



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Hálkova 6, 461 17 Liberec 1, CZ



Výzkumné centrum - Textil

TECHNICKÁ ZPRÁVA
č. ISRN TUL – VCT/C – MŘTP/TZ - - 02/004/CZ

Sborník technických zpráv
Sekce C

Modelování a simulace technologických
procesů a textilních strojů

Sekce C - skupina "Mechatronické systémy"

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy

Nositel: Technická univerzita Liberec

Řešitel: Doc. Ing. Aleš Richter, CSc

Název projektu: Výzkumné centrum „TEXTIL“

Identifikační kód projektu: LN 00B090

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Hálkova 6, 461 17 Liberec 1, CZ

VÝZKUMNÝ ÚSTAV TEXTILNÍCH STROJŮ

LIBEREC a.s.

U Jezu 4, 461 19 Liberec 4, CZ

TECHNICKÁ ZPRÁVA

č. ISRN TUL – VCT/C – MŘTP/TZ – - 02/004/CZ

Sborník technických zpráv

Sekce C

**Modelování a simulace technologických
procesů a textilních strojů**

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Univerzitní knihovna
Voroněžská 1329, Liberec 1
PSČ 461 17

TZ 2
Liberec, prosinec 2002

UNIVERZITNÍ KNIHOVNA
TECHNICKÉ UNIVERZITY V LIBERCI



3146088066

Matematické modelování nestacionárního přenosu
tepla a vlhkosti v plošné textilii pomocí metody
konečných prvků - dokončení matematického
aparátu

Ing. Dalibor Frydrych
Ing. Petr Rálek
Výzkumné centrum Textil, sekce B a C

Seznam použitých symbolů

C_a	$kg.m^{-3}$	Koncentrace vlhkosti ve vzduchu mezi vlákny
C_f	$kg.m^{-3}$	Koncentrace vlhkosti ve vzduchu ve vláknech
T	K	Teplota tkaniny
t	s	Čas
x	m	Délková souřadnice
ϵ	1	Porozita
D_a	$m^2.s^{-1}$	Difuzní koeficient vodních par ve vzduchu
τ	1	Tortuozita
c_v	$J.kg.K^{-1}$	Tepelná kapacita tkaniny
λ	$J.kg^{-1}$	Výparné/kondenzační teplo vodních par ve vláknech
k	$J.s^{-1}.m^{-1}.K^{-1}$	Koeficient tepelné vodivosti tkaniny

1 Výsledky řešení v prvním pololetí roku 2002

K 1.1.2002 byl hotov matematický popis modelu nezahrnujícího sorpci vlhkosti ve vláknech a implementován počítačový program řešící danou úlohu. Model umožnil řešení nestacionární vedení tepla a vlhkosti v nesorbující textili, vyrobené z např. polypropylenových vláken.

V r. 2002 měly být doplněny zbývající členy matematického modelu a výsledky měly být experimentálně ověřeny. K 10.5.2002 byly implementovány již všechny části matematického modelu (jak členy řešící stacionární vedení tepla a vlhkosti, nestacionární vedení tepla a vlhkosti, tak i členy popisující sorpci vlhkosti do vlákenného materiálu a vznik sorpčního tepla). Provázání obou základních rovnic pomocí třetí, tzv. vazební, rovnice však přineslo očekávané prudké zhoršení stability výpočtu a jeho konvergence. Ukázalo se, že zvolená cesta řešení dané úlohy metodou postupných iterací jednotlivých rovnic nevede k cíli.

V průběhu roku byl proto odvozen nový matematický model zahrnující sorpci vlhkosti ve vláknech, který vede na řešení soustavy tří obyčejných diferenciálních rovnic. Tato soustava je řešena v každém časovém kroku jako celek. To výrazně zvýší nároky na organizaci výpočtu, ovšem zvýší rychlost řešení (probíhá jediný iterační cyklus místo dříve používaných tří do sebe vnořených cyklů). Také se dá očekávat stabilita výpočtu. Byly implementovány programové moduly řešící daný problém. Nové programové moduly zatím nebyly otestovány na reálné úloze (nebyly naměřeny výsledky, s kterými by bylo lze srovnávat).

