Vysoká škola strojní a textilní v Liberci

Fakulta pedagogická

Katedra matematiky

Datové struktury v matematice a ve výuce

Habilitační práce

Autor: RNDr. Jaroslav Vild, prom. mat.

J. Vild

Počet stran: 177

Počet příloh: 3

Výtisk číslo:

VŠST Liberec, leden 1992

Obsah

Označení

$\lfloor\ldots\rceil$ $\lceil\ldots\rfloor$		Bombelliho závorky pro vřazené výpočty a poznámky
{...} {:}		množinové závorky (prvky vodorovně nebo svisle)
{:		alternativní svorky
:=		"... je definováno jako ..."
<>	:=	$\neq$ $\lceil$znak různosti$\rfloor$
N, **Z**, **Q**, **R**		přirozená, celá, racionální, reálná čísla
non$\in$	:=	$\notin$
$\cup$, $\cap$, $\setminus$		znaky množin. operací: sjednocení, průnik, rozdíl,
$\sqcup$		disjunktní sjednocení
$C_U M$		doplněk množiny M vzhledem k množině U
$\overline{\mathbf{R}}$	:=	$\mathbf{R}\sqcup\{-\infty,+\infty\}$
∞	:=	$\{-\infty,+\infty,{}^*\infty\} = \{-\infty\}\sqcup\{+\infty\}\sqcup\{{}^*\infty\}$
$M \subset \mathbf{R}$		(číselná) podmnožina reálných čísel
M^+	:=	$\{x\in M; x>0\}$ kladná část množiny M
M^-	:=	$\{x\in M; x<0\}$ záporná
M^*	:=	$M^+\sqcup M^- = M\setminus\{0\}$ nenulová
M_0	:=	$M\cup\{0\}$
$A\times B$		kartézský součin množin A, B
A^k	:=	$A\times A\times\ldots\times A$ kartézská mocnina množiny A
$n(M)$		počet prvků množiny M
$\div$		celočíselné dělení
$\mathrm{mod}(k,n)$	:=	$k - (k\div n)n$, $k\in\mathbf{N}_0$, $n\in\mathbf{N}$

$\theta \in \{ +, - , ., / \}$ jedna ze čtyř aritmetických operací

$A\theta B := \{x\theta y;\ x\in A;\ y\in B\}$, kde $A, B \subset \mathbf{R}$

$A^{\cdot k}$	:=	$A.A \ldots A$ algebraická mocnina množiny A

$|A| := \{|x|;\ x\in A\}$ absolutní hodnota komplexu $A \subset \mathbf{R}$

$2\mathbf{Z} = 2\mathbf{N}_0 \sqcup (-2\mathbf{N})$ množina všech sudých čísel

$2\mathbf{Z} + 1$		lichých
$[c, d]$		bod v rovině o souřadnicích c, d
(c, d)		otevřený interval s krajními body c, d
$\langle c, d\rangle$		uzavřený
$\langle u_1,\ldots,u_n\rangle$		uspořádaná množina bodů
f, g, h		reálné funkce jedné reálné proměnné, f, g, h: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$
$D(f)$, $H(f)$		definiční, resp. hodnotový obor funkce f
$f(x)$		funkční hodnota funkce f v bodě x
f_i	:=	$f(u_i)$
Δf_i	:=	$f_{i+1} - f_i$ diference 1. řádu

$\Delta^2 f_i$:= $\Delta(\Delta f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$ diference 2. řádu

$f(M)$:= $\{f(x);\ x \in M\}$ obraz množiny M

$f|_B$ zúžení funkce f na množinu B

f^{-1} inverzní (množinová) funkce k funkci f

$f \circ g$ funkce složená z vnější složky f a vnitřní g

$f(b+) := \lim_{x \to b+} f(x)$ $f(b-) := \lim_{x \to b-} f(x)$ $f(b^*) := \lim_{x \to b} f(x)$

$f(+\infty) := \lim_{x \to +\infty} f(x)$ $f(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} f(x)$ $f(\infty) := \lim_{x \to \infty} f(x)$

$f_{i+} := f(u_i+)$, $f_{i-} := f(u_i-)$, $f_{i*} := f(u_i^*)$

$|x|$ absolutní hodnota čísla x

$E(x) = \lfloor x \rfloor$:= max $\{c \in Z;\ c \le x\}$ "dolní celá část čísla x" := největší celé číslo, které není větší než x

ld x := $\log_2 x$ dvojkový logaritmus (tj. při základu 2) čísla x

sgn x funkce signum: sgn $R^+ = 1$, sgn $R^- = -1$, sgn $0 = 0$

Θ Heavisideova funkce: $\Theta(R^+_0) = 1$, $\Theta(R^-) = 0$

W lomenicová funkce (spojitá po částech lineární)

mult(S) multiplikativní složitost výpočetního schématu S

adit(S) aditivní složitost výpočetního schématu S

$\alpha, \beta, \ldots$ reálná čísla (z R)

$O(n^s)$ veličina řádu n^s pro $n \to +\infty$

$[\ldots]_{10}$ zápis čísla v desítkové soustavě

$[\ldots]_2$ dvojkové

(mikro)počítač (osobní) nebo sálový počítač

(ne)rovnice rovnice či nerovnice

max, min maximum, minimum

sup, inf suprémum, infimum

T transformace (ne)rovnice, výrazu

┌┬┐ začátek bloku textu (příkladu, důkazu, úvahy ap.)

└┴┘ konec

Maticové označení

$A, B, \ldots, Z$	matice s reálnými prvky
a_{ik}	prvek matice A v i-tém řádku a k-tém sloupci
a_{**}	dvouindexová matice A s prvky a_{ik}
a_{i*}	i-tý řádek matice A
a_{*k}	k-tý sloupec matice A
$a_{i*}b_{*k}$	(skalární) součin i-tého řádku matice A a k-tého sloupce matice B
$a_{*i}b_{k*}$	součin i-tého sloupce z A a k-tého řádku z B
$(r \times s)$-matice	matice o r řádcích a s sloupcích
r-matice	čtvercová matice r-tého stupně (= $(r \times r)$-matice)
r-vektor	vektor o r souřadnicích
r-sloupec	sloupec o r souřadnicích (= $(r \times 1)$-matice)
r-řádek	řádek o r souřadnicích (= $(1 \times r)$-matice)
c_i	r_i-sloupec [column]
l_i	r_i-řádek [line]
M_i	$(r_i \times r_{i+1})$-matice
$\prod_{i=0}^{n} M_i := M_0 M_1 \ldots M_i \ldots M_n$	součin posloupnosti matic M_0 až M_n
o, o_r, O	nulový vektor, nulový r-vektor, nulová matice
e_i	jednotkový vektor (jednička pouze na i-tém místě)
$h(M)$	hodnost matice M
M^T, M^{-1}	matice transponovaná, resp. inverzní, k matici M
I, I_r	jednotková matice, jednotková r-matice
$E:=I+A,\ h(A)\le 1$	elementární matice
A	obvykle matice hodnosti 1
$\lVert . \rVert$	norma (vektoru, matice)
$\varrho(M)$	$:= \max\{\lvert\mu\rvert;\ Mx = \mu x,\ x \neq o\}$, spektrální poloměr
$R_\infty(M)$	$:= -\ln \varrho(M)$ asymptotická rychlost konvergence
ω_{opt}	optimální parametr superrelaxace

Předmluva

Pod názvem "Datové struktury v matematice a ve výuce " jsou shrnuty a rozvinuty některé práce autora týkající se role výpočetní techniky v metodách a obsahu výuky matematických disciplín vyučovaných v úvodních neuniversitních kursech matematiky.

Jádrem textu je pět poměrně nezávislých částí, které jsou číslovány římsky. Části jsou dále členěny do kapitol, článků, paragrafů a odstavců. Nadpisy těchto oddílů jsou rozlišovány písmem s atributy danými úvodní čtveřicí prvků (trojic) vzestupně uspořádaného kartézského součinu skalárních dvouprvkových typů

{<u>t</u>učný, <u>o</u>byčejný} x {<u>v</u>elký, <u>m</u>alý} x {<u>p</u>odtržený, <u>n</u>epodtržený},

tj. trojicemi tvp, tvn, tmp, tmn. V cobolovském přepisu tomu odpovídá hierarchické záznamové schéma (připojíme k němu hned alfanumerické kódování):

<u>1. KAPITOLA</u>

A. ČLÁNEK

<u>1. Paragraf</u>

a. Odstavec

V záhlaví stránek je za alfanumerickými kódy části a kapitoly uváděn název kapitoly.

První část ozřejmuje souvislosti mezi datovými a matematickými strukturami a uvádí některé možnosti aplikace struktur. Druhá část ukazuje na vztahy struktur používaných při práci s velmi významnými tzv. po částech lineárními funkcemi. Třetí část demonstruje význam agregace a dekompozice při realizaci a výkladu metod lineární algebry. Čtvrtá část předvádí významné možnosti použití počítačů ve výuce matematiky. Pátá část porovnává některé vyučované numerické metody z hlediska praktického řešení úloh. Jednotlivé části vznikaly v různých časových údobích a občasné návraty k nim měly za cíl jejich aktualizaci a sjednocování.

Šestá část je dokumentační a začíná seznamem odkazů. Publikované práce autora jsou vyděleny samostatně. Je zde též seznam dokončených prací studentů, kteří až dosud působili na katedře matematiky VŠST v Liberci. Za patnáct let této činnosti (spolu)vedl autor zhruba 2/3 těchto prací, které často zpracovávaly dílčí problémy probírané tématiky.

Na prameny se odkazuje nejvýš třípísmennými zkratkami s rokem vydání a případnou stránkovou či řádkovou lokalizací. Výhodou proti číselnému kódování je snadné doplňování nových položek. Seznamy pramenů byly vytvářeny pro jednotlivé kapitoly a poté setříděny (podle zkratek) pro části a pro celou práci. K tomu byly užity speciální třídicí procedury. Práce autora se citují digrafem Vi, práce studentů Sč, pokaždé s připojeným pořadovým číslem podle seznamu.

Významné či citované objekty (vztahy, tabulky, schémata) jsou označovány zpravidla přirozenými čísly samostatně v každé kapitole. Někdy jsou použity mnemotechnické kódy. Odkaz v jiném oddílu stejné (souřadná kapitola) nebo vyšší (části) úrovně je uveden předponou cesty ze společné nejblíže nadřazené úrovně.

Při psaní a redigování práce bylo užito nejrozšířenějšího českého textového editoru Text602, který je zatím jediným legálním editorem na katedře. Neúplná kompatibilita jeho různých verzí způsobovala určité nesnáze.

Specifika editoru Text602 ovlivňují ovšem provedení. Editor není specializován na matematické texty, což znamená přizpůsobovat se např. omezením množiny disponibilních znaků (chybí např. znak různosti, některé řecké symboly apod.). Text je silně linearizován, dvojrozměrné výrazy jsou často uspořádány do řádku - např. $a/bc = (a/b)c$. Indexy nejsou dostatečně výrazné, nelze současně užít horních i dolních indexů, komplikace jsou s vícepatrovými indexy. (Automatické) dělení slov vede často k těžko přijatelným slovním úsekům. Zarovnávání na pravý okraj není bohužel proporční. Algoritmus prostrkávání mezerami je málo propracovaný, způsobuje např. vzdalování předložek a nechtěné prokládání částí sousloví. Zato je možné kreslit obdélníková schémata a připravit podklad pro jednoduché grafy funkcí.

Potence textového editoru nesou sebou výhody (a často zároveň) nevýhody. Text lze vylepšovat do poslední chvíle za cenu vzniku mnoha různých variant, z nichž je pak těžké zvolit nejlepší. V každém případě náleží editorům nejbližší budoucnost.

Přiloženy jsou dvě části poslední verze anglického učebního textu [Vi52-91], kde jsou uplatněny některé výsledky předkládané práce. Druhá příloha je druhým (aktualizovaným) vydáním přehledu [Vi46-90], v němž lze sledovat souvislosti se studentskými pracemi vedenými na katedře.

Úvod

Při teoretickém zkoumání a pedagogické prezentaci každé problematiky je východiskem volba koncepce a jí odpovídající pojmový a terminologický aparát. V dostatečně formalizovaných vědních disciplínách k tomu přistupuje náležitý systém označení a struktura prezentace. Odlišnost jednotlivých přístupů poskytuje různé možnosti a jejich porovnání ukazuje nové souvislosti. Popisovaná situace je typická v matematice. Konstituováním a rozvíjením teorie se rozumí vymezení základních pojmů a jejich vztahů a sledování vzájemných souvislostí pojmů (vlastností), především s předchozími pojmy, zachovávání, změny a vynořování vlastností při manipulaci s objekty. Strukturace teorie patří ovšem k úvodním rozvahám každé teorie a přednášky. Při jejich výstavbě se ovšem průběžně upravuje.

Cíl studia matematické disciplíny můžeme vymezit jako osvojení systému příslušných pojmů a jejich vztahů s praktickým vyústěním při řešení problémů. K tomu se vyvíjí terminologický systém, zavádějí se definice, formulují se věty a rozvíjí se specifická intuice umožňující formulaci hypotézy. Termíny přitom rozumíme krátké slovní obraty označující významné pojmy, které jsou produktem úsilí matematiků. Významnou roli hraje symbolický aparát a manipulace s ním. Pro praktické aplikace je zapotřebí chápat souvislosti mezi realitou a jejím matematickým modelem.

Podstatný podíl při učení se matematice má práce s textem: učení z textu a jeho transformace, jejichž výsledkem jsou paměťové a poznávací struktury, či textový výstup - např. v podobě zápisků. (Didaktickým) textem přitom rozumíme [Prů-87:8¹³⁻¹⁸] informační celek, jenž je svými specifickými vlastnostmi určen pro didaktickou komunikaci. Tento celek má složku verbální, obrazovou, grafickou, ale též strukturní.

Právě význam strukturní složky bývá přehlížen a nedoceněn a přitom (spolu)rozhoduje ve značné míře o efektivnosti textu a o jeho psychologické přijatelnosti ze strany studentů i vyučujících, a všech, kteří jej mají posuzovat a využívat. A tím koneckonců určuje i jeho úspěšnost.

Významnou roli při učení, tj. při vnímání, chápání, zpracovávání a zapamatování didaktické informace hraje strukturace textu. Jde vlastně opět o uplatnění obecného principu agregace a dekompozice. Tato strukturace a vhodná symbolika jsou prostředky proti informační šedi. Ta ztěžuje extrakci podstatné informace a její struktury. Na druhé straně je redundance textu jistě žádoucí z psychologických důvodů, a též při čelení nechtěným (technickým) chybám. Je však ji třeba vynakládat obezřetně. Příkladem nevhodné redukce textových duplicit jsou paralelní formulace užívající závorkované alternativy, které jistě neposkytují lepší orientaci v textu a nevytvářejí přátelské prostředí pro čtenáře.

Věčný souboj linearizace a strukturace textu je specifickým projevem soutěže agregačního a dekompozičního přístupu k pojímání reality.

Na význam (matematické) symboliky jsou různé názory. Pro "počítačové" matematiky je příznačné přisuzování zcela zásadního významu vhodné symbolice. Zdá se, že se tento názor rozšiřuje.

Např. v [NFR-77:11$^3_9$] se připomíná historicky prokázaný vliv vhodné symboliky na skoky ve vývoji poznání. Běžně se uznává význam arabských číslic a pozičního zápisu čísel.

Za zmínku stojí jistě Leibnizovo snaha o převedení vědeckého zkoumání na manipulace (výpočty) se symboly [Eng-87:13]. Vznikla v období ustalování matematické symboliky, která mohla být zbavena obsahu a pak použita k pokusům o čistě formální manipulace. Novému rozkvětu se těšila axiomatická geometrie, jejímž vlivem bylo upřednostňováno rozvíjení teorie ve sledu axiómy - [:věta-důkaz-definice:]. Leibniz snil o nahrazení přirozených popisných (pojmových) důkazů formálními výpočty v systému, kde jsou vhodně symbolicky reprezentovány axiómy, věty a definice. Tato snaha se sice ukázala jako marná, nicméně význam vhodných symbolických systémů tím nepoklesl. Leibniz sám přispěl významně k tvorbě matematické symboliky (integrál, derivace).

Každé konkrétní označení je úspěšné do té míry, jak odráží nutnou část informace [Par-83:16$^{18-22}$]. Např. v maticovém označení jsou skryty prvky matice. Datovým agregátům tak odpovídá označení. Přijmeme-li vymezení matematiky jako jazyka, který používají též jiné vědní disciplíny, pak tato problematika nabývá zcela zásadního významu. Pozoruhodné je, že při úvahách o významu označení se zpravidla explicitně nezdůrazňuje role struktury zápisu (textu) a při jejich realizaci se jí nevěnuje dostatečná pozornost.

Část I. Matematické a datové struktury

Data (údaje) lze chápat jako souhrn informačních jednotek, mezi nimiž existují nějaké vztahy. Tyto vztahy určují datovou strukturu. Při řešení reálných problémů na počítačích lze rozlišovat trojí strukturu dat:

konkrétní - odpovídající jejich použití v dané úloze

abstraktní - zachycující souvislosti mezi jejich složkami

strojovou - dané jejich reprezentací v paměti počítače.

Každá z těchto úrovní má ještě statický a dynamický aspekt. Nás bude zajímat zpravidla abstraktní statická struktura informací, někdy přihlédneme k dynamickým hlediskům ztělesněným algoritmickými strukturami. Uvedeme jen výběr datových struktur, které se vyskytují zpravidla v nějaké podobě v dalším textu. Souvislosti se strojovými datovými strukturami zpravidla necháváme stranou. Lze je najít např. v [Hal-78; Wir-87].

C1K1. VYBRANÉ DATOVÉ STRUKTURY

Matematika od počátku pracovala s objekty, které byly agregáty objektů jednodušších. Výpočetní technika převzala tyto struktury a vedla ke vzniku nových. Navíc se objevila potřeba zavést a studovat operace se strukturami, které se v klasické matematice považují často za triviální.

Matematika je budována na množinách, $n(M)$ značí počet prvků množiny M. Jsou-li A, B množiny, pak významným agregátem je kartézský součin $A \times B := \{(a,b);\ a \in A,\ b \in B\}$. Speciálním případem při $B = A$ je tzv. kartézská mocnina A^2 množiny A. (Binární) relace mezi A, B je název pro podmnožinu množiny $A \times B$. Binární relace na množině A je podmnožina množiny A^2. Např. $D := \{(a,a);\ a \in A\} \subset A^2$ je tzv. diagonála množiny A. Funkci můžeme chápat jako speciální relaci.

Indexace množiny M je funkce I

$I\colon\ M \to \{0,1,2,\ldots,n(M)-1\}$. ⌈indexujeme od nuly⌋

Tím je umožněno odvolávat se na jednotlivé prvky z M přirozenými čísly. Neznamená to však, že musíme vždy M chápat jako posloupnost (jako pole v paměti počítače).

Významnou matematickou strukturou je tzv. prostý graf G [Neš-79:34-5], čímž rozumíme dvojici (V,E), kde V je množina vrcholů grafu G a E je množina hran, $E \subset V^2 \sqcup V_2 \sqcup V$. Zde $V_2 := \{\{v_1, v_2\};\ v_1 <> v_2,\ v_1, v_2 \in V\}$, tj. jde o systém všech dvouprvkových podmnožin množiny V.

Prvky z	V^2 se nazývají	orientované hrany (=šipky)
	V_2	neorientované (=žebra)
	V	smyčky
	$D \subset V^2$	orientované smyčky

Různé druhy grafů [PY-82; NFR-77; Neš-79] můžeme chápat jako speciální druhy relací na množině uzlů. Prostý orientovaný graf obsahuje pouze šipky. Jde tedy o dvojici (V,E), kde $E \subset V^2$, takže jej lze ztotožnit s binární relací E na V. Acyklický graf je orientovaný graf bez smyček, který neobsahuje cykly (uzavřené orientované cesty) [Neš-79:67]. Souvislý acyklický graf, v němž je jeden uzel označen jako tzv. kořen) a všechny hrany jsou orientovány "od kořene", nazýváme kořenovým grafem. Kreslíme jej od kořene a uzly uspořádáváme do úrovní podle délky cest, které do nich směřují od kořene. Neorientovaným stromem rozumíme souvislý graf bez kružnic [Neš-79:49,56].

Datový typ je dán množinou hodnot. Prvotní datové typy jsou často dány uspořádanou množinou (výčtem) hodnot, jde o tzv. skalární typy. Vedle číselných typů sem náleží též např. alfanumerický typ, barevný typ (barvy uspořádané podle spektra) apod.

Základními datovými strukturami jsou [Wir-87]: pole, záznam, množina a soubor. Těm odpovídají postupně elementární matematické pojmy: matice (vektor), kartézský součin, množina, posloupnost. Proměnné základních struktur mění jen svoji hodnotu, ale ne svoji strukturu a rozsah.

Nové datové typy se definují zpravidla pomocí dříve definovaných typů a jejich hodnoty jsou agregáty hodnot již definovaných typů. Mají-li všechny prvky stejný typ, nazýváme jej základním typem. Pole je homogenní struktura sestávající z prvků jediného typu.

Významnými procesy strukturace jsou agregace a dekompozice, jejichž speciálními formami jsou např. diferenciace, komprimace, rozklad, doplněk. Strukturace často souvisí s implantací datových struktur na počítačích, kdy je nutno přihlížet k, či se podrobit, fyzickým strukturám počítače (vstupní a výstupní zařízení, paměti, kanály). Metody strukturace mohou být v matematickém smyslu ekvivalentní, ale liší se operátory pro tvorbu hodnot a pro výběr prvků struktury. Především je třeba rozlišovat rovnost (relaci) a přiřazení (spec. definování).

Záznam je složený typ, který odpovídá matematickému pojmu kartézský součin (složkových typů).

Soubor je posloupnost objektů. Zde již vystupuje potenciální nekonečno, neboť předpokládáme, že je dovoleno opakovaně přidávat další objekty.

Řetězec je posloupnost symbolů, které náleží konečné množině zvané abeceda. Pro řetězce je typické, že mají proměnnou délku (počet symbolů), zpravidla je zpracováváme z jednoho z konců, bývají omezení na přípustné kombinace symbolů. U počítačů je řetězec soubor alfanumerických znaků, tj. jeho prvky příslušní skalárnímu (uspořádanému např. podle kódové tabulky ASCII) typu znak.

Text lze v prvním přiblížení chápat jako alfanumerický řetězec. Velké soubory je však třeba z praktických důvodů strukturovat. Proto jsou texty (dokumenty) rozděleny z logického hlediska na kapitoly, články, odstavce, paragrafy, věty a slova. Typografické (technické) požadavky si vynucují stránky a řádky. Těmito strukturacemi se ulehčuje orientace v dlouhé posloupnosti informací. Vytvářejí se tzv. víceúrovňové soubory (struktury), v nichž prvky na ité úrovni se nazývají segmenty ité úrovně. Podstruktury jsou označovány (vymezovány) speciálními oddělovači, či oddělovacími znaky. Patří k nim vynechávání řádků, zarážky, začátek odstavce, interpunkční znaménka, a ovšem mezera. Význam mezery a obecně separátorů pro čitelnost a srozumitelnost textu je zásadní. Např. v programování může vynechávání mezer vést ke zcela nepřijatelnému výpisu programu (př. FORI=1TO10). V tabulce ASCII hrají roli oddělovačů tzv. řídící znaky. V textu se ovšem objevují též struktury odlišné od řetězců. Mohou to být výše uvedené struktury či jejich kombinace, ale též např. stromy, či obecněji grafy, tabulky, schémata, obrázky apod.

C1K2. DATOVÉ STRUKTURY V (MATEMATICKÝCH) TEXTECH

Beletristické texty bývají zpravidla děleny nejvýš do kapitol. Pro odborné texty je však typická vícestupňová stromově hierarchická vnější struktura a navíc obsahují prvky specifických struktur. Jejich realizace pak závisí na nosiči informace.

A. BI-TABULKY

Běžnou formou zápisu informace jsou tabulky. Např. při měření či při tabelaci vznikají dvouřádkové tabulky, v nichž je soustředěna bodová informace o měřené funkční závislosti. Tyto tabulky jsou prvky kartézského součinu typu hlavičky tabulky a typu měřených hodnot. Při řešení nerovnic o jedné neznámé a při zkoumání průběhu funkce se užívají zpravidla intervalové tabulky s kartézským typem

{intervalový typ} x {0;±1} , resp.
{intervalový typ} x {charakteristiky průběhu funkce}

V druhém případě (a jindy) jsou užitečné tabulky obsahující zároveň bodovou i intervalovou informaci, tj. bodově-intervalové tabulky (=bi-tabulky). Tyto tabulky lze chápat jako kartézský součin konečných bodově-intervalových rozkladů skalárního typu a příslušných bodových a intervalových informačních typů (případně jejich kartézských součinů).

Příkladem může být bi-tabulka pro spojitost a limity funkce f definované v $\mathbb{R}$, která má konečný počet zajímavých bodů:

	$-\infty$		b_1		b_2	...	$+\infty$
f		spoj.	skok	spoj.	as. $x=b$		$\sim kx+q$
$f(b^\sim)$	$f(-\infty)$	$f(b_1-)=l_1$	p_1-l_1	$f(b_1+)=p_1$	$f(b_2-)=\infty$		∞

Zde $\sim$ v $f(b^\sim)$ označuje, že se jedná o informaci v bodě nebo v jeho okolí. Uvnitř intervalů by mělo být vždy zachyceno, že v nich je funkce f spojitá.

Speciálně funkci f po částech polynomickou lze zadat bi-tabulkou, v jejichž dělicích bodech u_i jsou uvedeny funkční hodnoty $f_i := f(u_i)$ a v dílčích intervalech J_i jsou evidovány parametry $a_0,\dots,a_n$ polynomu $a_0x^n + \dots + a_n$ zužovaného na interval J_i . Údaje f_i mohou být nepodstatné. Jindy se vyžaduje splnění určitých "přechodových" vlastností v uzlech u_i .

V části C2 se hojně užívají bi-tabulky pro zachycení informace o funkcích po částech lineárních a o jejich speciálních případech. V této části pak půjde též o vzájemnou transformaci různých způsobů zápisu informace.

B. REDUKCE ZÁPISU POSLOUPNOSTÍ A MNOŽIN

Výsledkem řady algoritmů je celočíselná posloupnost. Tak je tomu kupř. při rozhodování, zda generované objekty určitého druhu (např. kombinatorické) mají zkoumanou vlastnost či nikoliv. Jde vlastně o charakteristickou (indikátorovou) funkci (posloupnost) sledované vlastnosti. Při zhodnocování výsledků je pak značně nepříjemné, musíme-li např. prozkoumat sto čísel, abychom zjistili, že jsou přítomna všechna čísla 1 až 100, nebo že chybí pouze jedno číslo. Vzniká proto přirozená snaha redukovat zápisy posloupností s cílem zlepšit jejich přehlednost a zvýraznit strukturu. Odhalení struktury má ovšem obecně i význam teoretický.

Podobná situace nastává, je-li výsledkem výčet prvků konečné podmnožiny množiny celých čísel. Přitom se mohou prvky i opakovat, jak je tomu v případě tzv. multimnožin.

V následující miniteorii se omezíme pouze na konečné rostoucí celočíselné posloupnosti a na redukci jejich lineárních úseků s jednotkovým směrem. Všimneme si vztahů mezi redukcí a délkou zápisu a vlivu přechodu k doplňku.

Mějme celočíselný interval $U = \langle b,c \rangle$ a označme **P**(b,c) množinu všech rostoucích celočíselných posloupností $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$, pro něž $\langle a_1, a_n \rangle \subset U$. Do **P** tedy patří všechny rostoucí posloupnosti, jejichž členy leží v rozsahu U (obecně mohou mít různý počet členů n). Počet členů n nazveme délkou zápisu posloupnosti, $n = n(S)$. Posloupnost a množinu jejích členů budeme značit stejným znakem.

Na **P** definujme dva operátory. Operátor R přiřazuje každé posloupnosti S z **P** redukovanou posloupnost RS vzniklou vynecháním vnitřků jejích lineárních úseků. Operátor doplňku D přiřazuje ke každé posloupnosti S z **P** rostoucí posloupnost DS , jež má za členy všechny prvky z U nepatřící do S .

Posloupnost S se skládá z izolovaných členů a maximálních lineárních úseků jednotkového směru. Jejich počty označíme $i(S)$ a $m(S)$. Dále označme $h(S)$ počet hraničních bodů b, c rozsahu U obsažených v S ; zřejmě $0 \le h(S) \le 2$. Pak platí

$$i(S) + 2m(S) = n(RS) \le n(S) ,$$

$$i(S) + m(S) - h(S) + 1 \le n(RDS) \le 2(i(S) + m(S) - h(S) + 1).$$

Odtud je vidět, že obecně

$$n(DS) < n(S) \quad \text{non=>} \quad n(RDS) < n(RS) ,$$

takže přechod k doplňku zmenšující počet prvků nemusí být automaticky výhodnější, co do délky zápisu. Nerovnost

$$|n(RS) - n(RDS)| \le m(S) + h(S) - 1 \le [n(U)/3] + 2$$

ukazuje maximálně možné zkrácení zápisu při přechodu k doplňku. Zde [] označuje "celou část".

Je-li $m(S) > 0$, řekneme, že při redukci dochází ke spojení; platí-li $n(RS) < n(S)$, mluvíme o zkrácení. Posloupnosti, u nichž nedochází ke spojení ani v S , ani v DS , jsou právě dvě doplňkové:

$$(m(S) = 0) \ \& \ (m(DS) = 0) \quad \text{<=>} \quad S = T \ \text{nebo} \ S = DT ,$$

kde

$$T = \{b + 2i; \quad i = 0,1,\ldots,(c-b)/2\} .$$

Zkrácení v S ani v DS nenastává v posloupnostech, u nichž

$$n(U) = i(S) + i(DS) + 2(m(S) + m(DS)).$$

Ve [Vi17-79] je popsán algoritmus, který ukazuje ve speciálním případě cestu, jak řešit kardinální otázku každého použití počítače: co s výsledky získanými počítačem. Usnadňuje zpracování a interpretaci dat, a tím jejich využití. Snadno si lze představit situace, v nichž beznadějně nepřehledná data přímo zachraňuje před jinak nevyhnutelnou likvidací. Algoritmus předpokládá předběžné standardní vzestupné uspořádání prostřednictvím některého ze známých algoritmů. Pro případ multimnožiny, v níž se prvky opakují, lze postup modifikovat a uvádět násobnost N prvku E - nejspíš ve tvaru N×E . Různé varianty algoritmu ve formě fortranských programů byly použity např. ve [ViL-77; ViZ-77] při redukci výsledků počítačového zpracování tzv. proměnných zadání (srov. C4K1).

Obecněji se může jednat o redukování posloupnosti celočíselných n-tic (prvků ze Z^n), či množiny takových n-tic (prvků relace v Z^n). Zde jde o vyhledávání a redukci (nad)kvádrových podmnožin, které jsou zapisovány pomocí diagonálně protilehlých vrcholů, či pomocí složkových jednorozměrných intervalů. Tento proces může najít uplatnění např. při redukci výčtů desetinných odkazů v matematických textech. Můžeme se tak vyhnout kuriózní situaci, kdy odkazy jsou delší než označovaný objekt (viz např. [OP-86]).

C. GRAFOVÉ STRUKTURY

Grafy lze výhodně aplikovat např. k přehlednému znázorňování souvislostí v pojmových systémech. Používáme přitom grafu, jehož uzly jsou označené termíny příslušnými k pojmům. Uzly jsou uspořádány do hladin (úrovní) očíslovaných přirozenými čísly. Z uzlu v *ité* úrovni vede šipka (či žebro) do uzlu (*i*+1)té úrovně, jsou-li odpovídající pojmy ve vztahu podřízenosti. Např. [Neš-79:37,46] užívá těchto schémat pro zachycení klasifikace druhů grafů, resp. typů morfizmů. Podobnou roli hrají hasseovské diagramy [Neš-79:82].

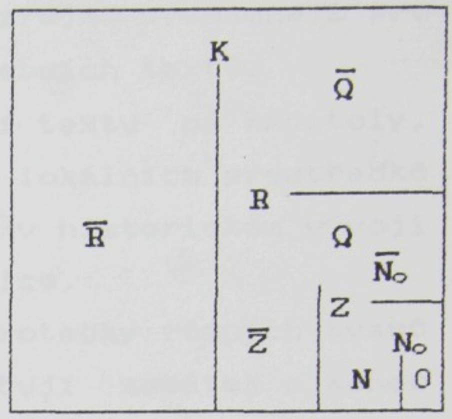
Často se vyskytující stromovou strukturu pojmů a jim odpovídajících termínů přepisujeme cobolovským odstavcováním datových struktur [PY-82:91]. Řetězce podřazených pojmů znázorňujeme odsazováním (obvykle o dva znaky), souřadné pojmy necháváme na stejné úrovni.

Syntaktická pravidla popisující Cobol (souhrnný výčet množin typů) lze dobře aplikovat na výčet gramatických typů (množin slov stejného slovního druhu) a na alternativní formulace. Ty se zatím obvykle rozepisují sériově za sebou pomocí zkratky resp., jindy se uvádějí do kulatých závorek lineárně v textu. Obojí nepřispívá srozumitelnosti. Cobolovský způsob vede sice k jistému rozbití textu a ke ztrátě jeho linearity (ta je však pro svoji únavnou monotonii někdy spíše škodlivá - otupuje pozornost), má však jiné výhody: úspora zápisu, eliminace informační šedi opakovaných formulací, a tím zpřehlednění, zdůraznění souvislostí a analogií aj.

Obdobně se uplatňují patrové alternativy, které jsou užívány s různou důsledností např. v [Čup-46; Hru-59; KT-59; Vi37-88; Vi52-91 aj.] a najdeme je též na rubu sporožirového výpisu. Poznamenejme, že někdy bývá účelný jejich tabulkový přepis.

Příkladem stromové struktury je přehled vztahů některých významných číselných množin odpovídající opakovanému dichotomickému rozkladu:

- komplexní K
  - imaginární $\overline{R} = C_K R$
  - reálná R
    - iracionální $\overline{Q} = C_R Q$
    - racionální Q
      - necelá (= lomená racionální) $\overline{Z} = C_Q Z$
      - celá Z
        - záporná celá $\overline{N_0} = C_Z N_0$
        - nezáporná celá N_0
          - přirozená (= celá kladná) N
          - nula 0



Poněkud složitější je struktura klasifikace čísel pomocí jejich desítkového zápisu (vyloučíme periodickou devítku a nulu). Připojíme souvislost s rozkladem jmenovatele j redukovaných (zkrácených) zlomků c/j , $c \in Z$, $j \in N$, na součin $j = q2^r5^s$, kde r, s jsou celá nezáporná, přirozené číslo q není dělitelno prvočísly 2, 5 .

číselná množina	tvar desítkového zápisu	c/j, $j=q2^r5^s$
reálná R	libovolný	---
iracionální $\overline{Q}$	neperiodický (nekoneč.)	nelze vyjádřit zlomkem
racionální Q	periodický (nekonečný)	$q>1$
	smíšeně periodický	$r+s>0$
	čistě periodický	$r+s=0$
	konečný	$q=1$
	se zlomkovou částí	$r+s>0$
celá Z	bez zlomkové části	$r+s=0$, tj. $j=1$

Podobně by se mohl uvádět přehled o řešení lineární rovnice tvaru $ax + b = 0$.

Je-li $a <> 0$, má rovnice jediné řešení $x = -b/a$;
$a = 0 \wedge b <> 0$, nemá rovnice $b = 0$ řešení;
$b = 0$, má rovnice nekonečně mnoho řešení (celou R).

D. PODPŮRNÝ APARÁT PRO VÝUKU (MATEMATIKY)

Jedním z cílů výchovně-vzdělávacího procesu je učit studenty pořizovat písemné záznamy ústního projevu. Nejběžnější situací je zapisování výkladu nebo přednášky učitele. Vyučující by měl mít tento aspekt svého působení trvale na zřeteli. Měl by upozorňovat explicitně na formu zápisu (rozměry tabulek, vynechávky pro návraty ap.) a nešetřit zde zbytečně časem. Jedním z kritérií posuzování kvality přednášky by pak mohla být úroveň studentských záznamů. Vzorem jsou ovšem zápisy na tabuli s důsledným využíváním prostředků grafické úpravy. Ty jsou samozřejmě významné i pro aplikaci didaktické techniky a při tvorbě učebních textů.

Pomineme globální "právnické" rozvržení textu na kapitoly, články, paragrafy a odstavce a povšimneme si lokálních prostředků grafických úprav. Inspiraci nalezneme např. v historickém vývoji matematické symboliky a v počítačové matematice.

Běžně se užívají vstupní a výstupní makrotečky různých tvarů (pocházejí údajně od Halmose), které vyznačují začátek a konec důkazu, příkladu či většího myšlenkového celku. Tím se uvolňuje obvyklé vnitřní odstavcování pro členění makrotečkami uzávorkovaných pasáží.

Marginálie rozumíme hesla či grafické značky umisťované po stranách textu. Mohou to být zdůrazňovací čáry, hesla vystihující obsah odstavce ap. Užít lze též "dopravních" značek inspirovaných vyhláškou č. 100. Tyto značky mají vést matematického poutníka úskalími a pozoruhodnostmi naučné stezky. Vhodná může být např. trojice

$\boxed{Z}$ znamená ┌ nebezpečí chyby či omylu ⌈známé z ped. praxe⌋

$\boxed{R}$ ├ radu ⌈do matematického života⌋

$\boxed{M}$ └ mnemotechniku či slogan; význačná pamětihodnost

Podobné prostředky se vyskytují poměrně běžně. Zde lze připomenout např. známou bourbakistickou zatáčku. V sympatické brožuře [Zve-85:32-3] nalezneme přehled sedmi symbolů mezinárodně ustálených dopravních značek, kterých se dále hojně užívá pro orientaci a aktivizaci čtenáře. Jiný seznam okrajových značek je uveden v netradiční knize [BO-86:9-10].

Marginálie se musí ovšem uplatňovat střídmě, zejména je záhodno ponechat místo na okrajové poznámky samotného čtenáře, které pro něj bývají nejcennější.

Pro usnadnění sledování výkladu je velmi žádoucí vkládat stručné dodatky, poznámky či připomínky přímo do textu bezprostředně na místo, kde je třeba komentáře, zdůvodnění či zdůraznění. Jde o snahu zmenšit výkladové skoky nebo bezprostředně upozornit na úskalí a místa chyb či nedorozumění, jež jsou známa z pedagogické praxe. Vřazované poznámky je ovšem nutno vydělit ze základního textu např. pomocí "prazávorek" ⌊...⌉ . V [Ale-78:129] se uvádí, že písmena L a převrácené L zavedl R. Bombelli ve 2. pol. 16. století v roli závorek. Vyvinuly se z nich hranaté závorky [,] a jejich předchůdci upadli v zapomenutí. Výhodná je vodorovně převrácená verze Bombelliho závorek ⌈...⌋ , kterou lze (vlevo) v případě potřeby dodatečně prodlužovat. Nepoužívání podobných prostředků vede k nutnosti úvodních předběžných či dodatečných poznámek, vysvětlivek, či odkazů na přívěskové podčárníky ap. V každém případě jde o narušení logické kontinuity textu.

Obzvláště žádoucí je užívání Bombelliho závorek pro zařazování průběžných komentářů a připomínaných vzorců při řetězci úprav či transformací. Lze je pak umisťovat bezprostředně (lineárně) mezi rovnítka nebo v souběžné (postranní) doprovodné části textu. Tento postup uplatníme např. při úpravách matematických výrazů, při výpočtu limit úpravami či l'Hospitalovým pravidlem, při výpočtu integrálu substitucí či metodou per partes atd. Poznamenejme, že zejména při výpočtu integrálů se často užívají "holé" svislé závorky |...|, které však kolidují s absolutní hodnotou a rovněž se symbolikou Newtonovy-Leibnizovy formule u určitých integrálů, kde

$$F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a) .$$

Manipulované a komentované části (podvýrazy) je třeba z nezajímavého kontextu (v dané fázi úprav) vydělovat např. pomocí zatrhávání zdola či shora skobou nebo ohraničujícím (omezujícím) oválem. Např. v [BO-86] jsou chyby označovány marginálními ošipkovanými hvězdičkami. Nicméně nalezení místa chyby v rozsáhlejším schématu matematických značek není ani pak snadné a co je horší - je to unavující a odrazující. Všichni jsme se setkali se situací, kdy se dva sousední rozsáhlé výrazy lišily na jediném, dosti nenápadném místě.

Při živém, ústním projevu je ovšem navíc k dispozici časová dimenze, jejíž ztráta v tištěných textech často vede k podstatně ztíženému sledování výkladu. Cenná je též dosti podceňovaná barevná dimenze, jejíž grafická realizace není zatím nikterak běžná (i když je technicky možná).

C1K3. LINEARIZACE DATOVÝCH STRUKTUR

Linearizací rozumíme obecně transformaci složitější datové struktury na soubor, tj. na posloupnost objektů. Speciálně textové struktury se převádějí na řetězec. (Ideálním cílem linearizace je převod na řetězec složený pouze ze dvou znaků.) Tato silná vývojová tendence souvisí s převážně sériovým přístupem k chápání a řešení problémů. Proti ní směřuje strukturace.

Známý Lagrangeův výrok [Gin-86:304$^{1-5}$] z jeho Analytické mechaniky, že nepotřebuje obrázky ani geometrické konstrukce, ale vystačí pouze s algebraickými operacemi, lze pak interpretovat jako vyznávání linearizace a algoritmů.

A. LINEARIZACE OZNAČENÍ

Nejvýraznější strukturní charakteristikou textu je linearita jeho řádků. Linearizační tlak počítačové techniky a typografických požadavků např. vede k pokusům snášet složené relační znaky (např. neostré nerovnosti) do řádku: $\leq$ se mění na <= , $\geq$ na >= . Podobně soutisk $\neq$ se linearizuje na <> . Vodorovná zlomková čára se nahrazuje šikmou za cenu přidávání závorek, či úmluv o prioritě operací a o přednosti pořadí zleva doprava. To ovšem vede k nejasnostem. Zajímavé je např., že již čtyřznakový řetězec *a/bc* je různě chápán (jako (*a/b*)*c*, resp. jako *a*/(*bc*)) v závislosti na geografické a generační příslušnosti. Běžné je užívání víceznakových jmen (identifikátorů) proměnných, což je vyvoláno požadavky mnemotechniky, latinizací řeckých písmen a zaváděním digrafů a trigrafů pro názvy nových užitečných funkcí. Zde ovšem dochází ke kolizi s ekonomizující úmluvou o vynechávání tečky pro součin. Indexy se zapisují za proměnnou do (hranatých) závorek. Linearizují se operátory např. pro derivaci a integrál, což je běžné u tzv. symbolických manipulátorů. Projevem linearizace je též např. vkládání dodatků, poznámek a připomínek "lineárně" (průběžně) do textu (např. mezi Bombelliho prapůvodní závorky ⌊...⌉). Obzvlášť užitečné je to při řetězci úprav ve výpočtu. Dodatečné komentování narušuje časovou posloupnost a je nevhodné.

B. LINEÁRNÍ ZÁPIS LIMITY FUNKCE 1 REÁLNÉ PROMĚNNÉ

Linearizační tendence se samozřejmě projevovala i v předpočítačové éře. Např. (srov. [Ale-78:104; Sč29-85:5$_1$]) P. L. Dirichlet zavedl r. 1873 označení $f(b+0)$, $f(b-0)$ pro jednostranné limity funkce f v bodě b. Dnes se symbol 0 vynechává. Doplníme nyní tuto symboliku do uceleného systému [Vi52-91]. Při jeho prezentaci uplatníme úsporný zápis variantních formulací pomocí závorkovaných množinových výčtů a patrových zápisů v kombinaci s předsazováním nadřazených pojmů. (Někdy jsou vhodné jejich tabulkové přepisy.) Užijeme tak vlastně cobolovský zápis základní datové struktury, jíž je záznam se stromovým uspořádáním položek. Textové položky mají charakter lineárních řetězců.

Pro náš účel zavedeme přirozenou symboliku pro blížení reálné proměnné p k číslu $c \in \mathbf{R}$:

$p \to c$ bez nabývání c	,	$p \to c$ s nabýváním c
oboustranně $c*$	,	$c*0$
shora (zprava) $c+$	,	$c+0$
zdola (zleva) $c-$	,	$c-0$

Pro "blížení" konstantní "proměnné" $p=c$ lze užít označení $c=$.

Dále připojíme symbol ∞ pro nekonečně velkou veličinu (vzdalování od počátku). Ta může být realizována jedním ze tří disjunktních způsobů: kladně, záporně, "rozskakováním". Takže

$$\infty := \{+\infty, -\infty, *\infty\} = \lceil\text{výrazněji}\rfloor = \{+\infty\} \sqcup \{-\infty\} \sqcup \{*\infty\} .$$

Pro rozlišování způsobu blížení či vzdalování používáme tedy trojici přídatných znaků { +; -; * } , které se uplatňují jako předpony či přípony. Při blížení k $c \in \mathbf{R}$ ještě rozlišujeme (např. pro limitu složené funkce) nabývání a nenabývání cílové hodnoty c přidáváním další přípony 0 .

Pomocí této symboliky lze např. zapsat přehled o limitách funkcí jedné proměnné. Je-li $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, b, $L \in \mathbf{R}$, pak zápis

$$f\left(\left\{\begin{matrix}\{b*,\ b+,\ b-\ \} \\ \{*\infty,\ +\infty,\ -\infty\}\end{matrix}\right\}\right) = \left\{\begin{matrix}\{L*,\ L+,\ L-,\ L*0,\ L+0,\ L-0,\ L=\ \} \\ \{*\infty,\ +\infty,\ -\infty\}\end{matrix}\right\}$$

představuje $6 \times 10 = 60$ situací pro limitu. O některých z nich se pojednává na desítkách stránek učebnic. Zároveň máme klasifikaci

$$\left\{\begin{matrix}\text{(vlastní)} \\ \text{nevlastní}\end{matrix}\right\} \text{ limita ve } \left\{\begin{matrix}\text{(vlastním)} \\ \text{nevlastním}\end{matrix}\right\} \text{ bodě}$$

Souvislosti přídatných znaků { +; -; * } (předpon a přípon) jsou dány převrácenou funkcí $y = 1/v$, která je přemisťuje:

	obecně		kladně		záporně		dvoustr.	
v->	0	∞	0+	$+\infty$	0-	$-\infty$	0*	$*\infty$
1/v->	∞	0	$+\infty$	0+	$-\infty$	0-	$*\infty$	0*

Píšeme např.

$$\frac{1}{0} = \infty , \quad \frac{1}{0-} = -\infty$$

Zavedení hvězdičkového nekonečna je dostatečně zdůvodněno vztahy $0^* = 1/{*\infty}$, ${*\infty} = 1/0^*$, takže jde o převrácení oboustranného blížení k nule. Vidíme, že převrácená funkce přemisťuje přípony jako předpony a naopak.

Uvedená linearizace náleží k nejúspornějším předponově-příponovým složeným symbolikám pro limitu. Dovoluje značně zestručnit a snad i zprůhlednit mnohé souvislosti. Např. vztah mezi oboustrannou a jednostrannými limitami funkce f v bodě b lze zapsat

$$f(b^*) = L \quad \Leftrightarrow \quad f(b-) = f(b+) = L .$$

Vztah mezi aritmetickou operací $\hat{o}$ a limitou pak vypadá

$$(f\hat{o}g)(b^*) = f(b^*)\ \hat{o}\ g(b^*) ,$$ mají-li všechny výrazy smysl.

Spojitost funkce f v bodě b je definována pomocí limity řádkem

$$f(b^*) = f(b) .$$

Přechod limity za spojitou funkci f je zestručněn symbolicky na

$$(f\circ g)(b^*) = f(g(b^*)) ,$$ kde $\circ$ označuje skládání funkcí.

C. GENEROVÁNÍ VARIACÍ S OPAKOVÁNÍM

Soubor kombinatorických objektů daného typu (např. podmnožin dané množiny nebo číselných k-tic) lze uvažovat obecně bez specifikace jejich uspořádání. Avšak při manipulaci s nimi vzniká potřeba je nějakým způsobem materializovat, např. zapsat pomocí vhodných symbolů, a uspořádat. Prakticky se snažíme kombinatorické objekty reprezentované řetězci v určitém systému symbolů (bývají to celá čísla, či písmena) uspořádat do posloupnosti. Z hlediska algoritmického pak jde o generování kombinatorických objektů ve vhodném pořadí. Především je záhodno - pro snížení pracnosti generování, aby se sousední řetězce co nejméně lišily. Dále je třeba brát v úvahu, že kombinatorické objekty jsou zpravidla určeny k dalšímu zpracování, např. k "oceňování" kritérii formulovanými ve složkách jejich zápisu. Pak bývá výhodné hodnocení nového objektu stanovit z hodnocení předchozího objektu korekcí odpovídající změnám složek. Těmto požadavkům vyhovují rekurentní algoritmy, které produkují tzv. pořadí minimálních změn, v nichž jsou nejmenší možné změny mezi sousedními objekty. Výstupem pak jsou nejen kombinatorické objekty, ale i lokalizace a typ změny. Tyto diferenční informace slouží pro další výpočet.

1. Hodnocení a zápis generovaného pořadí

Při posuzování změn v sousedních k-ticích jsou možná různá hlediska. Jsou-li složky (celo)číselné, můžeme použít např. oktaedrickou metriku pro celočíselné k-tice $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_k) \in Z^k$, kde Z je množina všech celých čísel. Jsou-li $\mathbf{c}$, $\mathbf{d} \in Z^k$, pak

$$v(\mathbf{c},\mathbf{d}) := \sum_{i=1}^{k} |c_i - d_i| . \qquad (1)$$

Tato metrika může být různě vahována. Krajním případem je tzv. Hammingova vzdálenost

$$h(\mathbf{c},\mathbf{d}) := \sum_{i=1}^{k} \mathrm{sgn}|c_i - d_i| , \qquad (2)$$

kde se zjišťuje pouze počet rozdílných souřadnic.

U nečíselných (nebo nečíselně chápaných) složek můžeme sledovat popř. počet změn. V uspořádaných objektech se evidují transpoziční nebo obecně permutační změny. V úvahu přicházejí ovšem i různé jiné přístupy, např. kombinace uváděných postupů, tj. číselněpermutační kritéria.

Vedle změn lokálních při jednotlivých přechodech v posloupnosti je třeba rozlišovat změny globální, tj. akumulované podél zvoleného pořadí generovaných objektů. V přehledu pak máme

$$\left\{\begin{array}{c} \text{číselněpermutační} \\ \text{číselné} \\ \text{permutační} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} \text{lokální} \\ \\ \text{globální} \end{array}\right\} \text{kritérium}$$

Při výstupu generovaného pořadí bývá ještě záhodno komprimovat jeho zápis podle tzv. diferenčního principu. Podle něj ponecháme pouze místo změny a její charakteristiku vzhledem k předchozímu objektu. Tím se dále redukuje informační šeď a zvýrazní se struktura výstupní posloupnosti objektů. Tento problém pro celočíselné posloupnosti a množiny je diskutován v článku B.

Fortranský program pro generování charakteristických funkcí podmnožin v pořadí minimálních změn (tzv. Grayův kód) je uveden v [NW-75:11-7]. V článku [Vi13-78:43-8] je tento algoritmus použit na generování variací s opakováním. Generování Grayova kódu je též v [KS-86:134-5].

2. Ukládací funkce

Reálná k-indexová matice M stupně n (stručně n^k-matice) je dána zobrazením (indexujeme od nuly)

$$\mathrm{M}: \ \mathbf{N}_n^{\,k} := \{0,1,\ldots,n-1\}^k \ \rightarrow \ \mathbf{R}^{n^k}, \tag{3}$$

přičemž n^k-matici si obvykle představujeme jako (nad)krychlové schéma (krabice) n^k reálných čísel.

Každé místo v n^k-matici je dáno k-ticí čísel, tj. multiindexem $\mathbf{i} \in \{0,1,\ldots,n-1\}^k = \mathbf{N}_n{}^k$. Geometricky $\mathbf{N}_n{}^k$ představuje (nad)krychlovou síť n^k bodů v k-rozměrném prostoru. Tuto množinu lze rovněž interpretovat jako množinu $W(n,k)$ všech variací k-té třídy z n-prvků s opakováním.

Lineární uspořádání n^k prvků lze provést $(n^k)!$ způsoby, což je velmi rychle rostoucí funkce s proměnnými n,k. Podstatně rozdílných (redukce na symetrii) je ovšem méně, ale přesto jde pro větší n,k o značný počet. Prakticky se omezujeme na "rozumná" (tj. přehledná a dobře generovatelná) pořadí.

Zobrazení převádějící n^k-matici na n^k-prvkovou posloupnost (vektor o n^k souřadnicích) se v programování nazývá ukládací funkce. Nejběžnější z nich je ukládání "po řádcích" (ve Fortranu po sloupcích), kdy se řádky ve "čtvercových" řezech matice $[a_{\mathbf{i}}]$ řadí postupně lineárně za sebe. Tedy multiindex $\mathbf{i} = (i_1,\ldots,i_k)$ se převádí na obyčejný index zobrazením

$$\mathrm{Z}: \ \mathbf{N}_n^{\,k} = \{0,1,\ldots,n-1\}^k \ \rightarrow \ \mathbf{N}_{n^k} = \{0,1,\ldots,n^k-1\}, \tag{4}$$

kde Z je realizováno vztahem

$$\mathbf{i} = (i_1,i_2,\ldots,i_k) \rightarrow i_1 n^{k-1} + i_2 n^{k-2} + \ldots + i_{k-1} n + i_k =$$

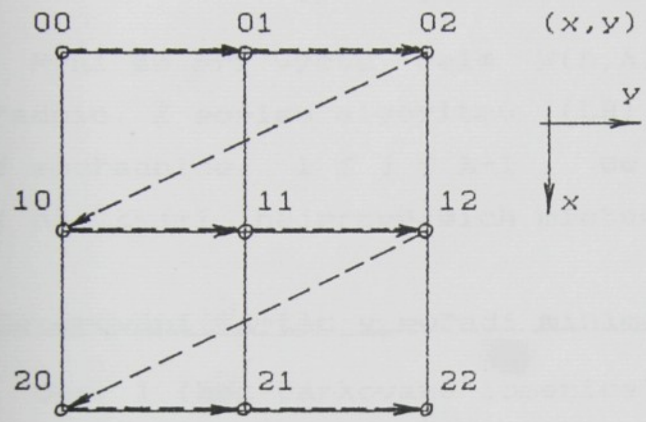
$$= \sum_{i=1}^{k} i_i n^{k-i} \qquad \lceil\text{sestupně}\rfloor \tag{5}$$

$$= (\ldots((i_1 n + i_2)n + i_3 n)\ldots + i_{k-1})n + i_k \qquad \lceil\text{hornerovsky}\rfloor$$

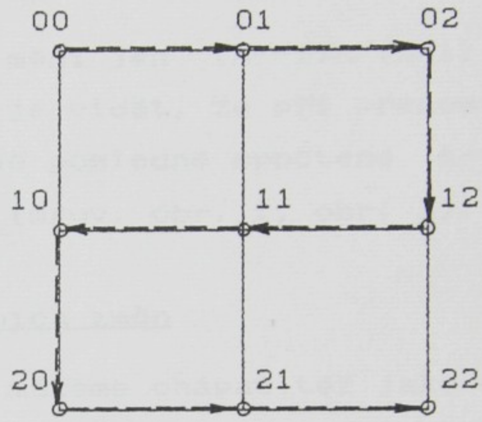
Pro 2-indexovou matici (tj. obyčejnou čtvercovou) stupně n je zobrazení dáno jednoduchým vztahem

$$(i_1, i_2) \;\to\; i_1 n + i_2 \,. \tag{6}$$

Pořadí, v němž jsou očíslovány indexové dvojice při řádkovém (též lexikografickém) uspořádání, je pro (3x3)-matici zakresleno čárkovaně na připojeném obr. 1. V něm jsou trojice zapsány zjednodušeně: bez závorek a bez oddělovacích čárek mezi souřadnicemi.



