TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií

Interferometrie pro měření více stupňů volnosti zrcadel

Bakalářská práce

M15000137

Studijní program: B3942 – Nanotechnologie
Studijní obor: 3942R002 – Nanomateriály

Autor práce: **Vít Kanclíř**
Vedoucí práce: doc. RNDr. Miroslav Šulc, Ph.D.

Liberec 2018

TECHNICAL UNIVERSITY OF LIBEREC
Faculty of Mechatronics, Informatics
and Interdisciplinary Studies

Interferometry for Measuring Multiple Degrees of Freedom of Mirrors

Bachelor thesis

M15000137

Study programme: B3942 – Nanotechnology
Study branch: 3942R002 – Nanomaterials

Author: **Vít Kanclíř**
Supervisor: doc. RNDr. Miroslav Šulc, Ph.D.

Liberec 2018

Technická univerzita v Liberci
Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií
Akademický rok: **2017/2018**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Vít Kanclíř**
Osobní číslo:	**M15000137**
Studijní program:	**B3942 Nanotechnologie**
Studijní obor:	**Nanomateriály**
Název tématu:	**Interferometrie pro měření více stupňů volnosti zrcadel**
Zadávající katedra:	**Katedra fyziky**

Zásady pro vypracování:

1. Seznamte se se základy laserové interferometrie a jejího použití k měření vzdáleností a poloh.
2. Prostudujte si základy teorie generace strukturovaných optických svazků.
3. Navrhněte experiment pro interferometrická měření poloh zrcadel s více stupni volnosti s užitím strukturovaných svazků.
4. Proveďte měření a analyzujte výsledné interferenční obrazce.
5. Diskutujte možnosti a omezení použití strukturovaných svazků pro určování více stupňů volnosti zrcadel.

Rozsah grafických prací: **dle potřeby dokumentace**

Rozsah pracovní zprávy: **minimálně 50 stran**

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam odborné literatury:

1. **Saleh, B. E. A. - Teich, M.C.: Základy fotoniky I,II , MATFYZPRESS, Praha, 1994-95.**
2. **Hernández-Figueroa H., Zamboni-Rached M., Recami E., Non-Diffracting Waves: An Introduction, 2013, ISBN-13: 978-3527411955.**
3. **Jínová Denisa, "Interferometrie pro určování polohy v 3D", Bakalářská práce, FMIMS, TU v Liberci, 2016.**
4. **Křížek Jan, "Study of non-diffracting beams", Diplomová práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, 2016.**
5. **Z. Bouchal, "Nondiffracting optical beams: physical properties, experiments, and applications", Czechoslov. J. Phys., roč. 53, č. 7, s. 537-578, 2003.**
6. **D. McGloin a K. Dholakia, "Bessel beams: diffraction in a new light", Contemp. Phys., roč. 46, č. 1, s. 15-28, 2005.**
7. **Q. Lv, Z. Zhai, X. Zhu, Z. Xu, a X. Wang, "Interference patterns of two nondiffracting beams", Opt. Commun., roč. 285, č. 6, s. 960-964, 2012.**

Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Miroslav Šulc, Ph.D.**
Katedra fyziky

Datum zadání bakalářské práce: **13. října 2017**

Termín odevzdání bakalářské práce: **14. května 2018**

prof. Ing. Zdeněk Plíva, Ph.D.
děkan

L.S.

Erhart
prof. Mgr. Jiří Erhart, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 13. října 2017

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum: 14. 5. 2018

Podpis: Čančík

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá nedifrakční optikou, speciálně jejím využitím v interferometrii. Teoretická část práce shrnuje základy vlnové optiky a známé informace o nedifrakčních svazcích se speciálním zaměřením na besselovské svazky. Experimentální část zkoumá interferogramy různých stupňů volnosti vzájemných poloh těchto svazků. Svazky jsou v rámci experimentů generovány pomocí axikonu, interference je zkoumána na Michelsonově a na Mach–Zehnderově interferometru. Výsledky měření na Michelsonově interferometru jsou kvalitativní. Výsledky měření na Mach–Zehnderově interferometru jsou částečně kvantitativního charakteru. Zajímavé výsledky jsou v oblasti měření posunu rovnoběžných os svazků.

