



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

**Fakulta mechatroniky
a mezioborových inženýrských studií**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

FDM model proudění látek ve spalovacím motoru

2003

Petr DAVID

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta mechatroniky
a mezioborových inženýrských studií

Studijní program: 2612 M – Elektrotechnika a informatika
Obor: 2612 T – Mechatronika

FDM model proudění látek ve spalovacím motoru

FDM Model of Substances Flow
in the Combustion Engine

Vedoucí: Ing. Jan Šembera
Katedra modelování procesů, TUL

UNIVERZITNÍ KNIHOVNA
TECHNICKÉ UNIVERZITY V LIBERCI



3146070139

Rozsah:

počet stran textu	62
počet obrázků	36
počet rovnic	53

Liberec, 23. května 2003

Prohlášení

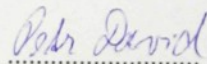
Byl jsem seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 o právu autorském, zejména § 60 (školní dílo) a § 35 (o nevýdělečném užití díla k vnitřní potřebě školy).

Beru na vědomí, že TUL má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé práce a prohlašuji, že *souhlasím* s případným užitím mé práce (prodej, zapůjčení apod.).

Jsem si vědom toho, že užít své diplomové práce či poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem TUL, která má právo ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených univerzitou na vytvoření díla (až do jejich skutečné výše).

17.10.2003

Petr David


.....

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce panu Ing. Janu Šemberovi za odborné vedení, cenné rady a připomínky, poskytnuté informace a zapůjčení odborné literatury.

Děkuji

Petr David

Petr David
.....

Anotace

Tato práce se zabývá numerickým řešením úlohy proudění látek ve spalovacím motoru s využitím metody konečných diferencí (Finite Difference Method – FDM). Jde o matematický popis proudění, který je začleněn do rozsáhlého počítačového modelu chování pístového spalovacího motoru. Tento model je schopen řešit úlohu proudění, úlohu přenosu látek a úlohu přenosu a produkce energie. Úloha proudění je řešena smíšenou hybridní metodou konečných prvků a mým úkolem je navrhnout nový model proudění s využitím FDM, pomocí kterého by bylo možné srovnání výsledků zjištěných dvěma různými metodami a tím případného ověření správnosti původního modelu.

Práce tedy obsahuje úplný návrh FDM modelu proudění látek, tzn. přechod od fyzikálního a matematického modelu přes časovou a prostorovou diskretizaci k numerickému modelu, aproximaci, linearizaci, interpretaci okrajových podmínek. V další části jsou pak vhodným způsobem navrženy testovací úlohy a uvedeny výsledky některých z nich. Příložený CD-ROM obsahuje zdrojové texty modelu proudění řešeného metodou konečných diferencí a výsledky dalších provedených testů.

Abstract

This work is directed to numerical solving of the substances flow problem in the combustion engine using the Finite Difference Method (FDM). There is a mathematical description of the flow, which is included in a large computer model of piston combustion engine behaviour. This model solves the flow problem, the mass transport, and the production and transport of energy. A mixed-hybrid finite element method is used to calculate the flow problem and my objective is to propose a new model of the flow using FDM. This new model would provide the results for comparison between two different computational methods and thereby a possible verification of the finite element model correctness.

The project includes a full FDM gas flow model design – physical and mathematical model to numerical model conversion by the time and space discretization, approximation, linearization, boundary condition interpretation. In the next section, suitable tests are proposed and some results are added. On enclosed CD-ROM, there is full finite difference model source code and the results of other performed tests.

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Katedra KMO

Akademický rok: 2002/2003

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

pro: Petra Davida
studijní program: 2612 M – Elektrotechnika a informatika
obor: 2612 T - mechatronika

Vedoucí katedry Vám ve smyslu zákona o vysokých školách č.111/1998 Sb. určuje tuto diplomovou práci:

Název tématu: **FDM model proudění látek ve spalovacím motoru**

Zásady pro vypracování:

1. Seznamte se s fyzikálním modelem proudění látek ve spalovacím motoru.
2. Navrhněte jeho numerický model metodou konečných diferencí.
3. Upravte stávající programové moduly. Struktura a interface modelu by měly maximálně odpovídat doposud používaným modelům.
4. Navrhněte vhodné testovací úlohy (korektně formulované úlohy pro dané PDE) a dle možností testy realizujte.

KMO/ME

62 p.

FCO R04

1/64/03 M. abv.

Rozsah grafických prací: dle potřeby dokumentace

Rozsah průvodní zprávy: cca 40 až 50 stran

Seznam odborné literatury:

- [1] Hirsch, C.: Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 1 - Fundamentals of Numerical Discretization, John Wiley & Sons Ltd., 1991.
- [2] Šembera, J., Maryška, J.: Discussion on Numerical Modelling of Physical Processes in a Combustion Engine, Sborník konference Algoritmy 2002, Podbanské, str. 179-186.
- [3] Míka, S., Kufner, A.: Parciální diferenciální rovnice I, Stacionární rovnice, SNTL Praha 1983.
- [4] Vitásek, E., Základy teorie numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic, Academia Praha, 1994.

Vedoucí diplomové práce: Ing. Jan Šembera

Konzultant: Ing. Otto Severýn

Zadání diplomové práce: 1. 9. 2002

Termín odevzdání diplomové práce: 23. 5. 2003



Ing. Jan Šembera

.....

Vedoucí katedry

Doc. Dr. Ing. Jiří Maryška, CSc.

.....

Děkan

V Liberci dne 1. 9. 2002

Obsah

1.	ÚVOD	11
2.	FYZIKÁLNÍ MODEL	12
2.1.	Počáteční a okrajové podmínky	12
2.2.	Aproximace	13
3.	MATEMATICKÝ MODEL	14
3.1.	Linearizace	14
3.2.	Aplikace matematických operátorů	14
3.3.	Výsledné rovnice	15
4.	NUMERICKÝ MODEL	16
4.1.	Metoda konečných diferencí	16
4.1.1.	Základní diferenční vztahy	16
4.1.2.	Diferenční vztahy pro nerovnoměrnou diskretizační síť	17
4.2.	Prostorová diskretizace	19
4.3.	Časová diskretizace	19
4.3.1.	Explicitní metoda	19
4.3.2.	Implicitní metoda	20
4.3.3.	Crank–Nicolsonova metoda	20
4.4.	Výsledné vztahy	21
5.	DISKRETIZAČNÍ SÍŤ	26
5.1.	Převod dat z primární sítě do sekundární	27
5.2.	Převod dat ze sekundární sítě do primární	30
6.	IMPLEMENTACE	32
6.1.	Prvky matice	33
6.2.	Tvar matice	37
6.3.	Iterační metoda výpočtu	39
6.4.	Počáteční podmínky pro nový časový krok	40
6.5.	Okrajové podmínky	40
6.6.	Algoritmus výpočtu	41

7. TESTOVACÍ ÚLOHY	43
7.1. Nulová počáteční podmínka	43
7.2. Nenulová počáteční podmínka	43
7.2.1. Horizontální vír	44
7.2.2. Horizontální přetok	48
7.2.3. Vertikální vír	51
7.2.4. Vertikální přetok	55
7.2.5. Ustálené proudění, zadaný tok na hranici oblasti	59
8. DISKUSE VÝSLEDKŮ	60
9. ZÁVĚR	61

1. Úvod

Na Katedře modelování procesů je v prostředí Borland® C++ vyvíjen model spalovacího motoru, který umožňuje numerické řešení dějů probíhajících ve válci motoru během pracovního cyklu. Procesy jsou řešeny smíšenou hybridní metodou konečných prvků (MKP) a metodou konečných objemů (MKO) a to v následujících oblastech:

- Úloha proudění (MKP)
- Úloha přenosu látek (MKO)
- Úloha produkce a přenosu energie (MKO)

Každá z těchto úloh je řešena samostatně a vzájemně si předávají výsledky.

Model je ve formě exe souboru (*motoflow.exe*), který lze spustit ve 32bitovém operačním systému Windows®. Ke spuštění výpočtu je nutná sada vstupních textových souborů, které obsahují množství parametrů jimiž se nastavují vlastnosti výpočtového modelu. Jsou to např. počáteční tlak, teplota a koncentrace jednotlivých složek náplně válce, časový krok výpočtu, celková délka výpočtu, požadovaná přesnost řešení a další. Dále je nutná sada textových souborů, které obsahují informace o síti diskretizující objem válce motoru. Výsledky výpočtu jsou průběžně ukládány do textového nebo binárního výstupního souboru.

Cílem diplomové práce je navrhnout numerický model proudění metodou konečných diferencí (Finite Difference Method – FDM) a na vhodně formulovaných úlohách jej otestovat. Protože na Katedře modelování procesů nejsou k dispozici data z experimentem měněného rychlostní pole, tedy rychlosti jednotlivých částic tekutiny v daném místě a čase uvnitř válce skutečného motoru, je vhodné provést srovnání řešení úlohy proudění metodou konečných prvků, která je již v modelu implementována a metodou konečných diferencí.

2. FYZIKÁLNÍ MODEL

Proudění plynu je řízeno Navier–Stokesovou rovnicí a rovnicí kontinuity v následujících tvarech:

- Navier–Stokesova rovnice pro stlačitelnou tekutinu

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \vec{g} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} + \frac{\zeta}{\rho} \text{grad}(\text{div} \vec{v}), \quad (1)$$

kde $\vec{v}$ je vektor rychlosti proudění látek ve válci, který má tři složky (úloha je řešena v prostoru), ρ je hustota plynu, p jeho tlak, $\vec{g}$ je gravitační zrychlení (má zanedbatelný vliv), η je dynamická viskozita, jejíž hodnota závisí na teplotě podle Sutherlandova vztahu (4) a $\zeta = \lambda + \eta$, kde λ je tzv. druhá viskozita.

- Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (2)$$

- Stavová rovnice, definující vztah mezi tlakem, hustotou a teplotou ideálního plynu

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (3)$$

kde R je plynová konstanta.

- Sutherlandův vztah, popisující teplotní závislost dynamické viskozity

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + T_s}{T + T_s}, \quad (4)$$

kde T_0 a T_s jsou předepsané konstanty, η_0 je dynamická viskozita při teplotě T_0 .

2.1. Počáteční a okrajové podmínky

Počáteční podmínkou je rozložení hustoty plynu a rychlostní pole ve vyšetřované oblasti, tedy ve válci motoru. Na začátku výpočtu je tedy třeba znát hodnoty

$$\rho(t=0) = \rho_0, \quad \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = (v_{x0}; v_{y0}; v_{z0}). \quad (5)$$

Okrajové podmínky definují hodnoty veličin na hranici vyšetřované oblasti Γ . Obecně lze použít jednu ze tří okrajových podmínek:

- Dirichletova okrajová podmínka

$$p = p_D \text{ na části } \Gamma_D \text{ hranice vyšetřované oblasti.} \quad (6)$$

- Neumannova okrajová podmínka
 $\vec{v} \cdot \vec{n} = v_N$ na části Γ_N hranice vyšetřované oblasti, $\vec{n}$ je normálový vektor oblasti.

(7)

- Newtonova okrajová podmínka je kombinací obou předešlých
 $\vec{v} \cdot \vec{n} - \sigma(p - p_w) = v_w$ na části Γ_w hranice vyšetřované oblasti,

(8)

σ je tzv. přestupový koeficient.

Pro metodu konečných diferencí byly užity dvě speciální okrajové podmínky:

1. $\text{grad} \rho \cdot \vec{n} = 0$ na celé hranici oblasti,

(9)

vyjadřuje nulovou změnu hustoty plynu na hranici oblasti („hustota na hranici je stejná jako hustota hned vedle“).

2. $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ na celé hranici oblasti,

(10)

vyjadřuje nepropustnost stěn válce motoru.

Pokud je navíc známa hustota nebo rychlost proudění na části hranice, např. při otevřeném sacím či výfukovém ventilu, je k okrajovým podmínkám (9) a (10) přidána okrajová podmínka podle vztahu (6) nebo (7).

2.2. Aproximace

Pro zjednodušení modelu je v rovnici (1) uvažována hodnota $\zeta = 0$, čímž zmizí člen vyjadřující stlačitelnost plynu.

Protože model proudění řešený metodou konečných prvků nemá plně implementovanu dynamickou viskozitu, je možnost při srovnávacích testech z modelu řešeného metodou konečných diferencí viskózní člen dočasně vypustit.

Těmito zásahy se fyzikální model změnil na popis proudění nestlačitelné a neviskózní tekutiny, který jistě nepopisuje plyn ve válci spalovacího motoru ideálně, ale je nutný pro srovnání výsledků získaných oběma metodami výpočtu.

Ze vztahu (3) vyjádříme tlak a dosadíme do Navier-Stokesovy rovnice, plynovou konstantu a teplotu uvažujeme v celém objemu válce za konstantní a zanedbáváme minimální vliv gravitačního zrychlení. Po zavedení výše uvedených zjednodušení bude tedy systém rovnic popisujících proudění, který bude dále matematicky modelován vypadat následovně

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} + \frac{RT}{\rho} \text{grad} \rho - \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

(11)

přičemž viskozita η je buďto řízena Sutherlandovým vztahem (4), nebo může být nastavena na nulu, čímž z rovnice viskózní člen zmizí.

3. MATEMATICKÝ MODEL

3.1. Linearizace

Protože jsou zjednodušené rovnice (11) nelineární, byla použita základní iterační metoda pro odstranění nelineárních členů. V Navier-Stokesově rovnici je lineární pouze člen $\partial \mathbf{v} / \partial t$ a v rovnici kontinuity člen $\partial \rho / \partial t$. Všechny ostatní členy jsou linearizovány a to následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} &\rightarrow (\mathbf{v}_I \cdot \text{grad}) \mathbf{v}, & \frac{RT}{\rho} \text{grad} \rho &\rightarrow \frac{RT}{\rho_I} \text{grad} \rho, & \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} &\rightarrow \frac{\eta}{\rho_I} \Delta \mathbf{v}, \\ \text{div}(\rho \mathbf{v}) &\rightarrow \rho_I \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v}_I \text{grad} \rho, \end{aligned} \quad (12)$$

přičemž členy s indexem I jsou iterační hodnoty, které se v limitě rovnají hodnotám správným a jsou počítány speciálním postupem, popsáním v kapitole 6.3.

3.2. Aplikace matematických operátorů

V Navier-Stokesově rovnici vystupují dva diferenciální operátory – Laplaceův operátor Δ a operátor konvekční derivace $(\mathbf{v}_I \cdot \text{grad})$. Pro Laplaceův operátor platí

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

kde v_x , v_y a v_z jsou tři složky vektoru rychlosti $\mathbf{v}$. Při zavedení linearizace podle předchozí kapitoly platí pro operátor konvekční derivace

$$(\mathbf{v}_I \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = \left(v_{xI} \frac{\partial}{\partial x} + v_{yI} \frac{\partial}{\partial y} + v_{zI} \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{xI} \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_{yI} \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_{zI} \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_{xI} \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_{yI} \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_{zI} \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_{xI} \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_{yI} \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_{zI} \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

V rovnici kontinuity vystupuje operátor divergence, který můžeme rozepsat následovně:

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) = \rho \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{grad} \rho = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (15)$$

Po linearizaci tedy platí

$$\rho_I \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v}_I \operatorname{grad} \rho = \rho_I \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + v_{xI} \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_{yI} \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_{zI} \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (16)$$

3.3. Výsledné rovnice

Po dosazení všech vztahů z předchozí kapitoly do rovnic proudění dostaneme následující tvar, který bude implementován do programových modulů výpočtového programu motoflow

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{xI} \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_{yI} \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_{zI} \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_{xI} \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_{yI} \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_{zI} \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_{xI} \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_{yI} \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_{zI} \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{RT}{\rho_I} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{RT}{\rho_I} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ \frac{RT}{\rho_I} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \end{pmatrix} - \eta \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_I \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + v_{xI} \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_{yI} \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_{zI} \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

Máme tedy soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé – tři složky vektoru rychlosti proudění v_x, v_y, v_z a hustotu plynu ve válci ρ – jejíž řešením získáme proudové pole a hustotu náplně válce v závislosti na čase.

4. NUMERICKÝ MODEL

4.1. Metoda konečných diferencí

4.1.1. Základní diferenční vztahy

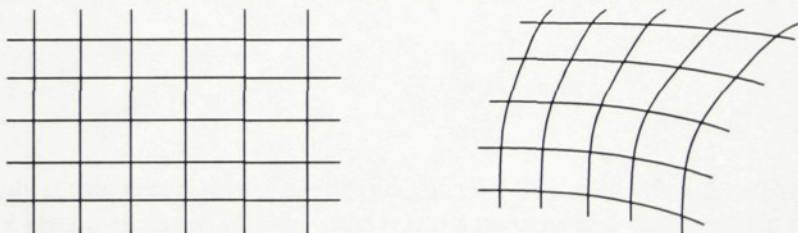
Metoda konečných diferencí je založena na definici derivace a na vlastnostech Taylorova rozvoje. Je to jedna z nejjednodušších metod používaná především pro rovnoměrné diskretizační sítě, ale vyžaduje vysoký stupeň pravidelnosti sítě. Diskretizační síť musí být složena z přímek nebo křivek, v jejichž průsečících jsou tzv. uzlové body sítě. Pokud máme v n -rozměrném prostoru n skupin čar, musí každý uzel sítě ležet právě na jediné přímce, resp. křivce z každé skupiny (viz **Obr. 1**).

Pro funkci $y(x)$ je derivace v bodě x definována jako

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}. \quad (19)$$

Pokud je diskretizační krok Δx malý ale konečný, je výraz na pravé straně aproximací skutečné hodnoty y' . Při zmenšování Δx se bude zvyšovat přesnost aproximace, ale pro každou konečnou hodnotu bude existovat nějaká chyba, která se blíží k nule pokud $\Delta x \rightarrow 0$.

Obr. 1: Příklad diskretizační sítě pro metodu konečných diferencí



Taylorovým rozvojem dostaneme

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta x \cdot y'(x) + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot y''(x) + \dots, \quad (20)$$

pak tedy pro derivaci platí

$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = y'(x) + \frac{\Delta x}{2} \cdot y''(x) + \dots \quad (21)$$

Říkáme že jde o aproximaci prvního řádu a píšeme

$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = y'(x) + O(\Delta x), \quad (22)$$

kde chyba $O(\Delta x)$ jde k nule s první mocninou diskretizačního kroku.

Uvažujme jednorozměrný prostor s osou x a prostorovou diskretizací s N diskretizačními body x_i , $i = 1, 2, \dots, N$ (viz **Obr. 2**). Označme body y_i jako funkční hodnoty v jednotlivých diskretizačních bodech a Δx jako konstantní diskretizační krok. Pro první derivaci funkce y pak můžeme definovat následující diferenční vztahy:

$$(y')_i = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (23)$$

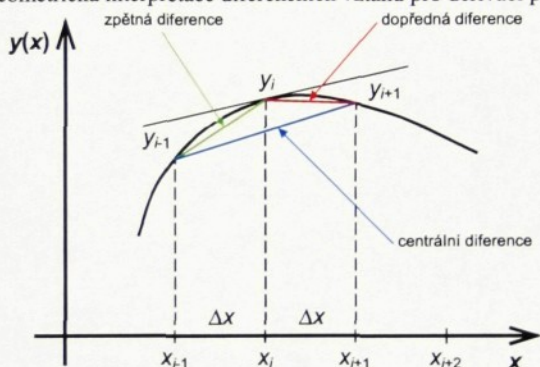
$$(y')_i = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (24)$$

První vztah je tzv. dopředná diference, druhý nazýváme zpětná diference, obě jsou aproximacemi prvního řádu.