Obr. 1. Řádkové uspořádání



Obr. 2. Meandrové uspořádání

3. Lexikografické generování k-tic

Při generování k-tic v lexikografickém pořadí je ve skutečnosti třeba realizovat inverzní funkci k řádkově ukládací funkci (5): zajímá nás totiž přiřazení k-tic k přirozeným číslům, t.j. zobrazení

$$L: \mathbf{N}_{n^k} \to \mathbf{N}_n{}^k \,, \qquad \text{prvkově:} \quad L(p) = \mathbf{i} \,. \tag{7}$$

Zobrazení L přirozených čísel p z úvodního úseku $\{0,1,..,n^k-1\}$ množiny $\mathbf{N}$ na pozice $\mathbf{i} \in \mathbf{N}_n{}^k$ k-indexové matice stupně n je dáno algoritmem, který zapíšeme à la algol:

$q := p;$ (L)

for $t = k, k-1, \ldots, 2, 1;$

do $i_t := \mathrm{mod}(q,n);\;\; q := q \div n;$

Zde funkce $\mathrm{mod}(c,n)$ udává zbytek při dělení čísla $c \in \mathbf{N}_0$ číslem $n \in \mathbf{N}$, znak $\div$ označuje celočíselný podíl. Připomeňme, že

$$\mathrm{mod}(c,n) = c - (c \div n)n \quad \text{pro} \quad c \in \mathbf{N}_0 \,,\; n \in \mathbf{N} \,. \tag{8}$$

Při tomto způsobu výčtu všech n^k prvků množiny $W(n,k)$ se pracuje s kn^k souřadnicemi.

Uvedený explicitní algoritmus přiřazuje ke každému $p \in \mathbf{N}_{n^k}$

přímo příslušnou pozici i. Ekonomičtější při generování posloupnosti je <u>rekurentní</u> algoritmus. Vyjdeme z k-tice 00...0 a pak vždy z dané pozice získáme následující přičtením jedničky. Tedy,

$$\begin{aligned} &\text{máme-li } Z(p-1) = i_1 \ldots i_{u-1} i_u \ldots i_k, \quad p \geq 1, && \text{(LR)} \\ &\text{pak } Z(p) = i_1 \ldots i_{u-1} i'_u \ldots i_k, \quad \text{kde} \\ &u = \max\{s \;;\; 1 \leq s \leq k \;;\; i_s <> n-1\}, \\ &i'_u = i_u + 1, \quad i_t = 0 \text{ pro } t > u. \end{aligned}$$

Nyní se při výčtu celé $W(n,k)$ mění jen $(n^k-1)n/(n-1) - k$ souřadnic. Z popisu algoritmu (LR) je vidět, že při přenosu do j-té souřadnice, $1 \leq j \leq k-1$, se dvě posledně spočtené k-tice liší na $k-j+1$ nejpravějších místech (srov. obr. 1, obr. 3).

<u>4. Generování k-tic v pořadí minimálních změn</u>

Obr. 1 (bez čárkované lomenice) můžeme chápat též jako geometrické znázornění grafu: k-tice jsou znázorněny uzly (jak je označeno na obrázku), které jsou spojeny hranou (úsečkou), právě když se příslušné k-tice liší v jediné souřadnici. Obecně interpretujeme k-tice jako body v k-rozměrném prostoru. Množina k-tic $W(n,k)$ pak vytvoří prostorovou mříž v k-rozměrné krychli s hranou o velikosti $n - 1$. Najít pořadí minimálních změn (zde jednotkových) znamená sestrojit v grafu hamiltonovskou cestu, tj. cestu, která prochází každým uzlem právě jednou. To lze provést mnoha způsoby. Na obr. 2 je čárkovaně zakreslena hamiltonovská cesta, která meandrově sleduje řádky.

Příslušné generování k-tic (v pořadí minimálních změn) realizuje <u>rekurentní</u> algoritmus (pro obecné $k \in \mathbf{N}$). Položíme $H(0) = 00\ldots0$ a pro $1 \leq p \leq n^k-1$ pokračujeme následovně:

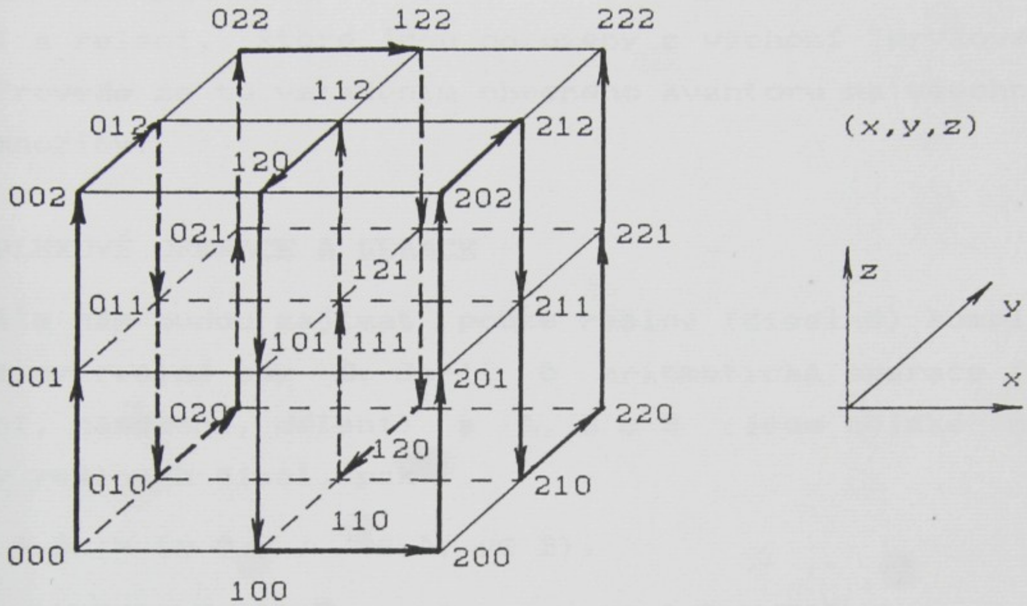
$$\begin{aligned} &\text{máme-li } H(p-1) = i_1 \ldots i_u \ldots i_k, && \text{(M)} \\ &\text{pak } H(p) = i_1 \ldots i'_u \ldots i_k, \\ &\text{kde } u = k+1-v, \quad v = \max\{s;\ 1 \leq s \leq k,\ \mathrm{mod}(p,\ n^{s-1}) = 0\}, \\ &i'_u = i_u + (-1)^e, \quad e = p \div n^v \end{aligned}$$

<u>**Věta:**</u> Algoritmus (M) realizuje prosté hamiltonovské zobrazení posloupnosti $0,1,\ldots,n^k-1$ na $W(n,k)$.

<u>Důkaz</u> lze provést "protažením" hran v důkazu [NW-76:13$^4_{15}$]. ⊔⊔

Uvedený postup zpracovává při generování celé množiny $W(n,k)$ pouze $n^k - 1$ souřadnic. Výsledná meandrová hamiltonovská cesta je pro větší názornost nakreslena ještě pro W(3,3) na obr. 3.

Popsaného zobrazení bylo použito v podprogramu DALVAR ve [Vi13-78:45]. Algoritmus byl však upraven s využitím prostředků, které poskytuje jazyk Fortran.



Obr. 3. Meandrové pořadí pro W(3,3)

5. Aplikace a modifikace

Variace druhé třídy z n prvků můžeme interpretovat jako charakteristické funkce podmnožin n-prvkové množiny. V tomto smyslu generuje navržený algoritmus při $k = 2$ všechny podmnožiny dané n-prvkové množiny - srov. [NW-75:11-20]. Toho lze např. použít při generování všech hranových podgrafů jednoduchého grafu (bez násobných hran) s n hranami.

Tématika souvisí s počítačovými algoritmy pro multiindexové matice [Vi39-88]. Výsledky mohou najít uplatnění při linearizaci těchto matic s využitím jejich specifické struktury. Vzhledem k velkým nárokům vícerozměrných matic na paměť počítače je totiž nutné využít všech prostředků k jejich redukci.

Uvedený algoritmus je možno také bezprostředně aplikovat v teorii vazeb tkanin při vyhodnocování všech střídů $n \times n$, které tvoří množinu $W(n,n)$.

Algoritmus lze zobecnit i pro případ, kde na i-tém místě k-tice je n_i možností, $i=1,..,k$. Tento obecný případ můžeme využít např. při generování hranových podgrafů multigrafu, který má na místě i-té hrany přípustno nejvýše n_i-1 rovnoběžných hran.

C1K4. KOMPLEXY A FUNKCE

Ve shodě s [Ber-74:62] nazýváme komplexem neprázdnou podmnožinu nosiče algebraické struktury vybavené nějakými operacemi a relacemi. Tyto "prvkové" operace a relace indukují "komplexové". Komplexy pak vstupují jako celky do těchto nových globálních operací a relací, které jsou odvozeny z výchozí "prvkové" struktury. Provede se to vztažením obecného kvantoru na všechny účastné podmnožiny.

A. KOMPLEXOVÉ OPERACE A RELACE

Dále nás budou zajímat pouze reálné (číselné) komplexy, tj. podmnožiny reálné osy $\mathbf{R}$. Je-li θ aritmetická operace (sčítání, odčítání, násobení, dělení) a $A, B \subset \mathbf{R}$ jsou nějaké neprázdné množiny reálných čísel, pak

$$A \theta B := \{x \theta y \; ; \; x \in A, \; y \in B\},$$

tj. pro každou dvojici prvků $(x,y) \in A \times B \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ provedeme příslušnou operaci θ a vytvoříme tak výslednou množinu. Předpokládáme ovšem, že všechny vyskytnuvší se prvkové operace mají smysl. Správně by se sice měla rozlišit označením původní prvková a z ní nově definovaná komplexová operace - běžně se to však nedělá v přesvědčení, že nemůže dojít k větším nesnázím.

Je-li aspoň jedna z množin A, B jednoprvková, např. $A = \{c\}$, můžeme ji ztotožnit s konstantou c a psát

$$c \theta B := \{c \theta y \; ; \; y \in B\} \; .$$

Speciálně $c + A$ znamená translaci množiny A o konstantu c, cA představuje homotetii s konstantou c.

Jako speciální případ právě uvedeného nebo jako komplexové rozšíření jednomístných aritmetických operací můžeme chápat opačný a inverzní komplex

$$-A := \{-x; \; x \in A\}$$

$$A^{-1} = 1/A := \{1/x; \; x \in A\}, \quad 0 \notin A$$

Užitečná je též absolutní hodnota komplexu daná vztahem

$$|A| := \{|x|; \; x \in A\}.$$

Při standardním označení význačných číselných množin můžeme hned stručně zapsat některé jejich historické vztahy a vlastnosti:

$N_0 . N_0 = N_0 + N_0 = N_0$, $N.N = N$, $N + N = N\setminus\{1\} = 1 + N$,

$N - N = Z$, ⌈odčítáním vznikla celá čísla⌋

$Z.Z = Z + Z = Z - Z = -Z = Z$,

$N/N = Q^+$, $-N/N = Q^-$, $Z/N = Q$, ⌈dělením vznikla rac. čísla⌋

$Q.Q = Q + Q = Q - Q = -Q = Q.Z = Q.N = Q$, $-Q^+ = Q^-$,

$R^+ . R^+ = R^- . R^- = R^+$, $R^+ . R^- = R^- . R^+ = R^-$

⌈komplexová podoba znaménkového pravidla⌋

$|Z| = Z^+{}_0 = N_0$, $|Q| = Q^+{}_0$, $|R| = R^+{}_0$, atd. atd.

Ve středoškolských textech se sporadicky (ve Francii dosti důsledně) vyskytují (někdy bez vysvětlení jako samozřejmé) komplexy sudých resp. lichých čísel - např. rozklad množiny Z celých sudých čísel na sudá a lichá čísla:

$Z = (2Z) \sqcup (2Z+1)$ ⌈$\sqcup$ označuje disjunktní sjednocení⌋

Operace se zbytkovými třídami jsou ovšem komplexové a obecně třídy ekvivalence (souhlasné s nějakou operací) jsou speciálním případem komplexů.

Termín komplex je uveden v [Ber-74:62] v souvislosti s podmnožinami nosiče G grupy. Např. fakt, že podmnožina $M \subset G$ aditivně zapsané grupy $\langle G; +\rangle$ je uzavřená vůči operaci + se vyjádří komplexově krátce vztahem

$M + M \subset M$.

Množina M je podgrupou grupy $\langle G; +\rangle$, právě když

$M - M \subset M$.

V algebře se komplexy vyskytují celkem běžně. Důsledně se užívají např. v sympatické knize [Pon-77]. Užitečné jsou v teorii vektorových prostorů, včetně topologických.

Zcela přirozeně vystupují komplexy v roli řezů v Dedekindově teorii reálných čísel [Jdl-63].

Užitečná je též komplexová nerovnost pro $A, B \subset R$

$A < B := \forall (x,y) \in A\times B$ platí $x < y$.

Při znázornění množin $A < B$ na vodorovné ose leží celá množina A vlevo od množiny B . Jde-li o svislou osu, leží celá A pod B . Podobně zavedeme neostrou a obrácené nerovnosti. Opět místo $\{c\} < B$ píšeme jednoduše $c < B$:

$c < B := \forall y \in B$ platí $c < y$.

Pak můžeme např. hned psát pro množinu $M \subset \mathbf{R}$ ohraničenou čísly d, h

$$d \le M \le h, \qquad \text{speciálně} \qquad \inf M \le M \le \sup M.$$

Např. platí $0 < 1/\mathbf{N} \le 1$.

B. ROZŠÍŘENÍ $\mathbf{R}$ NA $\overline{\mathbf{R}}$

Pro úspornější a jednotnější vyjadřování je vhodné k $\mathbf{R}$ připojit dva symboly: $-\infty$, $+\infty$ zvané minus nekonečno a plus nekonečno. Vzniklá množina se značí $\overline{\mathbf{R}}$ (čteme: "R s pruhem"):

$$\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \sqcup \{-\infty; +\infty\}; \qquad \overline{\mathbf{R}}^- := \mathbf{R}^- \sqcup \{-\infty\}; \qquad \overline{\mathbf{R}}^+ := \mathbf{R}^+ \sqcup \{+\infty\}$$

a nazývá se rozšířenou množinou reálných čísel či číselnou osou. Představujeme-li si pod nekonečnem proces "jíti do nekonečna" (příslušným směrem), pak se nové tzv. nevlastní (= nekonečné) prvky (body) $-\infty$, $+\infty$ kombinují s vlastními (= konečnými) čísly z $\mathbf{R}$ a navzájem zcela přirozeně. Užití komplexů dovoluje vše zestručnit a snad i usnadnit. (Dvojznaménka $\pm$ v následujícím přehledu čteme výjimečně patrově !) **D**

(NN) $-\infty < \mathbf{R} < +\infty$; takže $\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{R}}^- \sqcup \{0\} \sqcup \overline{\mathbf{R}}^+$

(NA) $(\overline{\mathbf{R}} \setminus \{-\infty\}) \pm \{\pm\infty\} := +\infty$

$(\overline{\mathbf{R}} \setminus \{+\infty\}) \pm \{\mp\infty\} := -\infty$

Nekonečno tudíž pohlcuje všechny sčítance (především konečné) s výjimkou nekonečna s opačným znaménkem. Pro nekonečna tedy klademe:

součet stejnoznaménkových nekonečen $(\pm\infty) + (\pm\infty) := \pm\infty$

rozdíl různo $(\pm\infty) - (\mp\infty) := \pm\infty$

(NP) $\overline{\mathbf{R}}^+ . (\pm\infty) = (\pm\infty) . \overline{\mathbf{R}}^+ := \pm\infty$ obvyklá znaménková pravidla

$\overline{\mathbf{R}}^- . (\pm\infty) = (\pm\infty) . \overline{\mathbf{R}}^- := \mp\infty$ zůstávají v platnosti

Speciálně: součin nekonečen je opět nekonečno, jehož znaménko je dáno znaménkovým pravidlem.

(ND) $\mathbf{R}/(\pm\infty) := \{0\}$

(NH) $|\pm\infty| := +\infty$

Zbývající případy nazýváme často též neurčité výrazy, neboť není předem jasné, který z konkurenčních procesů je rychlejší. Výsledek nepřiřazujeme pro součet různoznaménkových nekonečen $(\pm\infty) + (\mp\infty)$

rozdíl stejno $(\pm\infty) - (\pm\infty)$

součin $0.(\pm\infty)$ [zde 0 představuje obecně "jíti k nule"]

podíl nekonečen $(\pm\infty)/(\pm\infty)$ [čteme každé s každým]

Pro porovnání ještě rozepišme např. (ND) pomocí kvantoru všeobecnosti:

$(\widetilde{\mathrm{ND}})$ $c/(\pm\infty) := \{0\}$ pro libovolné $c \in \mathbf{R}$.

C. VÝZNAMNÉ KOMPLEXY V R

Nejčastěji se pracuje s komplexy, jež mají speciální vlastnosti. Na ně se snažíme složitější případy převést.

Dvojznaménkový zápis $\pm c$, $c \in \mathbf{R}$, je často vhodné chápat jako dvouprvkový komplex: $\pm c := \{-c;\ +c\}$. Ten je symetrický vůči počátku. Snadno ověříme, že např.

$-(\pm c) = (\pm c)$; $1/(\pm c) = \pm 1/c$; $(\pm c)^2 = c^2$;

dále pro $c,\ d \in \mathbf{R}$

$(\pm c) \pm (\pm d) = \{\pm(c+d),\ \pm(c-d)\}$; např. $(\pm 3) \pm (\pm 2) = \{\pm 5, \pm 1\}$

$.\quad = (\pm cd)$ $\qquad .\quad = (\pm 6)$

$/\quad = (\pm c/d)$; $d<>0$ $\qquad /\quad = (\pm 3/2)$

Dvouznaménkový zápis dvouprvkového komplexu se vyskytuje např. též v nerovnosti platné pro absolutní hodnotu čísel $c \in \mathbf{R}$

$\pm c \le |c|$ znamená: $\{-c, +c\} \le |c|$

Nejběžnější číselné komplexy jsou intervaly, které často vstupují jako celek do zobrazení a relací. Např. v [Mg2-78: 150-4] se počítá s intervaly v souvislosti s aproximacemi čísel. V [Hru-49] se pracuje s otevřenými intervaly pod názvem neúplná čísla a vedle aritmetických operací se na ně aplikují funkce jedné i více proměnných. Značné úsilí bylo vynaloženo na počítačovou implementaci tzv. intervalové aritmetiky s různými praktickými výsledky [Mik-79:157; Nic-77].

D. VLASTNOSTI FUNKCÍ

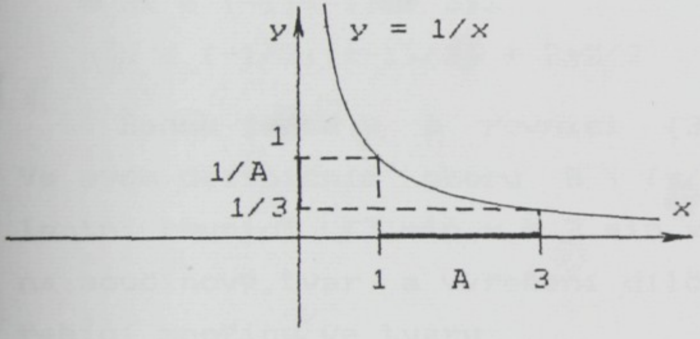
Operace s komplexy přirozeně souhlasí s množinovým rozšířením funkce, kdy namísto prvkových vzorů a obrazů připouštíme množinové přiřazování. Např. funkci $f\colon X \to Y$ uplatňujeme na podmnožiny $A \subset X$, k nimž přiřazujeme množinové obrazy $f(A) \subset Y$:

$$f(A) := \{f(x);\ x \in A\}.$$

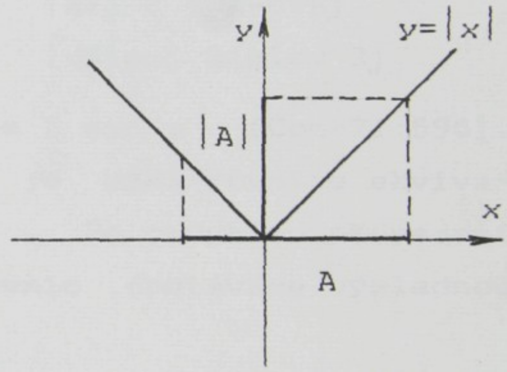
Přechod od bodového pojetí funkce (jako souboru relativně izolovaných bodů $[x, f(x)]$) k množinovému odpovídá globálnímu chápání funkce (jako grafu).

Podobně, chápeme-li např. binární prvkovou aritmetickou operaci θ jako funkci dvou proměnných, tj. $\theta : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, lze ji rozšířit na systém všech uspořádaných dvojic (A,B) podmnožin $A,B \subset \mathbf{R}$. Výsledek $A \theta B$ komplexové operace θ lze pak interpretovat jako zobrazení dvojice (A,B) množinovou aritmetickou operací θ: $(A,B) \mapsto A \theta B$.

Můžeme tedy zpětně chápat např. komplex $1/A$ jako obraz množiny $A \subset \mathbf{R}^*$ funkcí $1/x$; komplex $|A|$ vznikne z A zobrazením funkcí $|x|$. Tyto dva případy jsou ilustrovány na obrázcích 1, 2. Analogicky si lze počínat pro dvouoperandové operace.



Obr. 1.



Obr. 2.

Nově můžeme např. zavést A^n, $n \in \mathbf{N}$, jako aplikaci funkce x^n. Dáváme-li důsledně přednost funkčnímu rozšíření funkcí, vznikají určité nesnáze s označením. Např. obecně $A.A \supset A^2$, kde vlevo se násobí každý s každým a vpravo se pouze umocňuje každý jednotlivý prvek. Podobně $A + A \supset 2A$. Je tedy třeba rozlišovat tyto situace v označení (včetně kartézského součinu!).

Užitečná je interpretace množinových aritmetických operací jako "série" operací množiny s jednoprvkovou množinou. Speciálně jsou významné lineární transformace komplexů, zapisované výrazy typu

$$c + bK := \{c + bx;\ x \in K\},\quad \text{kde } b, c \in \mathbf{R},\ K \subset \mathbf{R}$$

Komplex $c + bK$ vznikne z daného komplexu $K \subset \mathbf{R}$ jeho dilatací (homotetie) s koeficientem b a následnou translací o konstantu c. Tím je zdůrazněna struktura vzniklé množiny a její vztah k množině výchozí.

Získali jsme tak možnost interpretovat aritmetické operace s komplexy jako systém homotetií a translací. Je-li $A, B \subset \mathbb{R}$, pak

$$A.B = \bigcup_{a \in A} aB = \bigcup_{b \in B} Ab \qquad \lceil\text{sjednocení homotetií}\rfloor$$

$$A+B = \bigcup_{a \in A} (a+B) = \bigcup_{b \in B} (A+b) \qquad \lceil\text{sjednocení translací}\rfloor$$

a celkem při $B, C, K \subset \mathbb{R}$

$$C + B.K = \bigcup_{c \in C} (c + \bigcup_{b \in B} bK)$$

Předveďme aplikaci lineárních komplexových operací při řešení nerovnice s vnitřní lineární složkou:

$$\sin(3x+1) > 0 \qquad \lceil\text{užijeme vlastností funkce sin}\rfloor$$

$$3x+1 \in (0;\pi) + 2\pi\mathbb{Z} \qquad \lceil\text{převedeme 1 napravo}\rfloor$$

$$3x \in (-1;\pi-1) + 2\pi\mathbb{Z} \qquad \lceil A+B-c = A-c+B\rfloor$$

$$x \in (-1/3;(\pi-1)/3) + 2\pi\mathbb{Z}/3 \qquad \lceil\text{dělení číslem 3}\rfloor$$

Řešme ještě v $\mathbb{R}$ rovnici $\sqrt{3}.\mathrm{tg}\, x = 2 \sin x$ [Con-71:596]. Ve svém definičním oboru $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2+\pi\mathbb{Z}\}$ je daná rovnice ekvivalentní rovnici $\sqrt{3}.\sin x = 2 \sin x \cos x$. Po obvyklém převedení na součinový tvar a vyřešení dílčích rovnic dostáváme výslednou řešící množinu ve tvaru

$$\pi\mathbb{Z} \cup \{\pi/6 + 2\pi\mathbb{Z}\} \cup \{-\pi/6 + 2\pi\mathbb{Z}\} = \pi\mathbb{Z} \cup (\pm\pi/6 + 2\pi\mathbb{Z}),$$

kde jsme na závěr zjednodušili zápis užitím dvouprvkového komplexu $\pm\pi/6$. Pro porovnání je vhodné použít v obou uvedených příkladech obvyklý zápis.

Definiční obory funkce bývá výhodné zapsat komplexově:

$$D(\mathrm{tg}) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\pi/2 + k\pi,\ \pi/2 + k\pi) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2;\ k \in \mathbb{Z}\} =$$
$$= \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1)\pi/2,$$

$$D(\mathrm{cotg}) = \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$$

Ohraničená funkce f definovaná na M je charakterizovaná existencí konstant $d, h \in \mathbb{R}$, že $d \le f(M) \le h$. To je ekvivalentní existenci konstanty $c \in \mathbb{R}_0^+$, že $|f(M)| \le c$.

Vlastnosti symetrie (parita: lichost, sudost) předpokládají symetrii definičního oboru D: $D = -D$. Pak pro liché, resp. sudé funkce platí

$l(M) = -l(-M)$, $s(M) = s(-M)$, kde $M \cup (-M) \subset D(f)$.

Pro periodickou funkci f s periodou p platí

$$f(x + p\mathbb{Z}) = f(x), \quad x \in D(f).$$

Např. $\sin(x+2\pi\mathbb{Z}) = \sin x$, $x \in D(f)$. Zde nalevo je množinová funkce, napravo bodová.

Připomeňme nyní, že okolím $U(b)$ bodu $b \in \mathbf{R}$ rozumíme libovolný symetrický otevřený interval $(b-\delta, b+\delta)$, $\delta>0$, centrovaný do bodu b. Prokláté (= prstencové = redukované = ryzí) okolí $\mathring{U}(b)$ bodu b vylučuje střed b:

$$\mathring{U}(b) := U(b) \setminus \{b\}$$

a lze je rozložit na levé a pravé okolí:

$$\mathring{U}(b) := \mathring{U}_-(b) \sqcup \mathring{U}_+(b), \quad \text{kde} \quad \mathring{U}_-(b) < b < \mathring{U}_+(b),$$

takže $\mathring{U}_-(b) = (b-\delta, b)$, $\mathring{U}_+(b) = (b, b+\delta)$. Uvedené pojmy a symbolika se užívají při formulaci spojitosti a limity funkcí (s využitím jejich množinového rozšíření). My je použijeme i v méně obvyklých situacích.

Funkce f (ostře) rostoucí v bodě b [Jd1-63:239] je charakterizována existencí proklátého okolí $\mathring{U}(b)$ bodu b, že

$$f(\mathring{U}_-(b)) < f(b) < f(\mathring{U}_+(b)).$$

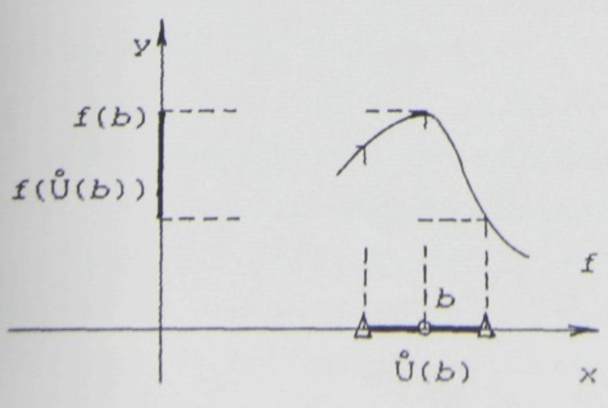
Funkce f má v bodě b ostré lokální maximum [Jd1-63:253; Mg7-80:53], existuje-li okolí $\mathring{U}(b) \subset D(f)$, že

$$f(\mathring{U}(b)) < f(b).$$

Funkce f má na množině $M \subset D(f)$ globální maximum v bodě $b \in M$, platí-li

$$f(M) \leq f(b).$$

Vše má velmi názorný geometrický význam, jak připomíná připojená miniatura lokálního maxima na obr. 3.



Obr. 3.

Např. pro množinu $M = \pi/2 + 2\pi Z$ platí

$$\sin M \geq \sin R ,$$

a tedy funkce sin má v množině M globální extrémy. Množina M vznikne z množiny Z roztažením s koeficientem 2π a následným posunem o $\pi/2$.

Zřejmou výhodou komplexových zápisů je úspora kvantorů všeobecnosti, čímž se přinejmenším zpřehlední a zjednoduší zápis. Rovněž se podpoří globalizace pojmů, často se zvýrazní jádro a struktura výsledku, což usnadňuje jeho interpretaci (např. geometrickou).

Ve středoškolských učebnicích a v učebnicích analýzy se komplexy objevují občas při různých příležitostech. Cílem bylo některé zmínky a náznaky soustředit, uspořádat, a ukázat tak výhodnost systematičtější aplikace komplexů.

Byly naznačeny některé možnosti použití komplexů ve středoškolské matematice a v základech analýzy. I když vznikají určité nové problémy, stojí jejich důslednější uplatnění za úvahu, námahu a pokus.

 -201-

Část II. Funkce po částech lineární

V souvislosti s vývojem učebních programů vyvstává často potřeba rozpracovat teorii a algoritmy pro příslušné téma. V učebních a konzultačních programech užívajících sjednocení jednoduchých elementárních funkcí se dobře uplatňují zejména funkce po částech polynomické. "Geometrická" linie vytváření jednoduchých funkcí má ovšem samostatný význam a má své místo např. v didaktice matematiky a informatiky na přechodu mezi střední a vysokou školou. Svébytná jsou i dílčí témata. V dalším se omezujeme na reálné funkce jedné reálné proměnné.

Zabýváme se funkcemi po částech lineárními, které jsou produkovány např. výrazy typu

$W(x) + c.\mathrm{sgn}\, h(x)$,

kde W je spojitá po částech lineární funkce, $c \in \mathbb{R}^*$, h je funkce, která má konečný znaménkový bodově-intervalový rozklad. Takovou funkcí je např. polynomická, racionální či po částech polynomická funkce. V úvahu přicházejí též výrazy tvaru

$W(x) \; \theta \; g(\mathrm{sgn}\, h(x))$,

kde θ je jedna ze čtyř aritmetických operací, g, h jsou polynomické nebo racionální funkce nízkých stupňů, zadané zpravidla standardními výrazy se součinovými kořenovými činiteli. Poznamenejme, že v současnosti se místo přívlastku lineární stále častěji užívá "afinní" a lineární se rezervuje pro speciální případ (pro skutečně lineární zobrazení) $y = kx$.

Pro významné speciální případy funkcí po částech lineárních jsou ukázána jejich standardní vyjádření tabulkami a formulemi. Jsou odvozeny převodní vztahy mezi jednotlivými typy zadání. Při převádění informace je dbáno na redukci informační šedi. Pozornost je věnována vztahům mezi speciálními vlastnostmi funkcí a specializací parametrů zadání. Přitom se mohou objevit nové souvislosti.

Bylo nashromážděno velké množství materiálu, z něhož je využita jen malá část. Dílčí témata však byla zpracována do formy časopiseckých článků předložených k publikaci.

Významné případy funkcí po částech lineárních jsou probírány samostatně. To je dáno historií vzniku, ale hlavně se tím usnadňuje přístup ke specifickým výsledkům.

C2K1. FUNKCE PO ČÁSTECH POLYNOMICKÉ

Významnou složitostní stupnicí je "algebraická" linie polynomických funkcí, kdy za sebou podle složitosti tvaru zadávajícího algebraického výrazu (podle stupně) následují funkce konstantní, lineární a afinní, kvadratické, kubické atd. Ve jmenovaných případech lze funkce zapsat standardně ve tvaru polynomu (sestupně): $y = a$ (konstanta), $y = ax$ (lineární), $y = ax + b$ (afinní), $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ atd. Jejich grafy jsou "paraboly" n-tého stupně, $n = 0,1,2,3,\ldots$

Složitější funkce však můžeme vytvářet též "geometricky" (či množinově) sjednocováním zúžení různých jednoduchých funkcí. Zúžením funkce f, $D(f) = A$, na podmnožinu B množiny A, $B \subset A$, přitom rozumíme funkci označovanou zpravidla $f|_B$ a definovanou vztahem $f|_B(x) := f(x)$ pro každé $x \in B \subset A$. Jde tedy o "omezení" funkce f na podmnožinu B jejího původního definičního oboru A. Grafem zúžení (každé funkce) na jediný bod $b \in D(f)$ je izolovaný bod $[b, f(b)]$.

S uvedenou technologií konstrukce funkcí souvisí přívlastek "po částech". Říkáme, že funkce f má nějakou vlastnost po částech na množině $M \subset D(f) \subset \mathbf{R}$, má-li tuto vlastnost na všech otevřených (intervalových) komponentách nějakého konečného bodově-intervalového rozkladu množiny M. Někdy se ještě kladou další požadavky v bodových komponentách.

Funkce, jejichž grafy vznikají sjednocováním konečného počtu "parabol" a izolovaných bodů, lze vytvářet a zadávat pomocí konečného bodově-intervalového rozkladu množiny $\mathbf{R}$ reálných čísel. Na přímce reprezentující $\mathbf{R}$ zvolíme rozdělení, tj. konečný počet n dělicích bodů (zvaných též uzly či spoje) ze vzestupně uspořádané množiny $U := \langle u_1,\ldots,u_n \rangle$. Tím se $\mathbf{R}$ rozloží na $n + 1$ otevřených intervalů $J_i := (u_i, u_{i+1})$, $i = 0,1,\ldots,n$, kde $u_0 := -\infty$, $u_{n+1} := +\infty$, a na n izolovaných bodů $u_1,\ldots,u_n$. Tedy

$$\mathbf{R} = \bigsqcup_{i=0}^{n} (u_i, u_{i+1}) \sqcup U ,$$

kde symbol "hranatého" sjednocení zdůrazňuje, že jde o po dvou disjunktní komponenty.

C2K2. SJEDNOCENÍ AFINNÍCH FUNKCÍ

Funkci po částech lineární (lépe: po částech afinní) lze chápat jako sjednocení zúžení afinních funkcí $y = sx + t$, $s, t \in \mathbf{R}$, na komponenty konečného bodově-intervalového rozkladu množiny $\mathbf{R}$ reálných čísel. Taková funkce f může být zadána např. bodově-intervalovou tabulkou:

x	$(-\infty, u_1)$	u_1	(u_1, u_2)	...	u_i	(u_i, u_{i+1})	u_{i+1}	...	u_n	$(u_n, +\infty)$
f	s_0, t_0	f_1	s_1, t_1		f_i	s_i, t_i	f_{i+1}		f_n	s_n, t_n

(Lt)

Zde vzestupně uspořádané body $u_1, \ldots, u_n$, $n \in \mathbf{N}$, určují rozklad:

$$-\infty < u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-1} < u_n < +\infty , \tag{1}$$

$f_i := f(u_i)$ jsou funkční hodnoty v těchto bodech, $y = s_i x + t_i$ je rovnice afinního úseku v intervalu $J_i := (u_i, u_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, n$, klademe $u_0 := -\infty$, $u_{n+1} := +\infty$.

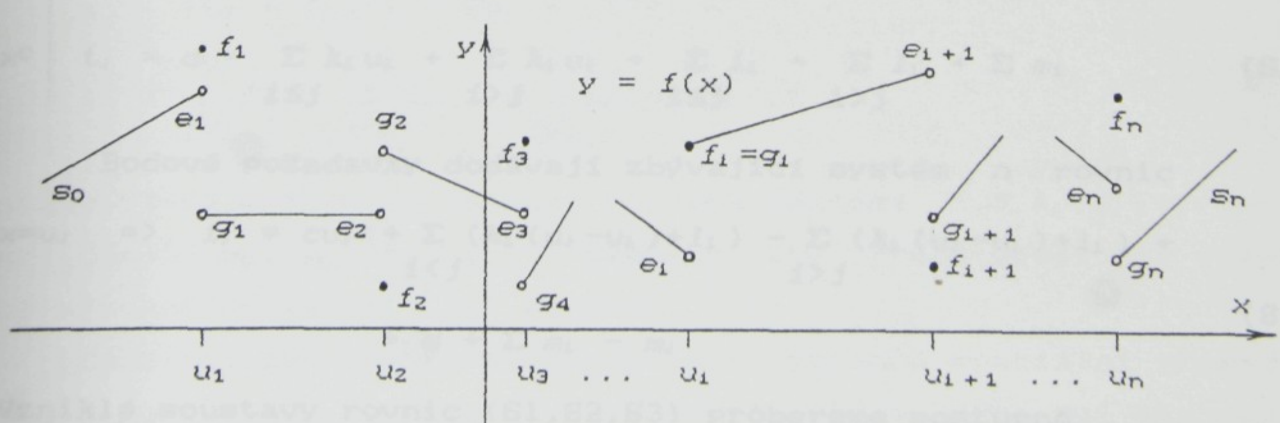
Jinou možností zadání je bi-tabulka

x	$(-\infty, u_1)$	u_1	...	u_i	(u_i, u_{i+1})	u_{i+1}	...	u_n	$(u_n, +\infty)$
f	$s_0 ; e_1$	f_1	$g_1 \ldots e_i$	f_i	$g_i ; e_{i+1}$	f_{i+1}	$g_{i+1} \ldots e_n$	f_n	$g_n ; s_n$

kde

$$e_i := f(u_i -) = s_{i-1} u_i + t_{i-1} ,$$
$$g_i := f(u_i +) = s_i u_i + t_i , \quad i = 1, \ldots, n . \tag{2}$$

Toto zadání funkce po částech lineární je na obrázku:



A. SOUČTOVÝ TVAR PRO FUNKCI PO ČÁSTECH AFINNÍ

Následující věta ukazuje možnost algebraického vyjádření funkce zadané tabulkou (Lt).

Věta: Funkci f po částech lineární, která je dána bi-tabulkou (Lt) s uzly (1), lze vyjádřit jednoznačně (až na pořadí sčítanců) v součtovém tvaru

$$f(x) = cx+d + \sum_{i=1}^{n} [k_i |x-u_i| + l_i \operatorname{sgn}(x-u_i) + m_i \operatorname{sgn}^2(x-u_i)] ,$$

kde (La)

$$c,\ d,\ u_i,\ k_i,\ l_i,\ m_i \in \mathbf{R} .$$

Důkaz se provede sestavením soustavy $3n+2$ rovnic pro $3n+2$ neznámých c, d, k_i, l_i, m_i a jejím vyřešením. Tím zároveň získáme převodové vztahy mezi zadáním (Lt) a (La).

Intervalové požadavky dávají $n+1$ vztahů:

$(-\infty, u_1)$	$s_0 x + t_0 = cx + d - \sum k_i(x-u_i) - \sum l_i + \sum m_i$
$(u_n, +\infty)$	$s_n x + t_n = cx + d + \sum k_i(x-u_i) + \sum l_i + \sum m_i$
(u_j, u_{j+1}) $j=0,\dots,n$	$s_j x + t_j = cx + d + \sum_{i\le j} k_i(x-u_i) - \sum_{i>j} k_i(x-u_i) + \sum_{i\le j} l_i - \sum_{i>j} l_i + \sum m_i$

Porovnáním koeficientů při stejných mocninách x dostáváme dva systémy rovnic, každý o $n+1$ rovnicích $(j=0,\dots,n)$:

$$x \quad \Big| \quad s_j = c + \sum_{i\le j} k_i - \sum_{i>j} k_i \tag{S1}$$

$$x^0 \quad \Big| \quad t_j = d - \sum_{i\le j} k_i u_i + \sum_{i>j} k_i u_i + \sum_{i\le j} l_i - \sum_{i>j} l_i + \sum m_i \tag{S2}$$

Bodové požadavky dodávají zbývající systém n rovnic

$$x=u_j \quad \Rightarrow \quad f_j = cu_j + \sum_{i<j} (k_i(u_j-u_i)+l_i) - \sum_{i>j} (k_i(u_j-u_i)+l_i) + d + \sum m_i - m_j \tag{S3}$$

Vzniklé soustavy rovnic (S1,S2,S3) probereme postupně.

<u>Skupina rovnic (S1)</u> poskytuje vztahy pro neznámé $c, k_1, \dots, k_n$. Sečtení první $(j=0)$ a poslední $(j=n)$ rovnice dává

$$s_0 + s_n = 2c \quad \Rightarrow \quad c = (s_0 + s_n)/2 . \tag{3}$$

Odečteme-li od j-té rovnice (j-1)-ní rovnici, dostaneme

$$s_j - s_{j-1} = 2k_j \Rightarrow k_j = (s_j - s_{j-1})/2, \quad j=1,2,\ldots,n \tag{4}$$

Skupina rovnic (S2) obdobně po sečtení první (j=0) a poslední (j=n) rovnice dává vztah:

$$t_0 + t_n = 2(d + \Sigma m_i) \Rightarrow d + \Sigma m_i = (t_0 + t_n)/2 \tag{5}$$

Odečteme-li od j-té rovnice (j-1)-ní rovnici, obdržíme

$$\begin{aligned} t_j - t_{j-1} &= -2k_j u_j + 2l_j \Rightarrow \\ l_j &= (t_j - t_{j-1})/2 + k_j u_j = (t_j - t_{j-1})/2 + u_j(s_j - s_{j-1})/2 = \\ &= \lceil(2)\rfloor = (g_j - e_j)/2 = (f(u_j+) - f(u_j-))/2 \end{aligned} \tag{6}$$

Skupina rovnic (S3) poskytuje po přeskupení členů vztahy

$$\begin{aligned} m_j &= -f_j + u_j(c + \sum_{i<j} k_i - \sum_{i>j} k_i) + \\ &\quad + d + \sum_{i<j}(l_i - k_i u_i) - \sum_{i>j}(k_i u_i - l_i) + \Sigma m_i = \\ &= \lceil(S1),(S2)\rfloor = -f_j + u_j(s_j - k_j) + t_j + k_j u_j - l_j = \\ &= \lceil(4),(6)\rfloor = u_j(s_j + s_{j-1})/2 + t_j - (t_j - t_{j-1})/2 - f_j \ . \end{aligned}$$

Tedy

$$m_j = u_j(s_j + s_{j-1})/2 + (t_j + t_{j-1})/2 - f_j , \tag{7}$$

což lze vzhledem ke (2) vyjádřit zkráceně ve formě

$$m_j = (g_j + e_j)/2 - f_j \tag{7'}$$

Zbývá připomenout, že podle (5) je

$$\begin{aligned} d &= (t_0 + t_n)/2 - \Sigma m_i = \lceil(7)\rfloor = \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i - \sum_{i=1}^{n-1} t_i - ½.\sum_{i=1}^{n} u_i(s_i + s_{i-1}) \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Vztahy (3-8) vyjadřují všechny hledané neznámé c, d, k_i, l_i, m_i pomocí údajů u_i, s_i, t_i, f_i z tabulky (Lt). Představují tak vlastně přechod od zadání (Lt) ke tvaru (La).

Dále budeme vyšetřovat samostatně významné speciální případy funkcí po částech lineárních. Zde se též ukáže, proč byl standardní aditivní tvar hledán ve tvaru (La).

C2K3. LOMENIC(OVÉ FUNKC)E

Lomenicovými funkcemi (lomenicemi) rozumíme spojité po částech lineární funkce. Jejich grafy jsou "funkční" lomené čáry. Ve výuce matematiky slouží k ilustraci operací s funkcemi a jejich skládání. Procvičují se na nich elementární transformace grafů. Jsou modelem funkcí, u kterých se vyskytují nepříjemné lomové body, v nichž vznikají derivováním skokové nespojitosti.

Lomové čáry jsou v klasických učebnicích zpravidla zadávány pomocí absolutních hodnot. Řešení školských úloh s (lineárními) funkcemi v absolutních hodnotách se obvykle provádí rozborem jednotlivých možností, což slouží k procvičování logicko-symbolické metody. Algoritmičtější nádech má tzv. metoda intervalů, či nulových bodů, která je dosti oblíbená pro svoji mechaničnost a při znalosti elementárních grafů i pro svoji názornost. Navíc má tato metoda užití i v jiných situacích.

Dále uvedeme některé přístupy, které jsou ekonomičtější než metody tradičně užívané v učebnicích. Dobře se při nich uplatní malá výpočetní technika.

A. TŘI STANDARDNÍ ZADÁNÍ LOMENICE

Funkci f definovanou v $\mathbf{R}$, jejíž graf je lomená čára s konečným počtem n úhlových (lomových) bodů v uzlech

$$-\infty < u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-1} < u_n < +\infty \tag{1}$$

lze zadat různými způsoby. Uvedeme tři nejvýznamnější vyjádření příslušné funkce $y = f(x)$.

Geometricky je zřejmé, že graf lomené čáry (např. tvaru písmene W) je dán jednoznačně tabulkou úhlových bodů a dvou krajních směrnic. Tuto informaci obsahuje tabulkové zadání

x	$(-\infty,u_1)$	u_1	u_2	...	u_{n-1}	u_n	$(u_n,+\infty)$
f	s_0	f_1	f_2	...	f_{n-1}	f_n	s_n

(Wt)

Zde $f_i := f(u_i)$, $i=1,\ldots,n$, s_0, s_n jsou směrnice krajních polopřímek.

Tomuto bodovému zadání je blízké intervalové větvené (též vidlicové) zadání

$$l_i(x) = s_i x + t_i \quad \text{pro} \quad x \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle, \quad i=0,1,\ldots,n,$$

kde (Wv)

$$s_i\,,\ t_i \in \mathbf{R}\,,\ u_0 := -\infty\,,\ u_{n+1} := +\infty\,.$$

Lomenicovou funkci f lze zadat jedinou formulí zvanou <u>součtové</u> (= <u>a</u>ditivní) <u>zadání</u>

$$f(x) = cx + d + k_1|x - u_1| + \ldots + k_n|x - u_n|\,,$$

kde (Wa)

$$c,\ d,\ u_i\,,\ k_i \in \mathbf{R}\,.$$

Ve všech třech zadáních je společná uspořádaná n-tice uzlů (1). Součtový tvar (Wa) je dán $n+2$ parametry $c,d,k_1,\ldots,k_n$. Tabulkové zadání (Wt) zahrnuje rovněž $n+2$ údajů s_0, s_n, f_1, .., f_n . Větvený tvar (Wv) obsahuje na první pohled více parametrů, a to $2(n+1)$ konstant s_0, t_0, s_1, t_1, ..., s_n, t_n . Požadavek spojitosti lomené čáry v uzlech u_i však vyžaduje platnost rovností

$$s_{i-1}u_i + t_{i-1} = s_i u_i + t_i\,,\quad i=1,\ldots,n\,,$$

což dává rekurentní vztah např. pro úseky t_i :

$$t_i = (s_{i-1} - s_i)u_i + t_{i-1}\,,\quad i=1,\ldots,n\,. \tag{2}$$

Z úseků t_i je proto nezávislý pouze jeden - nejlépe t_0 - a ostatní lze již pomocí něj vyjádřit. Takže (Wv) má též jen $n+2$ nezávislých parametrů.

Ekvivalenci všech tří zadání lomené čáry prokážeme odvozením formulí pro vzájemné převody všech dvojic zadání.

<u>Převod (Wv) -> (Wt).</u> Použijeme např. vzorce

$$f_i = s_i u_i + t_i\,,\quad i=1,\ldots,n\,,$$

s_0, s_n se pouze převezmou. (3)

<u>Převod (Wt) -> (Wv).</u> Parametry s_i, t_i získáme z přímky spojující lomové body $[u_i, f_i]$, $[u_{i+1}, f_{i+1}]$. Ta má rovnici

$$y = f_i + (f_{i+1}-f_i)/(u_{i+1}-u_i)(x-u_i) = s_i x + t_i\,,\ \text{takže}$$

$$s_i = (f_{i+1}-f_i)/(u_{i+1}-u_i)\,, \tag{4a}$$

(tv)

$$t_i = f_i - s_i u_i\,,\quad i=1,\ldots,n-1\,. \tag{4b}$$

Krajní směrnice s_0, s_n jsou ve (Wt) dány a pro t_0, t_n máme

$$t_0 = f_1 - s_0 u_1\,,\quad t_n = f_n - s_n u_n\,.$$

Tyto dva případy lze zahrnout do (4b), položíme-li $f_0 := f_1$, $u_0 := u_1$. Pak můžeme psát

$$t_i = f_i - s_i u_i \ , \quad i=0,1,\ldots,n-1,n. \tag{4b}$$

Převod (Wa) -> (Wv). Jde o rozpad kompaktní formule (Wa) na systém na sebe navazujících lineárních částí (Wv). Provedeme jej tím, že postupujeme po číselné ose zleva doprava a (podle definice absolutní hodnoty) měníme znaménko právě u členu, který přísluší překročenému kořenu u_i. Odtud odvodíme výrazy pro lineární části $l_i(x)$ lomené čáry a pro jejich vztahy. Položíme

$$s_0 = c - \sum_{i=1}^{n} k_i \ , \quad t_0 = d + \sum_{i=1}^{n} k_i u_i \tag{5a}$$

a pokračujeme rekurentně

$$s_i = s_{i-1} + 2k_i \ , \quad t_i = t_{i-1} - 2k_i u_i \ , \quad i=1,2,\ldots,n \ . \tag{5b}$$

Převod (Wv) -> (Wa). Jde o scelovací proces:

$$k_i = (s_i - s_{i-1})/2, \quad i=1,2,\ldots,n \ , \tag{6a}$$

$$c = (s_0 + s_n)/2 \ , \quad d = t_0 - \sum_{i=1}^{n} k_i u_i = (t_0 + t_n)/2 \tag{6b}$$

Zbývající převody mezi součtovým a tabulkovým zadáním je vhodné provést prostřednictvím (Wv).

Převod (Wa) -> (Wt).

$$s_0 = c - K, \quad s_n = c + K, \quad \text{kde } K = \sum_{i=1}^{n} k_i \ , \tag{7a}$$

$$f_i = s_{i-1} u_i + t_{i-1} \ , \quad i=1,2,\ldots,n \ , \tag{7b}$$

kde s_i, t_i jsou dány vztahy (5).

Převod (Wt) -> (Wa). Kombinujeme vztahy (4a) a (6), přičemž s_0, s_n jsou dány v tabulce (Wt), $t_0 = f_1 - s_0 u_1$.

Hodnotíme-li význam jednotlivých standardních zadání spojité funkce po částech lineární, můžeme říci, že součtový tvar je asi matematicky nejestetičtější a vhodný pro algebraické manipulace, větvený je výhodný při výpočtech a tabulkový je nejkoncentrovanější. Každý z nich má určité přednosti, ale i nevýhody, a hodí se při různých příležitostech. Proto je záhodno umět převádět jeden tvar ve druhý.

Již při řešení školských úloh můžeme vhodnou volbou tvaru standardizace zadání lomenice ovlivnit pracnost, přehlednost a názornost procesu řešení a jeho výsledku.

Příklad 1. V přehledové příručce [HN-82:117-8] je řešena rovnice s absolutními hodnotami

$$|2x+1| - |x-5| + |-4x| = 1 .$$

Rozklad na 4 případy, které jsou dány rozdělením množiny **R** na 4 dílčí intervaly pomocí kořenů vnitřků absolutních hodnot, zabírá ve zmíněné knize 1,5 stránky.

Řešení lze podstatně zkrátit užitím tabulky (Wt) úhlových bodů a krajních směrnic. Anulování řešené rovnice dává

$$|2x+1| - |x-5| + |-4x| - 1 = 0 .$$

Úhlové body levé strany rovnice jsou v kořenech -1/2, 5, 0 vnitřků absolutních hodnot. Levou směrnici $s_l = s_0$ dostaneme součtem koeficientů při x po vynechání všech absolutních hodnot (pro $x < -1/2$). Pravá směrnice $s_P = s_4 = -s_0$. Celkem máme tabulku (Wt)

x	$(-\infty,-½)$	$-1/2$	0	5	$(5,+\infty)$
f	$s_0 = -5$	$-9/2$	-5	30	$s_4 = 5$

Pomocí lineární interpolace vypočteme kořeny:

interval	výpočet
$(-\infty;-1/2)$	$y + 9/2 = -5(x + 1/2)$
	$y = 0 \Rightarrow x = -7/5$;
$(-1/2;0)$	$\emptyset$, neboť hodnoty na krajích jsou záporné ;
$(0;5)$	$y + 5 = (30-(-5))/5.(x-0)$
	$y = 0 \Rightarrow x = 5/7$;
$(5;+\infty)$	$\emptyset$, neboť pravá polopřímka leží nad osou x .

Řešením je tedy dvouprvková množina $\{-7/5; 5/7\}$. ⊔⊔

Zajímavé je, že tento tabulkový postup nenajdeme v běžných příručkách, ani v [LM-84], kde je uveden přehled metod pro řešení rovnic s absolutními hodnotami. Tabulkový postup je použit ve [Vi37-88:67-8].

 -210-

C2K4. FUNKCE PO ČÁSTECH KONSTANTNÍ

Nazývají se též stupňovité či schodovité a můžeme je pojímat jako sjednocení zúžení konstantních funkcí $y = s$, $s \in \mathbf{R}$, na komponenty konečného bodově-intervalového rozkladu množiny $\mathbf{R}$. Taková funkce f se často zadává bodově-intervalovou tabulkou, která zahrnuje informaci jak o funkčních hodnotách v dělicích bodech, tak o chování v dílčích intervalech:

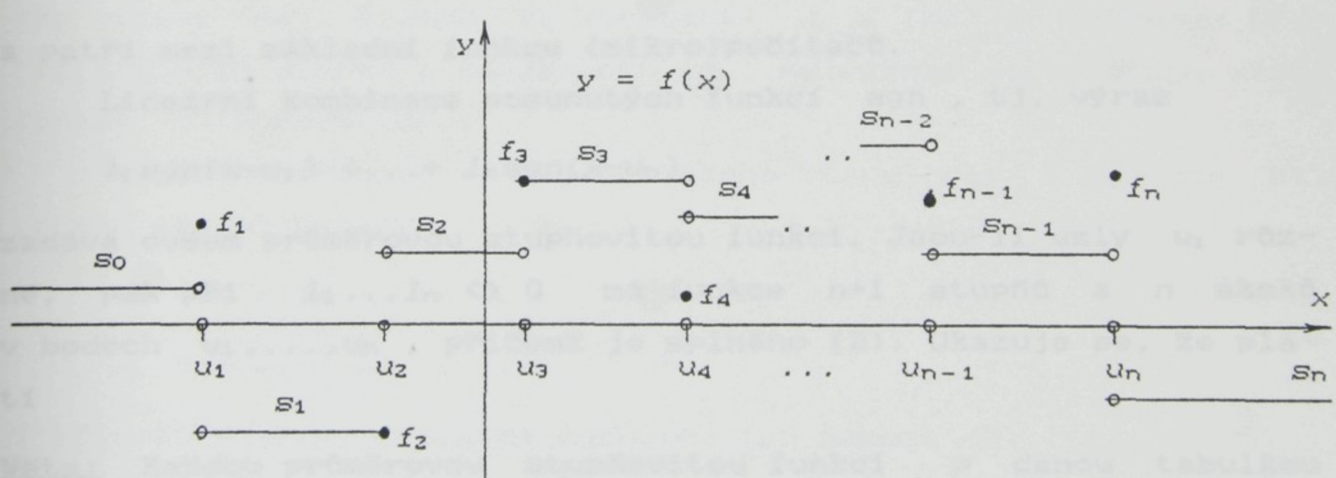
x	$(-\infty, u_1)$	u_1	(u_1, u_2)	...	u_i	(u_i, u_{i+1})	u_{i+1}	...	u_n	$(u_n, +\infty)$
f	s_0	f_1	s_1		f_i	s_i	f_{i+1}		f_n	s_n

(St)

Zde body $u_1, \dots, u_n$, $n \in \mathbf{N}$, jsou vzestupně uspořádané dělicí body, které určují bodově-intervalový rozklad:

$$-\infty < u_1 < u_2 < \dots < u_{n-1} < u_n < +\infty , \tag{1}$$

$f_i := f(u_i)$ jsou funkční hodnoty v těchto bodech, s_i jsou hodnoty stupňů v intervalových částech: $f((u_i, u_{i+1})) = s_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, přitom klademe $u_0 := -\infty$, $u_{n+1} := +\infty$. Příklad grafu takové funkce je na obrázku



Hodnotová množina stupňovité funkce má nejvýš $2n+1$ prvků: $f(\mathbf{R}) = \{s_0, \dots, s_n; f_1, \dots, f_n\}$. Pokud se sousední hodnoty stupňů liší, tj. $s_{i-1} <> s_i$, říkáme, že v bodě u_i je skok (jump) $j_i := s_i - s_{i-1} <> 0$. Prakticky se vyskytují stupňovité funkce zúžené na interval $\langle a,b \rangle \subset \mathbf{R}$, který překrývá množinu $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ dělicích bodů.