Problém zůstává v nalezení uspokojivého vyjádření funkce popisující sorpci vlhkosti. Při použití vhodné aproximace (např. nějakou lineární funkcí) je třeba nalézt správné parametry vystupující v této aproximaci. To je možné pouze porovnáváním výsledků s obsáhlou sadou experimentů.

2 Odvození matematického modelu

Formulace úlohy Nestacionární přenos tepla a vlhkosti v textili je obecně popsán soustavou tří diferenciálních rovnic (viz. [1]) na jednorozměrné oblasti $\Omega = \langle 0, l \rangle$, kde l je tloušťka textilie.

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial C_a}{\partial t} + (1 - \epsilon) \frac{\partial C_f}{\partial t} &= \frac{D_a \epsilon}{\tau} \frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2}, \\ c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial C_f}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \\ \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial C_f}{\partial t} &= \left(\frac{C_a}{C_a^{100}} - \frac{C_f}{C_f^{100}} \right) \gamma \left(\frac{C_a}{C_a^{100}}, \frac{C_f}{C_f^{100}} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Tvar funkce γ je závislý na materiálu textilie. Závislost se obvykle určuje pro jednotlivé textilie experimentálně. K sadě diferenciálních rovnic

jsou přiřazeny následující okrajové podmínky pro obě strany textilie ((2) - Dirichletova, (3) - Neumannova či (4) - Newtonova typu).

$$\begin{aligned} T(x, t) &= T_D(t) & x = 0, l & \text{ v čase } (0, T), \\ C_{a,f}(x, t) &= C_D^{a,f}(t) & x = 0, l & \text{ v čase } (0, T), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \cdot \mathbf{n} &= \alpha(x) & x = 0, l & \text{ v čase } (0, T), \\ \frac{\partial C_{a,f}}{\partial x}(x, t) \cdot \mathbf{n} &= \beta(x), & x = 0, l & \text{ v čase } (0, T), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \mathbf{n} + \sigma(T - T_D) &= 0 & \sigma > 0, x = 0, l & \text{ v čase } (0, T), \\ \frac{\partial C_{a,f}}{\partial x} \cdot \mathbf{n} + \sigma(C_{a,f} - C_D^{a,f}) &= 0 & \sigma > 0, x = 0, l & \text{ v čase } (0, T). \end{aligned} \quad (4)$$

Jako počáteční podmínky se obvykle volí konstantní funkce

$$T(x, 0) = T_D \quad \text{pro} \quad x \in \langle 0, l \rangle, \quad (5)$$

$$C_{a,f}(x, 0) = C_D^{a,f} \quad \text{pro} \quad x \in \langle 0, l \rangle. \quad (6)$$

Slabá formulace Pro řešení úlohy metodou konečných prvků je třeba odvodit slabou formulaci problému. Tuto odvodíme pro prostorovou proměnnou. Časová závislost je řešena užitím Runge-Kuttovy metody. Nechť funkce $w \in H_0(\Omega) = \{f \in W_2^1, f|_{\partial\Omega} = 0\}$. Označme dále $(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi \psi d\Omega$, $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\partial\Omega} \varphi \psi d(\partial\Omega)$. Testovací funkcí w vynásobíme rovnice (1). Použitím Greenovy formule a dosazením okrajových podmínek dostáváme následující integrální identity:

$$\begin{aligned} \epsilon \left(\frac{\partial C_a}{\partial t}, w \right) + (1 - \epsilon) \left(\frac{\partial C_f}{\partial t}, w \right) &= \frac{D_a \epsilon}{\tau} \left\langle \frac{\partial C_a}{\partial x} \cdot \mathbf{n}, w \right\rangle - \frac{D_a \epsilon}{\tau} \left(\frac{\partial C_a}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t}, w \right) - \lambda \left(\frac{\partial C_f}{\partial t}, w \right) &= K \left\langle \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \mathbf{n}, w \right\rangle - K \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial C_f}{\partial t}, w \right) &= \gamma \left(\frac{C_a}{C_a^{100}}, \frac{C_f}{C_f^{100}} \right) \left[\left(\frac{C_a}{C_a^{100}}, w \right) - \left(\frac{C_f}{C_f^{100}}, w \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Mějme časový interval $I = \langle 0, t^* \rangle$. Označme $C_a^*, C_f^*, T^* \in AC(I, W_2^1(\Omega))$ funkce splňující Dirichletovy okrajové podmínky (2). Nechť $C_a(x, t) = \bar{C}_a^*(x, t) + C_{a0}(x, t)$, $C_f(x, t) = \bar{C}_f^*(x, t) + C_{f0}(x, t)$, $T(x, t) = \bar{T}^*(x, t) + T_0(x, t)$, kde $C_{a0}, C_{f0}, T_0 \in AC(I, H_0(\Omega))$. Pak funkce C_a, C_f, T nazveme (slabým) řešením problému (1) s okrajovými podmínkami (2), (3) nebo (4) a počátečními podmínkami (5) v časovém intervalu I , jestliže splňují integrální identity (7) pro všechny volby testovacích funkcí $w \in H_0(\Omega)$.