Pomocí Taylorova rozvoje hodnot $y(x + \Delta x)$ a $y(x - \Delta x)$ dostaneme vztah pro centrální diferenci, který je aproximací druhého řádu:

$$(y')_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (25)$$

Obr. 2: Geometrická interpretace diferenčních vztahů pro derivaci prvního řádu



Aproximace derivací vyšších řádů se provádí podobně. Například centrální diferenční vztah pro druhou derivaci s aproximací druhého řádu může být odvozen v následujícím tvaru:

$$(y'')_i = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=x_i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (26)$$

Velikost chyby lze opět odvodit z Taylorova rozvoje

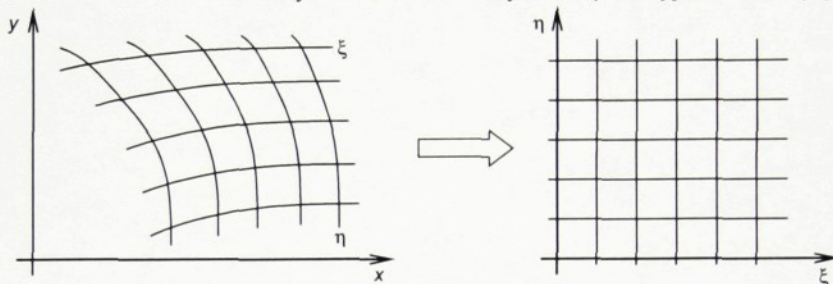
$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} = (y'')_i + \frac{\Delta x^2}{12} \cdot (y^{(4)}) + \dots \quad (27)$$

4.1.2. Diferenční vztahy pro nerovnoměrnou diskretizační síť

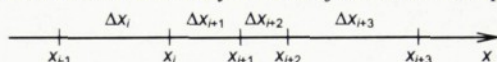
Pro nerovnoměrné nebo křivočaré síť je diskretizace možná po transformaci z fyzického prostoru x, y, z do kartézského souřadného systému ξ, η, ζ . Vztah mezi oběma souřadnými systémy je popsán zobrazením fyzického prostoru do výpočtového prostoru $\xi = f(x, y, z)$, $\eta = f(x, y, z)$, $\zeta = f(x, y, z)$.

Všechny vztahy uvedené v předchozí kapitole tedy mohou být aplikovány v prostoru ξ, η, ζ na rovnice psané v křivočarých souřadnicích. Jediné omezení sítě je takové, že žádná křivka z jedné prostorové skupiny nesmí protínat jinou křivku ze stejné skupiny. Pro příklad, na **Obr. 3** nesmí žádná křivka ze skupiny ξ protínat jinou křivku z téže skupiny (znamenaloby to dvě různé hodnoty souřadnice ξ pro tentýž uzlový bod).

Obr. 3: Zobrazení libovolného fyzického souřadného systému x, y do výpočtové roviny ξ, η



Obr. 4: Příklad rozložení uzlových bodů v jednorozměrném prostoru x



Podle **Obr. 4** můžeme pro libovolný bod x_i psát aproximace prvního řádu pro dopřednou diferenci

$$(y')_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x_{i+1}} - \frac{\Delta x_{i+1}}{2} \cdot y'' \quad (28)$$

a zpětnou diferenci

$$(y')_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x_i} + \frac{\Delta x_i}{2} \cdot y'', \quad (29)$$

kde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

(30)

Pro eliminaci chyby prvního řádu zkombinujeme vztahy (28) a (29) a dostaneme rovnici pro centrální diferenci s aproximací druhého řádu

$$(y')_i = \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \cdot (y_{i+1} - y_i) + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \cdot (y_i - y_{i-1}) \right] - \frac{\Delta x_i \cdot \Delta x_{i+1}}{6} \cdot y'''. \quad (31)$$

Obdobně lze odvodit centrální diferenční vztah pro derivaci druhého řádu

$$(y'')_i = \frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x_i} \right] + \frac{\Delta x_{i+1} - \Delta x_i}{3} \cdot y'''' - \frac{\Delta x_i^3 + \Delta x_{i+1}^3}{12 \cdot (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \cdot y^{(4)} \quad (32)$$

Ze vztahů je vidět, že velikost chyby závisí na dvou po sobě jdoucích diskretizačních krocích Δx_i a Δx_{i+1} . Pokud se velikost kroku výrazně mění, dochází k nevyhnutelné ztrátě přesnosti, např. při $\Delta x_{i+1} \approx 2\Delta x_i$ bude přesnost vztahu (32) pouze prvního řádu.

Je zřejmé že pro výpočet první i druhé derivace na nerovnoměrné diskretizační síti jsou použity tři uzlové body.

4.2. Prostorová diskretizace

Protože pro výpočty bude použita diskretizační síť s nerovnoměrným rozložením uzlových bodů (viz kapitola 5), je nutné v rovnicích použít diferenční vztahy (31) a (32) pro nerovnoměrnou diskretizační síť. V síti na **Obr. 8c**) je v souřadnici z rozložení uzlů symetrické, takže by bylo možné použít základní diferenční vztahy (např. centrální difference (25) a (26)), ale protože je v ose z vzdálenost hranice oblasti od krajních uzlů poloviční proti diskretizačnímu kroku Δz , je vhodné i v tomto případě použít složitější aproximace pro nerovnoměrnou síť, čímž je také dosaženo jisté symetričnosti v rovnicích proudění.

4.3. Časová diskretizace

Řešené rovnice proudění můžeme pro snazší popis časové diskretizace zjednodušit na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu ve tvaru

$$\frac{dy}{dt} = \bar{f}(t, y). \quad (33)$$

4.3.1. Explicitní metoda

Pro aproximaci rovnice (33) explicitní metodou bude časová derivace vyjádřena diferenčním vztahem

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)_{t+\Delta t} = \frac{\bar{y}_N - \bar{y}_S}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (34)$$

kde Δt je časový diskretizační krok, $\bar{y}_N$ je funkční hodnota v čase $t + \Delta t$ a $\bar{y}_S$ hodnota v čase t . Pravá strana rovnice bude vyjádřena ve starém časovém okamžiku. Po dosazení do rovnice (33) a úpravě dostaneme explicitní vzorec s chybou prvního řádu

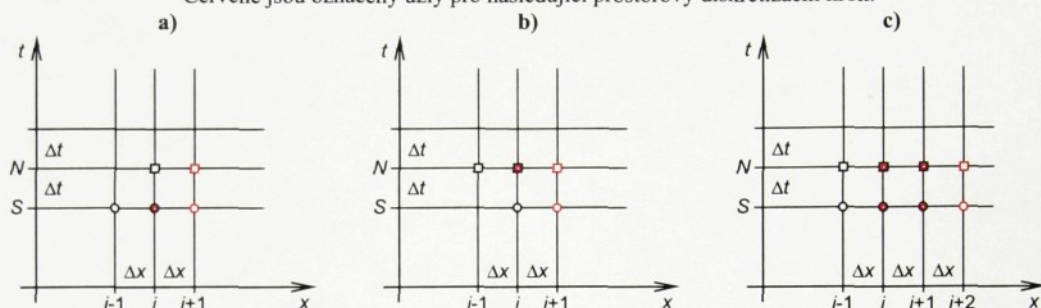
$$\bar{y}_N = \bar{f}(t, \bar{y}_S) \cdot \Delta t + \bar{y}_S. \quad (35)$$

Explicitní metoda má jednoduché schéma, protože v právě počítaném časovém řádku je vždy pouze jedna neznámá.

Obr. 5: Rozložení uzlových bodů pro a) explicitní schéma, b) implicitní schéma, c) Crank–Nicolsonovo schéma.

Symbolem $\square$ jsou označeny uzly s neznámými hodnotami veličin, které se vypočtou pomocí hodnot v uzlech označených $\circ$, známých z předešlého časového kroku.

Červeně jsou označeny uzly pro následující prostorový diskretizační krok.



4.3.2. Implicitní metoda

V případě implicitní metody se pro aproximaci časové derivace použije stejný diferenční vztah jako v metodě explicitní, ale pravá strana rovnice bude vyjádřena v novém čase. Výsledná aproximační rovnice potom bude

$$\bar{y}_N - \bar{f}(t + \Delta t, \bar{y}_N) \cdot \Delta t = \bar{y}_S. \quad (36)$$

Použití této metody vede na složitější schéma, ale zaručuje vyšší stabilitu řešení než metoda explicitní. Aproximace je i v tomto případě prvního řádu. Pokud je $\bar{f}$ lineární funkcí proměnné $\bar{y}$, což je v našem případě po linearizaci pravda, vede použití implicitní metody na soustavu lineárních algebraických rovnic.

4.3.3. Crank–Nicolsonova metoda

Pokud vyjádříme pravou stranu rovnice (33) aritmetickým průměrem hodnot ve starém a novém časovém okamžiku, tj. aproximační schéma ve tvaru

$$\frac{\bar{y}_N - \bar{y}_S}{\Delta t} = \frac{\bar{f}(t, \bar{y}_S) + \bar{f}(t + \Delta t, \bar{y}_N)}{2}, \quad (37)$$

dostáváme tzv. Crank–Nicolsonovo schéma, jehož složitost je srovnatelná s implicitní metodou (je třeba řešit soustavu lineárních algebraických rovnic), ale zvýší se řád přesnosti [6]. Po úpravě vztahu (37) tedy dostáváme aproximační rovnici s chybou druhého řádu

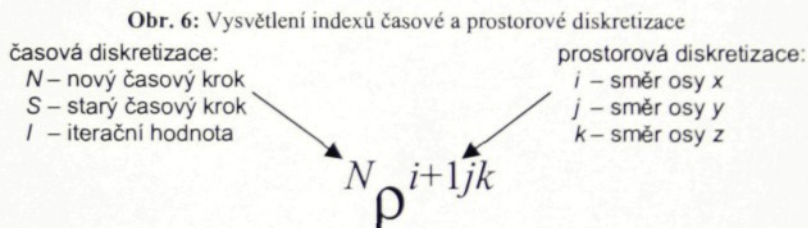
$$\bar{y}_N - \frac{\Delta t}{2} \bar{f}(t + \Delta t, \bar{y}_N) = \bar{y}_S + \frac{\Delta t}{2} \bar{f}(t, \bar{y}_S). \quad (38)$$

Výsledné schéma již obsahuje dvojnásobek uzlových bodů diskretizační sítě proti předchozím metodám (viz **Obr. 5**), ale dostaneme aproximaci s druhým řádem přesnosti a stejnou stabilitou řešení, jakou má implicitní metoda. Z těchto důvodů bylo pro implementaci do modelu motoflow zvoleno Crank–Nicolsonovo schéma.

4.4. Výsledné vztahy

V níže uvedených rovnicích je použito následujícího značení: Δx , Δy a Δz jsou prostorové diskretizační kroky v příslušném směru souřadného systému, přičemž indexy odpovídají značení podle rovnice (30) a **Obr. 4**, Δt je časový diskretizační krok. Horní indexy u jednotlivých veličin jsou psány podle pravidla na **Obr. 6**.

Konečná verze soustavy rovnic popisujících proudění ve válci motoru, která bude přidána do modelu motoflow tedy bude mít tvar podle vztahů (39) až (42).



$$\begin{aligned}
& \frac{N v_x^{ijk}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{I v_x^{ijk}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \cdot (N v_x^{i+1,jk} - N v_x^{ijk}) + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \cdot (N v_x^{ijk} - N v_x^{i-1,jk}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{I v_y^{ijk}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left[\frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \cdot (N v_x^{ij+1,k} - N v_x^{ijk}) + \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} \cdot (N v_x^{ijk} - N v_x^{ij-1,k}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{I v_z^{ijk}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left[\frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \cdot (N v_x^{ijk+1} - N v_x^{ijk}) + \frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} \cdot (N v_x^{ijk} - N v_x^{ijk-1}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{R^{ijk} T^{ijk}}{I \rho^{ijk} \cdot (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \cdot \left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \cdot (N \rho^{i+1,jk} - N \rho^{ijk}) + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \cdot (N \rho^{ijk} - N \rho^{i-1,jk}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta^{ijk}}{I \rho^{ijk}} \cdot \left[\frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left(\frac{N v_x^{i+1,jk} - N v_x^{ijk}}{\Delta x_{i+1}} - \frac{N v_x^{ijk} - N v_x^{i-1,jk}}{\Delta x_i} \right) + \right. \\
& \quad + \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left(\frac{N v_x^{ij+1,k} - N v_x^{ijk}}{\Delta y_{j+1}} - \frac{N v_x^{ijk} - N v_x^{ij-1,k}}{\Delta y_j} \right) + \\
& \quad \left. + \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left(\frac{N v_x^{ijk+1} - N v_x^{ijk}}{\Delta z_{k+1}} - \frac{N v_x^{ijk} - N v_x^{ijk-1}}{\Delta z_k} \right) \right] = \\
& = \frac{S v_x^{ijk}}{\Delta t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S v_x^{ijk}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \cdot (S v_x^{i+1,jk} - S v_x^{ijk}) + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \cdot (S v_x^{ijk} - S v_x^{i-1,jk}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{S v_y^{ijk}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left[\frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \cdot (S v_x^{ij+1,k} - S v_x^{ijk}) + \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} \cdot (S v_x^{ijk} - S v_x^{ij-1,k}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{S v_z^{ijk}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left[\frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \cdot (S v_x^{ijk+1} - S v_x^{ijk}) + \frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} \cdot (S v_x^{ijk} - S v_x^{ijk-1}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^{ijk} T^{ijk}}{S \rho^{ijk} \cdot (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \cdot \left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \cdot (S \rho^{i+1,jk} - S \rho^{ijk}) + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \cdot (S \rho^{ijk} - S \rho^{i-1,jk}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta^{ijk}}{S \rho^{ijk}} \cdot \left[\frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left(\frac{S v_x^{i+1,jk} - S v_x^{ijk}}{\Delta x_{i+1}} - \frac{S v_x^{ijk} - S v_x^{i-1,jk}}{\Delta x_i} \right) + \right. \\
& \quad + \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left(\frac{S v_x^{ij+1,k} - S v_x^{ijk}}{\Delta y_{j+1}} - \frac{S v_x^{ijk} - S v_x^{ij-1,k}}{\Delta y_j} \right) + \\
& \quad \left. + \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left(\frac{S v_x^{ijk+1} - S v_x^{ijk}}{\Delta z_{k+1}} - \frac{S v_x^{ijk} - S v_x^{ijk-1}}{\Delta z_k} \right) \right],
\end{aligned}$$

(39)

$$\begin{aligned}
& \frac{N v_y^{ijk}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{I v_x^{ijk}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \cdot (N v_y^{i+1jk} - N v_y^{ijk}) + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \cdot (N v_y^{ijk} - N v_y^{i-1jk}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{I v_y^{ijk}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left[\frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \cdot (N v_y^{ij+1k} - N v_y^{ijk}) + \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} \cdot (N v_y^{ijk} - N v_y^{ij-1k}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{I v_z^{ijk}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left[\frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \cdot (N v_y^{ijk+1} - N v_y^{ijk}) + \frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} \cdot (N v_y^{ijk} - N v_y^{ijk-1}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{R^{ijk} T^{ijk}}{I \rho^{ijk} \cdot (\Delta y_j + \Delta y_{j+1})} \cdot \left[\frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \cdot (N \rho^{ij+1k} - N \rho^{ijk}) + \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} \cdot (N \rho^{ijk} - N \rho^{ij-1k}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta^{ijk}}{I \rho^{ijk}} \cdot \left[\frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left(\frac{N v_y^{i+1jk} - N v_y^{ijk}}{\Delta x_{i+1}} - \frac{N v_y^{ijk} - N v_y^{i-1jk}}{\Delta x_i} \right) + \right. \\
& + \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left(\frac{N v_y^{ij+1k} - N v_y^{ijk}}{\Delta y_{j+1}} - \frac{N v_y^{ijk} - N v_y^{ij-1k}}{\Delta y_j} \right) + \\
& \left. + \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left(\frac{N v_y^{ijk+1} - N v_y^{ijk}}{\Delta z_{k+1}} - \frac{N v_y^{ijk} - N v_y^{ijk-1}}{\Delta z_k} \right) \right] = \\
& = \frac{S v_y^{ijk}}{\Delta t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S v_x^{ijk}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \cdot (S v_y^{i+1jk} - S v_y^{ijk}) + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \cdot (S v_y^{ijk} - S v_y^{i-1jk}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{S v_y^{ijk}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left[\frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \cdot (S v_y^{ij+1k} - S v_y^{ijk}) + \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} \cdot (S v_y^{ijk} - S v_y^{ij-1k}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{S v_z^{ijk}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left[\frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \cdot (S v_y^{ijk+1} - S v_y^{ijk}) + \frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} \cdot (S v_y^{ijk} - S v_y^{ijk-1}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^{ijk} T^{ijk}}{S \rho^{ijk} \cdot (\Delta y_j + \Delta y_{j+1})} \cdot \left[\frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \cdot (S \rho^{ij+1k} - S \rho^{ijk}) + \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} \cdot (S \rho^{ijk} - S \rho^{ij-1k}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta^{ijk}}{S \rho^{ijk}} \cdot \left[\frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left(\frac{S v_y^{i+1jk} - S v_y^{ijk}}{\Delta x_{i+1}} - \frac{S v_y^{ijk} - S v_y^{i-1jk}}{\Delta x_i} \right) + \right. \\
& + \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left(\frac{S v_y^{ij+1k} - S v_y^{ijk}}{\Delta y_{j+1}} - \frac{S v_y^{ijk} - S v_y^{ij-1k}}{\Delta y_j} \right) + \\
& \left. + \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left(\frac{S v_y^{ijk+1} - S v_y^{ijk}}{\Delta z_{k+1}} - \frac{S v_y^{ijk} - S v_y^{ijk-1}}{\Delta z_k} \right) \right],
\end{aligned}$$

(40)

$$\begin{aligned}
& \frac{N v_z^{ijk}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{I v_x^{ijk}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \cdot (N v_z^{i+1jk} - N v_z^{ijk}) + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \cdot (N v_z^{ijk} - N v_z^{i-1jk}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{I v_y^{ijk}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left[\frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \cdot (N v_z^{ij+1k} - N v_z^{ijk}) + \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} \cdot (N v_z^{ijk} - N v_z^{ij-1k}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{I v_z^{ijk}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left[\frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \cdot (N v_z^{ijk+1} - N v_z^{ijk}) + \frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} \cdot (N v_z^{ijk} - N v_z^{ijk-1}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{R^{ijk} T^{ijk}}{I \rho^{ijk} \cdot (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})} \cdot \left[\frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \cdot (N \rho^{ijk+1} - N \rho^{ijk}) + \frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} \cdot (N \rho^{ijk} - N \rho^{ijk-1}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta^{ijk}}{I \rho^{ijk}} \cdot \left[\frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left(\frac{N v_z^{i+1jk} - N v_z^{ijk}}{\Delta x_{i+1}} - \frac{N v_z^{ijk} - N v_z^{i-1jk}}{\Delta x_i} \right) + \right. \\
& \quad + \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left(\frac{N v_z^{ij+1k} - N v_z^{ijk}}{\Delta y_{j+1}} - \frac{N v_z^{ijk} - N v_z^{ij-1k}}{\Delta y_j} \right) + \\
& \quad \left. + \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left(\frac{N v_z^{ijk+1} - N v_z^{ijk}}{\Delta z_{k+1}} - \frac{N v_z^{ijk} - N v_z^{ijk-1}}{\Delta z_k} \right) \right] = \\
& = \frac{S v_z^{ijk}}{\Delta t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S v_x^{ijk}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \cdot (S v_z^{i+1jk} - S v_z^{ijk}) + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \cdot (S v_z^{ijk} - S v_z^{i-1jk}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{S v_y^{ijk}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left[\frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \cdot (S v_z^{ij+1k} - S v_z^{ijk}) + \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} \cdot (S v_z^{ijk} - S v_z^{ij-1k}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{S v_z^{ijk}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left[\frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \cdot (S v_z^{ijk+1} - S v_z^{ijk}) + \frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} \cdot (S v_z^{ijk} - S v_z^{ijk-1}) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^{ijk} T^{ijk}}{S \rho^{ijk} \cdot (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})} \cdot \left[\frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \cdot (S \rho^{ijk+1} - S \rho^{ijk}) + \frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} \cdot (S \rho^{ijk} - S \rho^{ijk-1}) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta^{ijk}}{S \rho^{ijk}} \cdot \left[\frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left(\frac{S v_z^{i+1jk} - S v_z^{ijk}}{\Delta x_{i+1}} - \frac{S v_z^{ijk} - S v_z^{i-1jk}}{\Delta x_i} \right) + \right. \\
& \quad + \frac{2}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left(\frac{S v_z^{ij+1k} - S v_z^{ijk}}{\Delta y_{j+1}} - \frac{S v_z^{ijk} - S v_z^{ij-1k}}{\Delta y_j} \right) + \\
& \quad \left. + \frac{2}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left(\frac{S v_z^{ijk+1} - S v_z^{ijk}}{\Delta z_{k+1}} - \frac{S v_z^{ijk} - S v_z^{ijk-1}}{\Delta z_k} \right) \right],
\end{aligned}$$

