

bylo zpracováno 13 zakázek) a nespolehlivost mechanismu pro zakládání rezistorů do pásky.

Empirické distribuční funkce dob bezporuchového provozu a dob obnovování proveduschopnosti byly podrobeny testu shody s teoretickou distribuční funkcí exponenciálního rozložení (Kolmogorov-Smirnov). Test dob bezporuchového provozu automatů nevyvolal shodu obou funkcí, stejně jako test dob obnovování provozuschopnosti automatů A_2 . Pro doby obnovování provozuschopnosti automatů A_1 odhalil test statistický významný rozdíl distribučních funkcí. Významný rozdíl vykazuje empirická distribuční funkce i vůči distribuční funkci Weibullova rozložení.

V tabulce 17 je vyhodnocen záznam části linky (A_2, Z_2, A_3); doba sledování 2,393 h. Pro zásobník Z_2 je $\Delta = 30$ ks.

Tab. 17. Výsledky sledování části (A_2, Z_2, A_3)

A_2	1	1	0	0	0	1	2	2	Součet
A_3	1	0	1	0	2	2	0	1	
doba (min)	100,00	4,81	5,38	0,44	16,87	3,25	16,31	2,50	149,56
doba (%)	66,8	3,2	3,6	0,3	11,3	2,2	10,9	1,7	100

Pro odhady středních dob bezporuchového provozu a středních dob obnovování proveduschopnosti ze zkoumaného záznamu byly zjištěny hodnoty $T_2 = 5,40$ min, $\phi_2 = 1,13$ min, $T_3 = 4,90$ min, $\phi_3 = 1,03$ min.

Test shody empirických distribučních funkcí a distribučních funkcí teoretického exponenciálního rozložení ani v jednom případě shodu obou funkcí nevyvolal.

Analýzou provozu části testovací linky jsme získali spolehlivostní charakteristiky jednotlivých soustrojí. Můžeme tedy ověřit, do jaké míry simulace může nahradit provoz skutečného automatického výrobního systému.

Pro jednotlivé sledované úseky byly vytvořeny stochastické modely. Srovnání empirických hodnot a výsledků simulace části linky (A_1, Z_1, A_2) je v tab. 18.

Pro část linky (A_2, Z_2, A_3) obsahuje srovnání výsledků pozorování a simulace tab. 19.

Skutečný provoz asynchronního výrobního systému, v tomto případě automatické testovací linky, jednoznačně potvrdil vysoký přínos zařaze-

Tab. 18. Srovnání výsledků pozorování a simulace části (A_1, Z_1, A_2)

		Bezporuchový provoz (%)	Vlastní prostroje (%)	Čekání (%)	Doba (h)
pozorování	A_1	70,08	29,57	0,35	4,1
	A_2	71,77	16,68	11,55	
simulace	A_1	67,55	30,21	2,24	100
	A_2	69,21	20,34	10,45	

Tab. 19. Srovnání výsledků simulace a pozorování části (A_2, Z_2, A_3)

		Bezporuchový provoz (%)	Vlastní prostroje (%)	Čekání (%)	Doba (h)
pozorování	A_2	72,25	15,17	12,58	2,5
	A_3	72,13	14,42	13,45	
simulace	A_2	72,70	17,18	10,12	303,4
	A_3	72,41	17,70	9,89	

ných mezioperačních zásobníků. V části (A_1, Z_1, A_2) se vlivem zásobníků snížily ztráty ve výtečnosti linky o 18,1 %. Při sledování soustrojí (A_2, Z_2, A_3) činí snížení ztrát 5,3 % z kapacity linky.

V tabulce 17 se objevuje poměrně dlouhá doba setrvání ve stavu $A_2 = 0$, $A_3 = 2 \dots 11,3\%$ a $A_2 = 2$, $A_3 = 0 \dots 10,9\%$. Navíc obě hodnoty jsou velmi blízké. Lze očekávat, že zvýšením kapacity zásobníku Z_2 by se dosáhlo dalšího snížení ztrát celé linky. Simulací chodu linky s různými variantami kapacit Z_2 můžeme vyhodnotit vliv kapacity Z_2 na výtečnost linky.

Zcela přesně vyhodnotí činnost testovací linky vzhledem k funkci mezi-zásobníků registrační přístroj, který dokáže současně zachytit stavy všech automatů a zásobníků najednou. Vyhodnocení tohoto záznamu by však bylo obtížné, proto je vhodnější použít přímo řídicího počítače. Pouze tak získáme spolehlivostní charakteristiky neovlivněné neregistrovanými stavy čekání.

Výsledky pozorování v tab. 18 a 19 velmi dobře korespondují s výsledky ekvivalentních simulacních výpočtů. Matematický model nerespektoval

zpoždění ve spouštění automatů ze stavu čekání. Při doplnění modelu by se dala očekávat ještě lepší shoda. I při těchto výsledcích lze konstatovat, že matematické modely jsou použitelné pro simulaci pružných výrobních systémů a při přesném odhadu spolehlivostních charakteristik jednotlivých automatů jsou odchylky řádově několik procent.

6 Aplikace Markovových procesů při vytváření modelu provozu pružné linky

Linku, tvořenou dvěma automaty A_1, A_2 (s výkonem q_1, q_2) a mezioperačním zásobníkem Z , lze za určitých podmínek považovat za fyzikální systém S , ve kterém probíhá náhodný proces – Markovův proces s diskretními stavy a spojitým časovým průběhem [18]. Za matematický model této linky, kterou nazveme jednoduchá, lze pak považovat příslušnou soustavu Kolmogorových diferenciálních rovnic nebo soustavu algebraických a diferenciálních rovnic, kterou dostaneme z původní soustavy pro stacionární režim. S využitím limitních pravděpodobností stavů, které se vztahují na uvažovaný systém S ve stacionárním režimu, se dají najít charakteristiky dané linky, jako např. součinitel pohotovosti K_p , součinitel prostojů K_{pr} a skutečná výkonnost q_s , samozřejmě též s přihlédnutím k zařazení mezioperačního zásobníku do linky. Tyto činitele umožňují zhodnotit spolehlivost pružné linky a efektivnost jejího využití v praxi.

Model ve tvaru Markovova řetězce lze vytvořit za následujících podmínek:

1. Všechny poruchy, které způsobí, že přestane automat A_1 nebo A_2 pracovat, mají náhodný charakter.
2. Náhodné veličiny doba bezporuchového provozu τ jakož i doba obnovování provozuschopnosti θ obou automatů A_1, A_2 mají exponenciální rozložení.
3. Velikost zásoby v zásobníku Z se považuje za spojitou veličinu.
4. Porucha na kterémkoliv automatu se začne odstraňovat ihned po jejím vzniku a toto odstraňování poruchy (obnova) nemá vliv na práci druhého, provozuschopného automatu.

Vzhledem k tomu, že výsledky pozorování provozu automatů lze s využitím statistických testů často modelovat exponenciálním rozložením, můžeme předpokládat, že první dvě podmínky se zpravidla v praxi splní. Vždycky je ovšem nutné se o tom přesvědčit a např. pomocí Kolmogorova kritéria [25] zjistit, zda rozložení experimentálních souborů dob bezporuchového provozu a dob obnovování provozuschopnosti, nevykazují významné odchylky od exponenciálního rozložení.

Třetí a čtvrtá podmínka představují jisté zjednodušení vzhledem ke sku-

tečnosti, avšak výsledky získané s jejich využitím ji velmi dobře vystihují, i když se navíc předpokládá, že zásobník a ostatní společné části linky jsou bez poruch.

Význam sestavení matematického modelu jednoduché linky pro všechny tři v úvahu přicházející případy ($q_1 > q_2$, $q_1 < q_2$ a $q_1 = q_2$) je nejenom v tom, že z modelu můžeme zjistit charakteristiky této linky, ale také v tom, že výsledky se dají zobecnit pro pružné linky složitějších typů.

6.1 POSTUP PŘI VYTVÁŘENÍ MATEMATICKÉHO MODELU PRO $q_1 \neq q_2$

Vezměme linku o dvou sériově uspořádaných automatech A_1, A_2 s meziperačním zásobníkem Z. Předpokládáme, že jsou splněny podmínky 1 až 4, což znamená, že náhodný proces probíhající v systému S, který linka představuje, je spojitý Markovův proces [27], [28]. Označme intenzitu poruch automatu A_1 jako λ_1 , intenzitu obnovy jako μ_1 . Výkon automatu A_1 označme q_1 a kapacitu zásobníku Z jako Z^* . Veličiny λ_i, μ_i, q_i a Z^* budeme považovat za známé. Pro λ_i, μ_i, q_i v uvažovaném případě platí:

$$\lambda_i = \frac{1}{T_i}, \quad \mu_i = \frac{1}{\phi_i}, \quad q_i = \frac{1}{g_i}. \quad (345)$$

Vzhledem k tomu, že při analýze provozu pružné linky je nutné rozlišovat případy $q_1 > q_2$, $q_1 < q_2$ ($q_1 = q_2$), budeme nejprve předpokládat, že pro výkony q_1, q_2 automatů A_1, A_2 platí $q_1 \neq q_2$. Matematický model, který za tohoto předpokladu sestavíme, je shodný s modelem autorů A. A. Levina a N. I. Pasky [18]. Výše uvedený předpoklad ještě rozdělíme na případy $q_1 > q_2$, $q_1 < q_2$.

6.1.1 Množina stavů

Při tvorbě matematického modelu je třeba předevislým zjistit, v jakých stavech může uvažovaná linka setrvat. Tyto stavy označíme S_i a každý z nich budeme stručně charakterizovat uspořádanou trojicí, sestavenou z čísel 0, 1, 2 vzhledem k tomu, že každý z automatů A_1, A_2 buď pracuje, nebo nepracuje a zásobník Z je prázdný, částečně zaplněný nebo plný. Přitom 0 zapsaná na prvním místě (odpovídající A_1) znamená, že automat A_1 nepracuje; 1 znamená, že A_1 pracuje. Podobně 0 zapsána

na druhém místě znamená, že A_2 nepracuje a 1 odpovídá tomu, že A_2 pracuje. Na třetím místě zapsaná 0 znamená, že zásobník Z je prázdný. Označíme-li velikost zásoby x, pak v případě, že zásobník Z je prázdný, je $x = 0$. Je-li na třetím místě 1, je zásobník částečně zaplněný, tj. $x \in (0, Z^*)$, a 2 znamená, že zásobník Z je plný a $x = Z^*$.

Tab. 20. Všechny uspořádané trojice vytvořené popsáním způsobem z čísel 0, 1, 2

A_1	A_2	Z	A_1	A_2	Z
0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	2
1	1	0	0	1	2
0	0	1	1	0	2
0	1	1	1	1	2

Ze všech uspořádaných trojic, ve kterých na prvních místech je 0 anebo 1 a na třetím místě je 0, 1 nebo 2, je nutno vybrat trojice odpovídající stavům S_i . V daném případě se z množiny uspořádaných trojic sestavených v tab. 20 vyjímou orámované trojice; v příslušných stavech nemůže totiž daný systém setrvat. Například trojice (0, 1, 0) odpovídá stavu, ve kterém A_1 nepracuje, A_2 pracuje a zásobník je prázdný. V takovém stavu nemůže daný systém setrvat, poněvadž pokud se Z vyprázdní, A_2 přestane pracovat.

Tab. 21. Přehled možných stavů

	A_1	A_2	Z
S_0	0	0	1
S_1	1	0	1
S_2	0	1	1
S_3	1	1	1
S_4	0	0	2
S_5	0	0	0
S_6	1	1	2
S_7	1	1	0

Neorámované trojice odpovídají stavům, ve kterých daný systém může setrvat; tyto stavy označíme $S_0, S_1, \dots, S_7$ a pro přehlednost je znovu zapíšeme v tab. 21. První čtyři stavy $S_0, \dots, S_3$ jsou vlastně stavy složené

z nekonečné mnoha elementárních stavů, odpovídajících velikosti zásoby x , $x \in (0, Z^*)$. Pravděpodobnosti $p_i(t)$, $i = 0, \dots, 3$ se proto pro ně definují zvláštním způsobem, jak ukážeme dále. Ve stavech $S_0, \dots, S_5$ může každý automat pracovat vlastním taktem.

U stavů S_4, S_5 je zřejmá jejich spojitost se stavem S_0 a u stavů S_6, S_7 spojitost s S_3 , což se projeví i při sestavování grafu stavů.

Všimněme si ještě všech těchto stavů podrobněji: Ve stavu S_0 je systém S tehdy, když ani A_1 ani A_2 nepracuje, u obou automatů se odstraňuje porucha (obnovuje se jejich provozuschopnost), zásobník Z je částečně zaplněný, velikost zásoby se nemění a $x \in (0, Z^*)$. Ve stavu S_1 automat A_1 pracuje a A_2 nepracuje (je ve stavu obnovování provozuschopnosti), zásobník Z je částečně zaplněn a velikost zásoby se zvyšuje „rychlostí“ q_1 . Stav S_2 je analogický stavu S_1 , avšak nyní A_2 pracuje a A_1 nepracuje, obnovuje se jeho provozuschopnost a velikost zásoby se snižuje rychlostí q_2 . Ve stavu S_3 oba automaty A_1, A_2 pracují, zásobník Z je částečně zaplněn, velikost zásoby x se mění rychlostí odpovídající rozdílu $q_1 - q_2$. Tento rozdíl označíme

$$\Delta q = q_1 - q_2. \quad (346)$$

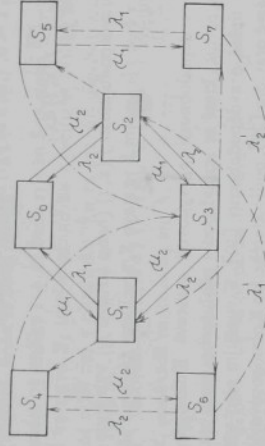
Platí-li $q_1 > q_2$, pak se velikost zásoby zvyšuje rychlostí Δq , je-li $q_1 < q_2$, velikost zásoby se snižuje opět rychlostí rovnou Δq . Stav S_4 je významný tím, že A_2 nepracuje, obnovuje se jeho provozuschopnost; automat A_1 rovněž nepracuje (i když je provozuschopný), jelikož zásobník Z je plný. Stav S_5 se vyznačuje tím, že A_1 nepracuje, obnovuje se jeho provozuschopnost a automat A_2 nepracuje (i když je provozuschopný), jelikož zásobník Z je prázdný. Ve stavu S_6 oba automaty A_1, A_2 pracují a zásobník je plný, velikost zásoby je $x = Z^*$. Ve stavu S_7 oba automaty pracují, zásobník Z je prázdný ($x = 0$).

6.1.2 Přejednost mezi stavy

Pro stavy $S_0, S_1, \dots, S_7$ sestavíme teď obvyklým postupem graf stavů [28]. Dostaneme ho ve tvaru podle obr. 47.

Jak lze vidět z obrázku, střední část grafu, zahrnující S_0, S_1, S_3, S_2 a příslušné přechody mezi nimi, odpovídá vlastně systému, který tvoří dva automaty pracující nezávisle na sobě, nebo systému, který tvoří pružná linka se zásobníkem, který není nikdy prázdný ani plný (stále je částečně zaplněný). Další čtyři stavy odpovídají krajním případům, když je zásobník

Z plný anebo prázdný. Přechody z těchto nebo do těchto stavů jsou vyznačeny šárkován. Čerchované jsou vyznačeny přechody, které jsou možné jenom pro $\Delta q > 0$ nebo pro Δq záporné. Přechody z S_3 do S_6 a z S_5 do S_3



Obr. 47. Přechody mezi stavy jednoduché linky (pro $q_1 \neq q_2$)

se realizují jen tehdy, když $\Delta q > 0$. Přechody z S_3 do S_7 a z S_4 do S_3 nastanou zase jenom pro $\Delta q < 0$.

Je-li uvažovaný systém ve stavu S_6 (do kterého se dostane, když $q_1 > q_2$), pak se automat A_1 musí přizpůsobovat druhému, pomalejšímu automatu A_2 , jelikož zásobník Z je plný.

Podobně ve stavu S_7 , do kterého se systém S dostane, když je výkon automatu A_2 vyšší než výkon automatu A_1 ($q_1 < q_2$), se musí přizpůsobovat automat A_2 pomalejšímu prvnímu automatu A_1 – zásobník je totiž prázdný. To vede v obou případech ke změně, tj. ke snížení intenzity poruch rychlejšího z automatů. Sníženou intenzitu poruch označíme λ'_1, λ'_2 . Pro intenzity λ'_1, λ'_2 chápáné jako průměrné hodnoty intenzit poruch automatu A_1 (resp. A_2) během servání systému S ve stavu S_6 (resp. S_7) platí:

$$\lambda'_1 = \lambda_1 \frac{q_2}{q_1} \quad \text{při } q_1 > q_2,$$

$$\lambda'_2 = \lambda_2 \frac{q_1}{q_2} \quad \text{při } q_1 < q_2.$$

Stavy S_6 a S_7 jsou nevratné stavy; S_7 je nevratný pro $q_1 > q_2$ a S_6 pro $q_1 < q_2$. Nevratný se nazývá stav S_1 tehdy [27], je-li pravděpodobnost návratu do něj po dostatečně velkém počtu kroků rovna nule (a tedy

limitní pravděpodobnost $p_i = 0$). Pravděpodobnosti stavů, nejdříve chápané jako funkce času t , se označí $p_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \dots, 7$, popř. jen stručně p_i . Jako p_i se označí i limitní pravděpodobnosti stavů, které jsou konstantní.

Pro stavy S_i , $i = 0, 1, 2, 3$ se $p_i(t)$ definují vztahem

$$p_i(t) = \int_0^{2\pi} f_i(x, t) dx, \quad (347)$$

kde hustota pravděpodobnosti $f_i(x, t)$ (nebo stručně f_i) vyjadřuje pravděpodobnost, že v čase t je systém S ve stavu S_i a velikost zásoby v zásobníku Z je x , ($x \in (0, Z^*)$).

Víme, že pravděpodobnosti p_i vyhovují soustavě Kolmogorových diferenciálních rovnic, které se sestaví podle příslušného grafu stavů s využitím vět o úplné pravděpodobnosti [10]. S využitím této věty se dá odvodit též známé pravidlo [28], podle kterého lze Kolmogorovy diferenciální rovnice sestavit „mechanicky“. Vzhledem k tomu, že v uvažovaném případě hustoty pravděpodobnosti f_i , $i = 0, \dots, 3$ jsou nejen funkce času t , ale i velikosti zásoby x v zásobníku Z (přičemž $x \in (0, Z^*)$ a stavy $S_4, \dots, S_7$ jsou stavy s mezními hodnotami velikosti zásoby $x = 0$ anebo $x = Z^*$, sestavíme alespoň některé diferenciální rovnice podrobněji. Pro stavy $S_0, \dots, S_3$ se přitom budou brát v úvahu jen silně vyznačené přechody (střední část grafu v obr. 47). Ty čárkované a čerchované vyznačené přechody, které souvisí se změnou stavů jen vzhledem ke změně velikosti zásoby na mezni hodnotu, se uplatní jen v diferenciálních rovnicích pro stavy $S_4, \dots, S_7$. Přechody $S_6 \rightarrow S_2$ (při $q_1 > q_2$) a $S_7 \rightarrow S_1$ (při $q_1 < q_2$) se respektují jako okrajové podmínky tvaru:

$$\lambda_1 p_6(t) = q_1 f_2(Z^*, t); \quad \lambda_2 p_7(t) = q_2 f_1(0, t).$$

Například pravděpodobnost, že systém S byl v okamžiku t ve stavu S_6 a za čas Δt přešel do stavu odpovídajícího S_2 s mezni velikostí zásoby $x = Z^*$, snižující se za čas Δt o $\Delta x = q_2 \Delta t$, bude rovna jednak $p_6(t) \lambda_1 \Delta t$ (kde $\lambda_1 \Delta t$ je příslušná pravděpodobnost přechodu), jednak $f_2(Z^*, t) q_2 \Delta t$. A tedy

$$p_6(t) \lambda_1 \Delta t = f_2(Z^*, t) q_2 \Delta t \Rightarrow \lambda_1 p_6(t) = q_1 f_2(Z^*, t).$$

Odtud plyne první okrajová podmínka a podobně lze zdůvodnit druhou.

6.1.3 Soustava Kolmogorových diferenciálních rovnic

Pravděpodobnost, že v časovém okamžiku $t + \Delta t$ je uvažovaný systém S ve stavu S_1 a velikost zásoby v zásobníku Z je x , označíme $f_1(x, t + \Delta t)$ a zjistíme, čemu se bude rovnat.

V časovém okamžiku $t + \Delta t$ bude systém S ve stavu S_1 , jestliže

- byl ve stavu S_1 také v okamžiku t (velikost zásoby byla $x - q_1 \Delta t$, tj. o $q_1 \Delta t$ nižší než v okamžiku t) a za čas Δt nepřešel ani do stavu S_0 a ani do stavu S_3 ;
- byl v časovém okamžiku t ve stavu S_0 (velikost zásoby byla x a neměnila se, poněvadž ve stavu S_0 ani A_1 ani A_2 nepracuje) a za čas Δt přešel do stavu S_1 ;
- byl v časovém okamžiku t ve stavu S_3 (velikost zásoby byla $x - (q_1 - q_2) \Delta t$) a za čas Δt přešel do stavu S_1 .

Využijeme-li známé poznatky z teorie pravděpodobnosti [10] jakož i vztah pro vyjádření pravděpodobnosti přechodu systému S z jednoho stavu do druhého za čas Δt (jsou to podmíněné pravděpodobnosti přechodu), můžeme pravděpodobnost, že nastane a), b) nebo c), zapsat následovně:

- $f_1(x - q_1 \Delta t, t) [1 - (\lambda_1 + \mu_2) \Delta t]$,
- $f_0(x, t) \mu_1 \Delta t$,
- $f_3(x - (q_1 - q_2) \Delta t, t) \lambda_2 \Delta t$.

Podle vět o úplné pravděpodobnosti se dá $f_1(x, t + \Delta t)$ vyjádřit

$$f_1(x, t + \Delta t) = f_1(x - q_1 \Delta t, t) [1 - (\lambda_1 + \mu_2) \Delta t] + f_0(x, t) \mu_1 \Delta t + f_3(x - (q_1 - q_2) \Delta t, t) \lambda_2 \Delta t. \quad (349)$$

Z (349) po úpravě a připočtením a odečtením $f_1(x, t)$ dostaneme

$$\begin{aligned} f_1(x, t + \Delta t) &+ f_1(x, t) - f_1(x, t) - f_1(x - q_1 \Delta t, t) = \\ &= f_0(x, t) \mu_1 \Delta t + f_3(x - (q_1 - q_2) \Delta t, t) \lambda_2 \Delta t - \\ &- f_1(x - q_1 \Delta t, t) (\lambda_1 + \mu_2) \Delta t. \end{aligned} \quad (350)$$

Obě strany rovnice (350) dělíme Δt a upravíme na tvar

$$\begin{aligned} \frac{f_1(x, t + \Delta t) - f_1(x, t)}{\Delta t} &+ q_1 \frac{f_1(x, t) - f_1(x - q_1 \Delta t, t)}{q_1 \Delta t} = \\ &= -(\lambda_1 + \mu_2) f_1(x - q_1 \Delta t, t) + f_0(x, t) \mu_1 + \\ &+ f_3(x - (q_1 - q_2) \Delta t, t) \lambda_2. \end{aligned} \quad (351)$$

$q_1 \Delta t$ představuje přírůstek Δx velikosti zásoby x za čas Δt , když je systém S ve stavu S_1 . Můžeme tedy psát

$$q_1 \Delta t = \Delta x.$$

Jestliže $\Delta t \rightarrow 0$, pak i $\Delta x \rightarrow 0$ a v limitě pro $\Delta t \rightarrow 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_1(x, t + \Delta t) - f_1(x, t)}{\Delta t} + q_1 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_1(x, t) - f_1(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = \\ = -(\lambda_1 + \mu_2) f_1(x, t) + \mu_1 f_0(x, t) + \lambda_2 f_3(x, t) \end{aligned} \quad (352)$$

a odtud (s použitím zjednodušeného zápisu bez argumentů)

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + q_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = -(\lambda_1 + \mu_2) f_1 + \mu_1 f_0 + \lambda_2 f_3. \quad (353)$$

Dostali jsme diferenciální rovnici (v tomto případě parciální diferenciální rovnici) ze soustavy Kolmogorovových diferenciálních rovnic, které vyhovuje funkce f_1 .

Vzhledem k tomu, že funkce $f_1(x, t)$ je vlastně složená funkce (proměnná x je totiž funkce času t), vidíme, že na levé straně diferenciální rovnice (353) je vlastně totální derivace

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{dx}{dt}, \quad \text{kde} \quad \frac{dx}{dt} = q_1.$$

Tato diferenciální rovnice by se dala sestavit také přímo z grafu stavů (jeho střední části) podle známého pravidla pro sestavování Kolmogorovových diferenciálních rovnic. Podle něho na levé straně diferenciální rovnice, která vyhovuje funkci f_1 , je derivace df_1/dt . Na pravé straně jsou sčítance, odpovídající přechodům $S_1 \rightarrow S_0$, $S_1 \rightarrow S_3$ (z vrcholu odpovídajícího v grafu stavů stavu S_1 – stručně vrcholu S_1 – vychází totiž dvě orientované úsečky) a přechodům $S_0 \rightarrow S_1$ a $S_3 \rightarrow S_1$ (poněvadž do vrcholu S_1 vcházejí dvě orientované úsečky z vrcholů S_0 a S_3). První dva sčítance budou mít znaménko záporné, druhé dva kladné, to znamená, že podle tohoto pravidla se pro f_1 sestaví diferenciální rovnice stejného tvaru, jaký má (353).

Podobným způsobem se dá ukázat, že funkce $f_2(x, t)$, která patří stavu S_2 , charakterizovanému uspořádanou trojicí $(0, 1, 1)$, vyhovuje diferenciální rovnici

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} - q_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = \mu_2 f_0 + \lambda_1 f_3 - (\lambda_2 + \mu_1) f_2. \quad (354)$$

q_2 udává rychlost, s jakou se mění (snižuje) velikost zásoby x v zásobníku Z . Za čas Δt poklesne velikost zásoby o $\Delta x = q_2 \Delta t$.

Funkce $f_3(x, t)$ vyhovuje diferenciální rovnici

$$\frac{\partial f_3}{\partial t} + \Delta q \frac{\partial f_3}{\partial x} = \mu_2 f_1 + \mu_1 f_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) f_3, \quad (355)$$

kde $\Delta q = q_1 - q_2$. Ve stavu S_3 se totiž velikost zásoby v zásobníku Z změní (zvýší nebo sníží) za čas Δt o $\Delta x = \Delta q \Delta t$.

Funkce $f_0(x, t)$ bude vyhovovat diferenciální rovnici

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 - (\mu_1 + \mu_2) f_0. \quad (356)$$

Ve stavu S_0 , který charakterizuje uspořádaná trojice $(0, 0, 1)$, ani jeden z automatů A_1, A_2 nepracuje, obnovuje se jejich provozuschopnost, velikost zásoby je $x, x \in (0, Z^*)$ a nemění se.

Stav S_4 charakterizuje uspořádaná trojice $(0, 0, 2)$, to znamená A_1 ani A_2 nepracuje, zásobník Z je plný. Při tom ale A_2 má poruchu, obnovuje se jeho provozuschopnost a A_1 nemůže pracovat (i když je provozuschopný), protože zásobník Z je plný.

Pravděpodobnost, že systém S je v časovém okamžiku $t + \Delta t$ ve stavu S_4 , se dá vyjádřit

$$\begin{aligned} p_4(t + \Delta t) = p_4(t) (1 - \mu_2) \Delta t + p_6(t) \lambda_2 \Delta t + \\ + f_1(Z^* - q_1 \Delta t, t) q_1 \Delta t. \end{aligned} \quad (357)$$

Přitom $f_1(Z^* - q_1 \Delta t, t) q_1 \Delta t$ vyjadřuje pravděpodobnost, že systém S byl v časovém okamžiku t ve stavu S_1 (velikost zásoby v zásobníku Z byla $Z^* - q_1 \Delta t$) a za čas Δt přšel do stavu S_4 a přechod se realizoval jenom vzhledem ke zvýšení velikosti zásoby o $\Delta x = q_1 \Delta t$. Z (357) dostaneme

$$\frac{p_4(t + \Delta t) - p_4(t)}{\Delta t} = -\mu_2 p_4(t) + \lambda_2 p_6(t) + q_1 f_1(Z^* - q_1 \Delta t, t) \quad (358)$$

a limita pro $\Delta t \rightarrow 0$ je

$$\frac{dp_4}{dt} = -\mu_2 p_4 + \lambda_2 p_6 + q_1 f_1(Z^*). \quad (359)$$

Další Kolmogorovy diferenciální rovnice se sestaví úplně analogicky. Tam, kde jde o přechod ze stavu S_6 nebo S_7 , se uplatní už zmíněné snížení intenzity přechodu. Příslušný systém Kolmogorovových diferenciálních

rovnice má tudíž v daném případě ($q_1 \neq q_2$) tvar

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_1}{\partial t} + q_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \mu_1 f_0 + \lambda_2 f_3 - (\lambda_1 + \mu_2) f_1, \\
 \frac{\partial f_2}{\partial t} - q_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \mu_2 f_0 + \lambda_1 f_3 - (\lambda_2 + \mu_1) f_2, \\
 \frac{\partial f_3}{\partial t} + \Delta q \frac{\partial f_3}{\partial x} &= \mu_2 f_1 + \mu_1 f_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) f_3, \\
 \frac{\partial f_0}{\partial t} &= \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 - (\mu_1 + \mu_2) f_0, \\
 \frac{dp_4}{dt} &= \lambda_2 p_6 - \mu_2 p_4 + q_1 f_1(Z^*), \\
 \frac{dp_5}{dt} &= \lambda_1 p_7 - \mu_1 p_5 + q_2 f_2(0), \\
 \frac{dp_6}{dt} &= \mu_2 p_4 + \Delta q f_3(Z^*) - \left(\lambda_2 + \lambda_1 \frac{q_2}{q_1} \right) p_6, \\
 \frac{dp_7}{dt} &= \mu_1 p_5 - \Delta q f_3(0) - \left(\lambda_1 + \lambda_2 \frac{q_1}{q_2} \right) p_7.
 \end{aligned} \tag{300}$$

Z této soustavy diferenciálních rovnic by bylo možné při daných počátečních podmínkách a při respektování okrajových podmínek a podmínky $\sum_{i=0}^7 p_i(t) = 1$ zjistit pravděpodobnosti stavů $\{p_i(t)\}_{i=0}^7$, které jsou nazývány absolutní rozložení pravděpodobnosti. Nás však budou zajímat limitní pravděpodobnosti stavů, které charakterizují příslušný systém **S** ve stacionárním ustáleném režimu. Otázkou je, zda v uvažovaném případě limitní pravděpodobnosti existují a jak je lze vypočítat.

