Technická univerzita v Liberci
FAKULTA PEDAGOGICKÁ

461 17 LIBEREC 1, Hálkova 6   Tel. 420.48.5352 515, fax: 420.48.5352 332

Katedra: matematiky a didaktiky matematiky

Kombinace oborů: matematika (3.st) - fyzika (3.st)

JEDNOROZMĚRNÁ MÍRA

One-dimensional measure

Diplomová práce 00–FP–KMD–004

Autor:

Věra CHOMÁTOVÁ   Podpis: Věra Chomátová

Adresa: Lučany nad Nisou 301, 468 71 Lučany nad Nisou

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ilja Černý, DrSc.

Počet stran: 46   obrázků: 0   tabulek: 0   příloh: 0

V Lučanech nad Nisou dne 10.5. 2000

Technická univerzita v Liberci
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
461 17 LIBEREC 1, Hálkova 6 Tel. +420.48.5352 515, fax: +420.48.5352 332

Katedra: matematiky a didaktiky matematiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(závěrečného projektu)

Diplomant: Věra CHOMÁTOVÁ

Adresa: Lučany n. N. 301, 468 71 LUČANY n.N.

Obor: matematika (3 st. SŠ) - fyzika

Název DP: **JEDNOROZMĚRNÁ MÍRA**

Název DP v *angličtině*: **ONE-DIMENSIONAL MEASURE**

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ilja Černý, DrSc.

Termín odevzdání: květen 2000

Pozn.: Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž specifikují zadání: východiska, cíle, předpoklady, metody zpracování, základní literaturu (zpravidla na rub tohoto formuláře). Zásady pro zpracování DP lze zakoupit v Edičním středisku TUL a jsou též k dispozici v UKN TUL, na katedrách a na Děkanátě Fakulty pedagogické.

V Liberci dne 20. 4. 1998

DP BYLA DO UK ODEVZDÁNA S PŮLROČNÍM ZPOŽĎ. 23.01.01

J. Ldl
vedoucí katedry

V. Kardaš
proděkan

KMD/M
46A.

Převzal (diplomant):

Datum: Podpis: Věra Chomátová

Diplomová práce: **JEDNOROZMĚRNÁ MÍRA**

Úvod:

Vedoucí DP neví, proč se na střední škole (aspoň časem) vykládá Jordanova míra, když jde o míru s velmi špatnými vlastnostmi. Protože se tak bohužel děje, je vhodné, aby učitel znal i některou rozumnější míru, která zobecňuje délku, obsah a objem; nejpřirozenější a také nejužívanější je Lebesgueova míra. Dále je vhodné, aby si učitel byl vědom předností a vad jednotlivých měr a aby věděl, nač mohou být užitečné.

Cíl:

Seznámit se s Jordanovou a Lebesgueovou jednorozměrnou mírou, porovnat je, podat příklady některých zajímavých množin a aplikací, naznačit závislosti mezi mírou a hustotou (množiny) resp. mezi mírou a řídkostí. Seznámit se TEXem a napsat DP v něm.

Předpoklady:

Znalost základů diferenciálního a integrálního počtu jedné proměnné.

Literatura:

Jarník, V : DI a II, JI a II.

Aleksandrov, P.S. : Úvod do obecné teorie množin a funkcí.

Halmos, P.R. : Measure Theory.

Natanson, I.P.: Těorija funkcij věščestvěnnoj pěreměnnoj.

Prohlášení o původnosti práce:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla veškerou použitou literaturu.

V Lučanech nad Nisou dne 23. 5. 2000 Věra Chomátová

Poděkování:

Děkuji vedoucímu práce Prof. RNDr. Iljovi Černému DrSc. za vysvětlení problémů a za podnětné rady. Dále děkuji panu Jiřímu Čihulkovi za překlad resumé do anglického a německého jazyka.

Prohlášení k využívání výsledků DP:

Jsem si vědoma těchto skutečností:

a) diplomová práce je majetkem pedagogické fakulty TU v Liberci,

b) s diplomovou prací nelze bez svolení školy disponovat,

c) diplomová práce může být zapůjčena či objednána (kopie) za účelem využití jejího obsahu.

Beru na vědomí, že po pěti letech si mohu diplomovou práci vyžádat v Univerzitní knihovně TU v Liberci, kde bude uložena.

Věra Chomátová

Lučany nad Nisou 301

468 71 Lučany nad Nisou

Podpis: Věra Chomátová

Resumé:

Tato diplomová práce se zabývá Lebesgueovou jednorozměrnou mírou omezených množin a jejími vlastnostmi. První a druhá kapitola je věnována míře omezených otevřených a uzavřených množin. V dalších kapitolách je definována Lebesgueova vnější a vnitřní míra, lebesgueovsky měřitelné množiny, a jsou zde uvedeny jejich vlastnosti. Poslední kapitola obsahuje několik zajímavých příkladů hustých a řídkých množin (např. Cantorovo diskontinuum) a je naznačena souvislost mezi mírou a hustotou množiny.

Summary:

This diploma thesis deals with Lebesgue one-dimensional measure of bounded sets and its properties. The first two chapters are devoted to the measure of bounded open and closed sets. In the following chapters Lebesgue's external and internal measure and measurable sets are defined, and their properties are investigated. The last chapter contains several interesting examples of dense and nowhere dense sets (e.g., the Cantor set) and shows there is no connection between measure and density of set.

Zusammenfassung:

Diese Diplomarbeit befasst sich mit Lebesgues Mass von beschränkten eindimensionalen Mengen und deren Eigenschaften. Das erste und zweite Kapitel sind dem Mass von beschränkten offenen und geschlossenen Mengen gewidmet. In weiteren Kapiteln werden der Aussen- und Innenmass von Lebesgue, messbare Mengen definiert, und es sind hier ihre Eigenschaften aufgeführt. Das letze Kapitel enthält einige interessante Beispiele von dichten und nirgends dichten Mengen (z.B. Diskontinuum von Cantor), und es wird gezeigt, dass kein Zusammenhang zwischen dem Mass und Dichte der Menge existiert.

Obsah

Úvod

Cílem této diplomové práce je seznámit se s Lebesgueovou jednorozměrnou mírou a jejími vlastnostmi. Budeme se především zabývat mírou a měřitelností omezených množin, ale zmíníme se i o míře a měřitelnosti obecných neomezených množin. Budeme pracovat s množinami reálných čísel.

Nejdříve definujeme jednorozměrnou míru omezených otevřených a uzavřených množin, odvodíme některé její vlastnosti: monotonii, σ-subaditivitu, aditivitu, σ-aditivitu. Seznámíme se s Lebesgueovou vnější a vnitřní mírou omezené množiny. Dále se budeme zabývat lebesgueovsky měřitelnými množinami, jejich mírou a vlastnostmi. Dokážeme věty o měřitelnosti a míře sjednocení, průniku a rozdílu omezených množin. Ukážeme též, že existuje omezená, lebesgueovsky neměřitelná množina v $\mathbb{R}$.

Na závěr této práce uvedeme několik zajímavých příkladů hustých a řídkých množin, pojednáme o kategorii množin. Určíme míru těchto množin a uvážíme, zda existuje nějaká souvislost mezi mírou a hustotou resp. řídkostí množiny, mezi mírou a kategorií množiny, nebo zda míra souvisí s počtem prvků dané množiny. Jak se ukáže, množiny reálných čísel nejsou vždy zcela triviální. Budeme se zabývat Cantorovým diskontinuem a dalšími diskontinui, což jsou velmi zajímavé a důležité, ale dosti komplikované množiny.

Diplomová práce je napsána v TEXu, který je vhodný pro psaní matematických a technických textů. Umožňuje pohodlnou sazbu i velmi komplikovaných matematických formulí a textů.

Celá práce je rozdělena do kapitol, které jsou číslovány průběžně, od nulté počínaje. Nultá kapitola se skládá ještě z několika sekcí (odstavců). Celý text je dále rozdělen na definice, věty a jejich důkazy, poznámky a příklady. Polotučná sazba názvů a čísel vět, poznámek a příkladů má usnadnit hledání v textu. Důležité početní vztahy nebo tvrzení na samostatných řádcích jsou většinou opatřeny číslem.

Kapitola 0

Důležité pojmy a věty

0.1.

Definice. Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **otevřená**, jestliže pro každé $x \in M$ existuje okolí $U(x)$ obsažené v M.

Věta 0.1.1. *Otevřené množiny mají tyto vlastnosti:*

1. $\emptyset$ a $\mathbb{R}$ *jsou otevřené množiny.*

2. *Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.*

3. *Průnik libovolného konečného systému otevřených množin je otevřená množina.*

Důkaz. Ad 1. Tvrzení 1 je jistě zřejmé.

Ad 2. Je-li každá z množin M_α, kde $\alpha \in A$ (a kde A je zcela libovolná množina indexů), otevřená a je-li $x \in M := \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$, existuje $\alpha \in A$ tak, že $x \in M_\alpha$. Protože množina M_α je otevřená, existuje $U(x) \subset M_\alpha$; tím spíše je $U(x) \subset M$. Tím je tvrzení 2 dokázáno.

Ad 3. Je-li $n \in \mathbb{N}$, jsou-li množiny $M_1, \ldots, M_n$ otevřené a je-li $x \in M := \bigcap_{k=1}^{n} M_k$, je $x \in M_k$ pro každé $k = 1, \ldots, n$, a existují proto čísla $\varepsilon_k \in \mathbb{R}_+$ tak, že $U(x, \varepsilon_k) \subset M_k$. Položíme-li $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, je zřejmě $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ a $U(x, \varepsilon) \subset M$. Tím je dokázáno i tvrzení 3. $\square$

Definice. Říkáme, že množina $N \subset \mathbb{R}$ je **uzavřená**, je-li množina $\mathbb{R} - N$

otevřená.

Otevřené a uzavřené množiny jsou tedy vzájemnými doplňky v $\mathbb{R}$.

Čtenář jistě zná tzv. *de Morganovy vzorce*: Pro libovolný systém podmnožin $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ libovolné množiny X platí:

$$X - \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A}(X - X_\alpha), \quad X - \bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A}(X - X_\alpha). \tag{0.1.1}$$

Z těchto vzorců a z věty 0.1.1 plyne věta o uzavřených množinách:

Věta 0.1.2. *Uzavřené množiny mají tyto vlastnosti:*

1. $\emptyset$ a $\mathbb{R}$ *jsou uzavřené množiny.*

2. *Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.*

3. *Sjednocení libovolného konečného systému uzavřených množin je uzavřená množina.*

D ů k a z . Ad 1. Tvrzení 1 je podle věty 0.1.1 zřejmé.

Ad 2. Podle de Morganových vzorců je

$$\mathbb{R} - \bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A}(\mathbb{R} - M_\alpha). \tag{0.1.2}$$

Jsou-li množiny M_α uzavřené, jsou $\mathbb{R} - M_\alpha$ otevřené, potom podle věty 0.1.1 je sjednocení vpravo v (0.1.2) otevřené, tedy i množina na levé straně je otevřená, a $\bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha$ je uzavřená. Tím je tvrzení 2 dokázáno.

Podobně se dokáže i tvrzení 3, snadný důkaz můžeme jistě přenechat čtenáři. □

Poznamenejme, že každá konečná množina je uzavřená.