Někdy jsou údaje f_i nepodstatné. Často však hodnoty f_i v bodech u_i souvisejí se sousedními stupni (a)nebo mají nějakou společnou vlastnost. Může tomu být i obráceně: hodnoty s_i jsou nepodstatné (a)nebo mají nějakou společnou vlastnost. Poznamenejme, že při $s_i = s_{i-1} = f_i$ je funkce f spojitá v bodě u_i, a tedy pro nás v tomto bodě nezajímavá - takové body neevidujeme. Pro speciální případy se ovšem bi-tabulka zjednoduší.

A. PRŮMĚROVÉ STUPŇOVITÉ FUNKCE

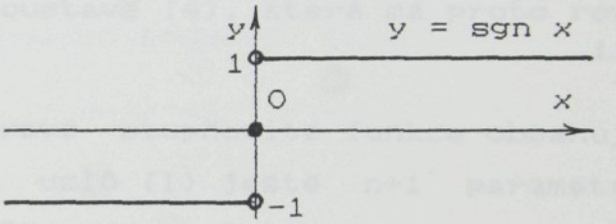
Stupňovitá funkce p je "průměrová", splňuje-li navíc přirozené podmínky

$$p_i = (s_{i-1} + s_i)/2\,, \quad i=1,\dots,n\,, \tag{2}$$

tj., jsou-li všechny funkční hodnoty p_i aritmetickým průměrem svých sousedních stupňů. V tabulce (St) pak není nutno udávat hodnoty v izolovaných bodech u_i.

Prototypem průměrové stupňovité funkce je znaménková funkce, která je dána předpisem

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0\,, \\ 0 & x = 0\,, \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



a patří mezi základní funkce (mikro)počítačů.

Lineární kombinace posunutých funkcí sgn, tj. výraz

$$l_1 \operatorname{sgn}(x-u_1) + \dots + l_n \operatorname{sgn}(x-u_n)$$

zadává ovšem průměrovou stupňovitou funkci. Jsou-li uzly u_i různé, pak při $l_1 \dots l_n <> 0$ má funkce $n+1$ stupňů a n skoků v bodech $u_1,\dots,u_n$, přičemž je splněno (2). Ukazuje se, že platí

<u>**Věta:**</u> Každou průměrovou stupňovitou funkci p danou tabulkou (St), která splňuje (2), lze jednoznačně vyjádřit v algebraickém tvaru

$$p(x) = d + \sum_{i=1}^{n} l_i . \operatorname{sgn}(x-u_i)\,, \tag{pa}$$

kde

$$d = (s_0 + s_n)/2\,, \tag{3a}$$

(pk)

$$l_i = (s_i - s_{i-1})/2\,, \quad i=1,\dots,n\,. \tag{3b}$$

<u>Důkaz</u> lze provést řešením soustavy rovnic pro neznámé d,

$l_1,\dots,l_n$, kterou odvodíme z (pa), když postupně dosazujeme za x z jednotlivých dílčích intervalů (zleva doprava). Pro i-tý interval (u_i,u_{i+1}), $i=0,1,\dots,n$, dostáváme bezprostředně z definice funkce sgn (uzly jsou uspořádané podle (1)) rovnici tvaru

$$s_i = d + l_1 +\dots+ l_i - l_{i+1} -\dots- l_n\ ,\quad i=0,1,\dots,n. \tag{4}$$

Speciálně první rovnice má tvar

$$s_0 = d - l_1 - l_2 -\dots- l_n$$

a poslední

$$s_n = d + l_1 + l_2 +\dots+ l_n\ .$$

Sečtení první a poslední rovnice dává hned vztah (3a) pro d . Odečteme-li od i-té rovnice $(i-1)$-tou, dostáváme $s_i-s_{i-1}=2l_i$, z čehož plyne (3b). Soustava vzniklá po úpravách má tedy jediné řešení. Je ekvivalentní výchozí soustavě (4), která má proto rovněž toto jediné řešení. ⊔⊔

Obě zadání (St), (pa) průměrové stupňovité funkce obsahují vedle společné uspořádané množiny uzlů (1) ještě n+1 parametrů $s_0,\dots,s_n$, resp. $d,l_1,\dots,l_n$. Převod ze tvaru (St) na (pa) je dán vztahy (pk). Vidíme, že konstanta d v (pa) je průměrem hodnot krajních stupňů a koeficient l_i má význam polovičního skoku funkce f v bodě u_i .

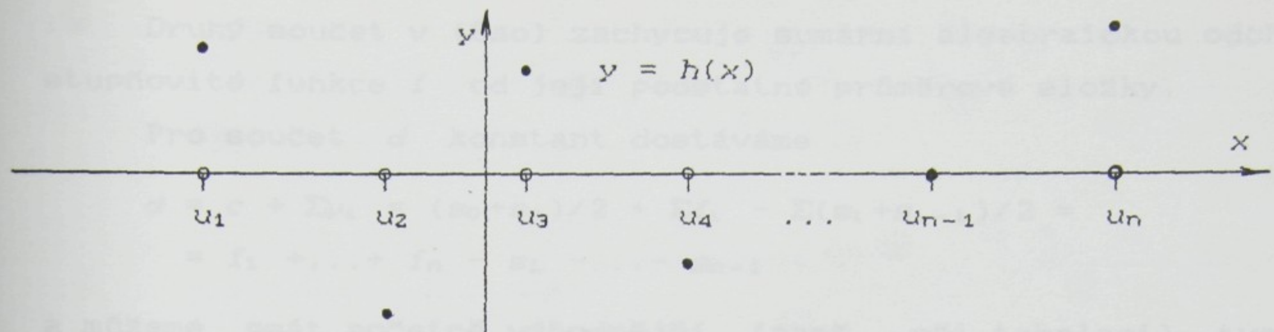
Obrácený přechod od algebraického tvaru (pa) k tabulce (St) je dán zřejmě vztahy

$$\begin{aligned} s_0 &= d - l_1 -\dots- l_n\ ,\\ s_i &= s_{i-1} + 2l_i\ ,\quad i=1,\dots,n\ . \end{aligned} \tag{5}$$

V případě potřeby doplníme hodnoty f_i pomocí (2).

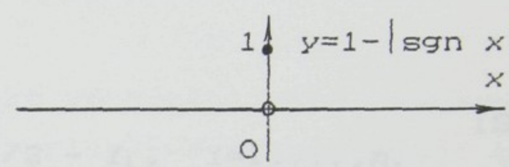
B. ODSKOKOVÉ STUPŇOVITÉ FUNKCE

Jinou speciální stupňovitou funkcí je "odskoková" funkce h , u níž $s_0 =\dots= s_n = 0$. Tato funkce může mít nenulové hodnoty (odskoky) $h_i := h(u_i)$ pouze v bodech u_i a jinde je nulová. Grafem "odskokové" stupňovité funkce je osa x , z níž odskakují hodnoty v bodech u_i . Příklad je opět na obrázku:



Prototyp odskokové funkce s jediným jednotkovým odskokem v počátku souřadnic lze vyjádřit pomocí funkce sgn např. výrazy $y = 1 - |\mathrm{sgn}\ x| = 1 - \mathrm{sgn}^2 x$. Je totiž

$$1 - |\mathrm{sgn}\ x| = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0 , \\ 0 & \text{pro } x <> 0 . \end{cases}$$



Obecnou odskokovou funkci h pak lze opět vyjádřit jako lineární kombinaci posunutých jednotkových odskoků. Tedy:

$$h(x) = \mu_1(1-\mathrm{sgn}^2(x-u_1)) + \ldots + \mu_n(1-\mathrm{sgn}^2(x-u_n)) ,$$

kde $\mu_i = h_i$, $i=1,\ldots,n$.

Po shromáždění konstant ji lze zapsat ve formě

$$h(x) = d + m_1 \mathrm{sgn}^2(x-u_1) + \ldots + m_n \mathrm{sgn}^2(x-u_n) , \qquad (5a)$$

kde

$$d = h_1 + \ldots + h_n , \quad m_i = -h_i , \quad i=1,\ldots,n . \qquad (5b)$$

Připomeňme, že $\mathrm{sgn}^2 x = \mathrm{abs}(\mathrm{sgn}\ x)$, takže zde nejde o násobení.

C. OBECNÉ STUPŇOVITÉ FUNKCE

Obecnou (<u>ne</u>průměrovou) stupňovitou funkci f danou tabulkou (St), která nemusí splňovat (2), lze jednoznačně vyjádřit jako součet průměrové a odskokové stupňovité funkce: $f(x) = p(x)+h(x)$. Proto platí:

<u>Věta:</u> Každou stupňovitou funkci f danou tabulkou (St) lze jednoznačně vyjádřit v algebraickém součtovém tvaru

$$f(x) = c + \sum_{i=1}^{n} l_i . \mathrm{sgn}(x-u_i) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (1-\mathrm{sgn}^2(x-u_i)) , \qquad (\mathrm{Sao})$$

kde

$$c = (s_0 + s_n)/2 ,$$

$$l_i = (s_i - s_{i-1})/2, \quad \mu_i = f_i - (s_{i-1}+s_i)/2 , \quad i=1,\ldots,n. \qquad \sqcup\!\sqcup$$

Druhý součet v (Sao) zachycuje sumární algebraickou odchylku stupňovité funkce f od její podstatné průměrové složky.

Pro součet d konstant dostáváme

$$d = c + \Sigma\mu_i = (s_0+s_n)/2 + \Sigma f_i - \Sigma(s_i+s_{i-1})/2 =$$
$$= f_1 +\ldots+ f_n - s_1 -\ldots- s_{n-1} \qquad (6)$$

a můžeme psát početně výhodnější (např. při tabelaci) tvar se sečtenými konstantami (označíme $m_i = -\mu_i$):

$$f(x) = d + l_1 \operatorname{sgn}(x-u_1) +\ldots+ l_n \operatorname{sgn}(x-u_n) +$$
$$+ m_1 \operatorname{sgn}^2(x-u_1) +\ldots+ m_n \operatorname{sgn}^2(x-u_n) , \qquad (Sa)$$

kde

$$d = f_1 +\ldots+ f_n - s_1 -\ldots- s_{n-1},$$
$$l_i = (s_i-s_{i-1})/2, \quad m_i = (s_{i-1}+s_i)/2 - f_i , \quad i=1,\ldots,n. \qquad (Sk)$$

Jeho členy však mají obecně komplikovanější interpretaci. Např.

$$d = s_n + (f_1 - s_1) +\ldots+ (f_n - s_n)$$

a poznáváme součet "pravých odskoků" $f_i - s_i$.

Výpočty lze dobře uspořádat do bi-tabulky

x	$(-\infty,u_1)$	u_1	(u_1,u_2)	u_2	...	(u_{n-1},u_n)	u_n	$(u_n,+\infty)$
$f(x)$	s_0	f_1	s_1	f_2		s_{n-1}	f_n	s_n
koef. l_i koef. m_i		l_1 m_1		l_2 m_2			l_n m_n	

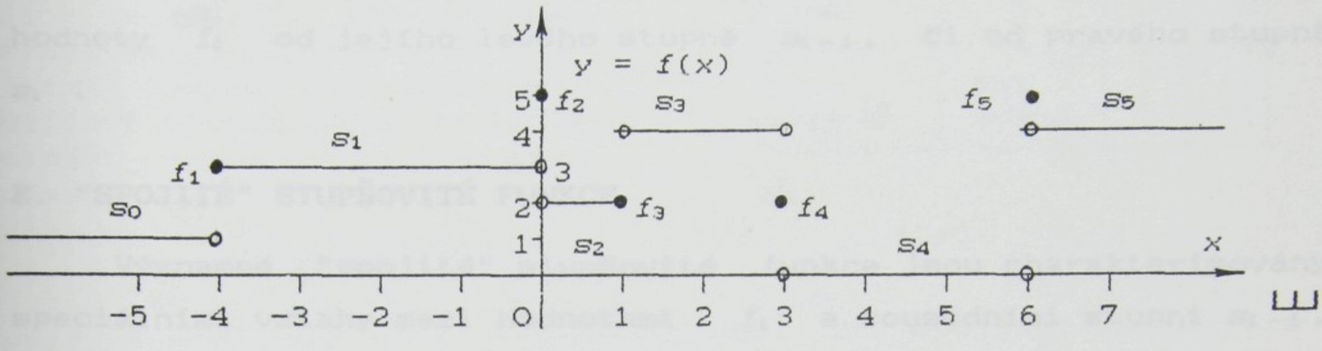
$d = f_1 +\ldots+ f_n - s_1 -\ldots- s_{n-1}$

Příklad 1. Pro stupňovitou funkci danou prvními třemi řádky následující tabulky a ilustrovanou grafem je prostřednictvím vzorců (Sk) sestavena součtová formule.

i		1		2		3		4		5	
x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,6)$	6	$(6,+\infty)$
f	1	3	3	5	2	2	4	2	0	5	4
l_i m_i		1 -1		$-1/2$ $-5/2$		1 1		-2 0		2 -3	

$d = f_1 +\ldots+ f_5 - s_1 -\ldots- s_4 = 17 - 9 = 8$

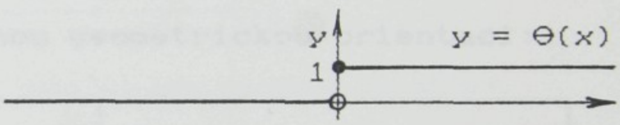
$$f(x) = 8 + \mathrm{sgn}(x+4) - 1/2\,\mathrm{sgn}\,x + \mathrm{sgn}(x-1) - 2\mathrm{sgn}(x-3) + 2\mathrm{sgn}(x-6) +$$
$$-\mathrm{sgn}^2(x+4) - 5/2\,\mathrm{sgn}^2 x + \mathrm{sgn}^2(x-1) + 0 - 3\mathrm{sgn}^2(x-6)$$



D. APLIKACE HEAVISIDEOVY FUNKCE

Namísto funkce sgn lze užít jako výchozí i jiné skokové funkce. Např. v matematické fyzice a Laplaceově transformaci se uplatňuje Heavisideova funkce Θ (nebývá však mezi základními funkcemi počítačů), která je dána předpisem a grafem

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{pro } x \geq 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Obecnou stupňovitou funkci danou tabulkou (St) lze opět vyjádřit jako lineární kombinaci posunutých funkcí a konstanty. Přitom můžeme postupovat jako výše. Lze však rovněž využít již odvozeného vyjádření (Sa), do nějž dosadíme za funkce sgn , sgn^2 pomocí funkce Θ . Platí totiž

$$\mathrm{sgn}\,x = \Theta(x) - \Theta(-x)\,,$$

$$1 - \mathrm{sgn}^2 x = \Theta(x) + \Theta(-x) - 1\,, \qquad \mathrm{sgn}^2 x = 2 - \Theta(x) - \Theta(-x)$$

Vidíme, že funkce sgn , sgn^2 lze chápat jako produkty symetrizace Heavisideovy funkce Θ . Takže z (Sa) dostáváme

$$\begin{aligned} f(x) &= d + \Sigma l_i\,(\Theta(x-u_i) - \Theta(-x+u_i)) + \Sigma m_i\,(2 - \Theta(x-u_i) - \Theta(-x+u_i)) = \\ &= d + 2\Sigma m_i + \Sigma(l_i - m_i)\Theta(x-u_i) - \Sigma(l_i + m_i)\Theta(u_i - x) = \\ &= e + \Sigma p_i\,\Theta(x-u_i) + \Sigma q_i\,\Theta(u_i - x)\,, \end{aligned} \qquad (S\Theta)$$

kde podle (Sk) platí

$$\begin{aligned} e &:= d + 2\Sigma m_i = f_1 + \ldots + f_n - s_1 - \ldots - s_{n-1} + \Sigma(s_{i-1} + s_i) - 2\Sigma f_i = \\ &= s_0 + s_1 + \ldots + s_n - f_1 - \ldots - f_n \quad (= s_0 + s_n - d)\,, \\ p_i &:= l_i - m_i = f_i - s_{i-1}\,, \\ q_i &:= -(l_i + m_i) = f_i - s_i\,. \end{aligned}$$

Zjišťujeme, že platí vztah

$$d + e = s_0 + s_n\,.$$

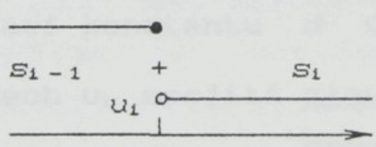
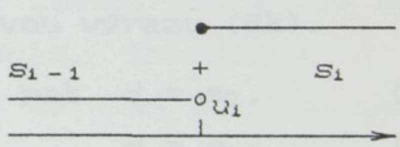
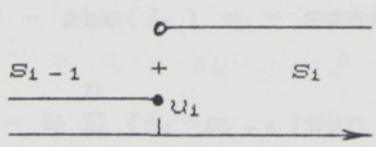
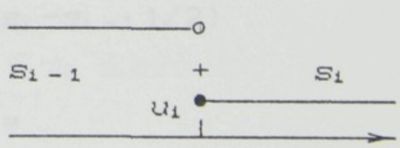
Koeficienty p_i, q_i můžeme chápat jako levou, resp. pravou "nespojitost" v bodě u_i, či jako levý, resp. pravý odskok funkční hodnoty f_i od jejího levého stupně s_{i-1}, či od pravého stupně s_i.

E. "SPOJITÉ" STUPŇOVITÉ FUNKCE

Významné "spojité" stupňovité funkce jsou charakterizovány speciálními vztahy mezi hodnotami f_i a sousedními stupni s_{i-1}, s_i. Odtud plyne možnost vyjádření koeficientů m_i pomocí l_i – uvádíme je v přehledu:

spojitost	zleva := $f_i = s_{i-1}$	=>	$m_i = l_i$
	zprava := $f_i = s_i$		$-l_i$
spojitost	zdola := $f_i = \min\{s_{i-1}, s_i\}$		$\mathrm{abs}(l_i)$
	shora := $f_i = \max\{s_{i-1}, s_i\}$		$-\mathrm{abs}(l_i)$

Připojené schéma grafů dává potřebnou geometrickou orientaci:

spojitost	zleva := $f_i = s_{i-1}$ $m_i = l_i$	zprava := $f_i = s_i$ $m_i = -l_i$
shora := $f_i = \max\{s_i, s_{i-1}\}$ $m_i = -\mathrm{abs}(l_i)$	$l_i < 0$ 	$l_i > 0$ 
zdola := $f_i = \min\{s_i, s_{i-1}\}$ $m_i = \mathrm{abs}(l_i)$	$l_i > 0$ 	$l_i < 0$ 

Ve "spojitých" případech se tedy v (Sa) liší koeficient m_i od koeficientu l_i nejvýš znaménkem (a)nebo absolutní hodnotou. V aditivním tvaru (Sa) je výhodné členy příslušné bodu u_i "spojitosti" seskupit do dvojic a vytknout konstantu l_i. Je-li f "spojitá" všude, dostaneme výraz tvaru

$$f(x) = d + \sum_{i=1}^{n} l_i \left[\mathrm{sgn}(x-u_i) + \alpha_i \,\mathrm{sgn}^2(x-u_i)\right] , \qquad (7)$$

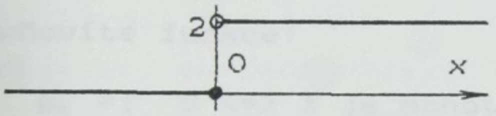
kde multiplikátor α_i zařizuje převod l_i na m_i ($m_i = \alpha_i l_i$) podle tabulky (je ovšem $|x| = x.\mathrm{sgn}\, x$). Při zvoleném pořadovém očíslování typu spojitosti číslem p dává jeho dvojkový přepis $[p]_{10} \to [jk]_2$ možnost zapsat α_i jedinou formulí

spojitost	α_i	p	jk
z<u>l</u>eva	1	0	00
z<u>p</u>rava	-1	1	01
z<u>d</u>ola	sgn l_i	2	10
s<u>h</u>ora	-sgn l_i	3	11

$$\alpha_i = (-1)^j \,\mathrm{sgn}^k\, l_i \;.$$

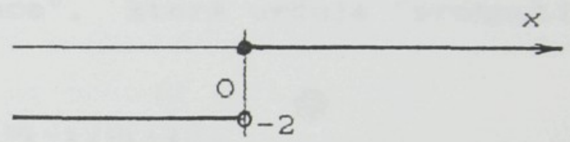
V (7) je tedy $\alpha_i \in \{\pm 1\}$ a konstatujeme, že "spojité" stupňovité funkce můžeme jednoznačně vyjádřit pomocí lineární kombinace "polonulových" spojitých stupínků, jejichž základní prototypy jsou na obrázcích:

sgn x + sgn² x



spojitost zleva a zdola

sgn x - sgn² x



spojitost zprava a shora

Je-li f ve všech bodech u_i shodně spojitá, pak jsou ovšem v (7) na místech α_i stejná znaménka.

Při jednotné spojitosti v bodech u_i lze též specifikovat vyjádření pro přičítací konstantu d úpravou výrazu (Sk).

Je-li f ve všech bodech u_i spojitá <u>zleva</u> , pak $d = s_0$, (dl)

<u>zprava</u>, $d = s_n$. (dp)

Je-li f ve všech bodech u_i spojitá <u>zdola</u>, pak ze (6) dostáváme (nyní $\mu_i = -m_i = -\,\mathrm{abs}(l_i) = -\,\mathrm{sgn} l_i\,.(s_i - s_{i-1})/2$)

$$d = \tfrac{1}{2}(s_0 + s_n) - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1})\mathrm{sgn}\, l_i =$$

$$= s_0(1+\mathrm{sgn} l_1)/2 + s_n(1-\mathrm{sgn} l_n)/2 + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} s_i \,\Delta\, \mathrm{sgn}\, l_i \;. \qquad \text{(dd)}$$

Při úpravách jsme použili diferenční analogii per partes - srov. [Fic2-59:307₈-8¹⁴]. Je ovšem

$$(1+\mathrm{sgn} l_1)/2 = \begin{cases} 1 & \text{pro } l_1>0; \\ 0 & l_1<0 \end{cases} \qquad (1-\mathrm{sgn} l_n)/2 = \begin{cases} 1 & \text{pro } l_n<0, \\ 0 & l_n>0\;, \end{cases}$$

$$\Delta \mathrm{sgn} l_i/2 = (\mathrm{sgn} l_{i+1} - \mathrm{sgn} l_i)/2 = \begin{cases} 0 & \text{pro } l_i l_{i+1}>0\;, \\ 1 & l_i<0,\; l_{i+1}>0\;, \\ -1 & l_i>0,\; l_{i+1}<0\;. \end{cases}$$

Úhrnem konstatujeme, že konstanta d je speciální lineární kombinací hodnot s_i stupňů:

$$d = \beta_0 s_0 + \beta_1 s_1 + \ldots + \beta_i s_i + \ldots + \beta_{n-1} s_{n-1} + \ldots + \beta_n s_n ,$$

kde (8)

$$\beta_0 , \beta_n \in \{0;1\},\ \beta_1 , \ldots , \beta_{n-1} \in \{0;\pm 1\}.$$

Uvědomíme-li si, že $\operatorname{sgn} l_i = \operatorname{sgn}(s_i - s_{i-1})$ udává vlastně monotónii (spojité) stupňovité funkce f v bodě u_i, pak je vše geometricky průhledné:

$\beta_0 = 1$ <=> f neklesá v bodě u_1 ,

$\beta_n = 1$ neroste u_n

Pro $\beta_1 , \ldots , \beta_{n-1}$ jsou tři možnosti, odpovídající skutečnosti, že $\Delta \operatorname{sgn} l_i$ hraje roli "druhé derivace", která určuje "prohnutí" stupňovité funkce:

$$\beta_i = \begin{cases} 0 & \text{<=> f je monotonní v } (u_{i-1};u_{i+2}), \\ 1 & \text{má "propad" v } \langle u_i ; u_{i+1} \rangle \text{ (s konci)} , \\ -1 & \text{má "zdvih" v } (u_i ; u_{i+1}) \text{ (bez konců)} . \end{cases}$$

Pro funkci f spojitou shora ve všech bodech u_i můžeme postupovat analogicky jako výše nebo využít faktu, že f je spojitá shora, právě když je $-f$ spojitá zdola. Konstanta d má opět tvar (8). V geometrické charakterizaci se však prohodí monotónie a rovněž propad a zdvih se zamění včetně přítomnosti koncových bodů dílčího intervalu. Celkem

$$d = s_0 (1-\operatorname{sgn} l_1)/2 + s_n (1+\operatorname{sgn} l_n)/2 - \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} s_i \,\Delta \operatorname{sgn} l_i . \qquad \text{(dh)}$$

F. VÝPOČETNÍ ASPEKTY

Porovnejme vyčíslování funkčních hodnot $f(x)$ průměrové stupňovité funkce f při zadání tabulkou (St) (je splněna vlastnost (2)) a při vyjádření formulí (Sa).

Vycházíme-li z tabulky (St), pak vyčíslování $f(x)$ se redukuje na zjišťování, kde se bod x nachází v (St). V přímočaré programové realizaci tomu odpovídá série IF-příkazů. Např. v Basicu můžeme např. zvolit toto schéma postupu:

```
     Y = S(0)
     IF (X=U(1)) THEN Y=(S(0)+S(1))/2: GOTO 100
     IF (U(1) < X AND X < U(2)) THEN Y=S(1): GOTO 100
     ...
     IF (X=U(N)) THEN Y=(S(N)+S(N-1))/2: GOTO 100
     IF (U(N) < X) THEN Y=S(N)
100  PRINT X;Y
```

To představuje $2n$ řádků s logickým IF .

Užijeme-li algebraický tvar (Sa), pak vše může zastat jediný příkaz tvaru

```
PRINT X; C + K(1)*SGN(X-U(1)) + ... + K(N)*SGN(X-U(N))
```

Tento přístup je jistě kompaktnější. Ve srovnání s rozepsanou (tabulkovou) variantou je ovšem méně průhledný, avšak pohledný. Ukazuje se, že jednopříkazová verze je časově výhodnější.

Časové nároky IF-verze výpočtu $f(x)$ lze zmenšit, známe-li frekvence výskytu argumentu x v dílčích intervalech. Předpokládáme-li rovnoměrné rozdělení, tj., že frekvence je úměrná délce intervalu, pak je záhodno příkazy IF seřadit sestupně podle délek intervalů. Na konec umístíme prověřování, zda x není některým z dělicích bodů U(I) .

C2K5. ZNAMÉNKO(VÁ FUNKCE) FUNKCE

Znaménko(vá funkce) dané funkce g je složená funkce $f(x):=$ $:= \operatorname{sgn} g(x)$, $x\in D(g)\subset \mathbf{R}$, která zachycuje pouze informaci o znaméncích (a nulovosti) funkčních hodnot dané funkce g . Tyto údaje stačí např. pro řešení anulovaných (ne)rovnic tvaru $g(x)$ r 0, kde r představuje jednu ze šestice relací $\{=, <>, <, >, \le, \ge\}$. Budeme se zabývat znaménkovou funkcí v užším smyslu, kterou vymezíme jako sjednocení zúžení konstantních funkcí $y=0$, $y=1$, $y=-1$ na komponenty konečného bi-rozkladu množiny $\mathbf{R}$. Rozklad je dán rozdělením $U = \langle u_1,\dots,u_n\rangle$. Taková funkce je ovšem speciální stupňovitou funkcí f , u níž $s_i = f((u_i,u_{i+1}))$, $f_i = f(u_i)$ nabývají hodnot z množiny $\{0,\pm1\}$. Obecné vzorce (Sk) pro koeficienty l_i , m_i , d dávají po specializaci pro znaménkové funkce $\operatorname{sgn} g$ a pro speciální funkce g určitá omezení a vztahy mezi těmito koeficienty. Při odvozování výsledků je vhodné užívat též kombinatorických úvah opírajících se o znalost grafu funkce g a o geometrický význam koeficientů l_i , m_i , resp. konstanty d .

V dalším se soustředíme především na případ funkce $\operatorname{sgn} P(x)$, kde P je polynomická funkce. Dále si všimneme znaménka racionální funkce. Obdobně lze vyšetřit znaménko lomenicové funkce (podílu dvou lomenic) a stupňovité funkce. Každý z těchto případů má svá specifika plynoucí z odlišných vlastností jmenovaných funkcí.

A. ZNAMÉNKO POLYNOMICKÉ FUNKCE

Předpokládejme, že polynomická funkce P má právě n reálných kořenů $u_1,\dots,u_n$, $n\in \mathbf{N}$:

$$-\infty < u_1 < u_2 < \dots < u_{n-1} < u_n < +\infty \qquad (1)$$

Kořeny je účelné zapisovat s jejich násobnostmi $r_1,\dots,r_n$ ve formě dvojic $[u_i,r_i]$, $i=1,\dots,n$. Za této situace lze funkci P vyjádřit v součinovém kořenovém tvaru

$$P(x) = a_0(x-u_1)^{r_1} \dots (x-u_n)^{r_n}.A(x) , \qquad (2)$$

kde $a_0\in\mathbf{R}^*$, ri značí r_i , A je kladný polynom, tj. $A(\mathbf{R}) > 0$, který již nemá reálné kořeny.

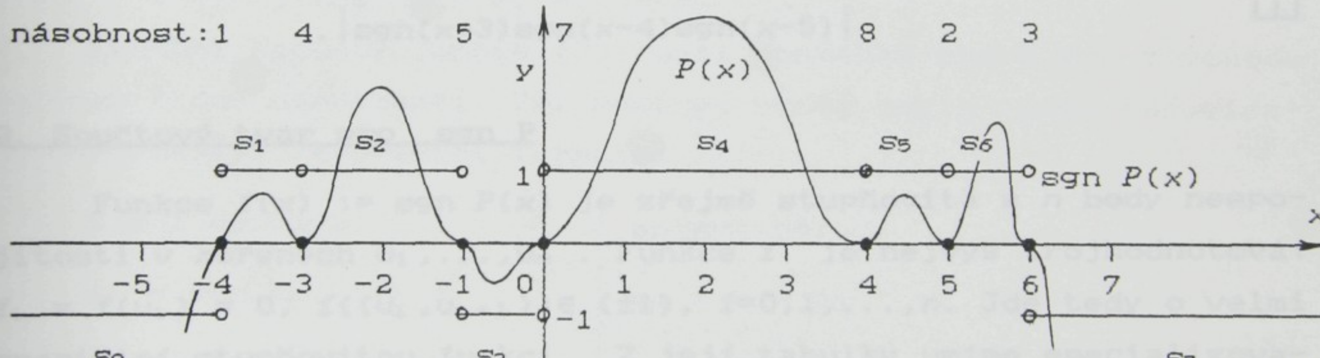
Kořeny (1) produkují bi-rozklad množiny $\mathbf{R}$ s $2n+1$ komponentami. Z vlastností polynomické funkce (spojitost v $\mathbf{R}$, nenulový polynom má konečný počet izolovaných kořenů) plyne, že funkce P daná výrazem (2) je nulová právě v kořenové množině $U = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ a mezi sousedními kořeny zachovává znaménko. V tabulce je souhrně zachycena obecně známá informace:

nás.		r_1			r_i		r_{i+1}		r_n	
x	$(-\infty, u_1)$	u_1	(u_1, u_2)	...	u_i	(u_i, u_{i+1})	u_{i+1}	...	u_n	$(u_n, +\infty)$
sgn$P$	± 1	0	± 1		0	± 1	0		0	± 1

Příklad 1. Pro polynomickou funkci P danou (naštěstí!) součinovým výrazem

$$P(x) = (x+4)(x+3)^4(x+1)^5 x^7 (x-4)^8 (x-5)^2 (6-x)^3 (x^2+1) =$$
$$= - x^{32} + \ldots$$

je na připojeném obrázku nakreslena skica grafu spolu s grafem její znaménkové funkce sgn $P(x)$.



1. Součinový tvar pro sgn P

Z multiplikativnosti funkce sgn plyne zjednodušení

$$\operatorname{sgn} x^k = \begin{cases} \operatorname{sgn} x & \text{pro } k \text{ liché,} \\ \operatorname{sgn}^2 x & \text{sudé, } k \in \mathbf{N}\,. \end{cases} \tag{3}$$

Obě možnosti lze spojit např. zápisem

$$\operatorname{sgn} x^k = (\operatorname{sgn} x)^{2-\operatorname{mod}(k,2)}\,, \quad k \in \mathbf{N}\,, \tag{3'}$$

kde mod(k,m) je funkce udávající zbytek po dělení čísla $k \in \mathbf{N}$ číslem m, $2 \le m \in \mathbf{N}$.

Činitele v (2) je tedy třeba rozdělit podle parity (lichosti či sudosti) exponentů. K tomu účelu rozložíme vzestupně uspořádanou kořenovou množinu $U = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ na dvě disjunktní vzestupně uspořádané množiny Z, V. Označíme-li počet prvků množiny

Z písmenem p , tj. $n(Z) = p$, pak ovšem $n(V) = n-p$. Množina $Z = \langle z_1, \ldots, z_p \rangle$ je tvořena průsečíkovými kořeny u_i (mají lichou násobnost r_i), $V = \langle v_1, \ldots, v_{n-p} \rangle$ zahrnuje všechny dotykové kořeny (mají sudou násobnost r_i). Poznamenejme, že označení pro množiny je motivováno tvarem grafu funkce P v okolí kořenů. Setříděním množin Z, V vzniká zpětně množina U. Při zavedených označeních máme součinové vyjádření znaménka funkce P :

$$\operatorname{sgn} P(x) = \operatorname{sgn} a_0 . \operatorname{sgn}(x-z_1) \ \ldots \ \operatorname{sgn}(x-z_p) .$$
$$. \operatorname{sgn}^2(x-v_1) \ \ldots \ \operatorname{sgn}^2(x-v_{n-p}) . \qquad (Zs)$$

První činitel je ±1 (udává znaménko vedoucího koeficientu a_0), členy s kořeny z_i zachycují vlastní střídání znamének, zbylé jsou nezáporné a rovny nule pouze pro $x \in V$.

Příklad 2. Znaménko sgn P polynomické funkce P z př.1 má součinový tvar

$$\operatorname{sgn} P(x) = - \operatorname{sgn}(x+4)\operatorname{sgn}(x+1)\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(x-6) .$$
$$. \left| \operatorname{sgn}(x+3)\operatorname{sgn}(x-4)\operatorname{sgn}(x-5) \right|$$

2. Součtový tvar pro sgn P

Funkce $f(x) := \operatorname{sgn} P(x)$ je zřejmě stupňovitá s n body nespojitosti v kořenech $u_1, \ldots, u_n$. Funkce f je nejvýš trojhodnotová: $f_i = f(u_i) = 0$, $f((u_i, u_{i+1})) \in \{\pm 1\}$, $i=0,1,\ldots,n$. Jde tedy o velmi speciální stupňovitou funkci. Z její tabulky umíme specializovanými vzorci (Sk) sestavit součtový tvar (Sa). Tedy

$$\operatorname{sgn} P(x) = d + l_1 \operatorname{sgn}(x-u_1) + \ldots + l_n \operatorname{sgn}(x-u_n) +$$
$$+ m_1 \operatorname{sgn}^2(x-u_1) + \ldots + m_n \operatorname{sgn}^2(x-u_n) , \qquad (Za)$$

kde

$$d = - s_1 - \ldots - s_{n-1} ,$$
$$l_i = (s_i - s_{i-1})/2 , \quad m_i = (s_{i-1} + s_i)/2 , \quad i=1,\ldots,n . \qquad (Zk)$$

Konstanta d je tedy minus součet vnitřních stupňů; l_i je poloviční skok v kořenu u_i ; m_i je průměr stupňů sousedících s kořenem. Výpočty lze dobře uspořádat do bi-tabulky

násobnosti		r_1		r_2			r_n	
x	$(-\infty,u_1)$	u_1	(u_1,u_2)	u_2	...	(u_{n-1},u_n)	u_n	$(u_n,+\infty)$
sgn $P(x)$	s_0	0	s_1	0		s_{n-1}	0	$s_n = \operatorname{sgn} a_0$
koef. l_i koef. m_i		l_1 m_1		l_2 m_2			l_n m_n	

$d = -s_1 - \ldots - s_{n-1}$

Klaďme si však za cíl odvodit obecnou součtovou formuli pro sgn P ze součinového tvaru (2) polynomické funkce P.

Především je ze (2) patrné, že

$$\operatorname{sgn} P(x) = \begin{cases} s_0 = \operatorname{sgn} a_0(-1)^p & \text{pro } x < u_1 , \\ s_n = \operatorname{sgn} a_0 & \text{pro } x > u_n . \end{cases}$$

Zde $p=n(Z)$ je opět počet lichých mocnitelů r_i ve (2). Je ovšem $(-1)^p = (-1)^s$, kde $s = r_1 + \ldots + r_n$.

Funkční hodnoty funkce (2) mění znaménko právě při průchodu kořenem liché násobnosti. Při postupu podél osy x tomu odpovídají následující rekurentní formule:

zleva doprava	zprava doleva
$s_0 = \operatorname{sgn} a_0(-1)^p$	$s_n = \operatorname{sgn} a_0$
$s_i=(-1)^{r_i}s_{i-1}$, $i=1,\ldots,n$	$s_{i-1}=(-1)^{r_i}s_i$, $i=n,\ldots,1$

(4)

Hodnoty $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \{\pm1\}$ se tedy liší navzájem nejvýš znaménkem. Jelikož $\{\pm1\} \pm \{\pm1\} = \{0;\pm2\}$ (kombinujeme všechny možnosti), máme

$$l_i = (s_i - s_{i-1})/2 = \begin{cases} 0 & \text{pro } r_i \text{ sudé ,} \\ \pm1 \ (=s_i=-s_{i-1}) & \phantom{\text{pro }} r_i \text{ liché.} \end{cases} \tag{5}$$

Obdobně získáme (prohozenou!) alternativu

$$m_i = (s_i + s_{i-1})/2 = \begin{cases} 0 & \text{pro } r_i \text{ liché,} \\ \pm1 \ (=s_i=s_{i-1}) & \phantom{\text{pro }} r_i \text{ sudé .} \end{cases} \tag{6}$$

Ze (4+5) plyne, že nenulové členy posloupnosti $\{l_i\}$ pravidelně střídají znaménka. Ze (4+6) pak zjišťujeme, že souvislé série koeficientů m_i (nepřerušené nulovými) mají shodná znaménka. Dále zřejmě platí

$l_i,\ m_i \in \{0;\ \pm 1\}$, $\quad |l_i| + |m_i| = 1$,

tj. vždy právě jeden z dvojice koeficientů l_i, m_i je nulový a druhý je v absolutní hodnotě roven 1. Opět se proto uplatní rozklad uspořádané množiny U kořenů podle sudosti či lichosti jejich násobnosti.

Dosud získané poznatky o součtovém tvaru znaménkové funkce polynomu můžeme shrnout zápisem

$$\operatorname{sgn} P(x) = d + \sum_{Z} \pm\operatorname{sgn}(x-u_i) + \sum_{V} \pm\operatorname{sgn}^2(x-u_i)\ ,$$

kde dvojznaky $\pm$ ukazují na dvě možnosti znamének. V prvním součtu se znaménka střídají v závislosti na pořadovém indexu průsečíkového kořene z_i v množině Z, v druhém součtu jsou znaménka určena pozicí dotykového kořene $v_j \in V$ vzhledem k uspořádané množině Z. Součtový tvar pro sgn P zapíšeme dvojím způsobem podle toho, odkud začneme s průsečíkovými kořeny z_i - vpravo či vlevo:

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn} P(x) = d + \operatorname{sgn} a_0[&\operatorname{sgn}(x-z_p)-\ldots+(-1)^{p-1}\operatorname{sgn}(x-z_1) + \\ &+ (-1)^p((-1)^{m(1)}\operatorname{sgn}^2(x-v_1) +\ldots+ \\ &+ (-1)^{m(n-p)}\operatorname{sgn}^2(x-v_{n-p}))], \qquad \text{(Zap)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn} P(x) = d - (-1)^p\operatorname{sgn} a_0[&\operatorname{sgn}(x-z_1)-\ldots+(-1)^{p-1}\operatorname{sgn}(x-z_p)+ \\ &- (-1)^{m(1)}\operatorname{sgn}^2(x-v_1) -\ldots- \\ &- (-1)^{m(n-p)}\operatorname{sgn}^2(x-v_{n-p})]. \qquad \text{(Zal)}\end{aligned}$$

Zde $m(j)$:= ind(predz(v_j)), což značí, že $m(j)$ je index prvku v množině Z, který bezprostředně předchází prvek v_j. Přitom $z_0 := -\infty$. Jinak řečeno: $m(j)$ udává počet průsečíkových kořenů z_k (liché násobnosti), které jsou menší než dotykový kořen v_j (sudé násobnosti), tj. $m(j) = n(\{z_k \in Z;\ z_k < v_j\})$.

Označme $M(j)$ počet průsečíkových kořenů z_k, které jsou větší než dotykový kořen v_j, tj. $M(j) = n(\{z_k \in Z;\ z_k > v_j\})$. Pak $M(j)$ lze vyjádřit pomocí indexu prvku v množině Z, který bezprostředně následuje prvek v_j, ve tvaru $M(j) = p + 1 +$ $-$ ind(naslz(v_j)). Přitom klademe $z_{p+1} := +\infty$. Protože $m(j) =$ $= p - M(j)$, zjednoduší se zápisy pro (Za) na tvar

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn} P(x) = d + \operatorname{sgn} a_0[&\operatorname{sgn}(x-z_p) -\ldots+ (-1)^{p-1}\operatorname{sgn}(x-z_1) + \\ &+ (-1)^{M(1)}\operatorname{sgn}^2(x-v_1) +\ldots+ \\ &+ (-1)^{M(n-p)}\operatorname{sgn}^2(x-v_{n-p})] \qquad \text{(ZaM)}\end{aligned}$$

Shrnujeme, že postup zprava doleva je poněkud výhodnější.

Porovnáním tvarů (Zs),(Za) pro $\operatorname{sgn} P(x)$ shledáváme, že součinový tvar (Zs) vzniká jednoduchou redukcí mocnitelů kořenových dvojčlenů na 1, resp. 2, podle jejich lichosti či sudosti, kdežto součtový tvar (Za) představuje kvalitativní změnu - výsledný tvar pro konkrétní údaje neobsahuje již vůbec operaci násobení.

<u>Příklad 3.</u> V tlustě zarámované části tabulky jsou výchozí údaje o funkci P z př. 1, tj. $[u_i, r_i]$, $i=1,\dots,n$, $\operatorname{sgn} a_0$. Dosazením do vzorce (Za1) obdržíme součtový tvar pro

$$\operatorname{sgn} P(x) = -4 + \operatorname{sgn}(x+4) - \operatorname{sgn}(x+1) + \operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn}(x-6) + \\ + |\operatorname{sgn}(x+3)| + |\operatorname{sgn}(x-4)| + |\operatorname{sgn}(x-5)|$$

r_i		1		4		5		7		8		2		3	$n=7,\ p=4$
x	$(-\infty,-4)$	-4		-3		-1		0		4		5		6	$(6,+\infty)$
$\operatorname{sgn} P$	-1	0	1	0	1	0	-1	0	1	0	1	0	1	0	$-1=\operatorname{sgn} a_0$
l_i		1		0		-1		1		0		0		-1	
m_i		0		1		0		0		1		1		0	
$d = -s_1 - \dots - s_{n-1} = -4$															

Stejný výsledek ovšem dostaneme užitím vzorců (Sk) pro koeficienty l_i, m_i, $i=1,\dots,n$, a konstantu d obecné stupňovité funkce. K tomu vyplníme nejprve 3. řádek tabulky pro funkční hodnoty funkce $\operatorname{sgn} P$ v dílčích intervalech: začneme vpravo se $\operatorname{sgn} a_0$ a při postupu doleva měníme znaménko pouze po průchodu kořenem u_i liché násobnosti r_i.

a. Konstanta d

Zatím jsme se spokojili s vyjádřením

$$d = -s_1 - \dots - s_{n-1}, \tag{Zk}$$

které vzniklo specializací obecného vzorce (Sk) známého pro stupňovitou funkci. K jeho úpravě na úspornější a "stylovější" tvar použijeme nejprve vztahy (4-6) a pak funkce m, M.

Především z (5,6) plyne, že

$$s_i = \begin{cases} l_i & \text{pro } r_i \text{ liché}, \\ m_i & \phantom{\text{pro } r_i} \text{ sudé}, \end{cases}$$

a ostatní koeficienty l_i, m_i jsou nulové. Platí tedy

$$s_1 + \ldots + s_n = \sum_{i=1}^{n} l_i + \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{p} l_{Zi} + \sum_{i=1}^{n-p} m_{Vi} ,$$

neboť

$$\langle s_1, \ldots, s_n \rangle = \langle l_{Z1}, \ldots, l_{Zp} \rangle \cup \langle m_{V1}, \ldots, m_{V,n-p} \rangle ,$$

kde vpravo jsou všechny koeficienty l_i, m_i nenulové a indexem Z, resp. V, je zdůrazněna jejich příslušnost k rozkladové třídě množiny U. Podle (4,5) střídají členy (rovné ± 1) posloupnosti nenulových koeficientů $\{l_{Zi}\}$ pravidelně znaménko a $l_{Zp} = \operatorname{sgn} a_0$, takže

$$\sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{p} l_{Zi} = \operatorname{sgn}(a_0(1-(-1)^p)) = \operatorname{mod}(p,2).\operatorname{sgn} a_0 ,$$

kde $\operatorname{mod}(p,2)$ udává zbytek při dělení čísla $p \in \mathbf{N}$ dvěma. Nyní už můžeme psát

$$\begin{aligned} d &= -s_1 - \ldots - s_{n-1} = \lceil s_n = \operatorname{sgn} a_0 \rfloor = \\ &= \operatorname{sgn} a_0 - s_1 - \ldots - s_n = \operatorname{sgn} a_0 - \Sigma l_i - \Sigma m_i = \\ &= \operatorname{sgn} a_0 - \operatorname{sgn}(a_0(1-(-1)^p)) - \Sigma m_i = \\ &= \operatorname{sgn}(a_0(1+(-1)^p)) - \Sigma m_{Vi} = \operatorname{mod}(p+1,2).\operatorname{sgn} a_0 - \Sigma m_{Vi} . \end{aligned}$$

Poslední tvar ve větveném přepisu

$$d = \begin{cases} -m_{V,1} - \ldots - m_{V,n-p} & \text{pro } p \text{ liché,} \\ \operatorname{sgn} a_0 - m_{V,1} - \ldots - m_{V,n-p} & \text{sudé ,} \end{cases}$$

ukazuje, jak získat konstantu d z posledního řádku tabulky.

Nenulové koeficienty m_i lze ovšem vyjádřit pomocí funkce m, resp. M:

$$m_i = \operatorname{sgn} a_0 (-1)^{p-m(i)} = \operatorname{sgn} a_0 (-1)^{M(i)} .$$

V prvním případě (užití funkce m) tak dostáváme

$$d = (-1)^p \operatorname{sgn} a_0 [\operatorname{sgn}(1+(-1)^p) + - (-1)^{m(1)} - \ldots - (-1)^{m(n-p)}] . \qquad \text{(dm)}$$

Při uplatnění funkce M se vyjádření d trochu zjednoduší

$$d = \operatorname{sgn} a_0 [\operatorname{sgn}(1+(-1)^p) + - (-1)^{M(1)} - \ldots - (-1)^{M(n-p)}] \qquad \text{(dM)}$$

Konstatujeme, že postup zprava doleva je opět výhodnější.

Podle (Zk) se konstanta d pohybuje zřejmě v rozsahu zapsaném nerovností

$$|d| \le n - 1\ . \qquad (7)$$

Přesnější závislost rozsahu na sgn a_0 a na paritě čísla p plyne z (dM) a je dána vztahem

$$|d - \mathrm{sgn}[a_0(1+(-1))^p]| \le n - p, \qquad (8)$$

což je podrobněji vypsáno vpravo v tabulce. Extrémní hodnoty jsou skutečně nabývány, a to v případech, kdy všechny d-kořeny mají vpravo počet p-kořenů shodné parity.

a_0	počet p průseč. kořenů	
	sudý	lichý
+	$\|d-1\| \le n-p$	$\|d\| \le n-p$
−	$\|d+1\| \le n-p$	

Větvený rozpis

$$d = \begin{cases} \mathrm{sgn}\ a_0[1 - (-1)^{M(1)} - \ldots - (-1)^{M(n-p)}] & \text{pro } p \text{ sudé,} \\ -\mathrm{sgn}\ a_0[(-1)^{M(1)} + \ldots + (-1)^{M(n-p)}] & \text{pro } p \text{ liché,} \end{cases}$$

ukazuje, že konkrétní hodnota konstanty závisí na paritě n, p a na sgn a_0 . Speciálně pro d=0 musí mít počet p průsečíkových kořenů a počet $n-p$ dotykových kořenů (tj. též n, p) opačnou paritu - podrobněji:

d=0 <=> p sudé a zároveň $n-p$ liché, přičemž

$(n-p)/2$ d-kořenů má vpravo lichý počet p-kořenů,

$(n-p)/2+1$ (zbytek) sudý ;

p liché a zároveň $n-p$ sudé, přičemž

$(n-p)/2$ d-kořenů má vpravo sudý počet p-kořenů,

lichý ;

Podobně lze formulovat podmínky např. pro d = sgn a_0 , $d = \pm 1$ a obecně pro d liché.

b. sgn P při pouze průsečíkových kořenech

Nejjednodušší je znaménková funkce polynomu P , který má reálné kořeny u_i pouze liché násobnosti r_i , tj. má pouze průsečíkové kořeny. Pak U = Z, tj. n=p , a vychází

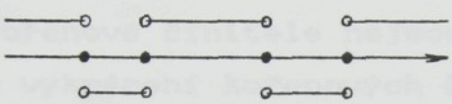
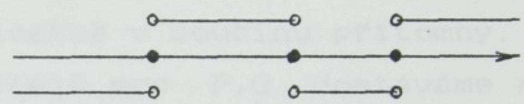
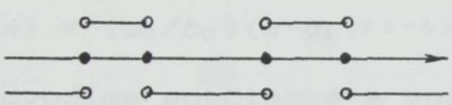
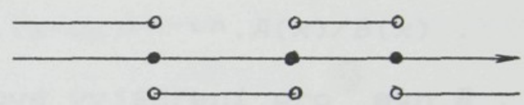
$$\mathrm{sgn}\ P(x) = (-1)^n \mathrm{sgn}\ a_0[\mathrm{sgn}(1+(-1)^n) +$$
$$- \mathrm{sgn}(x-u_1) + \ldots + (-1)^n \mathrm{sgn}(x-u_n)] =$$
$$= \mathrm{sgn}[a_0(1+(-1)^n)] +$$

$$+ \operatorname{sgn} a_0 [\operatorname{sgn}(x-u_n) + \ldots + (-1)^{n-1} \operatorname{sgn}(x-u_1)] \ .$$

Je tedy

$$d = \operatorname{sgn}[a_0(1+(-1)^n)] = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ liché}, \\ \operatorname{sgn} a_0 & \text{sudé} \ . \end{cases}$$

Čtyři kombinace parity n (lichost, sudost) a znaménka a_0 {+; −} jsou spolu se skicami grafů sgn P v tabulce

a_0 \ n	sudé	liché
+		
−		

c. Algoritmus pro sgn P

Dosud odvozené formule mají spíše teoretický význam. Při praktickém sestavování součtového tvaru zpravidla vycházíme z tabulky základní informace. Systematický postup (à la metoda intervalů či nulových bodů) pro výpočet koeficientů l_i, m_i, d součtového tvaru (Za) znaménkové funkce polynomu P zapíšeme nyní algoritmicky. Využijeme přitom ovšem odvozených vztahů. Výhodné je začít vpravo a postupovat směrem doleva.

Dáno: a_0, $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle$, $[u_i, r_i]$, $i=1,\ldots,n$
$s_n := \operatorname{sgn} a_0$, $d = s_n$
pro $i=n,\ldots,1$
  je-li r_i liché, pak $s_{i-1} := -s_i$, $l_i := s_i$, $m_i := 0$
  jinak $s_{i-1} := s_i$, $l_i := 0$, $m_i := s_i$
 $d := d - s_i$

Nepotřebujeme-li n-tici $s_0, s_1, \ldots, s_n$, lze výpočet zjednodušit

Dáno: a_0, $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle$, $[u_i, r_i]$, $i=1,\ldots,n$
$p := \operatorname{sgn} a_0$, $d = p.\mathrm{mod}(p+1,2)$
pro $i=n,\ldots,1$
  je-li r_i liché, pak $l_i := p$, $m_i := 0$, $p := -p$
  jinak $l_i := 0$, $m_i := p$
 $d := d - m_i$

B. ZNAMÉNKO RACIONÁLNÍ FUNKCE

Racionální funkci $R(x)$ lze vyjádřit jako podíl dvou polynomických funkcí: $R(x) = P(x)/Q(x)$. Předpokládejme, že uspořádaná množina $U = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ je sjednocením kořenových množin funkcí P, Q. Pak lze funkci P vyjádřit v součinovém kořenovém tvaru (2) a funkci Q obdobně ve tvaru

$$Q(x) = b_0 (x-u_1)^{t_1} \ldots (x-u_n)^{t_n} . B(x) , \qquad (11)$$

kde opět $b_0 \in \mathbf{R}^*$, t_i značí t_i, B je kladný polynom, tj. $B(\mathbf{R})>0$. Některé exponenty ve (2), (11) mohou být nyní nulové, tj. příslušné kořenové činitele nejsou vlastně v součinu přítomny.

Po vykrácení kořenových činitelů pro P,Q dostáváme redukovaný tvar racionální funkce R

$$R(x) = (a_0/b_0)(x-u_1)^{r_1-t_1} \ldots (x-u_n)^{r_n-t_n} . A(x)/B(x) . \qquad (12)$$

Z něj odvodíme součinové a součtové vyjádření pro $\mathrm{sgn}\, R$. Situace je obdobná jako u polynomických funkcí s některými odchylkami v důsledku většího počtu činitelů. Především racionální funkce R je nulová jen v těch bodech kořenové množiny U, které jsou pouze kořeny čitatele P. Zbylé body množiny U jsou kořeny jmenovatele Q a funkce R v nich není definována. Podrobněji můžeme situaci v okolí kořenů jmenovatele klasifikovat pomocí rozdílu $e_i := r_i - t_i$ (je $t_i > 0$):

$e_i > 0$	=>	$f(u_i*) = 0$	odstranitelná nespojitost,
$=$		$\in \mathbf{R}^*$	" " ,
$<$		$= \infty$	svislá asymptota.

V posledním případě lze ještě popsat všechny čtyři možné kombinace znaménkových nekonečen v "sousedství" bodu u_i :

$$f(u_i+) = \mathrm{sgn}(a_0 b_0)(-1)^{M(i)}(+\infty) ,$$
$$f(u_i-) = \mathrm{sgn}(a_0 b_0)(-1)^{M(i)}(+\infty)(-1)^{e_i} ,$$

kde $M(i)$ je nyní počet kořenů u_k liché násobnosti e_k větších než daný kořen u_i (násobnosti e_i). Pro naše potřeby evidujeme v tabulce obecné informace pouze dvě věci: pod body u_i je buď nula (při $t_i=0$) nebo symbol "/" (při $t_i>0$) pro <u>ne</u>definování funkce R (srov. 3. a 4. řádek tabulky).