Klíčová slova

besselovské svazky, strukturované svazky, interferometrie, stupně volnosti zrcadel, Mach–Zehnderův interferometr, Michelsonův interferometr

Abstract

The bachelor thesis deals with non-diffractive optics, specially with its application in interferometry. Theoretic part of the thesis summarizes basics of wave optics and known information about non-diffractive beams with focus on Bessel beams. Experimental part researches various interferograms of different degrees of freedom of mutual positions of the beams. The beams are generated with an axicon, and interference is measured on both Michelson and Mach–Zehnder interferometers. The results of measurements on Michelson interferometer are qualitative. The ones on Mach–Zehnder interferometer are partially quantitative. Interesting results are presented in the part dealing with cone tips offset degrees of freedom.

Key words

Bessel beams, structured beams, interferometry, degrees of freedom of mirrors, Mach–Zehnder interferometer, Michelson interferometer

Poděkování

Chtěl bych poděkovat především panu docentovi Miroslavu Šulcovi za vedení bakalářské práce, cenné rady a velkou dávku trpělivosti. Dále bych rád poděkoval mému konzultantovi panu doktorovi Štěpánu Kuncovi za velmi významnou pomoc při experimentální části práce a za praktické rady. Děkuji také Jirkovi Junkovi za pomoc v laboratoři. Významnou (i když nepřímou) zásluhu na této práci mají všichni mí učitelé ze základní školy a Gymnázia Turnov, především pak učitel matematiky pan Pavel Liška, díky kterému bylo učení matematiky radostí, nikoliv strastí. Dále děkuji učiteli fyziky panu Vladimír Kafka, který ve mně již od nižšího stupně gymnázia probouzel zvídavost. Nesmím také zapomenout na paní Evu Krejčovou, která mě doučovala matematiku v době, kdy jsem s tímto předmětem na nižším gymnáziu bojoval.

Veliké díky patří také kamarádům, díky kterým jsem si udržel úsměv a nadhled i v nejtěžších chvílích – jmenovitě bych chtěl poděkovat spolubydlícím z kolejí Zdendovi a Lukášovi za skvělé a zábavné soužití a především Járovi Grofovi za veškerou kamarádskou pomoc a všechny úžasné společné zážitky, díky kterým se studijní život nikdy nestal stereotypním. Děkuji také celému klubu (z)pátečníků, především Pepovi, Lucasovi a Pekimu za skvělé (nejen páteční) večery. V neposlední řadě děkuji svému (služebně) nejstaršímu kamarádovi Járovi Vondrákovi za celých těch 18 let, co se známe.

Speciální dík patří však rodině, především mamince a tatínkovi za výchovu a nelevné financování studia, sestře Klárce za to, že vždycky vyslechla mé problémy, i když jich sama měla nad hlavu, bráchovi Honzovi za ochotnou manuální výpomoc, kdykoliv byla potřeba, babičce za moudré rady, dědovi in memoriam za inspirativní intelektuální debaty, švagrovi Ondrovi a švagrové Janě za skvělé obohacení rodiny a závěrem také děkuji synovci Vájovi a neteři Bětce za dětskou radost, kterou dokáží beze zbytku předat.

Obsah

Seznam obrázků

Seznam zkratek

α	radiální vlnový vektor
β	podélný vlnový vektor
B-G svazek	besselovský-gaussovský svazek
BS	svazkový dělič (*beam splitter*)
c	rychlost světla
$\vec{E}$	elektrická intenzita
I	intenzita záření
k	vlnové číslo
$\vec{k}$	vlnový vektor
$\vec{r}$	polohový vektor
r	prostorová vzdálenost
ρ	radiální vzdálenost
ρ_0	poloměr jádra besselovského svazku
t	čas
θ	polovina vrcholového úhlu kužele besselovského svazku
θ_G	úhel divergence gaussovského svazku
Θ_G	celkový divergenční úhel gaussovského svazku
$U(\vec{r}, t)$	vlnová komplexní funkce
(x,y,z)	prostorové souřadnice
$w(z)$	pološířka gaussovského svazku v z
w_0	pološířka gaussovského svazku v pasu svazku (anglicky *Gaussian beam waist radius*)
ω	úhlová frekvence
ZPA	zrcadlo s piezoelektrickým aktuátorem
z_R	Raleighova vzdálenost
$\triangle$	Laplaceův operátor