Poznámka 0.1.1. Je jistě zřejmé, že platí tato dvě tvrzení:

Je-li G otevřená množina a interval $\langle a,b\rangle \supset G$, je množina $\langle a,b\rangle - G$ uzavřená. Je-li F uzavřená množina a interval $(a,b) \supset F$, je množina $(a,b) - F$ otevřená.

Je-li však F uzavřená množina a interval $\langle a,b\rangle \supset F$, množina $\langle a,b\rangle - F$ není obecně otevřená množina. Například, je-li $F = \langle 0,1\rangle$ a $\langle a,b\rangle = \langle 0,2\rangle$, je $\langle a,b\rangle - F = (1,2\rangle$.

Poznámka 0.1.2. Nechť M je omezená množina obsahující aspoň dva různé body a nechť $a = \inf M$, $b = \sup M$. Pak je interval $\langle a, b\rangle$ zřejmě *nejmenší interval* obsahující množinu M. Je-li M prázdná nebo jednobodová množina, nejmenší interval obsahující M neexistuje.

Je-li množina M neprázdná, omezená a uzavřená, je $\inf M$ i $\sup M$ prvkem množiny M, tj. existuje $\min M$ i $\max M$. □

Dokažme nyní tuto větu:

Věta 0.1.3. *Je-li $\langle a, b\rangle$ nejmenší interval obsahující omezenou uzavřenou množinu F, která obsahuje aspoň dva různé body, je množina $\langle a, b\rangle - F$ otevřená.*

D ů k a z . Je zřejmé, že stačí dokázat tuto rovnost:

$$\langle a, b\rangle - F = (a, b) \cap (\mathbb{R} - F).$$

Je-li $x \in \langle a, b\rangle - F$, je $x \in \langle a, b\rangle$ a $x \notin F$. Protože $a \in F$, $b \in F$ a $x \notin F$, je $x \neq a$ a $x \neq b$ a tedy $x \in (a, b)$. Dále je zřejmé, že $x \in \mathbb{R} - F$, takže

$$\langle a, b\rangle - F \subset (a, b) \cap (\mathbb{R} - F).$$

Protože obrácená inkluze je zřejmá, je tím věta dokázána.

0.2. V tomto odstavci popíšeme strukturu všech otevřených a uzavřených množin v $\mathbb{R}$; budeme k tomu potřebovat pojem spočetné množiny.

Definice. Množina M se nazývá **spočetná**, jestliže existuje prosté zobrazení $f : M \to \mathbb{N}$.

Jinak řečeno, M je spočetná množina, je-li možné všechny její prvky srovnat do (konečné nebo nekonečné, event. prázdné) prosté posloupnosti. Ještě jinak: M je spočetná právě tehdy, když je buď konečná, nebo existuje prosté zobrazení $\mathbb{N}$ na M.

Poznámka 0.2.1. Mnozí autoři říkají spočetným množinám *nejvýše spočetné*. Názvu *spočetný* užívají potom jen pro nekonečné spočetné množiny.

Snadno lze dokázat tato tvrzení:

(0.2.1) *Každá část spočetné množiny je spočetná,*

(0.2.2) *sjednocení spočetného systému spočetných množin je spočetné,*

(0.2.3) *obraz při jakémkoliv zobrazení spočetné množiny je spočetný,*

(0.2.4) *interval $\langle 0, 1 \rangle$ je nespočetný.*

Důkazy těchto tvrzení lze nalézt v [6]. Tvrzení (0.2.1) je dokázáno na str. 33 (věta 2), tvrzení (0.2.2) na str. 34 (věta 5), tvrzení (0.2.3) na str. 34 (věta 4). Tvrzení (0.2.4) je dokázáno v [2] na str. 2.

Je zřejmé, že množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel a množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel jsou spočetné. Snadno se dokáže, že také

(0.2.5) *množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná.*

Toto tvrzení je dokázáno v [6] na str. 35.

Dokažme nyní tuto větu:

Věta 0.2.1. *Každý disjunktní systém intervalů v $\mathbb{R}$ je spočetný.*

Podrobně řečeno: *Buď dán systém intervalů I_τ ($\tau \in T$), kde $I_\tau \cap I_\sigma = \emptyset$ pro $\tau \in T$, $\sigma \in T$, $\tau \neq \sigma$. Potom je T spočetná množina.*

D ů k a z . Každý interval I_τ obsahuje racionální čísla; vyberme jedno z nich a označme ho r_τ, tedy $r_\tau \in I_\tau$. Je-li $\tau \neq \sigma$, je $r_\tau \neq r_\sigma$, protože $I_\tau \cap I_\sigma = \emptyset$. Přiřadíme-li tedy každému $\tau \in T$ číslo r_τ, dostaneme prosté zobrazení množiny T na jistou množinu racionálních čísel. Z toho plyne, že množina T je spočetná. □

V následující větě popíšeme strukturu otevřených množin v $\mathbb{R}$:

Věta 0.2.2. *Nechť G je otevřená množina v $\mathbb{R}$. Potom je*

$$G = \bigcup_n I_n, \tag{0.2.6}$$

kde vpravo je sjednocení spočetného disjunktního systému otevřených intervalů I_n. Toto vyjádření je jednoznačné v tom smyslu, že když

$$G = \bigcup_m J_m \tag{0.2.7}$$

je jiné vyjádření s podobnými vlastnostmi, je každý I_n roven některému J_m a každý J_m roven některému I_n.

D ů k a z . Dokažme nejdříve toto tvrzení:

(0.2.8) *Jsou-li $I = (\alpha, \beta)$, $J = (\gamma, \delta)$ dva intervaly ležící v G, přičemž žádný z bodů α, β, γ, δ neleží v G, je buď $I = J$ nebo $I \cap J = \emptyset$.*

Důkaz provedeme sporem: Předpokládejme, že tvrzení věty neplatí. Je-li $I \neq J$, je buď $\alpha \lesseqgtr \gamma$ nebo $\beta \lesseqgtr \delta$; protože ve všech čtyřech případech se postupuje analogicky, buď například $\alpha < \gamma$. Je-li $I \cap J \neq \emptyset$, je $\gamma < \beta$, ale potom $\gamma \in (\alpha, \beta)$, tedy $\gamma \in G$, což je ve sporu s předpokladem, že $\gamma \notin G$. Tedy $I \cap J = \emptyset$. Tím je tvrzení (0.2.8) dokázáno.

Přiřaďme nyní každému číslu $x \in G$ interval $H_x = (\alpha_x, \beta_x)$ takto: Buď β_x supremum množiny všech čísel $\beta > x$, pro něž interval $\langle x, \beta) \subset G$. Taková β existují, protože množina G je otevřená, a je tedy $\beta_x > x$. Je zřejmé, že

$$\langle x, \beta_x) \subset G, \tag{0.2.9}$$

neboť je-li $x \leq y < \beta_x$, existuje podle definice suprema číslo $\beta > y$ tak, že $\langle x, \beta) \subset G$, tedy $y \in G$. Dále dokážeme, že $\beta_x \notin G$. To je zřejmé, když $\beta_x = +\infty$. Je-li $\beta_x < +\infty$ a $\beta_x \in G$, existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tak, že $(\beta_x - \varepsilon, \beta_x + \varepsilon) \subset G$, a z (0.2.9) plyne, že $\langle x, \beta_x + \varepsilon) \subset G$. To je však ve sporu s definicí čísla β_x.

Označíme-li α_x infimum množiny všech čísel $\alpha < x$, pro něž $(\alpha, x\rangle \subset G$, dokáže se podobně, že $(\alpha_x, x\rangle \subset G$ a $\alpha_x \notin G$.

Tím je tedy každému $x \in G$ přiřazen otevřený interval $H_x = (\alpha_x, \beta_x)$ s těmito vlastnostmi:

$$x \in H_x \subset G, \quad \text{krajní body } H_x \text{ neleží v } G. \tag{0.2.10}$$

Je tedy

$$G = \bigcup_{x \in G} H_x. \tag{0.2.11}$$

Podle (0.2.8) a podle (0.2.10) je pro kterékoliv dva body $x \in G$, $y \in G$ buď $H_x = H_y$ nebo $H_x H_y = \emptyset$. Nechť $\mathcal{I}$ je systém intervalů takový, že $I \in \mathcal{I}$ právě tehdy, když je roven některému H_x. Pak je $\mathcal{I}$ disjunktní systém a G je sjednocení všech intervalů $I \in \mathcal{I}$. Podle věty 0.2.1 je systém $\mathcal{I}$ spočetný, takže intervaly $I \in \mathcal{I}$ lze označit I_n $(n \in T)$, kde T je nějaká spočetná množina. Tím dostáváme vyjádření tvaru (0.2.6).

Podotkněme, že v každém takovém vyjádření (0.2.6) s disjunktními sčítanci platí, že krajní body žádného intervalu $I_n = (\gamma_n, \delta_n)$ nepatří ke G. Neboť kdyby bylo např. $\delta_n \in G$, musel by bod δ_n ležet uvnitř některého I_k $(k \neq n)$, ale potom by zřejmě bylo $I_k \cap I_n \neq \emptyset$, což je ve sporu s tím, že intervaly jsou disjunktní.

Nyní již snadno dokážeme jednoznačnost: Nechť (0.2.6), (0.2.7) jsou dvě vyjádření s uvedenými vlastnostmi. Zvolíme-li v libovolném I_n jakýkoli bod $x \in I_n$, existuje m tak, že $x \in J_m$; pak je ovšem $I_n \cap J_m \neq \emptyset$, a tedy podle (0.2.8) $I_n = J_m$. Podobně ke každému J_m existuje I_n tak, že $I_n = J_m$.

Tím je věta dokázána. □

Definice. Intervaly I_n s vlastnostmi uvedenými ve větě 0.2.2 se nazývají **komponenty** otevřené množiny G. Je-li množina G prázdná, je i systém intervalů I_n prázdný; komponentou prázdné množiny rozumíme prázdnou množinu. □

Z toho, co jsme dokázali, plyne i tento popis struktury uzavřených množin v $\mathbb{R}$: Buď F uzavřená množina, tedy $F = \mathbb{R} - G$, kde G je otevřená. Podle věty 0.2.2 dostaneme F tedy tak, že z $\mathbb{R}$ odstraníme sjednocení $\bigcup_n I_n$ vhodného, jednoznačně určeného disjunktního spočetného systému otevřených intervalů I_n; tyto intervaly se nazývají **styčné intervaly** množiny F. □

Věta 0.2.3. *Nechť $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina. Je-li interval $(a, b) \subset G$, je (a, b) částí nějaké komponenty množiny G.*

D ů k a z . Je-li $x \in (a,b)$, je $x \in G$, a existuje komponenta $I = (c,d)$ množiny G taková, že $x \in (c,d)$. Kdyby bylo $d < b$, bylo by $d \in (a,b)$, ale to není možné, protože podle definice komponenty $d \notin G$. Musí tedy být $b \leq d$. Analogicky dokážeme, že $c \leq a$. Z dokázaných nerovností ihned plyne, že $(a,b) \subset (c,d)$. □

0.3. Je-li $\mathcal{P}$ nějaký systém množin M_α, kde $\alpha \in A$ (a kde A je libovolná množina). Říkáme, že systém $\mathcal{P}$ množin **pokrývá** množinu M, jestliže

$$M \subset \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha. \tag{0.3.1}$$

Dokažme tuto důležitou větu o množinách v $\mathbb{R}$:

Věta 0.3.1. (Borelova věta.) *Je-li uzavřená a omezená množina $M \subset \mathbb{R}$ pokryta systémem $\mathcal{P}$ otevřených množin, existuje konečný systém $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$, který také pokrývá M.*

D ů k a z . Je-li I_n ($n \in N \subset \mathbb{N}$) systém všech styčných intervalů množiny M, je

$$\mathbb{R} - M = \bigcup_{n \in N} I_n. \tag{0.3.2}$$

Protože M je omezená, jsou mezi intervaly I_n také intervaly tvaru $(-\infty, a)$ a $(b, +\infty)$. Nechť je

$$I_1 = (-\infty, a), \quad I_2 = (b, +\infty). \tag{0.3.3}$$

Je-li $\mathcal{P} = \{M_m\}_{m \in A}$, pokrývá systém $\mathcal{P}^*$ všech množin M_m a všech intervalů I_n celé $\mathbb{R}$.