Diskretizace úlohy Oblast $\Omega = \langle 0, l \rangle$ (tloušťku textilie) rozdělíme na $r - 1$ intervalů. Vznikne r dělicích bodů. Množinu indexů dělicích bodů x_i označíme L ; je $|L| = r$. Na diskretizované oblasti definujeme bazické funkce w jako lineární funkce, po částech hladké na každém intervalu dělení a splňující podmínku $w_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in L$.

Slabé řešení pak hledáme ve tvaru aproximace pomocí bazických funkcí:

$$C_a^h(x, t) = \sum_{i \in L} C_a^i(t) w_i(x),$$

$$C_f^h(x, t) = \sum_{i \in L} C_f^i(t) w_i(x),$$

$$T^h(x, t) = \sum_{i \in L} T^i(t) w_i(x).$$

Dosazením těchto aproximací do integrálních identit (7) dostáváme pro $w = w_j, j \in L$ soustavu rovnic pro neznámé hodnoty veličin v dělicích bodech v čase t . Označíme-li

$$[\mathbb{A}]_{i,j} = \epsilon(w_i, w_j), [\tilde{\mathbb{A}}_1]_{i,j} = \frac{D_a \epsilon}{\tau} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x}, \frac{\partial w_j}{\partial x} \right), [\tilde{\mathbb{A}}_2]_{i,j} = \frac{\gamma}{C_a^{100}} (w_i, w_j),$$

$$[\mathbb{B}]_{i,j} = c_v(w_i, w_j), [\tilde{\mathbb{B}}]_{i,j} = K \left(\frac{\partial w_i}{\partial x}, \frac{\partial w_j}{\partial x} \right),$$

$$[\mathbb{C}_1]_{i,j} = (1 - \epsilon)(w_i, w_j), [\mathbb{C}_2]_{i,j} = \lambda(w_i, w_j), [\mathbb{C}_3]_{i,j} = \frac{1}{\epsilon} (w_i, w_j),$$

$$[\tilde{\mathbb{C}}]_{i,j} = \frac{\gamma}{C_f^{100}} (w_i, w_j), [\mathbb{R}_i^1] = \frac{D_a \epsilon}{\tau} \langle \beta, w_i \rangle, [\mathbb{R}_i^2] = K \langle \alpha, w_i \rangle,$$

má soustava tento blokový tvar:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} & 0 & \mathbb{C}_1 \\ 0 & \mathbb{B} & \mathbb{C}_2 \\ 0 & 0 & \mathbb{C}_3 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbb{C}_a \\ \mathbb{T} \\ \mathbb{C}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbb{A}}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbb{B}} & 0 \\ \tilde{\mathbb{A}}_2 & 0 & \tilde{\mathbb{C}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{C}_a \\ \mathbb{T} \\ \mathbb{C}_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{R}_1 \\ \mathbb{R}_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

