Vladimír Bruthans:

O GRUPĚ AUTOMORFNÍCH KOLINEACÍ PROSTOROVÉ KVARTIKY EKVIANHARMONICKÉ

Ú v o d

Kvartikou rozumíme v této práci prostorovou kvartiku prvního druhu bez singulárního bodu. Uveďme nejdříve některé známé vlastnosti této křivky, jichž v dalším upotřebíme.[1]

Kvartika je basí svazku kvadrik, který obsahuje čtyři kvadratické kužele. Vrchly těchto kuželů jsou zároveň vrcholy čtyřstěnu, který je společným polárním čtyřstěnem všech kvadrik svazku a nazývá se polárním čtyřstěnem kvartiky. Stěny polárního čtyřstěnu kvartiky nazýváme jejími hlavními rovinami.

Body, v nichž oskulační rovina má s kvartikou čtyřnásobný průsečík, se nazývají body superoskulační. Je jich na kvartice 16 a leží po čtyřech v hlavních rovinách kvartiky. Body, v nichž regulární kvadrika může mít s kvartikou osminásobný průsečík, se nazývají body osmitečné. Těchto bodů je na kvartice 48.

Zvolíme-li polární čtyřstěn kvartiky za čtyřstěn souřadnicový, lze kvartiku vyjádřit parametrickými rovnicemi

(1) $x_1 = \sigma_1(u),\ x_2 = \sigma_2(u),\ x_3 = \sigma_3(u),\ x_4 = \sigma(u),$

kde σ, $\sigma_k (k = 1,2,3)$ jsou funkce známé z teorie eliptických funkcí a parametr u probíhá v rovině komplexních čísel jistý rovnoběžník s vrcholy $0,\ 4\omega,\ 4\omega + 4\omega',\ 4\omega'$.

Uvedené σ-funkce souvisejí s Weierstrassevou funkcí $\wp(u)$ vztahy

---

[1] Podrobně jsou tyto vlastnosti vyloženy v knize akademika B. B y d ž o v s k é h o /1/, kap. XIX a v práci /2/ téhož autora.

(2) $$\left(\frac{\sigma_k(u)}{\sigma(u)}\right)^2 = \wp(u) - e_k \quad (k = 1,2,3) ,$$

kde $e_1 = \wp(\omega)$, $e_2 = \wp(\omega + \omega')$, $e_3 = \wp(\omega')$.[2] Vyloučíme-li z těchto vztahů $\wp(u)$ a užijeme-li rovnic (1), dostaneme

(3) $$x_2^2 - x_3^2 + (e_2 - e_3)\, x_4^2 = 0 ,$$
$$x_3^2 - x_1^2 + (e_3 - e_1)\, x_4^2 = 0 ,$$
$$x_1^2 - x_2^2 + (e_1 - e_2)\, x_4^2 = 0 ,$$
$$(e_2 - e_3)\, x_1^2 + (e_3 - e_1)\, x_2^2 + (e_1 - e_2)\, x_3^2 = 0 ,$$

což jsou rovnice kuželů obsahujících kvartiku. Označíme tyto kužele v uvedeném pořadí k_1, k_2, k_3, k_4, takže vrchol kuželu k_i je souřadnicový bod O_i $(i = 1,2,3,4)$.

Čtyři body kvartiky (1) leží v jedné rovině právě tehdy, když argumenty těchto bodů vyhovují podmínce

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 \pmod{4\omega,\, 4\omega'} .$$[3]

Argumenty superoskulačních bodů jsou právě všechna řešení kongruence

$$4u \equiv 0 \pmod{4\omega,\, 4\omega'} ,$$

která má v základním rovnoběžníku 16 řešení tvaru $m\omega + n\omega'$, $(m, n = 0,1,2,3)$. Superoskulační bod s argumentem $m\omega + n\omega'$ označíme W_{mn}. Argumenty osmitečných bodů jsou ta řešení kongruence

$$8u \equiv 0 \pmod{4\omega,\, 4\omega'} ,$$

pro která ovšem $4u \not\equiv 0 \pmod{4\omega,\, 4\omega'}$. Je to 48 hodnot tvaru $\frac{1}{2}(h\omega + k\omega')$, $(h,k = 0,1,\ldots, 7$, avšak není současně h i k sudé). Osmitečný bod odpovídající argumentu $\frac{1}{2}(h\omega + k\omega')$ označujeme V_{hk}.

Jednoduchým způsobem lze charakterisovat i kvadriky obsahující vyšetřovanou kvartiku. Každá z těchto kvadrik je

---

[2] Viz /3/ , str.365.

[3] To vyplývá z vlastností eliptických funkcí. Viz /4/, str.366.

totiž určena libovolnou svou přímkou a všechny tyto přímky jsou bisekantami kvartiky.[4] Pro argumenty u, v jejich průsečíků s kvartikou platí

$$u + v \equiv \varepsilon C \pmod{4\omega\,,\ 4\omega'}\ ,$$

kde $\varepsilon = \pm 1$ a C je konstanta. Hodnotami C a $-C$ je příslušná kvadrika charakterisována, přičemž každá z těchto hodnot odpovídá přímkám jedné soustavy.

Jde-li o některý kužel ve svazku obsažený, platí ovšem

$$C \equiv -C \quad \text{čili} \quad 2C \equiv 0 \pmod{4\omega\,,\ 4\omega'}\ ,$$

neboť na kuželu existuje jen jedna soustava přímek. Čtyři hodnoty, jež této kongruenci vyhovují a jimiž jsou tedy kužele vyšetřovaného svazku charakterisovány, jsou 0, 2ω, $2\omega + 2\omega'$, $2\omega'$.

Protože kongruence

$$2u \equiv C \pmod{4\omega\,, 4\omega'}$$

má čtyři řešení, obsahuje libovolná kvadrika vyšetřovaného svazku v každé soustavě po čtyřech přímkách, které se kvartiky dotýkají. Na kuželích jsou těmito přímkami tečny v superoskulačních bodech. Tečny v osmitečných bodech jsou přímkami tzv. Vossových kvadrik. Těchto kvadrik je šest a jsou na základě jistých vlastností rozděleny na tři dvojice[5] s odpovídajícími hodnotami

$$\begin{array}{llll}
\omega & \text{a } 3\omega\ , & 3\omega + 2\omega' & \text{a } \omega + 2\omega'\ , \\
\omega + \omega' & \text{a } 3\omega + 3\omega'\ , & 3\omega + \omega' & \text{a } \omega + 3\omega'\ , \\
\omega' & \text{a } 3\omega'\ , & 2\omega + \omega' & \text{a } 2\omega + 3\omega'\ .
\end{array}$$

---

[4] Za bisekanty kvartiky pokládáme i její tečny.

[5] Pokládáme-li vyšetřovaný svazek kvadrik za prostor S_1 (viz dále), jsou kvadriky každé této dvojice samodružné vždy v jedné involuci, určené dvěma dvojicemi kuželů.

Kvartika (1) se reprodukuje 32 kolineacemi, které lze vyjádřit ve tvaru

(4) $$u' \equiv \varepsilon u + m\omega + n\omega' \pmod{4\omega, 4\omega'}$$

kde $\varepsilon = \pm 1$ a $m,n = 0,1,2,3$. Tyto kolineace nazýváme kolineacemi základními, a to pro $\varepsilon = 1$ kladnými a pro $\varepsilon = -1$ zápornými. V dalším budeme značit kladné základní kolineace $\alpha(m,n)$, záporné $\alpha/m,n/$.

Kladné kolineace pro m i n sudé jsou osové involuce, jejichž osy jsou vždy dvě protilehlé hrany polárního čtyřstěnu kvartiky. Zbývající kladné kolineace jsou cyklické 4.stupně a příslušejí po čtyřech vždy k jedné kladné involuci, kterou dostaneme jejich opakováním. Záporné kolineace pro m i n jsou středové involuce, jejichž středy jsou vrcholy polárního čtyřstěnu kvartiky a jejichž roviny samodružných bodů jsou hlavní roviny kvartiky. Zbývající záporné kolineace jsou osové involuce, jejichž osy protínají vždy dvě navzájem protilehlé hrany polárního čtyřstěnu kvartiky a jsou přímkami Vossových kvadrik.[6]

Základní kolineace tvoří grupu G_{32},[7] kterou lze rozšířit o další automorfní kolineace jen ve dvou speciálních případech. Je to jednak kvartika harmonická, jíž je věnována práce /6/ a jejíž automorfní kolineace tvoří grupu G_{64}, a jednak kvartika ekvianharmonická, jejíž automorfní kolineace tvoří grupu G_{96} a k jejímuž studiu nyní přistupujeme.

---

[6] Osy, které jsou přímkami téže dvojice Vossových kvadrik, protínají tytéž dvě protilehlé hrany polárního čtyřstěnu kvartiky.

[7] Podrobné studium této grupy a bodových skupin na kvartice odpovídajících jejím podgrupám provedl akademik B. B y d ž o v s k ý v citované práci /2/.

Kvartiku vyjádřenou parametrickými rovnicemi (1) nazýváme ekvianharmonickou, je-li splněna podmínka

(5) $$g_2(\omega, \omega') = 0 .$$ [8]

Tuto podmínku lze vyjádřit též ve tvaru $\mathcal{J}(\omega'/\omega) = 0$, kde $\mathcal{J}(\tau)$ je modulová funkce známá z teorie eliptických funkcí. Rovnice $\mathcal{J}(\tau) = 0$ má však řešení $\tau = \rho$, kde $\rho = e^{2\pi i/3}$ a toto řešení je v jisté základní oblasti jediné.[9] Platí-li tedy

(6) $$\omega' = \rho\omega ,$$

je kvartika (1) ekvianharmonická a obráceně lze každou ekvianharmonickou kvartiku vyjádřit rovnicemi (1) tak, že platí (6).

Vyšetříme na ekvianharmonické kvartice příbuznost bodů, pro jejichž argumenty platí

(7) $$u' \equiv \rho u \quad (\mathrm{mod}\ 4\omega, 4\omega')$$

Tato příbuznost je vzájemně jednoznačná, což snadno poznáme z toho, že uvedený vztah mezi argumenty odpovídajících si bodů vyjadřuje v rovině komplexních čísel otočení o úhel $\varphi = 2\pi/3$. Z obecně platného vztahu[10]

$$\sigma(ku; 2k\omega, 2k\omega') = k\,\sigma(u; 2\omega, 2\omega')$$

plyne pro ekvianharmonickou kvartiku

$$\sigma(\rho u) = \rho\,\sigma(u) ,$$

neboť množina hodnot $w_k' = 2m\rho\omega + 2n\rho\omega'$ je zřejmě totožná s množinou hodnot $w_k = 2m\omega + 2n\omega'$, (m,n celá čísla). Odtud

---

[8] Tak se totiž v tomto případě nazývají příslušné eliptické funkce. Viz /5/, str. 219.

[9] Viz /4/, str. 390-396.