6.2 LIMITNÍ PRAVDĚPODOBNOSTI STAVŮ PRO $q_1 \neq q_2$

Víme, že platí věta [28], která říká, že je-li počet stavů uvažovaného systému **S** konečný a z každého stavu se lze dostat (po jistém počtu kroků) do kteréhokoli jiného stavu, pak limitní pravděpodobnosti stavů existují a nezávisí na počátečním stavu systému.

Takový systém **S** se pro dostatečně velké t , tj. $t \rightarrow \infty$, ustálí ve stacionár-

ním režimu, pro který je charakteristické, že je o každém jeho stavu možno zjistit, s jakou konstantní pravděpodobností nastane. Přitom každá z těchto pravděpodobností vlastně představuje poměrou střední dobu setrvání systému v příslušném stavu.

Z grafu stavů, do kterých se může uvažovaný systém **S** dostat, je zřejmé, že limitní pravděpodobnosti stavů v tomto případě existují. Víme o nich, že nezávisí na čase, a proto jejich derivace podle času jsou rovny nule. Vyhovují podmínce

$$\sum_{i=0}^7 p_i = 1. \tag{361}$$

Limitní pravděpodobnosti stavů se v daném případě určí při respektování daných okrajových podmínek ze soustavy diferenciálních a algebraických rovnic, které dostaneme z (360) ve tvaru

$$\begin{aligned}
 q_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \mu_1 f_0 + \lambda_2 f_3 - (\lambda_1 + \mu_2) f_1, \\
 -q_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \mu_2 f_0 + \lambda_1 f_3 - (\lambda_2 + \mu_1) f_2, \\
 \Delta q \frac{\partial f_3}{\partial x} &= \mu_2 f_1 + \mu_1 f_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) f_3; \\
 0 &= \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 - (\mu_1 + \mu_2) f_0, \\
 0 &= \lambda_2 p_6 + q_1 f_1(Z^*) - \mu_2 p_4, \\
 0 &= \lambda_1 p_7 + q_2 f_2(0) - \mu_1 p_5, \\
 0 &= \mu_2 p_4 + \Delta q f_3(Z^*) - \left(\lambda_2 + \lambda_1 \frac{q_2}{q_1} \right) p_6, \\
 0 &= \mu_1 p_5 - \Delta q f_3(0) - \left(\lambda_1 + \lambda_2 \frac{q_1}{q_2} \right) p_7.
 \end{aligned} \tag{362}$$

Ze vztahů (363) po úpravách dostaneme

$$\begin{aligned}
 f_0 &= \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2), \\
 p_4 &= \frac{1}{\mu_2} (\lambda_2 p_6 + q_1 f_1(Z^*)),
 \end{aligned}$$

$$p_5 = \frac{1}{\mu_1} (\lambda_1 p_7 + q_2 f_3(0)), \quad (364)$$

$$p_6 = \frac{q_1}{\lambda_2 q_1 + \lambda_1 q_2} (\mu_2 p_4 + \Delta q f_3(Z^*)),$$

$$p_7 = \frac{q_2}{\lambda_1 q_2 + \lambda_2 q_1} (\mu_1 p_5 - \Delta q f_3(0)).$$

Po sečtení diferenciálních rovnic (362) máme

$$q_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} - q_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \Delta q \frac{\partial f_3}{\partial x} = (\mu_1 + \mu_2) f_0 - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2. \quad (365)$$

Dosazením za f_0 se ukáže platnost vztahu

$$q_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} - q_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \Delta q \frac{\partial f_3}{\partial x} = 0. \quad (366)$$

Z (366) se dá určit $\partial f_3 / \partial x$ pomocí $\partial f_1 / \partial x$ a $\partial f_2 / \partial x$ a po integraci f_3 pomocí f_1, f_2 ve tvaru

$$f_3 = \frac{1}{\Delta q} (q_2 f_2 - q_1 f_1 + K); \quad \text{pro } K = 0$$

$$f_3 = \frac{1}{\Delta q} (q_2 f_2 - q_1 f_1). \quad (367)$$

Integrační konstantu K zvolíme rovnou nule vzhledem k respektování okrajových podmínek – jak se ukáže dále (viz vztahy (381) a (383)). Nejprve však upravíme diferenciální rovnice (362). Vzhledem k (366) jsou závislé, proto se bude dále řešit jen soustava dvou rovnic. Ta má po úpravě a dosazení za f_3 tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} = & -\frac{1}{q_1} \left[\frac{\mu_2(\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1)}{\mu_1 + \mu_2} + \lambda_2 \frac{q_1}{\Delta q} \right] f_1 + \\ & + \frac{1}{q_1} \left[\frac{\mu_1 \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} + \lambda_2 \frac{q_2}{\Delta q} \right] f_2, \end{aligned} \quad (368)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x} = & \frac{1}{q_2} \left[\lambda_1 \frac{q_1}{\Delta q} - \frac{\mu_2 \lambda_1}{\mu_1 + \mu_2} \right] f_1 - \\ & - \frac{1}{q_2} \left[\lambda_1 \frac{q_2}{\Delta q} - \frac{\mu_1(\mu_1 + \mu_2 + \lambda_2)}{\mu_1 + \mu_2} \right] f_2. \end{aligned}$$

Označíme-li ve shodě s [18] součinitele v této soustavě h, r a s, v , dostaneme

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -h f_1 + r f_2, \quad (369)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = s f_1 - v f_2.$$

Tato soustava dvou lineárních diferenciálních rovnic má charakteristickou rovnici vyjádřenou ve tvaru determinantu s neznámou α

$$\begin{vmatrix} -h - \alpha & r \\ s & -v - \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (370)$$

Odtud

$$\alpha^2 + (h + v)\alpha + hv - rs = 0. \quad (371)$$

Pro kořeny charakteristické rovnice α_1, α_2 dostaneme

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(h + v) \pm \sqrt{[(h + v)^2 - 4(hv - rs)]}}{2}. \quad (372)$$

Přitom α_2 lze zapsat s použitím α_1 následovně:

$$\alpha_2 = -(\alpha_1 + h + v), \quad (373)$$

kde pro h, v, r, s podle (368) platí

$$\begin{aligned} h = & \frac{1}{q_1} \left[\frac{\mu_2(\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1)}{\mu_1 + \mu_2} + \lambda_2 \frac{q_1}{\Delta q} \right], \\ v = & \frac{1}{q_2} \left[\lambda_1 \frac{q_2}{\Delta q} - \frac{\mu_1(\mu_1 + \mu_2 + \lambda_2)}{\mu_1 + \mu_2} \right], \\ s = & \frac{1}{q_2} \left[\lambda_1 \frac{q_1}{\Delta q} - \frac{\mu_2 \lambda_1}{\mu_1 + \mu_2} \right], \\ r = & \frac{1}{q_1} \left[\lambda_2 \frac{q_2}{\Delta q} + \frac{\mu_1 \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} \right]. \end{aligned} \quad (374)$$

Jak je známo z teorie diferenciálních rovnic [15], funkce f_1 a f_2 se pak dají psát ve tvaru

$$\begin{aligned} f_1(x) &= C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}, \\ f_2(x) &= C_3 e^{\alpha_1 x} + C_4 e^{\alpha_2 x}, \end{aligned} \quad (375)$$

kde α_1, α_2 jsou kořeny charakteristické rovnice a C_1, C_2, C_3, C_4 konstanty. Ty je nutno v daném případě určit tak, aby se splnila podmínka $p_7 = 0$, když $q_1 > q_2$ (stav S_7 je totiž tehdy nevratný), anebo podmínka $p_6 = 0$ tehdy, když $q_1 < q_2$ (stav S_6 je v tomto případě rovněž nevratný). Současně je třeba respektovat podmínku

$$\sum_{i=0}^7 p_i = 1.$$

Při určování konstant $C_1, \dots, C_4$ je nutno rozlišovat mezi případy $q_1 > q_2$ a případem $q_1 < q_2$. Vztahy pro pravděpodobnosti p_i lze určit pro oba případy společně, proto je zjišťme nejdřív.

$Z(375)$ po integraci dostaneme

$$p_1 = C_1 \left[\frac{e^{z_1 x} Z^*}{\alpha_1} \right]_0 + C_2 \left[\frac{e^{z_2 x} Z^*}{\alpha_2} \right]_0,$$

a tedy

$$p_1 = C_1 \frac{e^{z_1 Z^*} - 1}{\alpha_1} + C_2 \frac{e^{z_2 Z^*} - 1}{\alpha_2} \quad (376)$$

a podobně

$$p_2 = C_3 \frac{e^{z_1 Z^*} - 1}{\alpha_1} + C_4 \frac{e^{z_2 Z^*} - 1}{\alpha_2}. \quad (377)$$

Ze vztahu (367) dostaneme, že pro p_3 (když $K = 0$) bude platit

$$p_3 = \frac{1}{\Delta q} (q_2 p_2 - q_1 p_1). \quad (378)$$

Ze soustavy algebraických rovnic (364) plynou vztahy pro další pravděpodobnosti stavů. Například jelikož pro f_0 platí

$$f_0 = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2), \quad (379)$$

bude p_0 rovno

$$p_0 = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2). \quad (380)$$

Pro pravděpodobnost p_6 po dosazení za p_4 a $f_3(Z^*)$ – zatím s $K \neq 0$ – dostáváme

$$\begin{aligned} p_6 &= \frac{q_1}{\lambda_2 q_1 + \lambda_1 q_2} (\lambda_2 p_6 + q_2 f_2(Z^*) + K) \Rightarrow \lambda_1 p_6 = \\ &= q_1 f_2(Z^*) + q_1 K. \end{aligned} \quad (381)$$

Aby se splnila okrajová podmínka, skutečně je nutno zvolit $K = 0$. Pak pro p_4 a p_6 platí:

$$\begin{aligned} p_4 &= \frac{q_1}{\mu_2 \lambda_1} [\lambda_2 f_2(Z^*) + \lambda_1 f_1(Z^*)], \\ p_6 &= \frac{q_1}{\lambda_1} f_2(Z^*). \end{aligned} \quad (382)$$

Podobně pro p_5 a p_7 se dá ukázat platnost vyjádření:

$$\begin{aligned} p_5 &= \frac{q_2}{\mu_1 \lambda_2} [\lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0)], \\ p_7 &= \frac{q_2}{\lambda_2} f_1(0). \end{aligned} \quad (383)$$

Limitní pravděpodobnosti stavů se tedy mohou psát pro $q_1 \neq q_2$ ve tvaru

$$\begin{aligned} p_1 &= C_1 \frac{e^{z_1 Z^*} - 1}{\alpha_1} + C_2 \frac{e^{z_2 Z^*} - 1}{\alpha_2}, \\ p_2 &= C_3 \frac{e^{z_1 Z^*} - 1}{\alpha_1} + C_4 \frac{e^{z_2 Z^*} - 1}{\alpha_2}, \\ p_3 &= \frac{1}{\Delta q} (q_2 p_2 - q_1 p_1), \\ p_0 &= \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2), \\ p_4 &= \frac{q_1}{\mu_2 \lambda_1} [\lambda_2 f_2(Z^*) + \lambda_1 f_1(Z^*)], \\ p_5 &= \frac{q_2}{\mu_1 \lambda_2} [\lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0)], \\ p_6 &= \frac{q_1}{\lambda_1} f_2(Z^*), \\ p_7 &= \frac{q_2}{\lambda_2} f_1(0). \end{aligned} \quad (384)$$

Při tom pro $f_1(0), f_2(0), f_1(Z^*), f_2(Z^*)$ podle (375) platí

$$\begin{aligned} f_1(0) &= C_1 + C_2, \\ f_2(0) &= C_3 + C_4; \\ f_1(Z^*) &= C_1 e^{q_1 Z^*} + C_2 e^{q_2 Z^*}, \\ f_2(Z^*) &= C_3 e^{q_1 Z^*} + C_4 e^{q_2 Z^*}. \end{aligned} \quad (385)$$

Konstanty C_1, C_2, C_3, C_4 , které vystupují ve vztazích pro limitní pravděpodobnosti stavů, je nutno určit pro každý z případů $q_1 > q_2$ a $q_1 < q_2$ zvlášť.

6.2.1. Určení konstant pro $q_1 > q_2$

Je-li $q_1 > q_2$, pak – jak už bylo uvedeno – je nutno C_1, C_2, C_3, C_4 určit tak, aby se splnily podmínky

$$p_7 = 0, \quad \sum_{i=0}^7 p_i = 1.$$

Jelikož

$$p_7 = \frac{q_2}{\lambda_2} f_1(0),$$

dostaneme

$$f_1(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1,$$

a tedy

$$f_1(x) = C_1 e^{q_1 x} - C_2 e^{q_2 x}. \quad (386)$$

Pro $f_2(x)$ platí

$$f_2(x) = C_3 e^{q_1 x} + C_4 e^{q_2 x}. \quad (387)$$

Dosazením do soustavy diferenciálních rovnic (369) dostaneme

$$\begin{aligned} C_1 q_1 e^{q_1 x} - C_1 q_2 e^{q_2 x} &= -\lambda(C_1 e^{q_1 x} - C_1 e^{q_2 x}) + \\ &+ \lambda(C_3 e^{q_1 x} + C_4 e^{q_2 x}), \\ C_3 q_1 e^{q_1 x} + C_4 q_2 e^{q_2 x} &= s(C_1 e^{q_1 x} - C_1 e^{q_2 x}) - \\ &- \nu(C_3 e^{q_1 x} + C_4 e^{q_2 x}). \end{aligned}$$

Dosadíme-li za $x = 0$, dostaneme soustavu dvou rovnic, ze kterých se dá

vyjádřit C_3, C_4 (s použitím C_1):

$$\begin{aligned} C_1(\alpha_1 - \alpha_2) - \lambda(C_3 + C_4) &= 0, \\ -C_3(\nu + \alpha_1) - C_4(\nu + \alpha_2) &= 0. \end{aligned}$$

Odtud

$$C_3 = -C_4 \frac{\nu + \alpha_2}{\nu + \alpha_1}, \quad (388)$$

$$C_4 = C_1 \frac{\nu + \alpha_1}{r}. \quad (389)$$

a po dosazení do (388)

$$C_3 = -C_1 \frac{\nu + \alpha_2}{r}.$$

Konstanty C_2, C_3, C_4 se tedy dají vyjádřit s použitím C_1 následovně:

$$C_2 = -C_1, \quad C_3 = -C_1 \frac{\nu + \alpha_2}{r}, \quad C_4 = C_1 \frac{\nu + \alpha_1}{r}. \quad (390)$$

Z podmínky $\sum p_i = 1$, která představuje normující podmínku pro výpočet konstant, lze pak vyjádřit C_1 . Do normující podmínky dosadíme za $p_0, p_1, \dots, p_7$ vztahy podle (384). Dostaneme

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \frac{1}{\Delta q} (q_2 p_2 - q_1 p_1) + \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) + \\ + \frac{q_1}{\mu_2 \lambda_1} [\lambda_1 f_1(Z^*) + \lambda_2 f_2(Z^*)] + \frac{q_1}{\lambda_1} f_2(Z^*) + \\ + \frac{q_2}{\mu_1 \lambda_2} [\lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0)] = 1. \end{aligned} \quad (391)$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} p_1 \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{q_1}{\Delta q} \right) + p_2 \left(1 + \frac{\lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{q_2}{\Delta q} \right) + \\ + f_2(Z^*) \left(\frac{q_1 \lambda_2}{\mu_2 \lambda_1} + \frac{q_1}{\lambda_1} \right) + \\ + \frac{q_1}{\mu_2} f_1(Z^*) + \frac{q_2}{\mu_1} f_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Po dosazení za $p_1, p_2, f_1(Z^*), f_2(Z^*)$ a $f_2(0)$ dostaneme

$$\begin{aligned} & \left(C_1 \frac{e^{q_1 Z^*} - 1}{a_1} - C_1 \frac{e^{q_2 Z^*} - 1}{a_2} \right) \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{q_1}{\Delta q} \right) + \\ & + \left(-C_1 \frac{v + a_2}{r} e^{q_1 Z^*} - \frac{1}{a_1} + C_1 \frac{v + a_1}{r} e^{q_2 Z^*} - \frac{1}{a_2} \right) \cdot \\ & \cdot \left(1 + \frac{\lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{q_2}{\Delta q} \right) + \\ & + \left(-C_1 \frac{v + a_2}{r} e^{q_1 Z^*} + C_1 \frac{v + a_1}{r} e^{q_2 Z^*} \right) \frac{q_1}{\lambda_1} \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \\ & + \frac{q_1}{\mu_2} (C_1 e^{q_1 Z^*} - C_1 e^{q_2 Z^*}) + \frac{q_2}{\mu_1} \left(-C_1 \frac{v + a_2}{r} + C_1 \frac{v + a_1}{r} \right) = 1 \end{aligned} \quad (392)$$

a z toho po úpravě vyjádříme $1/C_1$ ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} &= e^{q_1 Z^*} \left[\frac{1}{a_1} A - \frac{v + a_2}{r a_1} B - \frac{v + a_2}{r} C + \frac{q_1}{\mu_2} \right] + \\ &+ e^{q_2 Z^*} \left[-\frac{1}{a_2} A + \frac{v + a_1}{r a_2} B + \frac{v + a_1}{r} C - \frac{q_1}{\mu_2} \right] + \\ &+ \left(-\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) A + \left(\frac{v + a_2}{r a_1} - \frac{v + a_1}{r a_2} \right) B + \\ &+ \frac{q_2}{\mu_1} \left(-\frac{v + a_2}{r} + \frac{v + a_1}{r} \right), \end{aligned} \quad (393)$$

kde pro A, B, C platí

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{q_1}{\Delta q}, \\ B &= \frac{\mu_1 + \mu_2 + \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{q_2}{\Delta q}, \\ C &= \frac{q_1}{\lambda_1} \frac{\lambda_2}{\mu_2}. \end{aligned} \quad (394)$$

Tím se při $q_1 > q_2$ určily vztahy pro výpočet konstant C_1, C_2, C_3, C_4 .

6.2.2 Určení konstant pro $q_1 < q_2$

Je-li $q_1 < q_2$, pak se konstanty $C_1, \dots, C_4$ stanoví tak, aby se splnila podmínka

$$p_6 = 0 \quad (395)$$

a normující podmínka

$$\sum_{i=0}^7 p_i = 1. \quad (396)$$

Jelikož $p_6 = (q_1/\lambda_1)f_3(Z^*)$, musí platit

$$f_2(Z^*) = 0.$$

To znamená, že

$$C_3 e^{q_1 Z^*} + C_4 e^{q_2 Z^*} = 0.$$

Odtud dostaneme

$$C_4 = -C_3 e^{(q_1 - q_2)Z^*},$$

a tedy $f_2(x)$ lze zapsat ve tvaru

$$f_2(x) = C_3 e^{q_1 x} - C_3 e^{q_2 x} e^{(q_1 - q_2)Z^*}. \quad (397)$$

Dosazením $f_1(x), f_2(x)$ do soustavy diferenciálních rovnic (369) dostaneme

$$\begin{aligned} C_1 a_1 e^{q_1 x} + C_2 a_2 e^{q_2 x} &= -h(C_1 e^{q_1 x} + C_2 e^{q_2 x}) + \\ &+ r(C_3 e^{q_1 x} - C_3 e^{q_2 x} e^{(q_1 - q_2)Z^*}), \\ C_3 a_1 e^{q_1 x} - C_3 a_2 e^{(q_1 - q_2)Z^*} e^{q_2 x} &= s(C_1 e^{q_1 x} + C_2 e^{q_2 x}) - \\ &- v(C_3 e^{q_1 x} - C_3 e^{q_2 x} e^{(q_1 - q_2)Z^*}). \end{aligned}$$

Pro $x = Z^*$ po úpravě plyne

$$C_1 a_1 e^{q_1 Z^*} + C_2 a_2 e^{q_2 Z^*} = -\frac{h}{s} C_3 (a_1 - a_2) e^{q_1 Z^*},$$

$$s C_1 e^{q_1 Z^*} + s C_2 e^{q_2 Z^*} = C_3 (a_1 - a_2) e^{q_1 Z^*} \quad (398)$$

a C_1, C_2 vyjádřené prostřednictvím C_3 mají tvar

$$C_1 = -C_3 \frac{h + a_2}{s}, \quad C_2 = C_3 \frac{h + a_1}{s} e^{(q_1 - q_2)Z^*}.$$

Pro konstanty C_1, C_2, C_4 tedy platí

$$C_1 = -C_3 \frac{h + \alpha_2}{s}, \quad C_2 = C_3 \frac{h + \alpha_1}{s} e^{(\alpha_1 - \alpha_2)Z^*},$$

$$C_4 = -C_3 e^{(\alpha_1 - \alpha_2)Z^*}.$$

(399)

C_3 stanovíme s ohledem na normující podmínku, tedy z výrazu

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \frac{1}{\Delta q} (q_2 p_2 - q_1 p_1) + \frac{q_2}{\lambda_2} f_1(0) + \\ + \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) + \frac{q_1}{\mu_2 \lambda_1} [\lambda_2 f_2(Z^*) + \lambda_1 f_1(Z^*)] + \\ + \frac{q_2}{\mu_1 \lambda_2} [\lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0)] = 1. \end{aligned} \quad (400)$$

Po úpravě a dosazení za $p_1, p_2, f_1(0), f_2(0), f_1(Z^*), f_2(Z^*)$ máme

$$\begin{aligned} & \left(-C_3 \frac{h + \alpha_2}{s} e^{Z^*} - \frac{1}{\alpha_1} + C_3 \frac{h + \alpha_1}{s} e^{(\alpha_1 - \alpha_2)Z^*} e^{Z^*} - \frac{1}{\alpha_2} \right) \cdot \\ & \cdot \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{q_1}{\Delta q} \right) + \left(C_3 \frac{e^{Z^*} - 1}{\alpha_1} - C_3 \frac{e^{(\alpha_1 - \alpha_2)Z^*} e^{Z^*} - 1}{\alpha_2} \right) \cdot \\ & \cdot \left(1 + \frac{\lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{q_2}{\Delta q} \right) + \frac{q_1}{\mu_2} \left(-C_3 \frac{h + \alpha_2}{s} e^{Z^*} + \right. \\ & \left. + C_3 \frac{h + \alpha_1}{s} e^{(\alpha_1 - \alpha_2)Z^*} e^{Z^*} \right) + \frac{q_2}{\mu_1} (C_3 - C_3 e^{(\alpha_1 - \alpha_2)Z^*}) + \\ & + \frac{q_2}{\lambda_2} \frac{\mu_1 + \lambda_1}{\mu_1} \left(-C_3 \frac{h + \alpha_2}{s} + C_3 \frac{h + \alpha_1}{s} e^{(\alpha_1 - \alpha_2)Z^*} \right) = 1. \end{aligned}$$

Nakonec po úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_3} = e^{Z^*} & \left[\left(-\frac{h + \alpha_2}{s \alpha_1} + \frac{h + \alpha_1}{s \alpha_2} \right) A' + \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) B' + \right. \\ & \left. + \frac{q_1}{\mu_2} \left(-\frac{h + \alpha_2}{s} + \frac{h + \alpha_1}{s} \right) \right] + \\ & + e^{(\alpha_1 - \alpha_2)Z^*} \left[-\frac{h + \alpha_1}{s \alpha_2} A' + \frac{1}{\alpha_2} B' + \frac{h + \alpha_1}{s} C' - \frac{q_2}{\mu_1} \right] + \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{h + \alpha_2}{s \alpha_1} A' - \frac{1}{\alpha_1} B' - \frac{h + \alpha_2}{s} C' + \frac{q_2}{\mu_1} \right], \quad (401)$$

kde

$$A' = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{q_1}{\Delta q} = A,$$

$$B' = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{q_2}{\Delta q} = B, \quad (402)$$

$$C' = \frac{q_2 \lambda_1 + \mu_1}{\lambda_2 \mu_1}.$$

Tím jsme určili vztahy pro výpočet konstant C_1, C_2, C_3, C_4 při $q_1 < q_2$.

6.3 STANOVENÍ ZÁKLADNÍCH CHARAKTERISTIK JEDNODUCHÉ LINKY

Zatím jsme naznačili, jakým způsobem se pro jednoduchou linku při $q_1 \neq q_2$ stanoví limitní pravděpodobnosti stavů p_i . Vzhledem k tomu, že každá tato pravděpodobnost znamená vlastně střední dobu setrvání příslušného systému S ve stavu S_i (ve stacionárním režimu), lze s využitím těchto pravděpodobností zjistit například poměrnou střední dobu bezporuchového provozu (součinitel pohotovosti K_p) pomalejšího z obou automatů i součinitel vlastních prostojů K_{pr} i prostojů čekáním $\bar{K}_{pr}$. Tyto veličiny lze přisoudit celé lince.

Součinitele pohotovosti K_p a prostojů K_{pr} této linky se stanoví takto:

a) Při $q_1 > q_2$ je

$$K_p = p_2 + p_3 + p_6, \quad (403)$$

a to vzhledem k tomu, že automat A_2 pracuje, když je systém S ve stavu S_2, S_3 anebo S_6 .

Pro součinitele prostojů platí

$$K_{pr} = 1 - K_p \quad (404)$$

nebo též

$$K_{pr} = \bar{K}_{pr} + \bar{K}_{pr} = p_0 + p_1 + p_4 + p_5, \quad (405)$$

jelikož

$$\bar{K}_{pr} = p_0 + p_1 + p_4, \quad (406)$$

$$\bar{K}_{pr} = p_5. \quad (407)$$

Platnost vztahů (406) a (407) vyplývá ze skutečnosti, že A_2 nepracuje, čeká na obnovení provozuschopnosti ve stavech S_0, S_1, S_4 (vlastní prostoje $\bar{K}_{pr}$) a ve stavu S_5 nemůže pracovat, i když je provozuschopný; čeká na obnovení provozuschopnosti automatu A_1 (prostoje čekáním $\bar{K}_{pr}$).

b) Pro $q_1 < q_2$ bude podobně platit

$$K_p = p_1 + p_3 + p_7, \quad (408)$$

protože automat A_1 pracuje, když je systém S ve stavu S_1, S_3 nebo S_7 . Pro K_{pr} platí

$$K_{pr} = \bar{K}_{pr} + \bar{K}_{pr} = p_0 + p_2 + p_4 + p_5, \quad (409)$$

poněvadž

$$\bar{K}_{pr} = p_0 + p_2 + p_5 \quad \text{a} \quad \bar{K}_{pr} = p_4.$$

Pro skutečnou výkonnost q_s dané linky pak platí

$$q_s = K_p \min(q_1, q_2). \quad (410)$$

Postup, jímž se v obou případech zjistí nejdříve limitní pravděpodobnosti stavů a pak hodnoty součinitelů K_p a K_{pr} i skutečná výkonnost q_s dané linky, lze stručně shrnout následovně:

1. Pomocí známých hodnot $Z^*, \lambda_i, \mu_i, q_i$ ($i = 1, 2$) a $\Delta q = q_1 - q_2$ se nejdříve stanoví hodnoty h, v, s, r , pro které platí

$$h = \frac{1}{q_1} \left[\lambda_2 \frac{q_1}{\Delta q} + \frac{\mu_2(\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1)}{\mu_1 + \mu_2} \right],$$

$$v = \frac{1}{q_2} \left[\lambda_1 \frac{q_2}{\Delta q} - \frac{\mu_1(\mu_1 + \mu_2 + \lambda_2)}{\mu_1 + \mu_2} \right],$$

$$s = \frac{1}{q_2} \left[\lambda_1 \frac{q_1}{\Delta q} - \frac{\mu_2 \lambda_1}{\mu_1 + \mu_2} \right],$$

$$r = \frac{1}{q_1} \left[\lambda_2 \frac{q_2}{\Delta q} + \frac{\mu_1 \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} \right].$$

2. Hodnoty α_1, α_2 se zjistí podle vztahu

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(h+v) \pm \sqrt{[(h+v)^2 - 4(hv-rs)]}}{2}.$$

3. S využitím výsledků kroků 1, 2 se pak vypočítají konstanty ze vztahů pro limitní pravděpodobnosti stavů, a to

a) pro $q_1 > q_2$ podle vztahů

$$C_2 = -C_1, \quad C_3 = -\frac{v + \alpha_2}{r} C_1, \quad C_4 = \frac{v + \alpha_1}{r} C_1,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_1} = & e^{\alpha_1 Z^*} \left[\frac{1}{\alpha_1} A - \frac{v + \alpha_2}{r \alpha_1} B - \frac{v + \alpha_2}{r} C + \frac{q_1}{\mu_2} \right] + \\ & + e^{\alpha_2 Z^*} \left[-\frac{1}{\alpha_2} A + \frac{v + \alpha_1}{r \alpha_2} B + \frac{v + \alpha_1}{r} C - \frac{q_1}{\mu_2} \right] + \\ & + \left(-\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) A + \left(\frac{v + \alpha_2}{r \alpha_1} - \frac{v + \alpha_1}{r \alpha_2} \right) B + \\ & + \frac{q_2}{\mu_1} \left(-\frac{v + \alpha_2}{r} + \frac{v + \alpha_1}{r} \right), \end{aligned}$$

kde pro A, B, C platí

$$A = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{q_1}{\Delta q},$$

$$B = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{q_2}{\Delta q},$$

$$C = \frac{q_1 \lambda_2 + \mu_2}{\lambda_1 \mu_2};$$

b) pro $q_1 < q_2$ podle vztahů

$$C_1 = -C_3 \frac{h + \alpha_2}{s}, \quad C_2 = C_3 \frac{h + \alpha_1}{s} e^{\alpha_1 - \alpha_2} Z^*,$$

$$C_4 = -C_3 e^{\alpha_1 - \alpha_2} Z^*,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_3} = & e^{\alpha_1 Z^*} \left[\left(-\frac{h + \alpha_2}{s \alpha_1} + \frac{h + \alpha_1}{s \alpha_2} \right) A' + \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) B' + \right. \\ & + \left. \frac{q_1}{\mu_2} \left(-\frac{h + \alpha_2}{s} + \frac{h + \alpha_1}{s} \right) \right] + \\ & + e^{\alpha_2 Z^*} \left[-\frac{h + \alpha_1}{s \alpha_2} A' + \frac{1}{\alpha_2} B' + \frac{h + \alpha_1}{s} C' - \frac{q_2}{\mu_1} \right] + \\ & + \frac{h + \alpha_2}{s \alpha_1} A' - \frac{1}{\alpha_1} B' - \frac{h + \alpha_2}{s} C' + \frac{q_2}{\mu_1}, \end{aligned}$$

$$A' = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{q_1}{\Delta q} = A,$$

$$B' = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{q_2}{\Delta q} = B,$$

$$C' = \frac{q_2 \lambda_1 + \mu_1}{\lambda_2 \mu_1}.$$

4. Pak se stanoví limitní pravděpodobnosti stavů podle vztahů

$$p_1 = \frac{C_1}{a_1} (e^{a_1 Z^*} - 1) + \frac{C_2}{a_2} (e^{a_2 Z^*} - 1),$$

$$p_2 = \frac{C_3}{a_1} (e^{a_1 Z^*} - 1) + \frac{C_4}{a_2} (e^{a_2 Z^*} - 1),$$

$$p_3 = \frac{1}{\Delta q} (q_2 p_2 - q_1 p_1),$$

$$p_0 = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2),$$

$$p_4 = \frac{q_1}{\mu_2 \lambda_1} [\lambda_2 f_2(Z^*) + \lambda_1 f_1(Z^*)],$$

$$p_5 = \frac{q_2}{\mu_1 \lambda_2} [\lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0)],$$

$$p_6 = \frac{q_1}{\lambda_1} f_2(Z^*),$$

$$p_7 = \frac{q_2}{\lambda_2} f_1(0),$$

kde

$$f_1(Z^*) = C_1 e^{a_1 Z^*} + C_2 e^{a_2 Z^*}, \quad f_2(Z^*) = C_3 e^{a_1 Z^*} + C_4 e^{a_2 Z^*},$$

$$f_1(0) = C_1 + C_2, \quad f_2(0) = C_3 + C_4.$$

5. S využitím výsledků z bodu 4 se pak pro danou linku zjistí hodnoty, K_p a K_{pr} podle vztahů

a) pro $q_1 > q_2$

$$K_p = p_2 + p_3 + p_6, \quad K_{pr} = \bar{K}_{pr} + \bar{K}_{pr},$$

kde

$$\bar{K}_{pr} = p_0 + p_1 + p_4, \quad \bar{K}_{pr} = p_5;$$

b) pro $q_1 < q_2$

$$K_p = p_1 + p_3 + p_7, \quad K_{pr} = \bar{K}_{pr} + \bar{K}_{pr},$$

kde

$$\bar{K}_{pr} = p_0 + p_2 + p_5, \quad \bar{K}_{pr} = p_4.$$

6. Nakonec se zjistí skutečná výkonnost q_s dané linky podle vztahu

$$q_s = K_p \min(q_1, q_2).$$

Příklad 16:

Mějme jednoduchou automatickou linku, tvořenou dvěma automaty A_1, A_2 a meziperačním zásobníkem Z . Je dáno $\lambda_1 = 1 \text{ h}^{-1}$, $\mu_1 = 60 \text{ h}^{-1}$, $q_1 = 360 \text{ ks h}^{-1}$, $\lambda_2 = 0,8 \text{ h}^{-1}$, $\mu_2 = 60 \text{ h}^{-1}$, $q_2 = 300 \text{ ks h}^{-1}$. Stanovte provozní vlastnosti celé linky, tzn. součinitel pohotovosti K_p a součinitel prostoje K_{pr} pro a) $Z^* = 2 \text{ ks}$, b) $Z^* = 20 \text{ ks}$, c) $Z^* = 100 \text{ ks}$.