(41)

$$\begin{aligned}
& \frac{{}^N \rho^{ijk}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot {}^I \rho^{ijk} \cdot \left\{ \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \cdot ({}^N v_x^{i+1jk} - {}^N v_x^{ijk}) + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \cdot ({}^N v_x^{ijk} - {}^N v_x^{i-1jk}) \right] + \right. \\
& \quad + \frac{1}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left[\frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \cdot ({}^N v_y^{ij+1k} - {}^N v_y^{ijk}) + \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} \cdot ({}^N v_y^{ijk} - {}^N v_y^{ij-1k}) \right] + \\
& \quad \left. + \frac{1}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left[\frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \cdot ({}^N v_z^{ijk+1} - {}^N v_z^{ijk}) + \frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} \cdot ({}^N v_z^{ijk} - {}^N v_z^{ijk-1}) \right] \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_x^{ijk}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \cdot ({}^N \rho^{i+1jk} - {}^N \rho^{ijk}) + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \cdot ({}^N \rho^{ijk} - {}^N \rho^{i-1jk}) \right] + \\
& \quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_y^{ijk}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left[\frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \cdot ({}^N \rho^{ij+1k} - {}^N \rho^{ijk}) + \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} \cdot ({}^N \rho^{ijk} - {}^N \rho^{ij-1k}) \right] + \\
& \quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_z^{ijk}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left[\frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \cdot ({}^N \rho^{ijk+1} - {}^N \rho^{ijk}) + \frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} \cdot ({}^N \rho^{ijk} - {}^N \rho^{ijk-1}) \right] = \\
& = \frac{{}^S \rho^{ijk}}{\Delta t} - \frac{1}{2} \cdot {}^S \rho^{ijk} \cdot \left\{ \frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \cdot ({}^S v_x^{i+1jk} - {}^S v_x^{ijk}) + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \cdot ({}^S v_x^{ijk} - {}^S v_x^{i-1jk}) \right] + \right. \\
& \quad + \frac{1}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left[\frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \cdot ({}^S v_y^{ij+1k} - {}^S v_y^{ijk}) + \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} \cdot ({}^S v_y^{ijk} - {}^S v_y^{ij-1k}) \right] + \\
& \quad \left. + \frac{1}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left[\frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \cdot ({}^S v_z^{ijk+1} - {}^S v_z^{ijk}) + \frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} \cdot ({}^S v_z^{ijk} - {}^S v_z^{ijk-1}) \right] \right\} - \\
& \quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^S v_x^{ijk}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \cdot ({}^S \rho^{i+1jk} - {}^S \rho^{ijk}) + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \cdot ({}^S \rho^{ijk} - {}^S \rho^{i-1jk}) \right] - \\
& \quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^S v_y^{ijk}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left[\frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \cdot ({}^S \rho^{ij+1k} - {}^S \rho^{ijk}) + \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} \cdot ({}^S \rho^{ijk} - {}^S \rho^{ij-1k}) \right] - \\
& \quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^S v_z^{ijk}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left[\frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \cdot ({}^S \rho^{ijk+1} - {}^S \rho^{ijk}) + \frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} \cdot ({}^S \rho^{ijk} - {}^S \rho^{ijk-1}) \right],
\end{aligned}$$

(42)

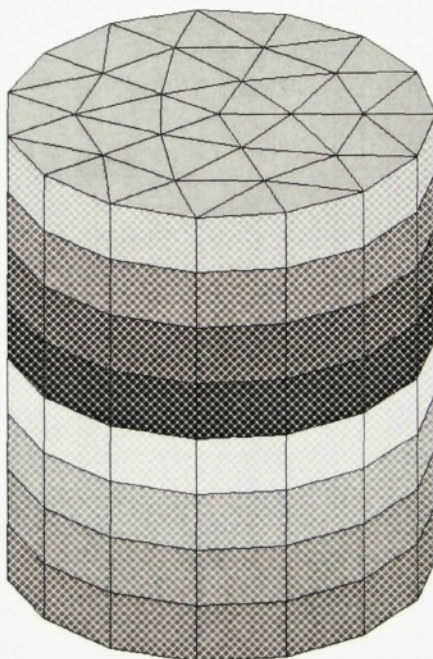
5. DISKRETIZAČNÍ SÍŤ

Model *motoflow* používá pro diskretizaci objemu válce síť, jejíž prvky mají tvar trojbokých hranolů o shodné výšce. Poskládáním prvků vedle sebe vznikne jedna vrstva sítě a několik totožných vrstev nad sebou tvoří výslednou diskretizační síť, tedy hranol s pravidelnou n -úhelníkovou podstavou, např. podle **Obr. 7**.

Protože objem válce pístového spalovacího motoru se v čase velmi výrazně mění, umožňuje model *motoflow* v průběhu výpočtu měnit rozměr sítě snižováním, resp. zvyšováním výšky prvků při zachování konstantní výšky všech prvků sítě v každém okamžiku. Pokud při této změně klesne, resp. vzroste výška prvku pod, resp. nad určitou hodnotu, dochází ke sloučení, resp. rozdělení každé vrstvy sítě na dvě tak, aby výška prvku výrazně neklesla, resp. nevzrostla nad jeho ostatní rozměry.

Protože žádná z dosud používaných diskretizačních sítí nebyla vhodná pro použití v metodě konečných diferencí, byla vytvořena speciální síť ve tvaru kvádru s čtvercovou podstavou podle **Obr. 8a)** (pro přehlednost je použit malý počet prvků). Tento tvar jistě nepopisuje objem válce motoru dokonale, ale je vhodný pro metodu konečných diferencí a pro testovací a srovnávací úlohy zcela postačuje. Navíc bude pro účely testování zne-možněna změna výšky prvků a dělení (slučování) vrstev.

Obr. 7: Příklad tvaru diskretizační sítě

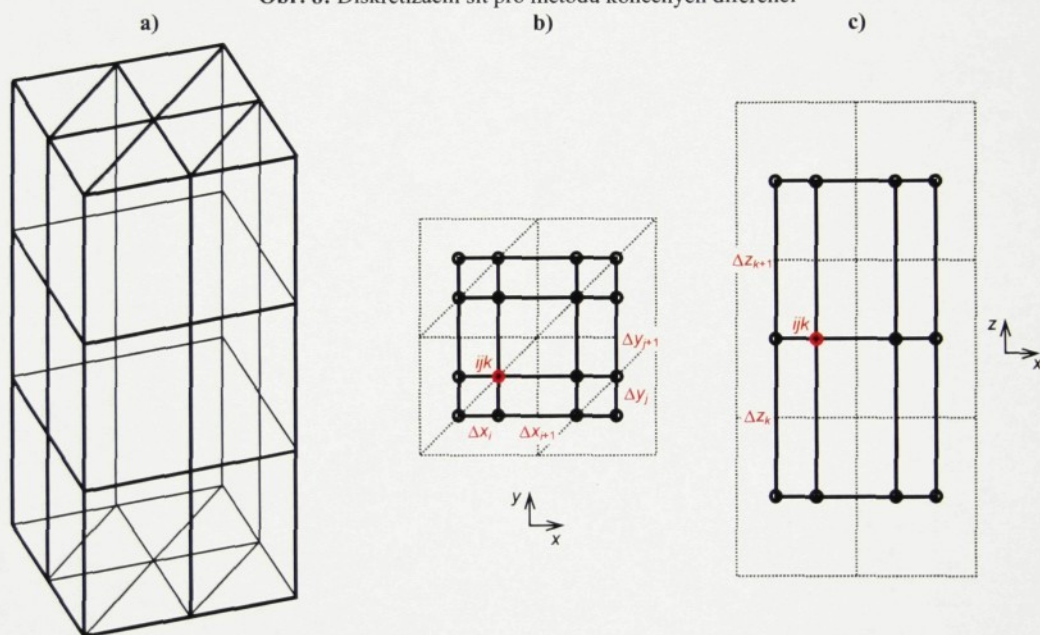


S daty která jsou výsledkem výpočtu proudění dále pracuje modul transportu látek, který je řešen metodou konečných objemů. Pro další zpracování dat touto metodou je výhodné, abychom znali hodnoty počítaných veličin v těžišti každého prvku diskretizační sítě. Nechť tedy těžiště jednotlivých prvků jsou uzlovými body sítě pro metodu konečných diferencí, ve kterých budou počítány hustoty a složky vektoru rychlosti. Pokud tyto uzlové body spojíme přímkami, vzniknou v síti další uzlové body na příčných stěnách dvojic prvků. Výsledkem je tedy diskretizační síť podle **Obr. 8b), c)**, kde je v rovině x, y vidět její nerovnoměrnost – pro

uzel o souřadnicích ijk je diskretizační krok Δx_{i+1} dvakrát větší, než diskretizační krok Δx_i . Stejná nerovnoměrnost je i ve směru osy y . V ose z je síť symetrická, pouze vzdálenost hranice oblasti je od krajních uzlů vzdálena o poloviční hodnotu diskretizačního kroku $\Delta z_i = \Delta z_{i+1}$.

Obr. 8a) tedy ukazuje diskretizační síť – nazvěme ji *primární* – se kterou pracují moduly programu motoflow, které mají za úkol počítat transport látek a produkci a přenos energie. Tato síť by také byla použita při výpočtu proudění pomocí metody konečných prvků. Síť na **Obr. 8b)** a **c)** nazvěme *sekundární*, ta se použije v případě výpočtu proudění metodou konečných diferencí.

Obr. 8: Diskretizační síť pro metodu konečných diferencí



5.1. Převod dat z primární sítě do sekundární

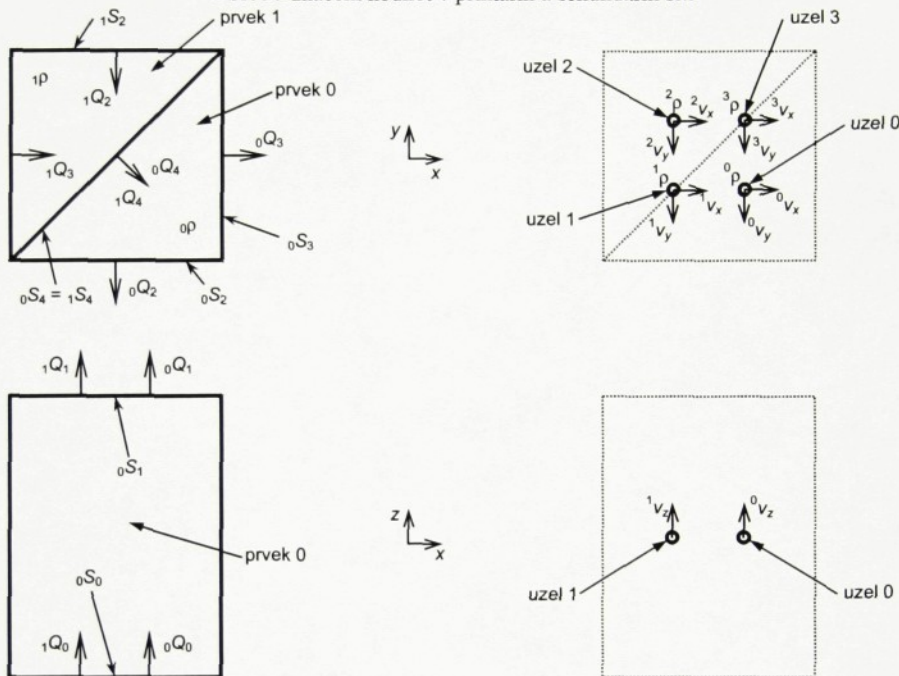
Model motoflow standardně pracuje pouze s primární sítí, sekundární síť je využívána pouze pro výpočet proudění metodou konečných diferencí. Proto jsou i počáteční hodnoty veličin, které se načítají ze vstupních souborů, zapisovány do primární sítě a pokud je požadováno spuštění výpočtu metodou konečných diferencí, musí se tyto počáteční podmínky nějakým způsobem převést z primární sítě do sekundární. V primární síti jsou z počátečních podmínek známy hustoty plynu uvnitř každého prvku a hmotnostní přetoky přes jednotlivé stěny prvku. V sekundární síti je třeba znát hustotu a tři složky rychlosti v každém uzlu diskretizační sítě. To znamená že hustoty budou jakýmsi způsobem převedeny do jednotlivých uzlů a stěnové přetoky budou přepočítány na rychlosti v uzlech sekundární sítě.

Pro jednotlivé veličiny v primární a sekundární síti budeme užívat značení podle **Obr. 9**. Pro hmotnostní tok plochou S můžeme psát vztah

$$Q = \rho S v.$$

(43)

Obr. 9: Značení hodnot v primární a sekundární síti



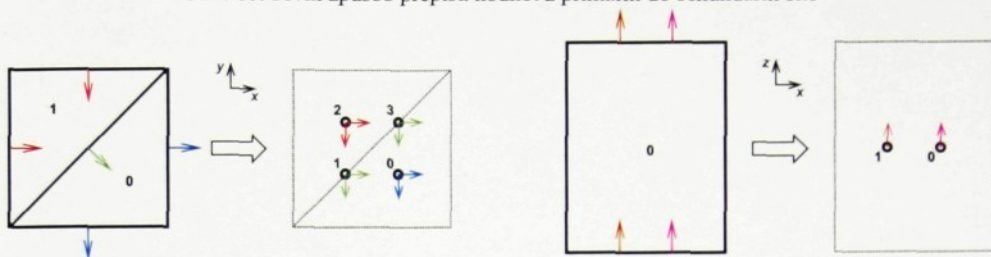
Převod dat může být proveden několika způsoby:

1. Přetoky ve směru x a y budou ovlivňovat pouze uzlové rychlosti v těžištích elementů, rychlosti v uzlech na příčných stěnách budou počítány jen z příčných přetoků. Hustoty a rychlosti ve směru z v uzlech na příčných stěnách, budou počítány jako aritmetický průměr hustot, resp. rychlostí dvou prvků, kterým příslušná příčná stěna patří. V souvislosti s **Obr. 9** a **Obr. 10** můžeme tedy psát:

$$\begin{aligned} {}^0\rho &= {}^0\rho, & {}^1\rho &= \frac{{}^0\rho + {}^1\rho}{2}, & {}^2\rho &= {}^1\rho, & {}^3\rho &= \frac{{}^0\rho + {}^1\rho}{2}, \\ {}^0v_x &= {}^0\rho \cdot {}^0S_3 \cdot {}^0Q_3, & {}^1v_x &= {}^1\rho \cdot {}^0S_4 \cdot \frac{{}^0Q_4}{\sqrt{2}}, & {}^2v_x &= {}^2\rho \cdot {}^1S_3 \cdot {}^1Q_3, & {}^3v_x &= {}^3\rho \cdot {}^1S_4 \cdot \frac{{}^1Q_4}{\sqrt{2}}, \\ {}^0v_y &= {}^0\rho \cdot {}^0S_2 \cdot {}^0Q_2, & {}^1v_y &= {}^1\rho \cdot {}^0S_4 \cdot \frac{{}^0Q_4}{\sqrt{2}}, & {}^2v_y &= {}^2\rho \cdot {}^1S_2 \cdot {}^1Q_2, & {}^3v_y &= {}^3\rho \cdot {}^1S_4 \cdot \frac{{}^1Q_4}{\sqrt{2}}, \\ {}^0v_z &= {}^0\rho \cdot {}^0S_0 \cdot \frac{{}^0Q_0 + {}^1Q_1}{2}, & {}^1v_z &= {}^1\rho \cdot {}^0S_0 \cdot \frac{{}^0Q_0 + {}^0Q_1 + {}^1Q_0 + {}^1Q_1}{4}, \\ {}^2v_z &= {}^2\rho \cdot {}^1S_0 \cdot \frac{{}^1Q_0 + {}^1Q_1}{2}, & {}^3v_z &= {}^3\rho \cdot {}^1S_0 \cdot \frac{{}^0Q_0 + {}^0Q_1 + {}^1Q_0 + {}^1Q_1}{4}. \end{aligned}$$

(44)

Obr. 10: První způsob přepisu hodnot z primární do sekundární sítě



2. Přetok přes každou stěnu bude ovlivňovat rychlosti na dvojici nejbližších uzlů sekundární sítě. tento způsob je vhodnější, protože jsou stěnové přetoky lépe rozloženy mezi uzly sekundární sítě. Hustoty budou počítány stejným způsobem jako v předchozím případě. Pro rychlosti podle Obr. 11 tedy můžeme psát:

$${}^0v_x = {}^0\rho \cdot {}^0S_3 \cdot {}^0Q_3, \quad {}^1v_x = \frac{1}{2} \left({}^2\rho \cdot {}^1S_3 \cdot {}^0Q_3 + {}^1\rho \cdot {}^0S_4 \cdot \frac{{}^0Q_4}{\sqrt{2}} \right),$$

$${}^2v_x = {}^2\rho \cdot {}^1S_3 \cdot {}^1Q_3, \quad {}^3v_x = \frac{1}{2} \left({}^0\rho \cdot {}^3S_3 \cdot {}^1Q_3 + {}^3\rho \cdot {}^1S_4 \cdot \frac{{}^1Q_4}{\sqrt{2}} \right),$$

$${}^0v_y = {}^0\rho \cdot {}^0S_2 \cdot {}^0Q_2, \quad {}^1v_y = \frac{1}{2} \left({}^0v_y + {}^1\rho \cdot {}^0S_4 \cdot \frac{{}^0Q_4}{\sqrt{2}} \right),$$

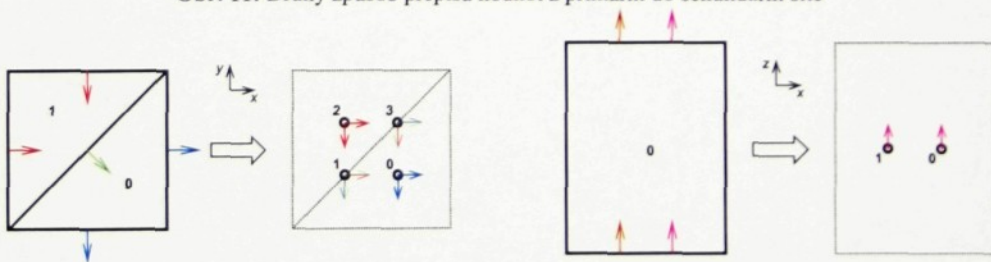
$${}^2v_y = {}^2\rho \cdot {}^1S_2 \cdot {}^1Q_2, \quad {}^3v_y = \frac{1}{2} \left({}^2v_y + {}^3\rho \cdot {}^1S_4 \cdot \frac{{}^1Q_4}{\sqrt{2}} \right),$$

$${}^0v_z = {}^0\rho \cdot {}^0S_0 \cdot \frac{{}^0Q_0 + {}^0Q_1}{2}, \quad {}^1v_z = {}^1\rho \cdot {}^0S_0 \cdot \frac{{}^0Q_0 + {}^0Q_1}{2},$$

$${}^2v_z = {}^2\rho \cdot {}^1S_0 \cdot \frac{{}^1Q_0 + {}^1Q_1}{2}, \quad {}^3v_z = {}^3\rho \cdot {}^1S_0 \cdot \frac{{}^1Q_0 + {}^1Q_1}{2}.$$

(45)

Obr. 11: Druhý způsob přepisu hodnot z primární do sekundární sítě



3. Dalším způsobem převodu rychlostních dat může být použití váženého průměru, čímž by se při výpočtu rychlosti v sekundární síti uvažovala i vzdálenost uzlového bodu od příslušné stěny primární sítě. Je také možné použít různé kombinace předchozích dvou verzí přepočtu.
4. Metoda konečných prvků počítá rozložení veličin uvnitř celého objemu každého prvku. Bylo by tedy možné zjistit hodnoty přesně v uzlových bodech sekundární diskretizační sítě, ale znamenalo by to složitý zásah do stávajícího modelu. V každém časovém kroku výpočtu by bylo nutné nejprve spustit metodu konečných prvků, zjistit a přenést hodnoty

veličin do uzlových bodů sekundární sítě a teprve potom spustit proudění metodou konečných diferencí. Navíc je otázkou, zda by takovýto postup vedl ke zpřesnění výpočtu. Nakonec byl pro implementaci do programu motoflow vybrán přepočít veličin podle vztahů (45) a Obr. 11.