[10] Viz /3/, str. 354.

a z definice funkcí σ_i dostáváme[11]

$$\sigma_1(\rho u) = \sigma_2(u)\ , \quad \sigma_2(\rho u) = \sigma_3(u)\ , \quad \sigma_3(\rho u) = \sigma_1(u)\ .$$

Pro souřadnice bodů odpovídajících si ve vyšetřované příbuznosti platí tedy rovnice

$$(8) \qquad x_1' = x_2\ , \quad x_2' = x_3\ , \quad x_3' = x_1\ , \quad x_4' = \rho x_4$$

jež vyjadřují kolineaci. Tato kolineace není obsažena v grupě základních kolineací G_{32} a je tedy další automorfní kolineací ekvianharmonické kvartiky.

K vyjádření automorfních kolineací vyšetřované kvartiky užíváme v dalším (stejně jako v úvodu) vztahů mezi argumenty odpovídajících si bodů na kvartice.

Skládáme-li kolineaci (7) s jednotlivými kolineacemi základními, dostaneme 32 automorfních kolineací

$$(9) \qquad u' \equiv \varepsilon \rho u + m\omega + n\omega' \quad (\mathrm{mod}\ 4\omega\ ,\ 4\omega')$$

kde $\varepsilon = \pm 1$ a $m,n = 0,1,2,3$; nazýváme je ekvianharmonickými kolineacemi typu γ.

Inversní ke kolineaci (6) je kolineace (4)

$$(10) \qquad u' \equiv \rho^2 u \quad (\mathrm{mod}\ 4\omega\ ,\ 4\omega')\ .$$

jež je opět automorfní a složena se základními kolineacemi dává 32 kolineací

$$(11) \qquad u' \equiv \varepsilon \rho^2 u + m\omega + n\omega' \quad (\mathrm{mod}\ 4\omega\ ,\ 4\omega')\ ,$$

kde $\varepsilon = \pm 1$ a $m,n = 0,1,2,3$; tyto automorfní kolineace nazýváme ekvianharmonickými kolineacemi typu δ .

Ekvianharmonické kolineace obou typů dělíme dále na kladné (je-li $\varepsilon = 1$) a záporné (je-li $\varepsilon = -1$). Ekvianharmonické ko-

---

[11] Podle definice je $\sigma_i(u) = -e^{\eta_i u} . \sigma(u-\omega_i) / \sigma(\omega_i)$, kde $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega + \omega'$, $\omega_3 = \omega'$, $\eta_1 = \zeta(\omega)$, $\eta_2 = \zeta(\omega) + \zeta(\omega')$, $\eta_3 = \zeta(\omega')$ a funkce $\zeta(u;\ 2\omega, 2\omega')$ je homogenní stupně -1 vzhledem k u, ω, ω'. Viz /3/, str. 354, 358 a 366.

lineace kladné označujeme $\gamma(m,n)$ nebo $\sigma(m,n)$, záporné $\gamma/m,n/$ nebo $\sigma/m,n/$, kde ovšem γ, σ souhlasí s typem příslušné ekvianharmonické kolineace.

Ekvianharmonická kolineace (9) a (11) spolu se základními kolineacemi (4) tvoří grupu G_{96} a - jak ukážeme v druhé části této práce - jinými kolineacemi se daná ekvianharmonická kvartika nereprodukuje. Tento výsledek vyjádříme větou:

<u>Věta 1.</u> Automorfní kolineace ekvianharmonické kvartiky tvoří grupu G_{96}.

Vyšetříme podgrupy grupy G_{96} omezíce se ovšem na ty, které obsahují aspoň jednu kolineaci ekvianharmonickou. Zbývající podgrupy jsou totiž zároveň podgrupami grupy základních kolineací G_{32} a ty jsou známy.[12] Začneme s cyklickými podgrupami, které jsou vytvářeny jednotlivými ekvianharmonickými kolineacemi. O řádu těchto podgrup nás poučí následující dvě věty.

<u>Věta 2.</u> Kladné ekvianharmonické kolineace jsou cyklické třetího stupně.

Důkaz: Opakováním kladné ekvianharmonické kolineace

$$u' \equiv \rho u + K \pmod{4\omega, 4\omega'}$$

dostáváme postupně

$$u' \equiv \rho^2 u + K(\rho + 1) \pmod{4\omega, 4\omega'},$$

$$u' \equiv \rho^3 u + K(\rho^2 + \rho + 1) \pmod{4\omega, 4\omega'},$$

což je identita, neboť $\rho^3 = 1$, a $\rho^2 + \rho + 1 = 0$. Kolineace typu γ jsou tedy cyklické třetího stupně a cyklické podgrupy jimi vytvořené obsahují po jedné kladné ekvianharmonické kolineaci obou typů. To znamená, že každá ekvi-

---

[12] Viz /2/, str. 10-11 .

anharmonická kladná kolineace typu δ je inversní k některé kladné ekvianharmonické kolineaci typu γ a je tedy rovněž cyklická třetího stupně. Tím je věta dokázána.

<u>Věta 3.</u> Záporné ekvianharmonické kolineace jsou cyklické šestého stupně.

Důkaz: Vzhledem k tomu, že i záporné ekvianharmonické kolineace tvoří dvojice navzájem inversních kolineací

$$u' \equiv -\rho u + K \quad \text{a} \quad u' \equiv -\rho^2 u + \rho^2 K \pmod{4\omega, 4\omega'},$$

z nichž jedna je typu γ a druhá typu δ, stačí opět vyšetřit jen kolineace jednoho typu. Opakujeme-li zápornou ekvianharmonickou kolineaci

$$(12) \qquad u' \equiv -\rho u + m\omega + n\omega' \pmod{4\omega, 4\omega'}$$

dostaneme

$$(13) \qquad u' \equiv \rho^2 u + (m + n)\omega + (2n - m)\omega' \pmod{4\omega, 4\omega'},$$

což je ekvianharmonická kolineace kladná a tedy cyklická třetího stupně. Protože kolineace (12) není inversní ke kolineaci (13), je cyklická šestého stupně. Tím je věta dokázána.

Kladné ekvianharmonické kolineace vytvářejí tedy cyklické podgrupy g_3 a záporné ekvianharmonické kolineace vytvářejí cyklické podgrupy g_6. Odtud vyplývá:

<u>Věta 4.</u> V grupě G_{96} existuje právě 16 cyklických podgrup g_3 a právě 16 cyklických podgrup g_6, přičemž každá podgrupa g_6 obsahuje jednu z podgrup g_3.

Každá podgrupa g_3 obsahuje kromě identity dvě kladné ekvianharmonické kolineace různého typu. Každá podgrupa g_6 obsahuje kromě kolineací příslušné podgrupy g_3 dvě záporné ekvianharmonické kolineace různého typu a jednu zápornou involuci.

Podgrupy g_3 obsažené v podgrupách g_6 jsou vesměs navzájem různé. Kdyby tomu totiž tak nebylo, existovaly by dvě různé kolineace $\gamma/m,n/$ a $\gamma/m',n'/$, které opakovány by dávaly tutéž kolineaci (13), což není možné, neboť ze soustavy kongruencí

$$m + n \equiv m' + n' \pmod 4$$
$$2n - m \equiv 2n' - m' \pmod 4$$

plyne $m \equiv m'$ a $n \equiv n'$.

Naproti tomu je každá středová involuce obsažena vždy ve čtyřech podgrupách g_6. Složením kolineací (12) a (13) dostáváme totiž involuci

$$u' \equiv -u + 2n \quad + 2(n - m) \qquad (\mathrm{mod}\ 4\omega\ ,4\omega'),$$

která je totožná s danou involucí $\alpha/2h, 2k/$ právě tehdy, když

$$2n \equiv 2h \pmod 4$$
$$2(n - m) \equiv 2k \pmod 4 \ ;$$

pokládáme-li v této soustavě kongruencí m,n za neznámé, dostaneme

$$m \equiv h - k \pmod 2 \quad \text{a} \quad n \equiv h \pmod 2)$$

odkud vyplývají čtyři řešení modulo 4.

Zbývá vyšetřit podgrupy, které obsahují aspoň dvě ekvianharmonické kolineace nepatřící do téže podgrupy cyklické. Základní kolineace obsažené v takové podgrupě tvoří v ní normální podgrupu, podle níž jsou prvky této podgrupy rozděleny do tří tříd. Jednu třídu tvoří základní kolineace, druhou ekvianharmonické kolineace typu γ a třetí ekvianharmonické kolineace typu δ.

Obsahuje-li vyšetřovaná podgrupa též kolineace záporné lze kolineace každé z uvedených tříd rozdělit ještě na kladné a záporné. Dostaneme potom šest tříd, do nichž je vyšetřovaná podgrupa rozdělena podle normální podgrupy tvořené základními kolineacemi kladnými.

Informaci o možných podgrupách grupy G_{96} nám tedy poskytne úvaha o tom, které z podgrup obsahujících jen kladné základní kolineace mohou být normální v některé podgrupě obsahující též ekvianharmonické kolineace. Dokážeme, že kromě triviální podgrupy, jejímž jediným prvkem je identita, může to být jen podgrupa g_4 tvořená kladnými involucemi a podgrupa g_{16} tvořená všemi kladnými základními kolineacemi.

Vzhledem k tomu, že kladné základní kolineace jsou buď involutorní nebo cyklické čtvrtého stupně, je v každé podgrupě, která není cyklická, obsažena aspoň jedna kladná involuce. Zkoumejme tedy podgrupu, která obsahuje ekvianharmonickou kolineaci

(14) $$u' \equiv \rho u + m\omega + n\omega' \pmod{4\omega,\ 4\omega'}$$

a involuci

(15) $$u' \equiv u + 2h\omega + 2k\omega' \pmod{4\omega,\ 4\omega'},$$

kde buď $h \not\equiv 0 \pmod 2$ nebo $k \not\equiv 0 \pmod 2$; inversní ke kolineaci (14) je kolineace

(16) $$u' \equiv \rho^2 u + (m - n)\omega + m\omega' \pmod{4\omega,\ 4\omega'}.$$

Složíme-li tyto tři kolineace v napsaném pořadí dostaneme involuci

(17) $$u' \equiv u + 2(k - h)\omega - 2h\omega' \pmod{4\omega,\ 4\omega'},$$

která není totožná s involucí (15). Kdyby totiž oba vztahy (15) a (17) vyjadřovaly tutéž involuci, platilo by

$$k - h \equiv h \pmod 2 \quad \text{a} \quad -h \equiv k \pmod 2,$$

odkud by plynulo $h \equiv 0$, $k \equiv 0 \pmod 2$; to však je ve sporu s předpokladem, že kolineace (15) není identická. Obsahuje-li tedy vyšetřovaná podgrupa jednu kladnou involuci, obsahuje i zbývající dvě, tj. celou podgrupu g_4.