Řešení: Ze zadání úlohy je zřejmé, že $q_1 > q_2$, proto konstanty C_1, C_2, C_3, C_4 stanovíme podle čl. 6.2.1. Nejprve je ovšem nutno stanovit konstanty h, v, s, r, a_1, a_2 podle (374), (372), (373). Postupně dostaneme

$$\Delta q = q_1 - q_2 = 60,$$

$$h = \frac{1}{q_1} \left[\frac{\mu_2(\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1)}{\mu_1 + \mu_2} + \lambda_2 \frac{q_1}{\Delta q} \right] =$$

$$= \frac{1}{360} \left[\frac{60 \cdot 121}{120} + 0,8 \frac{360}{60} \right] = 0,181389,$$

$$v = \frac{1}{300} \left[1 \frac{300}{60} - \frac{60 \cdot 120,8}{120} \right] = -0,184667,$$

$$s = \frac{1}{300} \left[1 \frac{360}{60} - \frac{60 \cdot 1}{120} \right] = 0,018333,$$

$$r = \frac{1}{360} \left[0,8 \frac{300}{60} + \frac{60 \cdot 0,8}{120} \right] = 0,012222,$$

$$x_1 = \frac{-(h+v) \pm \sqrt{[(h+v)^2 - 4(hv - rs)]}}{2} = 0,185\,278,$$

$$x_2 = -(x_1 + h + v) = -0,182\,000.$$

a) $Z^* = 2$ ks

Po dosazení do (393) dostáváme

$$C_1 = 0,000\,060\,778\,108.$$

Odtud podle (390)

$$C_2 = -C_1 = -0,000\,060\,778\,108,$$

$$C_3 = -C_1 \frac{v + x_2}{r} = 0,001\,823\,343,$$

$$C_4 = C_1 \frac{v + x_1}{r} = 0,000\,003\,038\,905.$$

Pro výpočet limitních pravděpodobností použijeme vztahů (384). Postupně platí

$$p_1 = 0,000\,045, \quad p_4 = 0,012\,963,$$

$$p_2 = 0,004\,419, \quad p_5 = 0,009\,132,$$

$$p_3 = 0,021\,825, \quad p_6 = 0,951\,586,$$

$$p_0 = 0,000\,030, \quad p_7 = 0.$$

Pro součinitel pohotovosti K_p automatu A_2 podle (403) dostaneme

$$K_p = p_2 + p_3 + p_6 = 0,977\,830$$

a pro prostoje

$$K_{pr} = p_0 + p_1 + p_4 + p_5 = 0,022\,170,$$

přičemž vlastní prostoje

$$\bar{K}_{pr} = p_0 + p_1 + p_4 = 0,013\,038$$

a čekání

$$\bar{K}_{pr} = p_5 = 0,009\,132.$$

b), c) Výpočty pro $Z^* = 20$ ks, $Z^* = 100$ ks jsou uspořádány v tab.

22. Souhrnné výsledky obsahuje tab. 23. Jsou v ní obsaženy pro srovnání rovněž výsledky stochastické simulace ekvivalentních linek. Simulace byla ukončena při 3000 provozních hodin.

Tab. 22. Výsledky výpočtů konstant $C_1, \dots, C_4$ a limitních pravděpodobností pro $Z^* = 20$ ks, $Z^* = 100$ ks

Z^* (ks)	20	100
C_1	0,000 002 070 133	$0,755\,266 \cdot 10^{-12}$
C_2	-0,000 002 070 133	$-0,755\,266 \cdot 10^{-12}$
C_3	0,000 062 103 987	$0,226\,580 \cdot 10^{-10}$
C_4	0,000 000 103 507	$0,377\,633 \cdot 10^{-13}$
p_1	0,000 432	0,000 454
p_2	0,013 299	0,013 612
p_3	0,063 900	0,065 336
p_4	0,012 629	0,012 609
p_0	0,000 092	0,000 094
p_5	0,000 311	0,000 000
p_6	0,909 337	0,907 895
p_7	0	0

Tab. 23. Srovnání součinitelů K_p , $\bar{K}_{pr}$, $\bar{K}_{pr}$ zjištěných dvěma způsoby (k příkladu 16)

	Markovovy procesy			Stochastická simulace		
	a	b	c	a	b	c
K_p	0,977 830	0,986 536	0,986 843	0,975 67	0,986 01	0,986 38
$\bar{K}_{pr}$	0,013 038	0,013 153	0,013 157	0,013 71	0,013 71	0,013 71
$\bar{K}_{pr}$	0,009 132	0,000 311	0,000 000	0,010 74	0,000 37	0,000 00
Σ	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 12	1,000 09	1,000 09

Příklad 17:

Jednoduchá automatická linka, složená ze dvou automatů A_1 , A_2 a mezioperačního zásobníku Z , je charakterizována následujícími parametry: $\lambda_1 = 1\text{ h}^{-1}$, $\mu_1 = 60\text{ h}^{-1}$, $q_1 = 300\text{ ks h}^{-1}$, $\lambda_2 = 0,8\text{ h}^{-1}$, $\mu_2 = 60\text{ h}^{-1}$, $q_2 = 360\text{ ks h}^{-1}$, $Z^* = 2$ ks. Stanovte provozní vlastnosti linky.

Řešení:

S využitím vztahů (374), (372), (373) postupně dostaneme

$$\Delta q = q_1 - q_2 = -60,$$

$$h = 0,188\,333, \quad v = -0,184\,444,$$

$$s = -0,015\,278, \quad r = -0,014\,667, \\ \alpha_1 = 0,185\,045, \quad \alpha_2 = -0,188\,933.$$

Vzhledem k tomu, že $q_1 < q_2$, postupujeme dále podle čl. 6.2.2, tj. podle vztahů (401) a (399). Platí

$$C_3 = -0,000\,041\,092\,365, \quad C_1 = 0,000\,001\,614\,150, \\ C_2 = 0,002\,121\,694\,044, \quad C_4 = 0,000\,086\,814\,913.$$

Všechny vypočtené konstanty dosadíme do vztahů (384) pro výpočet limitních pravděpodobností linky:

$$p_1 = 0,003\,538, \quad p_2 = 0,000\,045, \quad p_3 = 0,017\,418, \\ p_0 = 0,000\,030, \quad p_4 = 0,007\,282, \quad p_5 = 0,016\,199, \\ p_6 = 0, \quad p_7 = 0,955\,489,$$

Součinitel pohotovosti K_p i součinitel prostojů $K_{pr} = \bar{K}_{pr} + \bar{K}_{pr}$ pro automat A_1 dostaneme z (408) a (409). Výsledky jsou uvedeny v tab. 24.

Tab. 24. Srovnání součinitelů K_p , $\bar{K}_{pr}$, $\bar{K}_{pr}$ zjištěných itémi způsoby (k příkladu 17)

	Markovovy procesy	Markovovy řetězce	Stochastické simulace
K_p	0,976 445	0,975 238	0,974 69
$\bar{K}_{pr}$	0,016 274	0,016 282	0,016 29
$\bar{K}_{pr}$	0,007 282	0,008 466	0,009 16
Σ	1,000 001	0,999 986	1,000 14

Pro srovnání obsahuje tabulka i výpočet součinitelů s využitím metodiky Markovových řetězců (viz příklad v [20]) a výsledky stochastické simulace (3 000 h).

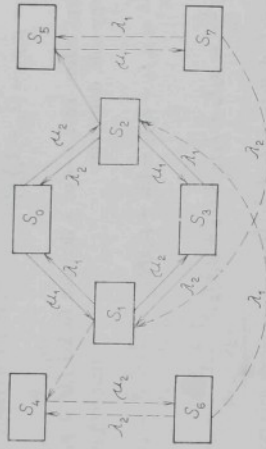
6.4 MATEMATICKÝ MODEL LINKY PRO $q_1 = q_2$

6.4.1 Odvození modelu

Uvažujeme pružnou linku, složenou z automatů A_1 , A_2 o stejném výkonu $q_1 = q_2 = q$ a ze zásobníku Z. Necht intenzity poruch a obnov automatů A_1 , A_2 jsou λ_1 , μ_1 , λ_2 , μ_2 a kapacita zásobníku Z je Z^* . Na tuto

linku zřejmě lze nahlížet jako na jistý systém S , ve kterém probíhá náhodný proces. Splní-li se podmínky 1 až 4, stejně jako v případě $q_1 \neq q_2$, lze ho považovat za spojitý Markovův proces. Některé stavy, do kterých se v jeho průběhu systém S dostane, a přechody mezi nimi se však čístečně liší od případu $q_1 \neq q_2$. Proto upozorníme na existující rozdíly. Stavů, ve kterých systém S může v tomto případě setrvat, opět označíme $S_0, \dots, S_7$.

Ve stavu S_3 , ve kterém oba automaty pracují, je zásobník Z čístečně zaplněn a velikost zásoby se nemění. Je totiž $q_1 = q_2$, a tedy $\Delta q = 0$. Ve stavu S_6 i S_7 pracují oba automaty s plným využitím, a proto tyto stavy nejsou nevratné. Zhývajících odlišností od případu $q_1 \neq q_2$ jsou zřejmé



Obr. 48. Přechody mezi stavy jednoduché linky (pro $q_1 = q_2$)

z grafu stavů, který má tvar podle obr. 48. Podle grafu lze sestavit okrajové podmínky ve tvaru

$$\lambda_1 p_6 = q f_2(Z^*); \quad \lambda_2 p_7 = q f_1(0)$$

a soustavu Kolmogorových diferenciálních rovnic:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + q \frac{\partial f_1}{\partial x} = \mu_1 f_0 + \lambda_2 f_3 - (\lambda_1 + \mu_2) f_1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} - q \frac{\partial f_2}{\partial x} = \mu_2 f_0 + \lambda_1 f_3 - (\lambda_2 + \mu_1) f_2,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial t} = \mu_2 f_1 + \mu_1 f_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) f_3,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_0}{\partial t} &= \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 - (\mu_1 + \mu_2) f_0, \\
\frac{\partial p_4}{\partial t} &= \lambda_2 p_6 + q f_1(Z^*) - \mu_2 p_4, \\
\frac{dp_5}{dt} &= \lambda_1 p_7 + q f_2(0) - \mu_1 p_5, \\
\frac{dp_6}{dt} &= \mu_2 p_4 - (\lambda_1 + \lambda_2) p_6, \\
\frac{dp_7}{dt} &= \mu_1 p_5 - (\lambda_1 + \lambda_2) p_7.
\end{aligned}
\tag{411}$$

Pro stacionární režim, když $t \rightarrow \infty$ a derivace funkcí $f(t)$ a $p(t)$ podle času jsou rovny nule, dostaneme

$$\begin{aligned}
q \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \mu_1 f_0 + \lambda_2 f_3 - (\lambda_1 + \mu_2) f_1, \\
-q \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \mu_2 f_0 + \lambda_1 f_3 - (\lambda_2 + \mu_1) f_2, \\
0 &= \mu_2 f_1 + \mu_1 f_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) f_3, \\
0 &= \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 - (\mu_1 + \mu_2) f_0, \\
0 &= \lambda_2 p_6 + q f_1(Z^*) - \mu_2 p_4, \\
0 &= \lambda_1 p_7 + q f_2(0) - \mu_1 p_5, \\
0 &= \mu_2 p_4 - (\lambda_1 + \lambda_2) p_6, \\
0 &= \mu_1 p_5 - (\lambda_1 + \lambda_2) p_7.
\end{aligned}
\tag{412}$$

Tím byl sestaven matematický model linky, jejíž automaty mají stejný výkon q .

6.4.2 Limitní pravděpodobnosti stavů a základní charakteristiky linky

Ze soustavy (412) nejdřív zjistíme vztahy pro limitní pravděpodobnosti stavů a spolehlivostní charakteristiky dané linky. Z třetí a čtvrté

rovnice této soustavy dostaneme

$$\begin{aligned}
f_3 &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} (\mu_2 f_1 + \mu_1 f_2), \\
f_0 &= \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2).
\end{aligned}$$

Sečtením 5. a 7. rovnice ze soustavy (412) dostaneme pro p_6

$$p_6 = \frac{q}{\lambda_1} f_1(Z^*)$$

a podobně součet 6. a 8. rovnice soustavy je

$$p_7 = \frac{q}{\lambda_2} f_2(0).$$

Pro p_4 a p_5 pak platí:

$$\begin{aligned}
p_4 &= \frac{q}{\mu_2} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1} f_1(Z^*), \\
p_5 &= \frac{q}{\mu_1} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} f_2(0).
\end{aligned}$$

Sečtením prvních dvou rovnic a dosazením za f_0 dostaneme

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0. \tag{413}$$

Odtud

$$f_2 = f_1 + K.$$

Pro p_6 a p_7 jsme však dostali, že platí

$$\lambda_1 p_6 = q f_1(Z^*), \quad \lambda_2 p_7 = q f_2(0)$$

a vzhledem k okrajovým podmínkám musí platit

$$\lambda_1 p_6 = q f_2(Z^*), \quad \lambda_2 p_7 = q f_1(0).$$

Odtud vyplývá, že má být

$$f_1(Z^*) = f_2(Z^*), \quad f_1(0) = f_2(0) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x),$$

a tedy integrační konstanta K se musí zvolit rovna nule.

Po dosazení do 1. rovnice soustavy (412) za f_0 , f_3 a $f_2 = f_1$ dostaneme

po úpravě jedinou diferenciální rovnici tvaru

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2}{q(\mu_1 + \mu_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} (-\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) f_1. \quad (414)$$

Ornačime-li součinitel u f_1 například α , pak řešení diferenciální rovnice

$$\frac{df_1}{dx} = \alpha f_1 \quad (415)$$

dostáváme ve tvaru

$$f_1(x) = C e^{\alpha x}. \quad (416)$$

Přto $f_2(x)$ platí

$$f_2(x) = f_1(x) = C e^{\alpha x}. \quad (417)$$

Limitní pravděpodobnosti lze pak psát ve tvaru:

$$p_1 = \frac{C}{\alpha} (e^{\alpha Z^*} - 1),$$

$$p_2 = p_1,$$

$$p_3 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} p_1,$$

$$p_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} p_1,$$

$$p_4 = \frac{q}{\mu_2} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1} f_1(Z^*),$$

$$p_5 = \frac{q}{\mu_1} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} f_1(0),$$

$$p_6 = \frac{q}{\lambda_1} f_1(Z^*),$$

$$p_7 = \frac{q}{\lambda_2} f_1(0),$$

kde pro $f_1(Z^*)$ a $f_1(0)$ platí

$$f_1(Z^*) = C e^{\alpha Z^*}, \quad f_1(0) = C$$

a α se rovná

$$\alpha = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2}{q(\mu_1 + \mu_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} (-\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1). \quad (419)$$

Konstantu C určíme z normující podmínky

$$\sum_{i=0}^7 p_i = 1,$$

kterou lze zapsat ve tvaru

$$p_1 \left(2 + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) + f_1(Z^*) \frac{q}{\lambda_1} \left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2} \right) + f_1(0) \frac{q}{\lambda_2} \left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_1} \right) = 1.$$

Po dosazení za $p_1, f_1(Z^*), f_1(0)$ dostaneme pro konstantu C vyjádření

$$\frac{1}{C} = \frac{e^{\alpha Z^*} - 1}{\alpha} \left(2 + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) + e^{\alpha Z^*} \frac{q}{\lambda_1} \left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2} \right) + \frac{q}{\lambda_2} \left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_1} \right). \quad (420)$$

Ze známých limitních pravděpodobností stavů lze pak i v tomto případě pro stacionární režim zjistit hodnoty součinitelů K_p, K_{pr} například u automatu A_2 . Vzhledem k tomu, že A_2 je v provozu, když systém je ve stavu S_2, S_3, S_6 anebo S_7 , bude

$$K_p = p_2 + p_3 + p_6 + p_7. \quad (421)$$

Podobně se zjistí, že pro součinitel prostojů platí

$$K_{pr} = \bar{K}_{pr} + \bar{K}_{pr} = p_0 + p_1 + p_4 + p_5 \quad a \quad (422)$$

$$\bar{K}_{pr} = p_0 + p_1 + p_4, \quad \bar{K}_{pr} = p_5.$$

Tyto hodnoty lze přisoudit celé lince. Pro její skutečnou výkonnost q_s pak platí

$$q_s = K_p \cdot q. \quad (423)$$

Postup, kterým se zjistí nejdříve limitní pravděpodobnosti stavů a pak hodnoty součinitelů K_p, K_{pr} a skutečná výkonnost q_s celé linky, lze stručně shrnout takto:

1. S využitím známých hodnot Z^* , λ_i , μ_i ($i = 1, 2$) a q se nejprve zjistí hodnota z podle vztahu

$$\alpha = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2}{q(\mu_1 + \mu_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} (-\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1).$$

2. Konstanta C se určí podle vztahu

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\alpha} (e^{z^*} - 1) \left(2 + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) + e^{z^*} \cdot \frac{q}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2}{\lambda_2} + \frac{q}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1}{\mu_1}.$$

3. Limitní pravděpodobnosti stavů se zjistí podle vztahů

$$p_1 = \frac{C}{\alpha} (e^{z^*} - 1),$$

$$p_2 = p_1,$$

$$p_3 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} p_1,$$

$$p_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} p_1,$$

$$p_4 = \frac{q}{\mu_2} \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1} C e^{z^*},$$

$$p_5 = \frac{q}{\mu_1} \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} C,$$

$$p_6 = \frac{q}{\lambda_1} C e^{z^*},$$

$$p_7 = \frac{q}{\lambda_2} C.$$

4. Součinitele pohotovosti K_p a prostojů K_{pr} se určí podle vztahů

$$K_p = p_2 + p_3 + p_6 + p_7, \quad K_{pr} = p_0 + p_1 + p_4 + p_5.$$

5. Pro skutečnou výkonnost q_s dané linky nakonec platí

$$q_s = K_p q.$$

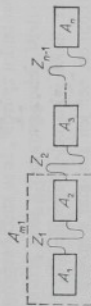
Matematický model jednoduché linky se zásobníkem, sestavený s použitím teorie Markovových procesů, a z něho určené limitní pravděpodobnosti stavů umožňují zjistit důležité ukazatele – součinitel pohotovosti K_p , součinitel prostojů K_{pr} a skutečnou výkonnost takové linky. Výpočet je v konkrétních případech zcela jednoduchý, je nutné pouze dosadit hodnoty základních parametrů linky λ_i , μ_i , q , $i = 1, 2$, Z^* do odvozených vztahů podle toho, který ze tří případů $q_1 > q_2$, $q_1 < q_2$, $q_1 = q_2$ se sleduje.

S použitím ukazatelů K_p , K_{pr} a q_s lze posoudit spolehlivost a výkonnost dané linky a hodnotit možnosti jejího využití v praxi. Toto hodnocení lze udělat již ve stadiu projekce, a zajistit tak realizaci varianty s nejvýhodnějšími parametry. Podobně jako u modelu sestaveného s využitím teorie Markovových řetězců lze i nyní zjistit optimální kapacitu zásobníku.

Model jednoduché linky je východiskem pro určení charakteristik linek složitějších typů.

6.5 MOŽNOSTI ZOBECNĚNÍ VYSLEDKŮ

Mějme linku, kterou lze schematicky znázornit uspořádáním podle obr. 49. Předpokládejme, že poruchy a obnovy, které ovlivňují provoz každého z automatů $A_1, A_2, \dots, A_n$, lze modelovat Markovovým



Obr. 49. Jednoduchá pružná automatická linka s vyznačeným náhradním automatem A_{n-1}

procesem. Příslušné intenzity poruch a obnov nechtějí jsou λ_i, μ_i ($i = 1, \dots, n$). Dejme tomu, že známe též teoretický výkon q_i ($i = 1, \dots, n$) každého z automatů $A_1, \dots, A_n$ a kapacity $Z_1^*, \dots, Z_{n-1}^*$ všech mezioperačních zásobníků $Z_1, \dots, Z_{n-1}$. Je potřebné stanovit pro linku z obr. 49 její skutečnou výkonnost q_s a činitele K_p , K_{pr} . Kdybychom chtěli využít teorii Markovových procesů analogickým způsobem jako pro jednoduchou linku (např. pro linku, kterou tvoří tři automaty a dva mezioperační zásobníky), zjistili bychom, že postup by byl značně zdlouhavý a obtížný. Množina stavů by se totiž musela zjišťovat výběrem ze 72 uspořádaných pětice čísel 0, 1, 2, ve kterých na prvních třech místech může být 0 nebo 1 a na 4. a 5. místě mohou být číselce 0, 1, anebo 2.

Proto se pro řešení naznačeného problému použije postup, kterým se zjistí charakteristiky linky z obr. 49 přibližně. Nejdříve se bude uvažovat jen první dvojice automatů a mezioperačním zásobníkem Z_1 a pro ni se jako pro jednoduchou linku zjistí charakteristiky K_p , K_{pr} a q_1 již popsaným postupem. Tato část linky se pak zamění jediným „náhradním“ automatem A_{m-1} , kterému je nutno přisoudit parametry λ_{m-1} , μ_{m-1} , q_{m-1} , tak aby to odpovídalo zmíněné záměně. Pak se zjistí K_p , K_{pr} (K_p , q_1) podle výše odvozených vztahů pro část linky, složenou z A_{m-1} a A_3 s mezioperačním zásobníkem Z_2 , a opět se celý tento úsek „zamění“ jediným automatem A_{m-2} . Tak se postupuje dál, až se stanoví charakteristiky pro linku složenou z náhradního automatu $A_{m,n-2}$ (kterým se nahradilo vlastně prvních $n-1$ automatů) a z automatu A_n s mezioperačním zásobníkem Z_{n-1} .

Jak však provést tuto záměnu, přesněji jak určit hodnoty parametrů λ_{m-1} , μ_{m-1} , q_{m-1} pro abstraktní automat A_{m-1} ? Víme, že pro pevnou linku bez zásobníků, složenou např. z automatů A_1 , A_2 s parametry λ_1 , μ_1 , λ_2 , μ_2 , q_1 , q_2 , lze intenzitu poruch a intenzitu obnov celé linky (λ , μ) určit následovně:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \mu = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}}. \quad (424)$$

U analogické pružné linky, složené z automatů A_1 , A_2 a ze zásobníku Z_1 o kapacitě Z_1^* , existence zásobníku způsobí, že se sníží bezprostřední vliv rychlejšího automatu na pomalejší, jehož parametry jsou pro celou linku rozhodující (v tom smyslu, že linka jako celek nemůže mít např. nižší intenzitu poruch ani vyšší výkonnost než její automat s nižším výkonem). To znamená, že se v uvažovaném případě sníží vliv automatu A_1 na A_2 , když $q_1 > q_2$, a automatu A_2 na A_1 , když $q_1 < q_2$. Toto snížení lze vyjádřit součinitelem, který označíme δ a nazveme součinitel přenosu zřídla. Je zřejmé, že pro něj bude platit $\delta \in (0, 1)$.

Když pak na uvažovanou pružnou linku budeme nahlížet jako na celek nebo ji nahradíme jediným automatem A_m , můžeme intenzitu poruch λ_m a intenzitu obnov μ_m automatu A_m určit vzhledem k platnosti (424) s použitím δ takto:

a) Jestliže $q_1 > q_2$, pak

$$\lambda_m = \lambda_2 + \delta \lambda_1, \quad \mu_m = \frac{\lambda_2 + \delta \lambda_1}{\frac{\lambda_2}{\mu_2} + \delta \frac{\lambda_1}{\mu_1}}. \quad (425)$$

b) Jestliže $q_1 < q_2$, pak

$$\lambda_m = \lambda_1 + \delta \lambda_2, \quad \mu_m = \frac{\lambda_1 + \delta \lambda_2}{\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \delta \frac{\lambda_2}{\mu_2}}. \quad (426)$$

Jak však zjistit δ ? Víme, že pro pevnou linku platí

$$K_p = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad K_{pr} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (427)$$

Pro jednoduchou linku se zásobníkem lze vypočítat K_p a K_{pr} s použitím limitních pravděpodobností stavů. Součinitel δ se pak určí tak, aby platilo

$$K_p = \frac{\mu_m}{\lambda_m + \mu_m} \quad \text{nebo} \quad K_{pr} = \frac{\lambda_m}{\lambda_m + \mu_m}. \quad (428)$$

Vzhledem k tomu, že pro λ_m a μ_m platí při $q_1 > q_2$ vztahy (425) a při $q_1 < q_2$ vztahy (426), je nutno rovněž při určování vztahů pro δ rozlišovat dva případy:

a) Jestliže $q_1 > q_2$, pak

$$K_{pr} = \frac{\lambda_2 + \delta \lambda_1}{\lambda_2 + \delta \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \delta \frac{\lambda_1}{\mu_1}},$$

po úpravě

$$K_{pr} = \frac{\lambda_2 \mu_1 + \delta \lambda_1 \mu_2}{\lambda_2 \mu_1 + \delta \lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2}.$$

Odtud pro δ dostaneme

$$\delta = \frac{-\lambda_2 \mu_1 + K_{pr}(\lambda_2 \mu_1 + \mu_1 \mu_2)}{\lambda_1 \mu_2 (1 - K_{pr})}$$

a po úpravě

$$\delta = \frac{\mu_1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{K_p} - \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_2} \right). \quad (429)$$

b) Jestliže $q_1 < q_2$, pak

$$K_{pr} = \frac{\lambda_1 + \delta \lambda_2}{\lambda_1 + \delta \lambda_2 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \delta \frac{\lambda_2}{\mu_2}},$$

$$\delta = \frac{\mu_2}{\lambda_1} \left(\frac{1}{K_p} - \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_1} \right). \quad (430)$$

Tím jsou pro jednoduššího průběhu linku nalezeny vztahy, podle kterých se určí intenzita poruch a obnov linky jako celku, tedy vztahy pro parametry λ_m , μ_m náhradního automatu A_m .