Úvod

Nedifrakční optika je poměrně nový a dynamicky se rozvíjející obor optiky. Možností vytvoření svazku, který je řešením vlnové funkce a zároveň vykazuje neměnný příčný profil při šíření prostorem, se poprvé zabýval J. Durnin [11] v roce 1987. Na tuto svoji čistě teoretickou práci navázal ještě ten samý rok prací [9], v které navrhl experiment generující tyto svazky. Od té doby se tato nevybádaná oblast fyziky začala vyvíjet. Dnes existuje po celém světě řada pracovišť, kde jsou nedifrakční svazky zkoumány. V Česku je takových pracovišť hned několik: Univerzita Palackého v Olomouci, VUT v Brně a TUL v Liberci, která úzce spolupracuje s dalším pracovištěm – Ústavem fyziky plazmatu, oddělení TOPTEC.

Cílem bakalářské práce je seznámení s interferometrií, s generováním strukturovaných optických svazků a navrhnutí experimentů, pomocí kterých by bylo možné měřit různé stupně volnosti zrcadel. Měření byla realizována a diskutována.

Bakalářská práce v první kapitole shrne teoretické základy vlnové optiky, na kterých se staví v dalších kapitolách. Druhá kapitola se věnuje speciálně nedifrakčním svazkům, resp. pseudonedifrakčním svazkům, jejich popisem, generováním, využitím a jedinečným vlastnostem včetně porovnání s laserovými (gaussovskými) svazky. Závěr druhé kapitoly je věnován popisům jednotlivých stupňů volnosti měřených v experimentální části. Třetí kapitola se věnuje jednotlivým experimentům tak, jak byly postupně realizovány. Měřeno bylo Michelsonovým a Mach–Zehnderovým interferometrem, z nichž druhý jmenovaný má pro výsledky práce mnohem větší význam. Experimenty jsou zaměřeny na měření jednotlivých stupňů volnosti vzájemných poloh besselovských svazků. Jsou prezentována naměřená data, snímky interferogramů a jejich vyhodnocení. Vyhodnocení jsou z větší části kvalitativní, částečně i kvantitativní. U složitějších problémů je vždy naznačen postup, kterým by se výzkum mohl dál ubírat, u problematických experimentů návod k úspěšnějšímu řešení. Čtvrtá kapitola se zabývá analytickou geometrií kuželů, která může být užitečná při dalším studiu nedifrakčních svazků.

1 Teoretický úvod

Tato kapitola shrnuje základní teoretické poznatky, které souvisejí s hlavním tématem bakalářské práce. Jedná se hlavně o vlnovou optiku a jevy z ní vyplývající. Je použit skalární popis – jevy, pro které je potřebný vektorový popis, nehrají v rámci práce důležitou roli.

1.1 Vlnová rovnice

Z duální povahy světla vyplývají jeho vlnové vlastnosti. Světlo je elektromagnetickým vlněním s vlnovými délkami 390–760 nm. Funkce popisující světlo proto musí být řešením vlnové rovnice, která vyplývá z Maxwellových rovnic. Uvažujeme-li šíření světla ve vakuu, vlnovou rovnici můžeme psát ve tvaru

$$\triangle U(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1.1}$$

kde $U(\vec{r},t)$ je vlnová funkce popisující elektromagnetické vlnění (možné zaměnit $U(\vec{r},t) = E(\vec{r},t)$) a $\triangle$ je Laplaceův operátor. Omezíme-li se na harmonické a monochromatické vlnění, získáme vlnovou funkci závislou pouze na prostorových souřadnicích.

$$U(\vec{r},t) = u(\vec{r})e^{-i\omega t}. \tag{1.2}$$

Dosazením (1.2) do (1.1) získáme

$$\triangle u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = 0, \tag{1.3}$$

kde $k = \omega/c$ je vlnové číslo. Rovnice (1.3) se nazývá Helmholtzova nebo také stacionární vlnová rovnice.