Bod $x \in \mathbb{R}$ nazveme regulárním, jestliže interval $(-\infty, x)$ lze pokrýt konečným počtem množin systému $\mathcal{P}^*$. Označme α supremum množiny všech regulárních bodů. Protože bod a v (0.3.3) je zřejmě regulární, je $a \leq \alpha \leq +\infty$. Předpokládáme-li, že $\alpha < +\infty$, bod α leží v některé množině B systému $\mathcal{P}^*$, a tedy existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tak, že $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset B$. Protože podle definice suprema existuje regulární bod $\beta > \alpha - \varepsilon$, lze interval $(-\infty, \beta)$ pokrýt konečným počtem množin z $\mathcal{P}^*$. Připojíme-li k nim množinu B, je pokryt celý interval $(-\infty, \alpha + \varepsilon)$, to znamená, že $\alpha + \varepsilon$ je regulární, ale to je ve sporu s definicí suprema. Je tedy zřejmě $\alpha = +\infty$, a existuje regulární bod $\gamma > b$. Existuje tedy konečný počet množin z $\mathcal{P}^*$:

$$B_1, B_2, \dots, B_q \quad (q \in \mathbb{N}), \tag{0.3.4}$$

který pokrývá interval $(-\infty, \gamma)$ a tedy i množinu M, protože $M \subset \langle a, b \rangle$ a $\gamma > b$. Mezi množinami (0.3.4) jsou množiny M_m a intervaly I_n, které ale neobsahují žádné body z M. Vynecháme-li tedy z (0.3.4) intervaly I_n, dostaneme konečný systém $\mathcal{P}_1$ množin pokrývajících M, obsahující pouze množiny M_m. Tím je věta dokázána. □

Věta 0.3.2. *Je-li $\langle a, b \rangle \subset \bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha)$ (kde A je libovolná množina), existuje dělení $D : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ tak, že pro každé $j = 1, \dots, p$ existuje $\alpha_j \in A$ tak, že $\langle x_{j-1}, x_j \rangle \subset (a_{\alpha_j}, b_{\alpha_j})$.*

D ů k a z provedeme sporem: Předpokládejme, že tvrzení věty neplatí, a označme D_n dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ na n stejně dlouhých intervalů. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje interval $\langle A_n, B_n \rangle$ dělení D_n, který není částí žádného intervalu (a_α, b_α).

Podle Bolzano-Weierstrassovy věty existuje vybraná posloupnost $\{A_{n_k}\}$ a bod $A^* \in \langle a, b \rangle$ tak, že $A_{n_k} \to A^*$; protože $B_n - A_n = (b - a)/n \to 0$, je pak také $B_{n_k} \to A^*$.

Podle předpokladu věty existuje $\alpha \in A$ tak, že $A^* \in (a_\alpha, b_\alpha)$. Protože $A_{n_k} \to A^*$, $B_{n_k} \to A^*$, existuje k tak, že $A_{n_k} \in (a_\alpha, b_\alpha)$, $B_{n_k} \in (a_\alpha, b_\alpha)$, načež ovšem $\langle A_{n_k}, B_{n_k} \rangle \subset (a_\alpha, b_\alpha)$. To však je ve sporu s tím, jak byly intervaly $\langle A_n, B_n \rangle$ vybrány.

Tím je věta 0.3.2 dokázána. □

Definice. Je-li A libovolná spočetná množina („indexů") a je-li každému prvku $\alpha \in A$ přiřazeno konečné nezáporné číslo a_α, budeme symbol

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha \tag{0.3.5}$$

nazývat **zobecněnou řadou**. Tento symbol ztotožníme s číslem, které se nazývá **součet** této zobecněné řady a je definováno rovností

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha := \sup \Big\{ \sum_{\alpha \in K} a_\alpha \, ; \, K \subset A \quad \text{je konečná} \Big\} . \tag{0.3.6}$$

Je-li $A = \emptyset$, obsahuje množina vpravo jen jediný prvek, a to prázdný součet, který je definován jako 0. Součtem prázdné zobecněné řady je tedy nula.

V případě, že množina A je konečná, ale neprázdná, je zřejmé, že její součet je roven součtu definovanému obvyklým způsobem v elementární aritmetice.

Je-li množina A nekonečná, lze předpokládat, že $A = \mathbb{N}$; snadno lze dokázat, že pak

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \Big(= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \Big)$$

(viz např. větu 10.4.2 a rovnost (10.4.17) v [3]), takže součet zobecněné řady je totožný se součtem nekonečné řady, definovaným „obvyklým způsobem“.

Budeme říkat, že zobecněná řada **konverguje**, má-li konečný součet; je-li její součet roven $+\infty$, budeme říkat, že řada **diverguje**. Budeme ovšem užívat i termínů „konvergentní řada“, resp. „divergentní řada“.

Podle právě zavedených definic jsou všechny řady s konečným počtem členů zřejmě konvergentní.

Protože prvky každé spočetné množiny lze očíslovat přirozenými čísly k buď od 1 do jistého celého čísla $n \geq 0$ nebo do nekonečna, budeme užívat symbolů

$$\sum_k a_k, \quad \bigcup_k M_k, \quad \bigcap_k M_k \tag{0.3.7}$$

pro součet spočetně mnoha čísel a_k a pro sjednocení resp. průnik spočetně mnoha množin M_k.

Připomeňme znovu, že budeme pracovat jen s řadami s nezápornými členy. U takových řad nezáleží na pořadí sčítanců a nejsou žádné pochyby o tom, co je jejich součet.

V dalším budeme potřebovat tuto větu:

Věta 0.3.4. *Buď $\sum_{\alpha \in A} a_\alpha$ zobecněná řada se součtem s a nechť A je disjunktním sjednocením spočetného systému množin A_β, $\beta \in B$. Pak je*

$$s = \sum_{\beta \in B} \Big(\sum_{\alpha \in A_\beta} a_\alpha \Big). \tag{0.3.8}$$

Je-li $s < +\infty$, konvergují všechny řady $\sum_{\alpha \in A_\beta} a_\alpha$, $\beta \in B$, i řada na pravé straně (0.3.8).

D ů k a z . Důkaz je uveden v [6] na str. 96-98 (věta 39).

Kapitola 1

Míra omezené otevřené množiny

Definice. **Lebesgueovou mírou intervalu** (a,b) se nazývá jeho délka, tj. $b-a$; značíme ji takto:

$$\mu((a,b)) := b-a. \tag{1.1}$$

Zřejmě je vždy $\mu((a,b)) > 0$.

Lemma 1.1. 1. *Leží-li v intervalu I konečný počet nepřekrývajících se intervalů $I_1,\dots,I_n$, je*

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) \le \mu(I). \tag{1.2.1}$$

2. *Leží-li v intervalu I nekonečně mnoho nepřekrývajících se intervalů I_k $(k \in \mathbb{N})$, je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) \le \mu(I). \tag{1.2.2}$$

Důsledek. *Leží-li v intervalu I spočetně mnoho intervalů I_k, je*

$$\sum_{k} \mu(I_k) \le \mu(I). \tag{1.3}$$

D ů k a z . 1. Nechť

$$I=(a,b), \quad I_k=(a_k,b_k) \ \text{ pro } \ k=1,\dots,n.$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že intervaly I_k jsou očíslovány tak, že $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Pak je zřejmě $b_k \leq a_{k+1}$ pro $k = 1, \ldots, n-1$, protože jinak by se intervaly I_k, I_{k+1} překrývaly. Součet

$$s := (b - b_n) + (a_n - b_{n-1}) + \cdots + (a_2 - b_1) + (a_1 - a)$$

je tedy nezáporný. Protože

$$\mu(I) = \sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) + s,$$

je zřejmé, že tvrzení 1. části lemmatu platí.

2. Nerovnost (1.2.2) se dostane limitním přechodem pro $n \to \infty$ z nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) \leq \mu(I)$$

platné (podle toho, co jsme již dokázali) pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

3. Důsledek je zřejmý, protože jen shrnuje tvrzení prvních dvou částí lemmatu.

Definice. Mírou neprázdné omezené otevřené množiny G nazýváme číslo

$$\mu(G) := \sum_{k} \mu(I_k), \tag{1.4}$$

kde I_k jsou komponenty množiny G (viz větu 0.2.2); **míru prázdné množiny** definujeme jako 0.

Podle důsledku lemmatu 1.1 je $\mu(G) < +\infty$ pro každou omezenou otevřenou množinu G. Podle téhož důsledku platí:

(1.5) *Je-li* $G \subset I$ *otevřená množina, je* $\mu(G) \leq \mu(I)$. □

Nyní odvodíme některé vlastnosti míry na systému omezených otevřených množin; první z nich je její **monotonie**:

Věta 1.1. *Nechť* G_1 *a* G_2 *jsou dvě omezené otevřené množiny. Je-li* $G_1 \subset G_2$, *je*

$$\mu(G_1) \leq \mu(G_2). \tag{1.6}$$

D ů k a z . Nechť I_1 a I_2 jsou komponenty množin G_1 a G_2. V důsledku věty 0.2.3 je každá z komponent I_1 částí nějaké komponenty I_2 a můžeme napsat

$$\mu(G_1) = \sum_{\substack{I_1 \\ \text{je komp.} G_1}} \mu(I_1) = \sum_{\substack{I_2 \\ \text{je komp.} G_2}} \Big(\sum_{\substack{I_1 \subset I_2 \\ \text{je komp.} G_1}} \mu(I_1)\Big).$$

Podle důsledku lemmatu 1.1 je

$$\sum_{\substack{I_1 \subset I_2 \\ \text{je komp.} G_1}} \mu(I_1) \leq \mu(I_2),$$

takže

$$\mu(G_1) \leq \sum_{\substack{I_2 \\ \text{je komp.} G_2}} \mu(I_2) = \mu(G_2),$$

což jsme měli dokázat. □

Dokažme dále tzv. σ-**aditivitu** míry:

Věta 1.2. *Je-li omezená otevřená množina G sjednocením spočetného systému disjunktních otevřených množin G_k, je*

$$\mu(G) = \sum_k \mu(G_k). \tag{1.7}$$

D ů k a z . Nechť $G_k = \bigcup_i I_i^k$, kde vpravo jsou komponenty množiny G_k. Je zřejmé, že každá z těchto komponent je také komponentou množiny G; podle věty 0.3.4 je proto

$$\mu(G) = \sum_{i,k} \mu(I_i^k) = \sum_k \Big(\sum_i \mu(I_i^k)\Big) = \sum_k \mu(G_k). \quad \square$$