Děle je nutno určit výkonnost q_m automatu A_m (jině se linka nebo část linky o dvou automatech nahradí). Víme, že skutečnou výkonnost q_1 jednodušší linky lze vyjádřit vztahem

$$q_1 = K_p \min(q_1, q_2).$$

Pro potenciální výkonnost automatu A_m a tedy i pro skutečnou výkonnost linky, která se jím nahradí, bude platit

$$q_m = \frac{\mu_m}{\lambda_m + \mu_m} q_m,$$

kde q_m je teoretická výkonnost automatu A_m . Obecně je potenciální výkonnost q_p automatu A_i definována vztahem [18]

$$q_p = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} q_i. \quad (431)$$

Odtud dále vyplývá, že

$$q_m = \min(q_1, q_2). \quad (432)$$

poněvadž parametry λ_m , μ_m automatu A_m jsou určeny tak, aby pro ně platilo (428), tj.

$$K_p = \frac{\mu_m}{\lambda_m + \mu_m}.$$

Za tím jsme uvažovali jenom dvě možnosti: buď $q_1 > q_2$, nebo $q_1 < q_2$. Jestliže pro výkon dvojice automatů, (které jsme i zde pro jednoduchost označili A_1 , A_2) platí $q_1 = q_2$, je nutno srovnávat hodnoty q_{p1} a q_{p2} . Platí-li $q_{p1} > q_{p2}$, pak se λ_m , μ_m (a samozřejmě δ) určí jako v případě $q_1 > q_2$ a pro $q_{p1} < q_{p2}$ zase tak jako v případě $q_1 < q_2$.

Postup určení K_p , (K_p) a q_p pro jednoduššího průběhu linku z obr. 49 je pak následovný:

1. Pro část linky obsahující dva automaty A_1 , A_2 (se známými intenzitami poruch a obnov λ_1 , μ_1 , λ_2 , μ_2 a výkony q_1 , q_2) a zásobník Z_1 o dané

kapacitě Z_1^* se zjistí K_p podle vztahu (403), jestliže $q_1 > q_2$, podle vztahu (408), když $q_1 < q_2$, nebo podle (421) při $q_1 = q_2$.

2. Pak se určí hodnota součinitele δ , a to podle (429), když $q_1 > q_2$, nebo podle (430) pro $q_1 < q_2$. Jestliže $q_1 = q_2$, pak se porovnají hodnoty q_{p1} a q_{p2} a opět se postupuje buď podle (429), nebo podle (430).

3. Tato část linky se zamění (nahradí) jediným náhradním automatem A_m . Jeho intenzita poruch λ_m a obnov μ_m se určí podle (425), jestliže $q_1 > q_2$, nebo podle (426), když $q_1 < q_2$. Při $q_1 = q_2$ se porovnávají q_{p1} a q_{p2} .

4. Automatu A_m se přiřadí výkonnost

$$q_m = \min(q_1, q_2)$$

5. Část linky obsahující náhradní automat A_m (s parametry λ_m , μ_m , q_m), automat A_3 (λ_3 , μ_3 , q_3) a zásobník Z_2 (o kapacitě Z_2^*) se považuje za jednoduššího průběhu linku. Pro ni se zopakují kroky 1 až 4 a zjistí se tak λ_{m2} , μ_{m2} , q_{m2} pro náhradní automat A_{m2} .

6. Kroky 1 až 5 se opakují, pokud se nezjistí součinitel pohotovosti K_p pro linku složenou z myšleného automatu $A_{m,n-2}$ a automatu A_n se začazeným zásobníkem Z_{n-1} . Takto zjištěné K_p představuje přibližnou hodnotu činitele pohotovosti celé linky. Výkonnost q_{te} celé linky se určí podle vztahu

$$q_{te} = K_p \min(q_{m,n-2}, q_n). \quad (433)$$

Příklad 18:

Vezměme pružnou automatickou linku z příkladu 12, obr. 36, tvořenou třemi automaty a dvěma mezioperačními zásobníky. Platí: $\lambda_1 = 2 \text{ h}^{-1}$, $\mu_1 = 20 \text{ h}^{-1}$, $\lambda_2 = 2,5 \text{ h}^{-1}$, $\mu_2 = 50 \text{ h}^{-1}$, $\lambda_3 = 2 \text{ h}^{-1}$, $\mu_3 = 50 \text{ h}^{-1}$, $g_1 = g_2 = g_3 = 9_3 = 1/60 \text{ h} \cdot \text{ks}^{-1}$, $Z_1^* = Z_2^* = 2 \text{ ks}$. Stanovte součinitel pohotovosti linky s využitím Markovových procesů.

Řešení:

Všechny automaty mají stejný výkon $q = 60 \text{ ks} \cdot \text{h}^{-1}$. Budeme proto při výpočtech postupovat podle čl. 6.4.2. V souladu s navrženým postupem vezmeme nejprve linku složenou z prvních dvou automatů a zásobníku Z_1 . Základní konstanty α , C stanovíme ze vztahů (419), (420). Dostaneme

$$\alpha = \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 \quad (-\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) = q(\lambda_1 + \mu_2)(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$= \frac{2 + 2,5 + 20 + 50}{60(20 + 50) \cdot (2 + 2,5)} (-2 \cdot 50 + 2,5 \cdot 20) = -0,197\,090,$$

$$C = \left\{ -\frac{1}{0,197\,090} (e^{-2 \cdot 0,197\,090} - 1) \left(2 + \frac{70}{4,5} + \frac{4,5}{70} \right) + \right.$$

$$\left. + e^{-2 \cdot 0,197\,090} \frac{60}{2} \left(1 + \frac{4,5}{50} \right) + \frac{60}{2,5} \left(1 + \frac{4,5}{20} \right) \right\}^{-1} = 0,012\,411.$$

Konstanty α , C dosadíme do vztahů (418) pro výpočet limitních pravděpodobností

$$p_1 = p_2 = \frac{C}{\alpha} (e^{2\alpha} - 1) = \frac{0,012\,411}{-0,197\,090} (e^{-2 \cdot 0,197\,090} - 1) =$$

$$= 0,020\,514,$$

$$p_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} p_1 = \frac{4,5}{70} \cdot 0,020\,514 = 0,001\,319,$$

$$p_3 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} p_1 = \frac{70}{4,5} \cdot 0,020\,514 = 0,319\,107,$$

$$p_4 = \frac{q}{\mu_2} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1} C e^{2\alpha} = \frac{60}{50} \frac{4,5}{2} \cdot 0,012\,411 \cdot e^{-2 \cdot 0,197\,090} =$$

$$= 0,022\,593,$$

$$p_5 = \frac{q}{\mu_1} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} C = \frac{60}{20} \frac{4,5}{2} \cdot 0,012\,411 = 0,067\,019,$$

$$p_6 = \frac{q}{\lambda_1} C e^{2\alpha} = \frac{60}{2} \cdot 0,012\,411 \cdot e^{-2 \cdot 0,197\,090} = 0,251\,037,$$

$$p_7 = \frac{q}{\lambda_2} C = \frac{60}{2,5} \cdot 0,012\,411 = 0,297\,864.$$

Podle (421), (422) stanovíme součinitel pohotovosti K_p , součinitel vlastních prostojů $\bar{K}_{pr}$ i součinitel prostoje vlivem čekání $\bar{K}_{pr}$ druhého automatu A_2 :

$$K_p = p_2 + p_3 + p_6 + p_7 = 0,888\,522,$$

$$\bar{K}_{pr} = p_0 + p_1 + p_4 = 0,044\,426,$$

$$\bar{K}_{pr} = p_5 = 0,067\,019.$$

Poněvadž podle (431)

$$q_{p1} = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} q = \frac{20}{60} \cdot 60 = 54,545,$$

$$q_{p2} = \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} q = \frac{50}{52,5} \cdot 60 = 57,143,$$

a tedy $q_{p1} < q_{p2}$, stanovíme součinitel přenosu zkrát δ ze vztahu (430). Dostaneme

$$\delta = \frac{\mu_2}{\lambda_2} \left(\frac{1}{K_p} - \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_1} \right) = \frac{50}{2,5} \left(\frac{1}{0,888\,522} - \frac{22}{20} \right) = 0,509\,290.$$

Pro další výpočet nahradíme první dva automaty ze zásobníkem automatem jediným s parametry λ_m , μ_m , q_m . Využijeme vztahů (426), tj.

$$\lambda_m = \lambda_1 + \delta \lambda_2 = 2 + 0,509\,29 \cdot 2,5 = 3,273\,225,$$

$$\mu_m = \frac{\lambda_1 + \delta \lambda_2}{\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \delta \frac{\lambda_2}{\mu_2}} = \frac{2 + 0,509\,29 \cdot 2,5}{\frac{2}{20} + 0,509\,29 \cdot \frac{2,5}{50}} = 26,088\,853$$

Zřejmě platí $q_m = q = 60$.

Tab. 25. Srovnání součinitelů K_p , $\bar{K}_{pr}$, $\bar{K}_{pr}$ zjištěných třemi způsoby (k příkladu 18)

	Markovovy procesy	Markovovy řetězce	Stochastická simulace
K_p	0,876 763	0,873 00	0,880 48
$\bar{K}_{pr}$	0,035 071	0,036 64	0,036 84
$\bar{K}_{pr}$	0,088 162	0,090 36	0,082 98
Σ	0,999 996	1,000 00	1,000 30

K náhradnímu automatu připojíme zásobník Z_2 a automat A_2 . Vzniklou jednoduchou linku vyhodnotíme stejným postupem. Dostaneme

$$\alpha = \frac{\lambda_m + \lambda_3 + \mu_m + \mu_3}{q(\mu_m + \mu_3)(\lambda_m + \lambda_3)} (-\lambda_m \mu_3 + \lambda_3 \mu_m) = -0,376\,777,$$

$$C = 0,014\,539, \quad p_6 = 0,125\,444,$$

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p_3 = 0,020\,425, & p_1 &= 0,439\,176, \\
 p_0 &= 0,001\,416, \\
 p_3 &= 0,294\,718, & K_p &= 0,876\,763, \\
 p_4 &= 0,013\,230, & \bar{K}_p &= 0,035\,071, \\
 p_5 &= 0,088\,162, & \bar{K}_p &= 0,068\,162.
 \end{aligned}$$

Výpočtem jsme stanovili součinitele K_p , $\bar{K}_p$ pro poslední automat, tj. pro A_5 . Srovnání dosažených výsledků, kterými charakterizujeme provozní vlastnosti celé linky, s postupem z příkladu 12 a se stochastickou simulací je v tab. 25. Ze srovnání je patrná velmi dobrá shoda výsledků. Odchytky ve výsledcích nepřesahují 1%.

7 Víceproudé automatické linky

Dopravu výrobků mezi jednotlivými technologickými operacemi zabezpečuje v automatické lince transportní systém. V lince se nepředpokládá trvalé hromadění výrobků. Pro plynulý a efektivní provoz je nutné sladěním taktů a skutečných výkonů všech automatů.

Případ, kdy spolehlivost automatu je na nízké úrovni a negativně ovlivňuje provozní vlastnosti celé linky, jsme řešili zařízením aktivní zálohy. Záložní automat zpracovává výrobky pouze při vzniku poruchy na automatu.

Pozornost nyní věnujeme další možné variantě uspořádání strojů v lince, kterou je větvení proudů výrobků (obr. 50). Důvodem k volbě uspořádání



Obr. 50. Dvouproudá automatická linka

strojů v lince podle obr. 50 je skutečnost, že automaty A_2 , A_3 vykazují z technologických nebo konstrukčních důvodů podstatně delší takt než ostatní automaty. Větvení proudů výrobků se uskutečňuje v zařízeních V_1 , V_2 , kterými musí být transportní systém vybaven. Obě zařízení lze chápat jako automaty zařazené v lince, které vykazují jistou spolehlivost.

Uspořádání na obr. 50 není jedinou variantou uspořádání strojů pro kompenzaci větších taktů některých automatů. Konstrukční důvody mohou vést k uspořádání na obr. 51. Automaty A_2 , A_3 s výrazně delším taktem,

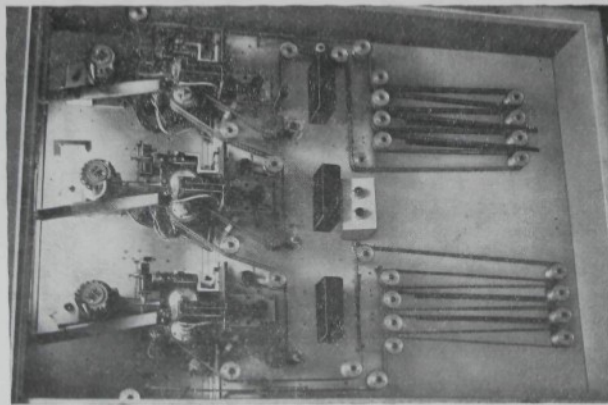


Obr. 51. Jednouproudá linka se zdvojenými automaty

tj. s nižším výkonem, jsou v sérii doplněny dalšími dvěma automaty A_2'' , A_3'' . Dopravní systém transportuje výrobky přes všechny automaty v lince. V daném uspořádání vykonává automat A_2 technologickou operaci na všech

ličných výročcích v jejich posloupnosti a automat A_2'' na všech sudých. Podobně následující třetí operace. Vykonává-li transportní systém krokový pohyb, krokuje dopravník v automatech A_2 , A_2' a A_3 , A_3' přes dvě pozice.

Někdy se může vyskytnout i více sériově řazených stejných automatů, které vykonávají stejnou funkci. Na obrázku 52 je automat pro broušení



Obr. 52. Brouscí automat na vrstevné rezistory

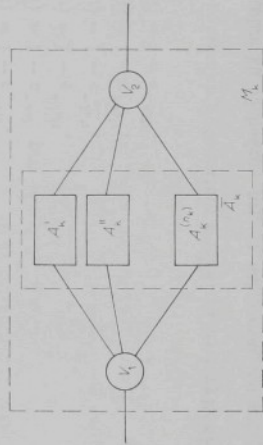
vrstevných rezistorů. Vybroušením drážky ve tvaru šroubovice do funkční odporové vrstvy se nastiňuje konečná hodnota odporu. Výkon jedné brouscí hlavy je asi třikrát menší než požadovaný výkon automatické linky (80 ks/min), ve které je automat zařazen. Bylo proto zvoleno konstruktivní řešení, při kterém jsou tři ekvivalentní brouscí hlavy za sebou a transportní systém krokuje přes tři pozice.

Z hlediska spolehlivosti se uvedená varianta uspořádání automatů v lince jeví jako běžné sériové uspořádání automatů s pevnou vazbou. Vznikne-li porucha na automatu A_2' (obr. 51), je nutno zastavit i automat A_2 a dopravník přes druhou operaci stojí. Po opravě se spustí oba stroje zároveň. Spolehlivostní charakteristiky části linky s touto variantou uspořádání strojů můžeme stanovit podle čl. 5.1. Zkoumáme-li provozní vlastnosti celé linky, můžeme ji po náhradě vícenásobných automatů v sérii řešit jako zcela normální pružnou automatickou linku.

Technické řešení souboru vícenásobných automatů v lince může obsahovat i variantu, při které je provoz ostatních automatů možný, přestože jeden z nich má poruchu. V lince na obr. 50 by to znamenalo, že při poruše A_2 by dopravní systém i automat A_2' pracovaly dále, ovšem pouze s polovičním výkonem. Výpočet provozních vlastností linky s touto variantou spojení vícenásobných automatů lze uskutečnit aplikací následujících výpočtů víceprúdových automatických linek.

7.1 PRACOVNÍSTĚ S PARALELNĚ USPOŘÁDANÝMI AUTOMATY

Vezměme část automatické linky naznačenou na obr. 53. Od předchozího stroje vstupují výrobky do zařízení, ve kterém se větví proud



Obr. 53. Část automatické linky s n_k -prúdovým větvením

výrobků na n_k proudů. Zařízení někdy stručně nazýváme výhybkou. Automat $A^{(i)}$ charakterizujeme distribuční funkcí dob bezporuchového provozu $F(i)$, distribuční funkcí dob obnovování provozuschopnosti $G_k(i)$ a výkonem q_i .

Výhybky V_1 , V_2 mají distribuční funkci dob bezporuchového provozu $F_1^1(t)$, $F_2^2(t)$ a distribuční funkce dob obnovování provozuschopnosti $G_1^1(t)$, $G_2^2(t)$. Maximální výkon výhybek je $q_a = \sum_{i=1}^n q_i$, přičemž výhybky musí být technicky zabezpečeny tak, aby při poruše jednoho nebo více automatů mohly dodávat a odbírat výrobky pouze ze zbyvajících větví, při zřejmém snížení celkového výkonu.

Předpokládáme, že pracovní místo s n_k -proudým větvením je součástí pružné automatické linky, u které je nutno určit provozní vlastnosti. Vzhledem k tomu, že známe výpočetní postupy pro řešení jednoproudých automatických linek, bylo by vhodné pokusit se aproximovat provoz n_k paralelních automatů s výhybkami jediným automatem. Náročnost aproximace vyplývá i z toho, že např. v obecném případě tři paralelních automatů může soustava automatů produkovat výrobky až osmi různými výkony, zatímco jediný automat může pracovat pouze svým výkonem, nebo je v poruše. I přesto však lze nalézt některé aproximace, které se při srovnání s jinými způsoby výpočtu jeví jako výhodující. Předností aproximace je zjednodušení výpočtů.

Ukážeme si několik typů aproximací. U všech typů aproximací budeme předpokládat, že doby bezporuchového provozu i doby obnovování provozuschopnosti paralelních automatů i výhybek jsou exponenciální, tj.

$$\begin{aligned} F_k(t) &= 1 - e^{-\lambda_k t}, \\ G_k(t) &= 1 - e^{-\mu_k t} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n_k, \\ F_1^1(t) &= 1 - e^{-\lambda_1 t}, \\ F_2^2(t) &= 1 - e^{-\lambda_2 t}, \\ G_1^1(t) &= 1 - e^{-\mu_1 t}, \\ G_2^2(t) &= 1 - e^{-\mu_2 t}. \end{aligned} \quad (434)$$

7.1.1 Aproximace automatem s maximálním výkonem

Na obrázku 53 budeme nejprve nahrazovat soustavu automatů náhradním automatem $\bar{A}_k$. Pro tuto aproximaci přijmeme následující předpoklady:

1. Výkon náhradního automatu $\bar{A}_k$ je $q_a = \sum_{i=1}^n q_i$.
2. Doba bezporuchového provozu náhradního automatu je shodná s dobou, kdy jsou všechny automaty současně v provozu. Pravděpodobnost

bezporuchového provozu všech automatů je dána vztahem

$$R_a(t) = \exp\left(-t \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \quad (435)$$

a pro distribuční funkci dob bezporuchového provozu náhradního automatu platí

$$F_a(t) = 1 - R_a(t) = 1 - \exp\left(-t \sum_{i=1}^n \lambda_i\right), \quad (436)$$

přičemž střední doba bezporuchového provozu je

$$T_a = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \frac{1}{\lambda_a}. \quad (437)$$

Doba obnovování provozuschopnosti náhradního automatu má exponenciální rozložení s parametrem μ_a .

Intenzitu obnovy náhradního automatu stanovíme z podmínky rovnosti výkonu všech paralelních automatů a náhradního automatu za dobu t_0 . Označíme-li $K_p^{(i)}$ součinitel pohotovosti i -tého automatu a $K_a^{(a)}$ součinitel pohotovosti automatu náhradního, můžeme podmínku vyjádřit vztahem

$$t_0 \sum_{i=1}^n K_p^{(i)} q_i = t_0 K_a^{(a)} q_a \quad (438)$$

a odtud

$$\mu_a = \frac{\lambda_a \sum_{i=1}^n K_p^{(i)} q_i}{\sum_{i=1}^n q_i - \sum_{i=1}^n K_p^{(i)} q_i}, \quad (439)$$

přičemž

$$K_p^{(a)} = \frac{\mu_a}{\mu_a + \lambda_a} \quad \text{a} \quad K_a^{(i)} = \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n.$$

Ve speciálním případě necht soustava paralelních automatů je tvořena n stejnými automaty o výkonu q , s intenzitou poruch λ a intenzitou obnov μ . Výkon náhradního automatu je $q_a = nq$, intenzita poruch $\lambda_a = n\lambda$ a intenzita obnov podle (439) $\mu_a = n\mu$.

Pro dva různé automaty s parametry $q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ dostaneme:

$$q_a = q_1 + q_2.$$

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \lambda_1 + \lambda_2, \\ \mu_a &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) [\mu_1(\mu_2 + \lambda_2) q_1 + \mu_2(\mu_1 + \lambda_1) q_2]}{\lambda_1(\mu_2 + \lambda_2) q_1 + \lambda_2(\mu_1 + \lambda_1) q_2} \end{aligned} \quad (440)$$

Soustavu n paralelních automatů jsme aproximovali náhradním automatem, jehož výkon je roven součtu výkonů všech paralelních automatů, tedy maximálním výkonem. Bezporuchový provoz odpovídá právě současnému provozu všech automatů a intenzita obnov je příslušobena podle podmínky stejných výkonů v určitém časovém intervalu. Tím jsme redukovali část automatické linky z obr. 53 na případ naznačený na obr. 54.



Obr. 54. Zařazení náhradního automatu $\bar{A}_k$

Sledovaná část linky přechází na soustavu tří automatů v sérii s pevnou vazbou. Výsledné parametry dalšího náhradního automatu M_k vypočítáme snadno ze vztahů

$$\begin{aligned} q_k &= q_a, \\ \lambda_k &= \lambda_v^1 + \lambda_a + \lambda_v^2, \\ \mu_k &= \frac{\lambda_v^1 + \lambda_a + \lambda_v^2}{\frac{\lambda_v^1}{\lambda_v} + \frac{\lambda_a}{\mu_a} + \frac{\lambda_v^2}{\mu_v}}. \end{aligned} \quad (441)$$

Automatem M_k nahrazujeme celou soustavu n paralelních automatů včetně obou výhybek V_1, V_2 . Touto náhradou lze původní víceprúdovou automatickou linku přenést na jednoprúdovou pružnou linku a řešit známými prostředky. Je zřejmé, že hlavní problém využití aproximace spočívá v posouzení, v jaké oblasti se použitím aproximace neohroží požadovaná přesnost konečného hodnocení provozních vlastností linky.

7.1.2 Aproximace průměrnými hodnotami

Vydíme opět ze systému automatů z obr. 53. Aproximaci paralelních automatů náhradním automatem $\bar{A}_k$ uskutečňujeme za následujících předpokladů:

1. Střední doba bezporuchového provozu náhradního automatu T_a se

rovná aritmetickému průměru středních dob bezporuchového provozu paralelních automatů $T_1, \dots, T_j$.

$$T_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \Rightarrow \lambda_a = \frac{n}{\sum_{i=1}^n T_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}}. \quad (442)$$

Doba bezporuchového provozu náhradního automatu má exponenciální rozložení.

2. Střední doba obnovování provozuschopnosti Φ_a automatu $\bar{A}_k$ je rovna aritmetickému průměru středních dob obnovování provozuschopnosti automatů Φ_i

$$\Phi_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi_i \Rightarrow \mu_a = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \Phi_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i}}. \quad (443)$$

3. Soustava paralelních automatů i náhradní automat musí za určitý čas t vyprodukovat stejný počet výrobků. Musí tedy platit podmínka (438), ze které tentokrát stanovíme výkon q_a náhradního automatu. Obecně dostaneme

$$q_a = \frac{\sum_{i=1}^n K_p^{(1)} q_i}{K_p^a} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i} q_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}}. \quad (444)$$

Mají-li všechny automaty ekvivalentní parametry q, λ, μ , dostaneme $\lambda_a = \lambda, \mu_a = \mu, q_a = nq$. Po provozní stránce se náhradní automat chová jako automat jediný, ovšem s výkonem n -krát větším.

Pro dvojici různých paralelních automatů s parametry $q_1, q_2, \mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2$ dostaneme následující parametry náhradního automatu:

$$\lambda_a = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \mu_a = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad (445)$$

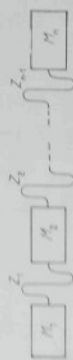
$$q_a = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda_1} q_1 + \frac{\mu_2}{\mu_2 + \lambda_2} q_2}{\frac{\mu_1\mu_2(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1\mu_2(\lambda_1 + \lambda_2)}}. \quad (446)$$

Parametr náhradního automatu M_4 , kterým aproximujeme provoz paralelních automatů včetně obou výhybek, dostaneme ve shodě s první aproximací ze vztahů (441).

Použitelnost aproximací posoudíme ve vztahu k výsledkům simulace víceprůdové automatické linky na číslcovém počítači.

7.2 STOCHASTICKÝ MODEL VÍCEPRŮDÉ LINKY

Velmi silným a osvědčeným nástrojem vyšetřování zákonitostí stochastických dějů je simulace na číslcovém počítači. V článku 5.3 jsme ji využili pro vyšetření provozních vlastností automatické linky. Pro případ víceprůdové linky vytvoříme obecnější model, ve kterém předpokládáme,



Obr. 55. Automatická linka vytvořená pracovišti s paralelními automaty

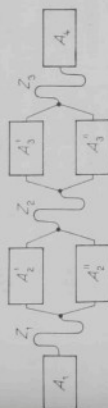
že linka (obr. 55) je sestavena z pracovišť s paralelně řazenými automaty, které dělí tok výrobků do několika proudů. Struktura každého pracoviště odpovídá obr. 53.

Ve shodě s praktickými aplikacemi zjednodušíme model v tom smyslu, že všechny automaty, kterými je vybaveno pracoviště, jsou naprosto stejné. Mají takt θ_i , distribuční funkci dob bezporuchového provozu $F_i(t)$ a distribuční funkci doby obnovování bezporuchovosti $G_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Počet paralelních automatů je zadán řadou $(n_1, n_2, \dots, n_n)$. Všechny ostatní vstupní konstanty jsou shodné se stochastickým modelem jednoproudé automatické linky. Simulace pseudonáhodných čísel s daným rozložením pravděpodobnosti byla už popsána v čl. 3.6. Výpočet stavů mezioperačních zásobníků je nutno rozšířit tak, aby registroval stavy všech paralelních automatů.

Ve stochastickém modelu je uplatněn předpoklad, že posledním pracovním místem v lince je jediný automat. Sledováním prostojů právě tohoto posledního automatu vyhodnocujeme okamžik ukončení simulace naprosto stejně jako u jednoproudé automatické linky. Vyhodnocení víceprůdových automatických linek si ukážeme na několika příkladech.

Příklad 19: Mějme dvouproudou automatickou linku (obr. 56). Doby bezporuchového provozu i doby obnovování provozuschopnosti mají exponenciální rozložení. Parametry rozložení spolu s taktem a kapacitou mezi-

operačních zásobníků jsou v tab. 26. Automaty ve dvojici na druhém a třetím pracovišti jsou naprosto stejné. Stanovte provozní vlastnosti dané linky za předpokladu, že neklademe omezení na kapacitu seřizovačů.



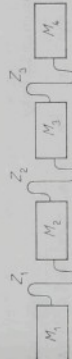
Obr. 56. Dvouproudá automatická linka pro příklad 19

Tab. 26. Spolehlivostní parametry automatů a kapacity mezioperačních zásobníků v lince z příkladu 19

	A_1	A_2', A_2''	A_3', A_3''	A_4
θ_i (s)	5	10	10	5
ϕ_i (min)	5	8	4	5
T_i (h)	2	1,6	2	2
Z_i^* (ks)	$Z_1^* = 75$ ks	$Z_2^* = 75$ ks	$Z_3^* = 75$ ks	

Řešení:

Nejprve použijeme aproximace paralelních automatů s maximálním výkonem (obr. 57). Pro pracoviště M_2 dostáváme $\theta_2 = 5$ s, $\phi_2 = 4$ min, $T_2 = 0,8$ h a pro pracoviště M_3 je $\theta_3 = 5$ s, $\phi_3 = 2$ min, $T_3 = 1$ h.



Obr. 57. Linka z obr. 56 po náhradě paralelních automatů

Aproximace průměrnými hodnotami dává u těchto pracovišť parametry $\theta_2 = 5$ s, $\phi_2 = 8$ min, $T_2 = 1,6$ h; $\theta_3 = 5$ s, $\phi_3 = 4$ min, $T_3 = 2$ h.

Vyhodnocení provozních vlastností bylo uskutečněno simulací provozu na stochastickém modelu s využitím počítače T 200. V případě A byly zadány parametry dvouproudé linky, v případě B se aproximovalo maximálním výkonem a případ C byl zhodnocením aproximace průměrnými hodnotami. Výsledky simulace linky charakterizované automatem A_4 jsou v tab. 27.

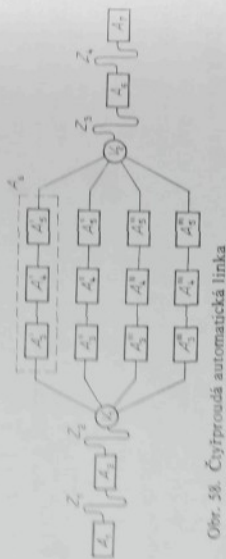
Z výsledků je patrné, že obě aproximace v tomto případě poskytují vy-

Tab. 27. Výsledky simulace čtyřproudé linky

Případ	Bezporuchový provoz A_4 (%)	Prostoj A_4 (%)	Čekání na zásobník Z_3 automatu A_4 (%)
A	98,86	4,17	6,97
B	98,94	4,23	6,85
C	98,07	4,13	7,81

konvoji výsledky, pohybující se v rozmezí $\pm 1\%$ pro jednotlivé charakteristiky.

Příklad 26: Pro čtyřproudou automatickou linku na obr. 58 s parametry v tab. 28 stanovte optimální počet seřizovačů (předpokládáme exponenciální rozložení všech náhodných veličin).



Tab. 28. Parametry čtyřproudé automatické linky

	A_1	A_2	V_1	A_3	A_4	A_5	A_6	V_2	A_7
T (h)	6,5	7,8	65	8	24,4	18,6	4,5496	65	10,5
ϕ (h)	0,8	0,55	0,5	0,2	0,5	1,5	0,5739	0,5	1,1
β (h)	3,25	3,30	3,24	12,96	12,96	12,96	12,96	3,24	3,25
Z^* (ks)	$Z_1^* = 800$	$Z_2^* = 1000$	$Z_3^* = 2000$	$Z_4^* = 2000$					

Řešení:

V každé ze čtyř ekvivalentních paralelních větví jsou zařazeny v sérii tři automaty. Všechny tři automaty v každé větvi nahradíme jedním a

označíme A_7 . Spolehlivostní parametry i takt náhradního automatu A_7 jsou uvedeny v tab. 28.