Snadno se zjistí, že podgrupa g_4 je normální v grupě G_{96}. Jsou-li totiž

(18) $$u' \equiv \lambda u + K \pmod{4\omega, 4\omega'}$$

(19) $$u' \equiv \lambda^{-1}u - \lambda^{-1}K \pmod{4\omega, 4\omega'}$$

dvě navzájem inverzní kolineace grupy G_{96}, dostaneme složením (18), (15) a (19) kolineaci

$$u' \equiv u + 2h\lambda^{-1}\omega + 2k\lambda^{-1}\omega' \pmod{4\omega, 4\omega'},$$

což je zřejmě opět kladná involuce.[13]

Podle podgrupy g_4 jsou kolineace grupy G_{96} rozděleny do 24 tříd, z nichž 12 obsahuje jen kolineace kladné a 12 jen kolineace záporné. Sjednocení tříd representovaných kolineacemi některé podgrupy g_3 je podgrupa g_{12} a sjednocení tříd representovaných kolineacemi některé podgrupy g_6 je podgrupa g_{24}. Každá podgrupa g_{12} takto odpovídá čtyřem podgrupám g_3 a každá podgrupa g_{24} odpovídá čtyřem podgrupám g_6. To znamená:

<u>Věta 5.</u> V grupě G_{96} existují právě čtyři podgrupy g_{12} a právě čtyři podgrupy g_{24}, přičemž každá podgrupa g_{24} obsahuje jednu z podgrup g_{12}.

Podgrupy g_{12} jsou vytvářeny vždy dvěma ekvianharmonickými kolineacemi $\gamma(m_1, n_1)$ a $\gamma(m_2, n_2)$, kde $m_1 \equiv m_2$, $n_1 \equiv n_2 \pmod 2$. Podgrupy g_{24} jsou vytvářeny vždy dvěma zápornými ekvianharmonickými kolineacemi (nebo jednou kladnou a jednou zápornou ekvianharmonickou kolineací), které patří do dvou podgrup g_6 obsahujících tutéž zápornou involuci.

---

[13] Uvažme, že číslo λ je kořenem rovnice $x^6 - 1 = 0$.

Budiž nyní g podgrupa, která obsahuje ekvianharmonickou kolineaci $\gamma(m,n)$ a základní kolineaci $\alpha(h,k)$, kde buď $h \not\equiv 0 \pmod 2$ nebo $k \not\equiv 0 \pmod 2$. Jelikož $g_4 \subset g$, obsahuje podgrupa g též kolineace $\alpha(h+2,k)$, $\alpha(h+2,k+2)$ a $\alpha(h,k+2)$. Složením kolineací $\gamma(m,n)$, $\alpha(h,k)$ a $\delta(m-n, m)$ (jež je inversní ke kolineaci $\gamma(m,n)$), dostaneme kolineaci $\alpha(k-h, -h)$, což je další kladná základní kolineace obsažená v podgrupě g. Tato podgrupa obsahuje tedy více než osm kladných základních kulineací a tedy celou podgrupu g_{16}, jež je zřejmě normální v grupě G_{96} a tím spíš v podgrupě g. Odtud snadno vyplývá:

<u>Věta 6.</u> V grupě G_{96} existuje jediná podgrupa g_{48}. Tato podgrupa g_{48} obsahuje všechny kladné kolineace (základní i ekvianharmonické) a je vytvářena dvěma kladnými ekvianharmonickými kolineacemi, které nepatří do téže podgrupy g_{12}. Dvě záporné ekvianharmonické kolineace (nebo jedna kladná a jedna záporná), které nepatří do téže podgrupy g_{24}, vytvářejí celou grupu G_{96}.

Přistupme nyní ke studiu geometrických vlastností ekvianharmonických kolineací. Především nalezneme samodružné body, které leží na kvartice. Pro argumenty bodů samodružných v kolineaci $\gamma(m,n)$ platí

$$u \equiv \rho u + m\omega + n\omega' \pmod{4\omega, 4\omega'}$$

čili

$$(1-\rho)u = m\omega + n\omega' + 4h\omega + 4k\omega',$$

kde h,k jsou celá čísla. Násobíme-li obě strany této rovnice činitelem $(1-\rho^2)$, máme po jednoduché úpravě

$$3u = [2m - n + 4(2h-k)]\omega + [m + n + 4(h+k)]\omega',$$

odkud vyplývá[14]

$$u \equiv \tfrac{1}{3}[(2m-n)\omega + (m+n)\omega'] + \tfrac{8}{3}(h+k)\omega + \tfrac{4}{3}(h+k)\omega' \pmod{4\omega, 4\omega'} .$$

Dostáváme tři hodnoty

$$u_1 \equiv \tfrac{1}{3}[(2m - n)\omega + (m + n)\omega'] ,$$

$$u_2 \equiv u_1 + \tfrac{8}{3}\omega + \tfrac{4}{3}\omega' , \qquad u_3 \equiv u_1 + \tfrac{4}{3}\omega + \tfrac{8}{3}\omega' ,$$

jimž odpovídají tři samodružné body ležící na kvartice.

Pro argumenty těchto samodružných bodů platí

$$4u \equiv \tfrac{8}{3}(m + n + j)\omega + \tfrac{4}{3}(m + n + j)\omega' \pmod{4\omega , 4\omega'} ,$$

kde $j \equiv 0,1,2 \pmod 3$. Je-li $m + n + j \equiv 0 \pmod 3$, platí

$$4u \equiv 0 \pmod{4\omega , 4\omega'} ,$$

takže jeden ze samodružných bodů je bod superoskulační.

Superoskulační bod W_{rs} je samodružný v kolineaci $\gamma(m,n)$ právě tehdy, když

$$r\omega + s\omega' \equiv \rho(r\omega + s\omega') + m\omega + n\omega' \pmod{4\omega, 4\omega'}$$

čili

$$r\omega + s\omega' - r\omega' + s\omega + s\omega' \equiv m\omega + n\omega' \pmod{4\omega, 4\omega'} .$$

Z této kongruence vyplývá

(20) $\qquad m \equiv r + s \pmod 4 , \qquad n \equiv 2s - r \pmod 4 ,$

takže každý superoskulační bod je samodružný v jediné kladné ekvianharmonické kolineaci typu γ (a v jediné kladné ekvianharmonické kolineaci typu δ).

Zároveň odtud plyne, že ekvianharmonické kolineace, jejichž samodružné superoskulační body leží v téže hlavní rovině, patří do téže podgrupy g_{12}. Je-li totiž bod W_{rs} samodružný v kolineaci $\gamma(m,n)$ a bod $W_{r's'}$ samodružný v kolineaci $\gamma(m',n')$ a leží-li tyto dva superoskulační body v téže hlavní rovině, pak $r \equiv r'$, $s \equiv s' \pmod 2$ a z kongruencí (20) dostáváme $m \equiv m'$, $n \equiv n' \pmod 2$.

---

[14] Užíváme vztahu $\tfrac{4}{3}(2h - k)\omega \equiv \tfrac{8}{3}(h + k)\omega' \pmod{4\omega , 4\omega'}$

Kužel obsahující kvartiku a tečnu v samodružném superoskulačním bodě je ovšem rovněž samodružný. Je-li u_0 argument samodružného superoskulačního bodu, jsou argumenty obyčejných samodružných bodů

$$u_1 = u_0 + \tfrac{4}{3}(2\omega + \omega') \quad , \quad u_2 = u_0 + \tfrac{4}{3}(\omega + 2\omega') \ ;$$

zřejmě platí

$$u_1 + u_2 \equiv 2u_0 \pmod{4\omega ,4\omega'} \ .$$

To znamená, že spojnice obyčejných samodružných bodů je přímkou samodružného kužele, jehož vrchol je tedy dalším samodružným bodem na této přímce. To znamená, že všechny body této přímky jsou ve vyšetřované kolineaci samodružné.

Pro agumenty samodružných bodů platí dále

$$3u_1 + u_0 \equiv 0 \quad \text{a} \quad 3u_2 + u_0 \equiv 0 \pmod{4\omega \ , \ 4\omega'},$$

což znamená, že oskulační roviny v obyčejných samodružných bodech procházejí samodružným oskulačním bodem. Jelikož oskulační roviny v samodružných bodech jsou rovněž samodružné, je jejich průsečnice samodružná přímka. Tato samodružná přímka je mimoběžná a přímkou samodružných bodů a je tedy osou svazku samodružných rovin. Samodružné body, které jsou obyčejnými body kvartiky, si odpovídají v involuci, jejímž středem je vrchol samodružného kuželu. Totéž ovšem platí i o oskulačních rovinách v těchto bodech, takže jejich průsečnice leží v hlavní rovině obsahující samodružný superoskulační bod.

Pro body, které si odpovídají v jednotlivých kladných ekvianharmonických kolineacích, vyplývá z našich úvah

<u>Věta 7.</u> Bodové cykly, které jsou vytvářeny ekvianharmonickými kolineacemi, jsou obsaženy v rovinách svazku, jehož osa prochází samodružným superoskulačním bodem a le-

ží v příslušné hlavní rovině.

Kromě tečny v samodružném superoskulačním bodě a přímky samodružných bodů není žádná přímka samodružného kužele samodružná. Kdyby totiž existovala na tomto kuželu další samodružná přímka, byly by její průsečíky s kvartikou rovněž samodružné, neboť dva body nemohou tvořit cyklus; avšak na kvartice neexistují jiné samodružné body kromě uvedených tří. Odtud vyplývá, že osa svazku samodružných rovin je tečnou kuželosečky, v níž samodružný kužel protíná hlavní rovinu.

Ve svazku samodružných rovin je tedy kromě obou výše uvedených oskulačních rovin obsažena též superoskulační rovina v samodružném superoskulačním bodě. Zbývající roviny tohoto svazku protínají kvartiku (kromě samodružného superoskulačního bodu) vždy ve třech různých bodech, které tvoří cyklus.

Z ostatních rovin mohou být samodružné jen ty, které protínají kvartiku v samodružných bodech. Je to jednak rovina určená třemi samodružnými body kvartiky, jednak dvojnásob tečná rovina v obyčejných samodružných bodech, jejíž průsečík s osou samodružných rovin je další samodružný bod. Jiné samodružné roviny ani samodružné body ve vyšetřované kolineaci nejsou. To znamená:

Věta 8. Mimo přímku samodružných bodů existují v každé kladné ekvianharmonické kolineaci právě dva samodružné body, z nichž jeden je superoskulačním bodem kvartiky a druhý na kvartice neleží.

Počet bodů, které tvoří cyklus v záporné ekvianharmonické kolineaci, může být 6,3,2 nebo 1. Je-li cyklus tvořen jedním nebo třemi body, jsou to body samodružné v záporné involuci, která s vyšetřovanou ekvianharmonickou kolineací patří do téže podgrupy g_6 . (Z bodů na kvartice jsou to superoskulační body ležící v jedné hlavní rovině.) Je-li cyklus tvořen dvěma body, jsou to samodružné body kladných ekvianharmonických kolineací patřících do uvedené podgrupy g_6. Ostatní cykly obsahují vždy 6 bodů a skládají se ze dvou tříbodových cyklů kladné ekvianharmonické kolineace, která s vyšetřovanou zápornou akvianharmonickou kolineací patří do téže podgrupy g_6. Obě tyto trojice si pak odpovídají ve středové involuci, jež je obsažena v téže podgrupě g_6.