5.2. Převod dat ze sekundární sítě do primární

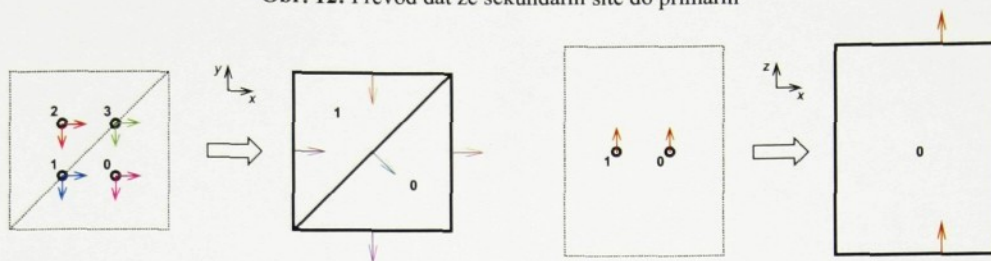
Zatímco přepis hodnot v kapitole 5.1 se provádí v průběhu výpočtu pouze jednou při načítání počátečních podmínek, opačný převod probíhá při každém časovém kroku, kdy se získané hodnoty převedou do primární sítě a pak do výstupních souborů. Transformace hodnot ze sekundární sítě zpět do primární probíhá podobným způsobem jako převod opačný. Opět máme na výběr z několika možností:

1. Je možné převést zpět do primární sítě pouze hodnoty z uzlových bodů, které jsou v těžištích jednotlivých prvků sítě. Tím se sice ztratí informace uložená v uzlech na příčných stěnách, ale při použití v předchozí kapitole prvního převodu dat z primární sítě do sekundární se při přesunu dat nezměněných výpočtem zpět do primární sítě hodnoty veličin nezmění. To znamená, že se při převodu primární → sekundární → primární bez spuštění výpočtu hustoty ani přetoky v primární síti nezmění.
2. Přetoky přes každou stěnu prvku budou počítány z rychlostí a hustot dvou nejbližších uzlových bodů (viz Obr. 12). Tímto způsobem dojde bez spuštění výpočtu při převodu primární → sekundární → primární ke změně hodnot, ale při přepisu dat ze sekundární sítě do primární se neztratí informace uložené v uzlech na příčných stěnách. Pro hustoty a přetoky můžeme psát následující vztahy:

$$\begin{aligned}
 {}_0\rho &= \frac{{}_0\rho + {}^1\rho}{2}, & {}_1\rho &= \frac{{}^2\rho + {}^3\rho}{2}, \\
 {}_0Q_0 &= {}_0S_0 \cdot \left(\frac{{}_0\rho \cdot {}^0v_z + {}^1\rho \cdot {}^1v_z}{2} \right), & {}_1Q_0 &= {}_1S_0 \cdot \left(\frac{{}^2\rho \cdot {}^2v_z + {}^3\rho \cdot {}^3v_z}{2} \right), \\
 {}_0Q_1 &= {}_0Q_0, & {}_1Q_1 &= {}_1Q_0, \\
 {}_0Q_2 &= {}_0S_2 \cdot \left(\frac{{}_0\rho \cdot {}^0v_y + {}^1\rho \cdot {}^1v_y}{2} \right), & {}_1Q_2 &= {}_1S_2 \cdot \left(\frac{{}^2\rho \cdot {}^2v_y + {}^3\rho \cdot {}^3v_y}{2} \right), \\
 {}_0Q_3 &= {}_0S_3 \cdot \left(\frac{{}_0\rho \cdot {}^0v_x + {}^3\rho \cdot {}^3v_x}{2} \right), & {}_0Q_3 &= {}_0S_3 \cdot \left(\frac{{}^1\rho \cdot {}^1v_x + {}^2\rho \cdot {}^2v_x}{2} \right), \\
 {}_0Q_4 &= {}_0S_4 \cdot \left[\frac{{}^1\rho \cdot ({}^1v_x + {}^1v_y) + {}^3\rho \cdot ({}^3v_x + {}^3v_y)}{2\sqrt{2}} \right], & {}_1Q_4 &= {}_0Q_4.
 \end{aligned} \tag{46}$$

3. Další možností převodu dat ze sekundární sítě zpět do primární jsou různé kombinace předešlých dvou způsobů, nebo použití váženého průměru.

Obr. 12: Převod dat ze sekundární sítě do primární



Protože všechny stěny mimo stěn okrajových patří vždy dvěma sousedícím prvkům, obsahuje každá vnitřní stěna informaci o dvou přetocích. Každá z těchto dvou hodnot se počítá z jiných uzlových bodů sekundární diskretizační sítě a proto nemusí být obě hodnoty stejné. Protože však to co z jednoho prvku vytéká, by mělo být shodné s tím, co do druhého prvku přitéká, je nutné provést na primární síti opravu stěnových přetoků. Nové dvě hodnoty přetoku se vypočtou jako aritmetický průměr hodnot původních. Navíc je nutné nulování přetoků vnějšími stěnami pro zajištění nepropustnosti stěn válce.

Pro implementaci do programu *motoflow* byl vybrán přepočten veličin ze sekundární sítě do primární podle vztahů (46) a Obr. 12.

6. IMPLEMENTACE

Veškerý zdrojový kód pro metodu konečných diferencí byl uložen do jediného programového modulu s názvem `dualsit.cpp`. Tento soubor obsahuje všechny procedury a funkce, které jsou při výpočtu metodou konečných diferencí volány. Nutný byl i menší zásah do stávajících modulů programu `motoflow` a to zejména do souboru `mheadobj.h`, který obsahuje globální seznam definic procedur, funkcí a proměnných, ke kterým je potřeba přistupovat z různých míst programu. Do tohoto souboru tedy přibyly především informace o nové – sekundární diskretizační síti, dále pak hlavičky některých procedur, které jsou volány z jiných modulů než z `mheadobj.h`. Několik řádků přibylo do procedury `main` v souboru `motoflow.cpp`, odkud se volá program na vytvoření sekundární diskretizační sítě a naplnění počátečních podmínek, na samotný model proudění řešený metodou konečných diferencí a před ukončením programu na uvolnění dat ze sekundární sítě, tedy vymazání obsahu paměti. Další nepatrná změna je v jednom ze vstupních souborů, kde přibyl parametr na spouštění výpočtu metodou konečných diferencí a s tím související zásah do modulu `ctiprm.cpp`, kde se data ze vstupních souborů zpracovávají.

Programový modul `dualsit.cpp` obsahuje řadu procedur a funkcí, některé budou v následujícím textu stručně popsány.

1. `gen_dualni_sit()`^{*} – Obsahuje zdrojový text pro tvorbu datové struktury uzlů sekundární diskretizační sítě, do které jsou zapisována data potřebná pro výpočet.
2. `napln_poc_podm()` – Provádí převod počátečních podmínek z primární sítě do sekundární a jejich zápis do připravené datové struktury.
3. `napln_iterace()` – Zapisuje do datové struktury počáteční iterační hodnoty veličin pro další časový krok výpočtu.
4. `data_do_prim_site()` – Přepisuje hodnoty vypočtené metodou konečných diferencí zpět do datové struktury primární diskretizační sítě.
5. `alokuj_hustou_matici()`[†] – Vytvoří v paměti místo pro jednorozměrné pole, kam se uloží prvky matice.
6. `napln_hustou_matici()` – Na správná místa v matici ukládá příslušné koeficienty, získané diskretizací úlohy proudění a plní pravou stranu matice.
7. `iteruj()` – Provádí výpočet iteračních hodnot podle pravidel popsaných v kapitole 6.3.
8. `nove_hodnoty_na_stare()` – Mění nové vypočtené hodnoty veličin na počáteční podmínky pro následující časový krok.
9. `fdm_proudeni()` – Vlastní program metody konečných diferencí, který je volán z modulu `motoflow.cpp` a postupně provádí jednotlivé procedury výpočtu proudění.
10. `uvolni_dualni_sit()` – Vymaže z paměti datovou strukturu sekundární sítě.

^{*} Tato proceduru byla převzata od Ing. Šembery.

[†] Název hustá matice vznikl tím, že se do paměti plní i nulové hodnoty.

6.1. Prvky matice

Pro dosažení číselných hodnot do matice, která bude výpočtem řešena, je třeba z rovnic proudění vyjádřit koeficienty u jednotlivých proměnných. Rovnice (39) až (42) můžeme přepsat do následujícího tvaru:

$$\begin{aligned}
 & k_{vx}^{ijk} \cdot v_x^{ijk} + k_{\rho}^{ijk} \cdot \rho^{ijk} + k_{vx}^{i+1jk} \cdot v_x^{i+1jk} + k_{vx}^{i-1jk} \cdot v_x^{i-1jk} + k_{\rho}^{i+1jk} \cdot \rho^{i+1jk} + k_{\rho}^{i-1jk} \cdot \rho^{i-1jk} + \\
 & + k_{vx}^{ij+1k} \cdot v_x^{ij+1k} + k_{vx}^{ij-1k} \cdot v_x^{ij-1k} + k_{vx}^{ijk+1} \cdot v_x^{ijk+1} + k_{vx}^{ijk-1} \cdot v_x^{ijk-1} = r_{vx}^{ijk}, \\
 & k_{vy}^{ijk} \cdot v_y^{ijk} + k_{\rho}^{ijk} \cdot \rho^{ijk} + k_{vy}^{i+1jk} \cdot v_y^{i+1jk} + k_{vy}^{i-1jk} \cdot v_y^{i-1jk} + k_{vy}^{ij+1k} \cdot v_y^{ij+1k} + k_{vy}^{ij-1k} \cdot v_y^{ij-1k} + \\
 & + k_{\rho}^{ij+1k} \cdot \rho^{ij+1k} + k_{\rho}^{ij-1k} \cdot \rho^{ij-1k} + k_{vy}^{ijk+1} \cdot v_y^{ijk+1} + k_{vy}^{ijk-1} \cdot v_y^{ijk-1} = r_{vy}^{ijk}, \\
 & k_{vz}^{ijk} \cdot v_z^{ijk} + k_{\rho}^{ijk} \cdot \rho^{ijk} + k_{vz}^{i+1jk} \cdot v_z^{i+1jk} + k_{vz}^{i-1jk} \cdot v_z^{i-1jk} + k_{vz}^{ij+1k} \cdot v_z^{ij+1k} + k_{vz}^{ij-1k} \cdot v_z^{ij-1k} + \\
 & + k_{\rho}^{ij+1k} \cdot \rho^{ij+1k} + k_{\rho}^{ij-1k} \cdot \rho^{ij-1k} + k_{vz}^{ijk+1} \cdot v_z^{ijk+1} + k_{vz}^{ijk-1} \cdot v_z^{ijk-1} = r_{vz}^{ijk}, \\
 & k_{vx}^{ijk} \cdot v_x^{ijk} + k_{vy}^{ijk} \cdot v_y^{ijk} + k_{vz}^{ijk} \cdot v_z^{ijk} + k_{\rho}^{ijk} \cdot \rho^{ijk} + k_{vx}^{i+1jk} \cdot v_x^{i+1jk} + k_{vx}^{i-1jk} \cdot v_x^{i-1jk} + \\
 & + k_{\rho}^{i+1jk} \cdot \rho^{i+1jk} + k_{\rho}^{i-1jk} \cdot \rho^{i-1jk} + k_{vy}^{ij+1k} \cdot v_y^{ij+1k} + k_{vy}^{ij-1k} \cdot v_y^{ij-1k} + k_{\rho}^{ij+1k} \cdot \rho^{ij+1k} + \\
 & + k_{\rho}^{ij-1k} \cdot \rho^{ij-1k} + k_{vz}^{ijk+1} \cdot v_z^{ijk+1} + k_{vz}^{ijk-1} \cdot v_z^{ijk-1} + k_{\rho}^{ijk+1} \cdot \rho^{ijk+1} + k_{\rho}^{ijk-1} \cdot \rho^{ijk-1} = r_{\rho}^{ijk},
 \end{aligned} \tag{47}$$

kde k_a^b je koeficient veličiny a v uzlu b a r_a^b je pravá strana rovnice pro veličinu a v b -tém uzlu diskretizační sítě. Pravou stranu dostaneme pouhým vyčíslením hodnot za rovnítkem v rovnicích (39) až (42). Pro koeficienty matice můžeme po úpravě psát vztahy, uvedené na následujících čtyřech stranách.

$$\begin{aligned}
k_{vx}^{ijk} = & \left\{ \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_x^{ijk}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left(\frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_y^{ijk}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left(\frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} - \frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_z^{ijk}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left(\frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} - \frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \right) + \\
& + \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \cdot \left[\frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left(\frac{1}{\Delta x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta x_i} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left(\frac{1}{\Delta y_{j+1}} + \frac{1}{\Delta y_j} \right) + \\
& \left. \left. + \frac{1}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left(\frac{1}{\Delta z_{k+1}} + \frac{1}{\Delta z_k} \right) \right] \right\}, \\
k_\rho^{ijk} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{R^{ijk} T^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk} \cdot (\Delta x_j + \Delta x_{j+1})} \cdot \left(\frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \right), \\
k_{vx}^{i+1jk} = & \frac{1}{\Delta x_{i+1} \cdot (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \cdot \left(\frac{{}^I v_x^{ijk} \cdot \Delta x_i}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_\rho^{i+1jk} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{R^{ijk} T^{ijk} \cdot \Delta x_i}{{}^I \rho^{ijk} \cdot \Delta x_{i+1} \cdot (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}, \\
k_{vx}^{i-1jk} = & \frac{1}{\Delta x_i \cdot (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \cdot \left(-\frac{{}^I v_x^{ijk} \cdot \Delta x_{i+1}}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_\rho^{i-1jk} = & -\frac{1}{2} \cdot \frac{R^{ijk} T^{ijk} \cdot \Delta x_{i+1}}{{}^I \rho^{ijk} \cdot \Delta x_i \cdot (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}, \\
k_{vx}^{ij+1k} = & \frac{1}{\Delta y_{j+1} \cdot (\Delta y_j + \Delta y_{j+1})} \cdot \left(\frac{{}^I v_y^{ijk} \cdot \Delta y_j}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_{vx}^{ij-1k} = & \frac{1}{\Delta y_j \cdot (\Delta y_j + \Delta y_{j+1})} \cdot \left(-\frac{{}^I v_y^{ijk} \cdot \Delta y_{j+1}}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_{vx}^{ijk+1} = & \frac{1}{\Delta z_{k+1} \cdot (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})} \cdot \left(\frac{{}^I v_z^{ijk} \cdot \Delta z_k}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_{vx}^{ijk-1} = & \frac{1}{\Delta z_k \cdot (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})} \cdot \left(-\frac{{}^I v_z^{ijk} \cdot \Delta z_{k+1}}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right),
\end{aligned}$$

(48)

$$\begin{aligned}
k_{vy}^{ijk} = & \cdot \left\{ \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_x^{ijk}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left(\frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_y^{ijk}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left(\frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} - \frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_z^{ijk}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left(\frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} - \frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \right) + \\
& + \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \cdot \left[\frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left(\frac{1}{\Delta x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta x_i} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left(\frac{1}{\Delta y_{j+1}} + \frac{1}{\Delta y_j} \right) + \\
& \left. \left. + \frac{1}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left(\frac{1}{\Delta z_{k+1}} + \frac{1}{\Delta z_k} \right) \right] \right\}, \\
k_{\rho}^{ijk} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{R^{ijk} T^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk} \cdot (\Delta y_j + \Delta y_{j+1})} \cdot \left(\frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} - \frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \right), \\
k_{vy}^{i+1,jk} = & \frac{1}{\Delta x_{i+1} \cdot (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \cdot \left(\frac{{}^I v_x^{ijk} \cdot \Delta x_i}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_{vy}^{i-1,jk} = & \frac{1}{\Delta x_i \cdot (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \cdot \left(-\frac{{}^I v_x^{ijk} \cdot \Delta x_{i+1}}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_{vy}^{ij+1,k} = & \frac{1}{\Delta y_{j+1} \cdot (\Delta y_j + \Delta y_{j+1})} \cdot \left(\frac{{}^I v_y^{ijk} \cdot \Delta y_j}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_{\rho}^{ij+1,k} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{R^{ijk} T^{ijk} \cdot \Delta y_j}{{}^I \rho^{ijk} \cdot \Delta y_{j+1} \cdot (\Delta y_j + \Delta y_{j+1})}, \\
k_{vy}^{ij-1,k} = & \frac{1}{\Delta y_j \cdot (\Delta y_j + \Delta y_{j+1})} \cdot \left(-\frac{{}^I v_y^{ijk} \cdot \Delta y_{j+1}}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_{\rho}^{ij-1,k} = & -\frac{1}{2} \cdot \frac{R^{ijk} T^{ijk} \cdot \Delta y_{j+1}}{{}^I \rho^{ijk} \cdot \Delta y_j \cdot (\Delta y_j + \Delta y_{j+1})}, \\
k_{vy}^{ijk+1} = & \frac{1}{\Delta z_{k+1} \cdot (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})} \cdot \left(\frac{{}^I v_z^{ijk} \cdot \Delta z_k}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_{vy}^{ijk-1} = & \frac{1}{\Delta z_k \cdot (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})} \cdot \left(-\frac{{}^I v_z^{ijk} \cdot \Delta z_{k+1}}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right),
\end{aligned}$$

(49)

$$\begin{aligned}
k_{vz}^{ijk} = & \cdot \left\{ \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_x^{ijk}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left(\frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_y^{ijk}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left(\frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} - \frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_z^{ijk}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left(\frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} - \frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \right) + \\
& + \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \cdot \left[\frac{1}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left(\frac{1}{\Delta x_{i+1}} + \frac{1}{\Delta x_i} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left(\frac{1}{\Delta y_{j+1}} + \frac{1}{\Delta y_j} \right) + \\
& \left. \left. + \frac{1}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left(\frac{1}{\Delta z_{k+1}} + \frac{1}{\Delta z_k} \right) \right] \right\}, \\
k_{\rho}^{ijk} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{R^{ijk} T^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk} \cdot (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})} \cdot \left(\frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} - \frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \right), \\
k_{vz}^{i+1,jk} = & \frac{1}{\Delta x_{i+1} \cdot (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \cdot \left(\frac{{}^I v_x^{ijk} \cdot \Delta x_i}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_{vz}^{i-1,jk} = & \frac{1}{\Delta x_i \cdot (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \cdot \left(-\frac{{}^I v_x^{ijk} \cdot \Delta x_{i+1}}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_{vz}^{ij+1,k} = & \frac{1}{\Delta y_{j+1} \cdot (\Delta y_j + \Delta y_{j+1})} \cdot \left(\frac{{}^I v_y^{ijk} \cdot \Delta y_j}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_{vz}^{ij-1,k} = & \frac{1}{\Delta y_j \cdot (\Delta y_j + \Delta y_{j+1})} \cdot \left(-\frac{{}^I v_y^{ijk} \cdot \Delta y_{j+1}}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_{vz}^{ijk+1} = & \frac{1}{\Delta z_{k+1} \cdot (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})} \cdot \left(\frac{{}^I v_z^{ijk} \cdot \Delta z_k}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_{\rho}^{ijk+1} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{R^{ijk} T^{ijk} \cdot \Delta z_k}{{}^I \rho^{ijk} \cdot \Delta z_{k+1} \cdot (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})}, \\
k_{vz}^{ijk-1} = & \frac{1}{\Delta z_k \cdot (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})} \cdot \left(-\frac{{}^I v_z^{ijk} \cdot \Delta z_{k+1}}{2} - \frac{\eta^{ijk}}{{}^I \rho^{ijk}} \right), \\
k_{\rho}^{ijk-1} = & -\frac{1}{2} \cdot \frac{R^{ijk} T^{ijk} \cdot \Delta z_{k+1}}{{}^I \rho^{ijk} \cdot \Delta z_k \cdot (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})},
\end{aligned}$$