Výsledné hodnoty simulace provozu čtyřproudé automatické linky jsou v tab. 29. Analýzu využití seřizovačů můžeme uskutečnit s pomocí tab. 30,

Tab. 29. Výsledky simulace provozu čtyřproudé linky

Počet seřizovačů	Bezporuchový provoz A_7 (%)	Prostoj A_7 (%)	Čekání A_7 na zásobník Z_4 (%)	Čekání A_7 na seřizovače (%)
1	56,18	10,42	18,80	4,60
2	64,07	9,80	25,95	0,18
3	64,00	10,92	25,08	0,00
7	63,90	12,38	23,72	0,00

Tab. 30. Rozbor využití seřizovačů u čtyřproudé linky

Celkový počet seřizovačů	Využití seřizovačů z celkové doby využití linky (%)						
	1	2	3	4	5	6	7
1	66,73	—	—	—	—	—	—
2	48,92	20,30	—	—	—	—	—
3	48,97	19,97	4,40	—	—	—	—
7	50,12	19,80	3,74	0,33	0,00	0,00	0,00

která uvádí další výstupy simulace provozu linky na počítači T 200. Z výsledků je patrné, že pro efektivní zabezpečení provozu linky postačí dva seřizovači. Zařazením třetího seřizovače není zaručeno snížení ztrát spojených s prostoji a jeho využití je pouze 4,4%.

8 Optimalizace návrhu automatického výrobního systému

V dosavadních úvahách jsme se věnovali stanovení provozních vlastností systémů při daných spolehlivostních parametrech jednotlivých prvků, tj. automatů. Výpočet vycházel bezprostředně z uspořádání automatů ve výrobním systému. Je zřejmé, že jakékoli zlepšení spolehlivosti libovolného automatu ve výrobním systému má za následek zlepšení provozních vlastností celého systému. Předpokládáme však, že spolehlivostní charakteristiky jednotlivých automatů jsou neměnné a že další zdokonalení systému je možné pouze zařazením zálohy, vytvořením mezioperační zálohy, úpravou taktu, popř. zdokonalením organizace údržby.

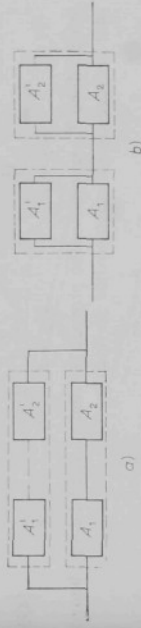
Naznačené způsoby zvýšení spolehlivosti výrobního systému umožňují dosažení výtěžnosti blízké se maximální teoretické hodnotě. Každé opatření ke zlepšení spolehlivosti je spojeno s jistými pořizovacími, popř. provozními náklady. Rozhodující pro efektivnost výrobního systému je celkový přínos každého zásahu do struktury systému. Přínos i náklady spojené s opatřením ke zvýšení spolehlivosti systému vyjádříme pro jednotlivé případy účelovou funkcí. Strukturu výrobního systému odpovídající maximu účelové funkce nazveme optimální strukturou automatického výrobního systému. Vyhledání optimální struktury výrobních systémů ukážeme pro některé základní typy uspořádání.

8.1 OPTIMALIZACE PEVNÉ AUTOMATICKÉ LINKY

V automatické lince s pevnou mezioperační vazbou pracují všechny automaty stejným taktem bez mezioperačních zásobníků. Při daných spolehlivostních parametrech jednotlivých automatů využijeme ke zlepšení provozních podmínek linky zálohování. K hodnocení provozních vlastností vybereme z komplexních ukazatelů součinitel pohotovosti, který má pro pevnou automatickou linku [viz (309)] tvar

$$K_p = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i}{T_i}} \quad (447)$$

Analýzujeme nejprve zálohování elementární pevné automatické linky složené ze dvou automatů A_1, A_2 . Dva způsoby možného připojení jednotlivých automatů jsou zachyceny na obr. 59. Předpokládáme, že se jedná o nezatížené zálohování ekvivalentními automaty



Obr. 59. Možné struktury jednotnosobné zálohy dvou automatů

s exponenciálním rozložením dob bezporuchového provozu i dob obnovování provozuschopnosti s parametry $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$.

Pro základní linku (v rámečku obr. 59a) podle (296) a (304) dostaneme

$$\bar{\lambda} = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \bar{\mu} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}} \quad (448)$$

a pro součinitel pohotovosti pevné linky A_1, A_2 bez záloh

$$K_p = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu} + \bar{\lambda}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}} \quad (449)$$

Chápeme-li obě větve v lince na obr. 59a jako případ nezatíženého zálohování, pak pro střední dobu bezporuchového provozu a střední dobu obnovování provozuschopnosti podle (178), (205) obdržíme

$$\bar{T} = \frac{2\bar{\lambda} + \bar{\mu}}{\bar{\lambda}^2}, \quad \bar{\Phi} = \frac{2\bar{\lambda} + \bar{\mu}}{2\bar{\mu}(\bar{\mu} + \bar{\lambda})} \quad (450)$$

Součinitel pohotovosti má tvar

$$K_p = \frac{\bar{T}}{\bar{T} + \bar{\Phi}} = \frac{2 \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right)}{\left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right)^2 + 1} \quad (451)$$

V případě b) z obr. 59 stanovíme nejprve $\hat{\lambda}_1, \hat{\mu}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\mu}_2$ pro automaty se zálohami v rámcích. Platí

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1^2}{2\lambda_1 + \mu_1}, \quad \hat{\mu}_1 = \frac{2\mu_1(\mu_1 + \lambda_1)}{2\hat{\lambda}_1 + \mu_1}; \quad (452)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2^2}{2\hat{\lambda}_2 + \mu_2}, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{2\mu_2(\mu_2 + \lambda_2)}{2\hat{\lambda}_2 + \mu_2}. \quad (453)$$

Střední dobu $\hat{T}$ bezporuchového provozu celé linky a střední dobu obnovování provozuschopnosti stanovíme ze vztahů

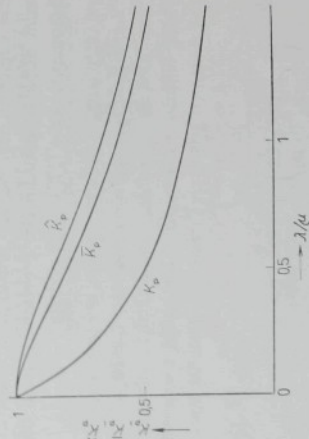
$$\hat{T} = \frac{1}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2}, \quad \hat{\Phi} = \frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2} + \frac{\hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2} \quad (454)$$

a odtud pro součinitel pohotovosti

$$\hat{K}_p = \frac{\hat{T}}{\hat{T} + \hat{\Phi}} = \frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{\hat{\lambda}_1}{\mu_1}\right)^2}{2\left(1 + \frac{\hat{\lambda}_1}{\mu_1}\right)} + \frac{\left(\frac{\hat{\lambda}_2}{\mu_2}\right)^2}{2\left(1 + \frac{\hat{\lambda}_2}{\mu_2}\right)}}. \quad (455)$$

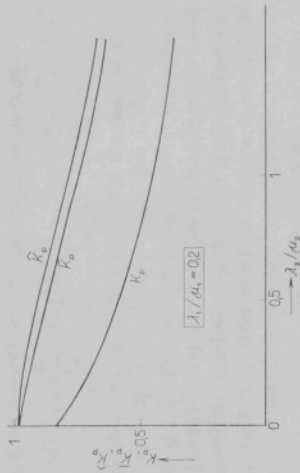
Je-li $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \mu_1 = \mu_2 = \mu$, dostáváme z (449), (451), (455)

$$K_p = \frac{1}{1 + 2\frac{\lambda}{\mu}}, \quad \bar{K}_p = \frac{1 + 2\frac{\lambda}{\mu}}{1 + 2\frac{\lambda}{\mu} + 2\frac{\lambda^2}{\mu^2}}, \quad \hat{K}_p = \frac{1 + \frac{\lambda}{\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}},$$



Obr. 60. Průběh součinitele pohotovosti pro $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \mu_1 = \mu_2 = \mu$

tj. vztahy pro součinitel pohotovosti linky bez záloh, se společným zálohováním obou automatů, resp. se zálohováním jednotlivých automatů. V závislosti na poměru λ/μ jsou hodnoty součinitelů vyneseny obr. 60. Průběh součinitelů pohotovosti pro $\lambda_1/\mu_1 = 0,2$ v závislosti na poměru



Obr. 61. Průběh součinitelů pohotovosti pro dvě struktury zálohování

λ_2/μ_2 je na obr. 61. Z obou obrázků je zřejmé, že součinitel pohotovosti $\hat{K}_p$ při zálohování každého automatu zvětšit dosahuje vyšších hodnot než $\bar{K}_p$. Vezměme rozdíl

$$\begin{aligned} \hat{K}_p - \bar{K}_p &= \\ &= \frac{2\frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}\left(2 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)}{\left[\left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2^2}{\mu_1^2}\right) + 1\right]\left[\left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2^2}{\mu_2^2}\right) + 1 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)\right]}. \end{aligned} \quad (456)$$

Vidíme, že pro každé kladné $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ je rozdíl (456) rovněž kladný.

Uvažujeme-li v obr. 59 formu zatíženého zálohování, můžeme dostat obdobným způsobem pro jednotlivé součinitele pohotovosti vztahy

$$\bar{K}_p = \frac{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2^2}{\mu_2^2} + \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)^2}. \quad (457)$$

$$K_p = \frac{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{\lambda_3}{\mu_3}}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right) \frac{\lambda_1}{\mu_1}} \quad (43)$$

Jeli $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$, pak

$$K_p = \frac{1 + 2 \frac{\lambda}{\mu}}{1 + 2 \frac{\lambda}{\mu} + 4 \frac{\lambda^2}{\mu^2}} \quad K_p = \frac{1 + 2 \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}}{1 + 2 \frac{\lambda}{\mu} + 3 \frac{\lambda^2}{\mu^2}} \quad (48)$$

Analýzou výrazů (47), (48) zjišťujeme, že pro všechna kladná $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ je $K_p > K_p$. Tento výsledek spolu s (456) vede k závěru, že pokud to provní podmínky automatické linky dovolují, je výhodnější zálhovat každý méně spolehlivý automat samostatně. Tentto závěr platí nejen pro celé automaty, ale i pro zálhování jednotlivých částí (mechanismů) automatů a rovněž pro systémy s větším počtem automatů.

Mějme pevnou automatickou linku obsahující n automatů s teoretickým výkonem V ($\text{ks} \cdot \text{h}^{-1}$). Předpokládejme, že každý automat můžeme vybavit ekvivalentním záložním automatem v zařízením nebo nezařízením stavu. Vhodnost zařazení zálohy budeme posuzovat v souvislosti s celkovým ekonomickým efektem.

Označme a_i ($\text{Kčs} \cdot \text{h}^{-1}$) pořizovací a provozní náklady na zálhování i -tého automatu ($i = 1, 2, \dots, n$) vztahené na jednu hodinu provozu. Bereme v úvahu předpokládanou životnost stroje, popř. požadovanou dobu návratnosti. Necht z ($\text{Kčs} \cdot \text{ks}^{-1}$) je zisk z jednoho výrobku. U všech automatů známe distribuční funkci doby bezporuchového provozu i doby obnovování provozuschopnosti, a tím i střední doby T_p, Φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

K výpočtu součinitele pohotovosti linky využijeme vztah (309). Jeli rozložení obou náhodných veličin i -tého zálhovaného automatu exponenciální, můžeme střední dobu bezporuchového provozu $\bar{T}_i$ a střední dobu obnovování provozuschopnosti $\bar{\Phi}_i$ odhadnout vztahy (178), (179), (205), (225). Při výskytu jiného rozložení musíme ke stanovení středních dob použít stochastickou simulaci podle čl. 3.6.

Součinitel pohotovosti linky je funkcí struktury zálhování, matematicky funkci řady $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $x_i = 0$, pokud i -tý automat nemá zálohu, a $x_i = 1$, když i -tý automat je zálhován. Vztah pro součinitel pohotovosti můžeme přepsat do tvaru (pruhem jsou označeny střední doby bezporuchového

vého provozu a obnovování provozuschopnosti zálhovaných automatů)

$$K_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\Phi_i}{T_i} (1 - x_i) + \frac{\Phi_i}{T_i} x_i \right]} \quad (460)$$

Přínos záloh budeme hodnotit podle účelové funkce

$$Q(x_1, \dots, x_n) = V \cdot z [K_p(x_1, \dots, x_n) - K_p(0, \dots, 0)] - \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (461)$$

Optimální struktura $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ pevné automatické linky je taková, pro kterou $Q(x_1, \dots, x_n)$ nabývá maximální hodnoty. Nejjednodušším způsobem výpočtu optimální struktury je zjištění hodnoty účelové funkce pro všechny kombinace, kterých je 2^n . Maximální hodnotě účelové funkce odpovídá optimální struktura linky. Řešení úlohy je poměrně snadné, pro $n > 5$ je vhodné využít číslicový počítač.

Příklad 21:

Vezměme pevnou automatickou linku obsahující 4 automaty s exponenciálním rozložením dob bezporuchového provozu i dob obnovování provozuschopnosti. Výkon linky je $V = 2500 \text{ ks} \cdot \text{h}^{-1}$, zisk z jednoho výrobku $z = 0,25 \text{ Kčs} \cdot \text{ks}^{-1}$; ostatní parametry jsou v tab. 31. Stanovte optimální strukturu linky při nezatíženém zálhování jednotlivých automatů.

Řešení:

Střední doby $\bar{T}_i$ bezporuchového provozu a střední doby $\bar{\Phi}_i$ obnovování provozuschopnosti stanovíme podle (178), (205) ze vztahů

$$\bar{T}_i = \frac{2\lambda_i + \mu_i}{\lambda_i^2}, \quad \bar{\Phi}_i = \frac{2\lambda_i + \mu_i}{2\mu_i(\mu_i + \lambda_i)}, \quad \text{kde } \lambda_i = \frac{1}{T_i}; \quad \mu_i = \frac{1}{\Phi_i}$$

pro $i = 1, 2, 3, 4$.

Tab. 31. Parametry linky z příkladu 21 pro optimalizační strukturu

Index automatu	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
T_i (h)	5	12,5	8	10
Φ_i (h)	0,4	3,2	1	2
a_i ($\text{Kčs} \cdot \text{h}^{-1}$)	37	82	73	40
$\bar{T}_i$ (h)	72,5	73,828	80	70
$\bar{\Phi}_i$ (h)	0,215	1,926	0,556	1,167

Výsledky jsou rovněž v tab. 31. Hodnoty součinitele pohotovosti i účelové funkce pro všech $2^4 = 16$ kombinací struktury linky jsou uvedeny v tab. 32. Z tabulky je zřejmé, že největší přínos poskytuje struktura $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (0, 0, 0, 1)$, která je optimální. Zálohou vybavíme pouze čtvrtý automat

Tab. 32. Výpočet optimální struktury linky

(x_1, x_2, x_3, x_4)	$K_p(x_1, x_2, x_3, x_4)$	$Q(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0, 0, 0, 0	0,602 0	0
1, 0, 0, 0	0,631 3	-18,688
0, 1, 0, 0	0,698 8	-21,500
0, 0, 1, 0	0,648 1	-44,188
0, 0, 0, 1	0,676 7	6,688
1, 1, 0, 0	0,738 5	-33,688
1, 0, 1, 0	0,682 2	-59,875
1, 0, 0, 1	0,713 9	-7,062
0, 1, 1, 0	0,761 6	-55,250
0, 1, 0, 1	0,801 4	2,625
0, 0, 1, 1	0,743 7	-24,438
1, 1, 1, 0	0,809 1	-62,562
1, 1, 0, 1	0,854 1	-1,438
1, 0, 1, 1	0,779 7	-38,938
0, 1, 1, 1	0,885 1	-18,062
1, 1, 1, 1	0,949 9	-14,562

v lince. Všechny ostatní struktury – kromě $(0, 1, 0, 1)$ – vykazují při zařazení zásobníků hodinové náklady vyšší než přínos.

8.2 OPTIMALIZACE PRUŽNÉ AUTOMATICKÉ LINKY

Optimalizace pružné linky je z obecného hlediska poněkud složitější vzhledem k pevné lince. Provozní vlastnosti pružné automatické linky ovlivňuje jak zařazení záloh, tak změna taktu kteréhokoli automatu i kapacity mezioperačních zásobníků.

Optimální strukturu zálohování automatů v pružné lince lze stanovit postupem podobným optimalizaci pevné linky. Součinitel pohotovosti pružné linky s určitou strukturou záložních automatů stanovíme s využitím některého typu modelu. Optimální strukturu linky odvodíme z maxima účelové funkce (461).

Zvýšení výkonu libovolného automatu v pružné lince má za následek zlepšení provozních vlastností linky. Z hlediska maximální výtečnosti pružné automatické linky je tedy jednoznačně výhodné použít co nejkratších pracovních taktů automatů. Limitující podmínkou je, aby zkrácením taktu nebyla negativně ovlivněna spolehlivost celého automatu.

Pozornost nyní zaměříme na optimalizaci kapacit mezioperačních zásobníků v pružné automatické lince. Kapacitu i -tého zásobníku v lince n automatů označme z_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$. Přínos zásobníků zařazených do linky budeme posuzovat vzhledem k lince s nulovou kapacitou všech zásobníků, tzn. k pevné lince. Poněvadž předpokládáme znalost spolehlivostních i provozních charakteristik všech automatů, snadno stanovíme podle (309) součinitel pohotovosti pevné linky. Součinitel pohotovosti závislý na nenulové kapacitě zásobníků, který označíme $K_p(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$, stanovíme s využitím stochastické simulace, popř. výpočtem některého typu modelu s Markovovými procesy.

Označme $V(ks, h^{-1})$ teoretický výkon pružné linky. Jestliže jsou takty všech automatů stejné, pak lze pro optimalizaci použít součinitel pohotovosti kteréhokoli automatu. Jsou-li však takty odstupňované, lze výpočet uskutečnit pouze na základě nejpomalejšího automatu, tj. automatu s nejdelším taktům. Vycházíme totiž z předpokladu, že pevná linka, vykazující stejný takt všech automatů, musí pracovat právě tímto taktům. Teoretický výkon V automatické linky se rovná výkonu nejpomalejšího automatu.

Je-li $z(ks, h^{-1})$ zisk z jednoho výrobku, pak přínos mezioperačních zásobníků o kapacitách $(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ za jednu hodinu využívání je

$$Vz[K_p(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) - K_p(0, \dots, 0)] \quad (462)$$

Náklady na provoz a údržbu i -tého zásobníku vztahované na 1 ks z kapacity zásobníku a 1 hodinu využití označíme b_i ($Kčs \cdot ks^{-1} \cdot h^{-1}$). Hodinový výnos linky $Q(Kčs \cdot h^{-1})$ je dán vztahem

$$Q(z_1, \dots, z_{n-1}) = Vz[K_p(z_1, \dots, z_{n-1}) - K_p(0, \dots, 0)] - \sum_{i=1}^{n-1} b_i z_i \quad (463)$$

Ve výsledné účelové funkci musíme ještě zahrnout výrobní náklady na mezioperační zásobníky, které vztáhneme na 1 ks z kapacity zásobníku a označíme a_i ($Kčs/ks$), a náklady na střední a generální opravy, vztahované opět na 1 ks kapacity c_i ($Kčs/ks$). Součinitel růstu pořizovacích nákladů a nákladů na opravy je r ($r \geq 1$). Přínos zásobníků budeme hodnotit za celé období využívání linky s (rok) a za předpokladu ročního využití $w = 3500$

hrok. Pro hodnotu účelové funkce G v závislosti na zvolené kapacitě meziperačních zásobníků dostaneme

$$G(z_1, \dots, z_{n-1}) = Q(z_1, \dots, z_{n-1}) \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + c_i) z_i^i. \quad (464)$$

Kapacity zásobníků $(z_1^*, z_2^*, \dots, z_{n-1}^*)$, pro které účelová funkce G nabývá maximum na množině všech $z_i \geq 0$; $i = 1, 2, \dots, n-1$, jsou pro danou linku optimální.

Výraz (462) je konkávní funkci kapacit zásobníků pro $z_1, \dots, z_{n-1} \geq 0$. V bodě $(0, \dots, 0)$ má hodnotu 0. Suma na pravé straně vztahu (463) je lineární funkci kapacit zásobníků. Na základě těchto vlastností lze snadno ukázat, že hodinový výnos linky Q je konkávní funkci kapacit zásobníků. Řešení úlohy má smysl, jestliže alespoň pro jeden bod $(z_1, \dots, z_{n-1})$ je $Q > 0$. V opačném případě je výhodnější pevná vazba mezi automaty v lince.

Hodinový výnos Q je konkávní funkcí, stejně jako výraz Q_{sw} . Suma

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + c_i) z_i^i \quad (465)$$

je exponenciální funkci kapacit zásobníků, tj. neomezenou, monotónně rostoucí a navíc konvexní funkci ($a_i, c_i < 0$ pro všechna i). Funkce $-S$ je konkávní a při využití základních vlastností konkávních funkcí lze snadno dokázat, že tedy i funkce $G(z_1, \dots, z_{n-1})$ je konkávní funkcí kapacit zásobníků v intervalech $z_i \in (0, \infty)$; $i = 1, 2, \dots, n-1$. Každé lokální maximum funkce G v daných intervalech je absolutním maximum. Z této vlastnosti konkávních funkcí vyplývají i poměrně jednoduché algoritmy pro vyhledání optimálního řešení. Jestliže absolutní maximum účelové funkce je $G = 0$, není výhodné do linky zařazovat meziperační zásobníky.

Pro vyhledání optimálních kapacit meziperačních zásobníků můžeme použít např. modifikace gradientní metody [19]. Kapacita zásobníku je u zkoumaných linek celočíselná veličina. Trajektorii řešení nepovedeme proto ve směru skutečného gradientu, ale tak, aby docházelo k celočíselné změně jen jedné souřadnice, v jejímž směru bude největší spád.

Vydjeme z jediného předem známého bodu $(0, \dots, 0)$, pro který $G = 0$. Ve všech bodech $(\delta, 0, \dots, 0)$, $(0, \delta, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, \dots, 0, \delta)$, kde $\delta > 0$ je přírůstek kapacity, určíme hodnoty účelové funkce $G_{1,i}$. Index 1 určuje pořadí optimalizačního kroku, index i označení zásobníku s přírůstkem kapacity.

Stanovíme $G_{1,j}$, pro které $G_{1,j} \geq G_{1,i}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Novým

východním bodem bude bod $(0, \dots, 0, z_j = \delta, 0, \dots, 0)$. Ve druhém kroku opět přičteme ke všem souřadnicím přírůstek δ , tj. $(\delta, 0, \dots, z_j = \delta, \dots, 0)$; $(0, \delta, 0, \dots, z_j = \delta, \dots, 0)$; $(0, 0, \dots, \delta, z_j = \delta, 0, \dots, 0)$; $(0, \dots, 0, z_j = 2\delta, 0, \dots, 0)$; $\dots$ $(0, \dots, 0, z_j = \delta, 0, \dots, \delta)$ a hledáme variantu s největším přírůstkem z rozdílů

$$G_{2,i} - G_{1,j}, \text{ kde } i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (466)$$

Trajektorii řešení posuneme ve směru souřadnice s největším spádem. Postup ukončíme v k -tém kroku, kdy pro všechny rozdíly platí

$$G_{k,i} - G_{k-1,j} \leq 0 \text{ pro všechna } i. \quad (467)$$

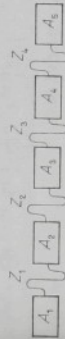
Jestliže jsme zvolili přírůstek δ větší, než je maximální reálný přírůstek kapacity zásobníků, pak intervaly $(k-1)$ -ního a k -tého kroku podrobíme znovu optimalizaci s přírůstkem $\delta_1 < \delta$ z výchozího bodu, kde bylo dosaženo hodnoty $G_{k-2,j}$. Jinak je hodnota $G_{k-1,j}$ maximem účelové funkce a ji odpovídající souřadnice jsou optimálními kapacitami zásobníků.

Velmi citlivě je nutné volit přírůstek δ . Zvolíme-li příliš velké δ a při prvním kroku se dostaneme za maximum, nezískáme prvými dvěma kroky žádnou informaci. Příliš malé δ prodlužuje výpočet a zvyšuje náklady. Přírůstek může být také pro každou souřadnici různý.

Při použití tohoto algoritmu v případě, že simulujeme provoz linky stochastickým modelem, musíme být opatrní v závěrech, neboť nepřesnost modelu by mohla ovlivnit i konvergenci.

Příklad 22:

Mějme pružnou automatickou linku s pěti automaty (obr. 62), $n = 5$.



Obr. 62. Pružná automatická linka s pěti automaty pro příklad 22

Tab. 33. Spolehlivostní parametry a nákladové konstanty linky s pěti automaty

Automat, zásobník	A_1, Z_1	A_2, Z_2	A_3, Z_3	A_4, Z_4	A_5
T_i (h)	10	4	6,25	5	8
ϕ_i (h)	1	0,5	0,8	0,8	1
a_i (Kčs. ks ⁻¹)	130	110	110	130	—
b_i (Kčs. ks ⁻¹ · h ⁻¹)	0,002 0	0,002 5	0,002 0	0,001 8	—
c_i (Kčs. ks ⁻¹)	55	50	50	55	—

Doby bezporuchového provozu i doby obnovování provozuschopnosti mají exponenciální rozložení. Parametry rozložení obsahuje tab. 33. Výkon všech automatů je jednotný, $V = 1\,200 \text{ ks} \cdot \text{h}^{-1}$, $s = 7 \text{ roků}$, $z = 0,36 \text{ Kčs/ks}$. Nákladové konstanty jsou obaženy rovněž v tab. 33, přičemž $r = 1,2$. Počet seřizovačů využitelných v automatické lince je $q = 2$. Naleznete optimální kapacity všech čtyř meziperačních zásobníků tak, aby účelová funkce (464) nabývala maximální hodnoty.

Řešení:

Pro součinitel pohotovosti pevné linky dostaneme

$$K_p(0, 0, 0) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^s \frac{\phi_i}{T_i}} = 0,610\,50.$$

Účelová funkce podle (464) má tvar

$$\begin{aligned} G(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \{V_z[K_p(z_1, z_2, z_3, z_4) - K_p(0, 0, 0)] - \\ &- \sum_{i=1}^4 b_i z_i\} w \cdot s - \sum_{i=1}^4 (a_i + c_i) z_i^r = \\ &= \{1\,200 \cdot 0,36[K_p(z_1, z_2, z_3, z_4) - K_p(0, 0, 0)] - 0,0002z_1 - \\ &- 0,002\,5z_2 - 0,002z_3 - 0,001\,8z_4\} 3\,500 \cdot 7 - \\ &- (1,85z_1^{1,2} + 1,60z_2^{1,2} + 1,60z_3^{1,2} + 1,85z_4^{1,2}) = \\ &= 1,058\,4 \cdot 10^7 [K_p(z_1, z_2, z_3, z_4) - 0,610\,5] - \\ &- 24,5(2z_1 + 2,5z_2 + 2z_3 + 1,8z_4) - \\ &- 100(1,85z_1^{1,2} + 1,6z_2^{1,2} + 1,6z_3^{1,2} + 1,85z_4^{1,2}). \end{aligned}$$

Je výhodné rozdělit účelovou funkci na dvě části

$$G(z_1, z_2, z_3, z_4) = P(z_1, z_2, z_3, z_4) - N(z_1, z_2, z_3, z_4),$$

kde

$$P = 1,058\,4 \cdot 10^7 [K_p(z_1, z_2, z_3, z_4) - 0,610\,5]$$

výjadřuje přínos zásobníků a

$$\begin{aligned} N &= 24,5(2z_1 + 2,5z_2 + 2z_3 + 1,8z_4) + \\ &+ 100(1,85z_1^{1,2} + 1,6z_2^{1,2} + 1,6z_3^{1,2} + 1,85z_4^{1,2}) \end{aligned}$$

náklady na provoz a pořízení zásobníků.

Tab. 34. Hodnoty účelové funkce pro optimalizaci kapacit meziperačních zásobníků

Krok	(z_1, z_2, z_3, z_4)	$K_p(z_1, z_2, z_3, z_4)$	P (Kčs)	N (Kčs)	G (Kčs)
1	100, 0, 0, 0	0,630	206 388	51 370	155 018
	0, 100, 0, 0	0,633	238 140	46 315	191 825
	0, 0, 100, 0	0,629	195 804	45 090	150 714
	0, 0, 0, 100	0,621	111 132	50 880	60 252
2	100, 100, 0, 0	0,641	322 812	97 685	225 127
	0, 200, 0, 0	0,639	301 644	104 583	197 061
	0, 100, 100, 0	0,635	259 308	91 405	167 903
	0, 100, 0, 100	0,638	291 060	97 195	193 865
3	150, 100, 0, 0	0,646	375 732	129 258	246 474
	100, 150, 0, 0	0,641	322 812	125 936	196 876
	100, 100, 50, 0	0,652	439 236	117 629	321 607
	100, 100, 0, 50	0,638	—	—	—
4	150, 100, 50, 0	0,652	439 236	149 202	290 034
	100, 150, 50, 0	0,648	—	—	—
	100, 100, 100, 0	0,642	—	—	—
	100, 100, 50, 50	0,641	—	—	—
	700, 700, 700, 700	0,724	1 201 284	1 932 813	—731 529

Optimalizační postup je uspořádán v tab. 34. V prvním kroku byl zvolen přírůstek $\delta = 100 \text{ ks}$ a pro všechny varianty zjištěn součinitel pohotovosti K_p . Hodnota účelové funkce je zřejmě nejvyšší pro $i = 2$, tj. $G_{1,2} = 191\,825 \text{ Kčs}$.

Jako výchozí pro druhý krok volíme kapacity (0, 100, 0, 0). Přírůstek $\delta = 100$ ponecháme. Maximum účelové funkce pro vyhodnocení dostáváme pro $i = 1$.

Z výchozích kapacit (100, 100, 0, 0) s přírůstkem $\delta = 50 \text{ ks}$ uskutečíme třetí krok. Snížení přírůstku je nutné vzhledem k nízkému přírůstku součinitele pohotovosti. Optimální kapacita ve třetím kroku je (100, 100, 50, 0). Je zřejmé, že v této oblasti se pohybujeme až na hranicích využitelnosti stochastického modelu, kde podle zkušeností můžeme počítat s přesností stanovených součinitelů $\pm 0,5\%$. Přírůstek K_p je srovnatelný s touto chybou, proto je možný i výsledek 0,638 pro kapacity (100, 100, 0, 50). Potvrzením této skutečnosti jsou i výsledky čtvrtého kroku.