V dalším se budeme zabývat hlavně ekvianharmonickými kolineacemi kladnými.

Ekvianharmonická kvartika

Ekvianharmonickou kvartiku můžeme jednoduše charakterisovat když zavedeme pojem dvojpoměru čtyř kvadrik svazku. Mějme svazek kvadrik o rovnici

(21) $$\lambda Q_1(x) + \mu Q_2(x) = 0 \ ,$$

kde $Q_1(x) = 0$ a $Q_2(x) = 0$ jsou rovnice kvadrik základních. Zvolíme-li za základní kvadriky svazku (21) jiné dvě kvadriky o rovnicích $Q_1'(x) = 0$ a $Q_2'(x) = 0$, má tento svazek rovnici

(22) $$\lambda' Q_1'(x) + \mu' Q_2'(x) = 0 \ .$$

Libovolné kvadrice daného svazku odpovídá pak nějaká dvojice (λ, μ) v rovnici (21) a nějaká dvojice (λ', μ') v rovnici (22), přičemž tyto dvojice - až na dvojice ve známém smyslu ekvivalentní [15] - jsou určeny jednoznačně. Jestliže $Q_1(x) = aQ_1'(x) + bQ_2'(x)$ a $Q_2(x) = cQ_1'(x) + dQ_2'(x)$, platí mezi dvojicemi (λ, μ) a (λ', μ') rovnice

$$k\lambda' = a\lambda + c\mu$$
$$k\mu' = b\lambda + d\mu$$

kde $k \neq 0$ a také $ad - bc \neq 0$ (neboť kvadriky $Q_1(x) = 0$ a $Q_2(x) = 0$ jsou navzájem různé). To znamená, že parametry (λ, μ) v rovnici (21) se chovají stejně jako projektivní souřadnice v jednorozměrném prostoru S_1, jehož body jsou kvadriky svazku.

Dvojpoměrem čtyř kvadrik svazku rozumíme číslo

$$D = \frac{\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3}{\lambda_2\mu_3 - \mu_2\lambda_3} : \frac{\lambda_1\mu_4 - \mu_1\lambda_4}{\lambda_2\mu_4 - \mu_2\lambda_4} \ ,$$

---

[15] Dvojice (λ, μ) je ekvivalentní se všemi dvojicemi $(k\lambda, k\mu)$, kde $k \neq 0$.

kde (λ_i, μ_i) $(i = 1,2,3,4)$ jsou parametry odpovídající daným kvadrikám v rovnici (21). Dvojpoměr takto definovaný nezávisí na volbě základních kvadrik svazku a nemění se při kolineaci v základním prostoru S_3.

Věta 9. ~~Kvadrika~~ je ekvianharmonická právě tehdy, Kvartika když čtyři kužele svazku, jehož basí je tato kvartika, tvoří ekvianharmonickou čtveřinu (tj. mají dvojpoměr rovný $-\rho$ nebo $-\rho^2$).

Důkaz: Pro dvojpoměr kuželů k_1, k_2, k_3, k_4 plyne z rovnic (3) hodnota

(23)
$$D = \frac{e_3 - e_1}{e_3 - e_2} .$$

Je-li kvartika (1) ekvianharmonická, můžeme volit $\omega' = \rho\omega$ a užitím známého vztahu[16]

$$\lambda^{-2} \wp(u, 2\omega, 2\omega') = \wp(\lambda u, 2\lambda\omega, 2\lambda\omega')$$

dostaneme

$$\wp(\omega') = \rho\wp(\omega) \quad \text{čili} \quad e_3 = \rho e_1 ;$$

odtud a ze vztahu $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ vyplývá $e_2 = \rho^2 e_1$. Dosazením nalezených hodnot za e_2, e_3 do vzorce (23) vypočteme $D = -\rho^2$, takže podmínka ve větě uvedená je nutná.

Nechť obráceně $e_3 - e_1/e_3 - e_2 = -\rho$ nebo $-\rho^2$. Potom platí

$$1 - \frac{e_3 - e_1}{e_3 - e_2} + \left(\frac{e_3 - e_1}{e_3 - e_2}\right)^2 = 0 ,$$

což po vynásobení nenulovým činitelem $(e_3 - e_2)^2$ dává

$$(e_3 - e_2)^2 - (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) + (e_3 - e_1)^2 = 0 .$$

Po úpravě máme

(24)
$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - (e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = 0 ,$$

---

[16] Viz /3/, str. 356 .

odkud užitím vztahu

$$(e_1 + e_2 + e_3)^2 = 0$$

dostáváme

(25) $$e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = 0$$

a tedy $g_2(\omega, \omega') = 0$. Tím je věta dokázána.

Nyní je patrno, že grupu G_{96} nelze rozšířit o další automorfní kolineace ekvianharmonické kvartiky. Vyplývá to z toho, že existuje jen 8 kolineací, jimiž se reprodukuje každý z kuželů obsahujících kvartiku a jen 12 permutací těchto čtyř kuželů zachovává v ekvianharmonickém případě jejich dvojpoměr.

Z vlastností ekvianharmonických kolineací vyplývají pro ekvianharmonickou kvartiku některé zajímavé vlastnosti, jež se týkají hlavně vzájemné polohy jejích význačných bodů. Zkoumejme nejdříve skupinu šestnácti superoskulačních bodů a pokládejme jimi roviny, které obsahují po jednom superoskulačním bodě z každé hlavní roviny.

Především se přesvědčíme, že rovina určená třemi superoskulačními body ležícími v různých hlavních rovinách protne kvartiku po čtvrté v superoskulačním bodě, který leží ve zbývající hlavní rovině. Pro argumenty čtyř superoskulačních bodů ležících v téže hlavní rovině platí totiž jedna z kongruencí (mod $2\omega, 2\omega'$)

$$u \equiv 0 \quad , \quad u \equiv \omega \quad , \quad u \equiv \omega + \omega' \quad , \quad u \equiv \omega'$$

a každá tato kongruence odpovídá jedné hlavní rovině. Leží-li tedy čtyři superoskulační body vesměs v různých hlavních rovinách, platí pro jejich arggumenty

(26) $$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 2\omega\ ,\ 2\omega')\ ,$$

Rovina procházející třemi takovými body protíná kvartiku po čtvrté v bodě s argumentem u , pro který

$$u_1 + u_2 + u_3 + u \equiv 0 \pmod{4\omega,\ 4\omega'}$$

a tedy tím spíše

$$u_1 + u_2 + u_3 + u \equiv 0 \pmod{2\omega,\ 2\omega'} \quad (27)$$

Ze vztahů (26) a (27) dostáváme $u \equiv u_4 \pmod{2\omega,\ 2\omega'}$, odkud vyplývá výše uvedené tvrzení.

Nyní je zřejmé, že každým superoskulačním bodem kvartiky lze vést právě 16 rovin obsahujících po jednom superoskulačním bodě z každé hlavní roviny a že všech těchto rovin je 64. Tuto soustavu 64 rovin označme M. Pro ekvianharmonickou kvartiku platí:

Věta 10. Je-li kvartika ekvianharmonická, skládá se soustava M z 16 čtveřic takových, že roviny každé této čtveřice mají společnou přímku ležící v některé hlavní rovině; každým superoskulačním bodem prochází jedna tato přímka.

Důkaz: Užijeme vlastností kladných ekvianharmonických kolineací typu $\gamma^{\sim}$. Každý superoskulační bod je samodružný v jedné z těchto kolineací. Osa svazku samodružných rovin této kolineace prochází samodružným superoskulačním bodem a leží v příslušné hlavní rovině. Superoskulační body ležící ve zbývajících třech hlavních rovinách tvoří v těchto kolineacích čtyři cykly, přičemž každý cyklus se skládá ze tří bodů ležících v hlavních rovinách navzájem různých.[17] Samodružné roviny obsahující tyto cykly

---

[17] To plyne z toho, že v ekvianharmonické kolineaci je jeden kužel samodružný a zbývající tři tvoří cyklus, což zřejmě platí i o hlavních rovinách.

patří do svazku samodružných rovin a tvoří tedy čtveřici uvedené vlastnosti.

Zbývá dokázat, že roviny, které takto dostaneme pro různé kolineace vyšetřovaného typu, jsou vesměs navzájem různé. Kdyby tomu tak nebylo, byla by některá z těchto rovin samodružná ve dvou různých ekvianharmonických kolineacích, jejichž samodružné superoskulační body by ležely v různých hlavních rovinách, a tudíž i ve všech kolineacích podgrupy g_{48}, kterou obě kolineace vytvářejí. Protože však podgrupa g_{48} obsahuje všechny kladné kolineace, byla by uvedená rovina samodružná i v těch ekvianharmonických kolineacích, jejichž samodružný superoskulační bod leží mimo tuto rovinu, což je spor. Tím je věta dokázána.

Jak ukáže následující věta je tato vzájemná poloha superoskulačních bodů pro ekvianharmonickou kvartiku charakteristická.

<u>Věta 11.</u> Jsou-li v soustavě M čtyři roviny, které mají společnou přímku v některé hlavní rovině kvartiky, je tato kvartika ekvianharmonická.

Uvažme především, že z existence jedné čtveřice rovin(soustavy M) se společnou přímkou v hlavní rovině vyplývá existence dalších patnácti takových čtveřic. Společná přímka uvedených čtyř rovin prochází totiž jedním superoskulačním bodem a tomuto bodu odpovídají v kladných základních kolineacích všechny zbývající superoskulační body. V těchto kolineacích odpovídají daným čtyřem rovinám pokaždé nové čtyři roviny, jejichž společná přímka prochází jiným superoskulačním bodem a leží opět v hlavní rovině. Přitom je zřejmé, že všechny tyto roviny patří do soustavy M. Stačí tedy vyšetřit roviny, které procházejí bodem W_{00} a obsahují po jednom superoskulačním bodě ze zbývajících tří hlavních rovin. Abychom o těchto rovinách měli přehled určíme trojice superoskulačních bodů, které tyto roviny (kromě bodu W_{00}) obsahují a sestavíme je do tabulky.

T a b u l k a I :

$W_{10}-W_{01}-W_{33}$	$W_{30}-W_{03}-W_{11}$	$W_{32}-W_{21}-W_{31}$	$W_{12}-W_{23}-W_{13}$
$W_{30}-W_{23}-W_{31}$	$W_{10}-W_{21}-W_{13}$	$W_{12}-W_{03}-W_{33}$	$W_{32}-W_{01}-W_{11}$
$W_{32}-W_{03}-W_{13}$	$W_{12}-W_{01}-W_{31}$	$W_{10}-W_{23}-W_{11}$	$W_{30}-W_{21}-W_{33}$
$W_{12}-W_{21}-W_{11}$	$W_{32}-W_{23}-W_{33}$	$W_{30}-W_{01}-W_{13}$	$W_{10}-W_{03}-W_{31}$

V prvním a druhém sloupci, jakož i ve třetím a čtvrtém sloupci jsou v této tabulce uvedeny vedle sebe trojice, které si odpovídají ve středové involuci $\alpha/0,0/$. Průsečnice rovin příslušných dvěma takovým trojicím leží v rovině ω_4, která je pro uvedenou involuci rovinou samodružných bodů. Existují-li čtyři roviny se společnou přímkou v rovině ω_4, musí být dvě z uvedených průsečnic totožné. To může nastat jen tehdy, když příslušné roviny nemají kromě bodu W_{00} další společný superoskulační bod. Přicházejí proto v úvahu jen takové čtyři roviny, které odpovídají trojicím superoskulačních bodů uvedeným v témž řádku tabulky I.