1.2 Elementární vlny

Nejjednodušším řešeními Helmholtzovy rovnice jsou tzv. elementární vlny – sférické a rovinné vlny. Jsou to modelové vlny, které reálně neexistují, mohou však za jistých podmínek sloužit jako dobrá aproximace reálným vlnám. Mezistupněm mezi sférickou a rovinnou vlnou je vlna parabolická.

1.2.1 Rovinná vlna

Rovinná vlna je dobrou aproximací vln, které jsou daleko od zdroje. Rovnice pro rovinnou vlnu má tvar

$$u(\vec{r}) = A\exp(-i\vec{k}\vec{r}), \tag{1.4}$$

kde A je komplexní konstanta zvaná komplexní obálka a vektor $\vec{k}$ je vlnový vektor. Velikostí vlnového vektoru je vlnové číslo k.

1.2.2 Sférická vlna

Sférická vlna je dobrou aproximací vln blízkých zdroji. Rovnice sférické vlny vypadá

$$u(\vec{r}) = \frac{A}{r}\exp(-ikr), \tag{1.5}$$

kde r je vzdálenost od počátku a k je vlnové číslo.

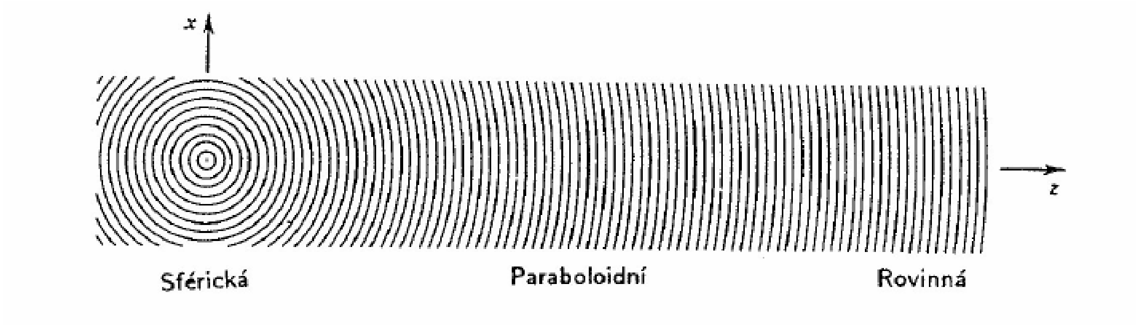
1.2.3 Parabolická vlna

Máme-li zdroj vlnění v počátku a zkoumáme-li vlnu blízko osy propagace (z) daleko od počátku, tedy $x^2 + y^2 \ll z$, lze vlnu aproximovat tzv. parabolickou vlnou (používá se i pojem Fresnelovo přiblížení sférické vlny). Platí-li $(x^2 + y^2)^2 \ll 4\lambda z^3$, parabolická vlna má komplexní amplitudu

$$U(\vec{r}) = \frac{A}{z}\exp(-ikz)\exp\left(-ik\frac{x^2 + y^2}{2z}\right), \tag{1.6}$$

což je rovnice (1.5), kam bylo za r dosazeno $r = z$ v amplitudě a ve fázi bylo dosazeno

$$r = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}, \tag{1.7}$$



Obrázek 1.1: Přechod sférické vlny do parabolické a dále se zvyšujícím se z do vlny rovinné. [2]

což je výsledek Taylorova rozvoje

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z\left(1 + s^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx z\left(1 + \frac{s^2}{2}\right) = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}, \tag{1.8}$$

kde bylo použito substituce $s^2 = \frac{x^2+y^2}{z^2}$ [2]. Je-li z hodně vysoké, parabolická vlna přechází do rovinné vlny. S nízkým z přechází do vlny sférické (viz obrázek 1.1).