Lemma 1.2. *Je-li*

$$\langle a, b\rangle \subset \bigcup_k (a_k, b_k) \tag{1.8}$$

(kde se sčítá přes spočetnou množinu indexů k), je

$$b - a \leq \sum_k (b_k - a_k). \tag{1.9}$$

D ů k a z . Podle věty 0.3.2 existuje dělení $D : a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$ tak, že pro každé $j = 1, \dots, p$ existuje k_j tak, že $\langle x_{j-1}, x_j \rangle \subset (a_{k_j}, b_{k_j})$. Pokud existují dvojice indexů $j_1 < j_2$ tak, že $k_{j_1} = k_{j_2}$, je

$$\langle x_{j_1 - 1}, x_{j_1} \rangle \cup \dots \cup \langle x_{j_2 - 1}, x_{j_2} \rangle \subset (a_{k_{j_1}}, b_{k_{j_1}}),$$

a dělicí body $x_{j_1}, \dots, x_{j_2 - 1}$ můžeme z D vynechat. Z toho je patrné, že lze předpokládat, že D má již od začátku tu vlastnost, že $j_1 \neq j_2 \Rightarrow k_{j_1} \neq k_{j_2}$. Pak je ovšem

$$b - a = \sum_{j=1}^{p} (x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{p} (b_{k_j} - a_{k_j}) \leq \sum_k (b_k - a_k). \quad \square$$

Lemma 1.3. *Je-li interval I pokryt spočetným systémem otevřených množin G_k, je*

$$\mu(I) \leq \sum_k \mu(G_k). \tag{1.10}$$

D ů k a z . Nechť $G_k = \bigcup_i I_i^k$, kde vpravo jsou komponenty množiny G_k. Pak je $I \subset \bigcup_{k,i} I_i^k$, a je-li $I = (a, b)$, je tím spíše $\langle a + \varepsilon, b - \varepsilon \rangle \subset \bigcup_{k,i} I_i^k$ pro každé $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}(b - a))$. Podle lemmatu 1.2 a věty 0.3.4 je tedy

$$b - a - 2\varepsilon \leq \sum_{k,i} \mu(I_i^k) = \sum_k \Big(\sum_i \mu(I_i^k) \Big) = \sum_k \mu(G_k).$$

Protože ε bylo libovolně malé, je

$$b - a \leq \sum_k \mu(G_k),$$

čímž je nerovnost (1.10) dokázána. $\square$

Věta 1.3. *Je-li omezená otevřená množina G sjednocením spočetného systému otevřených množin G_k, je*

$$\mu(G) \leq \sum_k \mu(G_k). \tag{1.11}$$

D ů k a z . Je-li $G = \bigcup_i I_i$, kde vpravo jsou komponenty množiny G, je

$$\mu(G) = \sum_i \mu(I_i).$$

Protože

$$I_i = I_i \cap \bigcup_k G_k = \bigcup_k (I_i \cap G_k),$$

je podle lemmatu 1.3

$$\mu(I_i) \leq \sum_k \mu(I_i \cap G_k),$$

a tedy

$$\mu(G) \leq \sum_i \Big(\sum_k \mu(I_i \cap G_k) \Big) = \sum_k \Big(\sum_i \mu(I_i \cap G_k) \Big). \tag{1.12}$$

Obráceně je

$$G_k = G_k \cap \bigcup_i I_i = \bigcup_i (I_i \cap G_k),$$

a protože množiny vpravo jsou disjunktní a otevřené, je podle věty 1.2

$$\mu(G_k) = \sum_i \mu(I_i \cap G_k).$$

Dosazením do (1.12) je nerovnost (1.11) dokázána. □

Vlastnost míry uvedená ve větě 1.3 se nazývá σ-**subaditivita**.

Kapitola 2

Míra omezené uzavřené množiny

Definice. Míru $\mu(F)$ uzavřené omezené množiny F definujeme takto: Je-li F jednobodová množina, klademe $\mu(F) = 0$. Obsahuje-li množina F aspoň dva různé body, položíme

$$\mu(F) := b - a - \mu(\langle a, b\rangle - F), \tag{2.1}$$

kde $\langle a, b\rangle$ je nejmenší interval obsahující množinu F.

Míra $\mu(\langle a, b\rangle - F)$ je již definována; protože množina $\langle a, b\rangle - F$ je podle věty 0.1.3 otevřená, je tedy její míra definována v kapitole 1.

Míru prázdné množiny (která je jak uzavřená, tak i omezená) zde není nutné (znovu) definovat, protože prázdná množina je i otevřená a její míru jsme již definovali jako nulu.

Příklad 2.1. $F = \langle a, b\rangle$. Je zřejmé, že nejmenším intervalem obsahujícím interval $\langle a, b\rangle$ je sám tento interval. Je proto

$$\mu(F) = \mu(\langle a, b\rangle) = b - a, \tag{2.2}$$

tj. míra uzavřeného intervalu je rovna jeho délce.

Příklad 2.2. $F = \bigcup_{k=1}^{n}\langle a_k, b_k\rangle$, kde intervaly vpravo jsou disjunktní. Lze předpokládat, že intervaly jsou očíslovány tak, že $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Pak je zřejmě $b_k < a_{k+1}$ pro $k = 1, \ldots, n-1$. Z toho vyplývá, že nejmenší interval obsahující množinu F je interval $\langle a_1, b_n \rangle$ a

$$\langle a_1, b_n \rangle - F = \bigcup_{k=1}^{n-1} (b_k, a_{k+1}).$$

Proto je

$$\mu(F) = b_n - a_1 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k). \tag{2.3}$$

Mírou sjednocení konečného počtu disjunktních intervalů je součet jejich měr.

Věta 2.1. *Míra omezené uzavřené množiny F je nezáporná.*

D ů k a z . Tvrzení je zřejmé v případě prázdné a jednobodové množiny. Obsahuje-li F aspoň dva různé body a je-li $\langle a, b \rangle$ nejmenší uzavřený interval obsahující F, je zřejmé, že

$$\langle a, b \rangle - F \subset (a, b),$$

přičemž obě množiny jsou otevřené. Podle věty 1.1 je proto

$$\mu(\langle a, b \rangle - F) \leq \mu(a, b) = b - a. \quad \square$$

Lemma 2.1. *Je-li F omezená uzavřená množina obsažená v omezeném otevřeném intervalu I, je*

$$\mu(F) = \mu(I) - \mu(I - F). \tag{2.4}$$

D ů k a z . Nechť $I = (A, B)$. Je-li $F = \emptyset$, je rovnost (2.4) triviální; je-li $F = \{C\}$ jednobodová množina, je vlevo 0, vpravo $(B - A) - ((C - A) + (B - C))$, tedy také 0.

Obsahuje-li F aspoň dva různé body, nechť $\langle a, b \rangle$ je nejmenší interval obsahující množinu F. Je

$$I - F = (I - \langle a, b \rangle) \cup (\langle a, b \rangle - F),$$

množiny vpravo jsou disjunktní a podle poznámky 0.1.1 a věty 0.1.3 otevřené. Podle věty 1.2 (σ-aditivita míry) je tedy

$$\mu(I - F) = \mu(I - \langle a, b\rangle) + \mu(\langle a, b\rangle - F).$$

Protože $I - \langle a, b\rangle = (A, a) \cup (b, B)$, je $\mu(I - \langle a, b\rangle) = (a - A) + (B - b)$, a

$$\mu(I - F) = (B - A) - (b - a) + \mu(\langle a, b\rangle - F).$$

Snadnou úpravou dostaneme rovnost (2.4). □

V následující větě je dokázána **monotonie** míry na systému omezených uzavřených množin.

Věta 2.2. *Nechť F_1 a F_2 jsou dvě omezené uzavřené množiny. Je-li $F_1 \subset F_2$, je*

$$\mu(F_1) \leq \mu(F_2). \tag{2.5}$$

D ů k a z . Je-li I interval obsahující množinu F_2, je $(I - F_1) \supset (I - F_2)$, a tedy $\mu(I - F_1) \geq \mu(I - F_2)$. Nyní stačí aplikovat lemma 2.1. □

Věta 2.3. *Nechť F je uzavřená množina a G je omezená otevřená množina. Je-li $F \subset G$, je*

$$\mu(F) \leq \mu(G). \tag{2.6}$$

D ů k a z . Nechť I je omezený otevřený interval obsahující množinu G. Protože $I = G \cup (I - F)$, je $\mu(I) \leq \mu(G) + \mu(I - F)$ podle věty 1.3. Nyní stačí aplikovat lemma 2.1. □

Věta 2.4. *Pro každou omezenou otevřenou množinu G je*

$$\mu(G) = \sup\{\mu(F);\ F \subset G,\ F \text{ uzavřená}\}. \tag{2.7}$$

D ů k a z . Jsou-li (a_k, b_k) komponenty množiny G, je

$$\mu(G) = \sum_k (b_k - a_k).$$

Buď dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$; zvolme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) > \mu(G) - \frac{\varepsilon}{2},$$

a najděme pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ uzavřený interval $\langle \alpha_k, \beta_k \rangle \subset (a_k, b_k)$ tak, že

$$\mu(\langle \alpha_k, \beta_k \rangle) > \mu((a_k, b_k) - \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Označíme-li

$$F := \bigcup_{k=1}^{n} \langle \alpha_k, \beta_k \rangle,$$

je množina $F \subset G$ uzavřená, a

$$\mu(F) = \sum_{k=1}^{n}(\beta_k - \alpha_k) > \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) - \frac{\varepsilon}{2} > \mu(G) - \varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolné, je věta dokázána. □

Věta 2.5. *Pro každou omezenou uzavřenou množinu F je*

$$\mu(F) = \inf\{\mu(G);\ G \supset F,\ G \text{ omezená otevřená}\}. \tag{2.8}$$

D ů k a z . Buď I omezený otevřený interval obsahující F; pak je množina $I - F$ je otevřená. Buď dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$; najděme uzavřenou množinu $H \subset I - F$ tak, že

$$\mu(H) > \mu(I - F) - \varepsilon.$$

Označíme-li $G := I - H$, je množina $G \supset F$ otevřená, a

$$\mu(G) = \mu(I) - \mu(H) < \mu(I) - \mu(I - F) + \varepsilon = \mu(F) + \varepsilon,$$

čímž je věta dokázána. □

Věta 2.6. *Je-li omezená uzavřená množina F sjednocením disjunktních uzavřených množin $F_1, \cdots, F_n$ (kde $n \in \mathbb{N}$), je*

$$\mu(F) = \sum_{k=1}^{n} \mu(F_k). \tag{2.9}$$

D ů k a z . Větu dokážeme pro dvě uzavřené množiny F_1, F_2; pro obecný konečný počet množin se dokáže indukcí.