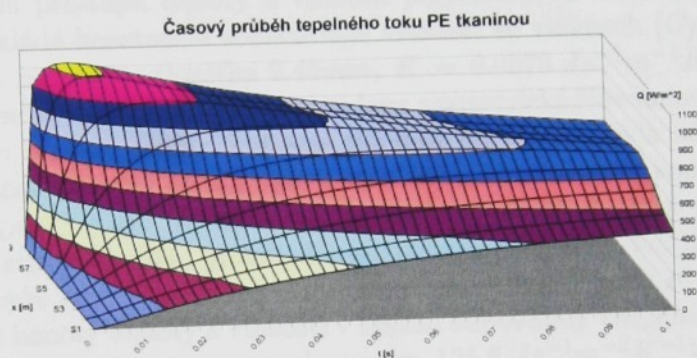
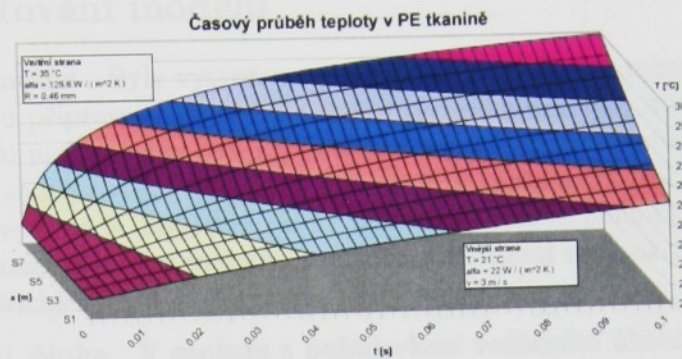
To je soustava obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu se zadanými počátečními podmínkami $\mathbb{C}_{a,f}(0) = \mathbb{C}_0^{a,f}, \mathbb{T}(0) = \mathbb{T}_0$. Tuto soustavu je numericky řešitelná například metodou Runge-Kutta. Její výhoda je v tom, že je použitelná i pro případy, kdy koeficienty soustavy jsou závislé na neznámých veličinách. V současné době je odladěn řešič pro případ neabsorbující textilie, tedy pro

$$C_f = \text{konst},$$

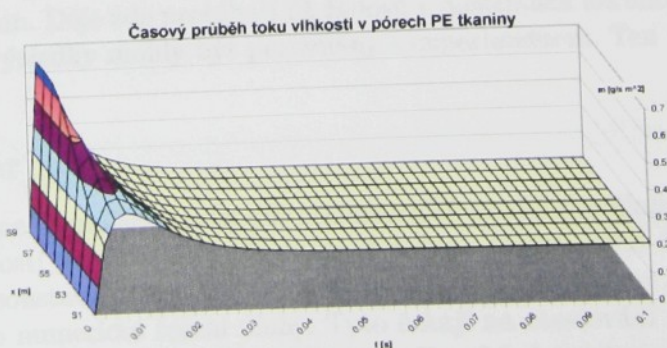
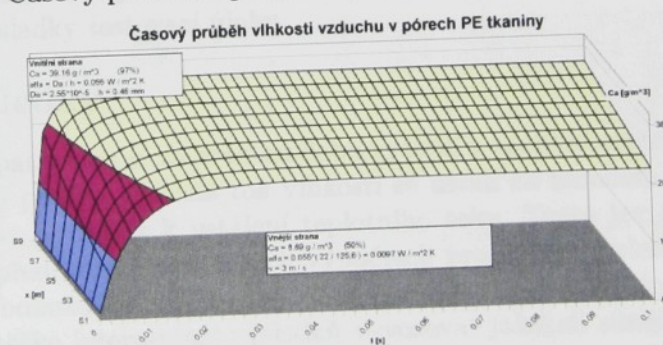
kdy vzniklá soustava má tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} & 0 \\ 0 & \mathbb{B} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbb{C}_a \\ \mathbb{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbb{A}}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbb{B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{C}_a \\ \mathbb{T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{R}_1 \\ \mathbb{R}_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Jsou rozpracovány programové moduly pro řešení celého systému (8), které čekají na své odladění na konkrétní úloze pro absorbující textilii.



Obrázek 1: Časový průběh teploty a tepelného toku v 0,46 mm PES textilií.



Obrázek 2: Časový průběh vlhkosti a vlhlostního toku v 0,46 mm PES textilií.

3 Testování modelu

Implementace Byly vytvořeny programové moduly pro numerické řešení úlohy. Jsou připraveny datové struktury pro řešení celého problému (1) (s okrajovými podmínkami (2), (3) nebo (4) a počátečními podmínkami (5)), počítající se zahrnutím dalších proměnných a závislostí koeficientů na neznámých veličinách. Soustava (8) je numericky řešena pomocí explicitní 4-bodové Runge-Kuttovy metody. Lze volit mezi třemi typy okrajových podmínek (Dirichletova, Neumannova, Newtonova).