V další části důkazu užijeme projektivních souřadnic superoskulačních bodů, které určíme z definice σ-funkcí a ze vztahů (2), tj.

$W_{00}(\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,0)$ $\qquad$ $W_{20}(-1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,0)$

$W_{22}(\ 1\ ,-1\ ,\ 1\ ,0)$ $\qquad$ $W_{02}(\ 1\ ,\ 1\ ,-1\ ,0)$

$W_{10}(\ 0\ ,\sqrt{e_{12}}\ ,\ \sqrt{e_{13}},\ 1)$[18] $\qquad$ $W_{30}(\ 0\ ,-\sqrt{e_{12}}\ ,-\sqrt{e_{13}}\ ,1)$

$W_{32}(\ 0\ ,\ \sqrt{e_{12}}\ ,-\sqrt{e_{13}},\ 1)$ $\qquad$ $W_{12}(\ 0\ ,-\sqrt{e_{12}}\ ,\ \sqrt{e_{13}}\ ,1)$

$W_{11}(\sqrt{e_{21}}\ ,\ 0\ ,\ \sqrt{e_{23}},\ 1)$ $\qquad$ $W_{31}(\sqrt{e_{21}},\ 0\ ,-\sqrt{e_{23}}\ ,1)$

$W_{33}(-\sqrt{e_{21}}\ ,\ 0\ ,-\sqrt{e_{23}},\ 1)$ $\qquad$ $W_{13}(-\sqrt{e_{21}}\ ,\ 0\ ,\ \sqrt{e_{23}}\ ,1)$

$W_{01}(\sqrt{e_{31}}\ ,\sqrt{e_{32}}\ \ 0\ ,1)$ $\qquad$ $W_{21}(\sqrt{e_{31}}\ ,-\sqrt{e_{32}}\ ,\ 0\ ,1)$

$W_{23}(-\sqrt{e_{31}}\ ,\sqrt{e_{32}}\ ,\ 0\ ,1)$ $\qquad$ $W_{03}(-\sqrt{e_{31}}\ ,-\sqrt{e_{32}}\ ,\ 0\ ,1)$

(Hodnoty druhých odmocnin jsou příslušnými σ-funkcemi jednoznačně určeny.)

Roviny odpovídající trojicím $W_{10}-W_{01}-W_{33}$ a $W_{32}-W_{21}-W_{31}$, které jsou uvedeny v prvním řádku tabulky I, mají rovnice

(28)
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & \sqrt{e_{12}} & \pm\sqrt{e_{13}} & 1 \\ \sqrt{e_{31}} & \pm\sqrt{e_{32}} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

čili
$$(\pm\sqrt{e_{13}} \pm\sqrt{e_{32}} - \sqrt{e_{12}})\, x_1 - (\sqrt{e_{31}} \pm\sqrt{e_{13}})\, x_2 +$$
$$+(\sqrt{e_{12}} + \sqrt{e_{31}} \mp \sqrt{e_{32}})\, x_3 + (\sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{32}} + \sqrt{e_{12}}\sqrt{e_{31}} \mp \sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{31}})\, x_4 = 0\ .$$

Jejich průsečnice leží v rovině ω_4 právě tehdy, protínají-li tyto roviny osu o_{12} v témž bodě, neboť jedním společným bodem je bod W_{00}. Tato podmínka je vyjádřena vztahem

$$\begin{vmatrix} \sqrt{e_{13}} + \sqrt{e_{32}} - \sqrt{e_{12}} & \sqrt{e_{13}} + \sqrt{e_{31}} \\ \sqrt{e_{13}} - \sqrt{e_{32}} - \sqrt{e_{12}} & -\sqrt{e_{13}} + \sqrt{e_{31}} \end{vmatrix} = 0\ ,$$

[18] Zde i v dalším píšeme e_{ij} místo $e_i - e_j$.

který lze upravit na tvar

$$\sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{31}} + \sqrt{e_{32}}\sqrt{e_{31}} + \sqrt{e_{12}}\sqrt{e_{13}} = 0 \ . \tag{29}$$

Rovnice rovin, které odpovídají trojicím $W_{10}-W_{21}-W_{13}$ a $W_{32}-W_{01}-W_{11}$ uvedeným ve druhém řádku tabulky I, dostaneme tak, že v rovnicích (28) nahradíme číslo $\sqrt{e_{32}}$ číslem opačným.[19] Můžeme to provést přímo ve vztahu (29), takže podmínky, aby průsečnice těchto dvou rovin ležela v rovině ω_4, má tvar

$$\sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{31}} - \sqrt{e_{32}}\sqrt{e_{31}} + \sqrt{e_{12}}\sqrt{e_{13}} = 0 \ . \tag{30}$$

Ve zbývajících dvou případech (pro roviny odpovídající trojicím uvedeným ve třetím a čtvrtém řádku tabulky I) dostaneme obdobným způsobem podmínky

$$\sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{31}} + \sqrt{e_{32}}\sqrt{e_{31}} - \sqrt{e_{12}}\sqrt{e_{13}} = 0 \ , \tag{31}$$

$$\sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{31}} - \sqrt{e_{32}}\sqrt{e_{31}} - \sqrt{e_{12}}\sqrt{e_{13}} = 0 \ . \tag{32}$$

Nechť tedy v souhlase s předpokladem věty platí aspoň jedna z rovnic (29) - (32). Převedeme-li v této rovnici třetí člen na pravou stranu a povýšíme-li pak obě strany na druhou, dostaneme po dělení nenulovým činitelem e_{31} vztah

$$e_{13} + e_{32} + \varepsilon . 2\sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{32}} = e_{21} \ ,$$

kde buď $\varepsilon = 1$ nebo $\varepsilon = -1$. Po jednoduché úpravě máme

$$\varepsilon \sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{32}} = e_{21} \ ,$$

což po opětném povýšení na druhou dává

$$e_{13}e_{32} = e_{21}^2 \tag{33}$$

čili

$$e_1^2 = e_2^2 + e_3^2 - (e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = 0 \ .$$

---

[19] To odpovídá vzájemné výměně souřadnic bodů W_{01} a W_{21} v těchto rovnicích.

Dostali jsme vztah (24), z něhož vyplývá, že kvartika je ekvianharmonická. Tím je věta dokázána.

Všimněme si, že žádné dvě z podmínek (29) - (32) nemohou platit současně, neboť žádný člen vyskytující se v těchto rovnicích není roven nule. To znamená, že zbývající průsečnice vyšetřovaných rovin, které leží v hlavních rovinách, jsou i v ekvianharmonickém případě navzájem různé.

Tři regulární kvadriky svazku, jehož basí je kvartika, mají právě 8 společných tečných rovin. Jsou-li totiž tyto kvadriky charakterisovány hodnotami $\pm C_1$, $\pm C_2$, $\pm C_3$, protínají jejich společné tečné roviny kvartiku vždy ve čtyřech bodech pro jejichž argumenty platí tyto kongruence (mod 4ω , $4\omega'$):

$$
(34)\qquad
\begin{aligned}
u_0 + u_1 + u_2 + u_3 &\equiv 0 \\
u_0 + u_1 \qquad\qquad &\equiv \varepsilon_1 C_1 \\
u_0 \qquad + u_2 \qquad &\equiv \varepsilon_2 C_2 \\
u_0 \qquad\qquad + u_3 &\equiv \varepsilon_3 C_3 \quad ,
\end{aligned}
$$

kde $\varepsilon_i = \pm 1$ ($i = 1,2,3$). Odečteme-li první kongruenci soustavy (34) od součtu zbývajících tří, dostaneme pro u_0 kongruenci

$$2u_0 \equiv \varepsilon_1 C_1 + \varepsilon_2 C_2 + \varepsilon_3 C_3 \quad (\text{mod } 4\omega , 4\omega') \ .$$

Podobné kongruence (s jinou kombinací znamének) vyplývají ze soustavy (34) pro zbývající argumenty u_1, u_2, u_3 .

Obráceně lze ke každému řešení u_0 kongruence tvaru

$$(35)\qquad 2u \equiv \varepsilon_1 C_1 + \varepsilon_2 C_2 + \varepsilon_3 C_3 \quad (\text{mod } 4\omega , 4\omega')$$

určit hodnoty u_1, u_2, u_3 tak, aby byly splněny všechny kongruence soustavy (34) .

To znamená, že argumenty všech bodů, v nichž kvartiku protínají společné tečné roviny daných tří kvadrik, jsou právě všechna řešení osmi kongruencí tvaru (35). Každá z těchto kongruencí má čtyři řešení tvaru

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 C_1 + \varepsilon_2 C_2 + \varepsilon_3 C_3) + 2h\omega + 2k\omega'$$

kde $h,k = 0,1$ a lze snadno dokázat, že všechny tyto hodnoty jsou navzájem různé. Těmto hodnotám odpovídá 32 bodů, jež jsou rozděleny do osmi čtveřic tak, že pro argumenty každé této čtveřice je splněna soustava (34). Odtud vyplývá uvedené tvrzení o počtu společných tečných rovin tří kvadrik svazku. Tyto kvadriky jsou totiž charakterisovány hodnotami $h\omega + k\omega'$, kde h,k jsou celá čísla nikoli současně sudá a právě takové jsou součty argumentů příslušných dvojicím bodů, v nichž uvedené roviny kvartiku protínají.

Vyšetřujme např. rovinu, která kvartiku protíná v bodech $W_{00} - W_{10} - W_{01} - W_{33}$, tj. která odpovídá trojici uvedené v tabulce I na prvním místě. Protože součty argumentů dvojic $W_{00} - W_{10}$, $W_{01} - W_{33}$ jsou ω, 3ω, jsou spojnice těchto dvojic bodů přímkami různých soustav Vossovy kvadriky, charakterisované těmito hodnotami; označme tuto kvadriku p. Podobně odpovídají dvojicím $W_{00} - W_{33}$, $W_{10} - W_{01}$ přímky různých soustav kvadriky q charakterisované hodnotami $3\omega + 3\omega'$ a $\omega + \omega'$ a dvojicím $W_{00} - W_{01}$, $W_{10} - W_{33}$ přímky různých soustav kvadriky r, charakterisované hodnotami ω' a $3\omega'$. Odtud vyplývá, že vyšetřovaná rovina obsahuje po dvou přímkách každé z uvedených kvadrik a je tedy jejich společnou tečnou rovinou.