Nechť $F = F_1 \cup F_2$, kde sjednocení vpravo je disjunktní. Je-li dáno libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, existují omezené otevřené množiny $G_1 \supset F_1$ a $G_2 \supset F_2$ tak, že

$$\mu(G_i) < \mu(F_i) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2.$$

Množina $G = G_1 \cup G_2$ je otevřená, přičemž

$$\mu(F) \leq \mu(G) \leq \mu(G_1) + \mu(G_2) < \mu(F_1) + \mu(F_2) + \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ bylo libovolné, je dokázáno

$$\mu(F) \leq \mu(F_1) + \mu(F_2).$$

Abychom dokázali obrácenou nerovnost, uvažme, že množiny F_1, F_2 mají kladnou vzdálenost, a existují proto disjunktní otevřené množiny $H_1 \supset F_1$ a $H_2 \supset F_2$. Je-li dáno libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, existuje omezená otevřená množina $G \supset F$ tak, že

$$\mu(G) < \mu(F) + \varepsilon.$$

Množiny $H_1 \cap G \supset F_1$ a $H_2 \cap G \supset F_2$ jsou omezené otevřené a disjunktní, takže podle věty 1.2 (σ-aditivita míry) je

$$\mu(F_1) + \mu(F_2) \leq \mu(H_1 \cap G) + \mu(H_2 \cap G) = \mu((H_1 \cap G) \cup (H_2 \cap G)).$$

Protože $(H_1 \cap G) \cup (H_2 \cap G) \subset G$, je

$$\mu(F_1) + \mu(F_2) \leq \mu(G) < \mu(F) + \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ bylo libovolné, je dokázáno

$$\mu(F_1) + \mu(F_2) \leq \mu(F).$$

Tím je rovnost (2.9) dokázána. □

Vlastnost míry uvedená ve větě 2.6 se nazývá **aditivita**.

Míra je tedy na systému uzavřených množin **aditivní**, kdežto na systému otevřených množin, jak jsme dokázali v kapitole 1, dokonce σ-**aditivní**.

Kapitola 3

Lebesgueova vnější a vnitřní míra

Definice. Vnější mírou omezené množiny M se nazývá číslo

$$\mu^*(M) := \inf\{\mu(G);\ G \supset M,\ G \text{ je omezená otevřená}\}. \tag{3.1}$$

Definice. Vnitřní mírou omezené množiny M se nazývá číslo

$$\mu_*(M) := \sup\{\mu(F);\ F \subset M,\ F \text{ je uzavřená}\}. \tag{3.2}$$

Je zřejmé, že každá omezená množina M má vnější i vnitřní míru, přičemž

$$0 \leq \mu^*(M) < +\infty, \tag{3.3}$$

$$0 \leq \mu_*(M) < +\infty. \tag{3.4}$$

Věta 3.1. *Je-li G omezená otevřená množina, je*

$$\mu^*(G) = \mu_*(G) = \mu(G). \tag{3.5}$$

D ů k a z . Tvrzení vyplývá z vět 1.1 a 2.4. □

Věta 3.2. *Je-li F omezená uzavřená množina, je*

$$\mu^*(F) = \mu_*(F) = \mu(F). \tag{3.6}$$

D ů k a z . Tvrzení vyplývá z vět 2.2 a 2.5. □

Věta 3.3. *Pro každou omezenou množinu M platí nerovnost*

$$\mu_*(M) \leq \mu^*(M). \tag{3.7}$$

D ů k a z . Nechť $G \supset M$ je omezená otevřená množina. Zvolíme-li jakoukoliv uzavřenou množinu $F \subset M$, je $F \subset G$. Podle věty 2.3 je $\mu(F) \leq \mu(G)$, a tedy $\mu_*(M) \leq \mu^*(M)$. □

Přímo z definice vnější a vnitřní míry plyne jejich **monotonie**.

Věta 3.4. *Nechť M a N jsou omezené množiny. Je-li $M \subset N$, pak*

$$\mu_*(M) \leq \mu_*(N), \quad \mu^*(M) \leq \mu^*(N). \tag{3.8}$$

V následující větě dokážeme σ-**subaditivitu** vnější míry.

Věta 3.5. *Je-li omezená množina M sjednocením spočetného systému množin M_k, je*

$$\mu^*(M) \leq \sum_k \mu^*(M_k). \tag{3.9}$$

D ů k a z . Nechť je dáno libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Zvolme pro každé k omezené otevřené množiny $G_k \supset M_k$ tak, že

$$\mu(G_k) < \mu^*(M_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Potom je $M = \bigcup_k M_k \subset \bigcup_k G_k$; vzhledem k monotonii vnější míry a podle věty 1.3 platí nerovnosti

$$\mu^*(M) = \mu^*\Big(\bigcup_k M_k\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_k G_k\Big) \leq \sum_k \mu(G_k) \leq \sum_k \mu^*(M_k) + \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ bylo libovolné, je tím (3.9) dokázáno. □

V následující větě dokážeme σ-**superaditivitu** vnitřní míry.

Věta 3.6. *Je-li omezená množina M sjednocením spočetného systému disjunktních množin M_k, je*

$$\mu_*(M) \geq \sum_k \mu_*(M_k). \tag{3.10}$$

D ů k a z . Uvažme nejdříve případ, kdy množin M_k je konečný počet. Nechť je dáno libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Zvolme pro každé k uzavřenou množinu $F_k \subset M_k$ tak, že

$$\mu(F_k) > \mu_*(M_k) - \frac{\varepsilon}{n}.$$

Protože množiny M_k jsou disjunktní, jsou disjunktní i množiny F_k. Podle věty 2.6 je

$$\mu_*(M) = \mu_*\Big(\bigcup_{k=1}^{n} M_k\Big) \geq \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(F_k) > \sum_{k=1}^{n} \mu_*(M_k) - \varepsilon.$$

Protože nerovnost $\mu_*(M) > \sum_{k=1}^{n} \mu_*(M_k) - \varepsilon$ platí pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, je $\mu_*(M) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu_*(M_k)$.

Je-li množin M_k nekonečně mnoho, plyne odtud limitním přechodem pro $n \to \infty$ nerovnost

$$\mu_*(M) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_*(M_k).$$

Tím je nerovnost (3.10) dokázána (pro libovolnou spočetnou množinu indexů k). □

Dokažme toto tvrzení:

Věta 3.7. *Nechť M je omezená množina. Je-li I interval obsahující tuto množinu, pak*

$$\mu^*(M) + \mu_*(I - M) = \mu(I). \tag{3.11}$$

D ů k a z . Nechť je dáno libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Zvolme uzavřenou množinu $F \subset I - M$ tak, že

$$\mu(F) > \mu_*(I - M) - \varepsilon.$$

Pak je $G := I - F$ omezená otevřená množina a $G \supset M$. Podle lemmatu 2.1 je

$$\mu^*(M) \leq \mu(G) = \mu(I) - \mu(F) < \mu(I) - \mu_*(I - M) + \varepsilon$$

Protože $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ bylo libovolné, platí nerovnost

$$\mu^*(M) + \mu_*(I - M) \leq \mu(I).$$

Nechť je opět dáno libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Zvolme otevřenou omezenou množinu $G \supset M$ tak, že

$$\mu(G) < \mu^*(M) + \varepsilon.$$

Pak je $F := I - G$ uzavřená množina. Protože $F \subset I - M$, je

$$\mu_*(I - M) \geq \mu(F) = \mu(I) - \mu(G) > \mu(I) - \mu^*(M) - \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ bylo libovolné platí nerovnost

$$\mu^*(M) + \mu_*(I - M) \geq \mu(I).$$

Tím je rovnost (3.11) dokázána. □

Důsledek. *Pro každý omezený interval I a pro každou množinu $M \subset I$ je*

$$\mu^*(I - M) - \mu_*(I - M) = \mu^*(M) - \mu_*(M). \tag{3.12}$$

D ů k a z . Nahradíme-li v (3.11) množinu M množinou $I - M$, dostaneme rovnost $\mu^*(I - M) + \mu_*(M) = \mu(I)$. Z této rovnosti a z původní rovnosti (3.11) plyne ihned (3.12). □

Kapitola 4

Měřitelné množiny

Definice. Říkáme, že omezená množina M je **lebesgueovsky měřitelná**, jestliže platí rovnost

$$\mu^*(M) = \mu_*(M). \tag{4.1}$$

Společnou hodnotu vnější a vnitřní míry měřitelné množiny M budeme nazývat její **Lebesgueovou mírou** a budeme ji značit $\mu(M)$.

Z věty 3.1 a 3.2 vyplývá, že

(4.2) *každá omezená otevřená množina je měřitelná,*

(4.3) *každá omezená uzavřená množina je měřitelná.*

Věta 4.1. *Je-li měřitelná množina M částí nějakého omezeného intervalu I, je množina $I - M$ měřitelná.*

D ů k a z . Tvrzení plyne z důsledku věty 3.7. □

V následující větě dokážeme σ-**aditivitu** míry na systému omezených měřitelných množin.

Věta 4.2. *Je-li sjednocení M spočetného systému disjunktních měřitelných množin M_k omezená množina, je M měřitelná množina a*

$$\mu\Big(\bigcup_k M_k\Big) = \sum_k \mu(M_k). \tag{4.4}$$

D ů k a z . Podle věty 3.3 a vzhledem k σ-subaditivitě a σ-superaditivitě je

$$\sum_k \mu(M_k) = \sum_k \mu_*(M_k) \leq \mu_*(M) \leq \mu^*(M) \leq \sum_k \mu^*(M_k) = \sum_k \mu(M_k),$$

čímž je věta dokázána. □

Věta 4.3. *Je-li sjednocení M spočetného systému měřitelných množin omezená množina, je M měřitelná množina.*

D ů k a z . Nechť omezený otevřený interval I obsahuje množinu M. Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existují otevřené množiny $G_k \supset M_k$ obsažené v I a uzavřené množiny $F_k \subset M_k$ tak, že

$$\mu(G_k) - \mu(F_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Označme $F = \bigcup_k F_k$ a $G = \bigcup_k G_k$. Množina F je uzavřená a množina G je omezená otevřená. Protože $F \subset M \subset G$, je

$$\mu(F) \leq \mu_*(M) \leq \mu^*(M) \leq \mu(G).$$

Je

$$G = F \cup (G - F),$$

všechny tři množiny jsou měřitelné a sjednocení vpravo je disjunktní, takže podle věty 4.2 je

$$\mu(G) = \mu(F) + \mu(G - F),$$

odkud plyne, že

$$\mu(G - F) = \mu(G) - \mu(F).$$

Analogicky je

$$\mu(G_k - F_k) = \mu(G_k) - \mu(F_k)$$

pro každé k. Protože $G - F \subset \bigcup_k (G_k - F_k)$, je

$$\mu(G - F) \leq \sum_k \mu(G_k - F_k),$$

a tedy

$$\mu(G) - \mu(F) \le \sum_{k=1}^{n} (\mu(G_k) - \mu(F_k)) < \varepsilon,$$

takže

$$\mu^*(M) - \mu_*(M) < \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ bylo libovolné, je v důsledku toho

$$\mu^*(M) = \mu_*(M). \quad \square$$

Věta 4.4. *Průnik spočetně mnoha měřitelných podmnožin omezeného intervalu je měřitelná množina.*

D ů k a z . Nechť $M = \bigcap_k M_k$, kde množiny vpravo jsou měřitelné a obsažené v jistém omezeném intervalu I. Uvažme, že

$$M = \bigcap_k M_k = I - (I - \bigcap_k M_k) = I - \bigcup_k (I - M_k).$$

Nyní stačí aplikovat věty 4.1 a 4.3 $\square$

Věta 4.5. *Rozdíl dvou omezených měřitelných množin je měřitelný.*

D ů k a z . Nechť $M = M_1 - M_2$, kde množiny vpravo jsou měřitelné a obsažené v nějakém omezeném intervalu I. Protože

$$M = M_1 \cap (I - M_2),$$

podle vět 4.4 a 4.1 tvrzení platí. $\square$

Důsledkem věty 4.2 je toto tvrzení o míře rozdílu:

Věta 4.6. *Jsou-li množiny M, N měřitelné, je-li množina M omezená a je-li $N \subset M$, je*

$$\mu(M - N) = \mu(M) - \mu(N). \tag{4.5}$$

D ů k a z . Je $M = N \cup (M - N)$, všechny tři množiny jsou měřitelné a sjednocení vpravo je disjunktní. Je tedy $\mu(M) = \mu(N) + \mu(M - N)$, a stačí odečíst od obou stran číslo $\mu(N)$. $\square$

Dokažme nyní větu o monotónních posloupnostech měřitelných množin:

Věta 4.7. *Nechť M_k jsou měřitelné množiny obsažené v nějakém omezeném intervalu I; pak platí:*

1. Je-li posloupnost $\{M_k\}$ neklesající a je-li $M := \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, je $\mu(M) = \lim_{k\to\infty} \mu(M_k)$.