1.3 Princip superpozice a interference

Popisujeme-li šíření světla v prostředí, které je lineární (v nemagnetickém prostředí se jedná hlavně o linearitu závislosti polarizace P na elektrickém poli), platí princip superpozice [17]. Tj. pokud funkce $U_1, U_2, ..., U_n$ jsou řešeními vlnové rovnice, potom bude řešením i jejich součet

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i. \tag{1.9}$$

Výše zmíněné neplatí v tzv. nelineárních prostředích, kde optické vlastnosti takového prostředí závisí na elektrickém poli – potažmo na intenzitě záření. Takováto prostředí nebudou v rámci práce brána v úvahu, nebude-li psáno jinak.

Interference je přímým důsledkem principu superpozice a vnímání světla, kdy jsme schopni detekovat intenzitu záření (lidské oko, CCD čidla) – nikoliv intenzitu elektrickou. Při setkání dvou vln v prostoru dojde k sečtení jejich elektrických intenzit, jelikož platí rovnice (1.9). Zároveň pro intenzitu platí

$$I \sim \langle UU^* \rangle. \tag{1.10}$$

Pokud dojde ke složení dvou vln, výsledná intenzita je rovna

$$I = I_1 + I_2 + U_1 U_2^* + U_2 U_1^* = I_1 + I_2 + 2\mathrm{Re}\{U_1 U_2\} \tag{1.11}$$

kde $2\mathrm{Re}\{U_1 U_2\}$ je interferenční člen. Předpokládáme-li interferenci dvou rovinných monochromatických vln, lze přepsat vztah (1.11)

$$I(\vec{r}) = I_1 + I_2 + 2U_1 U_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1), \tag{1.12}$$

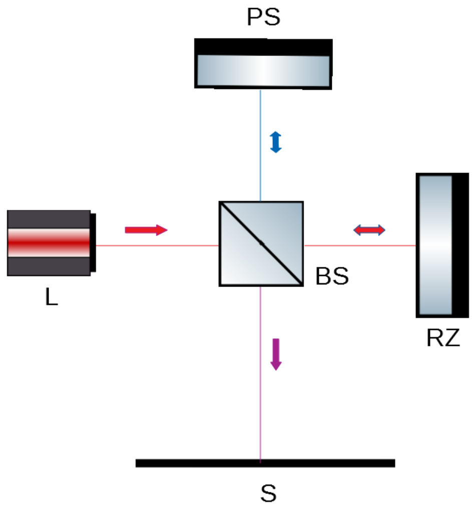
kde Φ je fáze vlny [17]. Ze vztahu (1.12) vyplývá, že pokud se dvě vlny setkají ve fázi, tj. $\Phi_2 - \Phi_1 = 0$, dojde k zesílení výsledné vlny – konstruktivní interference. Setkají-li se v protifázi, tj. $\Phi_2 - \Phi_1 = \pi$, dojde k zeslabení výsledné vlny – destruktivní interference. Konstruktivní interferenci odpovídá situace, kdy dráhový rozdíl interferujících svazků je celočíselným násobkem vlnové délky; destruktivní interferenci odpovídá dráhový rozdíl lichého násobku poloviny vlnové délky.

1.3.1 Interferometrie

Interferometrie zahrnuje mnoho metod velmi přesných měření založených na interferenci světla. Přístroje využívající interferenci k měření se nazývají interferometry. Ty se dají použít k měření délek (interferenční komparátory), k určení jemné struktury spektrálních čar (interferenční spektroskopy) nebo k měření indexů lomů u plynů a kapalin (interferenční refraktometry) [20].

Využití interferometrie je velmi široké, využívá se v téměř všech přírodovědných a technických odvětvích od astronomie přes kvantovou mechaniku, optometrii, plasmovou fyziku až po oceánografii nebo seismologii.