(50)

$$k_{\rho}^{ijk} = \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_x^{ijk}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left(\frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_y^{ijk}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left(\frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} - \frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_z^{ijk}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left(\frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} - \frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \right) \right],$$

$$k_{vx}^{ijk} = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I \rho^{ijk}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} \cdot \left(\frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} \right),$$

$$k_{vy}^{ijk} = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I \rho^{ijk}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} \cdot \left(\frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} - \frac{\Delta y_j}{\Delta y_{j+1}} \right),$$

$$k_{vz}^{ijk} = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I \rho^{ijk}}{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}} \cdot \left(\frac{\Delta z_{k+1}}{\Delta z_k} - \frac{\Delta z_k}{\Delta z_{k+1}} \right),$$

$$k_{\rho}^{i+1,jk} = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_x^{ijk} \cdot \Delta x_i}{\Delta x_{i+1} \cdot (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})},$$

$$k_{\rho}^{i-1,jk} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_x^{ijk} \cdot \Delta x_{i+1}}{\Delta x_i \cdot (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})},$$

$$k_{\rho}^{ij+1,k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_y^{ijk} \cdot \Delta y_j}{\Delta y_{j+1} \cdot (\Delta y_j + \Delta y_{j+1})},$$

$$k_{\rho}^{ij-1,k} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_y^{ijk} \cdot \Delta y_{j+1}}{\Delta y_j \cdot (\Delta y_j + \Delta y_{j+1})},$$

$$k_{\rho}^{ijk+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_z^{ijk} \cdot \Delta z_k}{\Delta z_{k+1} \cdot (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})},$$

$$k_{\rho}^{ijk-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I v_z^{ijk} \cdot \Delta z_{k+1}}{\Delta z_k \cdot (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})},$$

$$k_{vx}^{i+1,jk} = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I \rho^{ijk} \cdot \Delta x_i}{\Delta x_{i+1} \cdot (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})},$$

$$k_{vx}^{i-1,jk} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I \rho^{ijk} \cdot \Delta x_{i+1}}{\Delta x_i \cdot (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})},$$

$$k_{vy}^{ij+1,k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I \rho^{ijk} \cdot \Delta y_j}{\Delta y_{j+1} \cdot (\Delta y_j + \Delta y_{j+1})},$$

$$k_{vy}^{ij-1,k} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I \rho^{ijk} \cdot \Delta y_{j+1}}{\Delta y_j \cdot (\Delta y_j + \Delta y_{j+1})},$$

$$k_{vz}^{ijk+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I \rho^{ijk} \cdot \Delta z_k}{\Delta z_{k+1} \cdot (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})},$$

$$k_{vz}^{ijk-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{{}^I \rho^{ijk} \cdot \Delta z_{k+1}}{\Delta z_k \cdot (\Delta z_k + \Delta z_{k+1})}.$$

(51)

6.2. Tvar matice

Použitá metoda vede na soustavu $4m$ rovnic pro $4m$ neznámých a po naplnění vznikne čtvercová matice $4m \times 4m$, kde m je počet uzlů sekundární diskretizační sítě. Matice může být naplněna mnoha různými způsoby, čímž lze měnit rozložení nenulových prvků. Žádným rozmístěním prvků však nelze docílit zjednodušení matice pro její snazší výpočet (např. symetričnost). Před řešením matice byla posuzována následující rozmístění prvků:

Význam členů ve výše uvedených maticích je stejný, jako v rovnicích (47).

Pro implementaci do modelu *motoflow* bylo zvoleno rozmístění prvků v matici podle odstavce c), protože tento tvar má většinu nenulových prvků blízko diagonály. Na **Obr. 13** je příklad rozmístění nenulových prvků v matici pro diskretizační síť s malým počtem prvků.

Obr. 13: Poloha nenulových prvků v matici podle odstavce c) pro diskretizační síť s 24 prvky



6.3. Iterační metoda výpočtu

Pro zvýšení přesnosti výpočtu a linearizaci rovnic byla použita základní iterační metoda řešení nelineárních diferenciálních rovnic. Iterační metodou řešení rozumíme nalezení takové posloupnosti $\{^I y_k\}_{k=0}^{\infty}$, pro jejíž prvky platí $^I y_k \rightarrow y$ při $k \rightarrow \infty$. Hodnotu $^I y_k$ nazýváme k -tou iterací správného řešení y . Obecně platí, že každá iterační hodnota závisí na všech předchozích iteracích.

V modelu *motoflow* byl použit následující způsob výpočtu iteračních hodnot: na začátku výpočtu se iterace nastaví na stejné hodnoty, jaké jsou v počáteční podmínce; spustí se krok výpočtu a výsledné hodnoty se porovnají s iteračními; pokud se tyto liší o více než zadanou hodnotu, naplní se iterace podle vztahu

$$^I y_k = ^I y_k + \Omega \cdot (^I y_{k-1} + ^N y_k), \quad (52)$$

kde $^N y_k$ je vypočtená hodnota neznámé veličiny, $\Omega \in \langle 0; 1 \rangle$ je nastavitelný parametr a výpočet se spustí znovu s novými iteračními hodnotami; to se opakuje, dokud je rozdíl mezi vypočtenou a iterační hodnotou větší než zadaná velikost chyby, nebo je překročen nastavený maximální počet iterací.

6.4. Počáteční podmínky pro nový časový krok

Proudění je metodou konečných diferencí řešeno tak, že se na začátku výpočtu z primární diskretizační sítě načtou počáteční hustoty, rychlosti, teploty a koncentrace složek do všech uzlů sekundární sítě, pak je spuštěn výpočet a výsledné hodnoty hustoty a rychlosti se zapíší zpět do primární sítě. Následně je spuštěn transportní model, který na základě rychlostního pole může změnit hustoty, teploty a koncentrace. V následujícím časovém kroku výpočtu jsou do sekundární sítě načteny hodnoty získané modulem transportu, tedy hustoty, teploty a koncentrace, ale rychlostní data zůstávají zachována pouze v sekundární síti. To znamená, že na začátku každého nového časového kroku jsou načtena z primární sítě pouze nerychlostní data, zatímco rychlostní pole se počítá stále pouze na sekundární síti, protože rychlosti, resp. stěnové přetoky již žádný další modul nemění.

6.5. Okrajové podmínky

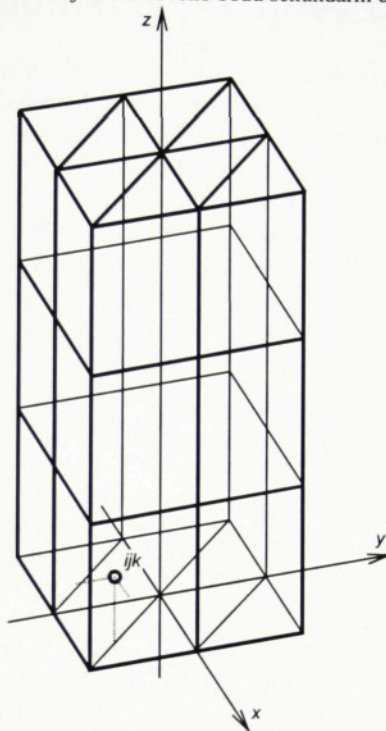
Sekundární diskretizační síť je složena z uzlových bodů, přičemž uzlům které mají svého předchůdce i následníka ve všech třech směrech říkáme regulární a krajním uzlům říkáme neregulární. Protože neregulární uzlové body nemají v jednom či více směrech svého souseda a schéma metody konečných diferencí vyžaduje v každém bodě sousední uzel ve všech směrech, musí být v neregulárních uzlech zadány okrajové podmínky.

Okrajové podmínky pro rychlosti vyjadřují nepropustnost stěn válce motoru, tzn. že rychlosti kolmé k hranici oblasti jsou na krajích nulové. Pro rychlost jinou než kolmou k hranici oblasti platí, že hodnota na kraji je stejná, jako hodnota v nejbližším uzlu. Za neznámé hustoty na hranici se dosazují vždy hodnoty v nejbližším uzlovém bodě.

Uvažujme krajní uzel o souřadnicích ijk , který leží v rohu diskretizační sítě podle **Obr. 14**. V rovnicích (47) se pro tento uzel projeví okrajové podmínky následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
 & \left(k_{vx}^{ijk} + k_{vx}^{ij-1k} + k_{vx}^{ijk-1} \right) v_x^{ijk} + \left(k_{\rho}^{ijk} + k_{\rho}^{i+1jk} \right) \rho^{ijk} + \\
 & + k_{vx}^{i-1jk} \cdot v_x^{i-1jk} + k_{\rho}^{i-1jk} \cdot \rho^{i-1jk} + k_{vx}^{ij+1k} \cdot v_x^{ij+1k} + k_{\rho}^{ijk+1} \cdot \rho^{ijk+1} = r_{vx}^{ijk}, \\
 & \left(k_{vy}^{ijk} + k_{vy}^{i+1jk} + k_{vy}^{ijk-1} \right) v_y^{ijk} + \left(k_{\rho}^{ijk} + k_{\rho}^{ij-1k} \right) \rho^{ijk} + \\
 & + k_{vy}^{i-1jk} \cdot v_y^{i-1jk} + k_{\rho}^{ij+1k} \cdot \rho^{ij+1k} + k_{vy}^{ij+1k} \cdot v_y^{ij+1k} + k_{\rho}^{ijk+1} \cdot \rho^{ijk+1} = r_{vy}^{ijk}, \\
 & \left(k_{vz}^{ijk} + k_{vz}^{i+1jk} + k_{vz}^{ijk-1} \right) v_z^{ijk} + \left(k_{\rho}^{ijk} + k_{\rho}^{ij-1k} \right) \rho^{ijk} + \\
 & + k_{vz}^{i-1jk} \cdot v_z^{i-1jk} + k_{\rho}^{ij+1k} \cdot \rho^{ij+1k} + k_{vz}^{ijk+1} \cdot v_z^{ijk+1} + k_{\rho}^{ijk+1} \cdot \rho^{ijk+1} = r_{vz}^{ijk}, \\
 & k_{vx}^{ijk} \cdot v_x^{ijk} + k_{vy}^{ijk} \cdot v_y^{ijk} + k_{vz}^{ijk} \cdot v_z^{ijk} + \left(k_{\rho}^{ijk} + k_{\rho}^{i+1jk} + k_{\rho}^{ij-1k} + k_{\rho}^{ijk-1} \right) \rho^{ijk} + \\
 & + k_{vx}^{i-1jk} \cdot v_x^{i-1jk} + k_{\rho}^{i-1jk} \cdot \rho^{i-1jk} + k_{vy}^{ij+1k} \cdot v_y^{ij+1k} + k_{\rho}^{ijk+1} \cdot \rho^{ijk+1} + \\
 & + k_{vz}^{ijk+1} \cdot v_z^{ijk+1} + k_{\rho}^{ijk+1} \cdot \rho^{ijk+1} = r_{\rho}^{ijk}.
 \end{aligned} \tag{53}$$

Protože uzly $i+1jk$, $ij-1k$ a $ijk-1$ neexistují, koeficienty veličin v těchto uzlech z rovnic buďto zmizí, nebo se přesunou na jiné místo. Pokud jde o koeficient rychlosti kolmé na danou stěnu, bude v rovnici vynechán. Pokud jde o koeficient rychlosti v jiném než kolmém směru anebo o koeficient hustoty, přičte se ke koeficientu uzlu ijk .

Obr. 14: Poloha krajního uzlového bodu sekundární diskretizační sítě

6.6. Algoritmus výpočtu

Program `motoflow` umožňuje řešit jednotlivé úlohy ve dvou různých pořadích. Na **Obr. 15a)** je základní algoritmus, kde je výpočet produkce hmoty a energie řešen až po transportu. Druhý způsob se liší pouze tím, že produkce hmoty a energie je vypočtena ještě před prouděním, jinak zůstává algoritmus beze změny.

Na **Obr. 15b)** je podrobněji ukázán průběh výpočtu proudění metodou konečných diferencí. Jednotlivé bloky vývojového diagramu představují samostatné procedury v modulu `dualsit.cpp`. Tučně jsou vyznačeny bloky, které jsou volány přímo ze základního modulu `motoflow.cpp`.

Při testování modelu proudění nebyla úloha produkce hmoty a energie spouštěna, ve všech testovacích úlohách však bylo zachováno pořadí výpočtu podle **Obr. 15a)**.

7. TESTOVACÍ ÚLOHY

7.1. Nulová počáteční podmínka

Nejprve bylo nutné otestovat správnou funkci plnění matice a výpočtu na jednoduché úloze, u které je předem známo výsledné řešení. Takovou úlohou byla zvolena nulová počáteční rychlost proudění, kdy je na začátku výpočtu ve všech prvcích stejná hustota, teplota a koncentrace složek plynu a všechny stěnové přetoky jsou nulové. Takovýto ustálený stav by měl zůstat zachován v průběhu celého výpočtu, tzn. že všechny rychlosti musí zůstat nulové a ostatní veličiny konstantní.

Po mnoha neúspěšných pokusech, kdy docházelo ke změnám hustoty, popř. rychlosti proudění bylo dosaženo stavu, při kterém zůstaly v průběhu výpočtu všechny veličiny nezměněné.

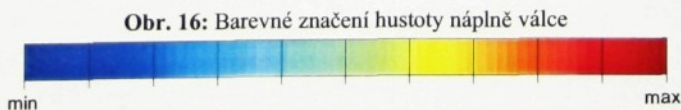
7.2. Nenulová počáteční podmínka

Model motoflow umožňuje pomocí parametrů ve vstupním souboru nastavit tři různé počáteční podmínky stěnových přetoků, resp. rychlostí:

- a) horizontální vír,
- b) vertikální vír,
- c) vertikální přetoky.

Navíc je možné úpravou souborů diskretizační sítě dosáhnout změnu počáteční podmínky 'horizontální vír' na podmínku 'horizontální přetok' a to tak, že je střed diskretizační sítě posunut v rovině x, y mimo počátek souřadného systému, čímž se vír na velkém poloměru změní na přetok určitým směrem.

Pro zobrazení dále uvedených výsledků výpočtu byl použit speciální zobrazovací program motoview, který pracuje s primární diskretizační sítí a umožňuje názorné a přehledné zobrazení přetoků přes jednotlivé stěny prvků sítě a barevné zobrazení rozložení hustoty plynu v různých částech diskretizační sítě. Pro stěnové přetoky platí, že červeně jsou značeny výtoky z prvku a modře naopak přítoky do prvku. Pro barevné značení hustot slouží mapa na **Obr. 16**. V obrázcích na následujících stranách jsou vždy vlevo zobrazeny přetoky přes jednotlivé stěny diskretizační sítě a vpravo rozložení hustoty v síti. Dále uvedené výsledky testovacích úloh jsou vybrané z mnoha provedených výpočtů. Pro všechny testy na následujících stranách byla použita diskretizační síť ve tvaru kvádra o rozměrech $65 \times 65 \times 151$ mm, která je složena z 24 prvků. Další testy i na síti s větším počtem prvků jsou k dispozici na přiloženém CD-ROMu, jehož obsah je popsán v příloze.

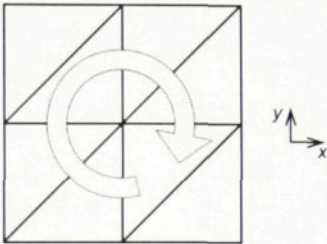


7.2.1. Horizontální vír

Počáteční podmínka tohoto typu má za úkol ve válci vytvořit vírové rychlostní pole v rovině x, y podle **Obr. 17**.

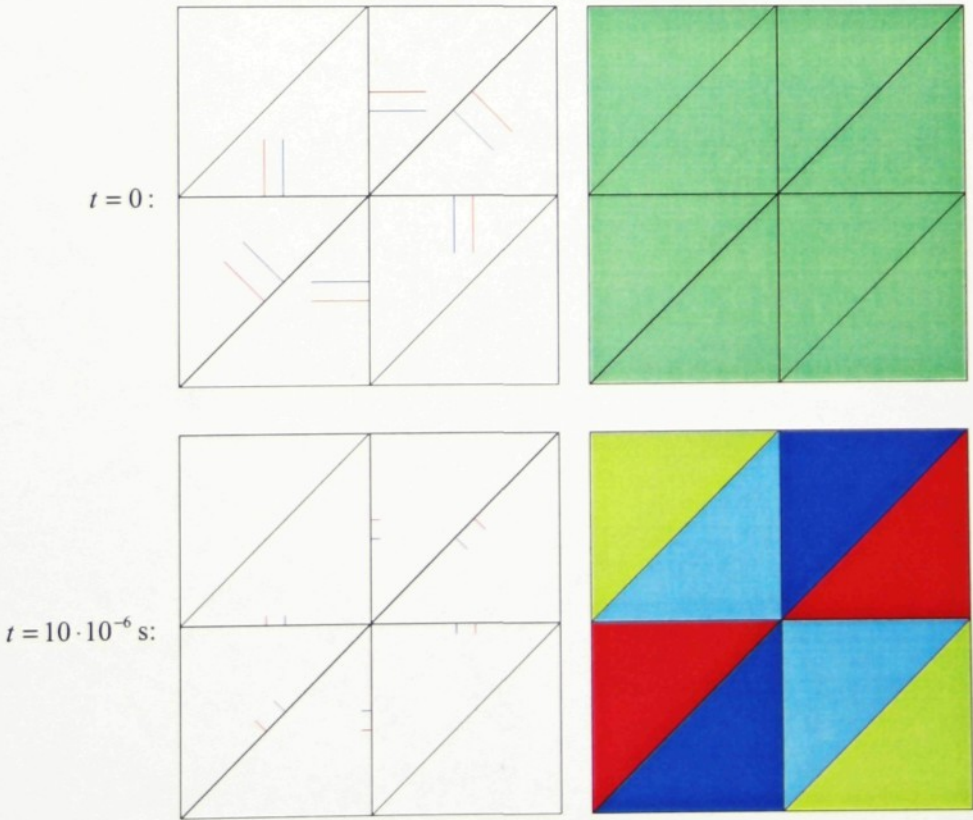
Následující testy byly provedeny s počáteční hustotou $\rho_0 = 1,579 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ve všech uzlech diskretizační sítě a počátečním stěnovým přetokem $Q_0 = 1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

Obr. 17: Náčrt počáteční podmínky 'horizontální vír'



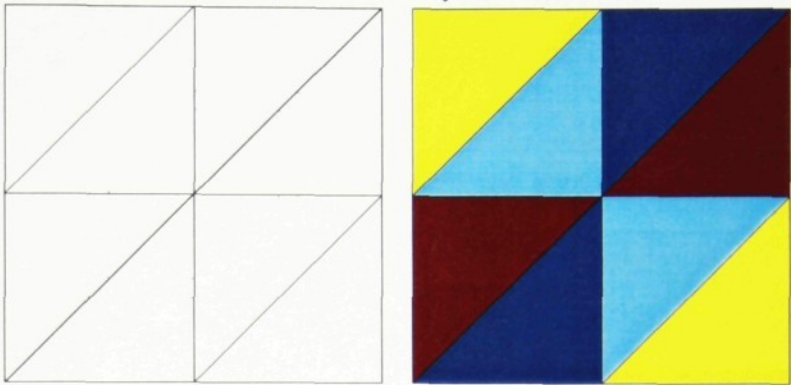
- a) Metoda konečných diferencí, časový krok $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, dynamická viskozita $\eta = 39,315$, minimální hustota po 20 časových krocích $\rho_{\min}^{20} = 1,507 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, maximální hustota po 20 časových krocích $\rho_{\max}^{20} = 1,654 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Obr. 18: 'Horizontální vír a)', metoda konečných diferencí



Obr. 18: 'Horizontální vír a)', metoda konečných diferencí

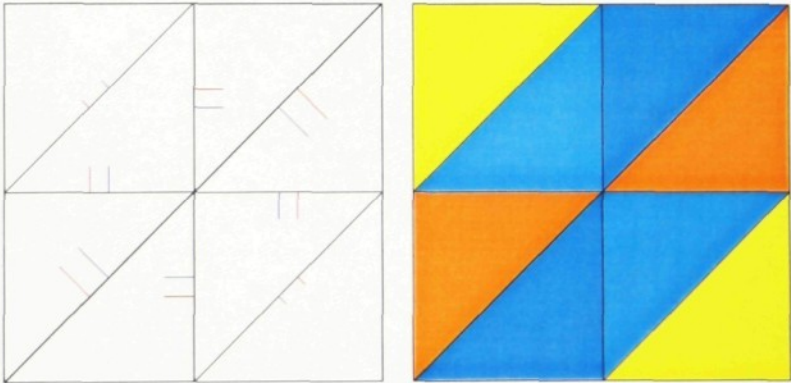
$t = 20 \cdot 10^{-6} \text{ s}$:



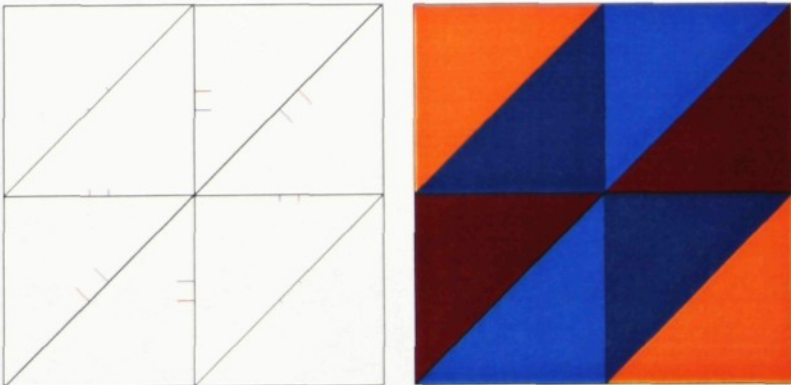
b) Metoda konečných diferencí, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, $\eta = 3,931$, $\rho_{\min}^{20} = 1,17 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_{\max}^{20} = 2,042 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Počáteční podmínka v čase $t = 0$ je shodná s Obr. 18, takže ji v dalších testech není třeba uvádět.