Optimalizační proces, který využívá stochastického modelu, stanovil

optimální kapacity mezioperačních zásobníků $Z_1^* = 100$, $Z_2^* = 100$, $Z_3^* = 50$, $Z_4^* = 0$. Podrobnější zkoumání je omezeno vlastnostmi simulační metody.

Pro ilustraci dalšího průběhu účelové funkce je v posledním řádku uvedena hodnota

$$G(700, 700, 700, 700) = -731\,529 \text{ Kčs}.$$

9 Optimalizace preventivní údržby automatů a automatických výrobních systémů

U jednotlivých automatů i v celých výrobních systémech jsme dosud předpokládali, že při vzniku poruchy přichází automat bezprostředně do stavu obnovování provozuschopnosti. Údržbář, seřizovač, popř. údržbářská četa zahájí okamžitě práce na obnovování provozuschopnosti automatu. Po ukončení těchto prací je automat v původním výchozím stavu. Pouze bylo-li seřizovačů méně než automatů ve výrobním systému, došlo k situaci, kdy automat po vzniku poruchy musel na uvolnění některého seřizovače čekat, protože ten opravoval jiný automat.

Tuto strategii organizace obnovování provozuschopnosti automatů budeme nazývat strategie A. Charakteristiky provozních vlastností automatu při strategii A jsou uvedeny v kap. 2 a vlastností systémů automatů v kap. 3 až 8.

Jiné typy organizace obnovování provozuschopnosti automatů a automatických výrobních systémů jsou spojeny s pojmem preventivní údržba. Preventivní údržba spočívá v kontrole stavu automatu v periodických, popř. jinak stanovených intervalech a v obnově jeho výchozího vztahu. Je zřejmé, že preventivní údržba vyžaduje přerušení provozu automatu. Doba trvání preventivní údržby má jisté rozložení pravděpodobnosti.

Při poruše automatu bezprostředně následuje obnovování provozuschopnosti. Střední doba obnovování provozuschopnosti musí být větší než střední doba trvání preventivní údržby, aby mělo smysl vůbec zařazovat preventivní údržbu.

V souvislosti se zavedením preventivní údržby jako činitele zvyšujícího výtežnost automatů a automatických výrobních systémů budeme rozlišovat několik různých strategií organizace obnovy a preventivní údržby. U každé strategie naznačíme pravidla pro výběr optimálního rozvrhu preventivní údržby automatů, k jejichž stanovení byly použity postupy odvozené E. J. Barzilovičem a V. A. Kašanovem v [2].

Strategie B , kterou se budeme zabývat, spočívá v bezprostředním zalesnění obnovení provozuschopnosti automatu v okamžiku poruchy. Současné se uskutečňuje preventivní údržba v předem daných intervalech. Při spouštění automatu se rozhodne o době η , po které se provede preventivní údržba. Doba η je náhodná veličina, jejíž distribuční funkci označíme $Q(t)$, přičemž $Q(t) = 1 - Q(t)$. Jestliže se v době η nevykonal porucha, uskuteční se preventivní údržba, jejíž střední doba trvání je ϕ . Po skončení údržby je automat ve výchozím stavu pro uskutečnění dalšího stejného cyklu činnosti, volí se doba η atd.

Jestliže se v době η do preventivní údržby vyskytne porucha, předcházi automat bezprostředně do stavu obnovení provozuschopnosti se střední dobou trvání ϕ . Obnova zařízení znamená jeho návrat do původního stavu, ze kterého začíná další cyklus činnosti volbou doby do následující preventivní údržby.

Nutnou podmínkou pozitivního vlivu preventivní údržby na provozní vlastnosti automatu je relace $\phi_p < \phi$. Neplatí-li tato relace, lze jednoduchou úvahou dojít k závěru, že je výhodnější preventivní údržbu vyložit.

Okamžiky ukončení obnovení provozuschopnosti, popř. preventivní údržby znamenají obnovení původního stavu automatu a definují tak proces obnovy, jehož funkci obnovy označíme $H(x)$.

Jedním z ukazatelů, které budeme při optimalizaci rozvihu preventivní údržby uplatňovat, je součinitel operací pohotovosti K_{op} , pro který platí

$$K_{op} = P(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t, s). \quad (468)$$

Intervaly mezi preventivními údržbami budeme považovat za optimální v případě, že součinitel operací pohotovosti dosáhne svého maxima. Jako další optimalizační kritérium uplatníme maximalizaci součinitele pohotovosti, popř. minimalizaci střední poměrné ztráty. Střední poměrné ztráty vyjadřuje střední náklady na obnovu a preventivní údržbu vztahné na dobu bezporuchového provozu.

Při odvození dalšího postupu v souladu s [1] i [2] vyjdeme z pravděpodobnosti $P(t, s)$, že v čase t je automat provozuschopný a že v intervalu $(t, t + s)$ bude v bezporuchovém provozu. Tento jev může nastat pouze ve dvou případech:

a) V intervalu $(0, t)$ se neuskuteční preventivní údržba a v intervalu

$(0, t + s)$ se nevykonal porucha automatu. Pravděpodobnost výskytu toho jevu je

$$\bar{Q}(t) R(t + s).$$

Přitom předpokládáme, že pokud by se preventivní údržba měla uskutečnit právě v intervalu $(t, t + s)$, bude od ní automaticky upuštěno.

b) V okamžiku x , $(0 < x \leq t)$, skončilo obnovení provozuschopnosti automatu, v intervalu (x, t) se neplánuje preventivní údržba a v intervalu $(x, t + s)$ se nevykonal porucha. Pravděpodobnost tohoto jevu je

$$\int_0^t \bar{Q}(t - x) R(t + s - x) dH(x).$$

V souhrnu platí

$$P(t, s) = \bar{Q}(t) R(t + s) + \int_0^t \bar{Q}(t - x) R(t + s - x) dH(x). \quad (469)$$

Při limitním přechodu podle (468) použijeme hlavní větu obnovy (36) a dostaneme

$$P(s) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\infty} \bar{Q}(x) R(x + s) dx, \quad (470)$$

kde γ je střední doba mezi obnovami automatu, pro kterou platí

$$\begin{aligned} \gamma &= E[\min(\tau, \eta)] + \phi_p P(\tau > \eta) + \phi P(\tau \leq \eta) = \\ &= \int_0^{\infty} \bar{Q}(x) R(x) dx + \phi_p \int_0^{\infty} R(x) dQ(x) + \phi \int_0^{\infty} F(x) dQ(x). \end{aligned} \quad (471)$$

Označme

$$\psi(x, s) = \int_0^x R(u, s) du \quad (472)$$

a integrujeme per partes

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \bar{Q}(x) R(x + s) dx &= [\bar{Q}(x) \psi(x, s)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \psi(x, s) d\bar{Q}(x) = \\ &= \int_0^{\infty} \psi(x, s) dQ(x) \end{aligned}$$

a současně

$$\int_0^{\infty} \bar{Q}(x) R(x) dx = [\bar{Q}(x) \psi(x, 0)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \psi(x, 0) d\bar{Q}(x) =$$

$$= \int_0^\infty \psi(x, 0) dQ(x).$$

Po těchto úpravách přejde (470) do tvaru

$$P(s) = \frac{\int_0^\infty \psi(x, s) dQ(x)}{\int_0^\infty [\psi(x, 0) + \phi_p + (\phi - \phi_p) F(x)] dQ(x)} = \frac{\int_0^\infty A(x) dQ(x)}{\int_0^\infty B(x) dQ(x)} \quad (473)$$

V [2] je ukázáno, že rozložení $Q(x)$, pro které funkcionál $P(s)$ nabývá maxima, když $B(x) > 0$, je dáno předpisem

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq \varrho, \\ 1 & \text{pro } x > \varrho. \end{cases} \quad (474)$$

V podstatě to znamená, že optimálního využití preventivní údržby dosáhneme při zachování konstantní doby od poslední obnovy do následující preventivní údržby. Optimální interval stanovíme z nutné podmínky pro existenci extrému, tzn. položíme nule první derivaci $P(s)$ podle ϱ . Nejprve však integrujeme ve výrazu (473), kde použijeme věty o Stieltjesově integrálu podle funkce po částech spojitě. Dostaneme

$$P(s, \varrho) = \frac{\int_0^\infty R(x+s) dx}{\int_0^\infty R(x) dx + \phi_p + (\phi - \phi_p) F(\varrho)} \quad (475)$$

Po derivaci $P(s, \varrho)$ podle ϱ a po následující úpravě

$$\left[-\frac{R(\varrho+s)}{R(\varrho)} F(\varrho) + \lambda(\varrho) \int_0^\infty R(x+s) dx \right] \frac{R(\varrho)}{R(\varrho+s)} + \frac{1}{\phi - \phi_p} \left[\frac{R(\varrho)}{R(\varrho+s)} \int_0^\infty R(x+s) dx - \int_0^\infty R(x) dx \right] = \frac{\phi_p}{\phi - \phi_p} \quad (476)$$

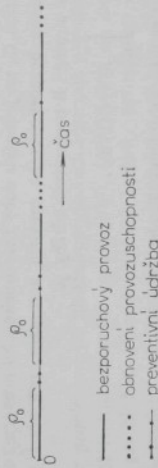
Označme kořeny rovnice (476) $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$. Jsou to volně stacionární body funkce $P(s, \varrho)$. Ze všech bodů vybereme takový, pro který $P(s, \varrho)$ nabývá maximální hodnoty, a označíme ho ϱ_0 . V ϱ_0 nabývá funkce $P(s, \varrho)$ absolutní maximum, považujeme-li s za konstantu. Je-li $\varrho_0 = \infty$, je zřejmé

nejvhodnější preventivní údržbu vůbec neprovádět, poněvadž by negativně ovlivnila provozní vlastnosti automatu.

Jestliže ϱ_0 je konečné číslo, můžeme hodnotu $P(s, \varrho_0)$ stanovit ze vztahu

$$P(s, \varrho_0) = \max P(s, \varrho) = \frac{R(\varrho_0 + s)}{R(\varrho_0) [1 + (\phi - \phi_p) \lambda(\varrho_0)]}, \quad (477)$$

kde jsme použili výrazu (476) pro zjednodušení (475). Činnost automatu při strategii B technické obsluhy je na obr. 63.



Obr. 63. Provoz automatu při strategii B technické obsluhy

Ke stanovení optimálního intervalu preventivní údržby můžeme použít i součinitel pohotovosti jako ukazatel provozních vlastností automatu. Vzhledem k tomu, že $K_p(\varrho) = P(0, \varrho)$, dostaneme z (475)

$$K_p(\varrho) = P(0, \varrho) = \frac{\int_0^\infty R(x) dx}{\int_0^\infty R(x) dx + \phi_p + (\phi - \phi_p) F(\varrho)} \quad (478)$$

a podle (476) je nutnou podmínkou pro nejvyšší hodnotu součinitele pohotovosti splnění vztahu

$$-F(\varrho) + \lambda(\varrho) \int_0^\infty R(x) dx = \frac{\phi_p}{\phi - \phi_p}. \quad (479)$$

Pro řešení úlohu má smysl opět pouze takový kořen ϱ_0 rovnice (479), pro který dosahuje K_p maximální hodnoty, ϱ_0 je zároveň konečné číslo. Úpravou (479) pro ϱ_0 dostaneme

$$\frac{\phi_p}{\int_0^\infty R(x) dx} + \frac{(\phi - \phi_p) F(\varrho_0)}{\int_0^\infty R(x) dx} = (\phi - \phi_p) \lambda(\varrho_0). \quad (480)$$

Součinitel pohotovosti pro preventivní údržbu s intervalem ϱ_0 lze stanovit

$$K_p(\bar{e}_0) = \frac{1}{1 + \frac{\phi_p + (\phi - \phi_p) F(\bar{e}_0)}{\int_0^{\infty} R(x) dx}} = \frac{1}{1 + (\phi - \phi_p) \lambda(\bar{e}_0)} \quad (481)$$

Posledním optimalizačním kritériem, kterým se budeme zabývat, je střední poměrná ztráta C_p na jednotku doby bezporuchového provozu automatu.

Střední doba bezporuchového provozu automatu, při jehož provozu uplatňujeme strategii B preventivní údržby, je

$$T_B = \int_0^{\infty} R(x) \bar{Q}(x) dx. \quad (482)$$

Pro střední ztrátu C_1 vzhledem k T_B platí

$$\begin{aligned} C_1 &= c\phi P(\tau \leq \eta) + c_p\phi_p P(\tau > \eta) = \\ &= c\phi \int_0^{\infty} F(x) d\bar{Q}(x) + c_p\phi_p \int_0^{\infty} R(x) d\bar{Q}(x) \end{aligned} \quad (483)$$

a pro střední poměrnou ztrátu

$$C_p = \frac{C_1}{T_B} = \frac{c\phi \int_0^{\infty} F(x) d\bar{Q}(x) + c_p\phi_p \int_0^{\infty} R(x) d\bar{Q}(x)}{\int_0^{\infty} R(x) \bar{Q}(x) dx}, \quad (484)$$

jsou-li c ztráty za jednotku času při obnově automatu a c_p ztráty za jednotku času při preventivní údržbě.

Střední poměrná ztráta C_p nabývá minima pro funkci $\bar{Q}(x)$ typu (474). Po integraci dostaneme

$$C_p(\bar{e}) = \frac{(c\phi - c_p\phi_p) F(\bar{e}) + c_p\phi_p}{\int_0^{\infty} R(x) dx}. \quad (485)$$

Derivaci $C_p(\bar{e})$ podle $\bar{e}$ položíme rovnu nule a upravíme

$$-F(\bar{e}) + \lambda(\bar{e}) \int_0^{\infty} R(x) dx = \frac{c_p\phi_p}{c\phi - c_p\phi_p}. \quad (486)$$

Dosahuje-li $C_p(\bar{e})$ minima pro $\bar{e}_0$ a $\bar{e}_0$ je konečné číslo, můžeme hodnotu střední poměrné ztráty $C_p(\bar{e}_0)$ stanovit ze vztahu

$$C_p(\bar{e}_0) = \min_{\bar{e}} \{C_p(\bar{e})\} = (c\phi - c_p\phi_p) \lambda(\bar{e}_0). \quad (487)$$

Jako srovnávací hodnota pro dosaženou minimální střední poměrnou ztrátu může sloužit střední poměrná ztráta C , vznikající při provozu automatu bez preventivní údržby. Platí

$$C = \frac{c\phi}{T}. \quad (488)$$

Jistým problémem při hledání optimálních intervalů preventivní údržby je řešení transcendentních rovnic (476), (479), (486). Za nejvýhodnější postup při hledání alespoň přibližné hodnoty optimálního intervalu se považuje grafický způsob použitý v následujícím příkladu. Další zpřesnění výsledků umožňují vhodné číselné metody.

Vztahy pro výpočet optimálního intervalu preventivní údržby automatu při strategii B nelze použít, vykazuje-li automat exponenciální rozložení dob bezporuchového provozu. Automat s konstantní intenzitou poruch je v každém okamžiku svého bezporuchového provozu ve výchozím stavu a jakákoli preventivní údržba nemůže teoreticky tento stav zlepšit. Stejná situace nastává i v případě, že intenzita poruch klesá.

Optimální intervaly pro preventivní údržbu lze naznačeným postupem nalézt pro automaty, jejichž intenzita poruch roste. Roste-li intenzita poruch monotónně a neomezeně, existuje právě jeden reálný kořen příslušných rovnic.

Intenzita poruch automatu s gama rozložením pravděpodobnosti dob bezporuchového provozu pro $m > 1$ monotónně roste, má však konečnou limitu. Proto pro jisté hodnoty vstupních veličin neexistuje řešení optimálních začních rovnic.

Příklad 23:

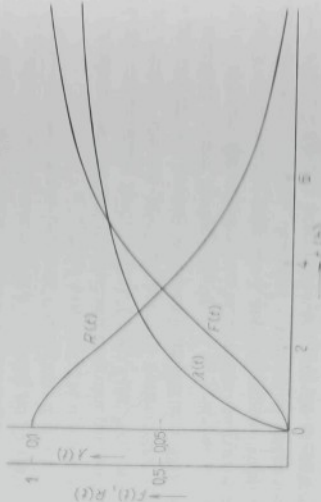
Zkoumaný automat má gama rozložení pravděpodobnosti dob bezporuchového provozu s parametry $m = 2$, $\lambda = 0,5 \text{ h}^{-1}$. Nechť dále $\phi = 3,5 \text{ h}$, $\phi_p = 1 \text{ h}$, $c = 2c_p = 2 \cdot k \text{ Kčs} \cdot \text{h}^{-1}$. Stanovte optimální interval preventivní údržby zajišťující maximální hodnotu součinitele pohotovosti, popř. minimální střední poměrnou ztrátu.

Podle zadání zřejmě

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}, \quad R(t) = e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}.$$

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^2 t}{1 + \lambda t}, \quad K = \frac{\phi_p}{\phi - \phi_p} = 0,4, \quad T = \frac{m}{\lambda} = 4 \text{ h}.$$

Některé funkce rozložení jsou vyneseny na obr. 64. Dosaďme-li do (479),



Obr. 64. Průběh $F(t)$, $R(t)$, $\lambda(t)$ pro příklad 23

dostaneme výchozí vztah pro výpočet optimálního intervalu preventivní údržby

$$-1 + e^{-\lambda q} + \lambda q e^{-\lambda q} + \frac{\lambda^2 q}{1 + \lambda q} \int_0^{\infty} (e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x}) dx = K.$$

Po integraci a úpravě

$$e^{-\lambda q} + \lambda(1 - K)q = K + 1.$$

Zřejmě pro všechna $\lambda > 0$, $q > 0$ je $e^{-\lambda q} < 1$. Vzhledem k tomu, že $\phi_p < \phi$, je $K + 1 > 1$. Aby úloha měla řešení, musí tedy platit $1 - K > 0$, resp. $\phi > 2\phi_p$. V našem případě je uvedená relace splněna.

Dosaďme-li konstanty zadání, dostaneme

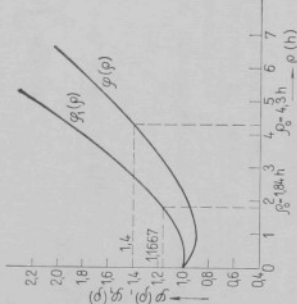
$$e^{-0,5q} + 0,3q = 1,4.$$

Vezmeme funkci

$$\varphi(q) = e^{-0,5q} + 0,3q$$

a vyneseme do grafu (obr. 65). Grafické řešení poskytuje hodnotu $\bar{q}_0 = 4,3$ h. Hodnotu součinitele pohotovosti při preventivní údržbě automatu v intervalu $\bar{q}_0$ zjistíme z (481)

$$K_p(\bar{q}_0) = \frac{1}{1 + (\phi - \phi_p) \lambda(\bar{q}_0)} = 0,5396.$$



Obr. 65. Grafické řešení rovnice pro optimalizaci intervalu preventivní údržby

Pro součinitel pohotovosti automatu bez preventivní údržby platí

$$K_p = \frac{T}{T + \phi} = 0,5333.$$

Zlepšení součinitele pohotovosti zavedením preventivní údržby je poměrně nízké, přesněji 0,63%.

Klademe-li přednost důraz na minimalizaci ztrát vznikajících při obnově, resp. preventivní údržbě automatu, použijeme pro stanovení optimálního intervalu preventivní údržby vztah (486). Po dosazení a úpravě

$$e^{-0,5q} + 0,41667q = 1,16667.$$

Funkce

$$\varphi_1(q) = e^{-0,5q} + 0,41667q$$

je vynesena opět v obr. 65. Z grafického záznamu lze odvodit řešení $\bar{q}_0 = 1,84$ h. Při preventivní údržbě s intervalem $\bar{q}_0$ dosahují podle (487) střední poměrné ztráty hodnoty

$$C_p(\bar{q}_0) = (c\phi - c_p\phi_p) \lambda(\bar{q}_0) = 1,43k.$$

Pro střední poměrné ztráty při provozu automatu bez preventivní údržby

podle (488) platí

$$C = \frac{c\phi}{T} = \frac{2k \cdot 3,5}{4} = 1,75k.$$

Střední poměrná ztráta se zavedením preventivní údržby snížila o 18,3%. Součinitel pohotovosti při preventivní údržbě s intervalem $\bar{t}_0$ podle (478) je

$$K_p(\bar{t}_0) = \frac{\int_0^{\bar{t}_0} R(x) dx}{\int_0^{\bar{t}_0} R(x) dx + \phi_p + (\phi - \phi_p) F(\bar{t}_0)} = 0,5131.$$

Příklad 24:

Nechť doba bezporuchového provozu automatu má Weibullovo rozložení pravděpodobnosti s parametry $m = 3$, $\lambda = 0,05$. Stanovte optimální interval preventivní údržby automatu při strategii B, jestliže $\phi = 0,9$ h, $\phi_p = 0,3$ h, $c = 360$ Kčs, h^{-1} , $c_p = 300$ Kčs, h^{-1} .

Řešení:

Platí

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t^m}, \quad R(t) = e^{-\lambda t^m}, \quad \lambda(t) = m\lambda t^{m-1},$$

$$T = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)}{\lambda^{1/m}},$$

a tedy

$$F(t) = 1 - e^{-0,05t^3}, \quad R(t) = e^{-0,05t^3}; \quad \lambda(t) = 0,15t^2;$$

$$T = 2,425 \text{ h}, \quad \frac{\phi_p}{\phi - \phi_p} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5.$$

Dosadíme do podmínky (479) a dostaneme

$$-1 + e^{-0,05\bar{t}_0^3} + 0,15\bar{t}_0^2 \int_0^{\bar{t}_0} e^{-0,05x^3} dx = 0,5.$$

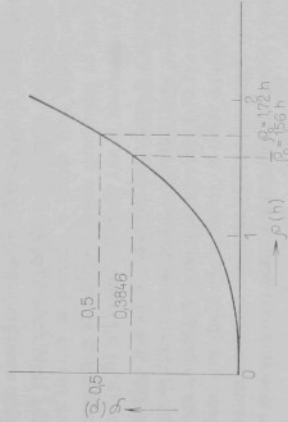
Funkce

$$\varphi(t) = -1 + e^{-0,05t^3} + 0,15t^2 \int_0^t e^{-0,05x^3} dx$$

je vynesena v grafu na obr. 66. Pro optimální interval preventivní údržby

z grafu zjistíme, že $\bar{t}_0 = 1,72$ h. Odpovídající hodnota součinitele pohotovosti podle (481) je

$$K_p(\bar{t}_0) = \frac{1}{1 + (\phi - \phi_p) \lambda(\bar{t}_0)} = \frac{1}{1 + 0,6 \cdot 0,15 \cdot 1,72^2} = 0,790.$$



Obr. 66. Graf funkce $\varphi(t)$ pro příklad 24

Bez uplatnění preventivní údržby vykazuje součinitel pohotovosti automatu hodnotu

$$K_p = \frac{T}{T + \phi} = \frac{2,425}{2,425 + 0,9} = 0,729.$$

Minimální střední poměrné ztráty při provozu automatu dosáhneme při volbě intervalu $\bar{t}_0$ podle podmínky (486). Podmínku lze zapsat ve tvaru

$$\varphi(\bar{t}_0) = \frac{c_p \phi_p}{c\phi - c_p \phi_p} = \frac{90}{324 - 90} = 0,3846.$$

Grafickým řešením podle obr. 66 dostáváme $\bar{t}_0 = 1,56$ h. Minimální hodnota střední poměrné ztráty podle (487) je

$$C_p(\bar{t}_0) = (c\phi - c_p \phi_p) \lambda(\bar{t}_0) = (324 - 90) \cdot 0,15 \cdot 1,56^2 = 85,42 \text{ Kčs} \cdot \text{h}^{-1}$$

a střední poměrná ztráta při obsluze bez preventivní údržby

$$C = \frac{c\phi}{T} = \frac{360 \cdot 0,9}{2,425} = 133,61 \text{ Kčs} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Jiný způsob organizace obnovy a preventivní údržby automatu spočívá v provádění obnovy automatu i preventivní údržby pouze v předem stanovených intervalech. Na začátku provozu zvolíme dobu η , po které se uskuteční preventivní údržba. Doba η nechť je náhodná veličina s distribuční funkcí $Q(t)$. Jestliže porucha automatu v době η nenastala, proběhne preventivní údržba o střední době trvání ϕ_p , kterou se navrátí automat z hlediska spolehlivosti do původního stavu, a cyklus se může opakovat.

Vznikne-li porucha automatu uvnitř časového intervalu $(0, \eta)$, zůstává automat až do okamžiku η neschopný provozu. V čase η se uskuteční obnovení provozuschopnosti automatu, jehož doba trvání je náhodná veličina s distribuční funkcí $G(t)$ a střední hodnotou ϕ . Obnova automatu způsobí návrat do původního stavu a vytvoří předpoklady pro opakování celého cyklu. Popsanou organizací obsluhy automatu označíme strategii C. Okamžiky plné obnovy provozuschopnosti automatu vytvoří proces obnovy s funkcí obnovy $H(x)$.

Provozní vlastnosti automatu budeme opět nejprve charakterizovat součinitelem operační pohotovosti, který stanovíme v souladu se vztahem (468) pomocí pravděpodobnosti $P(t, s)$. $P(t, s)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že automat bude v intervalu $(t, t + s)$ provozuschopný. Použijeme rovněž předpokladu vyloučení preventivní údržby v intervalu $(t, t + s)$.

Lze snadno ukázat, že vztah pro výpočet pravděpodobnosti $P(t, s)$ je zcela shodný se vztahem (469) pro strategii B, tzn.

$$P(t, s) = \bar{Q}(t) R(t + s) + \int_0^t \bar{Q}(t - x) R(t + s - x) dH(x), \quad (489)$$

a pro pravděpodobnost $P(s)$ obdobně jako v (470) po aplikaci základní věty obnovy platí

$$P(s) = \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \bar{Q}(x) R(x + s) dx. \quad (490)$$

Pro γ však dostaneme

$$\begin{aligned} \gamma &= E[\eta] + \phi_p P(\tau > \eta) + \phi P(\tau \leq \eta) = \\ &= \int_0^\infty x dQ(x) + \phi_p \int_0^\infty R(x) dQ(x) + \phi \int_0^\infty F(x) dQ(x). \end{aligned} \quad (491)$$

Použijeme-li funkci $\psi(x, s)$ z (472) a integrujeme čítelel ve zlomku na pravé

straně vztahu (490), obdržíme

$$P(s) = \frac{\int_0^\infty \psi(x, s) dQ(x)}{\int_0^\infty [x + \phi_p + (\phi - \phi_p) F(x)] dQ(x)}. \quad (492)$$

Podle [2] nabývá funkcionál $P(s)$ maxima pro funkci

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq \varrho, \\ 1 & \text{pro } x > \varrho. \end{cases} \quad (493)$$

Pravděpodobnost $P(s)$ se stává funkcí další proměnné ϱ , použijeme proto symbolu $P(s, \varrho)$. Po integraci Stieltjesových integrálů podle funkce po částech spojitě nabývá vztah (492) tvaru

$$P(s, \varrho) = \frac{\int_0^\infty R(x + s) dx}{\varrho + \phi_p + (\phi - \phi_p) F(\varrho)}. \quad (494)$$

Nutnou podmínkou pro existenci lokálního extrému funkce $P(s, \varrho)$ vzhledem k proměnné ϱ je, aby se parciální derivace podle ϱ rovnala nule. Aplikací této podmínky dojdeme ke vztahu

$$\begin{aligned} -F(\varrho) - \frac{\varrho}{\phi - \phi_p} + \left[\frac{1}{(\phi - \phi_p) R(\varrho + s)} + \right. \\ \left. + \lambda(\varrho) \frac{R(\varrho)}{R(\varrho + s)} \right] \int_0^\infty R(x + s) dx = \frac{\phi_p}{\phi - \phi_p}. \end{aligned} \quad (495)$$

Kořeny této rovnice označíme $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$. Z nich vybereme kořen ϱ_0 , pro který nabývá funkce $P(s, \varrho)$ maximální hodnoty. Řešení ϱ_0 udává optimální interval preventivní údržby a obnovy automatu. Vezmeme-li v úvahu, že ϱ_0 musí splňovat vztah (495), můžeme odvodit pro výpočet maximální hodnoty pravděpodobnosti $P(s, \varrho_0)$ zjednodušený výraz

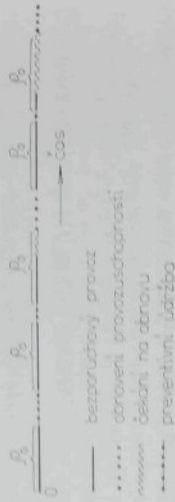
$$P(s, \varrho_0) = \max_{\varrho} P(s, \varrho) = \frac{R(\varrho_0 + s)}{1 + (\phi - \phi_p) F(\varrho_0)}. \quad (496)$$

Ze vztahu (494) pro $\phi_p > 0$ zřejmě vyplývá, že

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} P(s, \varrho) = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} P(s, \varrho) = 0. \quad (497)$$

V intervalu $(0, \infty)$ je $P(s, \varrho)$ spojitou funkcí ϱ a současně $P(s, \varrho) \geq 0$ pro

všechny body intervalu. Podle základních vět matematické analýzy dosahuje funkce $P(\theta, \varrho)$ na intervalu $(0, \infty)$ absolutního maxima právě v bodě θ_0 . Činnost automatu při organizaci technické obsluhy podle strategie C je v obr. 67.



Obr. 67. Příklad provozu automatu při technické obsluze podle strategie C

Jako další kritérium provozních vlastností automatu použijeme maximální hodnotu součinitele pohotovosti. Podle (494) platí

$$K_p(\varrho) = P(0, \varrho) = \frac{\int_0^\infty R(x) dx}{\varrho + \varphi_p + (\varphi - \varphi_p) F(\varrho)}. \quad (498)$$

Pro nutnou podmínku existence lokálního maxima $K_p(\varrho)$ dostaneme vzhledem k (495) výraz

$$-F(\varrho) - \frac{\varrho}{\varphi - \varphi_p} + \left[\frac{1}{(\varphi - \varphi_p) R(\varrho)} + \lambda(\varrho) \right] \int_0^\infty R(x) dx = \frac{\varphi_p}{\varphi - \varphi_p}. \quad (499)$$

Maximální hodnotu součinitele pohotovosti lze vypočítat ze vztahu

$$K_p(\varrho_0) = \max_{\varrho} K_p(\varrho) = \frac{R(\varrho_0)}{1 + (\varphi - \varphi_p) f(\varrho_0)}. \quad (500)$$

V následujících úvahách odvodíme optimální interval preventivní údržby a obnovy automatu při strategii C z podmínky minimální střední poměrné ztráty. Střední poměrnou ztrátu opět definujeme jako poměr nákladů na preventivní údržbu a obnovu automatu a doby bezporuchového provozu automatu.