2. Je-li posloupnost $\{M_k\}$ nerostoucí a je-li $M := \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$, je $\mu(M) = \lim_{k\to\infty} \mu(M_k)$.

D ů k a z . Ad 1. Je

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = M_1 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (M_{k+1} - M_k),$$

kde sjednocení za posledním rovnítkem je disjunktní. V důsledku toho je (podle vět 4.2 a 4.6)

$$\begin{aligned}\mu(M) &= \mu(M_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_{k+1} - M_k) = \mu(M_1) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu(M_{k+1}) - \mu(M_k)) \\ &= \mu(M_1) + \lim_{q\to\infty} \sum_{k=1}^{q-1} (\mu(M_{k+1}) - \mu(M_k)) = \lim_{q\to\infty} \mu(M_q).\end{aligned}$$

Ad 2. Nyní je $M \subset M_1$,

$$M_1 - M = \bigcup_{k=1}^{\infty} (M_k - M_{k+1})$$

a sjednocení vpravo je disjunktní, takže

$$\begin{aligned}\mu(M_1) - \mu(M) &= \mu(M_1 - M) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (M_k - M_{k+1})\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_k - M_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu(M_k) - \mu(M_{k+1})) \\ &= \lim_{q\to\infty} \sum_{k=1}^{q-1} (\mu(M_k) - \mu(M_{k+1})) = \mu(M_1) - \lim_{q\to\infty} \mu(M_q),\end{aligned}$$

a stačí upravit. □

Věta 4.8. *Každá omezená spočetná množina je měřitelná a její míra je rovna 0.*

D ů k a z . Každou spočetnou množinu lze napsat jako disjunktní spočetné sjednocení jednobodových množin; nechť tedy $M = \bigcup_k \{x_k\}$, kde body x_k jsou navzájem různé. Protože každá z množin $\{x_k\}$ má míru 0, je podle věty 4.2 množina M měřitelná, přičemž $\mu(M) = \sum_k \mu(\{x_k\}) = 0$. □

Věta 4.9. *Existuje omezená, lebesgueovsky neměřitelná množina.*

D ů k a z . Nechť $x, y \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$. Pišme $x \sim y$, je-li $x - y$ racionální číslo. Zřejmě platí: $x \sim x$; je-li $x \sim y$, je $y \sim x$; je-li $x \sim y$, $y \sim z$, je $x \sim z$. Relace $\sim$ je tedy ekvivalencí ve smyslu obecné teorie množin. Interval $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ se v důsledku zavedení této ekvivalence rozpadá na disjunktní třídy tak, že x, y patří do téže třídy právě tehdy, když $x \sim y$.

Podle axiomu výběru existuje množina $M \subset \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$, která z každé třídy T obsahuje právě jedno číslo; toto číslo označíme x_T. (Ke každému $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ existuje právě jedno $y \in M$ takové, že $x \sim y$.)

Dokažme, že *množina M je neměřitelná*:

Srovnejme množinu $\mathbb{Q} \cap \langle -1, 1 \rangle$ do prosté posloupnosti $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ a označme M_k množinu všech čísel $x + r_k$, kde $x \in M$. Množina M_k vzniká tedy z M posunutím

$$\varphi_k(x) = x + r_k.$$

(Jinak řečeno, je-li $x \in M$, pak $x + r_k \in M_k$, a je-li $x \in M_k$, pak $x - r_k \in M$).

Systém množin M_k je disjunktní. Je-li totiž $x \in M_j \cap M_k$, existují $x' \in M$, $x'' \in M$ tak, že $x = x' + r_j$, $x = x'' + r_k$, takže rozdíl $x' - x'' = r_k - r_j \in \mathbb{Q}$; x', x'' patří tedy do téže třídy. Protože M obsahuje z každé třídy jen jedno číslo, je $x' = x''$, tedy $r_j = x - x' = x - x'' = r_k$ a $j = k$.

Protože míry μ_* a μ^* jsou zřejmě invariantní vůči posunutí, je

$$\mu_*(M_k) = \mu_*(M) = \alpha \tag{4.6}$$

a

$$\mu^*(M_k) = \mu^*(M) = \beta \tag{4.7}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Abychom dokázali, že

$$\beta > 0, \tag{4.8}$$

potřebujeme vědět, že

$$\langle -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} \rangle \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k. \tag{4.9}$$

Každé číslo $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ však leží v některé třídě T; pak je $x \sim x_T$, a existuje tedy $r \in \mathbb{Q}$ tak, že $x - x_T = r$. Protože $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$, $x_T \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$, je $r \in \langle -1, 1 \rangle$, takže r je rovno některému r_k. Z toho plyne, že $x = x_T + r_k$ leží v M_k. Tím je (4.9) dokázáno.

Podle věty 3.5 je

$$1 = \mu^* \langle -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} \rangle \leq \mu^* \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(M_k),$$

tedy

$$1 \leq \beta + \beta + \beta + \cdots,$$

odkud vyplývá (4.8).

Dokažme dále, že

$$\alpha = 0. \tag{4.10}$$

Pro každé k je

$$M_k \subset \langle -\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2} \rangle, \tag{4.11}$$

protože každé $x \in M_k$ má tvar $x = x_0 + r_k$ a $|x_0| \leq \frac{1}{2}$, $|r_k| \leq 1$. V důsledku toho je i

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \subset \langle -\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2} \rangle. \tag{4.12}$$

Ze (4.11), (4.12) a z věty 3.6 vyplývá nerovnost

$$3 = \mu_*\langle -\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\rangle \geq \mu_*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\Big) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_*(M_k),$$

odkud plyne, že

$$\alpha + \alpha + \alpha + \cdots \leq 3,$$

takže

$$\alpha = 0.$$

Porovnáme-li (4.8) a (4.10), vidíme, že je

$$\mu_*(M) < \mu^*(M).$$

Tím je neměřitelnost množiny M dokázána. □

Poznámka 4.1. Kdybychom na začátku rozložili na třídy místo intervalu $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ libovolnou měřitelnou množinu N kladné míry a zopakovali stejný postup, dostali bychom neměřitelnou množinu $M \subset N$. Platí tedy toto tvrzení:

(4.13) *Každá množina kladné míry obsahuje neměřitelnou část.* □

Nyní se krátce zmíníme o měřitelnosti a míře obecných neomezených množin.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ je **měřitelná**, je-li pro každé $n \in \mathbb{N}$ měřitelná množina

$$M \cap \langle -n, n\rangle. \tag{4.14}$$

Mírou neomezené množiny M je číslo

$$\mu(M) := \lim_{n\to\infty} \mu(M \cap \langle -n, n\rangle). \tag{4.15}$$

Protože posloupnost vpravo je neklesající, tato limita vždy existuje; může však být $\mu(M) = +\infty$.

Pro obecné množiny je možné dokázat věty o měřitelnosti a míře sjednocení, průniku a rozdílu podobné těm, které byly výše uvedeny o omezených množinách.

Dokažme například σ-**aditivitu** míry na systému měřitelných množin:

Věta 4.10. *Pro každý spočetný systém disjunktních měřitelných množin* M_k *je*

$$\mu\Big(\bigcup_k M_k\Big) = \sum_k \mu(M_k). \tag{4.16}$$

D ů k a z . Položme

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k.$$

Pak je

$$M \cap \langle -n, n\rangle = \bigcup_{k=1}^{\infty} (M_k \cap \langle -n, n\rangle) \tag{4.17}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$ a

$$\mu(M \cap \langle -n, n\rangle) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_k \cap \langle -n, n\rangle) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_k);$$

odtud plyne limitním přechodem pro $n \to \infty$, že

$$\mu(M) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_k)$$

Obráceně, z (4.17) vyplývá, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ je

$$\mu(M) \geq \sum_{k=1}^{j} \mu(M_k \cap \langle -n, n\rangle.$$

Limitními přechody pro $n \to \infty$ a pak pro $j \to \infty$ dostaneme

$$\mu(M) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_k),$$

čímž je věta dokázána. □

Poznámka 4.2. Abychom dokázali platnost vět 4.6 a 4.7 pro neomezené množiny, musíme do věty 4.6 doplnit předpoklad, že $\mu(N) < +\infty$ a do druhého tvrzení ve větě 4.7 předpoklad $\mu(M_1) < +\infty$, jinak věty *neplatí.* □

Kapitola 5

Míra hustých a řídkých množin

Definice. **Uzávěrem** množiny $M \subset \mathbb{R}$ nazýváme množinu všech bodů $x \in \mathbb{R}$, jejichž každé okolí $U(x)$ obsahuje alespoň jeden bod množiny M. Uzávěr množiny M značíme $\overline{M}$.

Zřejmě je vždy $M \subset \overline{M}$.

Definice. Říkáme, že bod $x \in M$ je **izolovaný bod** množiny $M \subset \mathbb{R}$, existuje-li okolí $P(x)$ tak, že $P(x) \cap M = \emptyset$.

Definice. Říkáme, že bod $x \in \mathbb{R}$ je **hromadný bod** množiny $M \subset \mathbb{R}$, je-li pro každé okolí $U(x)$ množina $U(x) \cap M$ nekonečná. Množina všech hromadných bodů množiny M se nazývá **derivace** množiny M a značíme ji $\operatorname{der} M$.

Věta 5.1. *Pro každou množinu $M \subset \mathbb{R}$ platí:*

$$\overline{M} = M \cup \operatorname{der} M. \tag{5.1}$$

D ů k a z . Je zřejmé, že $M \cup \operatorname{der} M \subset \overline{M}$. Obráceně, je-li $x \in \overline{M}$, je buď $x \in M$ nebo $x \in \overline{M} - M$. Kdyby bod $x \in \overline{M} - M$ neležel v $\operatorname{der} M$, existovalo by okolí $U(x)$, pro které je průnik $U(x) \cap M$ konečný. Protože $x \in \overline{M}$, je neprázdný; protože $x \notin M$, neobsahuje bod x. Je-li složen z bodů $x_1, \dots, x_n$ a je-li $\delta := \min(|x_k - x|;\ 1 \le k \le n)$, je $U(x,\delta) \cap M = \emptyset$. To však odporuje podmínce, že $x \in \overline{M}$. Tím je dokázáno, že $\overline{M} - M \subset \operatorname{der} M$, a zároveň je dokončen důkaz věty.