Obr. 19: 'Horizontální vír b)', metoda konečných diferencí

$t = 50 \cdot 10^{-6} \text{ s}$:

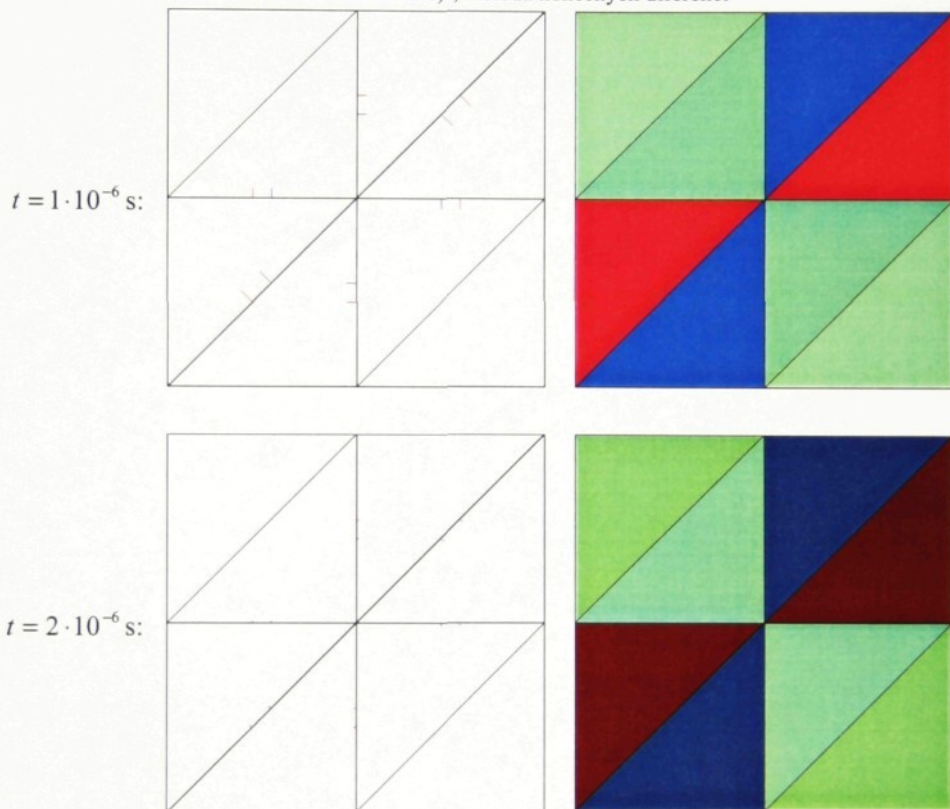


$t = 100 \cdot 10^{-6} \text{ s}$:



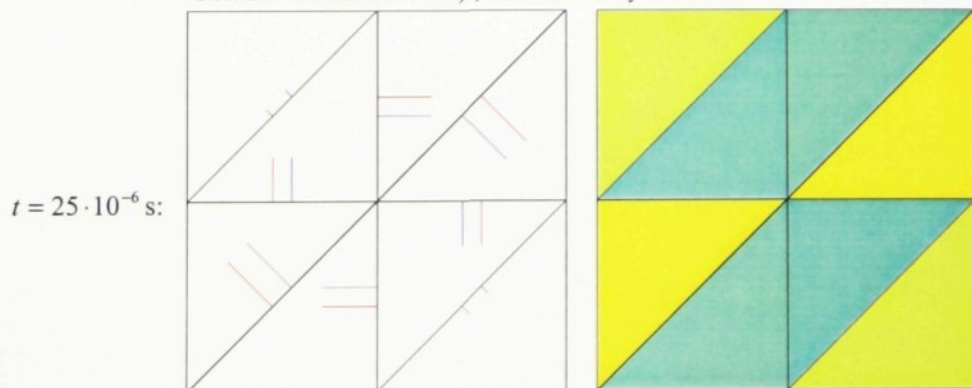
- c) Metoda konečných diferencí, $\Delta t = 1 \cdot 10^{-7} \text{ s}$, $\eta = 393,148$, $\rho_{\min}^{20} = 1,572 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,
 $\rho_{\max}^{20} = 1,587 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Obr. 20: 'Horizontální vír c)', metoda konečných diferencí

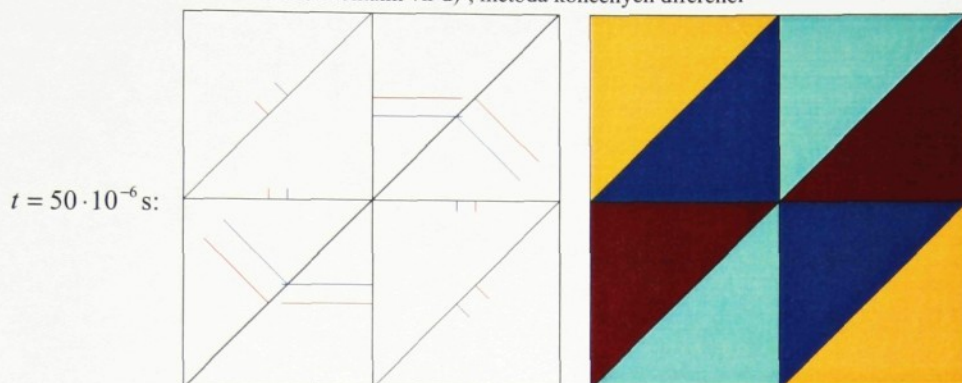


- d) Metoda konečných diferencí, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, $\eta = 0$, $\rho_{\min}^{10} = 0,505 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,
 $\rho_{\max}^{10} = 2,494 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Obr. 21: 'Horizontální vír d)', metoda konečných diferencí

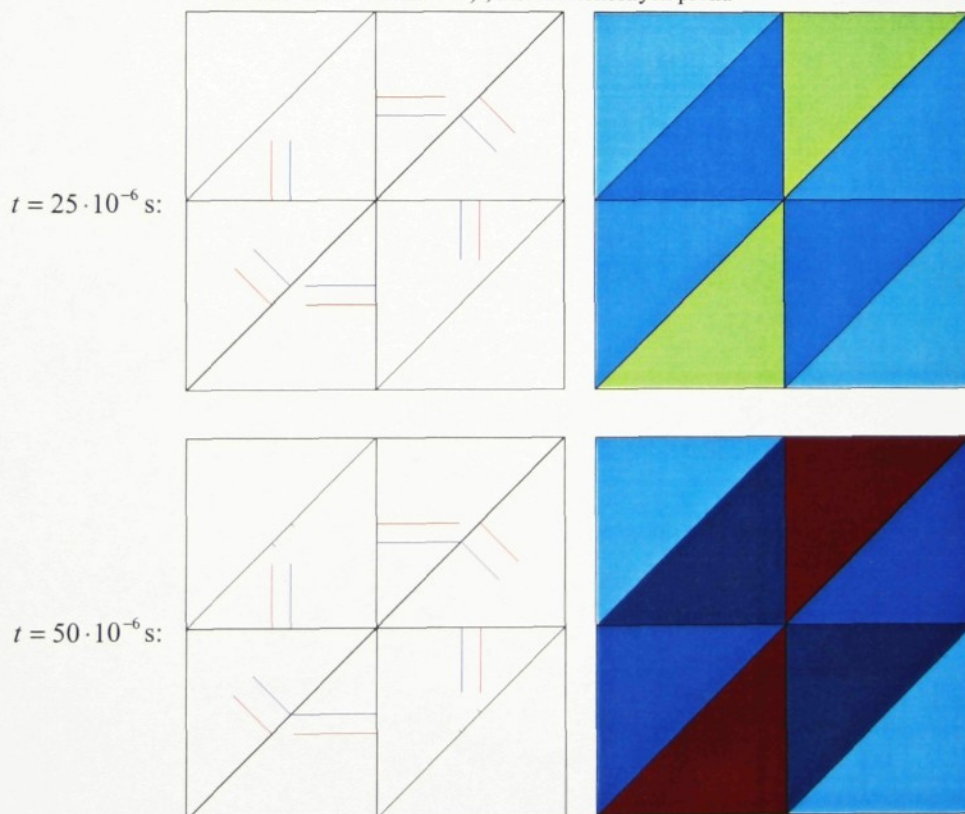


Obr. 21: 'Horizontální vír d)', metoda konečných diferencí



e) Metoda konečných prvků, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, $\eta = 0$, $\rho_{\min}^{10} = 1,269 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_{\max}^{10} = 2,188 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

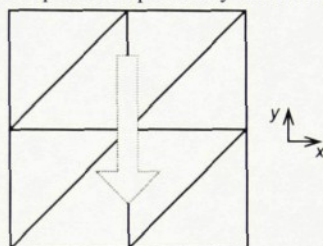
Obr. 22: 'Horizontální vír e)', metoda konečných prvků



7.2.2. Horizontální přetok

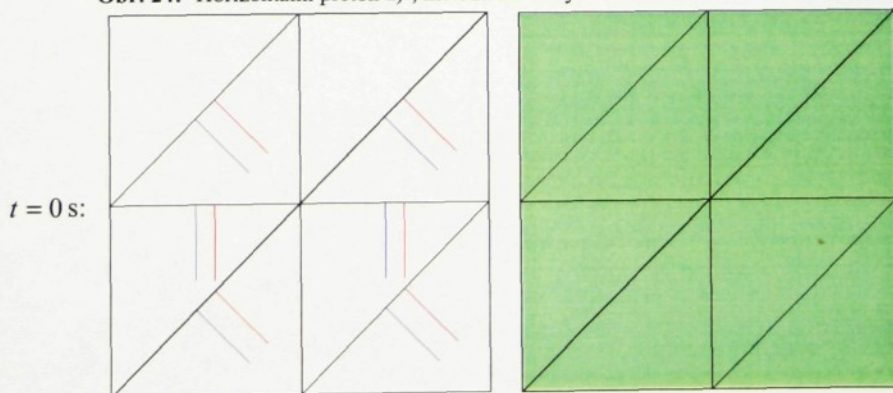
Počáteční podmínka 'horizontální přetok' byla vytvořena zásahem do souborů diskretizační sítě tak, že střed sítě byl z počátku souřadného systému posunut o 1000 m v záporném smyslu osy x , čímž byl vytvořen přetok v ose y podle **Obr. 23**. Podobně byl vytvořen i stěnový přetok v ose x , výsledky tohoto testu jsou na přiloženém CD. Následující testy byly provedeny s počáteční hustotou $\rho_0 = 1,579 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ve všech uzlech diskretizační sítě a počátečním stěnovým přetokem $Q_0 = 0,01 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

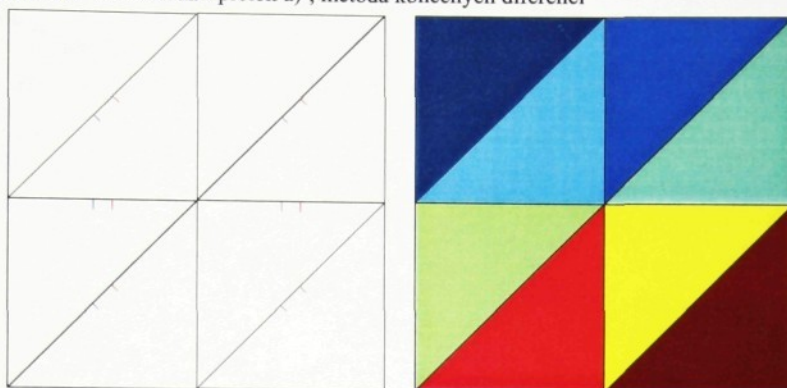
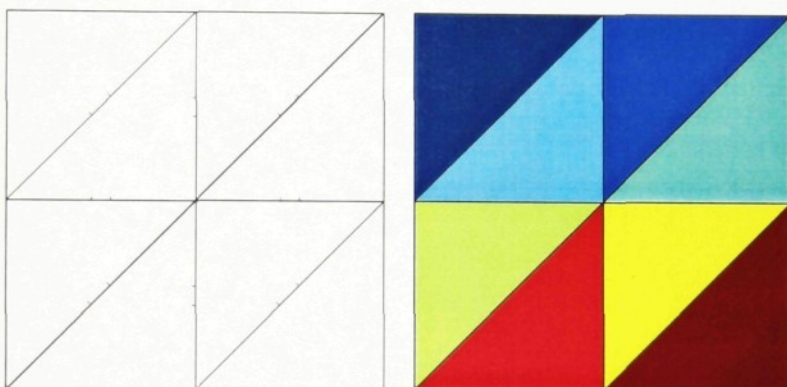
Obr. 23: Náčrt počáteční podmínky 'horizontální přetok'



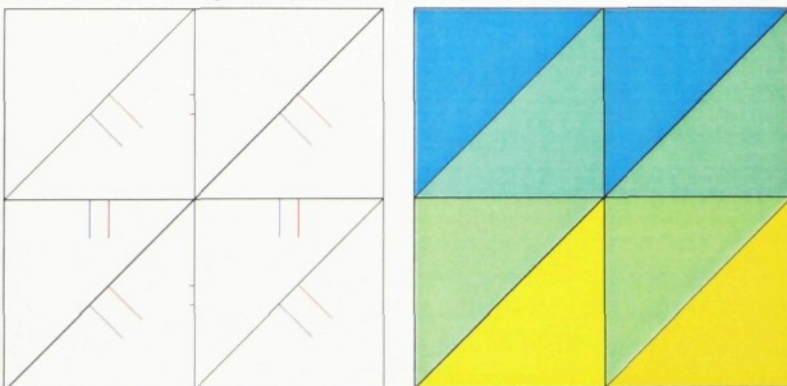
- a) Metoda konečných diferencí, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, $\eta = 39,315$, $\rho_{\min}^{10} = 1,577 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\rho_{\max}^{10} = 1,582 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

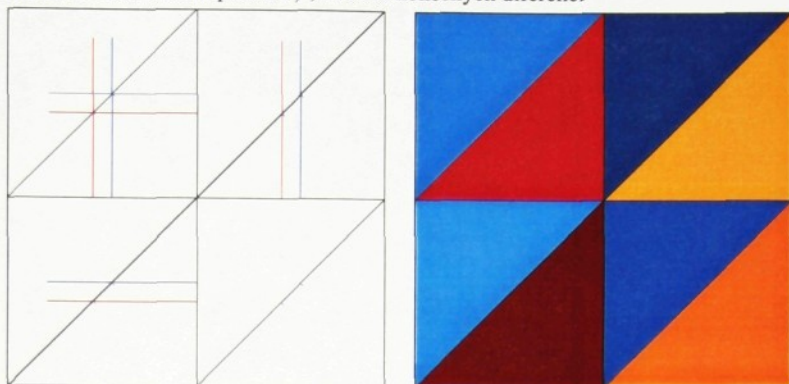
Obr. 24: 'Horizontální přetok a)', metoda konečných diferencí



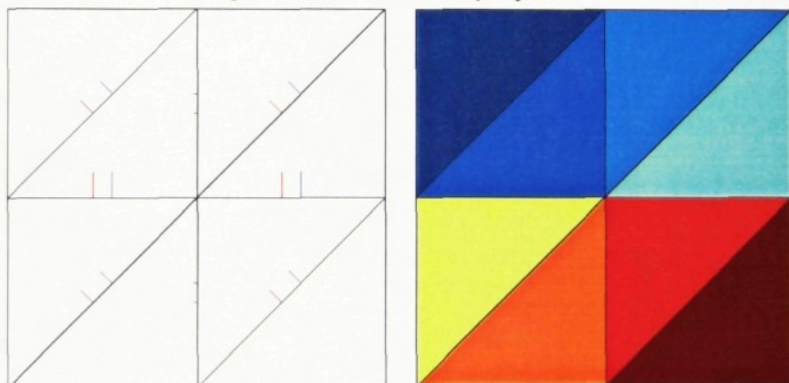
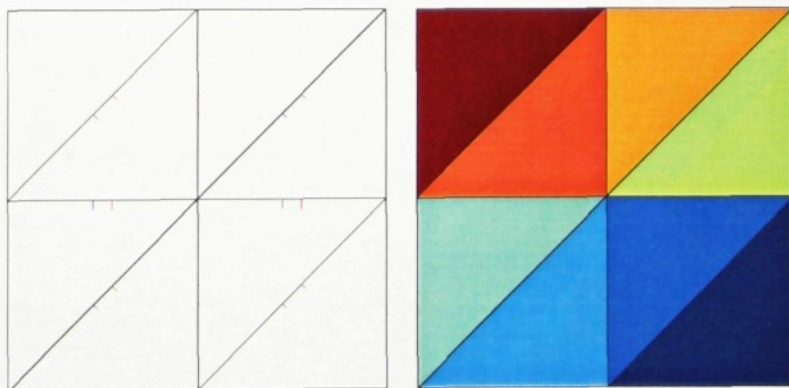
Obr. 24: 'Horizontální přetok a)', metoda konečných diferencí $t = 25 \cdot 10^{-6} \text{ s:}$  $t = 50 \cdot 10^{-6} \text{ s:}$ 

b) Metoda konečných diferencí, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, $\eta = 0$, $\rho_{\min}^{16} = 1,552 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,
 $\rho_{\max}^{16} = 1,608 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