Podobným způsobem bychom zjistili, že rovina odpovídající trojici $W_{32} - W_{21} - W_{31}$ je společná tečná rovina kvadrik p', q', r' charakterisovaných hodnotami 3 + 2 a + 2 , 3 + a + 3 , 2 + a 2 + 3 .

Ostatní společné tečné roviny trojic kvadrik p, q, r a p', q', r' odpovídají uvedeným dvěma rovinám v kolineacích podgrupy g_8, tvořené středovými a kladnými osovými involucemi,[20] neboť těmito kolineacemi se všechny kvadriky vyšetřovaného svazku reprodukují. To znamená, že všechny tyto roviny patří do soustavy M .

Roviny, které odpovídají trojicím superoskulačních bodů obsažených ve 2.-4. řádku tabulky I, se rovněž (po dvou) dotýkají vždy tří Vossových kvadrik. Trojicím ve druhém řádku odpovídají společné tečné roviny kvadrik p, q', r' a p', q, r, trojicím ve třetím řádku společné tečné roviny kvadrik p', q', r a p, q, r', trojicím ve čtvrtém řádku společné tečné roviny kvadrik p', q, r' a p, q', r.[21] Zbývající společné tečné roviny těchto trojic kvadrik dostaneme opět užitím kladných involucí.

Odtud vyplývá, že roviny soustavy M jsou právě všechny společné tečné roviny uvedených trojic Vossových kvadrik. Můžeme tedy charakteristickou vlastnost ekvianharmonické kvartiky, která je uvedena ve větách 10 a 11, vyjádřit též takto:

Věta 12. Je-li kvartika ekvianharmonická, splývají v každé hlavní rovině čtyři průsečnice společných tečných rovin tří Vossových kvadrik se čtyřmi průsečnicemi společ-

---

[20] Dvě z těchto společných tečných tečných rovin odpovídají zbývajícím dvěma trojicím superoskulačních bodů, uvedeným v prvním řádku tabulky I.

[21] Jde o všechny možné trojice, které obsahují po jedné kvadrice z každého páru $p-p'$, $q-q'$, $r-r'$.

ných tečných rovin zbývajících tří Vossových kvadrik, a obráceně.

K tomu je třeba dodat, že při každém přípustném rozdělení Vossových kvadrik na trojice splynou průsečnice jejich společných tečných rovin v jediné (pokaždé jiné) hlavní rovině.

O rovinách soustavy M platí dále v případě ekvianharmonické kvartiky tato

<u>Věta 13.</u> Čtyři roviny soustavy M, které mají společnou přímku v hlavní rovině, tvoří ekvianharmonickou čtveřici.

Důkaz: Stačí opět, když uvedené tvrzení dokážeme pro čtyři roviny se společnou přímkou procházející bodem W_{00}. Určíme jejich průsečíky např. s osou o_{24}.

Roviny (28) vytínají na této ose dva body $A(0,y_2,0,y_4)$ a $B(0,z_2,0,z_4)$, pro jejichž souřadnice platí

$$(\sqrt{e_{13}} + \sqrt{e_{31}})\, y_2 - (\sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{32}} + \sqrt{e_{12}}\sqrt{e_{31}} - \sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{31}})\, y_4 = 0 \,, \tag{36}$$

$$(\sqrt{e_{13}} - \sqrt{e_{31}})\, z_2 - (\sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{32}} + \sqrt{e_{12}}\sqrt{e_{31}} + \sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{31}})\, z_4 = 0 \,. \tag{37}$$

Zbývající dvě roviny čtveřice odpovídají rovinám (28) ve středové involuci $\alpha/0,0/$ a protínají tedy osu o_{24} v bodech $A'(0,-y_2,0,y_4)$ a $B'(0,-z_2,0,z_4)$.

Dvojpoměr čtyř bodů A, A', B, B' a tedy i dvojpoměr čtyř vyšetřovaných rovin

$$D = \frac{y_2z_4 - y_4z_2}{-y_2z_4 - y_4z_2} : \frac{y_2z_4 + y_4z_2}{-y_2z_4 + y_4z_2} = \left(\frac{y_2z_4 - y_4z_2}{y_2z_4 + y_4z_2}\right)^2 ,$$

kde za y_2, y_4, z_2, z_4 je třeba dosadit hodnoty vypočtené z rovnic (36) a (37). Po úpravě vychází

$$D = -\frac{(\sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{31}} + \sqrt{e_{32}}\sqrt{e_{31}} - \sqrt{e_{12}}\sqrt{e_{13}})^2}{(\sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{31}} - \sqrt{e_{32}}\sqrt{e_{31}} + \sqrt{e_{12}}\sqrt{e_{13}})^2} ,$$

odtud užitím vztahu (29) dostaneme

$$D = -\frac{e_{12}e_{13}}{e_{32}e_{31}} = \frac{e_{12}}{e_{32}} = \frac{1-\varrho^2}{\varrho-\varrho^2} = -\varrho \ .$$

Tím je věta dokázána.

Superoskulační roviny ekvianharmonické kvartiky patří po jedné do svazků rovin, jejichž osy jsou společné přímky čtveřic rovin soustavy M . Jestliže kvartika není ekvianharmonická, jsou průsečnice jejích superoskulačních rovin s rovinami soustavy M vesměs přímky, které neleží v žádné hlavní rovině této kvartiky. Plyne to z následující věty.

Věta 14. Leží-li některá průsečnice superoskulačních rovin s rovinami soustavy M v některé hlavní rovině kvartiky, je tato kvartika ekvianharmonická.

Důkaz: Zřejmě přicházejí v úvahu jen roviny, které mají společný superoskulační bod. Lze opět předpokládat, že tímto společným bodem je bod W_{00}.

Superoskulační rovina v bodě W_{00} je tečná rovina kužele k_4 v tomto bodě a má tedy rovnici

$$e_{23}x_1 + e_{31}x_2 + e_{12}x_3 = 0 \ . \tag{38}$$

Rovina soustavy M , která prochází bodem W_{00}, odpovídá jedné z trojic superoskulačních bodů uvedených v tabulce I. Její rovnice má tvar

$$(\sqrt{e_{13}} + \sqrt{e_{32}} - \sqrt{e_{12}})\ x_1 - (\sqrt{e_{13}} + \sqrt{e_{31}})\ x_2 + \dots = 0 \ , \tag{39}$$

v němž je třeba případně některé z hodnot $\sqrt{e_{ij}}$ nahradit hodnotami $-\sqrt{e_{ij}}$. Mají-li roviny (38) a (39) společnou přímku v rovině ω_4, protínají obě např. osu o_{12} v témž bodě, což dává podmínku

$$(\sqrt{e_{13}} + \sqrt{e_{32}} - \sqrt{e_{12}})\ e_{31} + (\sqrt{e_{13}} + \sqrt{e_{31}})\ e_{23} = 0$$

Úpravou tohoto vztahu dostaneme

$$\sqrt{e_{13}}\ e_{21} + \sqrt{e_{32}}\ e_{31} = \sqrt{e_{12}}\ e_{31} + \sqrt{e_{31}}\ e_{32}$$

čili

$$\sqrt{e_{12}}\sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{13}} - \sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{12}}\sqrt{e_{12}} = \sqrt{e_{31}}\sqrt{e_{32}}\sqrt{e_{32}} - \sqrt{e_{32}}\sqrt{e_{31}}\sqrt{e_{31}}$$

a povýšením obou stran na druhou

$$e_{12}\, e_{13}\, (\sqrt{e_{13}} - \sqrt{e_{12}})^2 = e_{31}e_{32}(\sqrt{e_{32}} - \sqrt{e_{31}})^2 .$$

Po krácení nenulovým činitelem e_{13} přepišme tento vztah ve tvaru

$$(e_{32} - e_{31})(\sqrt{e_{13}} - \sqrt{e_{12}})^2 = (e_{13} - e_{12})(\sqrt{e_{32}} - \sqrt{e_{31}})^2$$

a dělme obě strany součinem $(\sqrt{e_{13}} - \sqrt{e_{12}})(\sqrt{e_{32}} - \sqrt{e_{31}})$, který je rovněž nenulový.[22] Máme pak $(\sqrt{e_{32}} + \sqrt{e_{31}})(\sqrt{e_{13}} - \sqrt{e_{12}}) = \sqrt{(\sqrt{e_{13}} + \sqrt{e_{12}})(\sqrt{e_{32}} - \sqrt{e_{31}})}$ čili

$$\sqrt{e_{31}}\sqrt{e_{13}} = \sqrt{e_{32}}\sqrt{e_{12}}$$

a po umocnění dvěma

$$e_{13}^2 = e_{12}e_{23} . \tag{40}$$

Tento vztah vznikne však cyklickou záměnou indexů ve vztahu (33), jehož důsledkem je symetrický vztah (24). Tentýž důsledek má tedy vztah (40), takže platí $g_2(\omega, \omega') = 0$. Tím je věta dokázána.

Přistupme nyní ke studiu skupiny 48 bodů osmitečných. Je-li kvartika ekvianharmonická, tvoří tyto body v každé ekvianharmonické kolineaci $\gamma(m,n)$ 16 tříbodových cyklů a roviny obsahující tyto cykly patří do svazků samodružných rovin. Odtud a z vlastností ekvianharmonických kolineací plyne:

<u>Věta 15.</u> Je-li kvartika ekvianharmonická, lze skupinu jejích 48 osmitečných bodů rozdělit na 16 trojic tak, že rovi-

---

[22] Kdyby bylo $\sqrt{e_{13}} - \sqrt{e_{12}} = 0$ nebo $\sqrt{e_{32}} - \sqrt{e_{31}} = 0$, bylo by též $e_{13} - e_{12} = e_{23} = 0$ nebo $e_{32} - e_{31} = e_{12} = 0$, což je spor, neboť čísla e_1, e_2, e_3 jsou po dvou navzájem různá.

ny jimi určené patří do téhož svazku. Toto rozdělení lze provést šestnácti různými způsoby, přičemž každým superoskulačním bodem prochází osa jednoho z těchto svazků.

Zkoumejme podrobněji trojice, které tvoří cykly v kolineaci $\gamma(0,0)$ a sestavme je do tabulky.[23]

T a b u l k a II:

$V_{10}-V_{01}-V_{77}$	$V_{50}-V_{05}-V_{33}$	$V_{54}-V_{41}-V_{73}$	$V_{14}-V_{45}-V_{37}$
$V_{70}\ V_{07}\ V_{11}$	$V_{30}\ V_{03}\ V_{55}$	$V_{34}\ V_{47}\ V_{15}$	$V_{74}\ V_{43}\ V_{51}$
$V_{32}-V_{61}-V_{75}$	$V_{72}-V_{65}-V_{31}$	$V_{76}-V_{21}-V_{71}$	$V_{36}-V_{25}-V_{35}$
$V_{56}-V_{27}-V_{13}$	$V_{16}-V_{23}-V_{57}$	$V_{12}-V_{67}-V_{17}$	$V_{52}-V_{63}-V_{53}$

Trojice jsou v této tabulce uspořádány tak, že osmitečné body čtyř trojic uvedených v témž řádku tvoří vždy tři čtveřice bodů, pro jejichž argumenty platí táž kongruence tvaru

(41) $$2u \equiv m\omega + n\omega' \pmod{4\omega, 4\omega'},$$

kde m,n jsou celá čísla nikoli obě sudá. Každé tyto čtyři body si vzájemně odpovídají v kladných involucích a vyznačují se tím, že tečny ke kvartice v nich patří do téže soustavy přímek jedné Vossovy kvadriky. O takových čtyřech bodech budeme říkat, že jsou vzájemně sdruženy.