Dokažme, že platí toto tvrzení:

Tvrzení. *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je uzavřená právě tehdy, když je $M = \overline{M}$.*

D ů k a z . Je-li množina M uzavřená, je množina $N = \mathbb{R} - M$ otevřená. Je-li $x \in \overline{M}$, obsahuje každé okolí $U(x)$ bod množiny M; žádné okolí $U(x)$ není tedy částí množiny N, takže $x \notin N$. Je tedy $x \in M$. Tím je dokázáno, že $\overline{M} \subset M$; protože obrácená inkluze platí vždy, je $M = \overline{M}$.

Obráceně, je-li $M = \overline{M}$ a je-li $x \in N = \mathbb{R} - M = \mathbb{R} - \overline{M}$, existuje okolí $U(x)$ disjunktní s množinou M, tedy obsažené v N. Množina N je tedy otevřená a množina M uzavřená. □

Z právě dokázaného tvrzení a z věty 5.1 vyplývá, že

(5.2) množina M je uzavřená právě tehdy, když $M \supset \operatorname{der} M$.

Definice. Říkáme, že množina M je **hustě rozložená**, jestliže $M \subset \operatorname{der} M$, a **dokonalá**, jestliže $M = \operatorname{der} M$.

Množina je tedy hustě rozložená právě tehdy, když nemá izolované body, a dokonalá právě tehdy, když je navíc uzavřená.

Věta 5.2. *K tomu, aby bod $x \in M$ byl izolovaným bodem uzavřené množiny $M \subset \mathbb{R}$, je nutné a stačí, aby tento bod byl společným krajním bodem dvou různých styčných intervalů množiny M.*

D ů k a z . Je-li bod x společným krajním bodem dvou styčných intervalů (a, x) a (x, b), obsahuje interval (a, b) jen jeden bod množiny M, a to bod x, který je tedy izolovaným bodem.

Obráceně, nechť x je izolovaným bodem množiny M a nechť interval (a, b) neobsahuje kromě bodu x žádný další bod množiny M; intervaly (a, x) a (x, b) jsou tedy obsaženy v množině $N = \mathbb{R} - M$. Podle věty 0.2.3 je interval (a, x), resp. (x, b) částí některé komponenty I', resp. I'' množiny N. Tyto komponenty jsou (dvěma různými) styčnými intervaly množiny M a bod x je jejich společným krajním bodem. □

Důsledek. *K tomu, aby uzavřená množina $M \subset \mathbb{R}$ byla dokonalá, je nutné* *a stačí, aby žádné dva různé styčné intervaly množiny M neměly společný krajní bod.*

Definice. Říkáme, že množina $M \subset N$ je **hustá v** $N \subset \mathbb{R}$, je-li $N \subset \overline{M}$.

Množinou hustou v $\mathbb{R}$ je například množina všech racionálních čísel nebo množina všech iracionálních čísel.

Definice. Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **řídká v** $\mathbb{R}$, jestliže $\overline{M}$ neobsahuje žádný interval.

Jestliže množina M je řídká v $\mathbb{R}$, obsahuje každý interval $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ alespoň jeden bod x, který nepatří do uzávěru množiny M. Pak nějaké okolí bodu x neobsahuje žádný bod množiny M. Platí tedy:

(5.3) *K tomu, aby množina M byla řídká v $\mathbb{R}$, je nutné a stačí, aby každý interval $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ obsahoval interval (α', β') disjunktní s M.*

Elementární příklady ukazují, že doplněk husté množiny může být hustý, např. množina všech iracionálních čísel je doplňkem množiny všech racionálních čísel a přitom jsou obě husté v $\mathbb{R}$. Platí však toto tvrzení:

Věta 5.3. *K tomu, aby uzavřená množina F byla řídká v $\mathbb{R}$, je nutné a stačí, aby množina $\mathbb{R} - F$ byla hustá v $\mathbb{R}$.*

D ů k a z . Označme $G := \mathbb{R} - F$. Je-li F řídká, obsahuje podle (5.3) každý interval, a tedy i každé okolí každého bodu $x \in \mathbb{R}$ body množiny $\mathbb{R} - F = G$, tj. každý bod $x \in \mathbb{R}$ je bodem uzávěru množiny G a množina G je hustá.

Obráceně, nechť G je hustá otevřená množina. Dokážeme, že uzavřená množina $F = \mathbb{R} - G$ je řídká. Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je libovolný interval. Protože G je hustá, existuje v (a, b) bod $x \in G$; protože G je otevřená, existuje interval $(c, d) \subset G$ obsahující bod x. Průnik intervalů (a, b) a (c, d) tím spíše leží v G a je to interval, který neobsahuje žádné body množiny F, takže podle (5.3) je množina F řídká. Tím je věta dokázána. □

Definice. Neprázdné omezené uzavřené řídké dokonalé množiny se nazývají **diskontinua**.

Příklad 5.1. Sestrojme nyní diskontinuum s kladnou mírou. Konstrukce diskontinua má nekonečně mnoho kroků. Nechť

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$$

je prostá posloupnost všech bodů z $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ a buď dáno $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. V prvním kroku položme $n_1 = 1$ a zvolme interval (a_1, b_1) s těmito vlastnostmi:

$$\begin{gathered} r_{n_1} \in (a_1, b_1), \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \\ b_1 - a_1 < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \langle a_1, b_1 \rangle \subset (0,1). \end{gathered}$$

Nechť n_2 je nejmenší index (větší než n_1), pro který je $r_{n_2} \in (0,1) - \langle a_1, b_1 \rangle$. V druhém kroku připojíme interval (a_2, b_2) takový, že

$$\begin{gathered} r_{n_2} \in (a_2, b_2), \quad a_2, b_2 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \\ b_2 - a_2 < \frac{\varepsilon}{2^2}, \\ \langle a_2, b_2 \rangle \subset (0,1) - \langle a_1, b_1 \rangle. \end{gathered}$$

Nechť n_3 je nejmenší index, pro který je $r_{n_3} \in (0,1) - (\langle a_1, b_1 \rangle \cup \langle a_2, b_2 \rangle)$. Ve třetím kroku přidáme interval (a_3, b_3) takový, že

$$\begin{gathered} r_{n_3} \in (a_3, b_3), \quad a_3, b_3 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \\ b_3 - a_3 < \frac{\varepsilon}{2^3}, \\ \langle a_3, b_3 \rangle \subset (0,1) - (\langle a_1, b_1 \rangle \cup \langle a_2, b_2 \rangle). \end{gathered}$$

Obecně: Jsou-li pro některé $k > 1$ sestrojeny disjunktní intervaly $\langle a_j, b_j \rangle$, $1 \leq j < k$, obsažené v intervalu $(0,1)$, s iracionálními krajními body, a splňující nerovnosti $b_j - a_j < 2^{-j}\varepsilon$, nechť n_k je nejmenší index, pro který je $r_{n_k} \in (0,1) - (\langle a_1, b_1 \rangle \cup \dots \cup \langle a_{k-1}, b_{k-1} \rangle)$. V k-tém kroku najdeme interval (a_k, b_k) s těmito vlastnostmi:

$$\begin{gathered} r_{n_k} \in (a_k, b_k), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \\ b_k - a_k < \frac{\varepsilon}{2^k}, \\ \langle a_k, b_k \rangle \subset (0,1) - \bigcup_{j=1}^{k-1} \langle a_j, b_j \rangle. \end{gathered}$$

Je zřejmé, že

$$\mathbb{Q} \cap (0,1) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k); \tag{5.4}$$

protože množina vlevo je hustá v $\langle 0,1\rangle$, je otevřená množina vpravo také hustá v $\langle 0,1\rangle$. Protože intervaly (a_k, b_k) jsou disjunktní, je podle věty 1.2

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \varepsilon. \tag{5.5}$$

Položme

$$\mathcal{D} := \langle 0,1\rangle - \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k). \tag{5.6}$$

Intervaly (a_k, b_k), kde $k \in \mathbb{N}$, spolu s intervaly $(-\infty, 0)$ a $(1, +\infty)$ jsou styčné intervaly množiny $\mathcal{D}$; byly vybrány tak, aby žádné dva neměly společný krajní bod, takže podle důsledku věty 5.2 je množina $\mathcal{D}$ dokonalá. Protože množina $\mathcal{D}$ je uzavřená a $\mathbb{R} - \mathcal{D}$ je hustá otevřená množina, je podle věty 5.3 množina $\mathcal{D}$ řídká. Z toho vyplývá, že množina $\mathcal{D}$ je diskontinuum; jeho míra je (podle definice míry uzavřené omezené množiny) rovna

$$\mu(\mathcal{D}) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) > 1 - \varepsilon. \tag{5.7}$$

Příklad 5.2. (**Cantorovo diskontinuum $\mathcal{C}$.**) Konstrukce Cantorova diskontinua má nekonečně mnoho kroků. Označme J uzavřený interval $\langle 0,1\rangle$. V prvním kroku rozdělíme interval J na tři stejně velké části a označíme $J_0 := \langle 0, \frac{1}{3}\rangle$ a $J_1 := \langle \frac{2}{3}, 1\rangle$. Mezi nimi leží otevřený interval $I := (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. V druhém kroku s každým z uzavřených intervalů J_k, $k = 0, 1$, provedeme totéž, co s intervalem J: rozdělíme J_k na tři stejně dlouhé intervaly a označíme J_{k0}, resp. J_{k1} první, resp. třetí třetinu intervalu J_k. (Bude tedy $J_{00} = \langle 0, \frac{1}{9}\rangle$, $J_{01} = \langle \frac{2}{9}, \frac{1}{3}\rangle$, $J_{10} = \langle \frac{2}{3}, \frac{7}{9}\rangle$, $J_{11} = \langle \frac{8}{9}, 1\rangle$.) Prostřední třetina intervalu J_0 je otevřený interval $I_0 := (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ a prostřední třetina intervalu J_1 otevřený interval $I_1 := (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$.

Pokračujeme v této konstrukci neomezeně dále. Nechť je již sestrojeno 2^n uzavřených intervalů $J_{k_1\dots k_n}$ délky $1/3^n$, kde každý index k_j nabývá hodnot 0 a 1. V dalším kroku každý uzavřený interval $J_{k_1\cdots k_n}$ rozdělíme na tři stejně velké intervaly. Levý krajní uzavřený interval označíme $J_{k_1\cdots k_n 0}$, pravý krajní uzavřený interval bude $J_{k_1\cdots k_n 1}$. Mezi nimi leží otevřený interval $I_{k_1\cdots k_n}$ (prostřední třetina intervalu $J_{k_1\cdots k_n}$) délky $1/3^{n+1}$; těchto intervalů je celkem 2^n.

Je tedy

$$\mu(I_{k_1\cdots k_n}) = \frac{1}{3^{n+1}} \quad \text{a} \quad \mu(J_{k_1\cdots k_n}) = \frac{1}{3^n}. \tag{5.8}$$

Je zřejmé, že platí rovnost

$$J - \bigcup_{n=0}^{p} \bigcup_{k_1=0}^{1} \cdots \bigcup_{k_n=0}^{1} I_{k_1\cdots k_n} = \bigcup_{k_1=0}^{1} \cdots \bigcup_{k_{p+1}=0}^{1} J_{k_1\cdots k_{p+1}}. \tag{5.9}$$

Položme

$$G := \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k_1=0}^{1} \cdots \bigcup_{k_n=0}^{1} I_{k_1\cdots k_n}. \tag{5.10}$$

Protože intervaly $I_{k_1\cdots k_n}$ jsou disjunktní, je

$$\mu(G) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots + \frac{2^n}{3^{n+1}} + \cdots = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1. \tag{5.11}$$

Označme

$$\mathcal{C}_n := \bigcup_{k_1=0}^{1} \cdots \bigcup_{k_n=0}^{1} J_{k_1\cdots k_n} \tag{5.12}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Definice. Cantorovým diskontinuem rozumíme množinu

$$\mathcal{C} := \langle 0,1\rangle - G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n. \tag{5.13}$$

Protože množiny (5.12) jsou uzavřené, platí totéž o $\mathcal{C}$. Z (5.13), z definice míry uzavřené omezené množiny a z 5.11 ihned plyne, že

$$\mu(\mathcal{C}) = \mu(\langle 0,1\rangle) - \mu(G) = 0. \tag{5.14}$$

Styčnými intervaly množiny C jsou právě všechny intervaly $I_{k_1\ldots k_n}$ spolu s intervaly $(-\infty, 0)$ a $(1, +\infty)$. Je zřejmé, že žádné dva různé styčné intervaly množiny C nemají společný krajní bod, a podle důsledku věty 5.2 je tedy množina C dokonalá.