Střední doba T_1 bezporuchového provozu automatu do poruchy (popř.

do začátku preventivní údržby) při dělce intervalu ϱ je

$$T_1 = \varrho R(\varrho) + \int_0^\infty x dF(x) = \varrho R(\varrho) - \int_0^\infty x dR(x). \quad (501)$$

Zřejmě

$$\int_0^\infty R(x) dx = \varrho R(\varrho) - \int_0^\infty x dR(x) \quad (502)$$

a odtud

$$T_1 = \int_0^\infty R(x) dx. \quad (503)$$

Pro střední dobu φ_1 čekání automatu při poruše na obnovu platí

$$\varphi_1 = \varrho - T_1 = \varrho F(\varrho) - \int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty F(x) dx. \quad (504)$$

Označíme-li c ztrátu za jednotku času při obnově automatu, c_p ztrátu za jednotku času při preventivní údržbě a c_c ztrátu při čekání automatu na obnovu, dostaneme s využitím vztahu (503) pro střední ztrátu C_1 vztah

$$\begin{aligned} C_1 &= c\varphi F(\varrho) + c_p\varphi_p R(\varrho) + c_c\varphi_1 = \\ &= c_p\varphi_p + (c\varphi - c_p\varphi_p) F(\varrho) + c_c \int_0^\infty F(x) dx. \end{aligned} \quad (505)$$

Střední poměrnou ztrátu C_p můžeme pak vyjádřit vztahem

$$C_p = \frac{C_1}{T_1} = \frac{c_p\varphi_p + (c\varphi - c_p\varphi_p) F(\varrho) + c_c \int_0^\infty F(x) dx}{\int_0^\infty R(x) dx}. \quad (506)$$

Optimalizační výpočet spočívá v nalezení takového ϱ_0 v intervalu $(0, \infty)$, pro které nabývá C_p své minimální hodnoty. Proto derivujeme zlomek na pravé straně vztahu (506) podle ϱ a derivaci položíme rovnou nule. Po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} &-F(\varrho) + \lambda(\varrho) \int_0^\infty R(x) dx + \frac{c_c}{(c\varphi - c_p\varphi_p) R(\varrho)} \int_0^\infty x f(x) dx = \\ &= \frac{c_p\varphi_p}{c\varphi - c_p\varphi_p}. \end{aligned} \quad (507)$$

Mezi kořeny $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ rovnice (507) najdeme takový, pro který střední poměrná ztráta C_p nabývá minimální hodnotu, a označíme ho ϱ_0 . Pro

minimální hodnotu střední poměrné ztráty v použitém vztahu (507) můžeme napsat

$$C_p(q_0) = \min_p C_p(q) = c_e \frac{F(q_0)}{R(q_0)} + \lambda(q_0) [c_p \Phi_p] \quad (508)$$

Potíže vznikající při řešení transcendentních rovnic (495), (499) i (507) obcházejme použitím grafického způsobu řešení. Dosažitelná přesnost řešení je pro praktické účely zpravidla postačující. V opačném případě použijeme pro získání výsledku s požadovanou vyšší přesností některé ze vhodných metod numerické matematiky.

Příklad 25:

Mějme dílnu vybavenou 8 stejnými, navzájem nezávislými automatickými stroji. Automaty mají teoretický výkon $V_1 = 1\,500 \text{ ks} \cdot \text{h}^{-1}$. Doby bezporuchového provozu automatů mají exponenciální rozložení s intenzitou poruch $\lambda = 0,05 \text{ h}^{-1}$, pro střední dobu obnovování provozuschopnosti platí $\Phi = 3 \text{ h}$. Sianovte optimální interval preventivní údržby a obnovy automatů při strategii C, respektující maximální hodnotu součinitele pohotovosti, jestliže $\Phi_p = 2 \text{ h}$. Spočítejte výkon dílny za 2 směny (tj. za 14 h).

Sianovte optimální interval preventivní údržby a obnovy automatů při strategii C vzhledem k minimu středních poměrných ztrát, jestliže $c = 2\,100 \text{ Kčs} \cdot \text{h}^{-1}$, $c_e = 1\,500 \text{ Kčs} \cdot \text{h}^{-1}$, $c_p = 1\,800 \text{ Kčs} \cdot \text{h}^{-1}$ (vztaženo na jeden automat).

Řešení:

Každý automat pracuje zcela samostatně a cyklus preventivní údržby a obnovy bude mít u každého automatu stejný interval, cykly mohou však být navzájem posunuty tak, jak to odpovídá kapacitě pracovníků vyčleněných pro tuto činnost. Výpočet můžeme založit na zhodnocení pouze jednoho automatu.

Zřejmě platí

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad R(t) = e^{-\lambda t}, \quad T = 20 \text{ h}.$$

Danou distribuční funkci, pravděpodobnost bezporuchového provozu i intenzitu poruch dosadíme do vztahu (495)

$$\begin{aligned} -1 + e^{-\lambda q} - \frac{1}{\Phi - \Phi_p} + \left[\frac{1}{(\Phi - \Phi_p) e^{-\lambda(q+s)}} + \frac{\lambda e^{-\lambda q}}{e^{-\lambda(q+s)}} \right] \int_0^q e^{-\lambda(x+s)} dx = \\ = \frac{\Phi_p}{\Phi - \Phi_p}. \end{aligned}$$

Po úpravách dostaneme

$$\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda q} - q - 1/\lambda = \Phi_p,$$

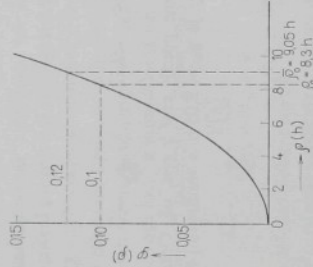
popř.

$$e^{-\lambda q} - \lambda q - 1 = \lambda \Phi_p,$$

a po dosazení

$$e^{-0,05q} - 0,05q - 1 = 0,1.$$

Je zřejmé, že pro exponenciální rozložení znižel ze vztahů parametr s . Srovnáním se vztahem (499) snadno zjistíme, že pro tento případ je optimální zace intervalu preventivní údržby a obnovy podle maximální hodnoty součinitele operační pohotovosti a podle součinitele pohotovosti shodná.



Obr. 68. Graf funkce $\phi(q)$ pro příklad 25

Nakreslíme-li (obr. 68) graf funkce

$$\phi(q) = e^{-0,05q} - 0,05q - 1,$$

zjistíme, že optimální interval preventivní údržby a obnovy odečtený z grafu je $q_0 = 8,3 \text{ h}$.

Podle (500) je maximální hodnota součinitele pohotovosti

$$\begin{aligned} K_p(q_0) &= \frac{R(q_0)}{1 + (\Phi - \Phi_p)f(q_0)} = \frac{e^{-\lambda q_0}}{1 + (\Phi - \Phi_p)\lambda e^{-\lambda q_0}} = \\ &= \frac{1}{e^{0,415} + 0,05} = 0,6392. \end{aligned}$$

Skutečný výkon všech 8 automatů za 14 hodin je

$$V_s = 8 \cdot 14 \cdot V_1 \cdot K_p(q_0) = 107\,385,6 \text{ Ks}.$$

Pro srovnání uvedme ještě podle (498), že

$$K_p(7) = 0,6354, \quad K_p(8) = 0,6383, \quad K_p(9) = 0,6378.$$

Při optimalizaci podle minima střední poměrné ztráty vyjdeme ze vztahu (507). Dostaneme

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\lambda q} + \lambda \int_0^q e^{-\lambda x} dx + \frac{c_c}{(c\phi - c_p\phi_p)e^{-\lambda q}} \int_0^q x \lambda e^{-\lambda x} dx = \\ = \frac{c_p\phi_p}{c\phi - c_p\phi_p}. \end{aligned}$$

Po zjednodušení

$$\frac{c_c}{\lambda} (e^{\lambda q} - \lambda q - 1) = c_p\phi_p,$$

tj.

$$q(q) = e^{\lambda q} - \lambda q - 1 = \frac{c_p}{c_c} \lambda \phi_p = 0,12.$$

I při řešení tohoto případu můžeme použít graf z obr. 68. Optimální interval preventivní údržby i obnovy je $\bar{q}_0 = 9,05$ h a minimální střední poměrná ztráta podle (508) je

$$\begin{aligned} C_p(\bar{q}_0) &= c_c \frac{1 - e^{-\lambda \bar{q}_0}}{e^{-\lambda \bar{q}_0}} + \lambda(c\phi - c_p\phi_p) = \\ &= 1\,500(e^{0,4525} - 1) + 0,05(2\,100 \cdot 3 - 1\,800 \cdot 2) = \\ &= 993,36 \text{ Ks} \cdot \text{h}^{-1}. \end{aligned}$$

Pro srovnání podle (506) dostaneme

$$C_p(q = 8) = 1\,000,9 \text{ Ks} \cdot \text{h}^{-1}, \quad C_p(q = 10) = 994,5 \text{ Ks} \cdot \text{h}^{-1}.$$

9.3 OPTIMALIZACE PREVENTIVNÍ ÚDRŽBY PEVNÉ AUTOMATICKÉ LINKY

Vezměme jednoproudou automatickou linku o n automatech s pevnou vazbou mezi automaty. Dosud uvažovaný charakter provozu linky spočíval v bezprostřední obnově provozuschopnosti automatu, jehož

porucha znamenala zastavení celé linky. Ostatní automaty nebyly podrobeny žádné údržbě, jejich stav před zastavením byl zachován.

Strategie preventivní údržby a obnovy automatické linky, kterou označíme strategii D, spočívá v zařazení preventivní údržby linky v určitých časových intervalech. Preventivní údržba linky o střední době trvání ϕ_p znamená navrácení linky z hlediska spolehlivosti do výchozího stavu. Při výskytu poruchy na některém automatu se skuteční plná obnova pouze u tohoto automatu.

Předpokládáme, že na počátku provozu je automatická linka ve výchozím stavu, tzn. ve stavu obnovení plné provozuschopnosti. Interval pro uskutečnění preventivní prohlídky stanovíme jako hodnotu náhodné veličiny η s rozložením pravděpodobnosti $Q(t)$. Veličina η označuje pouze skutečnou dobu bezporuchového provozu linky. Pro určení okamžiku uskutečnění preventivní údržby nebereme v úvahu doby obnovování provozuschopnosti automatů, při kterých není linka provozuschopná. Po skončení preventivní údržby znovu generujeme nový interval preventivní údržby a celý cyklus se opakuje.

Pro odvození algoritmu stanovení optimálního intervalu mezi preventivními údržbami použijeme dvě kritéria: maximální hodnota součinitele pohotovosti linky a minimální střední poměrná ztráta.

Součinitel pohotovosti pevné linky vyjádříme vztahem

$$K_p = \frac{E[\eta]}{E[\eta] + \phi_p + \psi}. \quad (509)$$

Pro střední dobu provozu linky během jednoho cyklu, tj. pro střední hodnotu náhodné veličiny η zřejmě platí

$$E[\eta] = \int_0^\infty t \, dQ(t). \quad (510)$$

Bezporuchový provoz linky uvažujeme jako proces obnovy typu A (žl. 2.1.3) s funkcí obnovy $H(t)$ pro i -tý automat, $i = 1, 2, \dots, n$. Střední doba obnovování provozuschopnosti i -tého automatu je ϕ_i . Potom pro střední dobu ψ obnovování provozuschopnosti linky během jednoho cyklu vzhledem k vzájemné nezávislosti procesu obnovy jednotlivých automatů dostaneme

$$\psi = \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^n H_i(t) \phi_i \right] dQ(t). \quad (511)$$

$$K_p = \frac{\int_0^{\infty} t dQ(t)}{\int_0^{\infty} [t + \phi_p + \sum_{i=1}^n \phi_i H_i(t)] dQ(t)} \quad (512)$$

Výraz v hranaté závorce ve jmenovateli je pro každé t větší než nula. Za tohoto předpokladu dosahuje podle [2] funkcionál tohoto typu maximální hodnoty pro distribuční funkci $Q(t)$ danou předpisem

$$Q(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \leq \varrho, \\ 1, & \text{pro } t > \varrho. \end{cases} \quad (513)$$

Po integraci podle $Q(t)$ v (512) se součinitel pohotovosti stává funkcí délky intervalu ϱ a má tvar

$$K_p(\varrho) = \frac{\varrho}{\varrho + \phi_p + \sum_{i=1}^n \phi_i H_i(\varrho)}. \quad (514)$$

Řešení daného problému nyní spočívá ve stanovení takového ϱ_0 , aby $K_p(\varrho)$ bylo maximální. Použijeme opět znalostí z matematické analýzy. Nutnou podmínkou pro existenci volného extrému funkce jedné proměnné je, aby se první derivace rovnala nule. Derivací zlomku z (514) dostáváme podmínku

$$\varrho \sum_{i=1}^n \phi_i H'_i(\varrho) - \sum_{i=1}^n \phi_i F(\varrho) = \phi_p. \quad (515)$$

Všechny kořeny $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ rovnice (515) dosadíme do (514) a vybereme ten, pro který je $K_p(\varrho)$ maximální, a označíme ho ϱ_0 . Pokud $\varrho_0 = \infty$, je zřejmé, že na zlepšení provozních podmínek automatické linky nemá zavedení preventivní údržby žádný vliv. Hodnotu součinitele pohotovosti pro optimální ϱ_0 můžeme s využitím (515) vypočítat ze vztahu

$$K_p(\varrho_0) = \max_{\varrho} K_p(\varrho) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \phi_i H'_i(\varrho_0)}. \quad (516)$$

Optimalizaci intervalu preventivní údržby lze uskutečnit pouze se znalostí funkcí obnov všech automatů zařazených v lince. Známe-li distribuční funkce dob bezporuchového provozu automatů, můžeme ke stanovení funkcí obnovy použít vztahu (29), popř. (31).

Srovnávací hodnotou pro součinitel pohotovosti linky při strategii D obsluhy je hodnota součinitele pohotovosti pevné automatické linky s obsluhou bez preventivních prohlídek, daná vztahem (309) v kap. 5.

Sřední poměrná ztráta C_p je poměr střední ztráty C_1 , vyvolané náklady na preventivní údržbu a obnovu linky, a doby bezporuchového provozu linky. Označíme-li C_p jednotkové náklady spojené s preventivní údržbou linky a c_i jednotkové náklady na obnovu i -tého automatu, můžeme pro střední ztrátu odpovídající době bezporuchového provozu linky napsat vztah

$$C_1(\varrho) = c_p \phi_p + \sum_{i=1}^n c_i \phi_i H_i(\varrho). \quad (517)$$

$$C_p(\varrho) = \frac{c_p \phi_p + \sum_{i=1}^n c_i \phi_i H_i(\varrho)}{\varrho}. \quad (518)$$

Body lokálních extrémů funkce $C_p(\varrho)$ dostaneme, položíme-li rovnou nule první derivaci. Podmínku lze upravit do tvaru

$$\varrho \sum_{i=1}^n c_i \phi_i H'_i(\varrho) - \sum_{i=1}^n c_i \phi_i H_i(\varrho) = c_p \phi_p. \quad (519)$$

Je-li kořen $\bar{\varrho}_0$ rovnice (519), pro který $C_p(\varrho)$ z (518) nabývá minimální hodnoty, konečné číslo, můžeme velikost minimální ztráty stanovit ze vztahu

$$C_p(\bar{\varrho}_0) = \min_{\varrho} C_p(\varrho) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i H'_i(\bar{\varrho}_0). \quad (520)$$

Sřední poměrnou ztrátu C_p na automatické lince bez preventivní údržby stanovíme z podmínky $\varrho \rightarrow \infty$ a dostaneme

$$C_p = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} C_p(\varrho) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{H_i(\varrho)}{\varrho}. \quad (521)$$

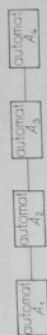
S použitím základní věty teorie obnovy (28) platí

$$C_p = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\phi_i}{T_i}. \quad (522)$$

Příklad 26:

Mějme automatickou linku s pevnou vazbou (obr. 69). Doba bezporuchového provozu prvního a čtvrtého automatu má exponenciální rozložení druhého a třetího gama rozložení. Parametry rozložení včetně všech ostat-

ních parametrů automatické linky jsou v tab. 35. Stanovte pro danou linku optimální interval preventivní údržby při strategii obsluhy D jak vzhledem k optimální hodnotě součinitele pohotovosti, tak vzhledem k minimální střední poměrné ztrátě.



Obr. 69. Schéma pevné automatické linky z příkladu 26

Tab. 35. Dané parametry automatické linky

Index automatu	1	2	3	4
λ_4 (h ⁻¹)	0,06	0,54	0,78	0,08
m_i	—	2	2	—
T_i (h)	16,67	3,70	2,56	12,50
ϕ_i (h)	1,5	0,6	0,4	1,2
c_i (KCs. h ⁻¹)	800	800	1000	800
ϕ_p (h)	0,22			
c_p (KCs. h ⁻¹)	900			

Řešení:

Východiskom vzťahom pro výpočet optimálneho intervalu preventívnej údržby s použitím součinitele pohotovosti je vztah (515). Odvození funkce obnovy a jejich derivací lze s výhodou zaznamenat do tabulky (tab. 36). Odvozené výrazy použijeme v (515) a dostaneme

$$-\frac{1}{4}(\Phi_2 + \Phi_3) - (\frac{1}{4}\Phi_2 + \frac{1}{2}\Phi_2\lambda_2Q)e^{-2\lambda_2Q} - (\frac{1}{4}\Phi_3 + \frac{1}{2}\Phi_3\lambda_3Q)e^{-2\lambda_3Q} = \Phi_0.$$

Označme levou stranu rovnice $\omega(\rho)$. Po dosažení konstant z tab. 35 obdržíme

$$\rho(\phi) = 0.25 - (0.15 + 0.16\phi)e^{-1.08\phi} - (0.1 + 0.156\phi)e^{-1.56\phi}.$$

Je zřejmě, že $\varphi(0) = 0$ a pro $q \rightarrow \infty$ je $\varphi(\infty) = 0,25$. Funkce je tedy omezena a pro $\Phi_p \geq 0,25$ nelze stanovit optimální interval preventivní údržby. V tomto případě nelze uskutečněním preventivní údržby zvýšit součinitel pohotovosti.

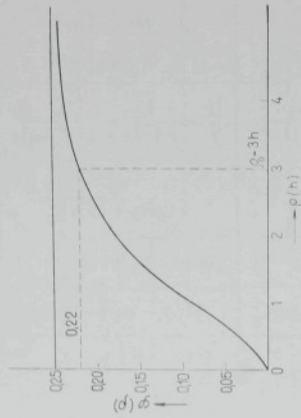
Podle tab. 35 je $\phi_n = 0,22$; optimální interval tedy existuje. K jeho stanovení použijeme

Tab. 36. Distribuční funkce a funkce obnovy automatu v pevné lince

[illegible]

vení použijeme grafickou metodu. Funkce $\varphi(t)$ je vynesena na obr. 70. Snadno odvodíme, že $\varphi(3) \doteq 0,22 \Rightarrow \bar{c}_0 = 3$ h. Pro maximální hodnotu součinitele pohotovosti podle (516) platí

$$K_p(\bar{c}_0) = \frac{1}{1 + \phi_1 \lambda_1 + \frac{1}{2} \phi_2 \lambda_2 (1 - e^{-2\lambda_2 \bar{c}_0}) + \frac{1}{4} \phi_3 \lambda_3 (1 - e^{-2\lambda_3 \bar{c}_0}) + \phi_4 \lambda_4}$$



Obr. 70. Vyhodnocení optimálního intervalu preventivní údržby vzhledem k součiniteli pohotovosti

a odůd

$$K_p(3) = 0,668.$$

Jestliže v automatické lince nezavedeme preventivní údržbu, bude mít součinitel pohotovosti podle (309) hodnotu

$$K_p = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^4 \frac{\phi_i}{T_i}} = 0,665.$$

K minimalizaci střední poměrné ztráty použijeme podmínky (519), kterou po dosazení lze upravit do tvaru

$$\frac{1}{4} (c_2 \phi_2 + c_3 \phi_3) - (4c_2 \phi_2 + \frac{1}{2} c_2 \phi_2 \lambda_2) e^{-2\lambda_2 \bar{c}_0} - \frac{1}{4} (4c_3 \phi_3 + \frac{1}{2} c_3 \phi_3 \lambda_3) e^{-2\lambda_3 \bar{c}_0} = c_p \phi_p.$$

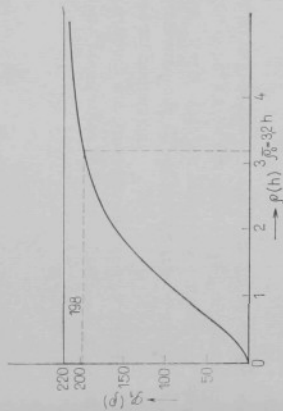
Označíme-li levou stranu rovnice $\varphi_1(\bar{c}_0)$ a dosadíme-li konstanty z tab. 35, dostaneme

$$\varphi_1(\bar{c}_0) = 220 - (120 + 129,6 \bar{c}_0) e^{-1,08 \bar{c}_0} - (100 + 156 \bar{c}_0) e^{-1,59 \bar{c}_0}.$$

Graf funkce $\varphi_1(\bar{c}_0)$ je zachycen obr. 71. Pro $c_p \phi_p = 198$ můžeme z grafu odvodit $\varphi_1(3,2) \doteq 198 \Rightarrow \bar{c}_0 = 3,2$ h. Střední poměrnou ztrátu pro $\bar{c}_0 = 3,2$

stanovíme z (520):

$$C_p(\bar{c}_0) = c_1 \phi_1 \lambda_1 + \frac{1}{2} c_2 \phi_2 \lambda_2 (1 - e^{-2\lambda_2 \bar{c}_0}) + \frac{1}{4} c_3 \phi_3 \lambda_3 (1 - e^{-2\lambda_3 \bar{c}_0}) + c_4 \phi_4 \lambda_4$$



Obr. 71. Vyhodnocení optimálního intervalu preventivní údržby vzhledem ke střední poměrné ztrátě

a po dosazení

$$C_p(3,2) = 429,25 \text{ Kčs} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Střední poměrná ztráta v provozu bez preventivní údržby je podle (522)

$$C_p = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\phi_i}{T_i} = 434,76 \text{ Kčs} \cdot \text{h}^{-1}.$$

10 Jakost výrobků zhotovených na automatických strojích

Rozhodující vliv na jakost a spolehlivost výrobků mají jakost výchozích surovin, parametry polotovárů, podmínky zpracování a způsob využívání. Pokušíme se podrobněji analyzovat jeden z těchto rozmanitých vlivů, který souvisí s výrobními podmínkami.

Výrobní podmínky v automatizované výrobě jsou do značné míry vázány na vlastní výrobní automat. Každý výrobek setrvává v automatu v jeho bezprostředním vlivu určitou dobu, kterou označíme ω . Je-li takt automatu 9, pak je v každém okamžiku ovlivňováno výrobními podmínkami v automatu právě $\omega/9$ výrobků.

Poruchy, které u každého reálného automatu vznikají, způsobí, že v automatu se $\omega/9$ výrobků zdrží ne dobu ω , ale dobu delší, která závisí na rozložení pravděpodobnosti doby obnovování provozuschopnosti automatu. Současně lze předpokládat, že se změni i podmínky, za kterých technologická operace podle technologického postupu běžně probíhá.

Výrobky, které v době poruchy byly v automatu, měly poněkud jiné výrobní podmínky než výrobky, které prošly automatem za bezporuchového provozu. Lze očekávat, že výrobky, které při průchodu automatem zastihla porucha, budou vykazovat jiné vlastnosti, poněvadž výrobní podmínky nebyly standardní.

K důležitým ukazatelům jakosti a spolehlivosti výrobků můžeme přidat procento výrobků, které při průchodu automatem zastihla porucha automatu. V pravděpodobnostním pojetí je tímto činitelem pravděpodobnost $P(\omega)$, že výrobek vstupující do automatu v době jeho provozu zastihne během průchodu automatem poruchu.

10.1 STANOVENÍ POČTU VÝROBKŮ OVLIVNĚNÝCH PORUCHOU AUTOMATU

Nejprve uvedeme orientační výpočet, který vyžaduje některé předpoklady. V intervalu $(0, t)$ pracuje automat po dobu $t_1 = K_p t$. Pro střední hodnotu $v(t_1)$ počtu poruch za dobu t_1 , je-li t_1 dostatečně velké, platí

$$v(t_1) = \frac{t_1}{T}. \quad (523)$$

Pokud $T \gg \omega$, pak každá porucha zasáhne právě ωq výrobků. Přibližný celkový počet $N_p(t)$ výrobků ovlivněných poruchou v intervalu $(0, t)$ je

$$N_p(t) = \frac{t_1}{T} \omega q. \quad (524)$$

Je-li celkový počet $N_c(t)$ výrobků vyrobených automatem v intervalu $(0, t)$

$$N_c(t) = t_1 q, \quad (525)$$

platí pro přibližný počet výrobků n_p ovlivněných poruchou v procentech vztah

$$n_p = \frac{N_p(t)}{N_c(t)} \cdot 100 = \frac{\omega}{T} \cdot 100(\%). \quad (526)$$

Přesný výpočet pravděpodobnosti $P(\omega)$ předpokládá znalost distribuční funkce $F(t)$ doby bezporuchového provozu, resp. pravděpodobnosti $R(t)$ bezporuchového provozu automatu.

Výrobek vstupuje do automatu právě v okamžiku t . Stanovme pravděpodobnost $\bar{P}(\omega, t)$ bezporuchového provozu automatu v intervalu $(t, t + \omega)$. Bezporuchový provoz automatu v intervalu $(t, t + \omega)$ může nastat právě ve dvou případech:

- Automat pracuje bez poruchy po dobu delší než $t + \omega$. Pravděpodobnost výskytu tohoto jevu je $R(t + \omega)$.
- V okamžiku x , $0 < x \leq t$ byla ukončena obnova automatu. V intervalu $(x, t + \omega)$ pracoval automat bez poruchy.

K odvození pravděpodobnosti výskytu druhého jevu použijeme funkci obnovy $H(t)$. Vstup výrobku do automatu je možný pouze v době provozu automatu, proto použijeme variantu A procesu obnovy z čl. 2.1.3. V souladu s (97) můžeme pravděpodobnost $\bar{P}(\omega, t)$ vyjádřit vztahem

$$\bar{P}(\omega, t) = R(t + \omega) + \int_0^t R(t + \omega - x) dH(x). \quad (527)$$

Pravděpodobnost $\bar{P}(\omega)$, že automat bude pracovat po dobu ω , když na začátku intervalu ω byl provozuschopný, získáme limitním přechodem

$$\bar{P}(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{P}(\omega, t). \quad (528)$$

S využitím hlavní věty teorie obnovy (36) dostaneme

$$\bar{P}(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^{\omega} R(x + \omega) dx. \quad (529)$$

Pro pravděpodobnost $P(\omega)$, že výrobek vstupující do automatu v libovolném okamžiku jeho provozu zastihne během průchodu automatu alespoň jedna porucha, zřejmě platí

$$P(\omega) = 1 - \bar{P}(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^{\omega} R(x) dx. \quad (530)$$

S využitím vztahu (530) lze nalézt pravděpodobnost, že výrobek během průchodu automatem zastihne alespoň jedna porucha, pro libovolné známé rozložení dob bezporuchového provozu.

Stanovíme pravděpodobnost $P(\omega)$ pro některá vybraná rozložení pravděpodobnosti bezporuchového provozu.

a) Exponenciální rozložení

$$R(x) = e^{-\lambda x}; \quad T = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow P(\omega) = \int_0^{\omega} e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda \omega} \quad (531)$$

a po úpravě

$$P(\omega) = \frac{\omega}{T} - \frac{1}{2!} \left(\frac{\omega}{T} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\omega}{T} \right)^3 - \dots \quad (532)$$

Jestliže $T \gg \omega$, lze pro praktické výpočty nahradit vztah (531) vztahem (526).

b) Weibullovo rozložení

$$R(x) = e^{-\lambda x^m}; \quad T = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)}{m\sqrt{\lambda}} \quad (533)$$

a odtud

$$P(\omega) = \frac{m\sqrt{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)} \int_0^{\omega} e^{-\lambda x^m} dx. \quad (534)$$

Pro $m = 2$ dostaneme

$$P(\omega) = 2 \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \int_0^{\omega} e^{-\lambda x^2} dx.$$

c) Gama rozložení

$$R(x) = 1 - \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \int_0^x z^{m-1} e^{-\lambda z} dz; \quad T = \frac{m}{\lambda}.$$

Pro $m = 2$ platí

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \lambda \int_0^{\omega} (1 + \lambda x) e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda \omega} - \frac{1}{2} \lambda \omega e^{-\lambda \omega}. \quad (535)$$

Příklad 27: Stanovte pravděpodobnost, že výrobek zastihne porucha automatu, jestliže $\lambda = 0,2 \text{ h}^{-1}$, $\omega = 0,5 \text{ h}$ při použitých případech rozložení pravděpodobnosti dob bezporuchového provozu a), b), c).

Řešení:

a) Exponenciální rozložení (531)

$$P(0,5) = 1 - e^{-0,2 \cdot 0,5} = 0,095 (= 9,5\%).$$

b) Weibullovo rozložení $m = 2$ (534)

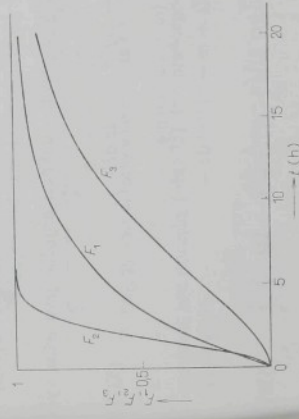
$$P(0,5) = 2 \sqrt{\frac{0,2}{\pi}} \int_0^{0,5} e^{-0,2x^2} dx = 0,248 (= 24,8\%),$$

vzhledem k tomu, že $\int_0^{0,5} e^{-0,2x^2} dx = 0,49176$.

c) Gama rozložení $m = 2$ (535)

$$P(0,5) = 1 - e^{-0,1} - 0,05 e^{-0,1} = 0,0499 (= 5\%).$$

Alespoň jednou poruchou bude postiženo v případě a) 9,5% výrobků, v případě b) 24,8% a v c) 5% všech výrobků vyrobených na automatu. Značné rozdíly mezi těmito výsledky vyplývají (jak je patrné z obr. 72) z podstatných rozdílů v použitých distribučních funkcích.