1. Součinový tvar pro sgn R

Nejdříve rozšíříme zjednodušení (3) i na nekladné celé mocniny. Platí

$$\operatorname{sgn} x^{-k} = \begin{cases} \operatorname{sgn}^{-1} x = 1/\operatorname{sgn} x & \text{pro } k \text{ liché, } k \in \mathbf{N}\ , \\ \operatorname{sgn}^{-2} x = 1/\operatorname{sgn}^2 x & \text{sudé, } k \in \dot{\mathbf{N}}_0\ . \end{cases} \tag{13}$$

Dřívější roli exponentů nyní převezmou rozdíly $e_i := r_i - t_i$. Opět použijeme rozklad kořenové množiny U na množinu Z kořenů z_i liché násobnosti e_i a na množinu V kořenů v_i sudé násobnosti e_i . Tedy

$$\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \langle z_1, \dots, z_p \rangle \sqcup \langle v_1, \dots, v_q \rangle, \qquad n = p + q\ .$$

V každé z dílčích množin je třeba rozlišovat kořeny, které se vyskytují pouze v čitateli, a kořeny, které jsou ve jmenovateli. K tomu lze např. zavést dvouhodnotovou proměnnou

$$cu_i = \begin{cases} 1 & \text{pro } t_i = 0\ , \\ -1 & t_i > 0\ . \end{cases}$$

Pak lze psát znaménko funkce R v součinovém tvaru např. takto:

$$\operatorname{sgn} R(x) = \operatorname{sgn}(a_0 b_0).\operatorname{sgn}^{cz_1}(x-z_1)\dots\operatorname{sgn}^{cz_p}(x-z_p) \\ .\operatorname{sgn}^{2cv_1}(x-v_1)\dots\operatorname{sgn}^{2cv_q}(x-v_q)\ . \tag{ZRs}$$

Použijeme-li dvouhodnotovou "logickou" proměnnou j_i nabývající hodnoty 1, resp. 0, při přítomnosti, resp. nepřítomnosti kořene u_i ve jmenovateli, pak potřebné hodnoty proměnné dává výraz $1-2j_i$. Lze např. položit $j_i = \operatorname{sgn} t_i$.

2. Součtový tvar pro sgn R

V tabulce základních informací $[u_i; r_i, t_i]$, $i=1,\dots,n$, doplníme řádek funkčních "hodnot" $s_0, s_1, \dots, s_n$, $\operatorname{sgn} R(u_1), \dots, \operatorname{sgn} R(u_n)$. Vyjdeme vpravo z hodnoty $s_n = \operatorname{sgn}(a_0 b_0)$ a po průchodu kořenem u_i měníme znaménko v posloupnosti $\{s_i\}$, právě když $e_i = r_i - t_i$ je liché. K bodům u_i napíšeme 0, je-li $t_i = 0$; jinak proškrtneme (R není definována). Odtud dostaneme pro znaménko racionální funkce součtový (aditivní) tvar

$$\operatorname{sgn} R(x) = d + l_1 \operatorname{sgn}^{cu_1}(x-u_1) + \dots + l_n{}^{cu_n}\operatorname{sgn}(x-u_n) + \\ + m_1 \operatorname{sgn}^{2cu_1}(x-u_1) + \dots + m_n \operatorname{sgn}^{2cu_n}(x-u_n), \tag{ZRa}$$

Zde d, l_i, m_i jsou dány vzorci (Zk). Z nich opět plyne, že vždy právě jeden z dvojice koeficientů l_i, m_i je ± 1 a druhý je nulový. Při výpočtu můžeme využít tabulky

r_i t_i		r_1 t_1		r_2 t_2			r_n t_n	
x	$(-\infty, u_1)$	u_1	(u_1, u_2)	u_2	$\ldots$	(u_{n-1}, u_n)	u_n	$(u_n, +\infty)$
sgn R	s_0	$*_1$	s_1	$*_2$		s_{n-1}	$*_n$	$s_n = sgn(a_0 b_0)$
l_i m_i		l_1 m_1		l_2 m_2			l_n m_n	

$d = - s_1 - \ldots - s_{n-1}$

Zde symbol $*$ označuje dvě možnosti:

$$*_i = \begin{cases} 0 & \text{pro } t_i = 0, \\ / & t_i > 0, \text{ tj. } R(x) \text{ není v } u_i \text{ definována.} \end{cases}$$

Obecná součtová formule pro sgn R ze zadaných trojic $[u_i; r_i, t_i]$ pro racionální funkci R se odvodí analogicky jako pro polynomickou funkci. Užijeme-li např. funkce $M(j)$, jež udává počet kořenů u_i liché násobnosti e_i, které jsou větší než kořen v_j sudé násobnosti e_j, pak

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} R(x) = d + \operatorname{sgn}(a_0 b_0)[&\operatorname{sgn}^{c z_p}(x - z_p) - \ldots + \\ &+ (-1)^{p-1} \operatorname{sgn}^{c z_1}(x - z_1) + \\ &+ (-1)^{M(1)} \operatorname{sgn}^{2 c v_1}(x - v_1) + \ldots + \\ &+ (-1)^{M(q)} \operatorname{sgn}^{2 c v_q}(x - v_q)] . \end{aligned} \qquad \text{(ZRaM)}$$

Zde d je opět dáno formulí (dM), kde pouze místo sgn a_0 bude $sgn(a_0 b_0)$.

<u>Příklad 4.</u> Racionální funkce R je dána jako podíl dvou polynomů v součinových tvarech

$$R(x) = \frac{x^6 (x-1)^3 (x-2)(x-3)^7 (x-4)^5 \qquad (x-6)^3 (2x^2+1)}{x^2 (x-1)^5 \qquad (x-3)^7 (x-4)^8 (x-5) \qquad (x^4+1)} = \left[\begin{matrix}\text{krá-}\\\text{cení}\end{matrix}\right] =$$

$$= x^4 (x-1)^{-2} (x-2)(x-3)^0 (x-4)^{-3} (x-5)^{-1} (x-6)^3 \, .$$

$$. (2x^2+1)/(x^4+1)$$

Na obrázku jsou nakresleny skici grafu R a grafu sgn R . Je zde přihlédnuto k asymptotickému chování funkce R v okolí bodů

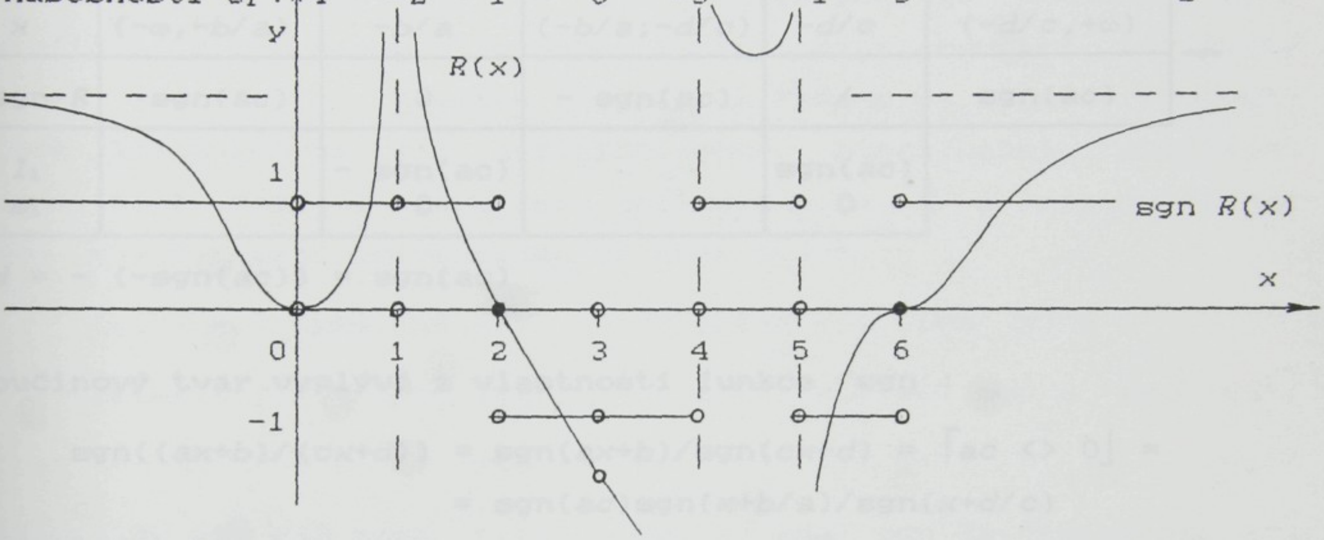
u_i a pro $x \to \pm\infty$. Platí

$$R(x) \approx \alpha_i (x-u_i)^{r_i - t_i} \quad \text{pro} \quad x \to u_i ,$$

kde konstanta α_i je funkční hodnotou "zbytku" racionální funkce v bodě u_i . Dále

$$R(x) \approx \operatorname{sgn}(a_0 b_0) x^{\operatorname{st} P - \operatorname{st} Q} \quad \text{pro} \quad x \to \pm\infty .$$

násobnosti e_i : 4 -2 1 0 -3 -1 3 2



Údaje o funkci R převezmeme ze zadávajícího výrazu do prvních tří řádků tabulky. Směrem zprava doleva vyplníme 4. řádek funkčních hodnot, vypočteme koeficienty l_i , m_i a přičítací konstantu d podle vzorců (Zk) (tj. poloviny skoků (přírůstků), průměry sousedních a minus součet vnitřních stupňů znaménkové funkce sgn R).

r_i		6		3		1		7		5		0		3		n=7,
t_i		2		5		0		7		8		1		0		p=4, q=3
x	(−∞,0)	0		1		2		3		4		5		6		(6,+∞)
sgn R	1	/	1	/	1	0	−1	/	−1	/	1	/	−1	0		1=sgn($a_0 b_0$)
l_i		0		0		−1		0		1		−1		1		
m_i		1		1		0		−1		0		0		0		

$$d = - s_1 - \ldots - s_{n-1} = -(s_1 + \ldots + s_6) = 0$$

Z posledních čtyř řádků tabulky hned píšeme

$$\operatorname{sgn} R(x) = - \operatorname{sgn}(x-2) + 1/\operatorname{sgn}(x-4) - 1/\operatorname{sgn}(x-5) + \operatorname{sgn}(x-6)$$
$$+ 1/|\operatorname{sgn} x| + 1/|\operatorname{sgn}(x-1)| - 1/|\operatorname{sgn}(x-3)|$$

Dosazením do vzorce (ZRaM) dostaneme ovšem stejný výsledek. ⊔

Příklad 5. Nejjednodušší zajímavou racionální funkcí je lineární lomená funkce daná předpisem $R(x) = (ax+b)/(cx+d)$, kde $ad <> bc$, $c <> 0$. V připojené tabulce příslušné znaménkové funkce sgn R předpokládáme pro určitost, že $ac <> 0$, $-b/a < -d/c$.

r_i t_i		1 0		0 1	$n=2$, $p=2$, $q=0$
x	$(-\infty,-b/a)$	$-b/a$	$(-b/a;-d/c)$	$-d/c$	$(-d/c,+\infty)$
sgn R	sgn(ac)	0	- sgn(ac)	/	sgn(ac)
l_i m_i		- sgn(ac) 0		sgn(ac) 0	

d = - (-sgn(ac)) = sgn(ac)

Součinový tvar vyplývá z vlastností funkce sgn :

$$\mathrm{sgn}((ax+b)/(cx+d)) = \mathrm{sgn}(ax+b)/\mathrm{sgn}(cx+d) = \lceil ac <> 0 \rfloor =$$
$$= \mathrm{sgn}(ac)\mathrm{sgn}(x+b/a)/\mathrm{sgn}(x+d/c)$$

Součtový tvar (z tabulky nebo z obecné formule (ZRa)) je

$$\mathrm{sgn}((ax+b)/(cx+d)) = \mathrm{sgn}(ac)(1 -\mathrm{sgn}(x+b/a) +1/\mathrm{sgn}(x+d/c))$$

C2K6. MULTIPLIKATIVITA FUNKCE SGN

Reálnou funkci f definovanou na množině $D \subset \mathbb{R}$, nazýváme multiplikativní (též m-funkcí), zachovává-li tam operaci násobení, tj. platí-li

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{pro vš. } x, y \in D . \qquad (1)$$

V literatuře [BS-83:18,92,93; Dav-83:51₂-3⁸; Jd1-56:221; Neu-86:49; Smí-84:44,59] je tato rovnice obvykle uváděna v souvislosti s významnou Cauchyho funkcionální rovnicí aditivity $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Rovnice (1) je pak řešena za různých předpokladů kladených na f: definiční obor, monotónnost, spojitost apod. Např. řešení, která jsou definována na $\mathbb{R}$ a jsou monotónní pro $x > 0$, mají právě jeden ze čtyř tvarů:

$$f_1(x) = 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R} ; \qquad f_2(x) = 1 \text{ pro } x \in \mathbb{R} ;$$

$$f_3(x) = \begin{cases} |x|^c & \text{pro } x \in \mathbb{R}^* , \\ 0 & x=0 ; \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} |x|^c . \operatorname{sgn} x & \text{pro } x \in \mathbb{R}^* , \\ 0 & x=0 . \end{cases}$$

Speciálně pro $c=0$ máme $f_4(x) = \operatorname{sgn} x$, kde sgn je "znaménko x": $\operatorname{sgn} \mathbb{R}^+ = 1$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$, $\operatorname{sgn} \mathbb{R}^- = -1$. Dále funkce f_3 dává pro $c=0$ $f_3(x) = |\operatorname{sgn} x| = \operatorname{sgn}^2 x$, pro $c=1$ je $f_3(x) = |x|$, $f_4(x) = x$.

Nyní budeme řešit rovnici (1) za předpokladu, že f je definována na celé množině $\mathbb{R}$ a má konečnou hodnotovou množinu.

A. KONEČNĚHODNOTOVÉ MULTIPLIKATIVNÍ FUNKCE

Rovnice (1) dává pro $x = y = c \in \mathbb{R}$ výsledek

$$f(c^2) = f^2(c) \geq 0 , \qquad (2)$$

což znamená, že multiplikativní funkce f je na $\mathbb{R}_0^+$ nezáporná. Speciálně pro $c=0$ máme $f(0) = f^2(0) \geq 0$, pro $c=1$ je $f(1) = f^2(1) \geq 0$. Dalším důsledkem vztahu (1) je

$$f(c^2) = f^2(c) = f((-c)^2) \Rightarrow |f(-c)| = |f(c)| . \qquad (3)$$

Pro $y=0$ dostáváme z (1)

$$f(0) = f(x)f(0) .$$

Je-li $f(0)$ nenulové, dává vykrácení $f(x) \equiv 1$, tj. vychází konstantní (jednohodnotová) funkce (pak též $f(0) = 1$). V zajímavějších případech je tedy vždy $f(0) = 0$. Pro jednohodnotovou m-funkci f je pak $f(x) \equiv 0$, a tato funkce zřejmě splňuje (1).

Pro aspoň dvouhodnotovou funkci f existuje číslo $c \in \mathbf{R}$, že $f(c) \in \mathbf{R}^*$, a z rovnice

$$f(c) = f(1.c) = f(1).f(c)$$

po vykrácení činitelem $f(c)$ máme $f(1)=1$. Protože pro $x \in \mathbf{R}^*$ platí

$$1 = f(1) = f(x.x^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) ,$$

je pro aspoň dvouhodnotovou m-funkci $f(\mathbf{R}^*) \subset \mathbf{R}^*$, a pro právě dvouhodnotovou m-funkci je $f(\mathbf{R}^*)=1$. Tedy u aspoň dvouhodnotové multiplikativní funkce je vždy $f(0)=0$, $f(1)=1$. Obecně je podle (2) $f(\mathbf{R}^+) \geq 0$ a pro aspoň dvouhodnotovou f je dokonce $f(\mathbf{R}^+) > 0$. Pro právě dvouhodnotovou m-funkci f je $f(\mathbf{R}^-) = f(\mathbf{R}^*) = f(1) = 1 > 0$. Tuto m-funkci lze zapsat pomocí funkce sgn ve tvaru $y = \operatorname{sgn}^2 x$, $x \in \mathbf{R}$.

Dále pro aspoň dvouhodnotovou m-funkci platí pro $x, y < 0$

$$0 < f(xy) = f(x)f(y) ,$$

takže funkční hodnoty pro všechny záporné argumenty mají shodná znaménka: $f(\mathbf{R}^-) > 0$ nebo $f(\mathbf{R}^-) < 0$.

Pro aspoň trojhodnotovou m-funkci f existuje $c \in \mathbf{R} \setminus \{0;1\}$, že též $f(c) \in \mathbf{R} \setminus \{0;1\}$. Pro právě trojhodnotovou m-funkci je pak $f(c^2) = f^2(c) \in \{0;1;f(c)\}$. Dvě možnosti: $f^2(c) = 0$, $f^2(c) = f(c)$ dávají nevyhovující řešení $f(c) \in \{0,1\}$. Třetí rovnice $f^2(c) = 1$ poskytuje nové řešení $f(c) = -1$. Přitom víme, že pro aspoň dvouhodnotovou m-funkci musí takové c být z $\mathbf{R}^-$, a proto při $n(f(\mathbf{R})) = 3$ je $f(\mathbf{R}^-) = -1 < 0$. Speciálně též $f(-1) = -1$. Celkem pro právě trojhodnotovou m-funkci máme: $f(\mathbf{R}^+) = 1$, $f(0) = 0$, $f(\mathbf{R}^-) = -1$. Známe ji pod označením sgn.

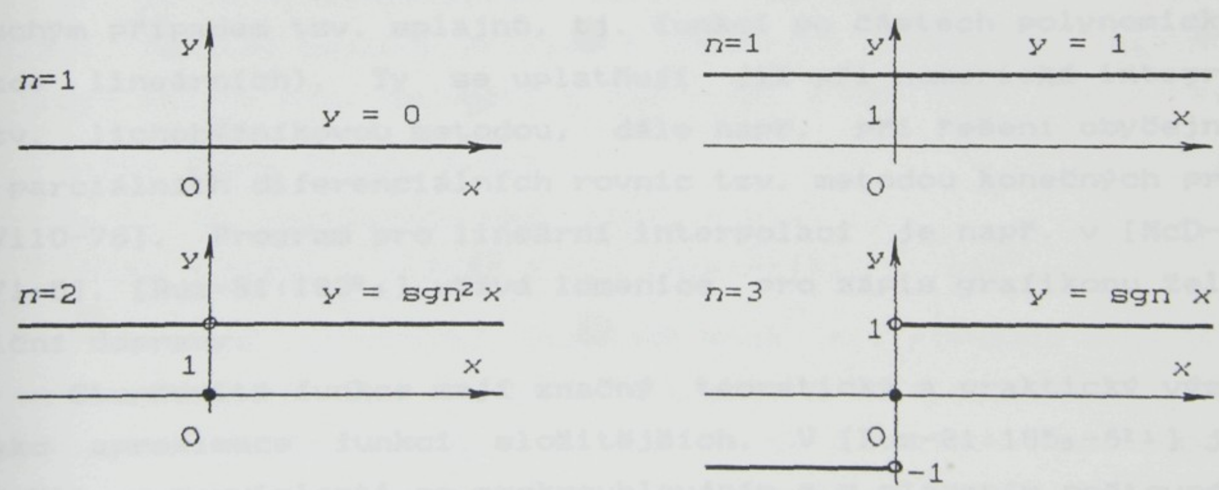
Pro více než trojhodnotovou m-funkci f, tj. $n(f(\mathbf{R})) > 3$, je $\{0;1;a;b\} \subset f(\mathbf{R})$ a můžeme předpokládat, že $b \in \mathbf{R} \setminus \{0;\pm 1\}$, a tedy $|b| \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$. Je-li $f(c) = b$, pak posloupnost funkčních hodnot $f(c^k) = b^k$, $k \in \mathbf{N}$, má všechny členy navzájem různé, neboť rovnost $|b|^k = |b|^p$ platí při $|b| \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$ pouze pro $k=p$. Aspoň čtyřhodnotová m-funkce je tedy už aspoň spočetněhodnotová.

V terminologii algebraických struktur jsou řešení f rovnice (1) endomorfizmy multiplikativního (komutativního) monoidu $\langle \mathbf{R};.\rangle$ všech reálných čísel (tj. včetně nuly) na jeho konečné podmonoidy. Konečných multiplikativních podmonoidů je pouze pět. Čtyři z nich s nosiči $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0;1\}$, $\{0;1;-1\}$ odpovídají postupně jedno, dvou a trojhodnotovým řešením rovnice (1). Dvouprvková grupa $\langle\{1;-1\};.\rangle$ nepřichází v úvahu, protože aspoň dvouhodnotová m-funkce musí, jak víme, nabývat nuly. Trochu jiné (samostatné) zdůvodnění: protože $f(0)\in f(\mathbf{R}) = \{\pm1\}$, je $f(0)$ nenulové a z rovnosti $f(0)= f(0c)= f(0)f(c)$ plyne po vykrácení činitelem $f(0)$, že $f(c)=1$ pro vš. $c\in \mathbf{R}$; proto nemůže f nabývat ještě hodnoty -1.

Získané výsledky shrneme ve stromovém tabulkovém přehledu:

mohutnost $f(\mathbf{R})$	=>	vlastnost m-funkce f
$n(f(\mathbf{R})) \geq 1$		$f(\mathbf{R}_0{}^+)\geq 0$, $\lvert f(-c)\rvert = \lvert f(c)\rvert$, spec. $f(-1)=\pm f(1)$
$= 1$		$f(x)\equiv 0$ v $f(x)\equiv 1$
≥ 2		$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(\mathbf{R}^+)>0$, $\operatorname{sgn} f(\mathbf{R}^-) \in \{\pm1\}$
$= 2$		$f(x) = \operatorname{sgn}^2 x$
≥ 3		$f(\mathbf{R})=\{0;\pm1\}$ nebo $f(\mathbf{R})$ je nekonečná
$= 3$		$f(x) = \operatorname{sgn} x$
> 3		$f(\mathbf{R})$ je aspoň spočetná

V přehledu uvádíme grafy všech čtyř konečněhodnotových multiplikativních funkcí:



Zajímavé konečněhodnotové m-funkce jsou tedy dvě: dvouhodnotová $y = \operatorname{sgn}^2 x$ a trojhodnotová $y = \operatorname{sgn} x$.

 -237-

C2K7. POZNÁMKY

Většina této části vznikla v letech 1989-90 při řešení EÚ X-01-05-20: Tvorba učebních a konzultačních programů v matematice - srov. [Vi43-90].

Tématika po částech lineárních funkcí (zejména spojitých) leží na přechodu mezi středoškolskou a vysokoškolskou látkou. Elementy příslušné teorie lze nalézt ve středoškolských učebnicích a v různých příručkách: [BO-86; Buš-82; HN-82; LM-84; Ves-82]. Vyskytují se též v přijímacích zkouškách na VŠ a v úvodních partiích vysokoškolské matematiky - např. [Čec-54; Hoj-82; Vi42-90; Tom-69; Vi37-88]. Dvě speciální stupňovité funkce nacházíme v [EG-90:59]: "škytavková" funkce (hiccup function) je definována vztahy $h(\mathbb{R}^*) = 1$, $h(0) = 2$; Heavisideova funkce je zvána sportovně "skokanské prkno" (diving board function).

Významnější je ovšem užití lomených čar v aplikacích a v numerických metodách. Slouží dobře jako nejjednodušší spojité aproximace komplikovanějších funkcí, např. jako tětivové (vepsané) či jako tečnové (opsané) náhrady složitějších křivek. Jsou jednoduchým případem tzv. splajnů, tj. funkcí po částech polynomických (zde lineárních). Ty se uplatňují již při numerické integraci tzv. lichoběžníkovou metodou, dále např. při řešení obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic tzv. metodou konečných prvků [Vi10-76]. Program pro lineární interpolaci je např. v [McD-69: 271-5]. [Ruz-81:182^{8}_{8}] užívá lomenice pro zápis grafikonu železniční dopravy.

Stupňovité funkce mají značný teoretický a praktický význam jako aproximace funkcí složitějších. V [Ruz-81:185_{5}-6^{21}] jsou použity v souvislosti se zaokrouhlováním a s placením poštovného. Běžně se jimi ilustruje nespojitost typu skok. Základem pro rozvoj teorie jsou např. v [BH-86; GLF-67; Kle-86; MSh-83; PZ-66; ŠiS-60]. Námi uvedená vyjádření redukují informační šeď, jsou vhodná pro algebraické manipulace a poskytují též možnost kompaktních programových realizací funkčních bi-tabulek.

Probíraná tématika se objevuje dále v pracích autora [Vi37-88; Vi40-88; Vi42-90; Vi44-90; Vi50-91; Vi53-90]. Zmínka je též ve studentských pracích [Sč31-86; Sč43-89].

 -301-

Část III. Matice mezních hodností

V dalším se budeme zabývat obecně obdélníkovými $(r{\times}s)$-maticemi s reálnými prvky, tj. maticemi o r řádcích a s sloupcích. Speciálně $(r{\times}1)$-matice nazýváme sloupc(ovým)i r-vektory (o r souřadnicích) a $(1{\times}s)$-matice jsou řádk(ové s-vektor)y (o s souřadnicích); $(r{\times}s)$-matici pak můžeme chápat jako systém (řádek) s sloupcových r-vektorů, či jako sloupec r řádkových s-vektorů. Při $s = r$ hovoříme o čtvercových maticích řádu (= stupně) r, stručně o r-maticích.

Významnou vnitřní charakteristikou matice A je její hodnost $h(A)$. Ta je dána maximálním počtem lineárně nezávislých řádků matice A, který je - jak známo - roven maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců matice A. Rozměry $(r{\times}s)$-matice spolu s její hodností udávají rozsah podstatné informace v matici. Platí:

$$h(A) \le \min\{r,s\} \quad \text{pro } (r{\times}s)\text{-matici } A . \tag{1}$$

Při maticových operacích (sčítání a násobení matic) se předpokládá, že jsou splněny příslušné rozměrové požadavky. Uplatňují se známé vztahy mezi hodností a operacemi s maticemi - zejména:

$$h(AB) \le \min\{h(A),\, h(B)\}\ , \tag{2}$$

je-li B regulární, pak $h(AB) = h(A)$;

$$|h(A) - h(B)| \le h(A+B) \le \min\{h(A)+h(B),\ r,\ s\} \tag{3}$$

V textu se vyskytuje v indexech znak $*$, převzatý z programovacího jazyka PL/1. Je-li $A = [a_{ik}]$, pak a_{i*} označuje i-tý řádek, a_{*k} je k-tý sloupec a a_{**} je celá matice A. Místy se užívá symbolika a terminologie podle [Mor-84].

C3K1. DVĚ INTERPRETACE SOUČINU MATIC

Součin AB $(r{\times}s)$-matice A a $(s{\times}t)$-matice B se obvykle zavádí (v souhlase se skládáním lineárních operátorů reprezentovaných maticemi A, B) a formuluje pomocí skalárních součinů s-řádků matice A s s-sloupci matice B. Tedy pro prvky c_{ik} součinové matice C platí

$$C = [c_{ik}]_{\substack{i=1,\dots,r\\ k=1,\dots,t}}\ ,\quad c_{ik} = a_{i*}.b_{*k} = \text{—|} \quad \text{[skalární součin]}$$

Tedy, chápeme-li matici A jako sloupec jejích řádků a_{i*} a matici B jako řádek jejích sloupců b_{*k}, pak

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{1*} \\ \vdots \\ a_{i*} \\ \vdots \\ a_{r*} \end{bmatrix} [b_{*1}, \ldots, b_{*k}, \ldots, b_{*t}] \tag{4}$$

Obvyklá řádkově - sloupcová formulace součinu matic (řádky levé krát sloupce pravé matice) je tedy tvaru

$$C = [a_{i*} . b_{*k}]_{\substack{i=1,\ldots,r \\ k=1,\ldots,t}}$$

Chápeme-li naopak matici A jako řádek jejích sloupců a_{*i} a matici B jako sloupec jejích řádků b_{k*}, dostáváme jiné (méně frekventované) vyjádření součinu AB :

$$AB = [a_{*1}, \ldots, a_{*i}, \ldots, a_{*s}] \begin{bmatrix} b_{1*} \\ \vdots \\ b_{i*} \\ \vdots \\ b_{s*} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{s} a_{*i} b_{i*} \qquad \left[= \Sigma \,|\, - \right] \tag{5}$$

Tuto formulaci součinu matic můžeme nazvat sloupcově-řádkovou, neboť tentokrát se sloupce levé matice násobí (shodně umístěnými) řádky pravé matice (a tyto maticové mezivýsledky se pak sečtou). Součin matic je takto vyjádřen jako součet součinů sloupců s řádky. Každý z dílčích součinů (sloupec krát řádek) je matice (nejvýš) hodnosti 1 . Tím jsme přepsali součin matic jako součet matic hodnosti 1 .

__Příklad__: Pro (2x2)-matice máme konkrétně

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} [e \ f] + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} [g \ h] = \begin{bmatrix} ae, & af \\ ce, & cf \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bg, & bh \\ dg, & dh \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ae + bg \ , & af + bh \\ ce + dg \ , & cf + dh \end{bmatrix}$$

$\sqcup$

Při programování se používá běžně postup se skalárními součiny. Druhý postup je totiž při přímočarém přepisu náročnější na výpočet indexů.

C3K2. MATICE HODNOSTI 1

Nejjednodušší maticí je číslo, je-li nenulové, má matice hodnost 1. Ke dvěma sloupcovým r-vektorům a, b přiřadíme jediné číslo, podrobíme-li je skalárnímu (neboli vnitřnímu) součinu:

$$a^T b = \sum_{i=1}^{r} a_i b_i = b^T a . \tag{1}$$

Vnější (někdy též vektorový, dyadický, Kroneckerův, tenzorový) součin dvou vektorů $a = [a_1,\dots,a_r]^T$, $b = [b_1,\dots,b_s]^T$ je definován souhlasně s maticovým násobením:

$$ab^T = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_s \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_s \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_r b_1 & a_r b_2 & \dots & a_r b_s \end{bmatrix} . \tag{2}$$

V prvním případě se dvouřádková informace redukuje na jediné číslo, ve druhém se rozprostře do dvourozměrné tabulky. V obou případech má výsledek nejvýš hodnost 1 .

A. SOUČINOVÉ CHARAKTERIZACE MATIC HODNOSTI 1

Podle definice hodnosti matice musí matice hodnosti 1 obsahovat aspoň jeden nenulový prvek. Strukturu matic hodnosti 1 lze popsat v různých termínech a označení.

__Věta:__ $(r\times s)$-matice $A = [a_{**}]$ má hodnost 1 , právě když platí některá z následujících (ekvivalentních) podmínek:

1. Existuje $a_{ik} \neq 0$ a platí

$$a_{j*} = \alpha_j a_{i*} , \quad \alpha_j \in \mathbf{R} , \quad j=1,\dots,r ; \tag{3}$$
$$a_{*j} = \beta_j a_{*k} , \quad \beta_j \in \mathbf{R} , \quad j=1,\dots,s .$$

2. Existují nenulová r-tice $(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ a nenulová s-tice $(\tau_1,\dots,\tau_s)$ takové, že platí

$$a_{ik} = \sigma_i \tau_k , \quad i=1,\dots,r ; \quad k=1,\dots,s . \tag{4}$$

3. Existují nenulový r-sloupec c a nenulový s-řádek l , že

$$A = cl \qquad [\underline{c}olumn.\underline{l}ine = sloupec.řádek] \tag{5}$$

4. Existují dvě nenulové diagonální čtvercové matice:

r-matice V a s-matice W takové, že

$A = VJW$, kde J je $(r{\times}s)$-matice složená ze samých 1 . (6)

⊔⊔

První vlastnost je řádková, resp. sloupcová, úměrnost. Odtud plyne ihned, že nulové prvky se v matici hodnosti 1 vyskytují v celých blocích. Je-li prvek $a_{ik} = 0$, pak buď jeho řádek (a)nebo sloupec je celý nulový - nulový prvek v matici hodnosti 1 tedy "probíjí" celý svůj řádek (a)nebo sloupec - formálněji:

$$A = a_{**}\ ,\quad h(A) = 1,\quad a_{ik} = 0 \;\Rightarrow\; a_{i*} = o_s{}^T \;\vee\; a_{*k} = o_r\ . \tag{7}$$

Permutacemi řádků a permutacemi sloupců lze shromáždit všechny nenulové prvky do levého horního bloku matice již bez nulových prvků.

Věta: Ke každé $(r{\times}s)$-matici A , $h(A) = 1$, existují čtvercové permutační $(r{\times}r)$-matice P a $(s{\times}s)$-matice Q takové, že

$$PAQ = \begin{bmatrix} B, & \underline{0} \\ \underline{0}, & \underline{0} \end{bmatrix} = c1\ .$$

Zde $(m{\times}n)$-blok B má všechny prvky nenulové, $\underline{0}$ jsou nulové matice.

Sloupec c má právě m vedoucích souřadnic nenulových (první lze položit rovnu 1), řádek 1 má právě n nenulových úvodních souřadnic.

⊔⊔

Příklad: $A = \begin{bmatrix} 0 & \times & \times & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, pak $PAQ = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

kde $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\times$ označuje nenulový prvek. ⊔⊔

B. STANDARDNÍ c1-TVAR

V dalším použijeme především vlastnost 3, tj. vyjádření matic hodnosti 1 v tzv. c1-tvaru (sloupcově-řádkový tvar) (5):

$[r\text{-sloupec}].[s\text{-řádek}]$, schematicky $\quad r\,\big|\overline{\;\;s\;\;}$

Podle vlastnosti 1 stačí v roli c vzít jeden z nenulových sloupců a_{*k} matice A a řádek l sestavit z násobicích koeficientů β_j pro výpočet jednotlivých sloupců výchozí matice A . Podobně můžeme položit $l = a_{i*} <> o^T$ a do c dát koeficienty α_j pro výpočet všech řádků z A . Samozřejmě platí

$$cl = [(1/æ)c].[æl] \text{ , kde } æ \in R^* \text{ je } \underline{ne}\text{nulová konstanta.}$$

Pomocí æ lze normalizovat vektor c . Volíme-li např. jeho první nenulovou souřadnici rovnu 1 , je cl-tvar dán jednoznačně.

__Věta:__ (rxs)-matici A , $h(A) = 1$, lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru součinu A = cl , kde r-sloupec c má první nenulovou souřadnici rovnu 1 a l je s-řádek.

__Důkaz__ při $a_{11} <> 0$ plyne např. z jednoznačnosti tzv. LU-rozkladu matice A - viz dále. $\sqcup\!\sqcup$

Prakticky se cl-tvar matice pořizuje pomocí dobře známé Gaussovy eliminace, kdy se vhodné násobky prvního nenulového řádku odčítají od následujících řádků. Je-li (rxs)-matice $A = a_{**}$ hodnosti 1 , pak dostáváme hned (předpokládáme $a_{11}<>0$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_{21}/a_{11} \\ . \\ . \\ . \\ a_{r1}/a_{11} \end{bmatrix} [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1s}] = \tag{8}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \bigcirc \\ m_{21} & 1 & & \\ . & & \ddots & \\ . & & & \\ . & & & \\ m_{r1} & \bigcirc & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ & & & \\ & \bigcirc & & \\ & & & \end{bmatrix} ,$$

kde $m_{i1} := a_{i1}/a_{11}$, $i = 2,\dots,r$.

Poslední maticový součin je tzv. LU-rozklad matice A , A = LU , který je dán jednoznačně. Přitom L je agregovaná Gaussova eliminační matice, U je výsledkem eliminace.

Z (8) je vidět, že eliminační pořízení cl-rozkladu (rxs)-matice A , $h(A) = 1$, vyžaduje $r - 1$ dělení pro výpočet a_{i1}/a_{11} , $i=2,3,\dots,r$. Nevíme-li předem, že jde o matici hodnosti 1 , je třeba prověřit, zda po eliminaci jsou všechny řádky (až na první) nulové. Je-li $a_{11} = 0$, pak dělíme první nenulový sloupec prvním nenulovým prvkem v prvním nenulovém řádku.

C. SPECIÁLNÍ MATICE HODNOSTI 1

Nejvýznamnější jsou matice se speciálním cl-tvarem, kde jeden z vektorů c, l je jednotkový vektor e_k a druhý se volí podle potřeby - často má sérii nulových souřadnic.

Matice s jediným nenulovým prvkem α na místě $[i,j]$ jsou nejjednodušší. Lze je vyjádřit ve tvaru

$$U_{ij}(\alpha) = \alpha e_i e_j^T . \tag{9}$$

Speciálně při $\alpha=1$ se zjednodušeně píše $U_{ij} := U_{ij}(1) = e_i e_j^T$. Platí

$$U_{ij}U_{kl} = e_i(e_j^T e_k)e_l^T = \begin{cases} O & \text{pro } j<>k, \\ U_{il} & \text{pro } j=k . \end{cases} \tag{10}$$

Speciálně

$$U_{ij}^2 = \begin{cases} O & \text{pro } i<>j , \text{ (nilpotentnost)}, \\ U_{ii} & i=j , \text{ (idempotentnost)}, \end{cases}$$

Podmínka komutativnosti matic U zní

$$U_{ij}U_{kl} = U_{kl}U_{ij} = O \text{ pro } |j-k|.|i-l| > 0 , \tag{11}$$

a ovšem nezajímavá možnost $i=j=k=l$, kdy $U_{ii}^2 = U_{ii}$. V ostatních případech jsou matice U nekomutativní.

Matice s jediným nenulovým i-tým r-sloupcem (resp. řádkem) lze psát ve tvaru

$$S_i = [\alpha_1,\ldots,\alpha_r]^T e_i^T = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k e_k e_i^T = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k U_{ki} \tag{12}$$

$$R_i = e_i[\alpha_1,\ldots,\alpha_r] = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k e_i e_k^T = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k U_{ik}$$

Z nich jsou frekventované matice, které mají nenulové souřadnice jen ve sloupci pod hlavní diagonálou nebo mimo diagonálu:

$$P_i = [0,\ldots,0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_r]^T e_i^T = \sum_{k=i+1}^{r} \alpha_k U_{ki} , \tag{13}$$

$$Q_i = [\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_r]^T e_i^T = \sum_{k<>i} \alpha_k U_{ki} . \tag{14}$$

D. NÁSOBENÍ SLOUPCŮ A ŘÁDKŮ

Sloupcový r-vektor (též r-sloupec) c chápeme jako $(r\times 1)$-matici, podobně řádkový s-vektor (též s-řádek) l je $(1\times s)$-matice. Pojímáme-li součin matic AB v běžném smyslu (založeném na skalárních součinech řádků matice A se sloupci matice B), pak pro 4 možné kombinace sloupců a řádků platí:

zápis	schéma	slovně	(ne)definován
$c_1 c_2$	| . |	sloupec.sloupec	<u>není</u> definován
$l_1 l_2$	— . —	řádek.řádek	<u>není</u> definován
$c_1 l_2$	| . — = □	sloupec.řádek	je definován vždy
$l_1 c_1$	— . | = .	řádek.sloupec	je definován pouze, mají-li oba vektory shodný počet souřadnic

Ve všech případech ztotožňujeme jednosouřadnicový vektor s číslem (rovným souřadnici), kterým pak lze násobit libovolnou matici. Připomeňme, že z praktických (i teoretických) důvodů odkládáme pronásobování matice skalárem co nejdéle (nejčastěji je záhodno mít konstantu vytknutou). Rovněž je třeba si uvědomit, že může být rozdíl mezi násobením konstantou a násobením souřadnicemi vektoru (zde se musí ještě určit umístění, tj. index souřadnic).

Při násobení sloupců a řádků mohou vznikat různé (mezi)výsledky. Následuje přehled možných (tj., kdy je definován součin) situací ve tvaru

označení schématu ¦ zápis ¦ schematické označení

symbolicko-slovní popis [komentář]

mult(schématu) ... násobicí složitost schématu

adit(schématu) ... sčítací složitost schématu

Poznamenejme, že shodně indexované vektory mají shodný počet souřadnic.

$\boxed{\text{S1}}$ $c_1 l_2$ |—— = □

r_1-sloupec.r_2-řádek = $(r_1 \times r_2)$-matice

mult(S1) = $r_1 r_2$

adit(S1) = 0

S2 $l_1 c_1$ — | = .

r_1-řádek.r_1-sloupec = číslo [skalární součin vektorů]

mult(S2) = r_1

adit(S2) = $r_1 - 1$

S3 $(c_1 l_2)c_2$ (|—) | = □ | = |

(r_1-sloupec.r_2-řádek).r_2-sloupec =

= ($r_1 \times r_2$)-matice.r_2-sloupec = r_1-sloupec

mult(S3) = $r_1 r_2 + r_1 r_2 = 2 r_1 r_2$

adit(S3) = $0 + r_1(r_2 - 1) = r_1(r_2 - 1)$

S4 $c_1(l_2 c_2)$ |(—|) = |. = |

r_1-sloupec.(r_2-řádek.r_2-sloupec) = r_1-sloupec.číslo =

= r_1-sloupec

mult(S4) = $r_2 + r_1 = r_1 + r_2$

adit(S4) = $r_2 - 1 + 0 = r_2 - 1$

S5 $(l_1 c_1)l_2$ (—|) — = .— = —

(r_1-řádek.r_1-sloupec).r_2-řádek=číslo.r_2-řádek=r_2-řádek

mult(S5) = $r_1 + r_2$

adit(S5) = $r_1 - 1 + 0 = r_1 - 1$

S6 $l_1(c_1 l_2)$ — (|—) = —□ = —

r_1-řádek.(r_1-sloupec.r_2-řádek) =

= r_1-řádek.($r_1 \times r_2$)-matice = r_2-řádek

mult(S6) = $r_1 r_2 + r_2 r_1 = 2 r_1 r_2$

adit(S6) = $0 + r_2(r_1 - 1) = (r_1 - 1)r_2$

S7 $(c_1 l_2)(c_2 l_3)$ (|—)(|—) = □ □ = □

(r_1-sloupec.r_2-řádek).(r_2-sloupec.r_3-řádek) =

= ($r_1 \times r_2$)-matice.($r_2 \times r_3$)-matice = ($r_1 \times r_3$)-matice

mult(S7) = $(r_1 r_2 + r_2 r_3) + r_1 r_2 r_3$

adit(S7) = $(0+0) + r_1(r_2 - 1)r_3 = r_1(r_2 - 1)r_3$

S8 $(l_1 c_1)(l_2 c_2)$ (—|)(—|) = .. = .

$(r_1$-řádek.r_1-sloupec$)(r_2$-řádek.r_2-sloupec$)$ =

= číslo.číslo = číslo

$$\text{mult}(S8) = (r_1 + r_2) + 1 = r_1 + r_2 + 1$$

$$\text{adit}(S8) = r_1 - 1 + r_2 - 1 + 0 = r_1 + r_2 - 2$$

Pro další použití sepíšeme výsledky do přehledu, v němž připojíme početní náročnost při shodě rozměrnosti (= r) všech vektorů.

označ.	zápis	mult		adit	
schém.		obecně	$r_i = r$	obecně	$r_i = r$
S1	$c_1 l_2$	$r_1 r_2$	r^2	0	0
S2	$l_1 c_1$	r_1	r	$r_1 - 1$	$r - 1$
S3	$(c_1 l_2) c_2$	$2 r_1 r_2$	$2r^2$	$r_1 (r_2 - 1)$	$r^2 - r$
S4	$c_1 (l_2 c_2)$	$r_1 + r_2$	$2r$	$r_2 - 1$	$r - 1$
S5	$(l_1 c_1) l_2$	$r_1 + r_2$	$2r$	$r_1 - 1$	$r - 1$
S6	$l_1 (c_1 l_2)$	$2 r_1 r_2$	$2r^2$	$(r_1 - 1) r_2$	$r^2 - r$
S7	$(c_1 l_2)(c_2 l_3)$	$(r_1 + r_3 + r_1 r_3) r_2$	$r^3 + 2r^2$	$r_1 (r_2 - 1) r_3$	$r^3 - r^2$
S8	$(l_1 c_1)(l_2 c_2)$	$r_1 + r_2 + 1$	$2r+1$	$r_1 + r_2 - 2$	$2r - 2$

Shoda výrazů pro S3, S6, resp. S4, S5, je důsledkem skutečnosti, že příslušné sloupcově-řádkové struktury v sebe přecházejí transponováním.

E. SOUČIN POSLOUPNOSTI SLOUPCŮ A ŘÁDKŮ

Součin posloupnosti matic, které jsou pouze sloupci nebo řádky, je definován v běžném smyslu, právě když se pravidelně střídají sloupce a řádky a v každé bezprostředně sousedící dvojici řádek.sloupec je počet jejich souřadnic shodný. Tedy v součinu

$$c_0 l_1 c_1 l_2 c_2 \;\dots\; l_n c_n l_{n+1} \qquad \text{(D)}$$

se pravidelně střídají r_i-sloupce c_i a r_i-řádky l_i. (Sloupec a řádek se stejným indexem mají stejný počet souřadnic.)

Z mnoha možností výpočetního schématu pro realizaci (D) se bezprostředně nabízejí 3 případy (přímý postup bez rozmyslu, nejvýhodnější a nej<u>ne</u>výhodnější postup):

1. (přímočarý) postup zleva doprava
   ("přinásobování" jako obdoba "načítání");
2. výhodný postup se skalárními součiny;
3. nevýhodný postup s obdélníkovými mezivýsledky.

Výpočetní schéma, tj. přepis (D) na posloupnost součinů dvou matic lze zvolit mnoha způsoby, z nichž každý je dán volbou uzávorkování (jejich počet udávají tzv. Catalanova čísla srov. např. [AHU-79:91/2.31]). Přitom je třeba stanovit, co považujeme za výsledek. Obvykle požadujeme výsledek ve tvaru jediné matice, i když to nemusí být nejrozumnější (např. vytknutí skaláru z matice dáváme asi přednost před jejím pronásobení skalárem).

1. Přímočarý postup, tj. pronásobování postupně zleva doprava odpovídá tzv. levému uzávorkování:

$$L = (((\ldots((((c_0 l_1)c_1)l_2)c_2)\ \ldots\ )l_n)c_n)l_{n+1}\ . \tag{L}$$

V průběhu výpočtu mají mezivýsledky střídavě tvar

obdélníkové $(r_0 \times r_i)$-matice

po násobení r_0-sloupce r_i-řádkem l_i, $i=1,2,\ldots,n+1$;

sloupcového r_0-vektoru

po násobení $(r_0 \times r_i)$-matice r_i-sloupcem c_i, $i=1,2,\ldots,n$.

Odtud plyne

$$\text{mult}(L) = \sum_{i=1}^{n+1} r_0 r_i + \sum_{i=1}^{n} r_0 r_i = r_0 (2 \sum_{i=1}^{n} r_i + r_{n+1})$$

$$\text{adit}(L) = (n+1).0 + \sum_{i=1}^{n} r_0 (r_i - 1) = r_0 (\sum_{i=1}^{n} r_i - n)$$

Speciálně pro $r_i = r$, $i=0,1,\ldots,n+1$, máme

$\text{mult}(L) = r^2 (2n+1)$

$\text{adit}(L) = nr(r-1)$

2. Nejvýhodnější je uzávorkování využívající co nejvíce <u>skalární součiny</u>:

$$S = c_0 ((\prod_{i=1}^{n} l_i c_i))l_{n+1} = (\prod_{i=1}^{n} s_i) c_0 l_{n+1}\ , \tag{S}$$

kde čísla $s_i := l_i c_i$ vznikají skalárními součiny.

Skalárem $s_1 \bullet \ldots \bullet s_n$ pronásobíme ten z vektorů c_0, l_{n+1}, který má menší počet souřadnic. Označíme-li $r_K = \min\{r_0, r_{n+1}\}$, pak

$$\text{mult}(S) = \sum_{i=1}^{n} r_i + n-1 + r_0 r_{n+1} + r_K,$$

požadujeme-li jako výsledek jedinou matici A,

$= \text{dtto} \qquad + r_0 r_{n+1}$,

připouštíme-li výsledek tvaru $k.A$.

$$\text{adit}(S) = \sum_{i=1}^{n} (r_i - 1) = \sum_{i=1}^{n} r_i - n$$

3. Nevýhodná je organizace výpočtu daná uzávorkováním, které produkuje jako mezivýsledky obdélníkové matice (rectangular)

$$R = \prod_{i=0}^{n} (c_i l_{i+1}) = \prod_{i=0}^{n} A_i , \qquad \text{(R)}$$

kde $A_i = c_i l_{i+1}$ je $(r_i \times r_{i+1})$-matice.

Skutečně nyní

$$\text{mult}(R) = \sum_{i=0}^{n} \text{mult}(c_i l_{i+1}) + \text{mult}(\prod_{i=0}^{n} A_i), \quad \text{kde} \quad A_i = c_i l_{i+1} .$$

Zde ovšem násobicí složitost součinu

$$A_0 A_1 \ldots A_n$$

$n+1$ matic A_i závisí na zvoleném uzávorkování [AHU-79:83-4; Sč38-87]. Zvolíme-li např. přímočaré (i když ne vždy nejlepší) násobení zleva doprava, dostáváme

$$\text{mult}(R) = \sum_{i=0}^{n} r_i r_{i+1} + r_0 \sum_{i=1}^{n} r_i r_{i+1} ,$$

$$\text{adit}(R) = r_0 \sum_{i=1}^{n} (r_{i-1}) r_{i+1} .$$

Výsledky všech tří uvažovaných případů opět soustředíme do tabulky včetně specializace pro $r_i = r$, $i=0,\ldots,n+1$.

sch.	mult		adit	
	obecně	$r_i = r$	obecně	$r_i = r$
L	$r_0 (2 \sum_{i=1}^{n} r_i + r_{n+1})$	$(2n+1) r^2$	$r_0 (\sum_{i=1}^{n} r_i - n)$	$nr(r-1)$
S	$\sum_{i=1}^{n} r_i + n-1 + 2 r_0 r_{n+1}$	$nr + r^2 + r + n - 1$	$\sum_{i=1}^{n} r_i - n$	$n(r-1)$
R	$\sum_{i=0}^{n} r_i r_{i+1} + r_0 \sum_{i=1}^{n} r_i r_{i+1}$	$nr^3 + (n+1) r^2$	$r_0 \sum_{i=1}^{n} (r_{i-1}) r_{i+1}$	$nr^2 (r-1)$

Algoritmy pro zmíněné tři organizace výpočtu součinu posloupnosti sloupců a řádků byly realizovány v práci [Sč44-89].

F. VÝPOČET A^n PŘI $h(A) = 1$

Mocnina A^n čtvercové r-matice A je definována jako součin n exemplářů matice A, což dává hned výpočetní postup založený na $(n-1)$-krát opakovaném násobení maticí A. K tomu je třeba $(n-1)r^3$ násobení a $(n-1)r^2(r-1)$ sčítání.

Výhodný je zdvojmocňovací postup běžně popisovaný v učebních textech [Abr-82:17[1]-8[4]; BGH-78:334-40[7]; Ben-90:64[7]-5[10]] a realizovaný např. v práci SVOČ [Sč38-87]. Ten vychází z převodu desítkového exponentu n do dvojkové soustavy. Platí totiž

$$A^n = A^{\sum_{i=0}^{k} d_i 2^i} = (A^{d_k 2^k})(A^{d_{k-1} 2^{k-1}}) \ldots (A^{d_2 2^2})(A^{d_1 2^1})(A^{d_0 2^0}) ,$$

kde

$$[n]_{10} = [d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_0]_2 , \quad d_i \in \{0; 1\} , \quad d_k <> 0 ,$$

a vpravo jsou fakticky přítomny pouze mocniny s jedničkovými dvojkovými ciframi d_i. Příslušný výpočetní postup spočívá v opakovaném zdvojmocňování matice A (až do získání její 2^k-té mocniny) s průběžným pronásobováním skutečně přítomných mocnin matice A. Počet operací závisí na tvaru exponentu n.

Počítáme-li n-tou mocninu x^n prvku x a označíme-li $Z(x^n)$ zdvojmocňovací výpočetní schéma pro její výpočet založený na výpočtu nejvyšší potřebné 2^k-mocniny, kde $k = \lfloor \mathrm{ld}\, n \rfloor$, pak platí

<u>Věta:</u> Má-li exponent n dvojkové vyjádření $[d_k d_{k-1} \ldots d_0]$, pak

$$\mathrm{mult}(x^n) \le \mathrm{mult}(Z(x^n)) = k + \sum_{i=0}^{k-1} d_i \le 2k .$$

$\sqcup\!\sqcup$

Aplikujeme-li tedy zdvojmocňovací postup na matici, tj. $x = A$, pak pro výpočet A^n se potřebný počet číselných násobení pohybuje v rozmezí od kr^3 (pro $n = 2^k$) do $2kr^3$ (pro $n = 2^{k+1}-1$) a počet číselných sčítání v rozsahu od $kr^2(r-1)$ do $2kr^2(r-1)$.

Je-li navíc r-matice A hodnosti 1, použijeme opět její cl-tvar, $A = cl$. Postup (S) nyní dává speciálně pro mocninu vztahy

$$A^n = (cl)^n = c(lc)^{n-1}l = s^{n-1}cl = s^{n-1}A , \qquad \text{(SM)}$$

kde s je číslo, $s := lc$.

Příslušný výpočetní postup pro čtvercovou r-matici A vyžaduje nejvýš $r^2+2r+n-3$ násobení, kde je započteno $r-1$ dělení na pořízení cl-tvaru, r násobení pro skalární součin lc , $n-2$ násobení pro (nešikovný) výpočet mocniny s^{n-1} a r^2 násobení pro pronásobení dané r-matice tímto skalárem (požadujeme-li jednomaticový tvar výsledku). Sčítání je pouze $r-1$. V každém případě dává využití struktury matice A řádově menší početní náročnost výpočtu mocniny než např. postupné pronásobování, či (lépe) zdvojmocňovací postup.

V tabulce jsou shrnuty hrubé početní nároky pro tři uvedené postupy umocňování matice hodnosti 1 . Vidíme, že početní schéma (SM) vyžaduje řádově méně operací než předchozí dva postupy.

Multipl. a aditivní složitost 3 postupů výpočtu A^n , $h(A) = 1$

Postup pro A^n	mult	adit	
A.A ... A	$(n-1)r^3$	$(n-1)r^2(r-1)$	
zdvojmocňování	pkr^3	$pkr^2(r-1)$	$p \in \langle 1;2 \rangle$, $k = \lfloor \mathrm{ld}\ n \rfloor$
$(\mathrm{lc})^{n-1}A$	$r^2+2r+n-3$	$r-1$	

Vztah (SM) poskytuje navíc hned nutnou a postačující podmínku pro nilpotentnost matice hodnosti 1, tj. pro platnost rovnice $A^n = O$ (nulová matice). V maticové rovnici

$$s^{n-1}A = O \quad \text{je} \quad A <> O ,$$

neboť při $h(A) = 1$ je $A <> O$. Musí proto být $s = \mathrm{lc} = 0$ (číslo nula). Platí tedy

Věta: Je-li čtvercová matice A hodnosti 1 , A = cl, pak

$$A^n = O \iff A^2 = O \iff \mathrm{lc} = 0 , \quad \text{kde} \quad 2 \le n \in \mathbf{N} .$$

Je-li tedy při $h(A) = 1$ nějaká mocnina A^n nulová, je hned druhá mocnina nulová a nastává to, právě když v každém jejím cl-rozkladu jsou r-vektory l, c^T ortogonální.

G. VYJÁDŘENÍ MATIC JAKO SOUČET MATIC HODNOSTI 1

Hledejme vyjádření $(r \times s)$-matice M ve tvaru součtu

$$M = \sum_i S_i , \qquad \text{kde} \quad h(S_i) = 1. \tag{15}$$

Pak $S_i = u_i v_i$, kde u_i je r-sloupec, v_i je s-řádek. Každý součinový rozklad matice M dává podle (U5) součtový rozklad (9). Např. lze uvést tzv. oddělení řádků, či sloupců, matice M :

$$M = I_r M = \sum_{i=1}^{r} e_i m_{i*} , \qquad M = MI_s = \sum_{i=1}^{s} m_{*i} e_i^T ,$$

kde $I_n = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ je jednotková matice n-tého stupně.