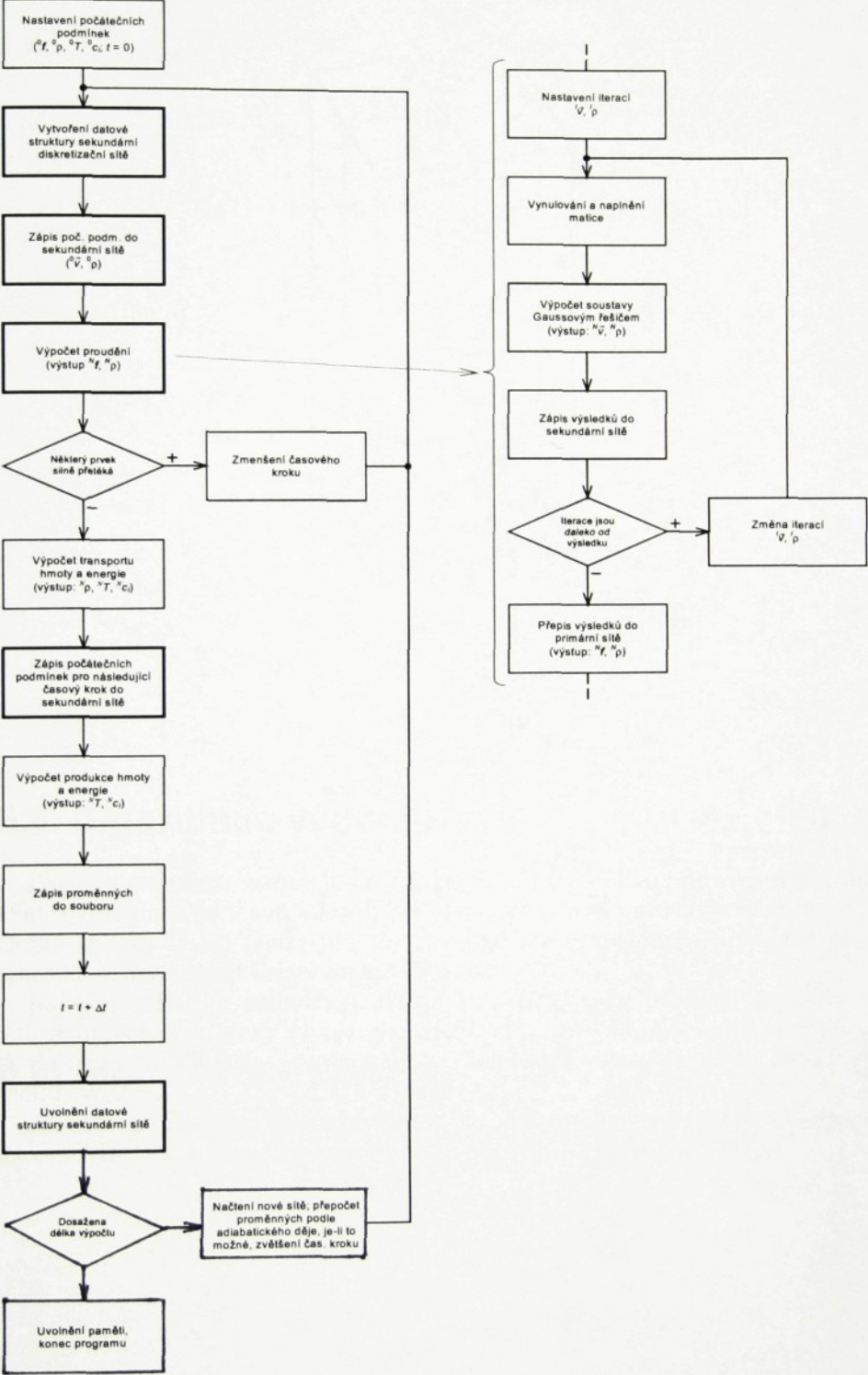
Obr. 25: 'Horizontální přetok b)', metoda konečných diferencí $t = 40 \cdot 10^{-6} \text{ s:}$ 

Obr. 25: 'Horizontální přetok b)', metoda konečných diferencí $t = 80 \cdot 10^{-6} \text{ s:}$ 

c) Metoda konečných prvků, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$, $\eta = 0$, $\rho_{\min}^{10} = 1,578 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_{\max}^{10} = 1,581 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Obr. 26: 'Horizontální přetok c)', metoda konečných prvků $t = 25 \cdot 10^{-5} \text{ s:}$  $t = 50 \cdot 10^{-5} \text{ s:}$ 

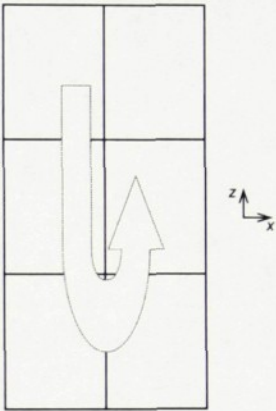
Obr. 15: Algoritmus výpočtu a) celého programu, b) proudění metodou konečných diferencí



7.2.3. Vertikální vír

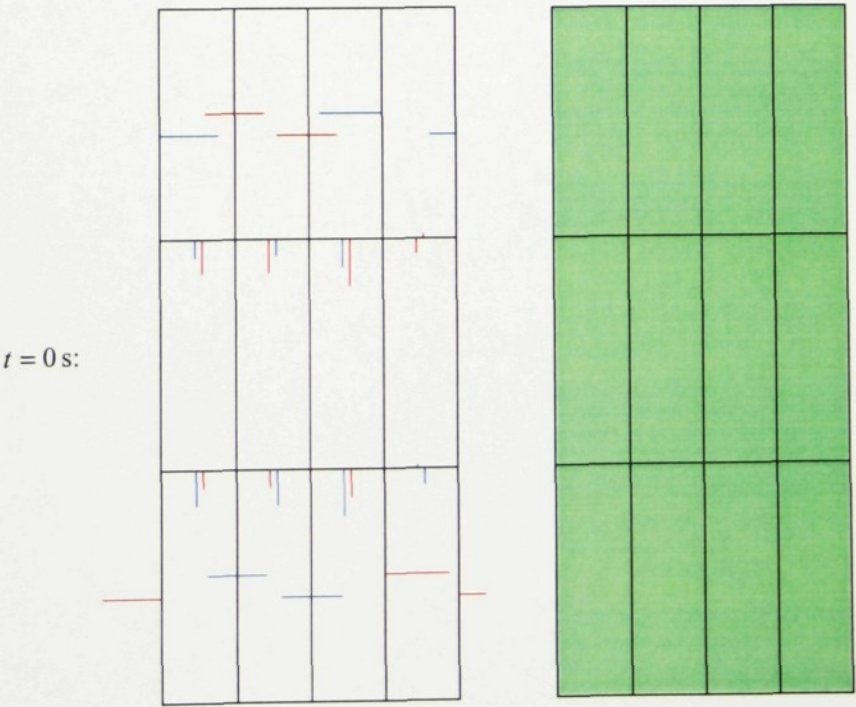
Počáteční podmínka tohoto typu není naprogramována zcela v pořádku, pro úplnost však uvádím některé výsledky i z těchto testů. I v tomto případě byly testy provedeny s počáteční hustotou $\rho_0 = 1,579 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ve všech uzlech diskretizační sítě a počátečním stěnovým přetokem $Q_0 = 0,01 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

Obr. 27: Náčrt počáteční podmínky 'vertikální vír'



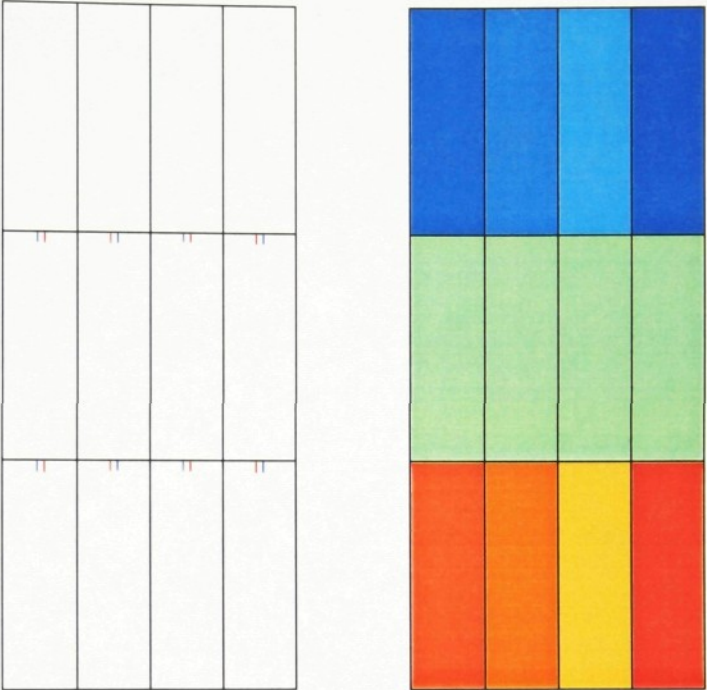
a) Metoda konečných diferencí, $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5} \text{ s}$, $\eta = 39,315$, $\rho_{\min}^6 = 1,578 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\rho_{\max}^6 = 1,581 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Obr. 28: 'Vertikální vír a)', metoda konečných diferencí

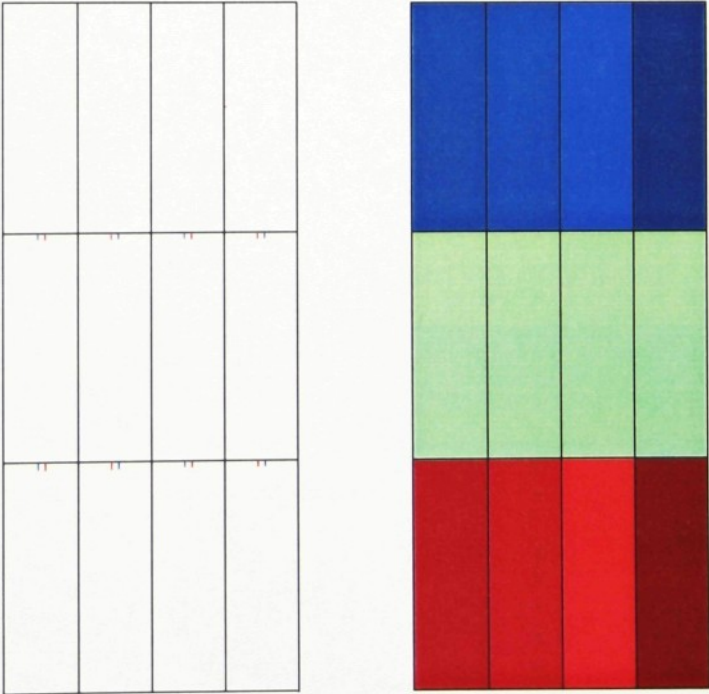


Obr. 28: 'Vertikální vír a)', metoda konečných diferencí

$t = 3 \cdot 10^{-5}$ s:



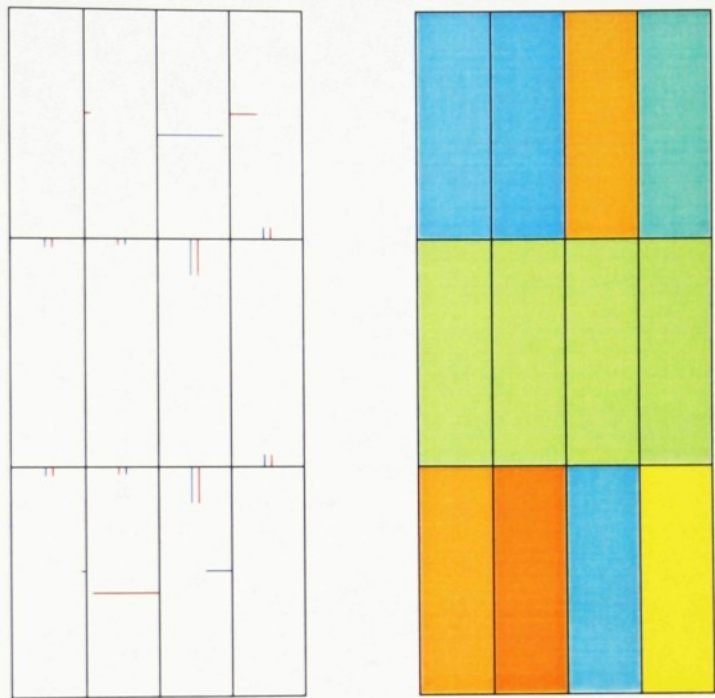
$t = 6 \cdot 10^{-5}$ s:



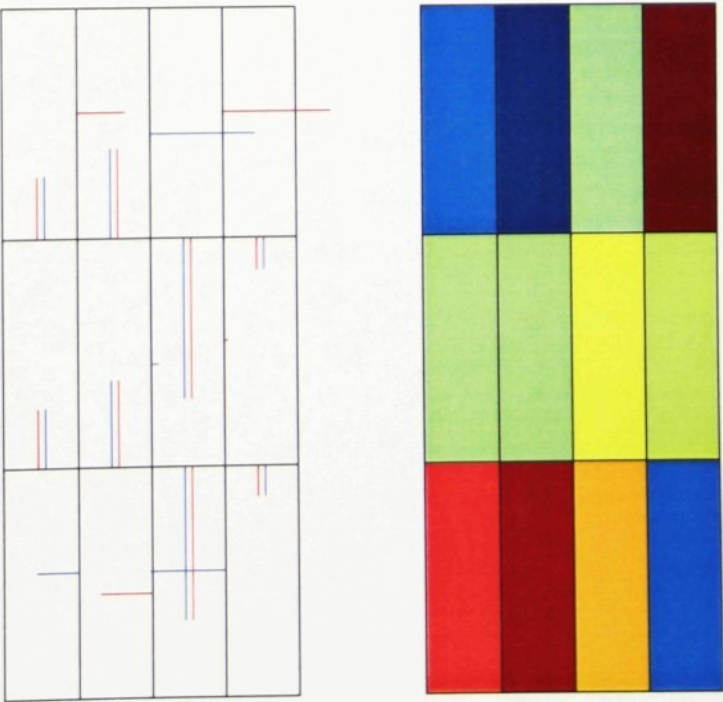
b) Metoda konečných diferencí, $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5} \text{ s}$, $\eta = 0$, $\rho_{\min}^{20} = 1,564 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,
 $\rho_{\max}^{20} = 1,592 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Obr. 29: 'Vertikální vír b)', metoda konečných diferencí

$t = 10 \cdot 10^{-5} \text{ s}$:



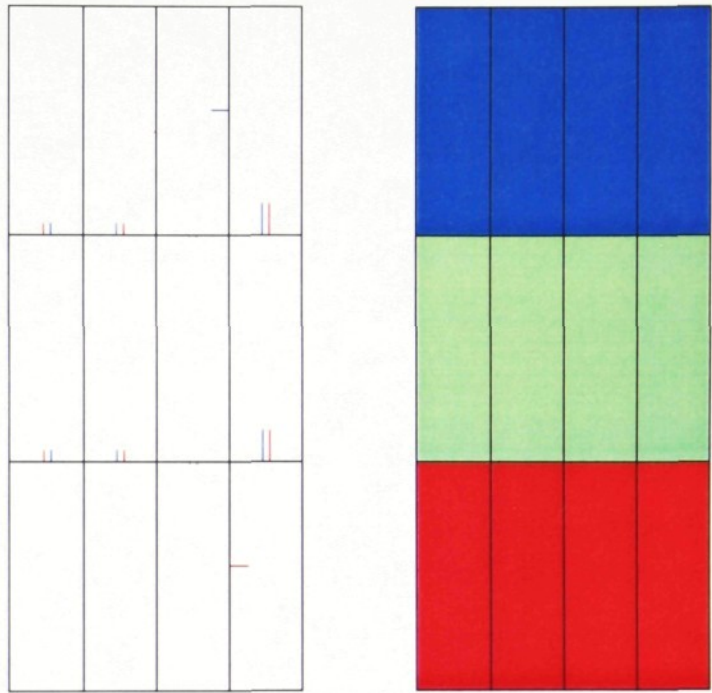
$t = 20 \cdot 10^{-5} \text{ s}$:



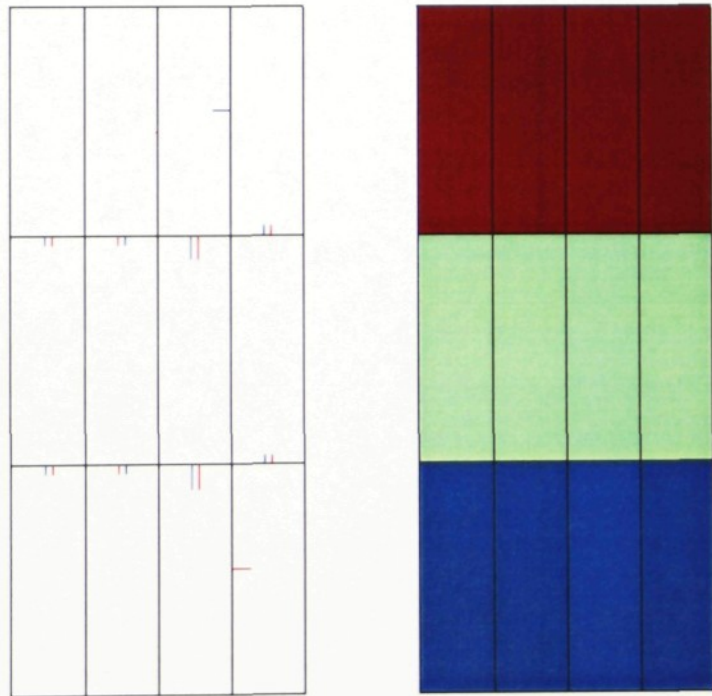
c) Metoda konečných prvků, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ s, $\eta = 0$, $\rho_{\min}^{20} = 1,579 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\rho_{\max}^{16} = 1,58 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Obr. 30: 'Vertikální vír c)', metoda konečných prvků

$t = 50 \cdot 10^{-5}$ s:



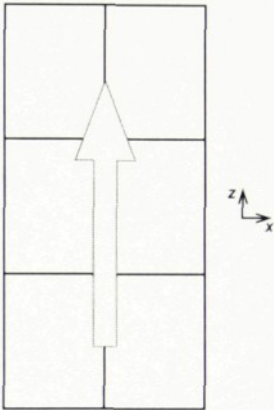
$t = 100 \cdot 10^{-5}$ s:



7.2.4. Vertikální přetok

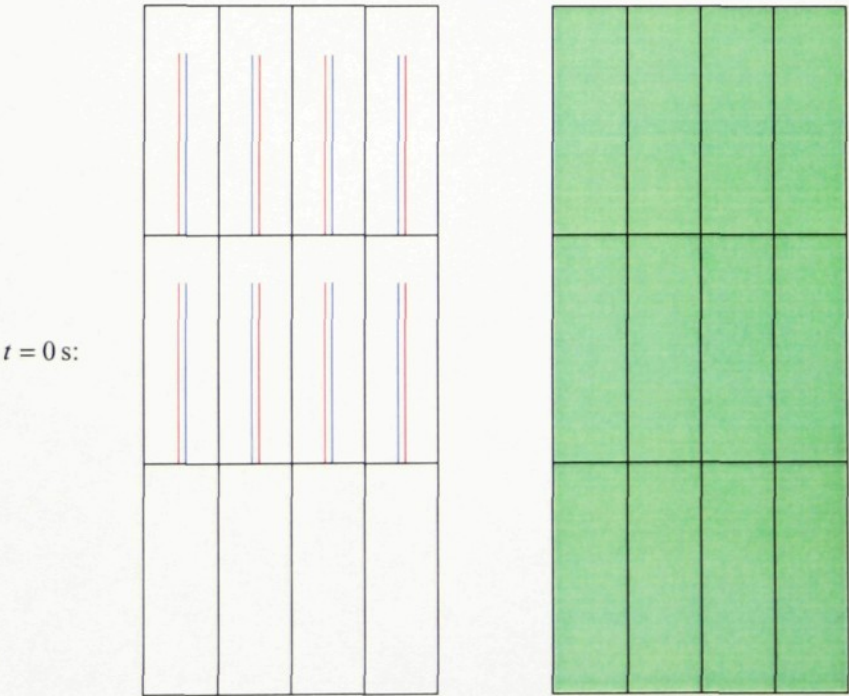
V tomto testu byla nastavena počáteční hustota $\rho_0 = 1,579 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ve všech uzlech diskretizační sítě a počáteční stěnový přetok $Q_0 = 1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