Obr. 72. Průběh distribučních funkcí exponenciálního (F_1), Weibullova (F_2) a gama (F_3) rozložení pravděpodobnosti z příkladu 27

10.2 VLIV DOBY OBNOVOVÁNÍ PROVOZUSCHOPNOSTI

Předpokládáme, že jakost výrobků může ohrozit pouze porucha automatu iravající děle než jistou dobu, kterou označíme z . Pravděpodobnost, že při vzniklé poruše bude doba obnovování provozuschopnosti delší než z , je

$$P(\theta > z) = 1 - G(z). \quad (536)$$

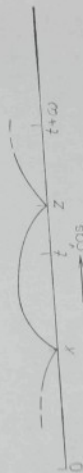
Abychom postihli vliv těchto poruch, odvodíme pravděpodobnost $P(\omega, z)$, že výrobek zastihne během průchodu automatem alespoň jedna porucha s dobou obnovování provozuschopnosti delší než z .

Označme $P_1(\omega, t)$ pravděpodobnost, že v časovém intervalu $(t, t + \omega)$ vznikne právě i poruch. Stanovme nejprve vztah pro $P_1(\omega, t)$. Jediná porucha v intervalu $(t, t + \omega)$ může vzniknout právě ve dvou případech:

1. První porucha automatu vznikla v okamžiku z , $t < z \leq t + \omega$. V intervalu $(z, t + \omega)$ pracoval automat bez poruchy. Pravděpodobnost výskytu tohoto jevu je

$$\int_t^{t+\omega} R(t + \omega - z) f(z) dz.$$

2. Obnova automatu byla ukončena v x , $0 < x \leq t$, a nejbližší následující



Obr. 73. Jediná porucha v intervalu $(t, t + \omega)$

porucha vznikla v okamžiku z , pro který $t < z \leq t + \omega$. (Obr. 73). V následujícím intervalu $(z, t + \omega)$ pracoval automat bez poruchy.

S využitím funkce obnovy je pravděpodobnost druhého jevu dána vztahem

$$\int_0^t \int_t^{t+\omega} R(t + \omega - z) f(z - x) dz dH(x). \quad (537)$$

Pro pravděpodobnost $P_1(\omega, t)$ dostaneme

$$P_1(\omega, t) = \int_t^{t+\omega} R(t + \omega - z) f(z) dz + \int_0^t \int_t^{t+\omega} R(t + \omega - z) f(z - x) dz dH(x). \quad (538)$$

Pravděpodobnost $P_1(\omega)$, že během provozu automatu po dobu ω vznikne právě jedna porucha, je

$$P_1(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_1(\omega, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\omega} R(t + \omega - z) f(z) dz + \int_0^t \int_t^{t+\omega} R(t + \omega - z) f(z - x) dz dH(x). \quad (539)$$

Podobně odvodíme pravděpodobnost $P_2(\omega, t)$, že během provozu automatu v intervalu $(t, t + \omega)$ vzniknou právě dvě poruchy. Tento jev může nastat ve dvou případech:

1. První porucha vznikla v okamžiku z , $t < z \leq t + \omega$, druhá porucha



Obr. 74. Dvě poruchy v intervalu $(t, t + \omega)$; jev 1

v okamžiku u (Obr. 74), pro který platí $z < u \leq t + \omega$. V intervalu $(u, t + \omega)$ už k opravě nedošlo. Pravděpodobnost tohoto jevu je

$$\int_t^{t+\omega} \int_t^{t+\omega} R(t + \omega - u) f(u - z) f(z) du dz. \quad (540)$$

2. V okamžiku x , $0 < x \leq t$, byla ukončena obnova automatu. Nejbližší následující porucha nastala v okamžiku z , $t < z \leq t + \omega$, druhá porucha v okamžiku u , $z < u \leq t + \omega$, a v intervalu $(u, t + \omega)$ pracoval



Obr. 75. Dvě poruchy v intervalu $(t, t + \omega)$; jev 2

automat bez poruchy (Obr. 75). Pro pravděpodobnost výskytu tohoto jevu platí vztah

$$\int_0^t \int_t^{t+\omega} \int_t^{t+\omega} R(t + \omega - u) f(u - z) f(z - x) du dz dH(x). \quad (541)$$

Odtud

$$P_2(\omega, t) = \int_t^{t+\omega} R(t + \omega - u) f(u - z) f(z) du dz + \\ + \int_0^t \int_t^{t+\omega} R(t + \omega - u) f(u - z) f(z - x) du dz dH(x). \quad (542)$$

Pravděpodobnost $P_2(\omega)$, že během provozu automatu po dobu ω (když na začátku intervalu je automat provozuschopný) nastanou právě dvě poruchy, je

$$P_2(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_2(\omega, t). \quad (543)$$



Obr. 76. Tři poruchy v intervalu $(t, t + \omega)$; jev 2

Obdobným způsobem obdržíme všechny ostatní pravděpodobnosti. Pro $P_3(\omega)$ např. platí (viz obr. 76)

$$P_3(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_t^{t+\omega} \int_t^{t+\omega} \int_t^{t+\omega} R(t + \omega - y) f(y - u) f(u - z) f(z) dy du dz + \right. \\ \left. + \int_0^t \int_t^{t+\omega} \int_t^{t+\omega} R(t + \omega - y) f(y - u) f(u - z) \cdot \right. \\ \left. \cdot f(z - x) dy du dz dH(x) \right]. \quad (544)$$

Pravděpodobnost výskytu alespoň jedné poruchy během provozu automatu po dobu ω , když na začátku intervalu je automat v provozu, jsme označili $P(\omega)$. Zřejmě platí

$$P(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(\omega). \quad (545)$$

Aby posloupnost $P_1, P_2, \dots$ měla konečný součet, musí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_i(\omega) = 0. \quad (546)$$

Pro praktické účely postačí zpravidla výpočet několika prvních členů posloupnosti.

Nyní si všimněme doby obnovování provozuschopnosti. Pravděpodobnost že i dob obnovování provozuschopnosti (navzájem nezávislých) bude kratších než x , je $G'(x)$. Pro pravděpodobnost, že alespoň při jedné poruše bude doba obnovování provozuschopnosti delší než x , tedy zřejmě dostaneme

$$1 - G'(x). \quad (547)$$

Doba bezporuchového provozu a doby obnovování provozuschopnosti jsou nezávislé náhodné jevy, proto pro pravděpodobnost, že během intervalu ω se vyskytne celkem i poruch, z nichž alespoň jedna bude delší než x , platí

$$P_i(\omega) [1 - G'(x)]. \quad (548)$$

Konečně pro pravděpodobnost $P(\omega, x)$, že během zpracovávání výrobku automatem po dobu ω se vyskytne alespoň jedna porucha s následující dobou obnovování provozuschopnosti větší než x , obdržíme vztah

$$P(\omega, x) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(\omega) [1 - G'(x)]. \quad (549)$$

Nároky na jakost výrobků mohou výstít i v požadavek, aby po dobu ω zpracování výrobku na automatu nepřesáhla celková doba obnovování provozuschopnosti po všech vyskytnuvších se poruchách předem stanovenou dobu ζ . V tomto případě bude nás zajímat výpočet pravděpodobnosti $P(\omega, \zeta)$, že celkový součet dob obnovování provozuschopnosti při provozu po dobu ω bude větší než ζ .

Nechť v intervalu ω vzniklo i poruch a pro součet dob obnovování provozuschopnosti platí $\xi_i = \Theta_1 + \Theta_2 + \dots + \Theta_i$. Distribuční funkci náhodné veličiny ξ_i označme $G_i(t)$ a hustotu pravděpodobnosti $g_i(t)$. Z teorie pravděpodobnosti [25] je známo, že pro hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $\xi_{i+1} = \xi_i + \Theta_{i+1}$, vyjadřující celkovou dobu obnovování provozuschopnosti při $(i + 1)$ poruchách, platí vztah

$$g_{i+1}(t) = \int_0^t g_i(t - x) g(x) dx. \quad (550)$$

S využitím tohoto rekurentního vztahu můžeme stanovit posloupnost hustot $g_1(t), g_2(t), \dots$ i posloupnost distribučních funkcí $G_1(t), G_2(t), \dots$, když $g_1(t) = g(t)$.

Má-li doba obnovování provozuschopnosti exponenciální rozložení s parametrem λ , má náhodná veličina ξ_i hustotu pravděpodobnosti danou

vztahem

$$g_i(t) = \frac{\lambda^i t^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda t}, \quad (551)$$

tj. ξ_i má gama rozložení s parametry λ, i .

Hledaná pravděpodobnost $P(\omega, \xi)$, že výrobek, který je na automatu zpracováván po dobu ω , zastihnou poruchy automatu, jejichž celková doba obnovování provozuschopnosti bude větší než ξ , je

$$P(\omega, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(\omega) [1 - G_i(\xi)]. \quad (552)$$

Příklad 28: Stanovte posloupnost pravděpodobností $P_1(\omega), P_2(\omega), \dots$ pro exponenciální rozložení dob bezporuchového provozu.

Řešení:

Nechť $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $R(t) = e^{-\lambda t}$, $f(t) = e^{-\lambda t}$ a současně $dH(x) = h(x) dx$, kde podle (117) $h(x) = \lambda$. Z (539) dostaneme

$$\begin{aligned} P_1(\omega) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_t^{t+\omega} e^{-\lambda(t+\omega-z)} \lambda e^{-\lambda(z-x)} \lambda dz dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^{t+\omega} e^{-\lambda(t+\omega-z)} \lambda e^{-\lambda(z-x)} \lambda dz dx \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\lambda e^{-\lambda(t+\omega)} \int_t^{t+\omega} dz + \lambda^2 e^{-\lambda(t+\omega)} \int_0^{t+\omega} \int_0^t e^{\lambda x} dz dx \right] = \\ &= \lambda \omega e^{-\lambda \omega}. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost $P_2(\omega)$ stanovíme z (543)

$$\begin{aligned} P_2(\omega) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_t^{t+\omega} \int_t^{t+\omega} e^{-\lambda(t+\omega-u)} \lambda e^{-\lambda(u-v)} \lambda e^{-\lambda(x-s)} \lambda du dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^{t+\omega} \int_t^{t+\omega} e^{-\lambda(t+\omega-u)} \lambda e^{-\lambda(u-v)} \lambda e^{-\lambda(x-s)} \lambda du dz dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lambda^2 \omega^2 e^{-\lambda \omega}. \end{aligned}$$

Stejným způsobem podle (544) dostaneme

$$P_3(\omega) = \frac{1}{6} \lambda^3 \omega^3 e^{-\lambda \omega}.$$

Je zřejmé, že

$$P_i(\omega) = \frac{(\lambda \omega)^i}{i!} e^{-\lambda \omega} \quad (553)$$

a v souladu se vztahem (531) platí

$$P(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda \omega)^i}{i!} e^{-\lambda \omega} = 1 - e^{-\lambda \omega}.$$

10.3 JAKOST VÝROBKŮ ZHOTOVENÝCH AUTOMATICKÝMI VÝROBNÍMI SYSTÉMY

Každý výrobek v průběhu technologického procesu prochází určitým počtem výrobních strojů. Na každém stroji ho může zastihnout porucha, která nepříznivě ovlivní jeho výsledné parametry. Předpokládáme znalost pravděpodobnosti $P(\omega_i)$, že výrobek na i -tém stroji byl ovlivněn poruchou stroje, přičemž $i = 1, 2, \dots, n$. Počet strojů jsme označili n . Stanovení pravděpodobnosti, že výrobek zastihla porucha alespoň jednoho automatu, bude závisle na uspořádání strojů ve výrobním systému. Vezmeme některá základní uspořádání.

10.3.1 Systém n nezávislých strojů

Jednotlivé stroje jsou navzájem nezávislé a výrobky jsou obsluhováni transportovány od stroje ke stroji. Pro každý stroj můžeme stanovit $P(\omega_i)$. Pravděpodobnost, že výrobek nezastihne žádná porucha během průchodu n automatů, je

$$\prod_{i=1}^n [1 - P(\omega_i)] \quad (554)$$

a pro pravděpodobnost $P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, že výrobek zastihne alespoň jedna porucha, zřejmě platí

$$P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(\omega_i)]. \quad (555)$$

Nyní předpokládáme, že parametry výrobku budou negativně ovlivněny pouze v případě, že výrobek zastihne během zpracování na prvním automatu nejméně jedna porucha s dobou obnovování provozuschopnosti větší než ξ_1 , nebo nejméně jedna porucha na druhém automatu větší než ξ_2 atd. V tom-

to připadá stanovíme pro každý automat pravděpodobnosti $P(\omega_i, \kappa_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ podle vztahu (549) a výsledná pravděpodobnost, že výrobek při zpracování na některém z n automatů zastihne alespoň jedna porucha s nadkritickou dobou obnovování provozuschopnosti, je

$$P(\omega_1, \dots, \omega_n, \kappa_1, \dots, \kappa_n) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(\omega_i, \kappa_i)]. \quad (556)$$

Jestliže je pro jakost výrobků rozhodující požadavek, aby na jednotlivých automatech nebyly postiženy poruchami s celkovou dobou obnovování provozuschopnosti větší než postupně $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, stanovíme pro každý automat pravděpodobnost $P(\omega_i, \zeta_i)$; $i = 1, 2, \dots, n$. Výslednou pravděpodobnost, že během zpracování zastihnou výrobek alespoň na jednom pracovišti poruchy s nepřipustnou celkovou dobou obnovování provozuschopnosti, je

$$P(\omega_1, \dots, \omega_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(\omega_i, \zeta_i)]. \quad (557)$$

Lze předpokládat i výskyt takových výrobních systémů s n nezávislými automaty, ve kterých se současně vyskytují oba typy zkoumaných vazeb dob obnovování provozuschopnosti. Formální shoda vztahů (556), (557) umožňuje dosadit pravděpodobnosti $P(\omega_i, \kappa_i)$ a $P(\omega_i, \zeta_i)$ v potřebných kombinacích do jednoho ze vztahů a stanovit výslednou pravděpodobnost, že výrobek bude negativně ovlivněn poruchami alespoň jednoho automatu.

10.3.2 Automatická linka s pevnou vazbou

Výrobní automaty jsou automatickým dopravníkem spojeny do automatické linky s pevnou vazbou. Pro pravděpodobnost $R_k(t)$ bezporuchového provozu linky s pevnou vazbou při známých pravděpodobnostech $R_1(t), R_2(t), \dots, R_n(t)$ bezporuchového provozu jednotlivých automatů dostaneme vztah (viz 291))

$$R_k(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot \dots \cdot R_n(t). \quad (558)$$

Pravděpodobnost bezporuchového provozu každého automatu v lince je právě $R_k(t)$. Pro pravděpodobnost $P(\omega_i)$, že v i -tém automatu zastihne výrobek porucha, byť i jiného automatu, platí

$$P(\omega_i) = \frac{1}{T_i} \int_0^{\infty} R_i(x) dx, \quad (559)$$

kde T_i je střední doba bezporuchového provozu celé linky. Se znalostí všech $P(\omega_i)$ můžeme pravděpodobnost, že porucha některého automatu zastihne výrobek v lince, spočítat podle vztahu (555).

Jestliže negativní vliv na parametry výrobků má porucha i -tého automatu s dobou obnovování provozuschopnosti delší než κ_i , lze pravděpodobnost, že výrobek v lince zastihne alespoň jedna porucha libovolného automatu s dobou obnovování provozuschopnosti delší než κ_i , vypočítat ze vztahu

$$P(\omega_1, \dots, \omega_n, \kappa_1, \dots, \kappa_n) = 1 - \prod_{k=1}^n [1 - P(\omega_k, \kappa_k)], \quad (560)$$

kde $P(\omega_k, \kappa_k)$ je pravděpodobnost, že na k -tém automatu zastihne výrobek porucha s dobou obnovování provozuschopnosti delší než κ_k . Pravděpodobnost $P(\omega_k, \kappa_k)$ stanovíme ze vztahu

$$P(\omega_k, \kappa_k) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_k) [1 - \bar{G}^i(\kappa_k)]; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (561)$$

Distribuční funkci $\bar{G}(t)$ dob obnovování provozuschopnosti pevně automatické linky stanovíme s využitím vztahů (299), popř. (302).

Budou-li parametry výrobků ohroženy pouze v případě, že výrobek během zpracování zastihnou alespoň na jednom automatu poruchy s celkovou dobou obnovování provozuschopnosti větší než ζ_i ; $i = 1, 2, \dots, n$, stanovíme odpovídající pravděpodobnost $P(\omega_1, \dots, \omega_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ z výrazu

$$P(\omega_1, \dots, \omega_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n) = 1 - \prod_{k=1}^n [1 - P(\omega_k, \zeta_k)], \quad (562)$$

kde

$$P(\omega_k, \zeta_k) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_k) [1 - \bar{G}_i(\zeta_k)]; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (563)$$

Posloupnost distribučních funkcí $\bar{G}_i(t)$ stanovíme s přihlédnutím k (550). Po formální stránce jsou vztahy (560) a (562) velmi blízké. To umožňuje velmi snadno řešit rozmanité kombinace požadavků na působení dob obnovování provozuschopnosti na jakost výrobků.

Příklad 29:

Vezměme automatickou linku s pevnou vazbou na povrchové úpravy kovových dílů. V automatu A_1 se díly zakládají do palet, které se oplachují A_2 , projdou povrchovou úpravou A_3 , mycím zařízením A_4 . Automat A_5 vyjímá hotové díly z palet. Stanovte počet výrobků, které při zpracování na lince zastihne alespoň jedna porucha i -tého automatu delší než κ_i , když doby

bezporuchového provozu i doby obnovování provozuschopnosti všech automatů mají exponenciální rozložení s parametry uvedenými v tab. 37. Kritické doby x_i rovněž obsahuje tab. 37.

Tab. 37. Parametry automatické linky pro příklad 29

Index automatu	1	2	3	4	5
λ_i (h^{-1})	1,8	0,15	0,2	0,1	0,25
μ_i (h^{-1})	100	5	4	10	12
ω_i (h)	0,004	0,1	0,6	0,3	0,06
x_i (h)	∞	0,05	0,1	0,15	∞

Řešení:

Výsledná intenzita poruch automatické linky je dána vztahem

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^5 \lambda_i = 2,5 \text{ h}^{-1}.$$

Pro první automat dostaneme (559)

$$P(\omega_1 = 0,004) = \lambda_1 \int_0^{\omega_1} e^{-\lambda_1 x} dx = 1 - e^{-0,01} = 0,009 \text{ 95}.$$

Podobně pro ostatní automaty

$$P(\omega_2 = 0,1) = 0,221 \text{ 2}; \quad P(\omega_3 = 0,6) = 0,776 \text{ 87};$$

$$P(\omega_4 = 0,3) = 0,527 \text{ 63}; \quad P(\omega_5 = 0,06) = 0,139 \text{ 29}.$$

Výsledná pravděpodobnost, že při průchodu automatickou linkou zastihne výrobek porucha alespoň jednoho automatu, je podle (555)

$$P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5) = 1 - \prod_{i=1}^5 [1 - P(\omega_i)] = 0,930 \text{ 1}.$$

Pro všechny automaty stanovíme pravděpodobnosti $P_i(\omega_k)$, že k -tý automat bude mít v intervalu ω_k právě i poruch. Použijeme výsledek příkladu 28, který byl formulován vztahem (553),

$$P_i(\omega_k) = \frac{(\lambda_1 \omega_k)^i}{i!} e^{-\lambda_1 \omega_k}.$$

Výsledky jsou v tab. 38.

Tab. 38. Pravděpodobnosti výskytu i poruch na pěti automatech z příkladu 29

Index auto- matu k	$\lambda_1 \omega_k$	$\exp(-\lambda_1 \omega_k)$	Pravděpodobnost $P_i(\omega_k)$ výskytu právě i poruch									
			$i = 1$									
1	0,01	0,990 05	0,009 90	0,000 05	0,000 00	—	—	—	—	—	—	—
2	0,25	0,778 80	0,194 70	0,024 34	0,002 03	0,000 13	0,000 01	0,000 00	—	—	—	—
3	1,50	0,223 13	0,334 70	0,251 02	0,125 51	0,047 07	0,014 12	0,003 53	0,000 76	0,000 01	—	—
4	0,75	0,472 37	0,554 28	0,132 85	0,033 21	0,006 23	0,000 93	0,000 12	—	—	—	—
5	0,15	0,860 71	0,129 11	0,009 68	0,000 48	0,000 00	—	—	—	—	—	—
			$i = 10$									
			—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Pro distribuční funkci dob obnovování provozuschopnosti linky podle (302) platí

$$\bar{G}(t) = \sum_{i=1}^5 \frac{\lambda_i}{\lambda_1} (1 - e^{-\mu t}) = 1 - \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^5 \lambda_i e^{-\mu t}.$$

Po dosazení

$$\bar{G}(t) = 1 - \frac{1}{2,5} (1,8 e^{-100t} + 0,15 e^{-5t} + 0,2 e^{-4t} + 0,1 e^{-10t} + 0,25 e^{-12t}).$$

Použijeme-li z tab. 37 hodnoty λ_i , dostaneme

$$\begin{aligned}\bar{G}(t = \lambda_1 = \infty) &= 1, \\ \bar{G}(t = \lambda_2 = 0,05) &= 0,803\,78, \\ \bar{G}(t = \lambda_3 = 0,1) &= 0,865\,12, \\ \bar{G}(t = \lambda_4 = 0,15) &= 0,902\,30, \\ \bar{G}(t = \lambda_5 = \infty) &= 1.\end{aligned}$$

S použitím (561) pro pravděpodobnost $P(\omega_k, \lambda_k)$, že na k -tém automatu, $k = 1, 2, \dots, 5$ zastihne výrobek alespoň jedna porucha delší než λ_k , platí

$$\begin{aligned}P(\omega_1 = 0,004; \lambda_1 = \infty) &= \sum_{i=1}^{\infty} P_i(\omega_1) [1 - 1] = 0, \\ P(\omega_2 = 0,1; \lambda_2 = 0,05) &= \sum_{i=1}^{\infty} P_i(\omega_2) [1 - \bar{G}(\lambda_2)] = 0,047\,88, \\ P(\omega_3 = 0,6; \lambda_3 = 0,1) &= \sum_{i=1}^{\infty} P_i(\omega_3) [1 - \bar{G}(\lambda_3)] = 0,183\,16, \\ P(\omega_4 = 0,3; \lambda_4 = 0,15) &= \sum_{i=1}^{\infty} P_i(\omega_4) [1 - \bar{G}(\lambda_4)] = 0,070\,65, \\ P(\omega_5 = 0,06, \lambda_5 = \infty) &= \sum_{i=1}^{\infty} P_i(\omega_5) [1 - 1] = 0.\end{aligned}$$

Po dosazení do (560) obdržíme

$$P(\omega_1, \dots, \omega_5, \lambda_1, \dots, \lambda_5) = 1 - \prod_{k=1}^5 [1 - P(\omega_k, \lambda_k)] = 0,277\,2.$$

Podle výsledků řešení bude celkově 93,0% výrobků z linky postřiženo alespoň jednou poruchou některého automatu a 27,7% výrobků zastihne alespoň v jednom automatu porucha s dobou obnovování provozuschopnosti delší než kritická hodnota λ_i , $i = 1, 2, \dots, 5$.

10.3.3 Pružná automatická linka

Dokonalejší využití výrobních automatů umožňují automatické linky s pružnou mezioperační vazbou. Zjištění pravděpodobnosti, že výrobek v průběhu doby, kdy je zpracováván některým automatem, zastihne zastavení automatu, je závislé na distribuční funkci doby provozu každého automatu. Známe-li tyto distribuční funkce, popř. pravděpodobnosti bezporuchového provozu, stanovíme podle (530) a (555) pravděpodobnost $P(\omega_i)$, že výrobek během setrvání v automatech v lince zastihne zastavení některého automatu.

Prakticky jediným prostředkem pro odhad distribuční funkce doby provozu automatu v pružné lince a nakonec i distribuční funkce dob obnovování provozuschopnosti je vyrovnání empirické distribuční funkce zjištěné při simulaci pružné automatické linky na číslicovém počítači.

Odvozené vztahy umožňují zjistit střední hodnoty počtu výrobků, které byly v konkrétních podmínkách automatických výrobních systémů vyrobeny za nestandardních podmínek. Lze očekávat, že tyto výrobky budou vykazovat i některé nestandardní parametry včetně spolehlivosti. Informaci lze chápat i jako jistý ukazatel jakosti celého souboru vyrobených výrobků.

Výpočet má především význam pro výrobní systémy s větším počtem strojů a zařízení. Vysoká pravděpodobnost ovlivnění výrobku nepřipustnou poruchou některého automatu signalizuje nebezpečí nepřipustné zmetkovitosti výroby a neuspokojivé reprodukovatelnosti. Cesta k nápravě vede přes snižování doby setrvání výrobků v přímém působení technologických faktorů v automatech.

- [1] BARLOW, R. - PROSCHAN, F.: *Mathematical Theory of Reliability*. Ruský překlad. Sovetskoe radio, Moskva, 1969.
- [2] BARZILJOVIČ, E. JU. - KAŠTANOV, V. A.: *Některé matematické problémy teorie obsluhování složených systémů*. Sovetskoe radio, Moskva, 1965.
- [3] CALABRO, S. R.: *Základy spolehlivosti a jejich použití v praxi*. Praha, SNTL 1965.
- [4] COX, D. R. - SMITH, W. L.: *Teoriej vstanovenija, ruský překlad*. Sovetskoe radio, Moskva 1967.
- [5] ČERKASOV, G. N.: *Nadežnost techničeskich sistem s vremennoj izbytočnošću*. Sovetskoe radio, Moskva 1974.
- [6] ČSN 01 01 02 *Názvosloví spolehlivosti v technice*, 1979.
- [7] ČSN 01 01 03 *Výpočet ukazatelů spolehlivosti dvoustavových systémů (návrh)*, 1975.
- [8] DITKIN, V. A. - PRUDNIKOV P. I.: *Integralnye preobrazovaniya i operacionnye isčisleniya*. Moskva, Fizmatgiz 1961.
- [9] FRANKOVIČ, B. - PETRAŠ, Š. - SKÁKALA, J. - VYKOUK B.: *Automatizácia a samočinné riadenie*. Bratislava, SVTL 1966.
- [10] GNEDENKO, B. V.: *Kurs teorii verojatnostej*. Nauka, Moskva 1965.
- [11] GNEDENKO, B. W. - BELAJEV, J. K. - SOLOWIEW, A. D.: *Matematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie I*. Berlin, Akademie Verlag 1968.
- [12] HAVEL, J. a kol.: *Modelování náhodných procesů*. Praha, SNTL 1973.
- [13] JANKO, J.: *Statistické tabulky*. Praha, NČSAV 1958.
- [14] JEPIFANOV, A. D.: *Nadežnost avtomatičeskich sistem*. Moskva, Mašinostrojenije 1964.
- [15] KLUVANEK, I. - MIŠÍK, L. - ŠVEC, M.: *Matematika pro štúdium technických vied*, II. díl. Bratislava, SVTL 1961.
- [16] KOČIŠ, Š.: *Teoretický rozbor a experimentální vyšetřování spolehlivosti automatických montážních linek*, kand. dis. práce. Bratislava, EF SVŠT 1969.
- [17] KVAPIL, V.: *NC stroje a řízení výroby*. Sv. 91 knižnice VÚSTE, Praha 1973.
- [18] LEVIN, A. A. - PASKO, I. N.: *Rasčot proizvoditel'nosti avtomatičeskich linij. Stanki i instrumenty*, 1969, No 8.
- [19] MAINNER, L.: *Navrhování automatických výrobních systémů*. Praha, SNTL 1980.
- [20] MAINNER, L.: *Optimalizace kapacit zásobníků pružné automatické linky*. Ekonomicko-matematický obzor 9, 1973, č. 2.
- [21] POLOVKO, A. M. - MALIKOV, I. M.: *Sbornik zadač po teorii nadežnosti*. Sovetskoe radio, Moskva 1972.

- [22] RAKIN, A. L.: *Elementy teorii nadežnosti techničeskich sistem*. Sovetskoe radio, Moskva 1978.
- [23] RENZI, A.: *Teorie pravděpodobnosti*. Praha, Academia 1972.
- [24] SVOBODA, K.: *Dlouhodobý rozvoj strojírenské výroby*. Sv. 130 knižnice VÚSTE, Praha 1979.
- [25] ŠOR, J. B.: *Statistické metody analýzy a kontroly jakosti a spolehlivosti*. Praha, SNTL 1965.
- [26] TUHAČEK, K.: *Stochastická simulace provozu pružné automatické linky*. Strojrenství 30, 1980, č. 6.
- [27] UNČOVSKÝ, L.: *Stochastické modely operační analýzy*. Praha, SNTL 1980.
- [28] VENTCEL, E. S.: *Issledovanie operacij*. Sovetskoe radio, Moskva 1971.
- [29] VLADZJEVSKIJ, A. P.: *Avtomatičeskije linii v mašinostrojenii*. Moskva, Mašgiz 1958.

Spolehlivost automatických výrobních systémů

DT 658.52.011.56 — 192

Vydalo SNTL — Nakladatelství technické literatury,
n. p., Spálená 51, 113 02 Praha 1
v roce 1984

jako svou 9700. publikaci

Redakce báňské a strojírenské literatury

Odpovědný redaktor Ing. Jindřich Klůna

Obálku navrhl Vladislav Jacák

Technická redaktorka Zdenka Pichová

Výtiskla Polygrafia, závod 6 - Prometheus,

nositel Řádu práce, Praha 8

260 stran, 76 obrázků, 38 tabulek

Typové číslo LJ3-B3-V-41/22 791. Vydání první

Náklad 1700 výtisků. 16,36 AA, 16,67 VA

05/11

Cena brožovaného výtisku Kčs 23, —

508/21,826

Publikace je určena pro výzkumné pracovníky,
projektanty, konstruktéry, pracovníky
výpočetních středisek, pro studenty technických
a ekonomických škol.