Významnější je součtový přepis tzv. LU-rozkladu matice M, který vzniká aplikací Gaussovy eliminace na matici M hodnosti h. Jsou-li při eliminaci všechny pivoty nenulové, pak

$$M = LU,$$

kde $L = [l_{ik}]$ je dolní trojúhelníková r-matice a $U = [u_{ik}]$ je horní trojúhelníková $(r \times s)$-matice. Podrobněji

$$l_{*i} = [o_{i-1}^T, 1, l_{i+1\,i}, \ldots, l_{ri}]^T, \quad u_{i*} = [o_{i-1}^T, u_{ii}, \ldots, u_{is}],$$
$$i=1,2,\ldots,h; \; l_{*i} = e_i , \quad u_{i*} = e_i , \quad u_{i*} = o_s^T, \quad \text{pro} \quad i > h.$$

Odečítáme-li při G-eliminaci důsledně postupně v každé podmatici vhodné násobky hlavního řádku od řádků následujících, pak v L jsou shromážděny násobitelé hlavních řádků a matice U je výsledkem eliminace - srov. např. [Vi10-76:130-1; Mur-84:22^8-4; Mík-82: 63-4]. Podle (U5) dostáváme

$$M = LU = \sum_{i=1}^{h} l_{*i} u_{i*} = \sum_{i=1}^{h} S_i , \qquad \text{kde} \quad S_i = l_{*i} u_{i*} . \tag{16}$$

Vzhledem k jednoznačnosti LU-rozkladu [Str-76:23$_4$-4$_{11}$; Str-80:37$_{10}$-8$_5$; BH-85:123^5-6; FM-69:39-40; Mík-82:65] je též tento součtový rozklad dán jednoznačně. LU-rozklad je tedy ekvivalentní speciálnímu součtovému tvaru: v i-tém členu začínají vektory $(i-1)$ nulovými souřadnicemi a sloupec má navíc první nenulovou souřadnici 1. Maticové sčítance S_i mají pouze dole vpravo nenulový $((r-i+1)\times(s-i+1))$-blok. Tento blok se pro $i = 1,2,\ldots,h$ zmenšuje. Jinak řečeno: sčítanec S_i hodnosti 1 odebírá levé a horní jednořádkové nenulové vroubení nenulového bloku mezivýsledkové matice $M - (S_1 + \ldots + S_{i-1})$, $i \leq h$. Speciálně S_1 odebírá levý horní okraj výchozí matice M .

H. SPEKTRÁLNÍ ROZKLAD SYMETRICKÉ MATICE

Každá reálná symetrická r-matice M má r vlastních reálných čísel $d_1, \ldots, d_r$, k nimž lze vybrat systém r (reálných) ortogonálních vlastních vektorů $u_1,\dots,u_r$ [Fie-81:53₉-4₁₆; And-78:64¹⁻⁵]. Tento fakt má maticový zápis

$$MU = UD\ , \quad \text{kde} \quad U = [u_1,\dots,u_r]\ , \quad D = \mathrm{diag}\{d_1,\dots,d_r\}\ .$$

Po úpravě $\lceil U^{-1} = U^T \rfloor$ dostáváme

$$M = UDU^T\ ,$$

tj., že symetrická matice M je ortogonálně podobná reálné diagonální matici D [Par-83:22₂-3⁵; BH-85:143₃-5¹²]. Součin vpravo lze rozepsat jako součet pomocí (U5):

$$UDU^T = [d_1 u_1,\dots,d_r u_r][u_1,\dots,u_r]^T = \sum_{i=1}^{r} d_i u_i u_i^T\ .$$

Každou symetrickou r-matici M lze tedy vyjádřit jako lineární kombinaci matic $u_i u_i^T$ hodnosti 1 (vnějších součinů vektorů u_i) s koeficienty rovnými příslušným vlastním číslům d_i :

$$M = \sum_{i=1}^{r} d_i u_i u_i^T\ . \tag{SR}$$

Speciálně pro jednotkovou matici I (roli vlastních vektorů zde může hrát každý ortogonální systém vektorů) platí

$$I = \sum_{i=1}^{r} u_i u_i^T\ .$$

Součtový rozklad (SR) je znám pod názvem spektrální rozklad matice M [Par-83:22₂; BH-85:173₃-4³]. Lze jej odvodit různě [CA-78:67/7]. Často se užívá v souvislosti se symetrizací $(r{\times}s)$-matice M přechodem k MM^T, resp. M^TM. Umožňuje názorné formulace a dovoluje nové formy důkazů. Nachází uplatnění např. při výpočtu vlastních čísel symetrických matic tzv. metodou vyčerpávání, či redukce. Zde se po nalezení maximálního vlastního čísla d_1 hledá maximální číslo zúžené matice $\underline{M} = M - d_1 u_1 u_1^T$, atd. [Par-83:97-9; Ral-73:521⁵-4₉]. V [And-78:297-303,316; FM-69:31] se pojednává o využití (SR) při faktorové analýze.

C3K3. ELEMENTÁRNÍ MATICE

Původně (v tradičním smyslu) se jimi rozumí matice odpovídající tzv. elementárním lineárním transformacím skupin vektorů, které zachovávají dimenzi jejich lineárních obalů. Speciálně jde o transformaci skupin uspořádaných n-tic čísel zpravidla zapsaných ve formě matic.

Obecně jsou elementární matice definovány jako čtvercové matice stupně r, které lze vyjádřit jako součet jednotkové matice I a matice A hodnosti 1 - tedy:

$$E = I - A = I - cl \,. \qquad (1)$$

Elementární matice jsou vlastně jednohodnostně pozměněné jednotkové matice. Jednotkovou matici I považujeme též za elementární.

A. ZÁKLADNÍ A AGREGOVANÉ ELIMINAČNÍ MATICE

Cílem Gaussovy eliminační metody je převod dané matice na tzv. lichoběžníkový tvar. K tomu se užívají elementární operace:

a) násobení (či dělení) i-tého řádku nenulovým číslem α,

b) odečtení α-násobku (hlavního) i-tého řádku od (následujícího) j-tého řádku,

c) prohození dvou řádků (i-tého a j-tého).

Při řešení soustavy lineárních algebraických rovnic s maticí A těmto úpravám odpovídá násobení matice A zleva maticemi (srov. např. [Ikr-83:127; Str-80:30-4,39-43; BM-79:237-8; DN-82:29-30; FF-64:24_{10}-27_2; Gan-66:49]):

$N_i(\alpha) = \mathrm{diag}\{1,\ldots,1,\alpha,1,\ldots,1\}$, $\alpha <> 0$ je na i-tém místě,

$$G_{ji}(\alpha) = \begin{array}{rl} & \begin{array}{cccc} & i & j & \end{array} \\ \begin{array}{r} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -\alpha & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] \end{array}, \qquad P_{ij} = \begin{array}{rl} & \begin{array}{cccc} & i & j & \end{array} \\ \begin{array}{r} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{array}\right] \end{array}. \qquad (2)$$

Prvky nevypsané na hlavní diagonále jsou 1, všude jinde jsou 0.

Zajímavá informace v těchto maticích je dána (při daném typu matice) pozicí a hodnotou jediného prvku:

	pozice	hodnota
$N_i(\alpha)$	$[i,i]$	α
$G_{ji}(\alpha)$	$[i,j]$	α
P_{ij}	$[i,j]$, $[j,i]$	1

Význam pojmu elementární matice zdůrazňuje známý fakt, že každou regulární matici lze vyjádřit (dokonce nekonečně mnoha způsoby) jako součin elementárních matic uvedených tří základních typů - srov. např. [BM-79:239; DN-82:33]. Z praktického hlediska volíme ovšem určitá standardní vyjádření.

Elementární matice (v širším smyslu) postihují též např. agregované operace [Vil0-76:130-1; Ikr-83:128; Mur-84:15_4-6,22^8-4; Sto-76:135; Tew-77:30_{19}-4^{15},109-13,116-7,122_{10}-3_{12};VK-84:161] pro

a) Gaussovu eliminaci sloupce pod diagonálou,

b) Jordanovu eliminaci sloupce mimo diagonálu.

Maticově jde opět o násobení zleva maticemi

$$G_i = \begin{array}{rl} & \begin{matrix} & i & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -\alpha_{i+1} & 1 & & \\ & -\alpha_{i+2} & & \ddots & \\ & -\alpha_r & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad J_i = \begin{array}{rl} & \begin{matrix} & i & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1 & & & \\ & 1 & & & \\ & -\alpha_{i+1} & 1 & & \\ & -\alpha_{i+2} & & \ddots & \\ & -\alpha_r & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (3)$$

Násobení maticí G_i zleva zařizuje odčítání α_k-násobků (hlavního) i-tého řádku od všech následujících k-tých řádků, $k=i+1,\dots,r$. Při násobení maticí J_i se násobky i-tého řádku odčítají navíc též ode všech předchozích řádků, $k=1,\dots,i-1$.

B. VZTAHY ELIMINAČNÍCH MATIC

Všimněme si vzájemných souvislostí uvedených eliminačních matic a některých jejich vlastností.

Snadno nahlédneme, že permutační matici P_{ij} lze již vyjádřit pomocí matic předchozích dvou typů N, G_{ji} např. následovně:

$$P_{ij} = N_i(-1)G_{ji}(-1)G_{ij}(1)G_{ji}(-1) .$$

To je patrné z významu vypsaných matic nebo lze pronásobit jejich vyjádření pomocí jedničkových matic (srov. K2C(9)), či ve tvarech (1), užívajících jednotkových vektorů e_i (výrazy jsou uvedeny v následujícím přehledu (12)). Platí totiž zřejmě

$$N_i(-1) = I - 2U_{ii} = I - 2e_i e_i^T ,$$

$$G_{ij}(\pm 1) = I - (\pm U_{ij}) = I - (\pm e_i e_j^T) , \quad i <> j .$$

Z významu matic G_{ij}, G_i plyne, že "odčítací" gaussovská matice G_i je součinovým agregátem matic G_{ji} , $j=i+1,\dots,r$:

$$G_i(\alpha_{i+1},\dots,\alpha_r) = G_{i+1\,i}(\alpha_{i+1}) \dots G_{ri}(\alpha_r) , \tag{4}$$

což lze též snadno ověřit výpočtem.

Zřejmě pro $k <> i$ platí

$$G_{ji}(\alpha)G_{ki}(\beta) = (I - \alpha U_{ji})(I - \beta U_{ki}) = \lceil U_{ji}U_{ki}=O\rfloor =$$
$$= I - \alpha U_{ji} - \beta U_{ki} \tag{5}$$

a obdobně při prohození činitelů pro $j <> i$. Matice G_{ji}, G_{ki} jsou tedy v (4) komutativní, a proto na pořadí činitelů nezáleží.

Matice G_i již obecně nekomutují. Pro $i < j$ máme

$$G_i(\mu_{i+1},\dots,\mu_r)G_j(\sigma_{j+1},\dots,\sigma_r) =$$
$$= (I - \sum_{p=i+1}^{r} \mu_p U_{pi})(I - \sum_{q=j+1}^{r} \sigma_q U_{qj}) =$$
$$= I - \sum_p \mu_p U_{pi} - \sum_q \sigma_q U_{qj} + \sum_{pq}\sum \mu_p \sigma_q U_{pi} U_{qj} =$$
$$= I - \sum_p \mu_p U_{pi} - \sum_q \sigma_q U_{qj} = G_i + G_j - I , \tag{6}$$

neboť $U_{pi}U_{qj} = O$ pro $i < j < q$, t.j. $i <> q$. Úpravou je ještě zvýrazněn praktický výsledek: součin $G_i G_j$ pro $i < j$ dostaneme přepsáním poddiagonálních prvků těchto matic do matice I .

Při přehozeném pořadí matic vyjde

$$G_j(\sigma_{j+1},\dots,\sigma_r)G_i(\mu_{i+1},\dots,\mu_r) = I-\sum_p \mu_p U_{pi} -\sum_q \sigma_q U_{qj} - \mu_j \sum_q \sigma_q U_{qi} ,$$

kde je oproti (6) navíc výraz s jedničkovými maticemi U_{qi} , $q = i+1,\dots,r$, které zbydou z dvojité sumy. Odpovídá to $p = j$, z čehož vychází $U_{qj}U_{ji} = U_{qi} <> O$. Platí tedy

Lema: Matice $G_i(\mu_{i+1},\dots,\mu_j,\dots,\mu_r)$, $G_j(\sigma_{j+1},\dots,\sigma_r)$ tvaru (3) jsou komutativní, právě když $\mu_j = 0$. ⊔⊔

Pro početní praxi plyne z (6) opět důležitý poznatek, že uspořádanou součinovou agregací matic G_i vzniká dolní trojúhelníková matice:

$$T_k = G_1(\alpha_2,\dots,\alpha_r)G_2(\beta_3,\dots,\beta_r)\dots G_k(\tau_{k+1},\dots,\tau_r)\ , \tag{7}$$

již sestavíme jednoduše převzetím poddiagonálních prvků matic G (na diagonále má T samé jedničky). Při $k < r$ má matice T vpravo dole pod diagonálou trojúhelníkové schéma nul. Formálně:

$$\begin{aligned} T_k &= G_1 + \dots + G_k - (k-1)I = \\ &= I + [g_1,g_2,\dots,g_k,o,\dots,o]\ , \end{aligned} \tag{8}$$

kde $g_i = [0,\dots,0,\mu_{i+1},\dots,\mu_r]^T$.

Obdobně jordanovská matice J_i je součinovým agregátem matic G_{ji} :

$$\begin{aligned} &J_i(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_r) = \\ &= G_{1i}(\alpha_1)\dots G_{i-1\,i}(\alpha_{i-1})G_{i+1\,i}(\alpha_{i+1})\dots G_{ri}(\alpha_r) = \\ &= G_{1i}(\alpha_1)\dots G_{i-1\,i}(\alpha_{i-1})G_i(\alpha_{i+1},\dots,\alpha_r)\ , \end{aligned} \tag{9}$$

kde jsme pro zkrácení zápisu použili matici G . Opět nezáleží na pořadí činitelů.

Matice J_i rovněž obecně nekomutují a situace je o něco horší než u gaussovských matic G_i . Pro $i < j$ je

$$\begin{aligned} &J_i(\mu_1,\dots,\mu_{i-1},\mu_{i+1},\dots,\mu_r)J_j(\sigma_1,\dots,\sigma_{j-1},\sigma_{j+1},\dots,\sigma_r) = \\ &= J_i + J_j - I + \sigma_i \sum_p \mu_p U_{pj}\ . \end{aligned} \tag{10}$$

Prohození činitelů dává

$$J_j J_i = J_i + J_j - I + \mu_j \sum_q \sigma_q U_{qi}\ . \tag{11}$$

__Lema:__ Jordanovské matice $J_i(\mu_1,\dots,\mu_{i-1},\mu_{i+1},\dots,\mu_j,\dots,\mu_r)$, $J_j(\sigma_1,\dots,\sigma_i,\dots,\sigma_{j-1},\sigma_{j+1},\dots,\sigma_r)$ tvaru (3) jsou komutativní, právě když $\mu_j = \sigma_i = 0$. ⊔⊔

Všechny matice uvedené v (2,3) lze ovšem vyjádřit ve tvaru (1), jak shrnujeme v přehledu:

$$\begin{aligned} N_i &= I - (1-\alpha)e_i e_i^T\ , \\ G_{ji} &= I - \alpha e_j e_i^T\ , \\ P_{ij} &= I - (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T\ , \\ G_i &= I - [0,\dots,0,0,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_r]^T e_i^T\ , \\ J_i &= I - [\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_r]^T e_i^T\ . \end{aligned} \tag{12}$$

C. ORTOGONÁLNÍ ELEMENTÁRNÍ MATICE

Násobení ortogonálními maticemi zachovává euklidovskou normu, což vede k numericky stabilním algoritmům. Prakticky užívané matice mají tvar

$$Q = I - 2uu^T \,, \quad \text{kde} \quad \|u\|_2 = u^T u = 1 \,. \tag{13}$$

Tato matice je ovšem elementární, symetrická a ortogonální:

$$(I-2uu^T)(I-2uu^T)^T = (I-2uu^T)^2 = I - 4(uu^T) + 4(uu^T)^2 = I \,.$$

Obvykle má vektor u opět série nulových souřadnic. Užitečné jsou např. r-vektory u tvaru:

$$u_i = [0,\dots,0,\alpha_i,\dots,\alpha_r]^T \,, \qquad \sum_{j=i}^{r} \alpha_j^2 = 1 \,. \tag{14}$$

Ještě speciálnější jsou vektory pouze se dvěma nenulovými souřadnicemi na místech i, j :

$$u_{ij} = [0,\dots,0,x,0,\dots,0,y,0,\dots,0]^T \,, \quad \text{kde} \quad x^2 + y^2 = 1 \,.$$

Příslušná elementární matice R_{ij} se liší od jednotkové matice I pouze ve čtyřech průsečících i-tých a j-tých řádků a sloupců:

$$R_{ij} = I - 2u_{ij}u_{ij}^T = I - 2(x^2 U_{ii} + y^2 U_{jj} + xyU_{ij} + xyU_{ji}) \,. \tag{15}$$

Čtveřice zajímavých prvků tvoří (2×2)-matici (je $x^2+y^2 = 1$) :

$$\begin{bmatrix} 1-2x^2 & -2xy \\ -2xy & 1-2y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x = \sin\alpha \\ y = -\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos2\alpha & \sin2\alpha \\ -\sin2\alpha & \cos2\alpha \end{bmatrix} . \tag{16}$$

Poslední matice v (16) představuje otočení v rovině o úhel 2α .

D. NÁSOBENÍ ELEMENTÁRNÍCH MATIC

Násobení obecné r-matice M elementární r-maticí $E = I-cl$ provádíme úsporně:

$$ME = M(I - cl) = M - (Mc)l = M - dl \,.$$

Zde vpravo se provádí r skalárních součinů r-vektorů (řádků matice M a sloupce c). Vzniklý sloupec $d := Mc$ se násobí řádkem l . Celkem tedy součin ME spotřebuje $2r^2$ násobení a $2r^2-r$ sčítání, což je řádově méně než při obecném maticovém násobení bez využití informace o struktuře matice M . Podobně je tomu ovšem při prohození činitelů:

$$(I - cl)M = M - c(lM) \,.$$

Násobíme-li mezi sebou dvě elementární r-matice $E_1 = I-c_1l_1$,

$E_2 = I - c_2 l_2$, pak

$$(I - c_1 l_1)(I - c_2 l_2) = I - c_1 l_1 - c_2 l_2 + c_1 (l_1 c_2) l_2 =$$
$$= E_1 - [c_2 - (l_1 c_2) c_1] l_2 \ ,$$

což obecně vyžaduje již pouze r^2+2r násobení a r^2+2r-1 sčítání. Vzniklá matice nemusí být ovšem elementární. Platí totiž

$$0 \le h(c_1 l_1 + c_2 l_2 - (l_1 c_2) c_1 l_2) \le 2 \ ,$$

neboť se zde kombinují pouze dva sloupcové vektory c_1, c_2. Podrobněji:

Věta: Součin elementárních matic $I - c_1 l_1$, $I - c_2 l_2$ je elementární matice, právě když aspoň jedna z dvojic $\{c_1, c_2\}$, $\{l_1, l_2\}$ je lineárně závislá.

Důkaz. Označme $P := c_1 l_1 + c_2 l_2 - \mu c_1 l_2$, kde $\mu = l_1 c_2$, c_1, c_2 jsou r-sloupce, l_1, l_2 r-řádky. Výraz pro P lze přepsat maticově jako součin $(r \times 2)$-matice.(2×2)-matice.$(2 \times r)$-matice:

$$P = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} .$$

Prostřední (2×2)-matice je ovšem regulární. Odtud a z nerovnosti $h(AB) \le \min\{h(A), h(B)\}$ pak plyne platnost věty. $\sqcup\!\sqcup$

Významné jsou třídy elementárních matic tvaru

$$E_{c,l}(\sigma) := I - \sigma c l \ , \tag{17}$$

tj. matice se společnými vektory c, l a s různým (normalizačním) skalárem $\sigma \in \mathbf{R}$. Každá taková třída je uzavřená vzhledem k násobení:

$$(I - \sigma c l)(I - \tau c l) = I - (\sigma + \tau - \sigma \tau l c) c l \ , \tag{18}$$

takže

$$E_{c,l}(\sigma) E_{c,l}(\tau) = E_{c,l}(\sigma + \tau - \sigma \tau l c) \ . \tag{19}$$

Jednoparametrická třída všech matic $E_{c,l}$ tvoří tedy vzhledem k násobení monoid (pologrupu s jednotkou I).

E. INVERZE ELEMENTÁRNÍCH MATIC

Dříve uvedené "eliminační" elementární matice jsou regulární (N_i při $\alpha <> 0$). Obecně však může přičtením r-matice A hodnosti 1 k regulární r-matici M (a speciálně k jednotkové matici I) klesnout hodnost o 1, tj.

$$r - 1 \le h(M+A) \le r\ , \quad M \text{ reg.}, \ h(A) = 1\ . \tag{20}$$

Pokud je však elementární matice E regulární, lze snadno určit její inverzní matici (ve třídě (17)). Vlastně požadujeme v (18) anulování koeficientu při cl :

$$\tau(\sigma lc - 1) = \sigma\ .$$

Při $\sigma = 1/(lc)$ nemá tato rovnice řešení. Jinak

$$\tau = \sigma/(\sigma lc - 1)\ . \tag{21}$$

Vidíme zároveň, že platí

$$\sigma^{-1} + \tau^{-1} = lc\ . \tag{22}$$

Celkem máme užitečný výsledek

$$(I - \sigma cl)^{-1} = I - \tau cl \quad \text{pro} \quad \sigma <> 1/(lc)\ ,$$
$$\text{kdy} \quad \tau = \sigma/(\sigma lc - 1)\ . \tag{23}$$

Inverzní matice (pokud existuje) E^{-1} k elementární matici E je tedy opět elementární matice a k jejímu určení stačí jediný číselný parametr τ. K uchování r-matice E tvaru (17) a její inverzní matice stačí tudíž celkem pouze $2r+1$ parametrů (při normalizaci vektorů c, l).

Je-li navíc jednohodnostní součtová složka cl elementární matice $E = I+cl$ nilpotentní, tj. $lc = 0$, pak jednoduše $\tau = -\sigma$, takže

$$(I + cl)^{-1} = I - cl \quad \text{při} \quad lc = 0\ . \tag{24}$$

F. SHERMANOVA-MORRISONOVA IDENTITA

Z poznatku (23) o inverzi elementární matice plyne velmi užitečné vyjádření vlivu jednohodnostní modifikace invertované matice M na její inverzi. Je-li $\underline{M} := M - cl$ modifikovaná matice, pak po úpravě

$$M - cl = M(I - (M^{-1}c)l) = ME_{d,l}(1)\ , \quad \text{kde} \quad d = M^{-1}c\ ,$$

vidíme, že můžeme užít (23), z čehož dostáváme (ve jmenovateli je ovšem skalár)

$$\underline{M}^{-1} = (M - cl)^{-1} = [I - M^{-1}cl/(lM^{-1}c - 1)]M^{-1} =$$
$$= M^{-1} - M^{-1}clM^{-1}/(lM^{-1}c - 1) \quad \text{pro} \quad lM^{-1}c <> 1 \qquad \text{(SMi)}$$

Jednohodnostní změně invertované matice M odpovídá tedy opět jednohodnostní změna výsledku M^{-1}. Výsledek má spíše teoretický význam. Říká se mu Shermanova-Morrisonova identita.

Výsledek budeme specializovat pro jednoprvkovou a konstantní jednosloupcovou a celomaticovou poruchu matice. Užijeme označení $M = m_{**}$, $\underline{M} = \underline{m}_{**}$, $M^{-1} = p_{**}$, $\underline{M}^{-1} = \underline{p}_{**}$ pro prvky matic.

Pro jednoprvkovou poruchu α pouze v místě $[i,j]$ matice M, tj. $\underline{m}_{ij} = m_{ij} - \alpha$, $\underline{M} = M - \alpha e_i e_j{}^T$, obdržíme vztah

$$\underline{M}^{-1} = (M - \alpha e_i e_j{}^T)^{-1} = M^{-1} - \alpha M^{-1} e_i e_j{}^T M^{-1}/(\alpha e_j{}^T M^{-1} e_i - 1) =$$
$$= M^{-1} - \alpha/(\alpha p_{ji} - 1) p_{*i} p_{j*} \, . \qquad (25)$$

Jsou-li shodné poruchy α pouze v j-tém sloupci matice M, tj. $\underline{m}_{*j} = m_{*j} - \alpha u$, $\underline{M} = M - \alpha u e_j{}^T$, kde $u = [1,\dots,1]^T$, pak

$$\underline{M}^{-1} = (M - \alpha u e_j{}^T)^{-1} = M^{-1} - \alpha M^{-1} u e_j{}^T M^{-1}/(\alpha e_j{}^T M^{-1} u - 1) =$$
$$= M^{-1} - \alpha/(\alpha \sum_k p_{jk} - 1)(\sum_i p_{*i}) p_{j*} \, . \qquad (26)$$

Podobně pro stejné poruchy pouze v i-tém řádku vychází

$$\underline{M}^{-1} = (M - \alpha e_i u^T)^{-1} = M^{-1} - \alpha/(\alpha \sum_k p_{ki} - 1) p_{*i} (\sum_j p_{j*}) \, . \qquad (27)$$

Jsou-li poruchy po celé matici M všude stejné, tj. $\underline{m}_{ij} = m_{ij} - \alpha$ pro $i,j=1,\dots,r$, pak

$$\underline{M}^{-1} = (M - \alpha u u^T)^{-1} = M^{-1} - \alpha M^{-1} u u^T M^{-1}/(\alpha u^T M^{-1} u - 1) =$$
$$= M^{-1} - \alpha(\sum_i p_{*i})(\sum_j p_{j*})/(\alpha \sum_{i,j} p_{ij} - 1) \, . \qquad (28)$$

Konstantu α lze interpretovat např. jako zaokrouhlovací chybu.

Jednohodnostní součtovou změnu obecné regulární matice M lze ovšem chápat jako její součinovou elementární modifikaci:

$$M - A = M(I - M^{-1}A) \, , \text{ neboť při } h(A) = 1, \text{ je též } h(M^{-1}A) = 1.$$

Užitečným zobecněním (SMi) je tzv. Shermanova-Morrisonova-Woodburyova identita (její důkaz lze nalézt v [NZ-84:36-7]):

Věta: Je-li M regulární r-matice a U, V jsou $(r \times s)$-matice, kde $r \geq s$, pak matice $M - UV^T$ je regulární, právě když matice

$I_s - V^TM^{-1}U$ je regulární a platí

$$(M - UV^T)^{-1} = M^{-1} - M^{-1}U(V^TM^{-1}U - I_s)^{-1}V^TM^{-1} . \qquad \text{(SMW)}$$

Pro $s = 1$ dostaneme ovšem Shermanovu-Morrisonovu identitu. ⊔⊔

G. MOCNINY ELEMENTÁRNÍ MATICE

Bezprostředním výpočtem zjistíme, že

$$(I + cl)^2 = I + \{2 + lc\}cl ,$$

$$(I + cl)^3 = I + \{3 + 3lc + (lc)^2\}cl$$

a indukcí odvodíme obecný vztah (C_{nk} označuje "n nad k")

$$(I+cl)^n = I + \{n + C_{n,2}s + C_{n,3}s^2 + \ldots +$$
$$+ C_{n,n-1}s^{n-2} + s^{n-1}\}cl , \quad \text{kde} \quad s:=lc .$$

Tento výraz lze kompaktně přepsat větvením

$$(I + cl)^n = \begin{cases} I + ((1+lc)^n - 1)/(lc)cl & \text{pro } lc <> 0 ; \\ I + ncl & = \end{cases} \qquad (29)$$

přičemž první výraz přechází ve druhý při $lc \to 0$.

Z odvozených výrazů pro E^n plynou hned tvrzení o vlastnostech elementární matice E .

<u>Věta:</u> Nechť $E = I + cl <> I$. Pak platí:
E je idempotentní indexu n, tj. $E^n = E$, $<=> lc = -1$;
E je involutivní indexu n, tj. $E^n = I$, $<=> lc = -2$ a n je sudé.
Elementární matice není nilpotentní, tj. $E^n <> O$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$.

C3K4. POZNÁMKY

Matice mezních hodností je souhrnný název pro matice malých hodností (1, příp. 2) a pro matice lišící se (aditivně) hodnostně málo od regulárních matic, speciálně od matice jednotkové. Zejména jsou významné matice hodnosti 1 a elementární matice, jimiž se rozumí jednohodnostní perturbace jednotkové matice.

Obecně matice mezních hodností představují jeden z možných přístupů k řešení problémů lineární algebry. Metoda agregace těchto matic a dekompozice jiných matic na tyto matice poskytuje užitečný pohled na známé věci, a tím otevírá nové cesty. Přitom se snadno formulují odpovědi na některé teoretické otázky.

S využitím informace o struktuře maticových činitelů lze např. zlepšit algoritmy maticové algebry. Součinové agregáty elementárních matic slouží ke kompaktnímu popisu eliminačních metod, což usnadňuje a zpřehledňuje jejich analýzu. Součtové agregáty matic hodnosti 1 jsou přirozenými aproximacemi složitějších maticových objektů.

Použití zkoumaných typů matic je běžné v numerických metodách. Významné jsou především eliminační matice, jejich symetrické verze se uplatňují např. při výpočtu vlastních čísel matic. Při sledování vlivu poruch matice na výsledek je výhodné a přirozenější uvažovat jednohodnostní poruchy celé matice než změny jejích jednotlivých prvků. Sem lze řadit též problémy intervalové matematiky na počítačích [Nic-77:193-225] ap.

Je proto s podivem, že matice mezních hodností nezaujímají náležité místo ve výuce lineární algebry. Metodologické aspekty problematiky a jejich metodické důsledky zasluhují i nadále pozornost.

Z prací autora se dotýkají dané problematiky především [Vi10-76; Vi41-89; Vi42-90; Vi45-90]. Některé související algoritmy byly programově realizovány na různých typech (mikro)počítačů v pracích SVOČ [Sč38-87; Sč44-89] vedených rovněž autorem.

A. TERMINOLOGICKÉ A HISTORICKÉ POZNÁMKY

Pojem hodnosti matice zavedl J. Sylvester kolem r. 1850. Nedal mu však název, což je při jeho vášni zavádět nové termíny těžko vysvětlitelné. Termín pochází od G. Frobenia (asi r. 1879) z německého Rang (= stupeň, řád). Definici řádu determinantu a název Rang zavedl L. Kronecker r. 1880. Podmínku řešitelnosti soustavy, jejíž hodnost je rovna počtu rovnic, formuloval J. Heger r. 1858.

Pojem hodnosti matice a Frobeniova (či Kroneckerova-Capelliho věta) o řešitelnosti obecné soustavy se objevily nezávisle v pracích několika vědců. Formulace pomocí hodnosti je od A. Capelliho [Šed-84]. První vytištěný důkaz této věty náleží Ch. L. Dogsonovi (1832-1898), který je znám (pseudonym Lewis Caroll) jako autor "Alenky v kraji divů a za zrcadlem" [Gus-83:213$^9{}_{11}$].

Maticová identita (SMi) popisující vliv jednohodnostní perturbace matice na její inverzi se přisuzuje Shermanovi a Morrisonovi (1949, 1950) [Wil-77:5$^{3-5}$; Mur-84:17$^{1-13}$]. Byla mnohokrát znovuobjevena. Aplikace ortogonálních matic tvaru $A - 2uu^T$ propagoval Householder (1959), po němž se nazývají související algoritmy. Pro komplexní u jsou matice $I - 2uu^H$ unitární a hermitovské. Householder (1964) je nazval elementárními hermitovskými [Wil-77:7$_3$-8^4]. Reálné otáčení roviny použil poprvé v numerické analýze Jacobi (1846) pro redukci reálné symetrické matice na diagonální tvar. Givens je užil (1954) poprvé na redukci těchto matic na třídiagonální tvar a následně v obecnějších souvislostech (1958). Odtud název algoritmy Givensova typu [Wil-77:9$_{15-7}$].

B. POZNÁMKY K LITERATUŘE

Matice hodnosti 1 se příliš často v literatuře nevyskytují. V nám dosažitelných českých matematických učebnicích a skriptech jsou explicitně uvedeny pouze ve sbírce [Pyt-85:26], kde se hovoří o jejich sloupcově-řádkovém vyjádření.

V současných sovětských učebnicích nejsou matice hodnosti 1 rovněž příliš frekventované. Ve cvičení v [KM-86:37^{16-17}] se má ukázat, že čtvercové matice hodnosti 1 lze vyjádřit jako součin sloupce a řádku. Ve sbírce úloh [Ikr-83:83_{7-4}] se má dokázat, že (rxs)-matici A hodnosti 1 lze vyjádřit jako součin souřadnic r-vektoru $(b_1,\dots,b_r)$ a s-vektoru $(c_1,\dots,c_s)$ tak, že platí $a_{ij} = b_i c_j$. Je kladen dotaz, zda je toto vyjádření jednoznačné. V počítačově zaměřeném přehledu výsledků [VK-84:31_{7-4}] nacházíme matice hodnosti 1 v paragrafu věnovaném determinantům, minorům a doplňkům. Zde je konstatována možnost jejich rozkladu na součin sloupce a řádku a rovněž možnost rozkladu matice hodnosti h na součet h matic hodnosti 1 , přičemž počet sčítanců nelze zmenšit.

Větší prostor je věnován maticím hodnosti 1 v anglické knize [Str-76:70] a v jejím ruském překladu [Str-80:93_{15}-4_9]. Zde se hovoří rovněž o součinovém rozkladu a o jeho využití při násobení dvou matic hodnosti 1 . V rozsáhlém sborníku z konference [Jac-77:55-83] je věnováno 29 stran vlivu jednohodnostních změn matice na její součinový rozklad.

Shermanova-Morrisonova identita i s pojmenováním je uvedena v [Wil-77:4_9-5^5; Mur-84:17^{1-13}]. Zde [Wil-77:4_{9-5}] tvrdí, že jde o nejčastěji užívaný výsledek v lineární algebře a v lineárním programování. Bez názvu se vyskytuje např. v [Ikr-83:141_{8-1}; Gas-72:128nVII.2,124_5-5]. V [OR-70:50; NZ-84:36-7] je tzv. SM-Woodburyova identita, která je zobecněním SM-identity pro vícehodnostní poruchy. V [Ikr-83:142^{5-16}] jsou uvedeny speciální případy jednoduchých poruch matice. Nejsou však použity hvězdičkové symboly (à la PL/1), což vede k nutnosti zavedení pomocné symboliky, která znepřehledňuje výsledky.

Permutační matice (speciálně transpoziční) jsou připomenuty v [Mur-84:17^{14}_{8}], kde se uvádí jejich vyjádření pomocí jednotkových vektorů e_k . O jejich vztazích k permutacím se pojednává např. v [KST-71:304-14; Kal-73:186,408; Kos-83:149-50].

Část IV. (Mikro)počítače ve výuce matematiky

Přítomnost výpočetní techniky se projevuje stále výrazněji v obsahu a formách výuky. Mnozí pedagogové se snaží využívat ve své práci moderních prostředků s cílem usnadnit a zefektivnit pedagogickou práci. I když je nutno konstatovat, že plány a především realizace se zpožďují oproti původním prognózám, přesto lze sledovat zesilující zájem o tento směr.

C4K1. PROMĚNNÁ ZADÁNÍ V METODICE MATEMATIKY

Velké úsilí se vynakládá zejména na počítačovou přípravu individualizovaných zadání. Přitom je přirozená tendence užívat přiřazování úloh prostřednictvím náhodného generátoru (viz též [Kad-74]). Tento postup předpokládá přímý přístup studentů k dostatečnému počtu vhodných terminálů. Pokud není takový předpoklad splněn, vznikají značné administrativní potíže při zadávání, sběru a kontrole výsledků.

Na KMA VŠST byl zvolen jiný přístup, který značně zmenšuje zmíněné potíže. Již více než 20 let se používají ve cvičeních tzv. proměnná zadání (=p-zadání). Proměnné zadání (=p-zadání) lze v prvním přiblížení chápat jako řetězec sestávající z konstant (pevná kostra = skelet) a z proměnných (proměnná část řetězce). Obecněji jde o datovou strukturu s pevnými a proměnnými podstrukturami, které lze po konkretizaci interpretovat jako matematický problém. (Pořadové) číslo studenta se předepsaným způsobem promítá do proměnných míst, čímž vznikají individuální zadání.

Rozvoj této metody směřuje k minimalizování administrativy a mechanické práce související s distribucí zadání úloh a se sběrem a kontrolou výsledků. Úrovní disponibilních počítačů je dána míra redukce papírového prostředníka v trojúhelníku pedagog-student-stroj s přehlednou komprimací výsledků.

Proměnná zadání byla uplatněna nejdříve v numerickém praktiku [Vi6-73; Vi8-75; Vi12-77; ViU-71; Vi5-73; Vi11-77] a po dobrých zkušenostech byla postupně přenášena i do jiných matematických disciplín - viz např. [Vi12-77; Vi14-78; ViT-77; Šru-77; Vi7-75; ViL-77; ViN-79; ViZ-79; ViD-79; Vi24-80; Př1-85; KS-91; Nek-91] a též [Sč7-10-79;14-80;23-83;30-85;33-86].

V dalším se budeme věnovat některým problémům spojeným s uplatněním proměnných zadání v metodice matematiky.

A. PŘÍKLAD PROMĚNNÉHO ZADÁNÍ

Při procvičování aplikací derivace v základním kursu analýzy potřebujeme série úloh k tématu hledání extrémů funkce jedné proměnné na zadaném intervalu. Konkrétní úloha na dané téma může mít např. znění:

Najděte nejmenší hodnotu funkce

$$y = \frac{1}{\sin^2(x^3 + 4x^2 + x + 1) + 1} \quad \text{na intervalu } \langle 2;\ 3\rangle. \tag{1}$$

Série příbuzných úloh je pak charakterizována určitou společnou částí - nazvěme ji skeletem - a proměnnou částí, která je uspořádaným schématem proměnných míst. Jednotlivé úlohy se dostanou konkretizací proměnné části. Skelet spolu s proměnnou částí budeme nazývat proměnným nebo parametrizovaným zadáním (stručně *p*-zadáním).

Z uvedeného znění úlohy (1) můžeme vytvořit např. následující *p*-zadání vhodné pro vyšetřování extrémů:

Najděte μ_p hodnotu funkce

$$y = \frac{1}{g_q{}^2\,[x^3 + (-1)^r 4x^2 + x\,\alpha_s\,(t+1)] + 1} \tag{2}$$

na intervalu $\langle 2;\ u+3\rangle$.

Zde symboly μ_p, g_q, r, α_s, t, u označují proměnná místa a zbytek tvoří skelet. V tomto zadání je tedy šest proměnných míst. Jednotlivé proměnné mohou v rámci souboru úloh nabývat hodnot z určitých, často konečných množin.

Porovnáním *p*-zadání (2) s výchozím tvarem (1) shledáváme, že proměnné jsou různých typů, tj. probíhají různé množiny. V dalším budeme (uspořádaným) typem rozumět uspořádanou množinu přípustných hodnot proměnné (analogicky jako v teorii programovacích jazyků). Proměnné r, t, u mohou být např. celočíselné: r, t, $u \in Z$, přičemž pro r stačí dvouprvková množina $\{0;1\}$ a pro t je z výpočtových důvodů záhodno volit pouze množinu $\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$. Proměnná μ_p má význam přívlastku, např. $\mu_p \in P = \{$nejmenší, největší$\}$; g_q je funkční znak, např. $g_q \in F = \{\sin, \cos, \exp\}$;

konečně α_s je operační znak, např. $\alpha_s \in A = \{+,-,.,:,\uparrow\}$. V jiných p-zadáních se mohou ovšem vyskytovat ještě další typy proměnných - např. relační znaky, křivky ap. Soubor typů proměnných a jejich vzájemné vztahy jsou charakteristické pro danou disciplínu.

Typ T mohutnosti n(T) je vhodné zadávat ve tvaru tabulky, v níž jsou očíslovány jednotlivé hodnoty $\tau_0, \ldots, \tau_{n-1}$ proměnné τ typu T, $\tau \in$ T:

i	0	1	2	...	$n-1$
$\tau(i)$	τ_0	τ_1	τ_2	...	τ_{n-1}

(3)

Tabulky pro nečíselné typy z ilustrujícího p-zadání (2) jsou:

p	0	1
μ_p	nejmenší	největší

q	0	1	2
g_q	sin	cos	exp

(4)

s	0	1	2	3	4
α_s	+	−	.	:	↑

Poznamenejme hned, že proměnná a pevná část p-zadání jsou relativní: v rozsahu dané podsérie úloh (např. pro kroužek v rámci paralelky) mohou některá proměnná místa být konstantní, a náleží pak do skeletu podsérie.

B. KONKRETIZACE P-ZADÁNÍ

Zadání s proměnnými místy je vlastně úlohotvornou formou. Představuje totiž celý soubor úloh, které dostaneme, dosazujeme-li za proměnné z jejich typů. Vážeme-li konkretizaci na celočíselnou proměnnou, pak p-zadání je vlastně zobrazením počátečního úseku přirozených čísel na množinu úloh. Pro praktické použití je třeba stanovit jednoduchý způsob přiřazování konkrétních úloh jednotlivým členům struktury studentské skupiny. V nejjednodušší podobě jde o zobrazení pořadového čísla do schématu parametrizace prostřednictvím uspořádaného souboru typů.

Nechť schéma parametrizace p-zadání má d nezávisle proměnných míst s proměnnými typů T_i, $i = 1, 2, \ldots, d$, o mohutnostech $b_i = n(\mathrm{T}_i)$ a studentská skupina S má mohutnost n(S) a je uspořádána pořadovým číslem $æ \in K = \{0, 1, \ldots, (n(\mathrm{S})-1)\}$.

Pak *p*-zadání je složené zobrazení:

$$K \;\rightarrow\; T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_d \;\rightarrow\; d\text{-parametrická množina úloh.}$$

Při $n(S) \le n(T_1)\cdot\ldots\cdot n(T_d)$ je jednoduché prosté přiřazení úloh členům skupiny realizováno např. algoritmem převodu pořadového čísla $æ$ z desítkové do obecné poziční (váhové) soustavy se základy b_i (viz [Vi18-79]). Položí se $h = æ$ a pro $i=1,2,\ldots,d$ se vypočte $c_i := \mathrm{mod}(h,b_i)$; $h := h \div b_i$, kde funkce mod udává zbytek při dělení čísla h číslem b_i, znak $\div$ označuje celočíselný podíl. Pak

$$[æ]_{10} = [c_d\ldots c_2 c_1]_{b_d\ldots b_2 b_1} =$$

$$= c_1 + c_2 b_1 + c_3 b_1 b_2 + \ldots + c_d b_1 \ldots b_{d-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{d} c_i \prod_{j=1}^{i-1} b_j ,$$

kde $0 \le c_i < b_i$ pro $i = 1,2,\ldots,d$ a výrazy vpravo chápeme desítkově. Za i-tou proměnnou v *p*-zadání pak dosadíme $\tau(c_i)$ z tabulky T_i.

Prakticky vystačíme s nejvýš osmi převodovými ciframi, pro něž se používá bezindexové označení:

$$[\text{pořadové číslo}]_{10} = [wvutsrqp]_{b_8\ldots b_2 b_1} .$$

Např. $[473]_{10} = [121401]_{2,3,2,5,4,2}$

a ovšem $[0]_{10} = [000000]_{2,3,2,5,4,2}$.

Konkretizací *p*-zadání (2) pro pořadové číslo 0, resp. 473, prostřednictvím typů (4) tedy dostáváme úlohu (1), resp. znění:

Najděte největší hodnotu funkce

$$y = \frac{1}{e^{2(x^3-4x^2+x)} + 1} \quad \text{na intervalu } \langle 2;\ 4\rangle .$$

V nejužitečnějším případě, kdy všech d typů má stejné mohutnosti b, tj. $b_i = b$ pro $i = 1,\ldots,d$, jde o obvyklou poziční soustavu se základem b. (Známý algoritmus převodu je uveden např. v [Vi16-78].)

Nelze-li zajistit stejnost rozsahů všech typů, pak je záhodno je volit jako mocniny společného základu z. Tedy $b_i \in \{z^m, m=1,2,\ldots\}$, kde $z \in \{2;\ 3\}$. Prakticky přicházejí v úvahu posloupnosti 2, 4, 8, 16, resp. 3, 9, 27, přičemž vždy poslední rozsahy zpravidla odpovídají číselnému typu. Tento přístup se uplatní v rámci jednoho *p*-zadání s různými typy, a též pro posloupnosti *p*-zadání na různá témata. Pak postačí provést převod do soustavy o základu *z* . Všechny převodové cifry získáme jednoduše seskupením cifer do příslušných *m*-tic (srov. [Vi16-78]).

Vyskytuje-li se v *p*-zadání jediný číselný typ T - který se může uplatnit na více místech zadání - pro nějž $n(T) > n(S)$, pak se jedná o přímé uplatnění pořadového čísla v zadání. Tento přístup je užitečný v úlohách spíše početního charakteru.

V praxi se používá tři způsobů uplatnění čísla studenta: přímé, převodové (často do poziční soustavy s malým základem) a kódové. Převodová a kódová interpretace mají dvě přednosti:
a) umožňuje využít všech možností, které dané zadání poskytuje;
b) znesnadňuje případné nasazení počítače ze strany posluchačů.
Jistou nevýhodou je větší chybovost při konkretizaci.

Připojme ještě, že speciálním případem *p*-zadání je např. tvoření všech *d*-prvkových kombinací z daných *d* tématických okruhů otázek či příkladů o rozsazích b_i , $i=1,\dots,d$. Zde typem T_i je série b_i analogických úloh. Cifry c_i převedeného studentova čísla pak mají význam pořadového čísla otázky z příslušného tématického okruhu.

C. METODIKA TVORBY P-ZADÁNÍ

Jak bylo uvedeno v čl. B, vychází se zpravidla z typické konkrétní úlohy pro dané téma. Volbou přiměřeného počtu proměnných míst a stanovením jejich typů se dospěje k požadovanému *p*-zadání. Přitom je třeba věnovat značnou péči jazykové formulaci, která by měla být co nejpřesnější, ale zároveň co nejméně nepřirozená. Toto vyžaduje dosti značné úsilí, jehož výsledek je nutno nechat opakovaně oponovat zasvěcenými a zkušenými kolegy.

Zvláštní roli má konkrétní úloha odpovídající pořadovému číslu $æ = 0$. Bývá to zpravidla úloha výchozí, kterou lze nazvat "učitelskou". Ta je určena k případné demonstraci procvičovaného postupu, a především by měla posloužit ke kontrole správné přípravy *p*-zadání pro zpracování na počítači, případně ke kontrole změn provedených v programu. Proto pro $æ = 0$ by mělo jít o úlohu typickou, avšak se snadno kontrolovatelnými výsledky.

Poznamenejme, že z úsporných důvodů (ulehčení přípravných prací, šetření strojovým časem) je záhodno navrhovat celé série (5 až 10) *p*-zadání, z nichž po zpracování vybíráme vhodné.

Navržením *p*-zadání ovšem práce autora zdaleka nekončí. Je třeba především ještě stanovit tzv. kritéria nevhodnosti (ta se zpravidla formulují snáze než kritéria vhodnosti). Konkrétní úlohy považujeme zpravidla za nevhodné, nastane-li při jejich řešení některý z těchto případů:

a) Selhání metody. K tomu dochází, jsou-li porušeny předpoklady úspěšnosti metody. Např. funkce není definována, v průběhu výpočtu dojde k dělení nulou, matice soustavy je singulární. U infinitních metod může např. dojít k divergenci procesu.

b) Neinstruktivnost. O té hovoříme, je-li průběh výpočtu netypický. Např. v konkrétním příkladu vyjde, že se má hledat extrém konstanty, nebo při použití přibližné metody vyjde chyba nulová.

c) Nepřiměřená náročnost. Náročnost zpravidla posuzujeme ze dvou hledisek: z logického a početního. Např. u funkčních či relačních typů může být logická náročnost velmi nespojitou funkcí proměnné. Rovněž u početní náročnosti požadujeme, aby příliš nekolísala v rozmezí intervalu pořadových čísel. Nepřiměřeností pak rozumíme příliš malou, nebo naopak velkou námahu (vzhledem k průměru), kterou je nutno vynaložit na vyřešení příkladu. Např. u infinitních metod jde o nepřiměřený počet kroků potřebných k dosažení požadované přesnosti. Nebo naopak někdy může existovat možnost uhodnutí řešení. Stanovení hranic náročnosti je do značné míry subjektivní.

d) Potíže při výpočtu. Ty do jisté míry souvisejí s předchozím případem. Mohou být však též vyvolány typem výpočetního prostředku, jehož použití se předpokládá. Např. může vadit nevhodný rozsah výsledků a mezivýsledků. U kalkulaček bez pohyblivé čárky dělají potíže velké řádové rozdíly mezivýsledků.

Kritéria nevhodnosti slouží tedy k pročištění *p*-zadání od nevhodných úloh, a přispívají tak k zajištění regulárnosti a netriviálnosti a s tím související srovnatelné pracnosti v rozsahu posloupnosti úloh generované *p*-zadáním. Někdy dokážeme úplně analyzovat *p*-zadání, jindy je možno využít určitých speciálních teoretických poznatků (srov. např. [Vi8-75]), a často se musíme smířit s tím, že sérii úloh s těmito vlastnostmi budeme při daném skeletu vyhledávat experimentálně - nejraději na počítači. Přitom oceníme komentář generovaný v průběhu výpočtu příslušnými programovými konstrukcemi.

Případných negativních výsledků můžeme využít k úpravě *p*-zadání. To je možné v důsledku značného nadbytku úloh generovaných *p*-zadáním. Někdy stačí se omezit jen na určitý úsek zpracované posloupnosti úloh, jindy můžeme uspět změnou mohutnosti typů. V případě číselných typů často postačí změnit krok.

Metodické poznámky pro tvorbu *p*-zadání, včetně formulovaných kritérií nevhodnosti, by měly ovšem samozřejmou součástí prací při aplikaci *p*-zadání na nový tématický okruh.

D. PŘÍKLADY POUŽITÍ P-ZADÁNÍ VE VÝUCE

Sledujeme-li tématické okruhy osnov základního kursu matematiky, jakož i kursů nadstavbových, zjistíme, že téměř v každém z nich mohou *p*-zadání najít dobré uplatnění. Všimneme si některých možností, které již byly realizovány, a naznačíme případná rozšíření aplikační oblasti.

Formy uplatnění *p*-zadání ve výuce jsou rozmanité. V běžném cvičení je použijeme ke kombinování individuální a kolektivní práce, např. k podpoře soutěživosti při porovnávání rychlosti v řešení individualizovaných úloh stejného typu. Ideální místo nacházejí ve cvičeních typu praktika, v úlohách pro dálkové studium a při ukládání náhradních zadání. Komplikovanější *p*-zadání lze užít při semestrálních pracích.

Neocenitelnou službu poskytují *p*-zadání při testování znalostí studentů. V tzv. minitestech, jimiž se na začátku cvičení provádí rychlá kontrola připravenosti, se dobře uplatní celočíselná *p*-zadání, která se snadno zadávají i kontrolují. V řádných testech je jimi zcela zamezeno primitivnímu opisování, takže např. úplně odpadá známé horečné doopisování v průběhu odevzdávání testů.

Proměnná zadání byla dosud nejdůsledněji používána v numerickém praktiku, v němž studenti řešili základní numerické úlohy běžně známými algoritmy. Cvičení tohoto typu je přímo předurčeno pro zpracování metodikou *p*-zadání. Historický vývoj lze sledovat v [Vi21-79; Vi24-80]. Jak je patrno z [Vi5-73; Vi11-77], kde jsou uvedeny příklady osvědčených p-zadání, podařilo se pokrýt všechna cvičení. Metodika p-zadání byla přenesena do teoretické kybernetiky, v níž převažují diskrétní matematické obory. Vzory p-zadání z tohoto oboru lze nalézt ve [Vi12-77; Vi24-80].

Konkrétní použití je dokumentováno v každé práci na téma p-zadání [Vi21-79; ViR-81; Pří-85; DJO-90; SbP-90]. Uvádíme proto jen některé novější případy z různých oblastí matematiky.

Pro procvičování racionálních (ne)rovnic můžeme vytvořit např. následující p-zadání [Vi37-88:30]:

(PZ) Určete, pro která $x \in M_{pq}$ platí

$$\frac{x + 3(-1)^r}{2x - s - 1} + 4 \;\sigma_{tu}\; \frac{x \,\alpha_{vw}\, 2}{x + 5}$$

⊔

ij	00	01	10	11
M_{ij}	**N**	**Z**	**R**	**R**$^+$
σ_{ij}	=	<>	<	>
α_{ij}	+	−	.	/

Ve skriptech [Vi35-85] je uvedena agregovaná úloha pro diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné. Obecné proměnné zadání má tvar

(PZ) $$f(x) = \frac{(-1)^p(4 + q)x + r}{x^2 + (-1)^s(t + u)x + (-1)^v(w + 1)}$$

do něhož se dosazuje osm nejnižších bitů rodného čísla. Každá z úloh má tvar lin/kvadr. Požaduje se

1. Vyšetřit průběh funkce a nakreslit její graf.

   Návod: Při hledání kořenů druhé derivace použijte Newtonovu metodu, zahrnující Hornerův algoritmus.

2. Tabelovat funkci pro $x = 3{,}0(0{,}2)5{,}0$ tj. od $x = 3{,}0$ do $x = 5{,}0$ s krokem $h = 0{,}2$; na 6 desetinných míst za čárkou.

3. Vyčíslit určitý integrál $\int_3^5 f(x)dx$ dvěma způsoby:

3a. Analyticky pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule.

Návod: Užijte postupy pro integraci racionální funkce nebo (lépe) tabulky integrálů.

3b. Numericky Simpsonovým pravidlem.

Volte krok $h = 0{,}2$ resp. $h = 0{,}1$; užijte tabulku z bodu 2.

Porovnat postupy 3a,3b co do pracnosti (času potřebného pro výpočet).

Ve zmíněných skriptech [Vi35-85] je též 50 úlohových dvojic (rozlišovaných písmeny *a*, *b*), z nichž si studenti vybírají podle 25 nejnižších bitů svého rodného čísla (přebytečné číslice zleva se vynechávají). Postupuje se od nejvyššího řádu podle přiřazení 0 <-> *a* , 1 <-> *b* . Po vyčerpání všech bitů se tento postup opakuje. ⊔⊔

Jako semestrová práce v prvním semestru všech fakult se v současnosti používá jednoduchá dopravní úloha [Nek-91], která má čtyři parametry $\{f,p,s,n\}$, jež jsou dány tabulkami:

fak.	PF	SF	TF	MB
f	1	2	3	4

par.	A	B	C	D
p	1	2	3	4

$s \in 1..15$ ... číslo skupiny,
$n \in 1..30$ ... poř. číslo studenta ve stud. skupině.

Zadání úlohy. Dva výrobci vyrábějí daný výrobek v množství $860 - 5f + 6n$, $1040 + 5f - 6n$. Tři spotřebitelé odebírají tento výrobek od výrobců v množství $600 + 5s$, $700 - 3p$, $600 + 3p - 5s$.

Doprava jednotkového množství výrobku od i-tého výrobce k j-tému spotřebiteli stojí a_{ij} jednotek (např. Kčs), přičemž čísla a_{ij} jsou zadána maticí vpravo.

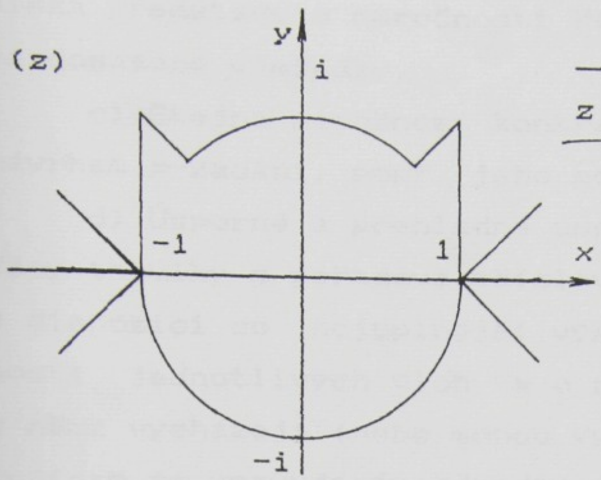
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S1 & S2 & S3 \end{array} \\ \begin{array}{c} V1 \\ V2 \end{array} & \begin{bmatrix} 105 & 48+2n & 70+20f \\ 96 & 60 & 92+2n \end{bmatrix} \end{array}$$

Stanovte takovou distribuci výrobku (tj. množství, které mají dodávat jednotliví výrobci spotřebitelům), aby celkové náklady na dopravu byly minimální. ⊔⊔

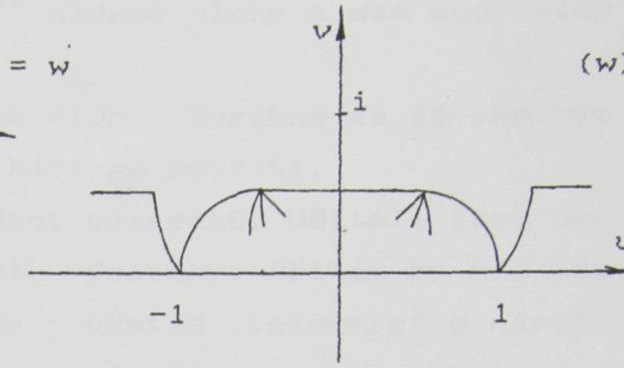
V předmětu funkce komplexní proměnné byl pro individualizovaný test použit soubor pěti p-zadání [Šru-77; Vi18-79:50-1]. V tomto případě je $[\text{poř.číslo}]_{10} = [rqp]_4$, tj. studenti převáděli jim přiřazená čísla do čtyřkové soustavy. Uvádíme znění zadání:

1. Vypočtěte všechny hodnoty $(q + i(r+1))^{1/(2+p)}$.
2. Vypočtěte $\int_C e^{pz}/(z-i^q)dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v počátku o poloměru $(r + 2)$.
3. Sestavte různé rozvoje funkce $1/[(z-p-1)(z-q-2)]$ do Laurentovy řady se středem v bodě r .
4. Vypočtěte reziduum funkce $\sin\{(z-p)/[(z-q)(z-r)]\}$.
5. Zobrazte křivky z obr. 1 lineární lomenou funkcí $w = (2rz - i^q)/(z + i^p)$.