Obr. 31: Náčrt počáteční podmínky 'vertikální přetok'



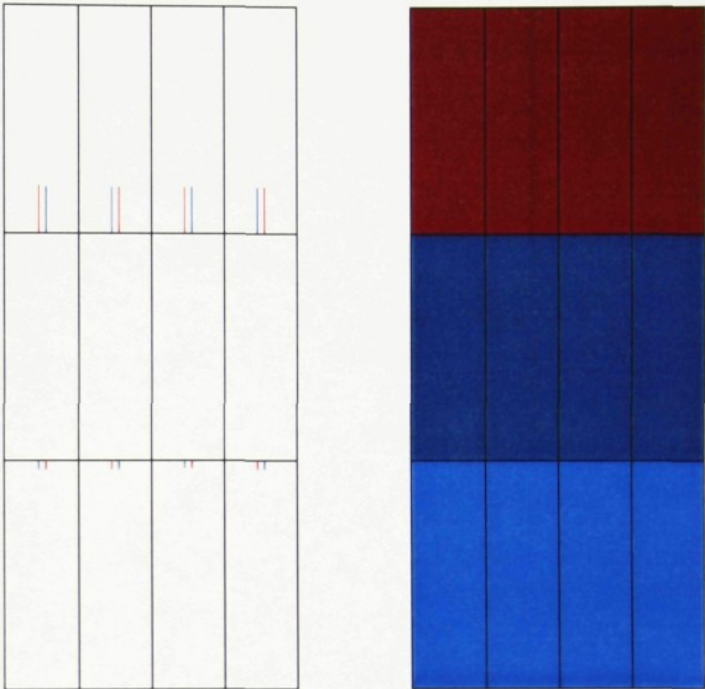
- a) Metoda konečných diferencí, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, $\eta = 39,315$, $\rho_{\min}^{40} = 0,433 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\rho_{\max}^{40} = 2,77 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Obr. 32: 'Vertikální přetok a)', metoda konečných diferencí

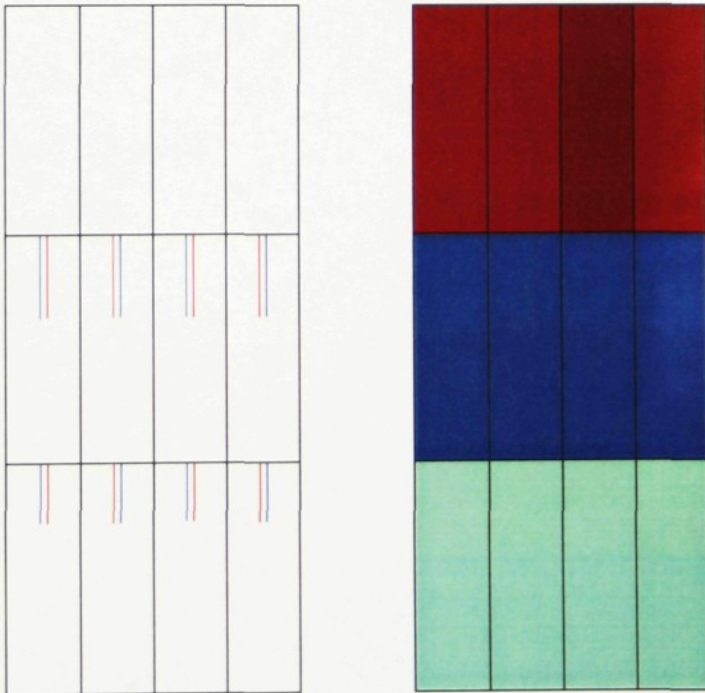


Obr. 32: 'Vertikální přetok a)', metoda konečných diferencí

$t = 100 \cdot 10^{-6} \text{ s}$:



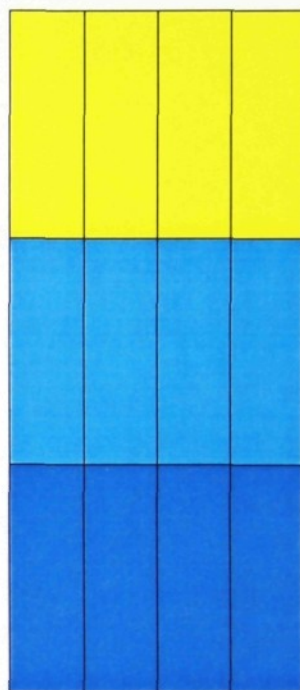
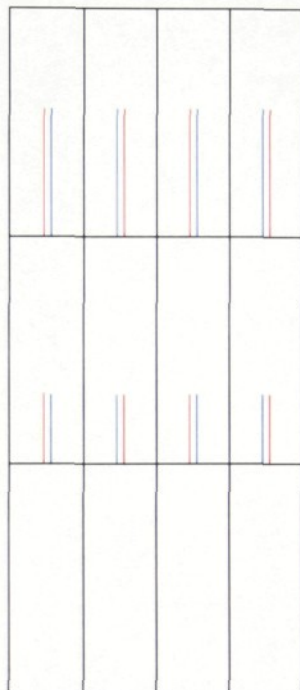
$t = 200 \cdot 10^{-6} \text{ s}$:



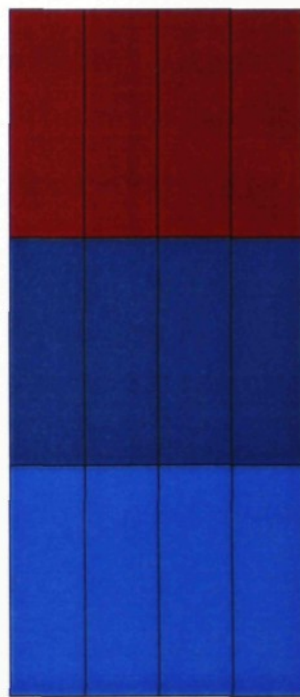
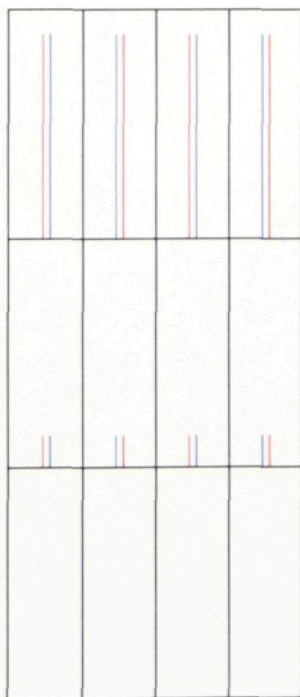
b) Metoda konečných diferencí, $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5} \text{ s}$, $\eta = 0$, $\rho_{\min}^4 = 0,587 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,
 $\rho_{\max}^4 = 3,247 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Obr. 33: 'Vertikální přetok b)', metoda konečných diferencí

$t = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$:



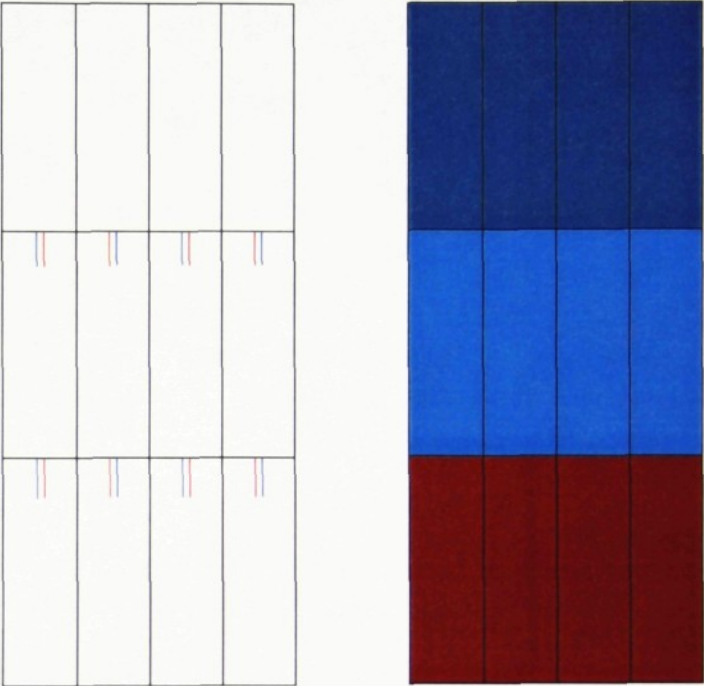
$t = 4 \cdot 10^{-5} \text{ s}$:



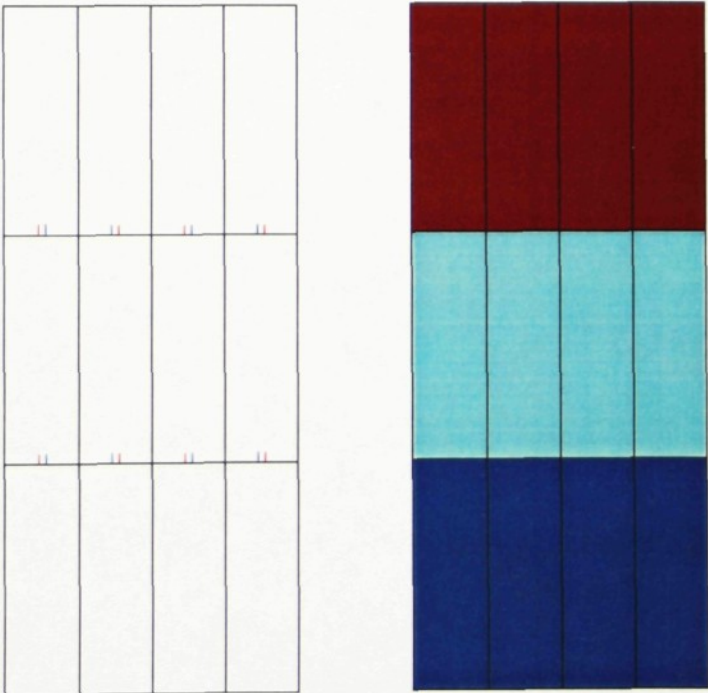
c) Metoda konečných prvků, $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, $\eta = 0$, $\rho_{\min}^{12} = 1,355 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_{\max}^{12} = 1,813 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Obr. 34: 'Vertikální přetok c)', metoda konečných prvků

$t = 6 \cdot 10^{-4} \text{ s}$:



$t = 12 \cdot 10^{-4} \text{ s}$:

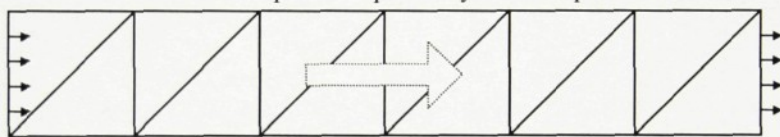


7.2.5. Ustálené proudění, zadaný tok na hranici oblasti

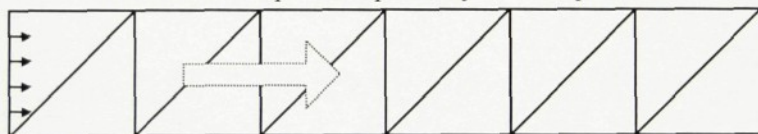
Dalšími testovacími úlohami mohou být např. ustálené proudění, kdy je na jedné části diskretizační sítě zadán konstantní vtok a na protilehlé části sítě stejně velký výtok, nebo zadaný tok pouze na jedné části oblasti a ostatní strany nepropustné. V prvním případě by měla být zachována konstantní rychlost proudění daným směrem v průběhu celého výpočtu, ve druhém případě by se měl tok tekutiny tlumeně zastavit s případnými překmity. Pro takto zvolené testy je vhodné použít diskretizační síť u které jeden rozměr převládá nad ostatními (viz **Obr. 35 a 36**)

Tyto testy nebyly provedeny, protože do modelu proudění řešeného metodou konečných diferencí zatím nebyly plně zahrnuty nové okrajové podmínky, které se načítají ze vstupních souborů a definují stěnový tok, případně hustotu na určité části diskretizační sítě a slouží především k interpretaci otevřeného sacího či výfukového ventilu.

Obr. 35: Náčrt počáteční podmínky 'ustálené proudění'



Obr. 36: Náčrt počáteční podmínky 'ustálené proudění'



8. DISKUSE VÝSLEDKŮ

Na **Obr. 18** až **Obr. 20** je vidět tlumený charakter víru pro tři různé hodnoty viskozity. Podle předpokladů se tlumení počátečního víru zvyšuje s rostoucí viskozitou. Hustota plynu se mění jen v malých mezích, pouze v testu s viskozitou $\eta = 3,931$ je větší rozptyl hustot jednotlivých prvků sítě, což je způsobeno silnými, málo tlumenými přetoky. **Obr. 21** ukazuje stav, kdy je viskozita rovna nule. Zde je vidět zvyšování přetoků jednotlivými stěnami, které vede až ke zhroucení výpočtu vlivem příliš vysokých číselných hodnot. Tento nestabilní stav je s velkou pravděpodobností způsoben nevhodnou linearizací diferenciálních rovnic popisujících proudění. Na **Obr. 22** je stejná úloha řešena metodou konečných prvků a i zde je vidět nestabilita řešení (metoda konečných prvků využívá podobný způsob linearizace rovnic).

Na dalších třech obrázcích jsou uvedeny výsledky výpočtu při použití počáteční podmínky 'horizontální přetok'. Při zapnuté viskozitě je patrný tlumený charakter proudění, které po určité době úplně zanikne, zatímco při nulovém viskózním členu dochází k silnému přetoku. Výsledky zjištěné metodou konečných prvků ukazují tlumené kmitání přetoků, které za čas zanikne.

Počáteční podmínka 'vertikální vír' není do modelu implementována zcela korektně, takže k víru nedochází, spíše jakoby shora vtékala a vespodu vytékala hmota přes nepropustné stěny válce. I přes to je však ve výsledku zřejmé tlumení počáteční podmínky, nekmitavé při použití metody konečných diferencí s viskózním členem a kmitavé při použití metody konečných prvků. Na obrázcích rozložení hustoty je patrný úbytek hmoty v horní části sítě a naopak hromadění složek plynu vespod. Pokud je viskozita vynulována, je opět řešení metodou konečných diferencí velmi nestabilní (**Obr. 29**).

Další testovanou počáteční podmínkou byl 'vertikální přetok'. Zde je z výsledků vidět kmitavý charakter tlumení u metody konečných diferencí i metody konečných prvků. Při vypnuté viskozitě dochází u metody konečných diferencí k nárůstu vtoku a tím i plnění hmoty do horní vrstvy diskretizační sítě, což vede po nějaké době ke zhroucení výpočtu, protože model transportu látek a energie dostává příliš vysoké hodnoty přetoků.

Podle výsledků výpočtů je jasné, že tento model proudění řešený metodou konečných diferencí nelze použít při zanedbání viskózního členu, který výrazným způsobem ovlivňuje stabilitu a konvergenci řešení ve všech testovaných úlohách. Protože v modelu řešeném metodou konečných prvků není viskozita úplně implementována, je možné pouze kvalitativní srovnání obou metod, přičemž pro řešení metodou konečných diferencí je viskozita nutná a pro řešení metodou konečných prvků ve většině případů nutná není.

Velké problémy patrně způsobuje konverze dat mezi primární a sekundární diskretizační sítí, která byla nutná pro použití stávajícího modelu transportu látek a energie. Lepší by bylo navrhnout a vytvořit nový transportní model, který by byl přímo uzpůsoben pro použití s metodou konečných diferencí.

9. ZÁVĚR

Cílem diplomové práce bylo navrhnout numerický model proudění látek v pístovém spalovacím motoru řešený metodou konečných diferencí, implementovat ho do rozsáhlého modelu *motoflow*, vyvíjeného na Katedře modelování procesů v prostředí Borland® C++ a na vhodně formulovaných úlohách otestovat jeho funkci, případně provést srovnání s modelem proudění, který je již v programu zahrnut a je řešen metodou konečných prvků. Protože katedra nemá k dispozici změřené veličiny jako je hustota nebo rychlost proudění v libovolném bodě a čase uvnitř válce skutečného motoru, není možné porovnat výsledky výpočtu s experimentem. Proto je vhodné provést srovnání vypočtených dat stejného modelu proudění, řešeného dvěma různými metodami.

Při implementaci nového modelu proudění do programu *motoflow* bylo třeba v co největší míře zachovat stávající rozhraní a způsob výpočtu. Aby bylo možné použít hotový model transportu hmoty a energie, byla velmi omezena možnost výběru vhodného tvaru diskretizační sítě pro metodu konečných diferencí a tím i způsob konverze dat mezi novým modelem a ostatními programovými moduly, které řeší další úlohy.

Při vývoji a následném testování nového modelu proudění byly odhaleny některé nedostatky již hotového modelu, řešeného metodou konečných prvků. I když se však tyto nedostatky nepodařilo v průběhu testování odstranit, bylo provedeno kvalitativní srovnání mnoha typů úloh. Z výsledků v kapitolách 7 a 8 je zřejmé, že pokud je do modelu řešeného metodou konečných diferencí zahrnut viskózní člen, tedy člen s prostorovými derivacemi druhého řádu, je chování modelu stabilní a fyzikálně snadno vysvětlitelné, ale není možné srovnání s modelem řešeným metodou konečných prvků, protože v tomto modelu není úplně zahrnuta viskozita a řešené rovnice proudění jsou tedy rozdílné. Pokud v modelu viskozitu zanedbáme, jsou rovnice a tedy i výsledky výpočtu porovnatelné, ale v tomto případě dochází u modelu řešeného metodou konečných diferencí k velmi nestabilnímu řešení, čemuž se žádným nastavením vstupních parametrů nepodařilo zabránit. Metoda konečných prvků se při vypnuté viskozitě v některých případech chová stabilněji, ale často dochází i v tomto případě k velmi vysokým rychlostem proudění a tedy nestabilitám, případně zhroucení výpočtu vlivem vysokých hodnot stěnových přetoků. Z těchto důvodů není ani při odstraněném viskózním členu možné kvantitativní srovnání obou metod výpočtu.

Dalším vývojem a důkladným testováním vlastností modelu proudění řešeného metodou konečných diferencí je třeba zahrnout do programu interpretaci nových okrajových podmínek, načítaných ze vstupních souborů, čímž by bylo možné provést navržené testovací úlohy podle kapitoly 0, dále důkladně prověřit vliv různých typů konverze dat mezi primární a sekundární diskretizační sítí a zejména otestovat chování modelu při použití jiných způsobů linearizace diferenciálních rovnic, popisujících proudění plynu ve válci. Zdokonalení modelu by také přinesl návrh a vývoj nového modelu transportu látek, který by byl optimalizován přímo pro použití s metodou konečných diferencí, což by mohlo být téma pro navazující diplomovou práci. Další možností je přeformulovat model proudění do proměnných $\vec{f} = \rho \vec{v}$ a $p = \rho RT$, čímž by se zjednodušila linearizace některých členů v rovnicích proudění a matematický popis obou metod by se ještě více přiblížil.

Literatura

- [1] J. Maryška, J. Šembera: *Discussion on Numerical Modelling of Physical Process in a Combustion Engine*. Sborník konference Algoritmy 2002, Podbanské, str. 179-186.
- [2] H. Lomax, T. H. Pulliam, D. W. Zingg: *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. NASA Ames Research Center & University of Toronto Institute for Aerospace Studies, 1999
- [3] H. C. Elman, D. J. Silvester, A. J. Wathen: *Iterative Methods for Problems in Computational Fluid Dynamics*. University of Maryland & University of Manchester Institute of Science and Technology & Oxford University Computing Laboratory, 1996.
- [4] R. Dvořák, K. Kozel: *Matematické modelování v aerodynamice*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1996. ISBN 80-01-01541-6.
- [5] C. Hirsch: *Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 1 – Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley & Sons Ltd., 1991.
- [6] E. Vitásek: *Numerické metody*. SNTL Praha, 1987.
- [7] S. Míka, A. Kufner: *Parciální diferenciální rovnice I, Stacionární rovnice*. SNTL Praha, 1983.
- [8] E. Vitásek: *Základy teorie numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic*. Academia Praha, 1994.