Dále dokažme, že *množina C je řídká v $\mathbb{R}$.*

D ů k a z . Protože množina C je uzavřená, stačí podle věty 5.3 dokázat, že množina $\mathbb{R} - C$ je hustá v $\mathbb{R}$, tj. že každý bod $x \in \mathbb{R}$ leží v uzávěru množiny $\mathbb{R} - C$. Zřejmě stačí vyšetřovat případ, kdy $x \in C$, a dokázat, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ obsahuje okolí $U(x, \varepsilon)$ body z $\mathbb{R} - C$. Buď $n \in \mathbb{N}$ tak velké, že $3^{-n} < \varepsilon$. Protože C_n se skládá z konečného počtu disjunktních uzavřených intervalů délky 3^{-n}, z nichž každé dva různé mají vzdálenost aspoň rovnou 3^{-n}, je vzdálenost každého bodu z C_n (a tedy speciálně každého bodu z C) od sjednocení intervalů, které tvoří doplněk k C_n, menší než $3^{-n} < \varepsilon$. Okolí $U(x, \varepsilon)$ obsahuje tedy body z $\mathbb{R} - C_n$, a tedy i z $\mathbb{R} - C$, což jsme měli dokázat. □

Body Cantorova diskontinua lze snadno charakterizovat i „aritmeticky“, pomocí triadických zlomků:

Věta 5.4. *Platí tato dvě tvrzení:*

1. *$x \in G$ právě tehdy, když v triadickém zlomku $0.k_1k_2\ldots k_n\ldots$ čísla x je některé k_j nutně rovné 1.*

2. *$x \in C$ právě tehdy, když je x rovné dvojnásobku triadického zlomku $0.k_1k_2\ldots k_n\ldots$, v němž je každé k_j rovné buď 0 nebo 1.*

D ů k a z . Je zřejmé, že body intervalu $I = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ mají v triadickém rozvoji *nutně* první cifru 1. Poznamenejme, že krajní body intervalu I mají dva rozvoje

$$\frac{1}{3} = \begin{cases} 0,100000\ldots \\ 0,022222\ldots \end{cases}, \qquad \frac{2}{3} = \begin{cases} 0,200000\ldots \\ 0,122222\ldots \end{cases}.$$

Pro nás je důležité, že každý z těchto bodů má rozvoj, v kterém se vyskytují jen číslice 0 a 2.

Body intervalů I_0 a I_1 mají v triadickém rozvoji sice první cifru různou od 1, ale druhou cifru *nutně* rovnou 1.

V triadickém rozvoji bodů z intervalů I_{00}, I_{01}, I_{10} a I_{11} jsou první dvě cifry různé od 1, avšak třetí cifra je *nutně* 1.

Body intervalů $I_{k_1 \cdots k_n}$, kde každý z indexů k_j nabývá hodnot 0 a 1, mají v triadickém rozvoji prvních $n-1$ cifer různých od 1, ale n-tá cifra je *nutně* rovna 1.

Z toho je patrné, že do sjednocení všech otevřených intervalů I, I_{k_1}, $I_{k_1 k_2}$, $\dots, I_{k_1 \cdots k_n}, \dots$ patří právě všechna čísla $x \in \langle 0,1\rangle$, které mají *některou* triadickou cifru *nutně* rovnou 1. Protože Cantorovo diskontinuum C je doplňkem sjednocení těchto intervalů, skládá se právě ze všech $x \in \langle 0,1\rangle$, v jejichž triadickém zlomku *není nutné* užít cifru 1, tj. které mají triadický rozvoj, v němž jsou všechny triadické cifry rovné buď 0 nebo 2; lze z nich tedy vytknout 2, a dostaneme tvrzení 2. □

Dokažme toto tvrzení:

Tvrzení. *Množina C je nespočetná.*

D ů k a z . Každé číslo $x \in C$ lze podle věty 5.4 vyjádřit pomocí triadického zlomku ve tvaru

$$x = 2 \cdot 0.k_1 \cdots k_n \cdots = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{3^n}, \tag{5.15}$$

kde každé k_n nabývá hodnot 0 a 1. Přiřaďme číslu (5.15) dyadický zlomek

$$f(x) = 0.k_1 \cdots k_n \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{2^n}.$$

Funkce f zřejmě zobrazuje množinu C na množinu všech nekonečných dyadických zlomků s hodnotami v intervalu $\langle 0,1\rangle$. Je tedy $f(C) = \langle 0,1\rangle$. Protože interval $\langle 0,1\rangle$ je nespočetný, je také množina C nespočetná. Tím je tvrzení dokázáno. □

Poznámka 5.1. Všechny spočetné množiny mají podle věty 4.8 míru 0, a to přesto, že mezi nimi jsou i množiny husté v $\mathbb{R}$, jako je např. množina $\mathbb{Q}$.

Otázku, zdali existují nespočetné množiny nulové míry, řeší kladně Cantorovo diskontinuum, které je navíc řídké v $\mathbb{R}$. (Uzavřená množina, která není řídká v $\mathbb{R}$, nemůže mít míru 0, protože obsahuje nějaký interval; to ukazuje, že jsme řídkost množiny $\mathcal{C}$ nemuseli dokazovat přímo.) Další otázkou je, zdali všechna diskontinua mají míru 0, tj. jak dalece je řídkost svázána s mírou. Odpověď je záporná, protože diskontinuum $\mathcal{D}$ sestrojené v příkladě 5.1 je řídká množina s kladnou mírou. Z uvedených příkladů vyplývá, že mezi mírou a řídkostí resp. hustotou množiny není žádná souvislost.

Jak jsme již řekli, mají všechny spočetné množiny míru rovnou 0. Cantorovo diskontinuum $\mathcal{C}$ je nespočetná množina a jeho míra je rovněž rovna 0. Míra tedy nesouvisí ani s počtem prvků množiny. □

Definice. Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **první kategorie v** $\mathbb{R}$, je-li sjednocením spočetně mnoha množin řídkých v $\mathbb{R}$.

Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je **druhé kategorie v** $\mathbb{R}$, není-li první kategorie v $\mathbb{R}$.

V [1] se na str. 134 dokazuje toto tvrzení:

Věta 5.5. *Prostor $\mathbb{R}$ je druhé kategorie v sobě.*

Jinak řečeno: *Jsou-li množiny M_n řídké v $\mathbb{R}$, je $\mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \neq \emptyset$.*

Ještě jinak: *Jsou-li množiny M_n první kategorie v $\mathbb{R}$, je $\mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \neq \emptyset$.*

Příklad 5.3. Každá řídká množina je první kategorie. Množina první kategorie však může být i hustá v $\mathbb{R}$ – příkladem je množina $\mathbb{Q}$. Množina všech iracionálních čísel není první kategorie v $\mathbb{R}$, protože by to odporovalo větě 5.5. Její průnik s intervalem $\langle 0, 1\rangle$ má míru 1. Míru 1 však může mít i množina 1. kategorie obsažená v $\langle 0, 1\rangle$; příkladem může být sjednocení $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$, kde $\mathcal{D}_n$ je diskontinuum sestrojené podle příkladu 5.1 s $\varepsilon = 1/n$, které je tedy obsaženo v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a má míru $> 1 - 1/n$. Doplněk $\langle 0, 1\rangle - \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$ tohoto sjednocení je druhé kategorie, ale má míru 0.

Z toho je patrné, že není žádná souvislost mezi mírou a kategorií.

Závěr

V této práci jsme se seznámili s Lebesgueovou jednorozměrnou mírou a jejími vlastnostmi. Zabývali jsme se především mírou a měřitelností množin omezených, ale zmínili jsme se i o míře a měřitelnosti obecných neomezených množin.

V nulté kapitole se čtenář může seznámit s některými základními pojmy a větami, které se týkají množin reálných čísel, je zde také popsána struktura všech otevřených a uzavřených množin v $\mathbb{R}$. V první a druhé kapitole jsme definovali míru omezených otevřených a uzavřených množin a odvodili jsme některé její vlastnosti. Dokázali jsme, že míra je monotónní, na systému omezených uzavřených množin aditivní a na systému omezených otevřených množin dokonce σ-aditivní. Dále jsme se zabývali Lebesgueovou vnější a vnitřní mírou a jejich vlastnostmi (monotonie, σ-subaditivita vnější míry, σ-superaditivita vnitřní míry). Obsahem další kapitoly jsou lebesgueovsky měřitelné množiny, jejich míra a vlastnosti. Dokázali jsme věty o měřitelnosti a míře sjednocení, průniku a rozdílu omezených množin. Podobné věty je možné dokázat i pro obecné množiny. Zkonstruovali jsme omezenou, lebesgueovsky neměřitelnou množinu v $\mathbb{R}$.

V poslední kapitole jsme uvedli příklady hustých a řídkých množin. Zabývali jsme se tím, zda existuje souvislost mezi mírou a hustotou resp. řídkostí množiny, mezi mírou a kategorií množiny, nebo zda míra souvisí s počtem prvků dané množiny. Jak ukazují uvedené příklady žádná taková souvislost neexistuje. Velmi zajímavým příkladem řídké dokonalé množiny je Cantorovo diskontinuum. Dokázali jsme, že Cantorovo diskontinuum je nespočetná množina, ale jeho míra je rovna nule. Existuje také diskontinuum kladné míry.

Tato práce může sloužit jako učební pomůcka studentům matematiky vysokých škol, ale i čtenářům, kteří se chtějí zabývat teorií míry.

Použitá literatura

[1] Aleksandrov, P. S.: Úvod do obecné theorie množin a funkcí. Praha, NČSAV 1954.

[2] Černý, I.: Elementy teorie Lebesgueovy míry a integrálu. Liberec 1999.

[3] Černý, I.: Matematická analýza 2. část. Liberec 1996.

[4] Černý, I.: Matematická analýza 3. část. Liberec 1996.

[5] Jarník, V.: Diferenciální počet I. Praha, Academia 1984.

[6] Jarník, V.: Diferenciální počet II. Praha, Academia 1984.

[7] Jarník, V.: Integralní počet II. Praha, Academia 1984.

[8] Natanson, I. P.: Těorija funkcij věščestvennoj pěreměnnoj. Moskva 1957.

[9] Vild, J.: Metodické pokyny k diplomovým a závěrečným pracím na Pedagogické fakultě TUL. Liberec 1995.

[10] Lichá, M. - Ulrych, O.: Amstex verze 2.1. Praha, Československé sdružení uživatelů TEXu 1992.