U posledním příkladu je radno použít grafický počítačový výstup. Na obr. 2 je nakreslen výsledek pro $[11]_{10} = [023]_4$.



$$\frac{1}{z - i} = w \longrightarrow$$



Obr. 1. Obr. 2. ⊔

V [Př1-85] jsou aplikována *p*-zadání pro potřeby konstruktivní geometrie včetně zadávání rysů. V [KS-91] je více než 400 kódovaných *p*-zadání, která pokrývají větší část základního kursu matematiky. Některá z nich byla zpracována na počítačích.

E. ZKUŠENOSTI S APLIKACÍ METODIKY P-ZADÁNÍ

Dlouholetý provoz *p*-zadání v numerickém praktiku a jejich následující aplikace v nenumerických disciplínách poskytuje celou řadu zkušeností s jejich tvorbou a užitím.

1. Všeobecné poznámky

Vhodné zapojení *p*-zadání do výukového procesu má nesporný výchovně-vzdělávací význam. Výhody *p*-zadání z organizačních, pedagogických a psychologických hledisek lze shrnout do několika bodů:

a) Jednoduché společné zadávání. Každý student si ze společného *p*-zadání zapsaného na tabuli nebo uvedeného ve skriptech vytvoří svoji konkrétní úlohu uplatněním přiděleného pořadového čísla. Současnost a stejnost zadání vytvářejí předpoklady pro vznik atmosféry soutěžovosti ve studijní skupině. Stejnorodost úloh generovaných *p*-zadáním pak navozuje objektivně podložený pocit spravedlivého zatížení v rozsahu skupiny. Časové nároky na zadávání úloh lze dále snížit navrhováním sdružených *p*-zadání, jež lze použít pro příbuzná témata.

b) Samostatnost práce studentů. Je zcela zamezeno opisování. Studenti si mohou sdělovat pouze algoritmy či postupy, což je z pedagogického hlediska přijatelné, či dokonce žádoucí. Každý získá představu o náročnosti řešení zadané úlohy a sám zodpovídá za dosažené výsledky.

c) Stejná náročnost konkrétních úloh. Dosáhne se jí vhodným návrhem p-zadání, popř. jeho modifikací po použití.

d) Úsporné a přehledné uspořádání výsledků. Učiteli jsou dodány tabulky s pořadově očíslovanými výsledky. Přitom by měl mít k dispozici co nejúplnější výsledky - včetně informací o náročnosti jednotlivých úloh a o průběhu výpočtu - a to ve tvaru, v němž vycházejí (nebo mohou vyjít) studentům. Tím se vyhne opakujícím se unavujícím odhadům a rovněž snáze odhalí případné chyby. Z podobného důvodu je třeba dávat tabulkám přednost, i když existují explicitní vzorce pro výsledky (což je ostatně nedobré).

Studentům na druhé straně by měla být dosažitelná jen část výsledků, aby měli sice možnost kontrolovat správnost svého postupu, avšak aby přitom měli stíženy občas se vyskytující pokusy o úpravu mezivýsledků podle známých výsledků.

2. Numerické praktikum

Bezpečné zvládnutí algoritmů numerických metod vykládaných v přednášce vyžaduje procvičení na typických numerických příkladech. To přispívá k pochopení charakteristických rysů numerických výpočtů a problémů s tím spojených. Jako velmi dobrá se ukazuje forma praktika, v němž jsou studentům individuálně přiděleny úlohy a pracují samostatně na vlastních nebo přidělených výpočetních prostředcích. Získávají tak představu o náročnosti numerických výpočtů. Přípravu a organizaci numerického praktika se podařilo dovést na velmi dobrou úroveň - s plným využitím p-zadání - takže může sloužit jako vzor pro ostatní tradiční cvičení.

Tvorba p-zadání zde nečiní větších potíží. Převážně bylo voleno přímé uplatnění pořadového čísla - ve formě číselného typu - prostřednictvím analytických parametrizujících vztahů. Většinou přitom vystačíme s lineárními vztahy, které zpravidla poskytují dostatečnou rozlišitelnost výsledků v rozsahu generované posloupnosti úloh. Zatím snad jedinou vážnější výjimkou je interpolační úloha, v níž by bylo záhodno volit parametrizaci obecnější. Nicméně v praxi se ještě nestalo, že by studenti odhalili možnost využít linearity poměrných diferencí k úspoře individuální a pře-

především kolektivní práce. V roli parametrizovaných míst se vyskytly koeficienty, meze, krok, počáteční a okrajové podmínky. Při tabelaci funkcí jedné proměnné byl použit též funkční typ ve formě skládání elementárních funkcí předřazených před polynom (v zápisu, funkčně následují za).

Jisté nesnáze se projevují při zajišťování regulárnosti a stejné náročnosti v rozsahu celého p-zadání. Při zmenšování počtu cifer a vlivem lidského činitele se zvyšuje pravděpodobnost sestrojení p-zadání nevhodného pro některé konkretizace. Např. v [Čer-67] se v příkladu I.43 ukládá najít kořeny rovnice

$$x - a^x = 0 \qquad \text{pro} \quad a = 0,5(0,1)1,4 \; .$$

Přitom příklad pro $a = 1$, tj. rovnice $x - 1 = 0$ je jistě nesrovnatelně jednodušší než pro ostatní a.

V tomto ohledu se může pozitivně uplatnit převodová či kódová interpretace pořadového čísla. Využije se tak lépe možností zadání a dosáhne se větší nespojitosti výsledků. To rovněž znesnadňuje pokusy o interpolaci mezivýsledků sousedních úloh.

3. Organizace spojená s aplikací p-zadání

Intenzívní a pravidelné používání p-zadání v průběhu semestru předpokládá ovšem příslušnou organizační přípravu. Před prvním výskytem je nutno především přiřadit všem studentům pořadová čísla platná pro celý semestr. Zpravidla vyjdeme z úředního seznamu (bez vynechávek pro odpadnuvší studenty!). Pak je třeba provést ukázkově převod do poziční soustavy a předvést konkretizaci zadání - především uplatnění tabulek typů. Správné pochopení kontrolujeme dotazem náhodně zvolenému studentovi.

Kontrolu výsledků usnadňuje stanovení a dodržování jednotné formy vypracování. K tomu účelu uvedeme vzorový formulář s předkreslenou hlavičkou, v níž je výrazně vyznačeno přidělené číslo a jeho převod (pro případnou kontrolu správnosti konkretizace zadání). Osvědčilo se např. uspořádání z níže připojeného schématu:

Dále je třeba stanovit termíny odevzdávání úloh - nejlépe formou závazného písemně formulovaného harmonogramu. Zde je možno rozdělit úlohy do tématicky ucelených bloků. To ovšem předpokládá časovou koordinaci s osnovami přednášek, především disciplinovanou realizaci osnov podle pevného časového plánu.

Přidělené úlohy zpracovávají studenti zpravidla individuálně. V případě výrazně algoritmických úloh (např. numerického charakteru) lze připustit v běžném cvičení i práci ve dvojici s tím, že každý její člen musí odevzdat svoji úlohu.

Odevzdané úlohy je třeba pečlivě evidovat s uvedením data. Kontrolu a hodnocení odevzdaných úloh lze provádět průběžně podle termínů harmonogramu nebo po blocích. Přitom se mohou dobře uplatnit studentské pedagogické síly.

<table>
<tr><td>poř.č.</td><td colspan="4">převod</td><td>jméno a příjmení</td><td colspan="3">datum:</td></tr>
<tr><td></td><td>s</td><td>r</td><td>q</td><td>p</td><td></td><td>kr.</td><td>roč.</td><td>fak.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="9">Název úlohy:</td></tr>
<tr><td colspan="9">Výsledek:</td></tr>
<tr><td colspan="9">Zadání a řešení:
...</td></tr>
</table>

4. Postoj studentů k p-zadáním

Vzhledem k novosti hromadného zadávání individuálních úloh ve formě p-zadání je zajímavé a potřebné znát názor spotřebitelů - studentů a konfrontovat jej s představami autorů a zadavatelů - pedagogů.

Postoj studentů k p-zadáním byl zjišťován zatím v rámci dotazníku k numerickému praktiku, který byl realizován ve čtyřech semestrech, počínajíc letním semestrem 1976/77 a končíc zimním semestrem 1978/79, a to střídavě na textilní a na strojní fakultě VŠST v Liberci. Akcím byly věnovány úvodní části závěrečných cvičení v semestrech. Formulář dotazníku je přiložen.

V sociologické terminologii byla zvolena forma přímého použití anonymního dotazníku v hromadném šetření, tzn., že skupiny studentů vyplňovaly dotazník za přítomnosti pedagoga. Učitel vysvětlil předem význam akce pro zlepšování metod výuky a rovněž vedl následující besedu o problematice p-zadání a praktika.

Pro naše účely je zajímavá položka č. 6, která je dotazem na celkový vztah k p-zadáním. Studenti odpovídali bodově podle pětistupňové symetrické polární škály s maximem 2. Průměrná odpověď byla 0,8, což znamená kladný vztah k p-zadáním.

ně. V případě výrazně algoritmických úloh (např. numerického charakteru) lze připustit v běžném cvičení i práci ve dvojici s tím, že každý její člen musí odevzdat svoji úlohu.

Odevzdané úlohy je třeba pečlivě evidovat s uvedením data. Kontrolu a hodnocení odevzdaných úloh lze provádět průběžně podle termínů harmonogramu nebo po blocích. Přitom se mohou dobře uplatnit studentské pedagogické síly.

poř.č.	převod				jméno a příjmení	datum:		
	s	r	q	p		kr.	roč.	fak.
Název úlohy:								
Výsledek:								
Zadání a řešení: ...								

4. Postoj studentů k p-zadáním

Vzhledem k novosti hromadného zadávání individuálních úloh ve formě p-zadání je zajímavé a potřebné znát názor spotřebitelů - studentů a konfrontovat jej s představami autorů a zadavatelů - pedagogů.

Postoj studentů k p-zadáním byl zjišťován zatím v rámci dotazníku k numerickému praktiku, který byl realizován ve čtyřech semestrech, počínajíc letním semestrem 1976/77 a končíc zimním semestrem 1978/79, a to střídavě na textilní a na strojní fakultě VŠST v Liberci. Akcím byly věnovány úvodní části závěrečných cvičení v semestrech. Formulář dotazníku je přiložen.

V sociologické terminologii byla zvolena forma přímého použití anonymního dotazníku v hromadném šetření, tzn., že skupiny studentů vyplňovaly dotazník za přítomnosti pedagoga. Učitel vysvětlil předem význam akce pro zlepšování metod výuky a rovněž vedl následující besedu o problematice p-zadání a praktika.

Pro naše účely je zajímavá položka č. 6, která je dotazem na celkový vztah k p-zadáním. Studenti odpovídali bodově podle pětistupňové symetrické polární škály s maximem 2. Průměrná odpověď byla 0,8, což znamená kladný vztah k p-zadáním.

DOTAZNÍK ke cvičení z numerických metod

datum:
stud. sk.: /

Body označené § vyhodnoťte číselně podle stupnice

velmi špatný	špatný	neurč.	dobrý	velmi dobrý
-2	-1	0	1	2

A KALKULAČKY 1 Počet použití §2 Váš vztah k	Nisa	Tesla	Soemtron	vlastní-typ:

B SKRIPTA	Návody pro kalkulačky

§3 Hodnocení částí	Nisa				Tesla				Soemtron				Výsledky		
Návody k úlohám	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

4 Vyjmenujte po 2 úlohách	Obtížnost	logická	co do pracnosti
	největší		
	nejmenší		

5 Parametrizované úlohy mají tyto	výhody:	
	nevýhody:	

§6 Váš celkový vztah k parametrizovaným úlohám	

C ORGANIZACE práce při řešení úloh

7 Jaký je podle Vás optimální počet členů u jedné kalkulačky	

§8 Váš vztah k formě práce	samostatné	
	ve dvojici	

9 Vaše zkušenosti s organizací práce	samostatné
	ve dvojici

D CVIČENÍ: obsah, forma, technické zařízení

§10 Vaše hodnocení 11 Návrhy na změny	obsahu výuky		
	metod výuky		
	techn. zařízení		

§12 Váš odhad použitelnosti získaných poznatků	v dalším studiu	
	v praxi	

13 Co jste očekával(a) od cvičení	
§14 Míra splnění Vašich očekávání	
15 Další poznámky	

Z vyhodnocení slovních odpovědí na položku 5 vyplývá, že výhody p-zadání jsou spatřovány v samostatnosti a v zabránění opisování. 15% posluchačů nevidí žádné výhody a 50% žádné nevýhody, 12% si stěžuje na nemožnost porovnání výsledků se spolužáky. Připomeneme-li si, že právě dosažení samostatnosti práce každého studenta, vypěstování potřebné sebedůvěry a pocitu osobní zodpovědnosti za vypočtené výsledky je základním cílem *p*-zadání, pak můžeme být z pozice pedagogů spokojeni.

Všimněme si ještě položek 7 a 8, v nichž respondenti formulovali vztah k práci individuální a ve dvojici, což jsou formy práce užívané v běžných cvičeních zabezpečených *p*-zadáními. Ukazuje se, že příznivci práce ve dvojici (zejména v úvodní seznamovací fázi s úlohou) převládají poněkud nad individualisty, což souhlasí s průměrnou odpovědí na 8. položku dotazníku.

Podrobnější výsledky celé dotazníkové akce (volné odpovědi) lze nalézt v [Vi24-80] a částečně v [Vi12-77]. V úvahu přichází realizace obdobné akce zaměřené pouze na problematiku *p*-zadání.

F. PSYCHOLOGIE CHYB

Dosavadní zkušenosti s použitím *p*-zadání ukazují, že se studenti dopouštějí značného (někdy až neuvěřitelného) počtu chyb při opisování *p*-zadání a při odvozování svých konkrétních úloh. Odhlédneme-li od hrubých přehlédnutí způsobených nedostatečnou pozorností např. v důsledku únavy nebo indispozice a rovněž od chyb vzniklých neznalostí nebo špatným pochopením převodového algoritmu, stále jich ještě zůstává značné množství. Vysvětlení je pak třeba hledat v psychologických zákonitostech vnímání.

V psychologii se uvádí celá řada faktorů ovlivňujících vnímání [ĎŠ-73]. Především má podstatný vliv předchozí zkušenost. V tomto smyslu působí nepříznivě nematematické disciplíny. Tam má poskytovaná informace zpravidla vyšší redundanci, než je tomu v matematických oborech.

Z obecných zákonitostí je to např. tzv. pořádající tendence, která formuje lidské vnímání, a též zprostředkovaně zpracování vjemů a myšlení. Ve vnímání lidí se uplatňuje též tendence k tvarové vyhraněnosti, která se projevuje hledáním a upřednostňováním symetrie, pravidelnosti a uspořádání. To se může projevit předčasným zobecněním, extrapolací či přenesením vlastností až dosud vnímaného na následné. Při vysvětlování bychom mohli rovněž vyjít z tzv. zaměřenosti vnímání, která se podílí v kladném i záporném smyslu na chybovosti vnímání.

Jako příklad uvádíme matici, v níž je několik nebezpečných míst: V prvku a_{13} je narušena monotónie přesmyčkou cifer; zákonitosti jsou narušeny v prvcích a_{22}, a_{32}, kde je též nepravděpodobné znaménko minus. V těchto místech lze očekávat zvýšený výskyt chyb. Přitom bude patrně záviset na pořadí čtení prvků. V daném případě má většina lidí pocit něčeho špatného.

$$\begin{bmatrix} 1{,}234 & 8{,}765 & 4{,}657 \\ 8{,}764 & 3{,}466 & 2{,}468 \\ 4{,}567 & -2{,}469 & 0 \end{bmatrix}$$

Ke snížení počtu chyb je třeba volit přehledný skelet i schéma parametrizace. Prospěje rovněž zmenšení počtu cifer. Při navrhování *p*-zadání je záhodno buď se podvolit symetrii, nebo naopak dbát na důslednou asymetrii: vyhnout se přesmyčkám cifer, nepravděpodobným znaménkům minus a obecněji symetrickým podschématům, která navozují celkovou symetrii. Jinak je nutno explicitně a důrazně upozornit studenty na odchylku od symetrie.

G. POZNÁMKY K PROGRAMOVÉMU VYBAVENÍ

Rozsáhlejší aplikace *p*-zadání v pedagogické praxi vyžaduje, aby pro všechny uživatele byly k dispozici v dostatečném počtu přehledné tabulky výsledků. Přiměřenou zásobu *p*-zadání s tabelovanými výsledky nelze prakticky získat bez použití počítače. K tomu je třeba zajistit rozsáhlé programové vybavení, které může být vybudováno v přijatelném čase a v dostatečném rozsahu pouze za účasti většího počtu spolupracovníků. V dalším si všimneme velmi stručně principů a vývoje programového zabezpečení, které bylo používáno na KMA. Více se lze dozvědět o obecných zásadách i o konkrétních programech v [Vi6-73; Vi7-75; ViL-77; ViN-79; ViZ-79; Vi24-80].

Jde o rozsáhlé otevřené soubory programů, které používají celé řady společných služebních podprogramů. Integritu souboru lze udržet jen při plném dodržování zásad modulárního a strukturovaného programování, které jsou formulovány např. v [Jou-79].

Předpokladem je jednotná výstavba programů, která je podmíněna unifikací struktury vstupních dat, a též jednotnou formou výstupu. Pak je možno používat společných pomocných podprogramů pro čtení, kontrolu a případnou standardizaci základních vstupních dat, při jednotné indikaci chyb v datech. Zpracování navrhovaného *p*-zadání je doprovázeno komentářem.

Velkou péči je třeba věnovat grafické úpravě výstupu na tiskárnu. Především je nutno zajistit programový tisk *p*-zadání na základě vstupních dat a parametrizujícího podprogramu. Bez příslušného souboru podprogramů, který se neustále buduje s rozšiřováním aplikace *p*-zadání, nelze prakticky zajistit bezpečné používání výsledků.

Dbáme na zaprogramování kritérií nevhodnosti, kterými se vektorově ohodnotí celé *p*-zadání. Odtud pak získáme závěrečný redukovaný výčet vhodných či nevhodných úloh podle zásad formulovaných v **C1K2B**, jež jsou realizovány v [ViN-79; ViZ-79].

Výstavba souboru programů byla zahájena v souvislosti se zavedením výuky numerických metod na VŠST v r. 1966, v nichž byla nejnaléhavěji pociťována potřeba dostatečného počtu stereotypních numerických úloh na procvičování základních algoritmů.

Následovaly práce na souboru tzv. PU-programů, jejichž vývoj byl ukončen zprávou [Vi7-75]. Šlo o tabelaci funkce jedné reálné proměnné, o řešení rovnic a jejich soustav a o inverzi matic. Metody obecné byly též specializovány na algebraická (příp. na racionální) zadání úloh. Byly tak pokryty 2/3 úloh z [Vi5-73].

Ve zprávě [Vi8-75] byly formulována zlepšení a popsána jejich dílčí realizace. Na základě proponovaných změn byl vyvíjen soubor tzv. NP-programů, přičemž byl sledován cíl ulehčit práci uživateli, především odstraněním doprogramovávaných jednotek. Byl realizován tisk vyskytujících se matematických objektů (polynom, racionální funkce, algebraická rovnice, matice) v knižním tvaru. Ve [Vi5-73; Vi11-77] byl rozšířen okruh problémů.

Následovaly práce na tzv. NL-souboru, které sledovaly vyšší unifikaci souboru programů za cenu omezení se na pouze lineární parametrizaci, která však prakticky vždy postačuje. Byla věnována další péče grafické úpravě s přihlédnutím k potřebám archivace výsledků. Velké úsilí bylo vynaloženo na sdružování zadání do tématických bloků (srov. [ViL-77]).

Poté byl rozpracován tzv. PZ-souboru - viz [ViZ-79]). Zásadní změny byly vyvolány zaměřením na aplikace *p*-zadání v nenumerických disciplínách, v nichž je nutné převodové uplatnění pořadového čísla. Pro zachování kontinuity je u numerických zadání zajišťováno též přímé uplatnění pořadového čísla.

Oblast nenumerických *p*-zadání vyžaduje překladač pro zlomkovou aritmetiku (včetně vstupů a výstupů), na jehož konstrukci se pracovalo v [Sč15-80]. Zmíněný překladač umožňuje převádět programy sestavené v reálném oboru na "školské" aplikace pro ruční výpočty v oboru racionálních čísel ve tvaru zlomků, tj. uspořádaných dvojic.

Pozornost je nutno věnovat podsouboru programů pro tisk zadání s uváděním zadaných tabulek podtypů užitečných zabudovaných typů. Tím se redukuje na minimum uživatelské programování.

V algoritmech interního zpracování *p*-zadání je třeba srovnávat přirozené pořadí posloupnosti konkrétních úloh s tzv. hamiltonovským pořadím. Druhý postup je výhodnější, jsou-li známy vztahy pro korekci výsledku příslušnou jednotkové změně převodové *d*-tice (srov. odstavec **C1K3C4**).

Vyšší paměťová kapacita a rozsáhlé možnosti operačního systému nových počítačů umožňují zavedení měnitelných globálních kritérií nevhodnosti, jak bylo navrženo v [Vi12-77]. Je totiž možno uchovávat v paměti celé tabulky mezivýsledků, a to buď přímo nebo s využitím potencí operačního systému.

Průběžně je třeba sledovat možnosti sdružování zadání, jejichž programové zabezpečení umožňuje komprimovat potřebnou informaci na jediný arch protokolu z tiskárny pro celý blok úloh.

Významné postavení má programový systém obsluhující počítačovou archivaci *p*-zadání. Jeho úkolem je uchovávat již připravená se sledováním a vyhodnocováním jejich použití. Informační struktura by měla zahrnovat údaje o odvozených variantách, a tím o vývoji souboru *p*-zadání.

Vrcholem algoritmizačních snah by jistě byl překladač, který by k zadanému zvolenému *p*-zadání sestrojil příslušný program. K tomuto účelu slouží různé vývojové systémy, které ulehčují přípravu *p*-zadání pro neprogramátory. Z tohoto hlediska lze chápat dosud vykonanou práci jako nutnou přípravu potřebných interpretačních jednotek.

Značný význam budou mít vbrzku tzv. symbolické manipulátory (srov. K3) simulující činnost zkušených odborníků a pedagogů. Při rozumném komentování průběhu výpočtu mohou značně napomoci ve výuce matematiky.

H. STUDENTSKÁ ČINNOST A p-ZADÁNÍ

Příprava dostatečného počtu vhodných *p*-zadání na dané téma a tabelace příslušných výsledků je ovšem značně časově náročná (i při použití počítače). Tato tématika se však ukázala jako velmi vhodná pro práci studentských vědeckých kroužků a studentských a pedagogických sil pracujících na KMA. Jedná se totiž o typicky týmovou práci, kdy se vychází ze společných principů a společných základů. Přitom obtížnost jednotlivých témat je dobře srovnatelná, což podporuje soutěživost účastníků v rámci spolupráce.

Ve šk. r. 1978/79 byly vypracovány čtyři práce [Sč7-10-79], s nimiž se autoři zúčastnili celoškolního kola soutěže studentských vědeckých prací. Všechny práce vzbudily pozornost komisí, které ohodnotily jejich úroveň a vzorný průběh obhajoby. Soubor těchto prací pod názvem "Proměnná zadání ve výuce matematiky" obsadil v celostátním kole SVOČ v oboru matematika (sekce aplikovaná matematika) 6. místo, což je v soutěži s pracemi "profesionálů" z MFF a PřF UK jistě pěkný úspěch.

Práce [Sč8-79] se zabývá počítačovým vyhodnocováním vlastností parametrizovaných algebraických struktur s konečným nosičem, jejichž jediná operace je zadána tzv. Cayleyho tabulkou. Práce [Sč9-79] se věnuje konečným binárním relacím, které jsou zadány incidenčními *p*-maticemi. V [Sč7-79] je formulováno *p*-zadání pro úvodní úlohu z normovaných prostorů: ověření souhlasnosti normy součinu dvou celočíselných *p*-matic, a to pro tři základní normy. Poprvé se připouští přímé i převodové uplatnění pořadového čísla studenta. V poměrně náročné práci [Sč10-79] se autor zabýval minimalizací booleovské funkce zadané proměnnými vrcholy. Byl zvolen poněkud odlišný (avšak perspektivní) přístup, spočívající na zpracování alfanumerické informace.

Další práce se věnují *p*-zadáním kódovaným prostřednictvím pěticiferného kódu. V [Sč23-83] je diskutována problematika kódování a na TI-59 je zpracován definiční obor odmocniny z racionální funkce (rozšíření je v [Sč33-86]) a dělení polynomu polynomem. [Sč30-85] se zabývá mj. administrativou spojenou s metodou celočíselně kódovaných *p*-zadání. Byly připraveny programy pro tisk tabulky kódů a pro výsledky bloku jednoduchých, resp. izolovaných výsledkově komplikovaných *p*-zadání.

I. ZÁVĚR

Proměnná zadání jako jeden z konkrétních projevů pronikání počítačů do přípravy a kontroly výsledků vyučovacího procesu zaujaly významné místo v pedagogické praxi. Metodika p-zadání se uplatňuje zejména při hromadných minitestech prověřujících připravenost studentů, při zadávání domácích a semestrálních prací a ve cvičeních, která mají charakter praktika. Významné uplatnění nachází v dálkovém studiu. Pedagog musí mít ovšem na paměti, že p-zadání nejsou univerzální a sám volit jejich vhodné střídání s tradičními úlohami. Tak stanoví vhodný poměr mezi prací individuální a kolektivní. Žádnou z těchto forem nelze potlačovat na úkor druhé.

Uplatňování p-zadání je nesporně perspektivní ve všech disciplínách, které jsou dostatečně formalizovány. Jedna z aplikací p-zadání spočívá v podstatném snížení mechanické práce spojené se zadáváním a opravováním prací studentů. Pedagog má pak možnost soustředit se na další závažné stránky výchovně-vzdělávacího procesu např. na zlepšování verbálního projevu studentů.

Proměnná zadání si ponechávají svůj význam i při vysoké vybavenosti výpočetní technikou (v případě potřeby se jednoduše předřadí náhodný generátor). Rigidní učební programy bez proměnnosti předkládaných úloh jsou pedagogicky nepřijatelné - mohou vést k bezduchému memorování předkládané látky studenty. Přesto se běžně produkují. Např. ambiciózní projekt TopClass 1989 pokrývá ve 100 jednotkách výukový program na středních školách ve Velké Británii. Přitom při chybné odpovědi studenta se program stále vrací k témuž (navíc ne vždy vhodně metodicky volenému) příkladu, v jehož specifické obtížnosti může být příčina nepochopení.

-421-

C4K2. MIKROPOČÍTAČOVÁ PODPORA VÝUKY

Všeobecné i konkrétní stížnosti na neznalosti studentů v matematice jsou známé. Neustále proto trvají snahy studenty aktivizovat a vést k tvůrčí práci. Snahou je zapojit do výuky matematiky především mikropočítače. Při řešení této problematiky je nutno vyrovnat se se specifickými problémy. Některé poznatky formulujeme v následujících poznámkách.

A. K PROBLEMATICE STYKU ČLOVĚK - STROJ

Styk člověka s počítačem by měl vycházet především ze psychotechnických a psychologických charakteristik člověka a splňovat zejména tato kritéria:

1. **Přihlédnutí k psychotechnickým charakteristikám** vnímání člověka. Stále nejsou vyřešeny základní nedostatky spojené s volbou barevné kombinace pozadí a popředí, s nevhodným jasem a pozadím obrazovky, jejím chvěním. Vnímání je ztěžováno nepříjemným blikáním, nevhodným střídáním pozitivního a negativního zápisu na obrazovce. Rovněž obtěžuje déletrvající nadměrné množství podnětů nečekaného druhu a z nečekaných míst.

2. **Antropomorfnost** (též přátelskost) činnosti počítače zahrnuje např.:

a) Přizpůsobení (individuálnímu) tempu člověka. Např. textový doprovod nesmí být natolik rozsáhlý a rychle se střídající, aby úspěšné užití programu nemuselo předpokládat předběžné absolvování kursu rychločtení (a rychlochápání).

b) Srozumitelnost již při prvním přístupu. Komunikace musí být na uživatelem očekávané a akceptovatelné úrovni. Vzhledem k různosti subjektů je vhodné zajistit možnost úvodní volby a průběžného přizpůsobování (změny) úrovně podle zasvěcenosti uživatele.

c) Uspořádání a využívání obrazovky podle lidských zvyklostí. Zápisy by měly probíhat zleva doprava a shora dolů. Při kreslení obrázků by se mělo přihlížet k běžným estetickým požadavkům. Všechny zápisy by měly být bezkolizní. K tomu je třeba zajistit, aby nové záznamy nezasahovaly do starých. V tomto ohledu je třeba kritizovat tolik oblíbená roletová (stahovací, pull-down) menu, která často svým počtem a uspořádáním zcela překrývají ústřední předmět pozornosti a činnosti. Je třeba přebírat lidské postupy, např. při kreslení rámečku a souřadnicových os a při jejich kotování. Odstraní se tak velmi nepříjemný pocit "proti srsti". Při uspořádání matematického textu je třeba se řídit ustálenými pravidly (zlomkové čáry, forma výrazů, zápis funkcí), i když je nutný kompromis s požadavky jeho linearizace.

d) Nepřetěžování pozornosti. Pro nutnou aktivizaci pozornosti užívat vhodné zvukové a světelné signály.

e) Ošetření proti všem chybám a omylům člověka (od chybného stisku klávesy až po klesnutí hlavy na klávesnici). Ochrana proti nežádoucím zásahům.

f) Humor na obrazovce. V literatuře (např. [HB-87]) se doporučuje odlehčovat zejména učební programy humorem. Tento humorný element může být např. reprezentován soucítícím panáčkem pobíhajícím a reagujícím na obrazovce podle průběhu a úspěšnosti činnosti uživatele.

g) Nepřehánění antropomorfnosti. Nesmí se zapomínat, že stroj slouží také (a především) k práci.

3. Redukce informační šedi směřuje ke stručnosti a přehlednosti.

a) Potlačování zbytečné informace, která zatěžuje uživatele. Sem náleží eliminace nežádoucích stop komunikace na obrazovce (mimo dialogový řádek), speciálně likvidace tzv. echa na obrazovce.

b) Zvýraznění změn a odlišností. Nové a vznikající informace je třeba vhodně odlišovat od starých. Např. je vhodné ukazovat na začátek kreslení a zvýrazňovat právě aktivní části.

Naznačená problematika je záležitostí především psychologů různého zaměření. Výsledky jejich práce by však měly být včas a v aplikovatelné podobě běžně dostupné tvůrcům a uživatelům programů.

B. VÝCHOZÍ PŘEDPOKLADY PRO DIDAKTICKÉ PROGRAMY

Naléhavě nutná je vnější paměť na pružných discích, připojení tiskárny a pokud možno klávesnice s českou diakritikou. Nejvýš žádoucí je též barevná grafika. Zatím nedosažitelné je světelné pero. Rovněž nedostatečná rychlost počítače může být i v této oblasti omezující.

K technickým východiskům se řadí též dokumentace k mikropočítačům. Bývá inspirována anglickými vzory, ale obvykle jich nedosahuje např. v přehlednosti, grafické úpravě a strukturovanosti. Ostatně ani firemní dokumentace renomovaných a zkušených producentů nesplňuje často požadavky uživatelů (jak lze zjistit např. z časopiseckých žebříčků hodnocení programových produktů). U autorů (často anonymních) lze pozorovat kolísání mezi literárním žoviálním stylem a zkratkovitým jazykem pro blízké zasvěcence. V tomto oboru by se měly rozlišovat nejméně tři explicitně uváděné a dodržované úrovně: propagační, pro začátečníky, pro odborníky (srovnávací). Jako vždy nesouhlasí se skutečným stavem a její forma je nevhodná jak pro začátečníka, tak i pro zasvěcence (pro koho je tedy určena?). To pak vyžaduje prověřovat skutečnou funkci nejasných příkazů a vytvářet tak vlastně novou dokumentaci.

Při tvorbě didaktických programů se objevuje rovněž potřeba "okenní" grafiky či aspoň její simulace. Někdy by stačily její elementy - např. čištění (zrnového) obdélníka vymezeného protilehlými vrcholy. Při práci s grafy chybí možnost lokalizace aktuální pozice pera na obrazovce a jednoduché zjišťování svítících bodů na obrazovce.

Uvedená východiska mají ovšem určující vliv při formulování cílů, při tvorbě a využívání didaktických programů.

C. NĚKTERÉ PRINCIPY TVORBY DIDAKTICKÝCH PROGRAMŮ

Unifikovaná produkce učebních programů předpokládá její didaktickou, programovou a dokumentační koordinaci. Byly učiněny pokusy o jistou standardizaci ([Bor-85; Fei-88; Mrk-88]), nicméně situace stále ještě není dostatečně ustálená. Uvádíme poznámky k formulaci některých pedagogických, didaktických, metodických a strukturních zásad, k nimž by se mělo přihlížet při vytváření učebních programů určených především pro vysoké školy.

1. Didakticko-metodické principy

1. Ucelenost tématického okruhu vyžaduje postižení celé tématické oblasti a ne jednotlivých izolovaných úloh. Např. programy pro opakování středoškolské látky ji nejen shrnují a upevňují, ale poskytují vyšší pohled na téma. Především látku systematizují a syntetizují.

2. Návaznost na osnovy výuky. Programy jsou určeny pro současnou výuku, a musejí proto souhlasit s jejím aktuálním stavem. Speci-

álně terminologie a symbolika musí být běžné a srozumitelné. Jedním z cílů je právě upevnění terminologie a symboliky rozkolísané mezi střední a vysokou školou a bohužel též vlivem počítačů. Připomeňme např. označování funkcí a zvláště inversních.

3. Neopakovatelnost je zčásti diskutabilní. Předpokládá různost konkrétního materiálu při každém běhu programu. Např. úlohy k procvičení by se měly lišit (ovšem v rámci daného typu). Tím se zabraňuje zcela mechanickému přístupu při opakovaném používání (mačkání kláves bez chápání podstaty). Základním prostředkem je náhodný generátor, který dovoluje náhodně generovat (numericky i sémanticky) úlohy v rámci volitelného podrozsahu programově zpracované tématiky. Tak dochází plného uplatnění metodika proměnných zadání.

4. Jednoduchost a nenáročnost na ovládání a čas. Komunikace s programem by měla sledovat uživatelské hledisko, tj. být srozumitelná i pro lidi, kteří užívají program poprvé a neumějí ani programovat. Proto musí být dostatečně kvalitní textový doprovod v programu (i v jeho dokumentaci). Pomoc (HELP) by měla být k dispozici při každém vstupu z klávesnice.

5. Volitelnost obtížnosti programu podle uživatelovy úrovně včetně tempa (zrychlování či zpomalování podle přání učitele či studenta). Dialog s vyučovaným by měl být veden ve dvou či třech úrovních podle závažnosti chyb, jichž se až dosud dopustil v průběhu výuky.

6. Maximální využití možností dialogu člověk - počítač. Navádět studenta na správné odpovědi otázkami, připomenutím teorie, obrázky, analogií, mnemotechnikou a vším, co mu může pomoci ke správné odpovědi.

7. Udržování aktivity studenta při práci s počítačem může napomoci zařazení herních a soutěživých prvků do programu. Může jít o závod s časem, se simulovaným protihráčem nebo prostě o co nejlepší skóre při průběžném sdělování mezivýsledků. Opět je nutné znát míru, aby zbyl prostor na prapůvodní poslání programu - pomoci studentům.

8. Hodnocení úspěšnosti studenta. Údaje o průběhu studijní seance se evidují v počítači a při jejím ukončení studentem, učitelem nebo časovým limitem si může student vyžádat přehled o svém výkonu, včetně známky a slovního hodnocení s doporučením pro další studijní postup.

9. Přiměřenost časových nároků na uživatele. Program by neměl být nekonečný. Měl by být zvládnutelný nejvýš ve 2/3 vyučovací jednotky. Program by měl po vyčerpání časového limitu sám ukončit svoji činnost.

2. Stavba programu

Měla by být zpravidla následující (srov. [Fei-88; Mrk-88]:

1. Iniciační část: název programu, jeho identifikace (datum, označení verze), jméno autora, případně motivační poznámky.
2. Informace o programu a pokyny k práci s programem (případně odkaz na literaturu a programovou dokumentaci). Pokud tato část vystupuje na obrazovce, musí mít uživatel-učitel možnost ji zkratovat při jím řízené výuce.
3. Jádro programu: V několika částech (modulech) zpracovaná problematika s přihlédnutím k ústřednímu postavení obrazovkového displeje.
4. Demonstrace a procvičování učiva.
5. Část shromažďující podklady pro pedagogickou diagnostiku získanou v průběhu užití programu, zejména při testu s případnou klasifikací.
6. Soubor standardních dat užívaných v programu.

Činnost jednotlivých částí se ovšem může prolínat. Poznamenejme, že požadavky modularity a strukturovanosti programu, které mají zásadní význam pro zpřehlednění a pro modifikace programu, nelze v basicu splnit na běžně požadované úrovni. Je nutno dbát o determinovanost, tzn., aby v každém okamžiku bylo jasné, jak pokračovat dále (i co se děje). Především je třeba maximálně omezit možnost havarijních situací. S tím souvisí i zabezpečení ochrany programu před uživatelem.

D. ROZVÍJENÍ POJMU FUNKCE

Ústřední postavení pojmu funkce v matematice vyžaduje jeho dostatečné osvojení studenty. Nedostatky studentů jsou známé. Začíná to nepevnou znalostí elementárních funkcí (např. kvadratické funkce jako prototypu polynomických funkcí a lineárně lomené funkce jako zástupce racionálních funkcí), jejich vzájemných vztahů a jednoduchých souvislostí. Absolventi SŠ často nepochopili přenášení aritmetických číselných operací na operace s funkcemi, a proto neovládají aritmetické manipulace s funkcemi. Nepojímají monotónii jako vzájemnou souvislost dvou proměnných, cizí jim jsou přírůstkové (diferenční) formulace, unikají jim dynamické aspekty pojmu funkce. Další potíže nastávají s pojmem složené funkce, komplikované ještě různorodostí jejich zápisů. Lineární složky jsou zpravidla chápány pouze staticky. Zcela studentům chybí např. potřebná zběhlost v přechodu mezi funkcemi f a $1/f$ a tušení jejich souvislostí. Tím se ztrácí významný propedeutický případ pro výklad limity funkce. Uvědomování si vztahů mezi f, $1/f$ je přitom zásadní. To dosvědčuje např. zřetelná tendence uvádět dvojice vzájemně převrácených funkcí společně - srov. např. [RR-87]. Podobně neblahá je situace s konstrukcí přirozených mocnin, či odmocniny dané funkce. Povážlivá je absence globálního pojetí pojmu funkce, a s tím související potíže při osvojování množinového rozšíření původně bodově chápané funkce. Uvedené nedostatky se pak odrážejí i v bezduchém (a často proto chybném) logickosymbolickém řešení (ne)rovnic, kdy se zcela ztrácí funkční a geometrická interpretace procesu a výsledku řešení. Problémy z funkce jedné proměnné se ještě zesilují při přechodu k funkcím dvou proměnných, kdy se navíc projeví nedostatečná prostorová představivost.

Rozvinutí zmíněných stránek pojmu funkce je ovšem časově náročné a vyžaduje individuální práci studentů podle jejich nedostatků a potřeb. Pro správné zaměření a ulehčení samostatné práce studentů se nabízí užití mikropočítačů. Ty dovolují obvykle vyhovujícím způsobem zachytit dynamiku a globalitu pojetí funkce v prakticky nekonečné mnohotvárnosti speciálních situací.

1. Ke kreslení grafů funkcí na mikropočítači

Při svislém rozdělení na textovou část (vlevo) a obrazovou (vpravo) je přiměřené vymezit pro kreslení obdélníkovou část obrazovky (poměr jejích stran je dán fyzikálními vlastnostmi dobře seřízené obrazovky). V této oblasti lze přijatelně kreslit grafy funkcí s několika málo změnami monotónie, které navíc nejsou příliš prudké. Vzhledem k proměnlivosti požadavků na obrazový prostor je záhodno užívat nebo aspoň simulovat "okenní" grafiku s volitelným umístěním a rozměry rámečku (v zrnech obrazovky), v němž se kreslí grafy.

Čáry se kreslí zpravidla pomocí lineárního interpolátoru.

Ten spojuje "úsečkou" dvojici zrn na obrazovce, která odpovídá sousedním vypočteným bodům funkce. Jde tedy o aproximaci lomenou čarou s jejími přednostmi a vadami, k nimž přibývá rušivé lámání šikmých úseček způsobené hrubou zrnitostí obrazovky.

Vyskytuje-li se v obrázku současně více grafů, lze je rozlišit barvou, různým typem čar, změnou jasu nebo blikáním. Nejjednodušší (ale často nepostačující) je označení začátku a konce grafu. Při popisech je radno používat příkazy pro zrnovou lokalizaci znaků, což je přesnější ve srovnání s rastrovou lokalizací.

Popisy grafů a rámečku (ohraničení okna) je nutno vést bezkolizně. (Tento požadavek nesplňuje ani tak prověřený produkt, jakým je Lotus 1-2-3.) Kdyby měl nový popis zasáhnout do některého již existujícího, má nový přednost. Dřívější popisy se posunou podél strany rámečku. Je-li nedostatek místa, odsune se přebývající popis do souběžného odkládacího prostoru na obrazovce.

Při kreslení grafů se tabeluje kreslená funkce. Prakticky je pak nutno řešit kompromis mezi nejjemnější variantou, kdy krok tabelace je 1 zrno, a mezi přijatelnými časovými nároky. Tímto lze vysvětlit nápadné nedostatky grafů např. v [Růž-89], kde funkce $x.\cos(x^2)$ nedosahuje přímky $y = x$, a stupňovité funkce jsou všude spojité. Zmíněná brožura má ještě jiné závažné nedostatky, takže může těžko sloužit k propagaci aplikace počítačů ve výuce matematiky.

Ve [Vi40-88] je popsán program kreslící grafy série funkcí s nabídkou vnějších mocninných složek. Ten je určen pro učitele k přípravě výuky funkcí.

2. Aritmetické operace s nejvýš kvadratickými funkcemi

Pomocí příslušných programů si studenti mohou nacvičovat kreslení skic k jednoduchým funkcím, případně užívání limitní symboliky.

a. Převracení lineárních a kvadratických funkcí

Program generuje náhodně (s diskrétním rovnoměrným rozdělením) parametry a, b, c v množině $\pm\{0,1,2,...,9\}$, $a <> 0$. Parametry se interpretují ve standardním tvaru algebraického výrazu. Tvar se vybírá náhodně ze 4 typů:

výraz	název standardního tvaru
$ax + b$	lineární výraz sestupný
$a(x + b)(x + c)$	kvadratický výraz součinový
$a(x + b)^2 + c$	doplněný na čtverec
$ax^2 + bx + c$	sestupný

Z trojice a,b,c se připraví řetězec pro tisk výrazu pro tisk v linearizovaném matematickém tvaru, tj. bez jednotkových činitelů, nulových sčítanců, zbytečných závorek, atp. Např.

a b c	standardní tvar	tisk
-1 9 = $-b$ = -9	součinový	-(X^2-81)
1 4 = b = 4		(X+4)^2
-1 0 0	lib. kvadratický	-X^2

Vytiskne se zadání funkce a nakreslí se její graf (s označením F) v náhodně generovaném celočíselném intervalu překrývajícím pokud možno všechny význačné či zajímavé body (v pořadí): vrchol, kořeny, počátek, body, kde funkční hodnota je 1 nebo -1 . Poté jsou vykresleny 3 grafy - "pravděpodobně" vyhlížející kandidáti na graf převrácené funkce. Jejich označení číslicemi 1, 2, 3 je opět náhodné. Uživatel má pak vybrat číslo grafu pro 1/F .

Při nesprávné odpovědi je komentován obvyklý důvod omylu a jsou připomenuty odpovídající vztahy číselných operací, znamének a nerovností. Pak je předložen nový příklad stejného typu (tj. stejný standardní tvar s parametry a diskriminantem stejných znamének jako u příkladu chybně zodpovězeného). Při opětovně chybné odpovědi (2. chyba stejného typu) se předloží detailní výklad o souvisejících vlastnostech operací a nerovností. Na závěr seance si může uživatel vyžádat hodnocení svého výkonu.

b. Aritmetická kombinace polynomické funkce a signa

Pro osvojování aritmetických operací s funkcemi se ukázalo jako velmi užitečné kreslení grafu funkce $f(x) := P(x) \ominus S(x)$, kde P je polynomická funkce nejvýš 2.stupně v různých standardních tvarech; $\ominus \in \{+, -, *, /\}$ je aritmetická operace; $S(x) := l.\mathrm{sgn}(x-u)$, l, u jsou konstanty; sgn je funkce signum: sgn $\mathbb{R}^+ = 1$, sgn $0 = 0$, sgn $\mathbb{R}^- = -1$.

Téma slouží ke dvěma účelům:

1. Procvičování rozpoznávání grafů čtyř základních aritmetických kombinací nejvýš kvadratické funkce P (různě zadané) a násobku S posunuté funkce signum. (Graf aritmetické kombinace $P \mathbin{\hat{\circ}} S$.)
2. Osvojování formalizmu zápisu limitního chování (těchto) funkcí v bodech nespojitosti a pro $x \to \pm\infty$. (Limita z grafu.)

Procvičují se pojmy

$$\left[\begin{matrix}\text{(vlastní)} \\ \text{nevlastní}\end{matrix}\right] \text{ limita } \left[\begin{matrix}\text{(oboustranně)} \\ \text{jednostranně}\end{matrix}\right] \text{ ve } \left[\begin{matrix}\text{(vlastním)} \\ \text{nevlastním}\end{matrix}\right] \text{ bodě.}$$

Příklady se předkládají v sériích (5členných). Na závěr série je dotaz na pokračování v další sérii. Na závěr seance si může student vyžádat hodnocení svého výkonu. Další podrobnosti lze nalézt ve [Vi44-90].

E. ZÁVĚR

Množství práce vykonávané při tvorbě učebních programů je značné. To plyne např. z běžně udávaných údajů o časových nárocích na vypracování didaktického programu zabezpečujícího 1 vyukovou hodinu [Bor-85].

Nicméně využití mikropočítačů obecně, a v matematice zejména, je nezbytné pro dosažení a udržování mikropočítačové gramotnosti vysokoškolské populace. Nabyté zkušenosti ukazují možnosti uplatnění této techniky i při omezených prostředcích. Získané zkušenosti se pak zúročují i v další pedagogické činnosti.

V současnosti je počítačová podpora výuky komplikovanou záležitostí koordinovaného úsilí desítek vysokých škol. V pravidelném informačním sborníku projektu CTI (Computers in Teaching Initiative) se uvádí dvacítka koordinujících pracovišť pro přípravu programů pro výuku nejrůznějších disciplín vyučovaných na VŠ. Zdá se, že izolované úsilí nadšenců nemá velkou naději na úspěch.

C4K3. SYMBOLICKÉ MANIPULÁTORY

Při řešení matematického problému často hledáme analytické řešení. K tomuto účelu slouží tzv. symbolické manipulační programy, či symbolické manipulátory (= SM), jimiž rozumíme (zpravidla značně rozsáhlé) programy určené k řešení matematických problémů včetně úprav získaných výsledků na vhodný cílový tvar.

A. PŘEHLED PĚTI SYMBOLICKÝCH MANIPULÁTORŮ

Existence pokročilých programů tohoto typu je známa - např. [Wei-82:293-6], či též [Vi35-85: $136^{8}{}_{11}$; Vi52-91:149], kde je zmínka o programu Macsyma. Konkrétním symbolickým manipulátorům jsou ovšem věnovány příslušné programové dokumentace, a též např. [Hea-86; RA-87; Wol-88; Ray-87]. V [FB-89] je přehled základních charakteristik pěti rozšířených programů:

Tab. 1. Specifikace nejběžnějších symbolických manipulátorů

Program	Verze	Cena	Hostitelský počítač	Požadavky na RAM	
				Minimum	Doporučeno
Derive	1.1	$200	IBM PC, PC-XT, AT	512 kB	640 kB
Macsyma	309.6	$1800	VAX, MicroVAX, Sun 3, Sun 4, Apollo	4 MB	8 MB
Maple	4.2	$400	mnohé mimo PC/MS-DOS	1 MB	1 až 2 MB
Mathematica	1.1	$500-$800	Macintosh, Sun 3, NeXT, 80386-počítače	2,5 MB	5 až 8 MB
Reduce	3.2	$500	Macintosh, PC/MS-DOS	640 kB	

Původně byly SM provozovány na velkých počítačích s dostatečnou rychlostí a paměťovou kapacitou. V současnosti jsou symbolické manipulátory provozovány na různých typech počítačů (často s výjimkou PC/MS-DOS) od sálových počínajíc, přes pracovní stanice, minipočítače až po osobní počítače.

Programy pro řešení matematických problémů zahrnují řadu dílčích oblastí. Již před třiceti lety se začaly objevovat programy upravující aritmetické výrazy [NFR-77]. Jimi se dané výrazy převádějí na jednodušší výrazy funkčně ekvivalentní, tj. nabývající ve společném definičním oboru shodných hodnot. Závažnou roli zde hraje existence standardních základních tvarů, které jsou cílem úprav. Symbolický manipulátor tedy především pracuje s algebraickými výrazy, které obsahují proměnné, funkce a čísla. Derivuje, integruje, počítá limity, řeší rovnice, rozkládá polynomy na činitele, funkce do mocninných řad atd. Např. $\int dx/(ax+b)$ vyjádří ve tvaru $(1/a)\ln(ax+b)$. Při numerických hodnotách všech proměnných dá numerický výsledek. Poznamenejme, že obecný přístup ke zjednodušování výrazů může vést k rozporům s požadavky početní praxe a především s paměťovými a časovými omezeními výpočetní techniky. Vzhledem k těmto omezením lze podobné programy nachytat i na některé příklady z přijímacích zkoušek na VŠ.

Tab. 2. Přehled možností pěti symbolických manipulátorů

Činnost	Derive	Macsyma	Maple	Mathematica	Reduce
Integrace, derivování	+	+	+	+	+
Maticové operace	+	+	+	+	+
Soustavy lineárních alg. rovnic	+	+	+	+	+
Soustavy nelineárních rovnic	@	+	#	*	!
Obyčejné diferenciálních rovnice		+	+	×	!
Vektorové rovnice		+	$	$	!
Laplaceova transformace		+	+	+	!
Inverzní Laplaceova transformace		+	+		!
Výstup ve vyšším program. jazyce	+	+	+	+	+
Generování numerického kódu		+			+
2D grafy	+	+	+	+	!
3D grafy	+	+		+	!

Poznámky:

+ program nebo přídavný softvérový balík přímo provádějí činnost

@ pouze rovnice o jedné neznámé

\# bez numerického řešení

* pouze polynomické rovnice

× pouze Runge-Kutta pro jednu diferenciální rovnici 1. řádu

$ pouze ve speciálních souřadnicových systémech

Programy poskytují mnohé další funkce (často dosti se lišící).

B. STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY

Derive je nový program určený pro IBM/MS-DOS navazující na muMATH. Má poměrně omezené možnosti, ale snadno se používá. Příkazy jsou v menu (à la Lotus 1-2-3). Poskytuje rozsáhlou pomoc. Nemá svůj programovací jazyk, ale dovoluje definovat nové funkce. Vstupní výrazy a (mezi)výsledky jsou uspořádány víceřádkově (matematicky). Lze pracovat s částmi výrazů označovanými kurzorovým obdélníkem. Velké výrazy však vybíhají mimo obrazovku a je obtížné s nimi pracovat. K dispozici je 55 funkcí, včetně goniometrických a hyperbolických. Rovnice řeší numericky bisekcí, numerický výpočet integrálu užívá adaptivního Simpsona. Dovoluje měnit měřítka, snadno se přemisťují obrázky. Grafické a numerické procedury jsou pomalé (ale univerzální). V [FB-89:683p] se uvádí, že jako jediný z uvedených SM fungoval efektivně na PC/MS-DOS počítačích. Je vhodný pro začátečníky a najde široké uplatnění pro studenty přírodovědných a technických oborů.

Macsyma začal být rozvíjen v roce 1969. Roku 1971 o něm informovali J. Moses (MTI USA) a jiní. V současných měřítcích jde o dosti rozsáhlý program (300 000 řádků v jazyce LISP), který je patrně nejmohutnějším a nejrozsáhlejším programem pro symbolické manipulace. Nedávno byl zahrnut převod diferenciálních rovnic na diferenční (pro numerické výpočty), a rovněž perturbační metoda. Program náleží do oblasti umělé inteligence. Výchozí verze byly založeny na simulaci činnosti superexpertů. Poté byl vytvořen pevný teoretický základ, nicméně heuristika si ponechala své místo pro zefektivnění činnosti programu. Macsyma je poněkud obtížná k používání. Příkaz describe poskytuje průběžnou pomoc, apropos informuje o zápisu příkazů. Má nepohodlný řádkový editor.

Maple je rozvíjen od r. 1980 (Waterloo, Canada). Sestává ze systémového jádra (napsaného v jazyce C) a z knihovny matematických programů (psaných ve vlastním Maple jazyce). Disponuje navíc číselnou teorií, ortogonálními polynomy atd. V Maple jazyce může uživatel přidávat funkce a procedury. Nedokáže spojovat grafiku, výrazy a text do téhož okna. Dovoluje však pomocí myši měnit velikost a poměr měřítek. Manuál je k dispozici v rámci pomoci.

Mathematica byla uvedena na trh uprostřed roku 1988. Má dvě části. Úvodní, strojově závislá část zajišťuje komunikaci s uživatelem, druhou část tvoří strojově nezávislé jádro pro výpočty.

Poskytuje rozsáhlou průběžnou nápovědu. Má více než 600 příkazů a zabudovaných funkcí (např. Besselovy funkce s komplexním argumentem). Rozšiřující softvérové balíky umožňují např. Laplaceovu transformaci. Má velmi dobrou grafiku (implicitní je dost slabá). Dovoluje kombinovat text a grafy se vstupy a výstupy programu prostřednictvím tzv. zápisníku (notebook) a připravit dokument pro tisk. Dokument lze převést do TEXu, obrázky jsou formátovány v POSTSCRIPTu. Má vlastní rozsáhlý programovací jazyk. Dovoluje zavést nová pravidla (pro úpravy).

Reduce začal v r. 1963 (A. Hearn). Je napsaný v jazyce LISP. Má málo zabudovaných funkcí. Je zaměřen na programátory, kteří jsou schopni připravovat aplikační programy v LISPu. Umožňuje výpočty v diferenciální geometrii a vyšetřuje symetrii systémů parciálních diferenciálních rovnic. Velkou výhodou je přenosnost programů. Je však obtížně instalovatelný na PC/MS-DOS.

C. TESTOVÁNÍ MANIPULÁTORŮ

Tab. 3. Řešení testovacích úloh (T1-9) na pěti SM

Program	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9
Derive	!	-	*	!		*		!	+
Macsyma	*		*	*	*	*	*	*	*
Maple	+		*	!				*	
Mathemat.	*	*	*	*	*	*	+	!	!
Reduce	!	*	*	!	!	!	!	!	?