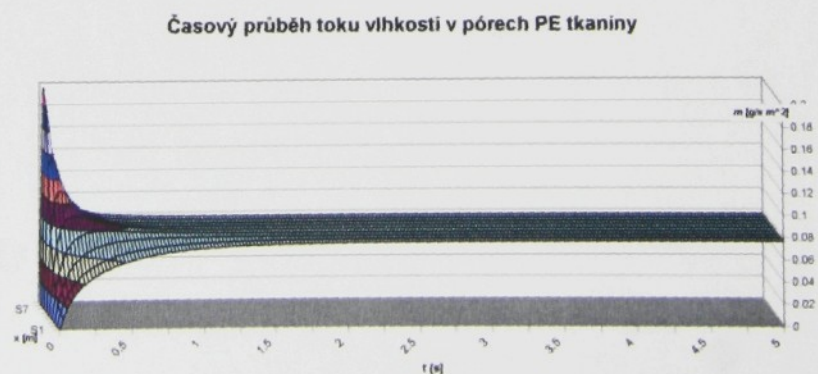
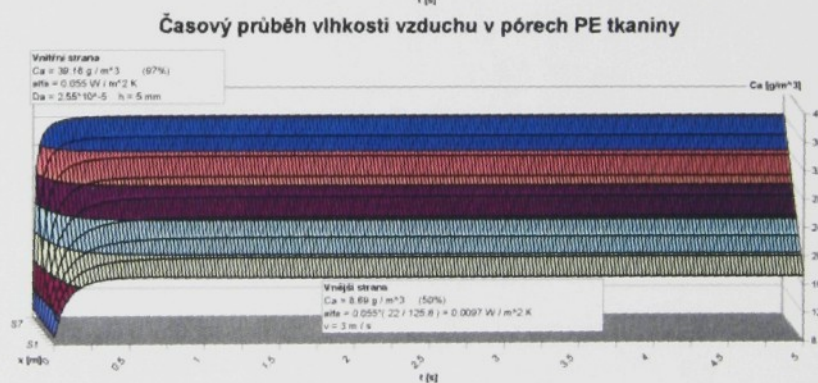
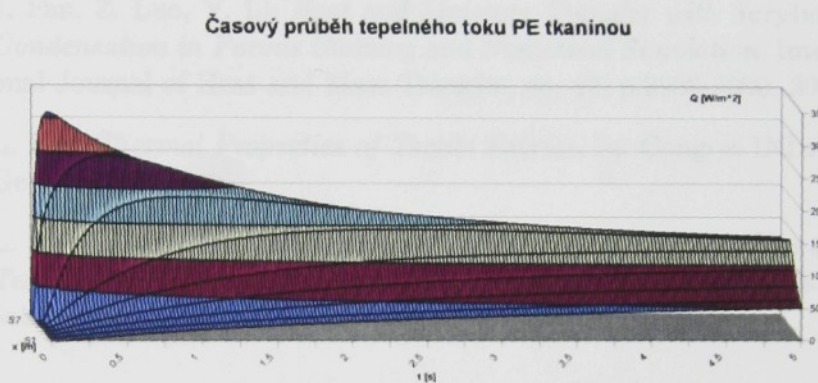
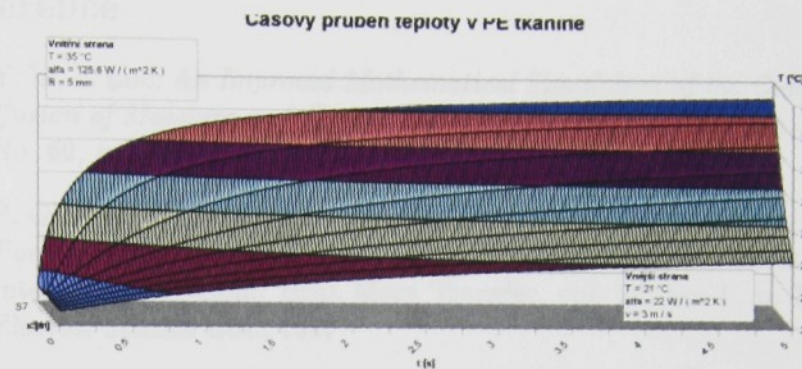
Testovací úloha V souladu s požadavkem vedoucího úkolu jsme modelovali úlohu přestupu teploty a vlhkosti polyesterovou textilií, pro kterou se předpokládá konstantní koncentrace vlhkosti ve vláknech ($C_f = konst$). Materiál - polyester, tloušťka 0.46 mm , $K = 0.0578\text{ Js}^{-1}\text{ m}^{-1}\text{ K}^{-1}$, $D_a = 2.55 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2\text{ s}^{-2}$, $\epsilon = 0.955$. Byly zavedeny asymetrické Newtonovy okrajové podmínky: teplota plochy vzdálené 0.5 mm od textilie byla 35°C a relativní vlhkost vzduchu na této ploše byla 97% , tj. absolutní koncentrace je $39.16\text{ g}_{\text{H}_2\text{O}}\text{ m}^{-3}$ (tato plocha simuluje lidskou pokožku). Teplota vzduchu na vnější straně textilie, proudícího paralelně s povrchem textilie rychlostí 3 ms^{-1} , byla 21°C a relativní vlhkost vzduchu byla 50% ($39.16\text{ g}_{\text{H}_2\text{O}}\text{ m}^{-3}$). Počáteční hodnoty teploty a vlhkosti v textilii odpovídaly vnějšímu prostředí, hodnoty součinitelů přenosu tepla ($\alpha_1 = 125.6\text{ Js}^{-1}\text{ m}^{-2}\text{ K}^{-1}$) a vlhkosti ($\beta_1 = 0.055\text{ ms}^{-1}$, $\beta_2 = 0.0097\text{ ms}^{-1}$) byly odvozeny známými vztahy či získány měřením ($\alpha_2 = 22\text{ Js}^{-1}\text{ m}^{-2}\text{ K}^{-1}$). Na grafech jsou znázorněny numerické výsledky testovací úlohy.