Přiřaďme nyní každé čtveřici osmitečných bodů vzájemně sdružených jeden superoskulační bod, jehož spojnice s bodem W_{00} patří spolu s tečnami kvartiky v osmitečných bodech čtveřice do téže soustavy přímek příslušné kvadriky. Jelikož tečna v bodě V_{hk} (jehož argument je $\frac{1}{2}(h\omega + k\omega')$) a spojnice $W_{00}W_{mn}$ patří do téže soustavy přímek některé kvadriky prá-

---

[23] Roviny obsahující tyto trojice procházejí superoskulačním bodem W_{00} .

vě tehdy, když

$$h\omega + k\omega' \equiv m\omega + n\omega' \pmod{4\omega, 4\omega'} ,$$

jsou takto každým třem čtveřicím osmitečných bodů obsaženým v témž řádku tabulky II přiřazený vždy tři body superoskulační, které tvoří jednu z trojic uvedených v prvním řádku tabulky I. Roviny obsahující trojice osmitečných bodů a mající společnou přímku v hlavní rovině lze tedy po čtyřech přiřadit těm rovinám soustavy M, které obsahují tutéž přímku.

Nyní dokážeme větu:

<u>Věta 16.</u> Mají-li čtyři roviny, které obsahují 12 osmitečných bodů kvartiky po čtyřech navzájem sdružených, společnou přímku procházející superoskulačním bodem a ležící v hlavní rovině, je tato kvartika ekvianharmonická.

Důkaz: Víme již, že z existence čtyř rovin se společnou přímkou procházející jedním superoskulačním bodem plyne existence dalších patnácti čtveřic rovin, jejichž společné přímky procházejí po jedné každým ze zbývajících superoskulačních bodů. Přitom je zřejmé, že základní kolineace, v nichž si tyto čtveřice rovin odpovídají, převádějí čtyři osmitečné body vzájemně sdružené opět ve čtyři takové body.

Vyšetřujme tedy čtyři roviny, které obsahují tři čtveřice vzájemně sdružených osmitečných bodů a procházejí bodem W_{00}. Především snadno zjistíme, že tečny ke kvartice v daných osmitečných bodech jsou přímkami tří kvadrik, které tvoří jednu z trojic výše uvedených.[24] Protíná-li totiž rovina kvartiku v bodech V_{hk}, $V_{h'k'}$, $V_{h''k''}$ a W_{00}, platí

(42) $$h + h' + h'' \equiv 0 \pmod 8$$
$$k + k' + k'' \equiv 0 \pmod 8$$

[24] Viz poznámku [21] na str. 27 .

kde h nebo k, h' nebo k', h'' nebo k'' jsou čísla lichá. To znamená, že každá z obou trojic h,h',h'' a k,k',k'' obsahuje dvě čísla lichá a jedno číslo sudé, odkud vyplývá uvedené tvrzení.

Z kongruencí (42) je dále patrno, že třem osmitečným bodům ležícím v jedné rovině vyšetřované čtveřice odpovídají v každé kladné involuci tři osmitečné body ležící po jednom ve zbývajících třech rovinách této čtveřice. Označíme-li tedy ve vhodném pořadí souřadnice tří osmitečných bodů obsažených v jedné rovině

$$(y_1, y_2, y_3,1), \quad (z_1, z_2, z_3,1) , \quad (w_1, w_2, w_3,1) ,$$

jsou souřadnice trojic bodů obsažených ve zbývajících třech rovinách

$$(y_1,-y_2,-y_3,1) , \quad (-z_1, z_2,-z_3,1) , \quad (-w_1,-w_2, w_3,1)$$
$$(-y_1, y_2,-y_3,1) , \quad (-z_1,-z_2, z_3,1) , \quad (w_1,-w_2,-w_3,1)$$
$$(-y_1,-y_2, y_3,1) , \quad (z_1,-z_2,-z_3,1) , \quad (-w_1, w_2,-w_3,1) .$$

Roviny určené bodem W_{00} a vždy dvěma body každé trojice mají rovnice

$$(43) \quad \begin{aligned} &(-y_2+y_3+z_2-z_3)\, x_1 + (y_1-y_3-z_1+z_3)\, x_2 + \dots = 0 \\ &(y_2-y_3+z_2+z_3)\, x_1 + (y_1+y_3+z_1-z_3)\, x_2 + \dots = 0 \\ &(-y_2-y_3-z_2-z_3)\, x_1 + (-y_1+y_3+z_1+z_3)\, x_2 + \dots = 0 \\ &(y_2+y_3-z_2+z_3)\, x_1 + (-y_1-y_3-z_1-z_3)\, x_2 + \dots = 0 \end{aligned}$$

Mají-li tyto roviny společnou přímku ležící v rovině ω_4, má matice

$$\begin{pmatrix} -y_2+y_3+z_2-z_3 & y_1-y_3-z_1+z_3 \\ y_2-y_3+z_2+z_3 & y_1+y_3+z_1-z_3 \\ -y_2-y_3-z_2-z_3 & -y_1+y_3+z_1+z_3 \\ y_2+y_3-z_2+z_3 & -y_1-y_3-z_1-z_3 \end{pmatrix}$$

hodnost jedna. Upravíme tuto matici tak, že její první řádek přičteme ke zbývajícím třem řádkům, které pak podělíme dvěma a odečteme jejich součet od prvního řádku. Po této úpravě máme matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_2 & y_1 \\ -y_2 - z_3 & z_3 \\ y_3 & -y_3 - z_1 \end{pmatrix} ,$$

která má hodnost jedna právě tehdy, existuje-li číslo $k \neq 0$ tak, že platí

$$\begin{aligned} y_1 &= k\, z_2 \\ z_3 &= -k(y_2 + z_3) \\ -(y_3 + z_1) &= k\, y_3 \end{aligned} \quad \text{čili} \quad \begin{aligned} y_1 &= k\, z_2 \\ k\, y_2 &= -(k+1) z_3 \\ -(k+1) y_3 &= z_1 \end{aligned}$$

odkud vyplývá podmínka

(44) $$y_1 y_2 y_3 = z_1 z_2 z_3 \ .$$

Nahradíme-li v rovnicích (43) souřadnice y_i, z_i souřadnicemi z_i, w_i $(i = 1,2,3)$, dostaneme rovnice týchž čtyř rovin, jen v jiném pořadí. Mají-li tedy tyto roviny společnou přímku v rovině ω_4, platí též

(45) $$z_1 z_2 z_3 = w_1 w_2 w_3 \ .$$

Vyjádříme nyní souřadnice osmitečných bodů pomocí čísel e_1, e_2, e_3. Nechť $Y(y_1, y_2, y_3, 1)$ je osmitečný bod, v němž se kvartiky dotýká jedna z přímek kvadriky p nebo p', takže argument tohoto bodu vyhovuje jedné z kongruencí (mod 4ω, $4\omega'$)

$$2u + \omega = 0 \qquad 2u + 3\omega = 0$$

$$2u + 3\omega + 2\omega' = 0 \qquad 2u + \omega + 2\omega' = 0 \ .$$

Z příslušné kongruence pak vyplývá, že rovina určená tečnou ke kvartice v bodě Y a bodem W_{00} protíná kvartiku v dalším superoskulačním bodě W_{mn}, kde $m \equiv 1 \pmod 2$ a $n \equiv 0 \pmod 2$.

Tento bod leží v rovině ω_1 a jeho souřadnice jsou $(0, \varepsilon_1\sqrt{e_{12}}, \varepsilon_2\sqrt{e_{13}}, 1)$, kde $|\varepsilon_i| = 1 \quad (i = 1,2)$.

Tečna ke kvartice v bodě Y je průsečnice tečných rovin kuželů k_2, k_3 v tomto bodě a její rovnice jsou

$$y_1x_1 - y_3x_3 + e_{13}x_4 = 0 \quad ,$$

$$y_1x_1 - y_2x_2 + e_{12}x_4 = 0 \quad .$$

Jelikož ve svazku rovin s osou v této přímce je obsažena rovina, která prochází body W_{00} a W_{mn}, platí

$$\lambda(y_1 - y_3) \quad + \quad \mu(y_1 - y_2) \quad = 0$$

$$\lambda(-\varepsilon_2\sqrt{e_{13}}\, y_3 + e_{13}) + \mu(-\varepsilon_1\sqrt{e_{12}}\, y_2 + e_{12}) = 0 \quad ,$$

odkud vyloučením λ, μ dostaneme

$$-\varepsilon_1\sqrt{e_{12}}y_1y_2 + \varepsilon_2\sqrt{e_{13}}y_1y_3 + (\varepsilon_1\sqrt{e_{12}} - \varepsilon_2\sqrt{e_{13}})y_2y_3 - $$
$$-e_{23}y_1 + e_{13}y_2 - e_{12}y_3 = 0 \, .$$

Pro souřadnice zbývajících tří bodů čtveřice (jejichž argumenty vyhovují téže kongruenci) dostali bychom podobně

$$\varepsilon_1\sqrt{e_{12}}y_1y_2 - \varepsilon_2\sqrt{e_{13}}y_1y_3 + (\varepsilon_1\sqrt{e_{12}} - \varepsilon_2\sqrt{e_{13}})y_2y_3 -$$
$$- e_{23}y_1 - e_{13}y_2 + e_{12}y_3 = 0$$

$$\varepsilon_1\sqrt{e_{12}}y_1y_2 + \varepsilon_2\sqrt{e_{13}}y_1y_3 - (\varepsilon_1\sqrt{e_{12}} - \varepsilon_2\sqrt{e_{13}})y_2y_3 +$$
$$+ e_{23}y_1 + e_{13}y_2 + e_{12}y_3 = 0$$

$$-\varepsilon_1\sqrt{e_{12}}y_1y_2 - \varepsilon_2\sqrt{e_{13}}y_1y_3 - (\varepsilon_1\sqrt{e_{12}} - \varepsilon_2\sqrt{e_{13}})y_2y_3 +$$
$$+ e_{23}y_1 - e_{13}y_2 - e_{12}y_3 = 0 \, .$$

Přičteme-li první rovnici ke zbývajícím třem rovnicím, dostaneme (po vydělení dvěma)

$$(\varepsilon_1\sqrt{e_{12}} - \varepsilon_2\sqrt{e_{13}})y_2y_3 - e_{23}y_1 = 0 \, ,$$

$$\varepsilon_2\sqrt{e_{13}}y_1y_3 + e_{13}y_2 = 0 \quad , \qquad -\varepsilon_1\sqrt{e_{12}}y_1y_2 - e_{12}y_3 = 0$$

čili

$$y_2y_3 = -(\varepsilon_1\sqrt{e_{12}} + \varepsilon_2\sqrt{e_{13}})y_1 \quad ,$$

$$y_1y_3 = -\varepsilon_2\sqrt{e_{13}}y_2 \quad , \qquad y_1y_2 = -\varepsilon_1\sqrt{e_{12}}y_3 \quad .$$

Odtud vyplývá

$$y_1y_2y_3 = -(\varepsilon_2\sqrt{e_{12}} + \varepsilon_1\sqrt{e_{13}})\sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{12}}$$

Stejným způsobem bychom zjistili, že pro souřadnice bodu $Z(z_1,z_2,z_3,1)$, v němž se kvartiky dotýká jedna z přímek kvadriky r nebo r', platí

$$z_1z_2z_3 = -(\varepsilon_4\sqrt{e_{31}} + \varepsilon_3\sqrt{e_{32}})\sqrt{e_{32}}\sqrt{e_{31}} \quad ,$$

kde opět $|\varepsilon_i| = 1 \quad (i = 3,4)$.