Poznámky:

* program byl zcela úspěšný

\+ zčásti úspěšný (pouze 1 řešení ap.)

! <u>ne</u>úspěšný

\- příslušné procedury <u>ne</u>jsou k dispozici

? úloha nebyla testována

V [Huť-90] jsou popsány (bez porovnávání a testování) jiné tři programy umožňující symbolické manipulace. (Autorský) **ALFA** je určen pro interaktivní řešení úloh ve výuce matematiky (difer. a int. počet, regrese, řady, pravděpod., lin. algebra). Dále jsou uvedeny **Eureka**, **MATCAD**. Všechny dovolují pracovat pomocí menu.

Testovací úlohy uvedené v [FB-89]

Řešení nelineární (polynomické) (3x3)-soustavy:

$$\left.\begin{aligned} x1(x2 + x3) &= 2a \\ x2(x1 + x3) &= 2b \\ x3(x1 + x2) &= 2c \end{aligned}\right] \qquad (T1)$$

Program Macsyma našel dvě řešení ve tvaru (po dešifrování):

$$x1 = -\frac{\mathrm{sqrt}(-c+b+a)\,\mathrm{sqrt}(c-b+a)}{\mathrm{sqrt}(c+b-a)}, \qquad x1' = -x1$$

$$x2 = -\frac{\mathrm{sqrt}(-c+b+a)\,\mathrm{sqrt}(c+b-a)}{\mathrm{sqrt}(c-b+a)}, \qquad x2' = -x2$$

$$x3 = -\,\mathrm{sqrt}\left(-\frac{c^2-b^2+2ab-a^2}{c-b-a}\right), \qquad x3' = -x3$$

Derivace funkce $f(x) = x^{x^{x}}$ (T2)

Neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1}\,dx$ (T3)

Zjednodušení výsledku (neurčitého integrálu).

Nevlastní integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x.\sin x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2e} \approx 0,577863674895$ (T4)

Mocninná řada pro $(\sin x)/x$ v bodě $x = 0$,
členy do 10. stupně (T5)

2D-Graf funkce $y = \dfrac{\sqrt{(4-x^2)}}{x^2(1-x^2)}$, $x \in \langle -3;3\rangle \setminus \{0;\pm 1\}$ (T6)

3D-Graf funkce $u = \sin 2x.\sin 2y$, $[x,y] \in \langle -\pi;\pi\rangle \times \langle -\pi;\pi\rangle$ (T7)

Analytické řešení obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu
(tlumený oscilátor) $y'' + 0.1y' + y = 0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ (T8)
Laplaceovou transformací

Určení reálné části funkce $w = \mathrm{cth}[(x+iy)/2]$ (T9)

D. SHRNUTÍ

Macsyma a Reduce jsou v současnosti zralé a prověřené produkty. Experimenty (testy na Sun-3) ukázaly, že Maple je 10x rychlejší než Macsyma, Mathematica byla uprostřed. Programy se ovšem liší v oborech snadnosti i obtížnosti. Žádný z uvedených programů sám o sobě nestačí pro všechny požadavky. Achillovou patou všech je efektivní zjednodušování výsledků. SM programy mohou ke své práci vyžadovat značný rozsah paměti. Přesáhnou-li nároky (často je obtížné odhadnout je předem) disponibilní kapacitu, dochází k havárii programu. Tomu lze čelit průběžným uchováváním mezivýsledků.

Nedostatečná pozornost je věnována požadavkům uživatele-člověka. Zápisy matematických výrazů jsou kupodivu často špatně čitelné: neužívají se mezery, zlomky nejsou osově symetrické, pro zlomkové čáry nesprávné délky se užívá znaménko minus, takže je nerozlišitelné úvodní znaménko. Nehledí se na redukci informační šedi. Neporovnávají se automaticky struktury podobných výrazů s následnou redukcí společného a zdůrazněním rozdílů. Např. hledání odchylek ve znaméncích (též kvůli uvedené kolizi) je značně znepokojující.

Např. v [FB-89:680] je uvedeno řešení symetrické soustavy (T1) programem Macsyma. Řešení je nalezeno v nesymetrickém tvaru a druhé řešení lišící se pouze znaménky je uvedeno naplno bez vztahu k předchozímu řešení. Nepochopitelné je užívání zbytečně komplikovaného označení, či nedodržování abecedního pořadí. Zdá se, že využívání symetrií, které předpokládá globální pohled, je slabinou manipulátorů. Přitom v [FB-89:684] se konstatuje, že zjednodušovací potence manipulátorů Macsyma a Maple značně převyšují program Mathematica. Je tedy žádoucí procházet dílčími algebraickými úpravami a zasahovat do nich z pozice zkušeného uživatele.

Ukazuje se, že symbolické manipulátory - jako nový nástroj - je třeba používat obezřetně. Jejich výsledky je nutno kontrolovat [Lam-91] opakovaným zadáním problému nejraději ještě na různých manipulátorech, které užívají pokud možno různých metod. K logické kontrole je třeba využívat vnitřní vztahy (symetrie) očekávaného výsledku. Záhodno je užívat vyzkoušené a frekventované programy.

E. ZÁVĚR

V článku amerického autora [Ste-88:340p15-11] se cituje: "Nebude dlouho trvat a počítačová algebra bude pro studenty inženýrství stejně běžná jako bylo kdysi dnes již zastaralé logaritmické pravítko".

I když blízká budoucnost zde není blíže specifikována a i když přihlédneme k našemu počítačovému zaostávání, je potřeba se připravit na organické začlenění symbolických manipulátorů do aktivní činnosti matematiků a inženýrů. Běžná přístupnost takových programů ovšem podstatně ovlivní i obsah a metody výuky, a to jak matematiky, tak i disciplín matematiku užívajících.

Počítačová algebra zatraktivňuje počítače i matematiku a posiluje vztah mezi matematickým a počítačovým vzděláním. Dovoluje studentům soustředit se na podstatu matematických pojmů tím, že redukuje mechanické manipulace se symboly. Zdůrazňuje vlastnosti matematických objektů a operací, a tím prohlubuje obsah pojmů. Je možno se zabývat složitějšími (neškolskými) úlohami.

Změny se odehrávají v samotné matematice jako vědním oboru. např. [Lam-90; Ste-88; Wal-89] konstatují měnícího se ducha matematiky, kdy s nasazováním síly počítačů přestává být naplněn např. ideál krátkého a krásného důkazu obtížného tvrzení. 1000 hodin počítačového času bylo vynaloženo na potvrzení věty o čtyřech barvách na mapě, 3000 hodin (v průběhu dvou let) trvalo prokazování neexistence konečné projektivní roviny řádu 10. Matematici si tak musejí zvykat ve své práci na počítačového partnera, pomocí něhož získávají "skoro jisté" výsledky [Lam-90]. Některé oblasti matematiky jsou již bez počítačů zcela nemyslitelné. Matematici se opět navracejí k formulování hypotéz a k experimentům, a tím k přírodním vědám.

S tématikou symbolických manipulátorů souvisí studentská práce [Sč43-89], v níž se řešitel zaměřil na dvě třídy speciálních algebraických výrazů. První jsou numerické výrazy s odmocninami. Druhé představují lineární výrazy složené s absolutními hodnotami. Vychází se ze znalosti tvaru požadovaného cílového výrazu a neznámé parametry se získávají porovnáváním funkčních hodnot výchozího a výsledného tvaru. Ukazuje se, že tato cesta má obecnější užití. V [Sč15-80] byl sestrojen překladač programů do režimu zlomkové aritmetiky, která je typická pro manipulátory.

Část V. K výuce numerických metod

Základní numerické metody jsou obvykle zahrnovány do úvodního kursu matematiky. I zde se vyskytují diskutabilní přístupy vyvolané předsudky, přehlížením výpočetní praxe nebo touhou po originalitě. Všimneme si dvou dílčích problémů.

C5K1. GAUSSOVA A KONDENZAČNÍ METODA

Soustavy lineárních algebraických rovnic vznikají samostatně nebo jako součást řady aplikačních problémů. Proto bylo k jejich řešení navrženo množství metod ([FF-64; Pok-55; Wil-77; WR-76]), jejichž počet stále roste. Osudy jednotlivých metod jsou přitom zajímavé samy o sobě. Mnohé metody upadly v zapomenutí a byly znovuobjevovány, mění se jejich hodnocení a jsou modifikovány.

A. ALGORITMY METOD

Porovnáme dvě varianty Gaussovy eliminační metody pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic

$$Ax = b \, , \tag{1}$$

kde A je regulární čtvercová matice stupně n ; n-tice x , resp. b , je sloupec neznámých, resp. pravých stran. Při výpočtu pracujeme pouze s rozšířenou maticí soustavy E :

$$E = \left[a_{ij}\right]_{j=1,\dots,n+1}^{i=1,\dots,n} = [A, b] \, , \tag{2}$$

tj. $a_{i,n+1} := b_i$, $i = 1,2,\dots,n$.

Eliminační metody Gaussova typu jsou dány způsobem převodu dané soustavy na ekvivalentní soustavu s trojúhelníkovou maticí soustavy. Obecně se při eliminačním chodu vytváří posloupnost navzájem ekvivalentních redukovaných soustav

$$E^{(r)} = [a_{ij}^{(r)}] = [A^{(r)}, b^{(r)}], \quad r = 1,2,\dots,n \, , \tag{3}$$

kde $E^{(1)} = [A,b]$ a $E^{(n)}$ je cílová redukovaná soustava s horní trojúhelníkovou maticí soustavy $A^{(n)}$. Dále pro $A^{(r)}$ platí

$$a_{ij}^{(r)} = 0 \quad \text{pro } j < i, \quad i = 1,2,\dots,r \, .$$

Přitom $E^{(r+t)}$, $t = 0,1,\dots,n-r$, má s $E^{(r)}$ společných prvních r řádků, tj.

$a_{ij}^{(r+t)} = a_{ij}^{(r)}$ pro $i \leq r$, $j = 1,2,\ldots,n+1$.

Trojúhelníková matice $A^{(n)}$ je tedy vlastně tvořena prvky $a_{rj}^{(r)}$, $r = 1,2,\ldots,n$, $j \geq r$, a jinde má nuly.

Pro jednoduchost budeme nadále předpokládat, že hlavní prvky (= pivoty) se postupně vybírají z hlavní diagonály redukovaných matic $A^{(r)}$ a jsou nenulové, tedy

$$a_{rr}^{(r)} <> 0 \tag{4}$$

Dále se předpokládá řádková organizace výpočtu, tj. cykly ve formě (á la algol):

$$\begin{aligned}&\text{for } r = 1,2,\ldots,n-1;\\&\quad \text{for } i = r+1,\ldots,n;\\&\qquad \text{for } j = r+1,\ldots,n+1;\\&\qquad\quad \text{do výpočtový vzorec.}\end{aligned} \tag{5}$$

Při běžné počítačové Gaussově metodě tzv. jediného dělení probíhá redukce (eliminace) podle vzorce

$$g_{ij}^{(r+1)} = g_{ij}^{(r)} - (g_{ir}^{(r)}/p_r)g_{rj}^{(r)} , \tag{6}$$

kde $p_r = g_{rr}^{(r)}$ jsou gaussovské pivoty. Přitom výpočet podílu je předsunut před cyklus s parametrem j . Předpokládá se, že koeficienty soustavy jsou z okruhu (obecně nekomutativního) s jednoznačným dělením. Odpovídající posloupnost redukovaných matic soustavy je $G^{(1)} = A$, $G^{(2)}$, ..., $G^{(n)} = U$.

Při tzv. kondenzační metodě (= metoda křížového násobení = metoda násobení a odčítání) se uplatňuje výpočtový vzorec

$$k_{ij}^{(r+1)} = q_r k_{ij}^{(r)} - k_{ir}^{(r)} . k_{rj}^{(r)} , \tag{7}$$

kde $q_r = k_{rr}^{(r)}$ jsou kondenzační pivoty. Nyní se pracuje v komutativním okruhu s jednoznačným dělením a vytváří se posloupnost redukovaných matic $K^{(1)} = A$, $K^{(2)}$, ..., $K^{(n)} = H$.

B. VZTAHY MEZI METODAMI

Porovnáme-li navzájem výpočtové vzorce (6, 7), dostáváme indukcí podle r vztah

$$k_{ij}^{(r)} = p_1^{2^{r-2}} p_2^{2^{r-3}} \dots p_{r-1}\, g_{ij}^{(r)} = \left[\prod_{s=1}^{r-1} p_s^{2^{r-1-s}}\right] . g_{ij}^{(r)} \; ; \qquad (8)$$

$$r = 1,2,\dots,n\;,$$

což dává speciálně pro pivoty relaci

$$q_r = \left[\prod_{s=1}^{r-1} p_s^{2^{r-1-s}}\right] . p_r \; . \qquad (9)$$

Je známo (srov. např. [Str-76:23$_{11}$-4; Vi10-76]), že Gaussova eliminační metoda (5+6) dává jednoznačný tzv. LU-rozklad matice A na součin dolní a horní trojúhelníkové matice. Rozklad vypíšeme pro $n = 4$, přičemž pro zjednodušení vynecháme horní indexy prvků redukovaných matic (v dolních trojúhelníkových maticích jsou totožné se sloupcovými indexy a v horních trojúhelníkových maticích s řádkovými indexy); nevyplněné prvky jsou nulové.

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & & \bigcirc \\ m_{21} & 1 & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ & p_2 & g_{23} & g_{24} \\ & & p_3 & g_{34} \\ \bigcirc & & & p_4 \end{bmatrix} , \qquad (10)$$

kde $m_{ir} = g_{ir}^{(r)}/p_r\,,\quad r = 1,2,\dots,n-1;\quad i = r+1,\dots,n\,,$ (11)

jsou přímo koeficienty násobků r-tého řádku, které se při r-té redukci odčítají od i-tého řádků.

Analogicky se maticovými prostředky ukáže, že kondenzační metoda odpovídá jinému trojúhelníkovému rozkladu. Vypíšeme jej opět pro $n = 4$ při stejné zjednodušující úmluvě:

$$A = DH = \begin{bmatrix} 1 & & & \bigcirc \\ d_{21} & d_{22} & & \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & q_2 & k_{23} & k_{24} \\ & & q_3 & k_{34} \\ \bigcirc & & & q_4 \end{bmatrix} , \qquad (12)$$

kde $d_{ii} = 1/(q_1\dots q_{i-1}),\quad i = 1,\dots,n\;;$ (13)

$d_{ir} = k_{ir}^{(r)}/(q_1\dots q_r),\quad r = 1,\dots,n-1;\quad i = r+1,\dots,n\;.$

Z jednoznačnosti LU-rozkladu dostáváme ihned vztahy

$D = LT^{-1}$, $H = TU$, kde T je diagonální matice:

$$T = \mathrm{diag}\{1,\ q_1,\ q_1 q_2,\ \ldots,\ q_1 \ldots q_{n-1}\} = \tag{14}$$

$$= \mathrm{diag}\{1,\ p_1,\ p_1^2 p_2,\ \ldots,\ p_1^{2^{n-2}}\ p_2^{2^{n-3}} \ldots p_{n-1}\}\ .$$

C. HODNOCENÍ METOD

Gaussova metoda (5+6) vyžaduje řádově $n^3/3$ násobících a též sčítacích operací. Postup (5+7) spotřebuje řádově $2n^3/3$, tj. dvojnásobek násobicích operací a $n^3/3$ sčítacích operací. Tato nevýhoda kondenzace může být u některých výpočetních prostředků kompenzována vyšší rychlostí násobení proti dělení. U elektronických kalkulátorů při jejich současné technické úrovni nelze však případně rychlejšího dělení prakticky využít, neboť rychlost komunikace s obsluhujícím operátorem je limitována intervaly jeho reakcí a úhrnná rychlost systému člověk - stroj je dána počtem operací člověka.

Závažnější je však rychlý růst prvků v průběhu kondenzace. Jsou-li např. všechny gaussovské pivoty p_r stejné, pak z (9) dostáváme

$$q_r = p^{2^{r-1}} \tag{15}$$

Tato dvoustupňová exponenciála roste velmi rychle s proměnnou r (= pořadové číslo redukce). Např. již při $p = 2$, což je příznivý případ pro kondenzaci, vychází pro $r = 11$ číslo s 309 desítkovými ciframi.

Ve [Vi23-80:63] je porovnáván numerický průběh obou diskutovaných metod při výpočtu symetrického determinantu 7. řádu [1,...,7] s jedničkovou diagonálou. Ten má hodnotu rovnu 256. Při kondenzaci se vyskytují mezivýsledky řádově 10^{14}, kdežto při Gaussově metodě jde o pouhé desítky. Přitom je příklad příznivý kondenzaci, neboť nejmenší prvky všech determinantů jsou vždy vlevo nahoře. Kondenzační metoda je tedy prakticky nepoužitelná již pro malé soustavy ($n \approx 10$) při počítačové i ruční aplikaci.

Z metodického hlediska je závažným nedostatkem kondenzační metody zatemnění základních vztahů z lineární algebry: komplikuje se bezprostřední souvislost s trojúhelníkovým rozkladem a např. k výpočtu determinantu je třeba si pamatovat zvláštní vzorec (viz [ŠT1-83:176; TF-85:A7-8]). Ztráta jednoduchých souvislostí komplikuje výklad a odvádí od podstaty podružnými detaily.

Dodejme ještě, že kondenzace podstatně užívá komutativnosti násobení, kdežto Gaussova metoda ji nepotřebuje, takže jí lze použít např. též pro soustavy s maticovými koeficienty. Toto zobecnění je implicitně uplatněno např. v [And-78:63; Fie-81:29]. Rovněž v [ŠT1-83:194$9_8$] je využita při odvozování Schurova vzorce pro redukci determinantu řádu $2n$ na determinanty řádu n.

D. DVĚ APLIKABILNÍ MODIFIKACE KONDENZAČNÍ METODY

Jednou z cest, jak zmírnit rychlý růst prvků redukovaných soustav při realizaci kondenzačního algoritmu (7), je úprava, kterou navrhl C. Jordan (srov. [Bar-72; Wil-77]):

$$c_{ij}^{(r+1)} = (w_r c_{ij}^{(r)} - c_{ir}^{(r)} . c_{rj}^{(r)})/w_{r-1} , \qquad (16)$$

kde $w_r = c_{rr}^{(r)}$ je r-tý jordanovský pivot, přičemž $w_0 = 1$.

Je-li matice A celočíselná, pak dělení předchozím pivotem nevede do zlomků (srov. [Wil-77]), a tudíž prvky redukovaných matic $C^{(1)} = A$, $C^{(2)}, \ldots, C^{(n)} = V$ zůstávají v oboru integrity.

Vztah mezi prvky redukovaných matic Gaussovy metody a Jordanovy kondenzace má nyní tvar

$$c_{ij}^{(r)} = p_1 p_2 \ldots p_{r-1} g_{ij}^{(r)}$$

a pro pivoty pak

$$w_r = p_1 p_2 \ldots p_r ,$$

čímž je dokumentován mnohem přijatelnější růst prvků.

Příslušný NV-rozklad matice soustavy A je nyní typu

$$A = NV = \begin{bmatrix} 1 & & & \bigcirc \\ n_{21} & n_{22} & & \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ & w_2 & c_{23} & c_{24} \\ & & w_3 & c_{34} \\ \bigcirc & & & w_4 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

kde $n_{ii} = 1/w_{i-1}$, $i = 2,\ldots,n$; (20)

$$n_{ir} = c_{ir}^{(r)}/w_{r-1} , \quad r = 1,\ldots,n-1, \quad i = r+1,\ldots,n .$$

Přechod ke Gausově eliminaci je pak dán maticí Z :

$$N = LZ^{-1} , \quad V = ZU , \quad \text{kde}$$
$$Z = \mathrm{diag}\{1, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\} =$$
$$= \mathrm{diag}\{1, p_1, p_1 p_2, \ldots, p_1 p_2 \ldots p_{n-1}\}$$

Při počítačové realizaci Jordanovy kondenzace jdou matice N, V sesadit k sobě do paměti na původní místo matice A (analogicky jako L, U u Gausse), neboť diagonálu matice N lze podle (20) snadno rekonstruovat z diagonály matice V. Tento rozklad lze pak použít k řešení série soustav lišících se pouze pravými stranami.

Druhou použitelnou variantou kondenzační metody je připojení účinného algoritmu euklidovského typu pro hledání největšího společného dělitele prvků k metodě (7) do cyklu s parametrem r nebo i v (5). O této možnosti je rovněž pojednáno v [Bar-72]. Obecně dovoluje pracovat s menšími prvky redukovaných soustav než v (16), ovšem za cenu zpomalení výpočtu.

Obě uvedené modifikace mohou nalézt objektivně uplatnění při řešení soustav s koeficienty v oboru integrity I (např. celá čísla či polynomy s celočíselnými koeficienty), u nichž se požaduje (a existuje) řešení v I nebo v příslušném podílovém tělese (zlomková aritmetika). Zde vyšší počet operací je vyvážen ziskem přesného řešení, čímž se zmírní problémy s vyšetřováním chyby řešení a s případnou špatnou podmíněností matice soustavy.

E. ZÁVĚR

Uvedené porovnání metod lze shrnout konstatováním, že primitivní forma kondenzační metody (7) neobstojí ve srovnání s Gaussovou metodou (6) z hledisek ani teoretických, ani praktických, ani metodických. Není proto divu, že se metoda (7) pro reálný obor v programovém vybavení počítačů nevyskytuje, kdežto metoda (6) - především ve spojení s LU-rozkladem - zde má své trvalé místo (srov. [WR-76]). Vzhledem k zásadě uvádět metody prověřené při praktických výpočtech na počítači či kalkulátoru, je proto třeba zavrhnout zavádějící používání kondenzační metody při výuce lineární algebry. Modifikace kondenzační metody mohou ovšem nalézt uplatnění ve speciálních problémech řešených v oborech integrity.

Školská kondenzační metoda má však tuhý život. Autor knihy [Škr-66] na ní trvá též v [ŠT1-83:176-8,180-1,183-4,190-1], kde se zmiňuje o jejích nespecifikovaných výhodách. V [TF-85:A7-8] je zmínka, že v [Mil-78:123-8] je (opětovně) odvozena kondenzace pro determinanty a v [Rog-79:340-2] je program ve Fortranu IV.

C5K2. DEVÍTIBODOVÉ DIFERENČNÍ SCHÉMA

Ukážeme, že aplikace devítibodové diferenční aproximace Laplaceova operátoru může dobře konkurovat pětibodové aproximaci.

A. ODHAD CHYBY A KONVERGENCE

Mějme řešit Poissonovu rovnici

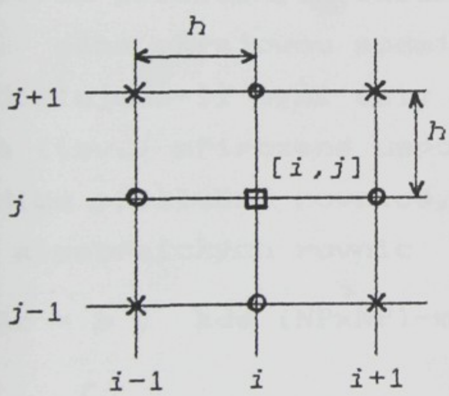
(1) $-\Delta u = f(x,y)$ v obdélníku G: $0<x<a$, $0<y<b$

při okrajové podmínce

(2) $u(x,y) = g(x,y)$ na hranici Γ obdélníku G.

Pro řešení dané úlohy metodou sítí byla navržena celá řada schémat - viz např. [KK-62; WF-63] . Z nich nejznámější je schéma pětibodové, my se budeme převážně zabývat tzv. devítibodovým.

V obdélníku G zavedeme síť s krokem h ve směru obou souřadnicových os a např. pomocí Taylorova rozvoje vyjádříme Laplaceův operátor jako lineární kombinaci funkčních hodnot funkce $u = u(x,y)$ v uzlech sítě.



Označení:

$[i,j] := (x_i, y_j) = (ih, jh)$

Obr. 1.

Pětibodové schéma používá pěti bodů - na obr. 1 jsou označeny □, ○.

(3) $$-(\Delta u)_{ij} = \frac{1}{h^2}\{4u_{ij} - (u_{i\,j+1} + u_{i\,j-1} + u_{i-1\,j} + u_{i+1\,j})\} + R_{ij}\ ,$$

kde

(4) $$|R_{ij}| \le (1/6)M_4 h^2 \approx 0{,}17\ M_4 h^2\ .$$

Devítibodové schéma bere všech devět bodů vyznačených na obr. 1 (viz např. [WF-63:217^{7}_{3}; KK-62:197-203^{5}]

(5) $$-(\Delta u)_{ij} = \frac{1}{6h^2}\{20u_{ij} - 4(u_{i\,j+1} + u_{i\,j-1} + u_{i-1\,j} + u_{i+1\,j}) - (u_{i+1\,j+1} + u_{i+1\,j-1} + u_{i-1\,j+1} + u_{i-1\,j-1})\} + R_{ij}\ ,$$

kde

(6) $$|R_{ij}| \le \frac{520}{3.8!} M_8 h^6 \approx 0{,}43.10^{-2} M_8 h^6 .$$

Ve vztazích (4,6) označujeme M_r horní odhad (maximum) parciálních derivací r-tého řádu na obdélníku G .

V každém vnitřním uzlu $[i,j]$ sítě dostáváme pak použitím (5) po zanedbání chyby R_{ij} rovnici (dále předpokládáme, že funkce f má potřebné derivace)

(7) $$\frac{1}{6h^2}\{20z_{ij} - 4(z_{i\,j+1} + z_{i\,j-1} + z_{i-1\,j} + z_{i+1\,j}) - $$
$$- (z_{i+1\,j+1} + z_{i+1\,j-1} + z_{i-1\,j+1} + z_{i-1\,j-1})\} =$$
$$= f_{ij} + \frac{h^2}{12}(\Delta f)_{ij} + \frac{2h^4}{6!}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 4\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_{ij} ,$$

o které říkáme, že přísluší uzlu $[i,j]$. Změna označení zdůrazňuje, že $z_{ij} \approx u_{ij}$. Všechny vnitřní uzly nám pak dávají soubor $n = N.P$ rovnic (je $N = a/h - 1$, $P = b/h - 1$) pro neznámé z_{ij} . V rovnicích příslušných uzlům u hranice obdélníka G jsou některá z_{ij} dána okrajovou podmínkou (2).

Očíslujeme-li nyní uzly jediným indexem k tak, jak jdou po řádcích (tzv. přirozené uspořádání uzlů), tj. $k = i + N(P-j)$, a seřadíme příslušné rovnice, dostáváme soustavu $n = N.P$ lineárních algebraických rovnic

(8) $Az = b$, kde $(NP{\times}NP)$-matice A má strukturu

(9) $$A = \begin{bmatrix} D & -C & & O \\ -C & D & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -C \\ O & & -C & D \end{bmatrix}$$, kde D, C jsou třídiagonální $(N{\times}N)$-matice

(10) $$D = \begin{bmatrix} 20 & -4 & & O \\ -4 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -4 \\ O & & -4 & 20 \end{bmatrix} , \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & O \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ O & & 1 & 4 \end{bmatrix} .$$

Vlastnosti matice A soustavy (8) jsou shrnuty ve větě 2.

Vektor řešení $z = (z_1,\dots,z_n)^T$ soustavy (8) nazýváme diskrétní aproximací skutečného řešení $u(x,y)$ úlohy (1+2). Jeho souřadnice pokládáme za přibližné hodnoty skutečného řešení $u(x,y)$ v odpovídajících uzlech sítě. K tomu nás opravňuje následující věta - viz [Min-55:234]. Nerovnosti dávají odhad pro chybu metody v uzlech sítě a plyne z nich konvergence diskrétních aproximací z ke skutečnému řešení u pro $h \to 0$.

Věta 1: Nechť $u(x,y)$ je přesné řešení okrajové úlohy (1+2), nechť $z = (z_1,\dots,z_n)^T$ je diskrétní aproximací $u(x,y)$.

Nechť $\max\limits_{G}\left\{\left|\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}\right|, \left|\frac{\partial^8 u}{\partial x^7 \partial y}\right|, \dots, \left|\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}\right|\right\} \le M_8$. Potom

$$(11)\qquad |u_i - z_i| \le \frac{520}{3.8!} M_8 h^6 . ¼ . (r^2 - (x_i - x_0)^2 - (y_i - y_0)^2) ,$$

kde (x_i, y_i) je uzel, jemuž přísluší z_i ; (x_0, y_0) a r jsou střed a poloměr kruhu opsaného obdélníku G . A tedy

$$(12)\qquad \max_{1\le i\le n} |u_i - z_i| \le \frac{520}{12.8!} M_8 h^6 r^2 .$$

$\sqcup\!\sqcup$

Pozn.1. Pro obdélník G je $(x_0, y_0) = (a/2, b/2)$, $r = ½.\sqrt{(a^2+b^2)}$, speciálně při čtverci o straně a je $r^2 = a^2/2$.

Pozn.2. Odhad (11) je nadhodnocen, proto je v [KK-62:201₁₁-2⁷] navržen odhad vhodný pro malá h :

$$(13)\qquad |u_i - z_i| \approx \frac{40}{3.8!} . M_8 h^6 ,$$

v němž je koeficient třináctkrát menší.

B. VLASTNOSTI MATIC A, B

Připomeňme základní iterační metody řešení soustavy lineárních rovnic $Az = b$. Matici $A = [a_{ij}]$ soustavy rozložíme na součet tří matic

$$(14)\qquad A = D - E - F ,$$

kde D je diagonální matice, $D = \mathrm{diag}\{a_{11},\dots,a_{nn}\}$, E je dolní trojúhelníková matice $(e_{ij} = -a_{ij},\ i > j)$, F je horní trojúhelníková matice ($f_{ij} = -a_{ij}$, $i < j$).

Uvedeme vztahy definující základní metody.

1/ Jacobiho metoda (= prostá iterace)

(15) $x^{(m+1)} = D^{-1}(E + F)\,x^{(m)} + D^{-1}b$; matici

(16) $B = D^{-1}(E + F)$ nazýváme Jacobiho maticí.

2/ Gaussova-Seidelova metoda

(17) $x^{(m+1)} = (D - E)^{-1}Fx^{(m)} + (D - E)^{-1}b$; matici

(18) $C = (D - E)^{-1}F$ nazýváme Gaussovou-Seidelovou maticí.

3/ Gaussova-Seidelova superrelaxace ($\omega \geq 1$)

(19) $x^{(m+1)} = (I - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega U]x^{(m)} + \omega(I - \omega L)^{-1}D^{-1}b$;

kde je označeno $L = D^{-1}E$, $U = D^{-1}F$; matici

(20) $\mathcal{L}_\omega = (I - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega U]$ nazýváme superrelaxační maticí.

Pro $\omega = 1$ dostáváme Gaussovu-Seidelovu metodu 2/.

V úvahu přicházejí rovněž tzv. blokové metody, které jsou maticovými analogiemi uvedených metod. Při nich se matice A rozdělí na bloky, se čtvercovými podmaticemi na diagonále. V rozkladu (14) je pak D blokově diagonální, E blokově dolní trojúhelníková, F blokově horní trojúhelníková matice. Používá se rozdělení na bloky odpovídající řádkům uzlů.

<u>Označení:</u> B_5^{point}, B_9^{point}, B_5^{line}, B_9^{line}, jsou Jacobiho matice. Horní index rozlišuje metodu bodovou a blokovou (jednořádkovou). Dolní index značí pětibodové a devítibodové diferenční schéma. Podobně budeme značit matice ostatních iteračních metod.

Pro naši soustavu s maticí (9) máme podle (16) a (10)

(21) $$B_9^{point} = \begin{bmatrix} S & T & & \bigcirc \\ T & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & T \\ \bigcirc & & T & S \end{bmatrix}$$, kde S, T jsou třídiagonální (NxN)-matice.

(22a) $$S = I_N - \frac{1}{20} D = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 & & \bigcirc \\ 1/5 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1/5 \\ \bigcirc & & 1/5 & 0 \end{bmatrix},$$

(22b) $$T = \frac{1}{20}\, C = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/20 & & \bigcirc \\ 1/20 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1/20 \\ \bigcirc & & 1/20 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Dále pro blokovou analogii máme

(23) $$B_9^{line} = \begin{bmatrix} 0 & D^{-1}C & & \bigcirc \\ D^{-1}C & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & D^{-1}C \\ \bigcirc & & D^{-1}C & 0 \end{bmatrix},$$

kde matice D, C byly uvedeny v (10).

Vlastnosti matice A soustavy (8) a Jacobiho matic B_9^{point}, B_9^{line} shrneme do věty. Ve větě a dále v textu používáme terminologie a výsledků z [Var-62; Fie-81] .

<u>**Věta 2:**</u> Nechť A je matice soustavy (8) odvozená pro úlohu (1+2) použitím devítibodového diferenčního schématu (5). Potom

1/ A je reálná, symetrická, s kladnou diagonálou a nekladnými ostatními prvky. Matice A je ireducibilně diagonálně dominantní, a tudíž positivně definitní, a tedy A je ireducibilní Stieltjesova matice, pro něž $A^{-1} > 0$.

2/ Při přirozeném uspořádání rovnic existuje rozdělení na bloky, při němž je A blokově třídiagonální.

3/ Bodová Jacobiho matice B_9^{point} příslušná matici A je symetrická, nezáporná, ireducibilní matice s reálnými vlastními čísly, $\rho(B_9^{point}) < 1$. Není však cyklická, a tedy nemůže být souhlasně uspořádána.

4/ Při přirozeném uspořádání je bloková Jacobiho matice B_9^{line} příslušná matici A symetrická, nezáporná, souhlasně uspořádaná indexu 2, $\rho(B_9^{line}) < 1$. ⊔⊔

Pozn. 1. Pomocí teorie grafů (viz např. [Var-62:49; Gas-72:260; Fie-81]) se ukáže, že matice B_9^{point} je primitivní, a tedy ne cyklická.

Pozn. 2. Podobná věta platí pro matice vzniklé při použití pětibodového schématu - viz [Var-62:187-8].

C. MODELOVÁ ÚLOHA

V dalším se při porovnávání metod omezíme na tzv. modelovou úlohu, tj. hledáme řešení $u = u(x,y)$ Laplaceovy rovnice

(24) $-\Delta u = 0$ v jednotkovém čtverci $G : 0 < x,y < 1$,

které splňuje okrajovou podmínku

(25) $u(x,y) = g(x,y)$ na hranici Γ čtverce G.

Položíme-li v (7) $f \equiv 0$, dostáváme (je $h = 1/(N+1)$) soustavu $n = N^2$ rovnic v n vnitřních uzlech sítě:

(26) $$20z_{ij} - 4(z_{ij+1} + z_{i-1j} + z_{i+1j} - z_{ij-1}) - (z_{i+1j+1} + z_{i+1j-1} + z_{i-1j+1} + z_{i-1j-1}) = 0 ,$$
$1 \le i,j \le N$,

kde v rovnicích příslušných uzlům u hranice, jsou některá z_{ij} dána okrajovou podmínkou (25). Při přirozeném uspořádání rovnic má soustava tvar (8) rozepsaný v (9,10).

1. Asymptotické rychlosti konvergence

V našem případě lze snadno určit vlastní čísla a vektory Jacobiho matic B, tj. čísla c, pro něž existují nenulové vektory $v = (v_{ij})$, že $Bv = cv$. To je provedeno např. ve [Vi6-73:54-5].

Vlastních vektorů je N^2 (s N^2 souřadnicemi) a jsou tvaru

(29) $v^{(k,l)} = (v_{ij}^{(k,l)}) = g_{kl}\sin(k\pi hi).\sin(l\pi hj)$

pro $1 \le k,l \le N$, $1 \le i,j \le N$.

1/ Matice B_9^{point}.

Vlastní čísla příslušná vektorům (29) jsou

(30) $$c_{kl} = (1/5).[2(\cos k\pi h + \cos l\pi h) + \cos k\pi h \cos l\pi h] \le$$
$$\le c_{11} = (1/5).[4 \cos \pi h + \cos^2 \pi h] =$$
$$= (1/5).\cos \pi h\,[4 + \cos \pi h] < 1 .$$

2/ Matice B_9^{line}.

Pro vlastní vektory (29) nyní máme

(32) $$c_{kl} = \frac{\cos l\pi h.(2+\cos k\pi h)}{5 - 2.\cos k\pi h} \le c_{11} = \frac{\cos \pi h.(2 + \cos \pi h)}{5 - 2.\cos \pi h} < 1.$$

Z Perronovy-Frobeniovy teorie pro nezáporné matice (viz věta 2) plynou vzorce pro spektrální poloměry $\rho(B)$ Jacobiho matic:

(33) $\rho(B_9{}^{point}) = (1/5).\cos \pi h.(4 + \cos \pi h)$,

(34) $$\rho(B_9{}^{line}) = \frac{\cos \pi h.(2 + \cos \pi h)}{5 - 2.\cos \pi h} .$$

Stejně jako výše se odvodí (viz [Var-62:202$_8$-5^{11}])

(35) $\rho(B_5{}^{point}) = \cos \pi h$,

(36) $$\rho(B_5{}^{line}) = \frac{\cos \pi h}{2 - \cos \pi h} .$$

Ze vzorců (33-36) dostáváme pro každé konkrétní h

(37) $\rho(B_9{}^{line}) < \rho(B_5{}^{line}) < \rho(B_9{}^{point}) < \rho(B_5{}^{point})$.

Použitím Taylorova rozvoje

(38) $\cos \pi h = 1 - \pi^2 h^2/2 + \ldots$

odvodíme řádové rozdíly spektrálních poloměrů Jacobiho matic

(39) $$\rho(B_5{}^{point}) - \rho(B_9{}^{point}) \approx \frac{\pi^2}{10} h^2 \approx h^2 ,$$

(40) $$\rho(B_9{}^{point}) - \rho(B_5{}^{line}) \approx \frac{2\pi^2 h^2}{15} \approx \frac{4}{3} h^2 ,$$

(41) $$\rho(B_5{}^{line}) - \rho(B_9{}^{line}) \approx \frac{\pi^4 h^4}{4.3} \approx 8h^4 .$$

<u>Asymptotická rychlost konvergence</u> $R_\infty(A)$ konvergentní matice A se spektrálním poloměrem $\rho(A)$ se definuje vztahem

(42) $R_\infty(A) \quad := \quad - \ln \rho(A)$

Funkce $y = - \ln x$ je klesající, a proto se nerovnosti (37) obrátí:

(43) $R_\infty(B_5{}^{point}) < R_\infty(B_9{}^{point}) < R_\infty(B_5{}^{line}) < R_\infty(B_9{}^{line})$.

Pro Gaussovu-Seidelovu matici $\mathcal{L}_1$ - viz (18) - platí

(44) $\rho(\mathcal{L}_1) = [\rho(B)]^2$

za předpokladu, že matice A soustavy je souhlasně uspořádaná indexu 2. Definice (42) pak dává

(45) $R_\infty(\mathcal{L}_1) = 2R_\infty(B)$,

tj. v tomto případě je Gaussova-Seidelova metoda pro dané h

asymptoticky dvakrát rychlejší než prostá iterace.

Pro matici $\mathcal{L}_{9point,1}$ není předpoklad splněn, nicméně podle [Var-62:127-8] platí

$$(46)\qquad 1 \geq \frac{R_\infty(\mathcal{L}_1)}{2R_\infty(B)} > \frac{1}{2} + \frac{\ln(2-\rho(B))}{-2.\ln\rho(B)} ,$$

a odtud

$$(47)\qquad R_\infty(\mathcal{L}_1) \sim 2R_\infty(B) \qquad \text{pro} \quad \rho(B) \to 1- .$$

Všechny nerovnosti (43) se tedy pro prakticky důležitý případ $\rho(B) \to 1-$ přenášejí též na Gaussovu-Seidelovu metodu.

Podobně při splnění výše uvedeného předpokladu - pro Gaussovu-Seidelovu superrelaci s optimálním superrelačním parametrem ω_{opt}

$$(48)\qquad \omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{(1-\rho^2(B))}}$$

platí

$$(49)\qquad \rho(\mathcal{L}_{\omega_{opt}}) = \omega_{opt} - 1 ,$$

a tedy

$$(50)\qquad R_\infty(\mathcal{L}_{\omega_{opt}}) = \ln(\omega_{opt} - 1) .$$

Odtud a ze (45) plyne pro $\rho(B) \to 1-$

$$(51)\qquad R_\infty(\mathcal{L}_{\omega_{opt}}) \sim 2[R_\infty(\mathcal{L}_1)]^{1/2} \sim 2\sqrt{2}\,[R_\infty(B)]^{1/2} .$$

Nerovnosti (43) se tedy pro $\rho(B) \to 1-$ zachovávají též pro superrelaxační matice s výjimkou případu matice $\mathcal{L}^{point}_{9,\omega_{opt}}$.

Pro ni platí slabší nerovnosti

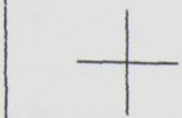
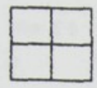
$$(52)\qquad \omega_{opt} - 1 < \rho(\mathcal{L}^{point}_{9,\omega_{opt}}) < \sqrt{(\omega_{opt} - 1)} ,$$

a odtud logaritmováním

$$(53)\qquad -\tfrac{1}{2}.\ln(\omega_{opt} - 1) < R_\infty(\mathcal{L}^{point}_{9,\omega_{opt}}) < -\ln(\omega_{opt} - 1) .$$

Použitím Taylorových řad můžeme odvodit ze vzorců (33-36) použitím (47,51,53) asymptotická vyjádření pro rychlosti konvergence při $h \to 0$. Pro přehled je sestavíme do tabulky.

Tab. 1. Asymptotické rychlosti konvergence pro $h \to 0$.

metoda / schéma	Jacobi		Gauss-Seidel.		GS. superrelaxace	
	bodová	řádková	bodová	řádková	bodová	řádková
	$\frac{1}{2}.\pi^2 h^2$	$\pi^2 h^2$	$\pi^2 h^2$	$2\pi^2 h^2$	$2\pi h$	$2\sqrt{2}\pi h$
	$\frac{3}{5}\pi^2 h^2$	$\pi^2 h^2$	$\frac{6}{5}\pi^2 h^2$	$2\pi^2 h^2$	$\sqrt{(6/5)}\pi h$ až $2\sqrt{(6/5)}\pi h$	$2\sqrt{2}\pi h$

Vypíšeme ještě vzorce pro optimální superrelaxační parametr ω_{opt} dosazením (33-36) do obecného vztahu (48). Byly použity v programech popisovaných ve [Vi6-73].

1/ pětibodové schéma

a) bodová superrelaxace

$$(54) \qquad \omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sin\pi h} ,$$

b) jednořádková superrelaxace

$$(55) \qquad \omega_{opt} = \frac{2(2 - \cos\pi h)}{(1 + \sqrt{(1 - \cos\pi h)})^2} ,$$

2/ devítibodové schéma

a) bodová superrelaxace

$$(56) \qquad \omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{[1 - (1/5)\cos\pi h.(4 + \cos\pi h)]^2}} ,$$

b) jednořádková superrelaxace

$$(57) \qquad \omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{(1 - V)}} , \qquad \text{kde } V = \frac{\cos\pi h.(2 + \cos\pi h)^2}{5 - 2.\cos\pi h} .$$

2. Praktická realizace superrelaxace

Vztah (19) se používá pro teoretická vyšetřování. Při praktickém počítání se inversním maticím vyhneme. Nyní uvedeme úpravy, které byly použity v [Vi6-73] při řešení síťové soustavy (8) s maticí (9) vzniklé použitím devítibodového schématu.

1/ Bodová Gaussova-Seidelova superrelaxace.

Iterační vzorec (19) rozepsaný do souřadnic vypadá takto:

$$(58)\quad z_{ij}^{(m+1)} = \omega\{(1/5).(z_{i\,j+1}^{(m+1)} + z_{i-1\,j}^{(m+1)} + z_{i+1\,j}^{(m)} + z_{i\,j-1}^{(m)}) + (1/20)(z_{i-1\,j+1}^{(m+1)} + z_{i+1\,j+1}^{(m+1)} + z_{i-1\,j-1}^{(m)} + z_{i+1\,j-1}^{(m)}) - z_{ij}^{(m)}\} + z_{ij}^{(m)},$$

nebo stručněji

$$(59)\quad z_{ij}^{(m+1)} = \omega(\tilde{z}_{ij}^{(m+1)} - z_{ij}^{(m)}) + z_{ij}^{(m)},$$

kde $\tilde{z}_{ij}$ označuje Gauss-Seidelovsky spočtenou souřadnici. První sčítanec ve vztahu (59) se používá při ověřování splnění kritéria konce iterování. Vidíme, že v (58) je zapotřebí 3 násobení a 9 sčítání na souřadnici iterace. Při pětibodovém schématu 2 násobení a 5 sčítání.

2/ Jednořádková Gaussova-Seidelova superrelaxace.

Uzly rozdělíme do N skupin tvořených řádky uzlů, což určuje rozdělení příslušných rovnic a neznámých, a tudíž i pravých stran do skupin. Skupiny neznámých označíme $Z_1,\ldots,Z_n$. Výpočet je opět výhodné rozdělit do dvou etap. Pro každé $j = 1,2,\ldots,N$ spočteme nejdříve (blokově) gaussovsky-seidelovsky pomocnou skupinu $\tilde{Z}_j$ ze soustavy (matice D, C viz (10), K_j je dáno okrajovou podmínkou)

$$(60)\quad D\tilde{Z}_j^{(m+1)} = C(Z_{j-1}^{(m+1)} + Z_{j+1}^{(m)}) + K_j,$$

což znamená řešit soustavu N rovnic s třídiagonální maticí D pro N neznámých souřadnic skupiny $Z_j^{(m+1)}$. Pak už snadno získáme potřebnou skupinu $Z_j^{(m+1)}$

$$(61)\quad Z_j^{(m+1)} = \omega(\tilde{Z}_j^{(m+1)} - Z_j^{(m)}) + Z_j^{(m)}.$$

Etapy (60,61) se provádějí postupně pro $j = 1,\ldots,N$. Tím se spočte celá $(m+1)$-tá iterace.

Aplikace Gaussovy eliminace při řešení (60) dává rekurentní vzorce

$$(62)\quad w_i = 1/(5-w_{i-1}), \quad \text{pro } i = 1,2,\ldots,N \quad (w_0 \equiv 0),$$

$$(63)\quad g_i = (¼.k_i + g_{i-1})w_i \quad \text{pro } i = 1,2,\ldots,N \quad (g_0 \equiv 0),$$

$$(64)\quad \begin{aligned} z_N &= g_N \\ z_i &= g_i + w_i z_{i+1} \quad \text{pro } i = N-1,\ldots,1 . \end{aligned}$$

Posloupnost w_i, $i = 1,\dots,N$ ovšem spočteme jen jednou na začátku. Ze vztahů (60,10) vidíme, že na vyhotovení pravých stran k_i, $i = 1,\dots,N$, rovnic potřebujeme N násobení + (5N+2) sčítání. Přímý krok (63) vyžaduje N násobení + N sčítání, zpětný krok (64) pak (N-1) násobení + (N-1) sčítání. Tedy v první etapě (60) je zapotřebí celkem (3N-1) násobení + (7N-1) sčítání na výpočet N souřadnic skupiny $Z_j^{(m+1)}$, tedy 3 násobení + 7 sčítání na souřadnici iterace. Ve druhé etapě (61) přibude 1 násobení + 2 sčítání. V obou etapách se tedy provádí 3 násobení + 9 sčítání na souřadnici.

Při pětibodovém schématu vyžaduje jednořádková superrelaxace 3 násobení + 5 sčítání na souřadnici a iteraci.

Trvá-li násobení v pohyblivé čárce téměř stejně dlouho jako sčítání, je vhodné při dané síti porovnávat metody řešení síťových soustav podle velikosti součinu

(65) $P_M = c_M . m_M$,

kde m_M je počet vykonaných iterací, c_M je počet operací na souřadnici iterace:

c_M = 7 při pětibodovém schématu a bodové superrelaxaci,
c_M = 8 při pětibodovém schématu a řádkové superrelaxaci,
c_M = 12 při devítibodovém schématu a bodové superrelaxaci,
c_M = 13 při devítibodovém schématu a řádkové superrelaxaci.

D. PŮLENÍ KROKU SÍTĚ

Zvyšování přesnosti, s níž diskrétní aproximace z nahrazuje skutečné řešení u, vyžaduje zmenšování kroku sítě. Ukazuje se (viz tab. 2 v čl. E), že není vhodné přejít rovnou na jemnou síť, neboť volba výchozí iterace u jemné sítě podstatně ovlivňuje dobu výpočtu. Lépe je sestavit posloupnost sítí - nejjednodušeji půlením kroku - a pokaždé využívat výslednou iteraci při kroku h pro sestavení nulté iterace při hledání aproximace příslušné kroku $h/2$.

Popíšeme konstrukci nulté iterace $z^{(0)}$ při půlení již s ohledem na programování. Poslední iteraci při předchozím kroku značíme z'. Nejprve položíme

(66) $z^{(0)}_{2i,2j} = z'_{ij}$ pro $N \geq i,j \geq 1$

(děje se přemísťováním odzadu, abychom neporušili staré hodnoty). Pak doplníme diagonální souřadnice interpolací

(67) $$z^{(0)}_{i\,j} = \tfrac{1}{4}.(z^{(0)}_{i-1,\,j+1} + z^{(0)}_{i+1,\,j+1} + z^{(0)}_{i-1,\,j-1} + z^{(0)}_{i+1,\,j-1})$$

pro $i,j = 1,3,\ldots,N$ (N je liché číslo).

A chybějící souřadnice další interpolací

(68) $$z^{(0)}_{i\,j} = \tfrac{1}{4}.(z^{(0)}_{i,\,j+1} + z^{(0)}_{i-1\,j} + z^{(0)}_{i+1\,j} + z^{(0)}_{i\,j-1})$$

pro $i = 2,4,\ldots,N-1$, je-li j liché,

pro $i = 1,3\ldots,N$, je-li j sudé .

Počet rovnic při k-tém půlení, tj. při síti s krokem $h/2^k$, je

(69) $$n_k = N_k^2 = (N+1)2^k - 1 ,$$

kde $N_0 = N = 1/h - 1$ zadává výchozí síť.

Počet operací (bez interpolace) po p-tém půlení je

(70) $$Q_M = c_M \sum_{k=0}^{p} N^2{}_k m_k ,$$

kde m_k je počet iterací do splnění kritéria konce iteračního procesu při k-té síti, c_M je počet operací na souřadnici (uvedeno v odstavci **D2**). Podle (70) budeme posuzovat metody používající půlení kroku.

E. POČÍTAČOVÝ EXPERIMENT

Pro porovnávání účinnosti metod byla řešena modelová úloha z [Vi10-76:263]

(71) $-\Delta u = 0$ ve čtverci $G : 0 < x,y < 1$

při okrajové podmínce

(72) $$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= e^{-2x} \\ u(x,1) &= e^{-2x}\cos 2 \end{aligned}\right\} \; 0 \le x \le 1, \qquad \left.\begin{aligned} u(0,y) &= \cos 2y \\ u(1,y) &= e^{-2}\cos 2y \end{aligned}\right\} \; 0 \le y \le 1.$$

Řešením úlohy (71+72) je funkce $u = e^{-2x}.\cos 2y$.

K diskretizaci bylo použito pětibodové a devítibodové schéma. Síťové soustavy příslušné posloupnosti kroků $h = 1/4,\ 1/8,$

1/16, 1/32 byly řešeny Gaussovou-Seidelovou superrelaxační metodou bodovou i jednořádkovou. Pro každou síť byl iterační proces zastaven, když se všechny stejnolehlé složky dvou po sobě následujících iterací lišily o méně než eps = 10^{-7} , tj. když

$$\max_{1\le k\le n} \left| z_k^{(m+1)} - z_k^{(m)} \right| < eps = 10^{-7} .$$

Pro ověření vlivu konstrukce výchozí iterace byly síťové soustavy řešeny dvakrát (viz tab. 2):

1/ s výchozí iterací vždy nulovou,

2/ s výchozí iterací sestavovanou z diskrétní aproximace příslušné síti s dvojnásobným krokem.

V tabulce uvádíme výsledky numerického experimentu.

Tab. 2. Počet iterací při řešení úlohy (71+72)

h	nultá iterace	pětibodové schéma		devítibodové schéma	
		bodová	řádková	bodová	řádková
1/4	nulová	13	11	15	11
1/8	nulová	28	22	28	21
	sestavena	20	15	14	12
1/16	nulová	55	42	63	42
	sestavena	31	24	20	17
1/32	nulová	105	82	139	82
	sestavena	47	38	19	17

Z tabulky vyplývá porovnáním podle (65,70), že pro danou síť je při devítibodovém schématu potřeba více početních operací. To je však plně vyváženo větší přesností schématu. (Již pro h = 1/4 vyšlo přesné řešení na 5 míst za desetinnou čárkou, při pětibodovém schématu srovnatelně pro h=1/32). Při půlení kroku je dokonce devítibodové schéma (zejména při řádkové metodě) lepší co do počtu operací. Devítibodové schéma pro modelovou Laplaceovu úlohu je tedy schopné velmi dobře konkurovat schématu pětibodovému.

V [Sč17-81; Sč20-82] byl sledován vliv výchozí aproximace a pořadí probíhání uzlů při řešení síťové soustavy příslušné pětibodovému, resp. devítibodovému schématu.

Část VI. Prameny

Dokumentace je rozdělena do tří kapitol: v první je běžná bibliografie, ve druhé jsou práce (včetně interních), při nichž byl autor (spolu)tvůrcem, ve třetí je seznam studentských prací vypracovaných na katedře matematiky.

C6K1. ODKAZY

Položky v počátečním bloku byly použity v úvodních partiích nebo aspoň ve dvou částech, či kapitolách. Ostatní literatura je setříděna abecedně zvlášť pro každou část.

C1-5. Společná literatura

[Ale] Aleksandrova, N.V.: Matematičeskie terminy. Moskva 1978.

[AHU] Aho, A. - Hopcroft, J. - Ullman, J.: Postroenie i analiz vyčisliteľnych algoritmov. Moskva, Mir 1979.

[And] Anděl, J.: Matematická statistika. Praha, SNTL 1978.

[Apo] Apostol, T.M.: Calculus. Vol.1. 2nd ed. Wiley 1967.

[AA] Azoulay, E.- Avignant, J.: Mathématiques 1. Analyse. Paris 1983.

[BO] Beran, L. - Ondráčková, I.: Žádné obavy z matematiky. Praha 1986.

[BMR] Brabec,J.-Martan,F.-Rozenský,Z.: Matematická analýza I. Praha 1985.

[CA] Collatz,L. - Albrecht,J.: Zadači po prikladnoj matematike. Moskva, Mir 1978.

[EG] Ellis, R. - Gulick, D.: Calculus with Analytic Geometry. 4th ed. New York, Harcourt Brace Jovanovich 1990.

[Eng] Engeler, E.: Metamatematika elementarnoj matematiki. Moskva, Mir 1987.

[FF] Faddejev,D.K.- Faddejevová,V.N.: Numerické metody lineární algebry. Praha, SNTL 1964.

[Fie] Fiedler, M.: Speciální matice a jejich použití v numerické praxi. Praha, SNTL 1981.

[Gar] Garner, L.E.: Calculus and analytic geometry. Dellen Publ. Comp. 1988.

[GLF] Grauert, H. - Lieb, I. - Fischer, W.: Differential- und Integralrechnung. Berlin 1967-8.

[IP] Ilyin, V.A. - Poznyak, E.G.: Fundamentals of Mathematical Analysis. Part 1. Moscow 1982.

[Jd1] Jarník, V.: Diferenciální počet I. Praha 1963.

[Jd2] Jarník, V.: Diferenciální počet II. Praha 1956.

[JKT] Jirásek,F. - Kriegelstein,E. - Tichý,Z.: Sbírka řešených příkladů z matematiky. Praha 1982.

[Kud] Kudrjavcev, L. D.: Kurs matematičeskogo analiza 1; 2. Moskva 1981.

[LHE] Larson,R.- Hostetler,R.- Edwards,S.: Calculus with analytic geometry. 4th ed. D.C.Heath and Comp. 1990.

[Mil] Mikloško, J.: Syntéza a analýza efektívnych numerických algoritmov. Bratislava, Veda 1979.

[NFR] Nievergelt, J. - Farrar, J.C. - Reingold, E.M.: Mašinnyj podchod k rešeniju matematičeskich zadač. Moskva, Mir 1977.