Ukázkou významnosti interferometrie je projekt LIGO (Laser Interferometr Gravitational Wave Observatory), který zkoumá gravitační vlny. Interferometr LIGO je obrovský Michelsonův interferometr tvořený dvěma na sebe kolmými rameny o délce 4 km. Ve vakuu jsou v nich vyslány identické laserové svazky, ty se na konci ramen odrazí od zrcadel a v místě styku spolu interferují. V případě prostředí bez gravitačních vln by se svazky měly potkat ve fázi. V reálu se však potkají fázově posunuté z důvodu nepatrné změny délky ramen, což je důsledek průchodu gravitační vlny. Interferometr je schopen měřit změnu vzdálenosti v řádu 10^{-18} m [4]. Dne 14. září 2015 toto zařízení poprvé přímo detekovalo gravitační vlny, což dalo další potvrzení Einsteinově obecné teorii relativity.



Obrázek 1.2: Schéma Michelsonova interferometru s naznačením cesty svazku. L – laser, BS – svazkový dělič, RZ – referenční zrcadlo, PS – posuvné zrcadlo, S – stínítko.

Existuje velké množství různých interferometrů. Nejjednodušším interferometrem je Michelsonův interferometr, dalšími významnými interferometry jsou Mach–Zehnderův interferometr a Sagnacův interferometr. V rámci práce byl použit Michelsonův a Mach–Zehnderův interferometr.

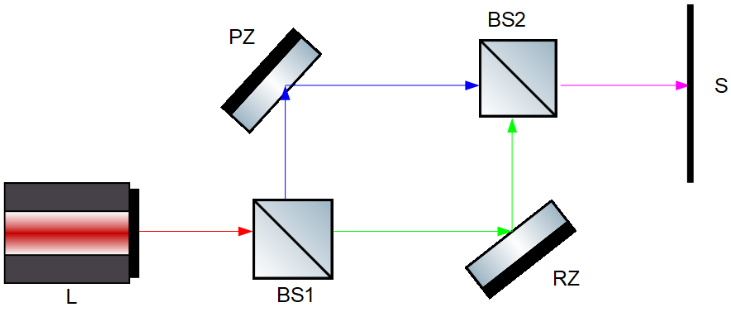
Michelsonův interferometr

Michelsonův interferometr je nejjednodušší druh interferometru. V nejzákladnějším sestavení se skládá ze zdroje (laseru), dvou zrcadel (z toho jedno je pohyblivé), svazkového děliče a detektoru (obrázek 1.2).

Michelsonův interferometr byl vůbec prvním vynalezeným interferometrem. Byl vynalezen Albertem Michelsonem v roce 1881. Významnou roli v historii fyziky sehrál o šest let později v roce 1887 při slavném Michelson–Morleyově experimentu, který měl dokázat existenci éteru. Výsledkem experimentu bylo nakonec konstatování, že rychlost světla je konstantní ve všech směrech a že je nezávislá na rychlosti pohybu zdroje světla. Tento výsledek se v konečném důsledku stal postulátem Einsteinovy teorie relativity.

Mach–Zehnderův interferometr

V Mach–Zehnderově interferometru svazky prochází danou dráhou vždy pouze jednou, což je rozdíl oproti Michelsonově interferometru. Na prvním děliči se svazky



Obrázek 1.3: Schéma základního rozestavění Mach–Zehnderova interferometru. Laser (L) produkuje laserový paprsek, který dopadá na první dělič (BS1), kde se paprsek rozdělí na referenční (zelený) a předmětový (modrý). Referenční se odráží od pevného referenčního zrcátka (RZ), předmětový od posuvného zrcátka (PZ). Svazky se setkávají v druhém děliči (BS2), kde interferují. Interferující paprsek (fialový) dopadá na stínítko (S).

rozpojí na referenční a předmětový, prochází rozdílnou cestou a na konci se v děliči opět setkají a interferují (obrázek 1.3). Výhodou Mach–Zehnderova interferometru je možnost měřit vzdálenější objekty – třeba objekty produkující teplo. Díky rozdílným cestám referenčního a předmětového svazku existuje možnost svazky (nebo jeden z nich) přetvářet. Lze tak zkoumat interferenci různých druhů svazků – např. interference gaussovského a besselovského svazku.