Podmínka (44) má nyní tvar

$$(\varepsilon_2\sqrt{e_{12}} + \varepsilon_1\sqrt{e_{13}})\sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{12}} = (\varepsilon_4\sqrt{e_{31}} + \varepsilon_3\sqrt{e_{32}})\sqrt{e_{32}}\sqrt{e_{31}} \quad ,$$

odkud povýšením na druhou vyplývá

$$(\varepsilon_2\sqrt{e_{12}} + \varepsilon_1\sqrt{e_{13}})^2 e_{13}\, e_{12} = (\varepsilon_4\sqrt{e_{31}} + \varepsilon_3\sqrt{e_{32}})^2 e_{32}\, e_{31} \quad ,$$

Tuto rovnost lze (po dělení nenulovým činitelem e_{13}) upravit na tvar

$$(\varepsilon_2\sqrt{e_{12}} + \varepsilon_1\sqrt{e_{13}})^2(e_{32} - e_{31}) = (\varepsilon_4\sqrt{e_{31}} + \varepsilon_3\sqrt{e_{32}})^2(e_{13} - e_{12})$$

takže po dělení součinem $(\varepsilon_2\sqrt{e_{12}} + \varepsilon_1\sqrt{e_{13}})(\varepsilon_4\sqrt{e_{31}} + \varepsilon_3\sqrt{e_{32}})$ [25]

máme

$$(\varepsilon_2\sqrt{e_{12}} + \varepsilon_1\sqrt{e_{13}})(\varepsilon_3\sqrt{e_{32}} - \varepsilon_4\sqrt{e_{31}}) =$$
$$= (\varepsilon_4\sqrt{e_{31}} + \varepsilon_3\sqrt{e_{32}})(\varepsilon_1\sqrt{e_{13}} - \varepsilon_2\sqrt{e_{12}}) \quad ,$$

čili

$$\varepsilon_2\varepsilon_3\sqrt{e_{12}}\sqrt{e_{32}} = \varepsilon_1\varepsilon_4\sqrt{e_{13}}\sqrt{e_{31}} \quad .$$

Odtud povýšením na druhou dostaneme vztah (40) z něhož vyplývá $g_2(\omega, \omega') = 0$. Tím je věta dokázána.

---

[25] Tento součin je různý od nuly, jak vyplývá z poznámky na str. 30 .

Závěrem této práce nalezneme kvartiky, které jsou s danou kvartikou ekvianharmonickou kovariantní. Tak nazýváme každou kvartiku, která se reprodukuje týmiž 96 kolineacemi jako kvartika daná.

Předpokládejme tedy, že aspoň jedna taková kvartika existuje. Tato kvartika je pak rovněž ekvianharmonická a má vzhledem k samodružným prvkům automorfních kolineací tutéž polohu jako kvartika daná. To znamená, že přímky samodružných bodů kolineací $\gamma(m,n)$ jsou jejími bisekantami a leží na ní vždy jeden ze zbývajících samodružných bodů každé této kolineace. Jelikož se žádné dvě kovariantní kvartiky neprotínají[26], existuje k dané ekvianharmonické kvartice nejvýše jedna kvartika s ní kovariantní. γ

Kužel k_4 obsahující danou ekvianharmonickou kvartiku má rovnici

$$x_1^2 + \rho^2 x_2^2 + \rho\, x_3^2 = 0 \, , \tag{46}$$

jak plyne z poslední rovnice (3) užitím vztahů $e_2 = \rho^2 e_1$, $e_3 = \rho\, e_1$. Existuje-li kvartika kovariantní, reprodukuje se středovými involucemi $\alpha/2h, 2k/$ $(h, k = 0,1)$ a kužel k_4', který ji obsahuje, má rovnici tvaru

$$a x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2 = 0 \, ,$$

Kužel k_4' má obsahovat dva ze tří samodružných bodů kolineace $\gamma(0,0)$ ležících v rovině ω_4. Pro souřadnice těchto bodů platí podle (8) rovnice

$$x_2 = k x_1 \, , \qquad x_3 = k x_2 \, , \qquad x_1 = k x_3 \, , \qquad x_4 = 0 \, ,$$

kde $k \neq 0$. Kromě bodu W_{00} jde o body $U_{00}(1,\rho,\rho^2,0)$ a $S_{00}(1,\rho^2,\rho,0)$, z nichž poslední dva leží tedy na kuželu k_4'.

---

[26] Viz /2/, 2.část, str.3 .

Dostáváme podmínky

$$a + \varrho^2 b + \varrho c = 0$$

$$a + \varrho b + \varrho^2 c = 0 \;,$$

z nichž vyplývá $a = b = c$, takže kužel k_4' má rovnici

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \;. \tag{47}$$

Tento kužel je zřejmě samodružný ve všech kolineacích podgrupy g_8, tvořené kladnými a středovými zápornými involucemi. Podle této podgrupy jsou základní kolineace grupy G_{32} rozděleny do čtyř tříd. Povýšíme-li rovnice kolineací $\alpha(1,0)$, $\alpha(1,1)$ a $\alpha(0,1)$, tj.

$$x_1' = -\sqrt{e_{12}}\sqrt{e_{13}}x_4 \;,\quad x_2' = \sqrt{e_{12}}x_3 \;,\quad x_3' = \sqrt{e_{13}}x_2 \;,\quad x_4' = x_1 \;,$$

$$x_1' = \sqrt{e_{21}}x_3 \;,\quad x_2' = -\sqrt{e_{21}}\sqrt{e_{23}}x_4 \;,\quad x_3' = \sqrt{e_{23}}x_1 \;,\quad x_4' = x_2 \;,$$

$$x_1' = \sqrt{e_{31}}x_2 \;,\quad x_2' = \sqrt{e_{32}}x_1 \;,\quad x_3' = -\sqrt{e_{31}}\sqrt{e_{32}}x_4 \;,\quad x_4' = x_3 \;,$$

na druhou, dostaneme v ekvianharmonickém případě vztahy [27]

$$x_1^2 = x_4'^2 \;,\quad x_2^2 = -\varrho x_3'^2 \;,\quad x_3^2 = \varrho^2 x_2'^2 \;,\quad x_4^2 = -x_1'^2 \;,$$

$$x_1^2 = x_3'^2 \;,\quad x_2^2 = x_4'^2 \;,\quad x_3^2 = -\varrho^2 x_1'^2 \;,\quad x_4^2 = -\varrho^2 x_2'^2 \;,$$

$$x_1^2 = -x_2'^2 \;,\quad x_2^2 = \varrho x_1'^2 \;,\quad x_3^2 = x_4'^2 \;,\quad x_4^2 = -\varrho x_3'^2 \;,$$

které platí i pro ostatní kolineace příslušných tříd. V těchto kolineacích se kužel k_4' vyměňuje s kužely k_1', k_2', k_3', jejichž rovnice jsou

$$\varrho^2 x_2^2 - \varrho x_3^2 + x_4^2 = 0 \;,$$

$$-\varrho^2 x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \;, \tag{48}$$

$$\varrho x_1^2 - x_2^2 + x_4^2 = 0 \;,$$

a vyměňují se vždy také dva zbývající kužele této čtveřice.

---

[27] Při vhodné volbě jednotkového bodu platí $e_{12} = \varrho$, $e_{23} = 1$, $e_{31} = \varrho^2$, což předpokládáme.

Tyto kužele patří do téhož svazku kvadrik, neboť matice koeficientů

$$\begin{pmatrix} 0 & \varrho^2 & -\varrho & 1 \\ -\varrho^2 & 0 & 1 & 1 \\ \varrho & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

má hodnost dvě. Basí tohoto svazku je tedy kvartika, která se reprodukuje všemi kolineacemi grupy G_{32} .

V kolineaci $\gamma(0,0)$, jejíž rovnice jsou (viz (8), str.6)

$$x_1 = x_3' \ , \quad x_2 = x_1' \ , \quad x_3 = x_2' \ , \ x_4 = \varrho^2 x_4'$$

je kužel k_4' samodružný a kužele (48) tvoří cyklus. Protože základní kolineace spolu s kolineací $\gamma(0,0)$ vytvářejí grupu G_{96} , reprodukuje se vyšetřovaná kvartika všemi kolineacemi této grupy. Tím je dokázáno:

<u>Věta 17</u>. K dané ekvianharmonické kvartice existuje právě jedna kvartika s ní kovariantní.

Kovariantní kvartika prochází všemi samodružnými body S_{mn}, které jsou jejími body superoskulačními. V samodružném bodě W_{mn} se protínají tečny kovariantní kvartiky v bodech ležících na samodružné přímce, neboť oskulační roviny v těchto bodech se protínají v přímce $W_{mn}S_{mn}$ a společná tečná rovina v nich prochází rovněž bodem W_{mn}. Přímky samodružných bodů kladných ekvianharmonických kolineací jsou průsečnice kuželů k_i, k_i' (i = 1,2,3,4).

L I T E R A T U R A

/1/ B y d ž o v s k ý B., Úvod do algebraické geometrie, Praha 1948, 597-604.

/2/ B y d ž o v s k ý B., Grupa kolineací prostorové křivky bikvadratické prvého druhu, Rozpravy České akademie XVV (1908) č. 18, 1-13 a č. 27,1-3.

/3/ P r i v a l o v I.I., Analytické funkce (český překlad), Praha 1955, 352-367.

/4/ S a k s S., Z y g m u n d A., Analytic Functions, Warszawa 1952, 356-410.

/5/ B u r k h a r d t H., Elliptische Funktionen, Leipzig 1906, 219-221.

/6/ B r u t h a n s V., O grupě automorfních kolineací prostorové kvartiky harmonické, Matematicko-fysikálny časopis SAV. X (1960) č. 4, 222-237.