4 Výsledky

Z grafů je patrné, že se za krátkou dobu vytvoří v textilii konstantní teplotní a vlhkostní profily, přičemž tok vlhkosti se ustálí za mnohem kratší dobu, než je doba potřebná k ustálení teplotního toku. Tento jev jsme pozorovali již v předchozích testovacích výpočtech pro polypropylenovou textilií. Výsledky bohužel nebylo možno porovnat s reálným fyzikálním měřením, proto lze těžko interpretaci výsledků vyvozovat jakékoli silnější závěry. Na následujících grafech jsou zobrazeny výsledky výpočtů pro PES textilií o tloušťce 5 mm . Děje zde probíhají již řádově v desetinách sekundy, takže by numerické výsledky mohly být porovnány s experimentem. Ten však dosud neproběhl.

5 Závěr

Rozšířili jsme formulaci a odvodili matematický model pro úlohu zahrnující sorpci vlhkosti ve vláknech. Na základě tohoto teoretického základu, vedoucího k soustavě diferenciálních rovnic (8), byly připraveny programové moduly pro numerické řešení úlohy. Tyto čekají na otestování a porovnání na reálné úloze. V následující fázi by tedy mělo následovat testování modelu pro kompletní úlohu zahrnující sorpci vlhkosti ve vlákněm materiálu.



Obrázek 3: VVýsledky pro 5 mm PES textílii.

Reference

- [1] Y. Li, Z. Luo: *An Improved Mathematical Simulation of the Coupled Diffusion of Moisture and Heat in Wool Fabric*, Textile Research Journal, No. 69, p. 760-768, 1999
- [2] P. Gibson, M. Chramchi: *Modelling Convection/Diffusion Processes in Porous textiles with Inclusion of Humidity-Dependent Air Permeability*, International Comm. Heat Mass Transfer, vol. 24, no. 5, p. 709-724, Elsevier Science Ltd., 1997
- [3] J. Fan, Z. Luo, Y. Li: *Heat and Moisture Transfer with Sorption and Condensation in Porous Clothing and Numerical Simulation*, International Journal of Heat and Mass Transfer, no. 43, p.2989-3000, 2000
- [4] L. Hes: *Thermal Properties of Textile Fabrics*, In: Congres INDEX 87, Geneve 1987
- [5] L. Hes, J. Martius: *Experimental Investigation of Heat Transfer in Textile Fabrics by Radiation*, In: Experimental Heat Transfer, Elsevier Science Ltd., 1993