[Str] Strang, G.: Linear Algebra and Its Applications. New York, Academic Press 1976.

[Str] Strang, G.: Linejnaja algebra i jejo primenenija. Moskva, Mir 1980.

[ŠT] Škrášek, J.- Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky I; II; III. Praha 1983; 1986; 1990.

[TF] Thomas, G.B.Jr.- Finney, R.L.: Calculus with analytic geometry. 6th ed. Addison-Wesley 1985.

[Wil] Wilkinson, J.H.: Some recent advances in numerical linear algebra. In: The State of the Art in Numerical Analysis. London, Academic Press 1977, s. 3-53.

C1. Matematické a datové struktury

[Ber] Beran, L.: Grupy a svazy. Praha, SNTL 1974.

[Con] Condamine, M.: Mathématique, Terminales C-D-E. Algébre. Paris, Delagrave 1971.

[Čup] Čupr, K.: Matematika I. Brno 1946.

[Gin] Gindikin, S.G.: Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Pokroky mat. fyz. astr., *31*, 1986, č.6, s.297-313.

[Hal] Hall, P.: Vyčislitelnye struktury. Vvedenie v nečislennoe programmirovanie. Moskva, Mir 1978.

[Hru] Hruša, K.: Počítání s neúplnými čísly. Praha, JČSMF 1949.

[Hru] Hruša, K.: Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. 3. vyd. Praha 1959.

[KS] Kasjanov, V.N. - Sabelfeld, V.K.: Sbornik zadanij po praktikumu na EVM. Moskva, Nauka 1986.

[KT] Kůst, J. - Taišl, J.: Matematická analýza. Praha 1959.

[Mg2] Matematika pro gymnázia. Sešit 2. Praha, SPN 1978.

[Mg7] Matematika pro gymnázia. Sešit 7. Praha, SPN 1980.

[Neš] Nešetřil, J.: Teorie grafů. Praha, SNTL 1979.

[NW] Nijenhuis, A. - Wilf, H.S.: Combinatorial Algorithms. 1. vyd. New York 1976.

[Pon] Pondělíček, B.: Algebraické struktury s binárními operacemi. Praha, SNTL 1977.

[PY] Preparata, F.P.- Yeh, R.T.: Úvod do teórie diskrétnych matematických štruktúr. Bratislava/Praha 1982.

[Wir] Wirth, N.: Algoritmy a štruktúry údajov. Bratislava, Alfa 1987.

[Zve] Zvenigorskij, G. A.: Pervye uroki programmirovanija. Moskva 1985.

C2. Funkce po částech lineární

[Alx] Alekseev, V.M.: Elementarnaja matematika. Rešenie zadač. Kiev 1983.

[AA] Azoulay,E.- Avignant,J.: Mathématiques 1. Analyse. Paris 1983.

[BBG] Bašmakov,M.I.- Bekker,B.M.- Goľchovoj,V.M.: Zadači po matematike. Algebra i analiz. Moskva 1982.

[BBN] Berezin,V.N.- Berezina,L.Ju.- Nikoľskaja,I.L.: Sbornik zadač dlja fakuľtativnych i vneklassnych zanjatij po matematike. Moskva 1985.

[BH] Brabec,J.- Hrůza,B.: Matematická analýza II. Praha 1986.

[BS] Brodskij, Ja.S. - Slipenko, A.K.: Funkcionaľnye uravnenija. Kiev 1983.

[Buk] Bukovský, L.: Množiny a všeličo okolo nich. Bratislava 1985.

[Buš] Bušek,I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky. Praha 1985.

[Čec] Čech, E.: Čísla a početní výkony. Praha 1954.

[Dav] Davidov, L.: Funkcionální rovnice. Praha 1986.

[Fic] Fichtengoľc, G.M.: Kurs differenciaľnogo i integraľnogo isčislenija I; II; III. Moskva 1958; 1959; 1960.

[GGŠ] Geľfand,I.M.- Glagoleva,Je.G.- Šnoľ,E.E.: Funkcii i grafiki. Moskva 1973.

[Gov] Govorov, V.M.- Dybov, P.T.- Mirošin, N.V.- Smirnova, S.F.: Sbornik konkursnych zadač po matematike. Moskva 1983.

[GLF] Grauert, H. - Lieb, I. - Fischer, W.: Differential- und Integralrechnung. Berlin 1967-8.

[Hoj] Horák, S. aj.: Požadavky z matematiky pro přijímací zkoušky na vysokých školách technických. Praha 1982.

[HN] Horák,P.- Niepel,Ľ.: Prehľad matematiky. Bratislava 1982.

[Jak] Jakovlev, G.N. (red.): Posobie po matematike dlja postupajuščich v vuzy. Moskva 1982.

[JeD] Jefimov,A.V.- Demidovič,B.P.: Sbornik zadač po matematike dlja vtuzov. Linejnaja algebra i osnovy matematičeskogo analiza. 2.vyd. Moskva 1986.

[JeR] Jeršov,L.V. - Rajchmist,R.B.: Postroenie grafikov funkcij. Moskva 1984.

[Kle] Kleiner, W.: Analiza matematiczna. Tom 1. Warszawa 1986.

[KMŠ] Kluvánek,I.- Mišík,L.- Švec,M.: Matematika I. Bratislava 1959.

[KCŠ] Križalkovič, K.- Cuninka, A.- Šedivý, O.: Riešené úlohy z modernej matematiky. Bratislava 1974.

[KuS] Kudrjavcev,L.D.- Kutasov,A.D.-Čechlov,V.I.-Šabunin,M.I.: Sbornik zadač po matematičeskomu analizu. Predel, nepreryvnosť, differenciruemosť. Moskva 1984.

[LM] Litvinenko, V.N. - Mordkovič, A.G.: Praktikum po rešeniju matematičeskich zadač. Moskva 1984.

[Laj] Ljaško,I.I.- Bojarčuk,A.K.- Gaj,Ja.G.- Kalajda,A.F.: Matematičeskij analiz. Časť 1;2;3. Kiev 1983; 1985; 1987.

[MPU] Makucha,A.S.- Pokrovskij,V.S.- Ušakov,R.P.: Matematika. Pismennye ekzamenacionnye raboty. Spravočnoe posobie. Kiev 1985.

[McD] McCracken,D. - Dorn,W.: Čislennye metody i programmirovanie na Fortrane. Moskva 1969.

[MSh] McShane,E.J.: Unified Integration. New York 1983.

[Neu] Neuman, F.: Funkcionální rovnice. Praha 1986.

[PZ] Pisot, Ch. - Zamansky, M.: Mathématiques générales. Algébre-Analyse. Paris 1966.

[PAP] Potapov,M.- Aleksandrov,V.- Pasičenko,P.: Algebra y análisis de funciones elementales. Moskva 1986.

[Ruz] Ruzsa, I.: Osnovanija matematiki. Kiev 1981.

[Siv] Sivašinskij, I.Ch.: Elementarnye funkcii i grafiki. Moskva 1965.

[Smí] Smítal, J.: O funkciách a funkcionálnych rovniciach. Bratislava 1984.

[Šac] Šachno, K.V.: Posobie po matematike dlja postupajuščich v vysšie učebnye zavedenija. 6. vyd. Minsk 1962.

[ŠiS] Šilov, G.Je.: Matematičeskij analiz. Speciaĺnyj kurs. Moskva 1960.

[ŠiF] Šilov, G.Je.: Matematičeskij analiz. Funkcii odnogo peremennogo. Moskva 1969.

[ŠJK] Šiškin,A.A.- Jevsin,V.I.- Korneva,N.A.: Algebra i načala analiza. Moskva 1984.

[Tom] Tomica, R.: Cvičení z matematiky I. Praha 1969.

[Ves] Veselý, F.: O nerovnostech a nerovnicích. Praha 1982.

[Vyš] Vyšenskij, V.A. aj.: Sbornik zadač kievskich matematičeskich olimpiad. Kiev 1984.

C3. Matice mezních hodností

[Abr] Abramov, S. A.: Elementy programmirovanija. Moskva, Nauka 1982.

[BGH] Bauer, F. L. - Gnatz, R. - Hill, U.: Informatika, zadači i rešenija. Moskva, Mir 1978.

[Nic] Nickel, K.: Interval-analysis. In: The state of the art in numerical analysis. London, Academic Press 1977, 193-225.

[OP] Ortega, J. - Poole, W.: Vvedenie v čislennye metody rešenija differencialnych uravnenij. Moskva, Nauka 1986.

[OR] Ortega, J.M.- Rheinboldt, W.C.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables. New York and London, Academic Press 1970.

[Par] Parlett, B.: Simmetričnaja problema sobstvennych značenij. Moskva, Mir 1983.

[Pes] Peschl, E.: Analytická geometrie a lineární algebra. Praha, SNTL 1971.

[Pyt] Pytlíček, J.: Cvičení z algebry a geometrie. Praha, ČVUT 1985.

[Ral] Ralston, A.: Základy numerické matematiky. Praha, Academia 1973.

[Ric] Rice, J.: Matričnye vyčislenija i matematičeskoe obespečenie. Moskva, Mir 1984.

[Rik] Riečanová, Z. a kol.: Numerické metódy a matematická štatistika. Bratislava, Alfa 1987.

[Sto] Stoer, J.: Einführung in die Numerische Mathematik I. 2. vyd. Berlin, Springer Verlag 1976.

[Šed] Šedivý, J. aj.: Světonázorové problémy matematiky II. Praha, UK MFF 1984.

[Tew] Tewarson, R.: Razrežennye matricy. Moskva, Mir 1977.

[Voe] Voevodin, V. V.: Linear algebra. Moskva, Mir 1983.

[VK] Voevodin, V. V. - Kuznecov, Ju. A.: Matricy i vyčislenija. Moskva, Nauka 1984.

[Wif] Wilf, H. S.: Matrix Inversion by the Method of Rank Annihilation. In: Mathematical Methods for Digital Computers (eds. Ralston, A. - Wilf, H. S.). New York, John Wiley & Sons 1960.

C4. (Mikro)počítače ve výuce matematiky

[Bor] Bork, A.: Personal Computers for Education. New York 1985.

[CTI] The CTISS File. *12*, 1991. University of Oxford 1991.

[Čer] Čerkasova, M.P.: Sbornik zadač po čislennym metodam. Minsk, Vyšejšaja škola 1967.

[Dja] D´jakonov, V.P.: Primenenie personalnych EVM i programmirovanie na jazyke Bejsik. Moskva 1989.

[ĎŠ] Ďurič, L. - Štefanovič, J. aj.: Psychológia pre učiteľov. Bratislava, SPN 1973.

[DJO] Dvořáková,E.- Justová,J.- Ocmanová, B.: Učební programy. (Výpisy programů.) [Příloha k záv. zprávě EÚ X-01-05-20.] Liberec 1990.

[Fei] Feil, M.: Metodika programové tvorby IQ 151. Praha, Komenium 1988.

[FB] Foster,K.R. - Bau,H.H.: Symbolic manipulation programs for the personal computer. Science 243 (3 Feb 1989), s.679-84.

[Hea] Hearn, A.C.: Algebraic and symbolic methods. (School on advanced techniques in computational physics I.C.T.P.) Trieste 1986.

[HB] Hearn, D.- Baker, M.: Mikrokompjuternaja grafika. Moskva, Mir 1987.

[Hut'] Hut'ka, V.: Programové zabezpečenie matematiky. Bratislava, VŠE 1990.

[Jou] Jourdon, E.: Strukturnoe projektovanie i konstruirovanie programm. Moskva, Mir 1979.

[Kad] Kadeřábek, J.: Generování příkladů ze statistiky a z numerické matematiky. P-0217. Liberec, VŠST 1974.

[KS] Kalousek, Z.- Staněk, J.: Katalog parametrizovaných zadání. Liberec, KMA 1991.

[Kzp] Katalóg zakončených pedagogických programov na generovanie zadaní z lineárneho programovania. Bratislava, VVC VŠE 1973.

[Kop] Kopčenova, I. V. - Maron, I. A.: Vyčislitel'naja matematika v primerach i zadačach. Moskva, Nauka 1972.

[KS] Kroha, P. - Slavík, O.: BASIC pro začátečníky. Praha 1988.

[Lam] Lam, C.W.H.: How Reliable Is a Computer-Based Proof? The Mathematical Intelligencer 12, No.1, 1990, s. 8-12. (Česky: Jak spolehlivý je počítačový důkaz? Pokroky mat. fyz. astr., *36*, 1991, č.4, s. 209-16.)

[Mor] Morrill, H.: Bejsik dlja PK IBM. Moskva 1987.

[Mrk] Mrkvička, V.: K tvorbě didaktických programů pro školní mikropočítače. Mat. a fyz. ve škole, *18*, 1988, č.6, s.382.

[P-1] NÁVOD na použitie a obsluhu mikropočítača radu PMD. Bratislava, Tesla 1987.

[P-2] NÁVOD na použitie a obsluhu mikropočítača PMD 85-2. Bratislava, Tesla (b. r.).

[Nek] Nekvinda, M.: Parametrizovaná dopravní úloha. Liberec, KMA 1990, 1991.

[P-3] PMD 85-3. Tesla Bratislava 1988.

[Pří] Přívratská, J.: Parametrizovaná zadání ve výuce konstruktivní geometrie. [Závěrečná práce postgraduálního pedagogického studia.] Liberec 1985. 10 s.

[RA] Rand, R.H.- Armbruster, D.: Perturbation methods, bifurcation theory, and computer algebra. New York, Springer-Verlag 1987.

[Ray] Rayna, G.: Reduce, Software for algebraic computation. New York, Springer-Verlag 1987.

[Růž] Růžička,M.: 60 matematických programů pro IBM PC (MS DOS). Praha, Matsoftware 1989.

[RR] Rybasenko, V.D. - Rybasenko, I.D.: Elementarnye funkcii. Formuly, tablicy, grafiki. Moskva, Nauka 1987.

[SIM] Paket programm "Simvoľnaja matematika" SIMA-80. Moskva, MCNTI 1988.

[Ste] Steen, L.A.: Jak žít s novou matematickou bytostí. Pokroky mat. fyz. astr., *33*, 1988, č.6, s. 332-44.

[ŠKŠ] Šiška,J.- Kaucký,R.- Šiška,M.: Textový editor Text602. Praha 1989, 1990.

[Šru] Šrubař, J.: *p*-zadání v komplexní proměnné. KMA 1977.

[Wal] Wallich, P.: Beyond understanding? Computers are changing the spirit of mathematics. Scientific American (March 1989), 24, s. 13.

[Wei] Weizenbaum, J.: Vozmožnosti vyčisliteľnych mašin i čelovečeskij razum. Moskva, Radio i svjaz' 1982.

[Wol] Wolfram,S.: Mathematica. Addison-Wesley, Redwood City 1988.

C5. K výuce numerických metod

[Bar] Bareiss, E. H.: Computational solutions of matrix problems over an integral domain. J. Inst. Maths. Applics., 10, 1972, s. 68-104.

[Gas] Gastinel, N.: Lineare numerische Analysis. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1972.

[KK] Kantorovič, L.V.- Krylov, V.I.: Približonnye metody vysšego analiza. Moskva, FM 1962.

[Mil] Miller, E.: Evaluating an *n*th order determinant in *n* easy steps. MATYC Journal 12, 1978, 123-8.

[Min] Milne, W.E.: Čislennoe rešenie differenciaľnych uravněnij. Moskva, IL 1955.

[Pok] Pokorná, O.: Řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Přehled a srovnání metod. Sbor. strojů zprac. inform., 3, 1955, s. 139-196.

[Rog] Rogues, A.J.: Determinants: A short program. Two-year College Mathematics Journal, Vol.10, No.5, 340-2.

[Škr] Škrášek, J.: Základy vyšší matematiky. Praha, Naše vojsko 1966.

[Var] Varga, R.S.: Matrix Iterative Analysis. New York, Prentice-Hall 1962.

[WF] Wasow, G.E.- Forsythe, G.: Raznostnye metody rešenija differenciaľnych uravnenij v častnych proizvodnych. Moskva, IIL 1963.

[WR] Wilkinson, J.H.- Reinsch, C.: Spravočnik algoritmov na jazyke ALGOL. Linejnaja algebra. Moskva, Mašinostroenie 1976.

C6K2. VILD, J. - PUBLIKACE

Vi

1. Novák, J. - Vild, J.: Některé minimální systémy trojic. In: Sborník prací VŠST. Liberec, VŠST 1966, s.29-36.
2. Nekvinda, M.- Vild, J.: About one bridge problem. In: Sborník prací VŠST. Liberec, VŠST 1966, s.37-38.
3. Nekvinda, M. - Marková, A. - Šrubař, J. - Vild, J.: Úvod do numerické matematiky. Liberec, VŠST 1969.
4. Nekvinda, M. - Marková, A. - Šrubař, J. - Vild, J.: Úvod do numerické matematiky. 2.opr.vyd. Liberec, VŠST 1971.
5. Nekvinda, M. - Šrubař, J. - Vild, J.: Praktikum z numerické matematiky. Liberec, VŠST 1973.
6. Nekvinda, M.- Šrubař, J.- Vild, J.: Závěrečná zpráva fakultního úkolu LFS 77 [Numerické metody]. Liberec, KMA VŠST 1973, s.47-78.
7. Vild, J.: Soubor programů pro přípravu parametrizovaných úloh k numerickému praktiku. [Dílčí závěrečná zpráva stát. úkolu P-04-533-081-33: Zavedení metod technické kybernetiky do vyučovacího procesu na VŠ.] Liberec, VŠST 1975.
8. Nekvinda, M. aj.: Závěrečná zpráva fakultního úkolu 115. [Matematické struktury a numerické metody.] Liberec, VŠST 1975, s.13-15,25-31.
9. Nekvinda, M. - Šrubař, J. - Vild, J.: Numerická matematika. Liberec, VŠST 1976.
10. Nekvinda, M.- Šrubař, J.- Vild, J.: Úvod do numerické matematiky. Praha, SNTL 1976.
11. Nekvinda, M. - Šrubař, J. - Vild, J.: Cvičení z numerických metod. Liberec, VŠST 1977.
12. Nekvinda,M. - Šimek,F. - Vild,J.: Závěrečná zpráva fakultního úkolu 133. [Problémy hromadné kontroly ve výuce matematiky.] Liberec, KMA VŠST 1977, s.22-41.
13. Vild, J.: Generování variací s opakováním. In: Sborník prací VŠST. Liberec, VŠST 1978, s.43-48.
14. Zelinka, B. aj.: Teorie grafů a diskrétních automatů. [Dílčí výzk. zpráva za léta 1976-77 dílčího úkolu I-5-2/9.] Liberec, KMA VŠST 1978, s.20-25.
15. Vild,J.-Wagner,J.: Die wissenschaftliche und fachliche Tätigkeit der Studenten am Lehrstuhl für Mathematik der VŠST Liberec. IH Zittau. Wissenschaftliche Berichte 130, 1978, s.5-8.
16. Vild, J. - Šedý, J.: Matematika II [Algoritmy a logika]. Liberec, VŠST 1978.
17. Vild, J.: Redukce zápisu posloupností a množin. In: Sborník prací VŠST. Liberec, VŠST 1979, s.55-60.
18. Šrubař, J.- Vild, J.: Didaktické využití počítače v matematice. In: Sborník prací VŠST. Liberec, VŠST 1979, s.47-54.
19. Zelenka, J.- Vild, J.- Šrubař, J.: Analýza k dílčí prioritní úloze "Sledování zahraničních studentů a výsledků a stavu jejich studia". [Dílčí zpráva úkolu SPEV-V-2/12-347-01.] Liberec, VŠST 1979.

20. Šrubař, J.- Vild, J.- Zelenka, J.: Složení, odborné zaměření a výsledky studia zahraničních studentů. [Technický projekt prioritní úlohy.] Liberec, VŠST 1979.

21. Vild, J.: Proměnná zadání v metodice matematiky. [Závěrečná práce postgraduálního pedagogického studia.] Liberec, KMA VŠST 1979, 29 str.

22. Zelinka, B. aj.: Teorie grafů a diskrétních automatů. [Závěrečná zpráva DÚ I-5-2/9 za léta 1976-80.] Liberec, KMA VŠST 1980, s.60-66.

23. Vild, J. - Šrubař, J.: Gaussova a kondenzační metoda. In: Sborník prací VŠST. Liberec, VŠST 1980, s.59-66.

24. Vild,J.- Šrubař,J.- Fabiánová,H.: Racionalizace práce pedagogů v matematice. [Dílčí závěrečná zpráva samostatné etapy resortního úkolu RS 017/03-03 za léta 1976-80.] Liberec, KMA VŠST 1980. 79 str.

25. Bruthans, Vl. aj.: Vědecké řízení výuky a programové řízení individuál. studia pomocí strojů. [Závěrečná zpráva samostatné etapy resortního úkolu RS 017/03-03 za léta 1976-80.] Liberec, KMA VŠST 1980. 11 str.

26. Šrubař, J.- Vild, J.- Zelenka, J.: Základní svazek. [Prováděcí projekt PÚ 347.02.010.] Liberec, VŠST 1980.

27. Šrubař, J.- Vild, J.: Uživatelská příručka. [Prováděcí projekt PÚ 347.02.010.] Liberec, VŠST 1980.

28. Šrubař, J. - Vild, J.: Číselníky a kódovníky. [Prováděcí projekt PÚ 347.02.010.] Liberec, VŠST 1980.

29. Vild, J.- Šrubař, J.: Příručka k systému DDE. [Prováděcí projekt PÚ 347.02.010.] Liberec, VŠST 1981.

30. Vild, J. - Šrubař, J.: Programová dokumentace k ICL 2904. [Prováděcí projekt PÚ 347.02.010.] Liberec, VŠST 1981.

31. Šrubař, J.- Vild, J.: Příprava vstupu dat. [Prováděcí projekt PÚ 347.02.010.] Liberec, VŠST 1981.

32. Vild, J.: Zkušenosti s přímým vstupem dat. In: AISŘ ve školství, bulletin 4/1982. Praha, SPN 1982.

33. Vild, J.- Šrubař, J.: Racionalizace pedagogické administrativy. In: AIŘS ve školství, bull. 6/1984. Praha, SPN 1984.

34. Šrubař, J.- Fabiánová, H.- Vild, J.: Matematika I. Liberec, VŠST 1984.

35. Vild, J.- Staňková, H.- Šrubař, J.: Matematika II. Liberec, VŠST 1985.

36. Vild, J.- Fabiánová, H.- Staňková, H.- Šrubař, J.: Příspěvek do soutěže při příležitosti 125. výročí JČSMF. [Matematika I, Matematika II, Komplexy a funkce, Podpůrný aparát pro výuku (matematiky).] Liberec 1986.

37. Wagner,J.-Ocmanová,B.-Vild,J.: Praktikum z matematiky a fyziky. Liberec, VŠST 1988.

38. Vild, J.: SVOČ na KMA VŠST v Liberci od výchozího roku 1976. Liberec, KMA VŠST 1988.

39. Vild, J.: O generování kombinatorických objektů v souvislosti s multiindexovými maticemi. [Dílčí zpráva DÚ SPZV III-8-6/08 za léta 1986-8.] Liberec, VŠST 1988.

40. Vild, J. aj.: Vyučování matematiky a mikropočítače. [Závěrečná zpráva fakultního úkolu F-2421-068 za rok 1988.] Liberec, VŠST 1988.

41. Vild, J.: Matice hodnosti 1. In: Sborník prací VŠST. Liberec, VŠST 1989, s.51-58.

42. Nekvinda, M.- Vild, J.: Matematika I.-III. (Samostatné referáty). Liberec, VŠST 1990.

43. Vild, J.: Funkce po částech lineární. [Příloha k záv. zprávě resort. EÚ X-01-05-20.] Liberec, VŠST 1990.

44. Vild, J. aj.: Tvorba učebních a konzultačních programů v matematice. [Záv. výzk. zpráva resort. EÚ X-01-05-20.] Liberec, VŠST 1990.

45. Vild, J.: Matice mezních hodností. [Dílčí závěr. výzk. zpráva DÚ SPZV III-8-6/08.] Liberec, VŠST 1990.

46. Vild, J.: Studentská činnost na katedře matematiky VŠST Liberec. [Příl. dílčí záv. výzk. zprávy DÚ SPZV III-8-6/08.] Liberec, VŠST 1990.

47. Vild, J.: Komplexy a funkce. Matematika a fyzika ve škole, *21*, 1990, č.3, s.145-51.

48. Bruthans, V.- Nekvinda, M.- Vild, J.: Matematika I - cvičení. Liberec, VŠST 1990.

49. Bruthans,V. - Vild,J. - Zelinka,B.: Elementary Mathematics. Liberec, VŠST 1990.

50. Vild,J.: Znaménko funkce. Rozhledy mat.-fyz. (V tisku.)

51. Bruthans,V. - Nekvinda,M. - Vild,J.: Mathematics I - Exercises. Liberec, VŠST 1990.

52. Vild, J. - Staňková, H.: Mathematics I - Calculus F1. Liberec, VŠST 1990-91.

53. Vild, J.: Konečněhodnotové reálné multiplikativní funkce. In: Sborník prací VŠST. Liberec, VŠST 1990.

Vild, J. - interní publikace

[ViU] Nekvinda, M.- Šrubař, J.- Vild, J.: Úlohy ke cvičení z numerické matematiky. [Texty pro 3. ročník.] Liberec, VŠST 1971.

[ViT] Šedý, J.- Vild, J.: Témata pro cvičení. [Texty pro 2.roč.] Liberec, KMA VŠST 1977.

[ViL] Vild, J.: Popis programu LIN. Liberec, KMA VŠST 1977.

[ViN] Vild, J.: Popis služebních programů pro soubor LN-programů. Liberec, KMA VŠST 1979.

[ViZ] Vild, J.: Popis služebních podprogramů pro PZ-soubor. Liberec, KMA VŠST 1979.

[ViP] Vild, J.: p-zadání v matematice I pro dálkové studium. KMA 1979.

[ViA] Vild, J.- Šrubař, J.- Košek, M.: Zkušenosti s řešením dílčí úlohy ASŘ školství. KMA 1981.

[ViR] Bruthans ,V.- Šrubař, J.- Vild, J.: Řešení resortního úkolu MŠ ČSR RS 017/03-03 v letech 1976-80. KMA 1981.

[ViW] Andres, Z.- Kracík, J.- Mačák, K.- Vild, J.- Zelinka, B.: Teorie grafů a diskrétních automatů v Liberci v letech 1976-80. KMA 1981.

[ViH] Vild, J.: * . [Zasláno r. 1986 do "Matematické obzory - nepřijato.]

[ViM] Mačák,K.-Vild,J.: Dějiny matematiky v pracích SVOČ na VŠST Liberec. [Zasláno r.1986 do "Dějiny vědy a techniky".]

[ViS] Vild, J.: Stupňovité funkce. [Zasláno r.1989 do Rozhledů mat.-fyz.]

[ViF] Vild, J.: Funkce po částech lineární. [Vědecká konf. KMA.] KMA 1989.

[ViD] Vild, J.: Datové struktury ve výuce matematiky. [Pedagog. konf. KMA.] KMA 1990.

[ViE] Vild, J.- Kopáčková, A.: Department of mathematics. Liberec, KMA 1991.

-613-

C6K3. PRÁCE STUDENTŮ V RÁMCI SVOČ

SČ

[1] Kratochvíl, L. - Líbánský, V.: Speciální algoritmy pro řešení rovnic. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1976.

[2] Jagoš, J.: Logika barevné záměny na tkacích strojích. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1977.

[3] Vagaský, D.: Modelovanie hypotetického počítača. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1977.

[4] Pokorný, V. - Mička, M.: Čtyřúkonové a vědecké kalkulačky. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1978.

[5] Špalek, M.: Programovatelné kalkulačky. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1978.

[6] Vagaský, D.: Prekladač hypotetického počítača. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1978.

[7] Jiřišťová, J.: Norma součinu parametrizovaných matic. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1979.

[8] Kučera, J.: Vlastnosti parametrizovaných algebraických struktur. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1979.

[9] Pokorný, V.: Vlastnosti parametrizovaných binárních relací. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1979.

[10] Vagaský, D.: Minimalizácia boolevskej funkcie. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1979.

[11] Sedláková, I. - Šery, F.: Analýza některých faktorů studijního procesu. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1979.

[12] Brousek, P.: Matematické modelování textilního provozu. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1980.

[13] Zahálka, P.: Modelování textilních provozů pomocí automatů. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1980.

[14] Jiřišťová, J.: Proměnná zadání v pravděpodobnosti a statistice. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1980.

[15] Pokorný, V.: Překladač programů do zlomkové aritmetiky. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1980.

[16] Javůrková, M. - Kasafírková, H.: Bernard Bolzano - matematik a filozof. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1981.

[17] Kurz, K.: Pavoučí princip v okrajových úlohách. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1981.

[18] Šimek, L.: Úprava textů v jazyce COBOL. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1981.

[19] Macko, J.: Matematické modelovanie tkáčovně pomocov teorie automatov. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1982.

[20] Kurz, K.: Pavoučí princip v prostorových úlohách. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1982.

[21] Bednářová, J. - Čupáková, J. - Šrubařová, D.: Racionalizace prací v domácnosti. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1982.

[22] Svěchota, L.: Krokové úlohy v matematické analýze. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1983.

[23] Pertlík, M.: Parametrizovaná zadání v matematice. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1983.

[24] Šimek, L.: Algoritmy pro texty s diakritickými znaménky. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1983.

[25] Šrubařová, D.: Racionalizace pořizování děrných štítků. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1983.

[26] Urbanová, I. - Valášková, H.: Význam L. Eulera pro současnost. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1983.

[27] Urbanová, I. - Valášková [Štočková], H.: Halleyova kometa v historické kontinuitě. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1984.

[28] Dušánek, M. - Melena, M.: Přínos K.T.W. Weierstrasse pro rozvoj moderní matematiky. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1985.

[29] Rejholec, M. - Dušánek, V.: Dirichletovské funkce v matematické analýze. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1985.

[30] Neřold, M.: Aplikace počítače v parametrizovaných zadáních. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1985.

[31] Suchá, M. - Kříčková, I. - Kunzová, E. - Hrbková, I. - Šindelářová, L.: Varovné protipříklady v matematické analýze. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1986.

[32] Štefanová, S.: Vito Volterra matematik a novátor. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1986.

[33] Cvrk, J.: Parametrizovaná zadání definičního oboru. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1986.

[34] Melena, M. - Dušánek, M.: Modelování anizotropní netkané textilie. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1986.

[35] Niklová, J.: Spojnice pojících bodů ve vpibonettu. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1986.

[36] Dubrovská, E.: Pravděpodobnostně podmíněné procházky po přímce. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1986.

[37] Lebedová, I. - Němečková, J.: Opilý námořník ve včelím městě. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1986.

[38] Kejkrtová, J. - Brtáňová, A. - Rašínová, J.: Maticové násobení v teorii a praxi. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1987.

[39] Gondová, D.: Veľké trápenie s malými deformáciami. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1987.

[40] Suchá, M.: Geometrie rovinných vláken. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1987.

[41] Petr, P. - Bohatá, M. - Ottová, M.: Příspěvek ke tvarování interpolační křivky [Modelování střihů v textilním průmyslu]. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1988.

[42] Grollmusová, I. - Čupková, L. - Adamová, J. - Vašák, K. - Vaníček, V.: Varovné protipríklady v matematickej analýze F2. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1988.

[43] Jirkovec, J.: Numerické cesty algebraických manipulátorů. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1989.

[44] Hyk, Š. - Bártík, P.: Výpočty s maticemi hodnosti 1. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1989.

[45] Suchá, M.: A. L. Cauchy a jeho odkaz pro současnost. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1989.

[46] Novotná, J.: O jedné Volterrově rovnici. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1989.

[47] Řiháková, M. - Hlúpiková, D. - Schmotzerová, Z.: Textilní vlákna v Monte Carlu. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1989.

[48] Dvorská, J. - Holásková, V. - Juříčková, R.: Velké deformace puntíkované textilie. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1989.

[49] Demjanovič, P.: Ortogonálne systémy skoropolynómov. [Soutěžní práce SVOČ.] Liberec, KMA VŠST 1989.

Resumé

Vild, J.: Datové struktury v matematice a ve výuce. Liberec 1992.

Text shrnuje některé práce autora týkající se role výpočetní techniky v matematice a v metodách a obsahu výuky matematických disciplín vyučovaných v úvodních vysokoškolských neuniversitních kursech matematiky. Sjednocujícím hlediskem jsou přitom datové struktury. Poukazuje se průběžně na jejich význam při práci s matematickými objekty a při strukturaci matematických textů. Práce začíná přehledem označení. Maticová symbolika využívá znaku * pro zápis maticových řezů (à la PL/1). Jádrem je pět poměrně nezávislých částí, z nichž každá je členěna do několika kapitol.

První část "Matematické a datové struktury" má čtyři kapitoly. Začíná porovnáváním matematického a počítačového obsahu základních struktur: pole, záznam, množina, soubor, strom, graf. Hovoří se o jejich agregaci a dekompozici. Ve druhé kapitole jsou zmíněny tzv. bi-tabulky (=bodově-intervalové tabulky), zápis celočíselných posloupností a množin ve formě řetězců a jejich redukce, grafové struktury a aplikace cobolovských zápisů v matematických textech a upozorňuje se na význam podpůrného aparátu pro texty (komentář, marginálie). Ve třetí kapitole se diskutuje proces linearizace datových struktur jako projev sériového přístupu. Nejdříve je dokumentován vliv počítačů na vývoj matematické symboliky. Poté je uvedena možnost lineárního zápisu limity funkce jedné reálné proměnné pomocí úsporné předponově-příponové symboliky, rozvíjející ideu P. L. Dirichleta. Podrobně je rozebráno sériové generování variací s opakováním explicitním převodovým algoritmem, jeho rekurentní verzí a v tzv. posloupnosti minimálních změn, která nachází uplatnění i v dalších částech práce. Upozorňuje se na souvislosti s ukládací funkcí pro multiindexové matice a uvádějí se některé možné aplikace. Čtvrtá kapitola se zaobírá komplexy (množiny s operacemi a relacemi), které jsou použity pro formulaci některých metodických problémů v úvodu kursu analýzy (historické vztahy a vlastnosti významných číselných množin, rozšíření množiny reálných čísel, intervalová aritmetika, zápis vlastností funkcí).

Druhá část "Funkce po částech lineární" je věnována aplikačně a metodicky významné třídě jednoduchých funkcí. Nejprve je konstatováno, že jde o nejjednodušší splajny, které jsou výsled-

kem "geometrického" přístupu k vytváření funkcí. Ve druhé kapitole je dokázána věta o jednoznačném vyjádření ve tvaru lineární kombinace lineární funkce, absolutních hodnot, znaménkových funkcí a tzv. odskokových funkcí posouvaných vždy do bodů nespojitosti. V dalších kapitolách jsou rozebírány speciální případy. Ve třetí kapitole jsou ukázány pro spojitý případ (tzv. lomenice) vzájemné souvislosti zadávajících datových struktur: bi-tabulky, větvený zápis, lineární zápis pomocí formule. K dispozici jsou formule pro vzájemné převody. Význam vhodné volby vyjádření lomenice se ilustruje na řešení nerovnice s absolutními hodnotami. Ve čtvrté kapitole jsou vyšetřovány po částech konstantní funkce a jejich speciální případy: průměrové a odskokové stupňovité funkce. Pozornost je věnována "polospojitým" variantám. Zmíněny jsou výpočetní důsledky volby způsobu zadání. Výsledky jsou geometricky interpretovány. V páté kapitole se pokračuje tzv. znaménkovými funkcemi, které jsou konstruovány především pro polynomické a racionální funkce a pro jejich zvláštní případy. V šesté kapitole je ukázáno, že sgn a sgn^2 jsou poslední zajímavé konečněhodnotové multiplikativní funkce. Nacházejí uplatnění při standardním vyjádření funkcí po částech lineárních a jejich speciálních případů. Část je uzavřena poznámkami k literatuře.

Třetí část "Matice mezních hodností" je uvedena kapitolou o dvojím pojetí standardního maticového součinu. Ve druhé kapitole se užívá tzv. sloupcově-řádkové interpretace při práci s maticemi hodnosti 1. Ty jsou součinově charakterizovány, uvádějí se jejich vlastnosti a vzájemné vztahy. Základním východiskem je jejich vyjádření jako součin sloupce a řádku. To se uplatňuje ~~při~~ při zkoumání početních nároků při násobení posloupností speciálních matic. Jsou uvedeny některé aplikace. Kapitola třetí se zabývá tzv. elementárními maticemi, které jsou součtem jednotkové matice a matice hodnosti 1. Významným případem jsou základní a agregované eliminační matice. Ty jsou opět charakterizovány, shrnují se jejich vlastnosti a vzájemné vztahy. Shermanova-Morrisonova identita je použita pro vyjádření vlivu speciálních poruch při invertování matic. Probírají se některé významné případy probíraných typů matic. Ukazuje se na jejich použití při výkladu metod lineární algebry a při numerických výpočtech. V závěrečné kapitole jsou terminologické a historické poznámky a komentář ke zpracované literatuře.

Čtvrtá část "(Mikro)počítače ve výuce matematiky" pojednává o některých aspektech uplatnění mikropočítačů. Úvodní kapitola se týká metodiky tzv. proměnných zadání, jejíž provozování na katedře má dlouholetou historii. Předvádí se metodika tvorby, možnosti použití v kursu matematiky a některé konkrétní případy aplikace. Shrnují se principy a vývoj příslušného programového vybavení. Upozorňuje se na vztah ke studentské činnosti na katedře. Druhá kapitola soustřeďuje některé poznámky k mikropočítačové podpoře výuky (předpoklady a principy tvorby didaktických programů), které vznikly při práci v této oblasti. Uvedeny jsou konkrétní možnosti podpory rozvíjení pojmu funkce na příkladu manipulace s nejvýš kvadratickými polynomy. Ty jsou též kombinovány s posunutou znaménkovou funkcí a použity k osvojování pojmu limita a limitní symboliky studenty. Závěrečná třetí kapitola shrnuje některé údaje o tzv. symbolických manipulátorech, které v brzké době podstatně ovlivní metody výuky matematiky.

Pátá část "K výuce numerických metod" má dvě kapitoly. V první z nich se porovnává Gaussova a tzv. kondenzační metoda pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic z hledisek výpočetních a metodických. Přitom se používá tzv. LU-rozkladu. Ukazují se jejich vzájemné vztahy a zdůvodňuje se, že Gaussova metoda se oprávněně upřednostňuje z obou těchto pohledů. Připomínají se dvě varianty kondenzační metody, které mohou najít uplatnění při řešení soustav v oboru integrity. Druhá kapitola prokazuje na modelové Laplaceově rovnici konkurenceschopnost tzv. devítibodového diferenčního schématu v porovnání s běžně užívaným pětibodovým schématem. Aplikací teorie nezáporných matic jsou odvozeny výsledky pro rychlosti konvergence superrelaxační metody řešení příslušné síťové soustavy. Teoretické výsledky jsou potvrzeny počítačovým experimentem.

V závěrečné dokumentační části jsou uvedeny použité prameny, práce autora (včetně interních) a práce studentů, z nichž většinu autor vedl.

Přiloženy jsou dvoudílná skripta pro studenty vyučované v angličtině a souhrnný přehled o dosavadní studentské činnosti na katedře.

Práce byla sepsána v českém textovém editoru Text602, který není určen pro speciální matematické texty. Přesto se zdá, že jej lze s jistou tolerancí dobře používat.

-S1-

Summary

Vild, J.: Data structures in mathematics and teaching.
(Czech: Datové struktury v matematice a ve výuce.) Liberec 1992.

The text summarizes and develops some of the author´s recent work concerning the role of computers and informatics in methodology and content of mathematical subjects which are taught in the opening courses of mathematics in technical universities and colleges. The unifying theme being data structures. Their importance for structuring mathematical objects and texts is shown throughout. The work begins with a list of denotations. The matrix notation uses the symbol * for slices of matrices (à la PL/1). The core of the text consists of five relatively independent parts.

The first part "Mathematical and data structures" has four chapters. It starts with comparison of the mathematical and informatical content of basic structures: array, record, set, file, tree, and graph. Their agregation and decomposition is discussed. In the second chapter, more details are given about the so-called bi-tables (point-interval tables), string denotation of integer sequences and their reduction, graph structures and application of cobol-like formalism in mathematical texts. The importance of the support means for mathematical texts is stressed. The third chapter discusses the tendency of linearization as an impact of the serial approach to problems. Then, a possibility of a linear denotation of the limit of a function of one real variable is shown. The prefix-suffix denotation develops an idea of P. L. Dirichlet. Into detail is examined the generation of variations with repetitions, especially in a sequence of minimal changes. The fourth chapter deals with complexes (sets with operations and relations) that are used for agregated formulation of some chosen methodical issues in the calculus.

The second part "Piece-wise linear functions" is devoted to a class of simple functions, important both in applications and didactics. Firstly, these simple splines are shown to be the result of a "geometric" approach to combining function. In the second chapter the theorem about their unique expression as a linear combination of a linear function, absolute value, sign, and hiccup functions, all moved to points of discontiuity, is pro-

ved. The following chapters concentrate on special cases. Mutual relationships between three defining structures (bi-tables, fork definitions, and linear formulas) are shown. Special cases are examined: continuous, piece-wise constant, and sign functions. It is proved that sgn , and sgn^2 are the last interesting finite-valued multiplicative functions. This part is closed by notes on bibliography.

The third part "Matrices with extreme ranks" is introduced by two possible interpretations of a product of matrices. The second chapter uses the column-line approach for rank-one matrices. This is applied for investigation of the product of a sequence of special matrices. The third chapter deals with the so-called elementary matrices that are given as sums of the unit matrix and a rank-one matrix. The characteristic properties, and relationship of both kinds of matrices are given. Some special cases are examined. Their applications for teaching of linear algebra, and for numerical calculations are shown. The Sherman-Morrison identity is used to express the influence of special perturbations when evaluating the inverse. The final chapter comprises terminological and historical notes, and commentaries to bibliography.

The fourth part "(Micro)computers in teaching mathematics" lists some aspects of computer applications. The first chapter concerns methodics of the so-called parametrized problems for students. This has a rather long history in the department. The methodics of the construction of p-problems is illustrated. Some concrete applications in the courses of mathematics are given. The principles and development of the programme packages for main-frame computers are summed up. The relationship to students´ research activity in the department is mentioned. The second chapter contains some notes to CAI and CAL (pre-requisites and principles of creating programs) that have been summoned when working in this field. Computer support is concretized for developing the notion of function by means of manipulations with at most quadratic polynomials. The third chapter shortly depicts some programs called symbolic manipulators the influence of which on teaching mathematics will be quite substantional in the nearest future.

The fifth part "On teaching of numerical methods" consists of two chapters. The first one compares Gaussian and cross-pro-

duct methods, used for solving systems of linear equations, both from the point of view of computation and didactics. The LU-decomposition of matrices is used in the analysis. The second chapter demonstrates, using the model Laplace problem, the ability of concurrency between the nine-point difference schema and the generally used five-point schema. The theory of positive matrices is applied for deducing rates of convergence of the successive overrelaxation (SOR) method. The theoretical results are approved by computer experiment.

The final part includes bibliography, the works of the author (inclusive of internal ones), and the list of case studies of students the majority of those having been led by the author.

Three booklets are appended: the two-part textbook for students taught in English, and a complete overlook of students´ research papers.

The work was written and edited by the use of the Czech text processor Text602. Although this is not devised primarily for mathematical texts, it has proved to be quite efficient for this purpose.

Posudek oponenta

Název habilitační práce: Datové struktury v matematice a ve výuce.

Autor práce: RNDr.Jaroslav Vild

Předložená práce J.Vilda je rozdělena do 6 částí, které ve formě jednotného celku shrnují autorovy výsledky, které získal během svého dlouholetého působení při výuce numerické matematiky na Vysoké škole strojní a textilní v Liberci. Hlavní důraz je přitom kladen na využití počítačů v procesu výuky.

První část práce je věnována problematice matematických a datových struktur s ohledem na jejich pedagogické využití - specielně se zde zkoumají datové struktury, problematika linearizace datových struktur, zkoumají se komplexové operace a relace a některé vlastnosti funkcí. Speciální třídě po částech lineárních funkcí je věnována další část práce, v níž se zkoumají zejména vlastnosti tzv. lomenicových funkcí, funkcí po částech konstantních a funkce sgn. Třetí část práce je věnována studiu matic mezních hodností (tj.hodnosti 1 nebo 2). Zvláštní důraz je přitom kladen na matice vyskytující se v numerické matematice jako např. eliminační a elementární matice. Část IV. shrnuje rozsáhlou autorovu práci týkající se přímého využití informatiky v pedagogickém procesu při generování velkého počtu příbuzných úloh pro účely cvičení studentů s ohledem na usnadnění kontroly získaných výsledků ze strany učitele. Obecné úvahy jsou zde doplněny konkretními příklady z oblasti rozvíjení pojmu funkce. Tuto část práce doplňuje konkretním materiálem i pátá část práce věnovaná jednak výuce numerických metod řešení soustav lineárních rovnic a jednak devítibodovému diferenčnímu schématu pro řešení parciálních diferenciálních rovnic. Poslední šestá část práce obsahuje seznam odkazů na literaturu, dále obsáhlý seznam pedagogické publikační činnosti J.Vilda a seznam některých prací studentů v rámci studentské vědecké a odborné činnosti, na jejichž vzniku se J.Vild podílel jako pedagog. Seznam publikační činnosti obsahuje celkem 53 položek, v nichž J.Vild je buď autorem nebo jedním ze spoluautorů publikace. Tento seznam je dále doplněn 15 interními publikacemi, z nichž část rovněž recenzním resp.oponentním řízením.

K předložené práci nemám žádné zásadní námitky. Některé otázky a poznámky do diskuse uvádím na zvláštním listě. Předložená práce prokazuje autorův přehled o čs.i zahraniční literatuře týkající se těch oblastí matematiky, které jsou v práci zkoumány (zejména problematika matic mezních hodností a po částech lineárních resp.polynomických funkcí). Práce dokazuje i dlouholetou autorovu zkušenost s využíváním výpočetní techniky ve výuce základní matematiky i numerických metod, je příkladem vynikající aplikace informatiky v didaktice matematiky. Tato aplikace je dovedena až do prakticky použitelného softwaru. Autorova rozsáhlá publikační činnost je dokladem jeho samostatné vědecko-pedagogické i popularizační činnosti.

Z uvedených důvodů lze konstatovat, že uchazeč splňuje všechny kvalifikační předpoklady pro úspěšné habilitační řízení. Doporučuji proto ve smyslu §3 vyhlášky MŠMT ČR č.447/90 Sb. (odst.(3) písm.b)), aby RNDr.Jaroslav Vild byl na základě předložené habilitační práce připuštěn k habilitační přednášce a obhajobě habilitační práce.

V Praze dne 17.2.1992

Karel Zimmermann

Doc.RNDr.Karel Zimmermann, DrSc.

Některé otázky a připomínky k předložené habilitační práci

Jaroslava Vilda.

(1) Je něco známo o výpočtové složitosti postupů popisovaných na str. 115-119 ?

(2) Je něco známo o řešitelnosti soustav rovnic (S1), (S2), (S3) na str. 204 ?

(3) Je možné některé výsledky o eliminačních maticich (str. 320-323) použít i v lineárním programování ?

(4) Lze něco říci o výpočtové složitosti procesu tzv. "pročišťování", o němž se hovoří na str. 406 ?

K. Zimmermann

Prof. Dr. František Nožička, Dr.h.c.
Praha 1 Heranova 5

Oponetský posudek

Habilitační práce RNDr. Jaroslava Vilda

" Datové struktury v matematice a ve výuce "

Předložená habilitační práce Dr. Vilda je ryze didaktického charakteru. Není sepsána s úmyslem přispět k rozvoji některé z matematických disciplin, není též v pravém slova smyslu ani přínosem pro teoretickou bázi informatiky. Jde o práci, kterou je třeba posuzovat jako ucelený soubor autorových výsledků získaných při jeho dlouhodobém působení na Vysoké škole strojní a textilní v Liberci, kde se věnoval především procesu výuky v numerické matematice s cílem využití samočinných počítačů v tomto procesu. Práce je poměrně rozsáhlá, je rozčleněna do šesti částí, z nich poslední obsahuje vedle četných odakazů na literaturu seznam rozsáhlé publikační činnosti Dr. Vilda, a to i s pracemi, na jejichž vzniku se podílel.

Prvé tři části práce věnované převážně tak zvaným matematickým strukturám klasických matematických problémů a úloh za účelem jejich pedagogického využití, týkají se značné části látky včetně numerických metod přednášených na vyskokých školách s technickým zaměřením. Zvláštní pozornost je věnována pojmu struktury v jeho obecnosti, závažné a užitečné problematice linearisace datových struktur.

Zavádí se pojem komplexových operací a zkoumají se (za účelem přímého využití informatiky v rámci pedagogického procesu) některé vlastnosti různých tříd funkcí. Zvláštní pozornost je přitom věnována třídě funkcí lomených, třídě po částech lineárních funkcí a po částech konstantních funkcí. Také funkci označované symbolem sgn je věnována určitá partie textu. V této souvislosti upozorňuje oponent na tu skutečnost, že při numerickém řešení konkrétních problémů z teorie regulace (ve smyslu Pontrjaginových optimalizačních procesů) docházejí právě shora uvedené funkce své uplatnění. Úvahy o maticích mezních hodností, které spadají do třetí části práce, jsou systematickou a důslednou průpravou pro čtvrtou a obsáhlou její část, která se týká autorovy koncepce přímého využívání informatiky v pedagogickém procesu s cílem vytváření různých souborů příbuzných úloh a jejich generace. Zde je vlastně sledován vlastní pedagogický cíl, který má mimo jiné též dosáhnout usnadnění kontroly se strany učitele úloh příbuzných typů zadaných studentům při cvičeních. V této čtvrté kapitole je uvedena též řada konkrétních příkladů spadajících do problematiky rozvíjení funkce, resp. vhodné její aproximace. Pátá část práce, která je věnována především výuce počítačově výhodných metod pro řešení soustav lineárních rovnic, představuje vlastně konkrétní doplněk k čtvrté části. Devítibodové schema (označené zde jako diferenční) navrhované v páté části práce pro řešení parciálních diferenciálních rovnic je spíše ilustrativního charakteru a postrádá aspoň náznak a návaznost na metody řešení okrajových problémů z teorie parciálních rovnic pomocí tak zvaných konečných elementů.

Jak již bylo shora uvedeno je předložená habilitační práce výlučně didaktického charakteru. Odráží se v ní autorova koncepce vycházející z dlouholetých autorových zkušeností s využíváním výpočtové techniky ve výuce základní vysokoškolské matematiky a numerických metod.

V tomto smyslu představuje hodnotnou práci o využití a plikaci informatiky v didaktice matematiky,přičemž příslušné aplikace jasou dotaženy až do prakticky proveditelné implementace. Předložená habilitační práce spolu s uvedenou rozsáhlou publikační činností (a též popularizační činností) jejího autora svědčí o vědecko - pedagogickém talentu, o neúnavné systematické práci jejího autora v příslušném zaměření, která poslouží k pochopení matematiky a jejich výpočtových metod v souvislosti s aplikacemi z informatiky studentům nejen vysokých škol technických, ale též škol, které budou zodpovědné za výchovu učitelů matematiky a jí příbuzných přírodovědných oborů na školách středního typu.

Vzhledem k tomu, že habilitační práce je v podstatě širokou kompilační prací didaktického charakteru, nemohu jako oponent, který se zabýval ve své profesi především " čistou matematikou " a jejími aplikacemi na fysiku a ekonomii bez zřetele na výpočtovou techniku, být dobře obeznámen se soudobým stavem výuky matematiky na vysokých školách neuniverzitního typu a nemohu též předloženou práci porovnávat s jinými didaktickými koncepcemi toho druhu. Jsem však toho názoru, že právě s didaktického a pedagogicko - výchovného hlediska je tato práce u nás jedinečnou,ucelenou, je souborným dílem mnohaleté cílevědomé práce jejího autora.

K předložené habilitační práci nemám žádné podstatné námitky nebo výtky. Mám pouze tři připomínky, a to ve formě následujících dotazů:

a) Proč autor nevěnoval větší pozornost numerickému řešení obyčejných diferenciálních rovnic nebo jejich systémů?

b) Přichází v úvahu některé výsledky v práci obsažené (především ty, které se týkají eliminačních matic) pro lineární nebo konvexní kvadratické programování?

c) Když už je v práci věnován odstavec diferenční devítibodové metodě pro parciální diferenciální rovnice, proč není na příslušném místě zmínka o ryze matematickém obecnějším základu pro problematiku tohoto druhu? To by jistě přispělo i k vědeckosti příslušné koncepce.

Závěrečné hodnocení.

Jsem toho názoru, že RNDr. J. Vild svou předloženou prací splňuje veškeré předpoklady související s habilitačním řízením a doporučuji proto z důvodů shora uvedených, aby byl ve smyslu §3 vyhlášky MŠMT ČR,č. 447/90 Sb (odst.(3), písm.b)) připuštěn na základě předložené habilitační práce k habilitační přednášce a současně k obhajobě habilitační práce.

V Praze dne 9.března 1992.

J. Novák

Oponentský posudek habilitační práce

RNDr. Jaroslava Vilda

"Datové struktury v matematice a ve výuce".

Práce se zabývá různými typy datových struktur a jejich použitím. Je rozdělena do šesti částí. První část se zabývá matematickými a datovými strukturami obecně. Popisuje různé způsoby záznamu dat a speciálně se zabývá otázkami jejich linearizace. V závěru této části se autor zabývá číselnými množinami a jejich rozšiřováním (například přidáním symbolů nekonečen). Obsahem druhé části jsou funkce po částech lineární to jest funkce, jejichž grafy jsou sjednocením úseček a případn izolovaných bódů. Z nich se věnuje zvláštní pozornost spojitým po částech lineárním funkcím, pro něž autor razí název "lomenic Ve třetí části se zkoumají matice mezních hodností, čímž se rozumějí matice malých hodností a matice lišící se hodnostně málo od regulárních matic. Ukazuje se jejich význam při řešení problémů lineární algebry. Čtvrtá část se zabývá použitím počítačů při výuce matematiky. Nejprve se píše o proměnných zadáním, která umožňují uložit každému studentovi jinou úlohu, přičemž tyto úlohy jsou stejného typu a liší se jen číselnými údaji. Dále pak se popisují didaktické programy. Pátá část obsahuje určité poznámky k numerickým metodám. Porovnává se Gaussova metoda s kondenzační metodou a popisuje se devítibodo diferenční schéma. V závěrečné šesté části je uveden seznam použité literatury, seznam autorových publikací a seznam prací SVOČ, které autor vedl.

Práce se liší od obvyklých matematických prací, které uvádějí věty a jejich důkazy. Myslím, že by bylo možné ji označit za metodickou příručku. Slovo "metodická" zde chápu v širokém smyslu. Jde o knihu, která obsahuje praktické rady užitečné jak při vědecké práci v matematice, tak i při výuce matematiky i při aplikování matematiky v technice (včetně programování). Takové knihy by se měly vydávat a měly by se objevovat jako habilitační práce, protože jsou potřebné a protože při docentské habilitaci (na rozdíl od získávání vědeckých hodností) se hodnotí právě schopnost přístupným způsobem sdělovat informace čtenáři. Při psaní takovéto knihy se uplatní především dlouholetá zkušenost ve všech třech výše uvedených činnostech. Autor habilitační práce ji má a dovedl ji v práci úspěšně uplatnit.

Jako člen české terminologické komise pro matematiku bych se pozastavil nad termínem "lomenice", který se mi zdá až příliš svérázný, i když uznávám právo tvůrčích vědeckých pracovníků na ražení vlastní terminologie. Ke straně 326 bych poznamenal, že správný pravopis uvedených jmen je "Dodgson" a "Carroll" a že je vhodnější říkat "Kroneckerova-Capelliova věta". To jsou ovšem připomínky ryze formální.

Je patrno, že uchazeč splňuje kvalifikační předpoklady pro úspěšné habilitační řízení v oboru matematika. Doporučuji ve smyslu § 3, odst. 3, písm. b vyhlášky MŠMT ČR č. 447/90 Sb., aby RNDr. Jaroslav Vild byl na základě předložené habilitační práce připuštěn k habilitační přednášce a k obhajobě habilitační práce.

V Liberci 24. března 1992.

Bohdan Zelinka

Prof. RNDr. Bohdan Zelinka, DrSc