1.4 Gaussovský svazek

1.4.1 Popis gaussovského svazku

Gaussovský svazek je osově symetrický monochromatický svazek, jehož intenzita ubývá od osy svazku se vzdáleností podle funkce $\exp(-\rho^2/a)$, kde ρ je radiální vzdálenost od středu svazku a a je konstanta. Gaussovské svazky popisují vlastnosti svazků generovaných lasery [1]. Funkce komplexní amplitudy vlny má tvar [12]

$$U(r) = U_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(\frac{-\rho^2}{w(z)^2}\right) \exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} - i\Phi(z)\right), \tag{1.13}$$

kde U_0 je amplituda svazku, $w(z)$ je gaussovská šířka svazku v místě z, což je vzdálenost od osy svazku, pro kterou poklesne amplituda pole na $1/e$ (v této oblasti se šíří 86 % výkonu); w_0 je pološířka svazku v pasu svazku (anglicky *beam waist*) ($z = 0$), zde je pološířka svazku nejmenší a intenzita největší. Tvar gaussovského svazku o dané vlnové délce λ je beze zbytku určen právě parametrem w_0. Stejně tak jsou pomocí w_0 určeny další parametry popisující geometrii gaussovského svazku – Rayleighova vzdálenost z_R a divergence svazku θ_G (viz dále) [3]. Exponenciála s reálným argumentem vyjadřuje gaussovský pokles velikosti amplitudy pole ve svazku s rostoucí vzdáleností ρ od osy svazku. Další fázové členy představují (postupně zleva) náběh fáze při šíření odpovídající rovinné vlně, zakřivení vlnoplochy odpovídající kulové vlně o poloměru $R(z)$

$$R(z) = z\left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right) \tag{1.14}$$

a poslední je tzv. Guoyův efekt $\Phi(z)$, který představuje dodatečný náběh fáze na ose (rozdíl oproti rovinné vlně): [17]

$$\Phi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \tag{1.15}$$

Rayleighova vzdálenost je vzdálenost na ose svazku od pasu k místu, kde je plocha svazku rovna dvojnásobku plochy svazku v pasu. Matematicky zapsáno $w(z_R) = \sqrt{2}w_0$. Pro Raleighovu vzdálenost platí vztah

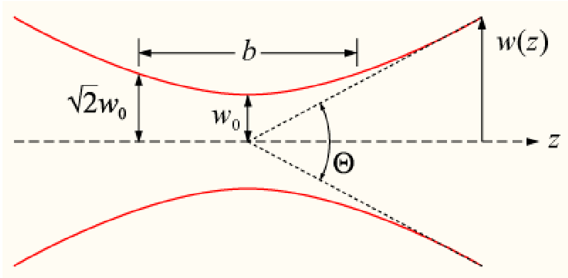
$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \tag{1.16}$$

Vzdálenost $2z_R$ se nazývá ohnisková hloubka nebo také konfokální parametr gaussovského svazku.

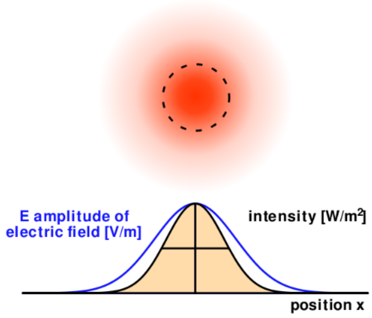
Dalším parametrem popisujícím geometrii gaussovského svazku je rozbíhavost neboli divergence svazku θ_G nebo také celkový divergenční úhel gaussovského svazku Θ_G, které jsou ve vzájemném úzkém vztahu $\Theta_G = 2\theta_G$. Pro divergenci svazku platí vztah

$$\theta_G = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \tag{1.17}$$

Očividně svazky užší ve svém pasu mají větší divergenci a naopak. Chceme-li tedy získat dobře kolimovaný svazek, musíme pracovat s kratší vlnovou délkou a větším středovým poloměrem [2]. To je jednou z motivací nedifrakčních svazků, kterým se věnuje následující kapitola – získat úzký svazek, který nediverguje.



Obrázek 1.4: Šíření gaussovského svazku: podélný řez svazkem s vyznačenými parametry. [3]



Obrázek 1.5: Příčný profil intenzity gaussovského svazku [3].

Všechny představené geometrické parametry gaussovského svazku jsou zobrazeny na obrázku 1.4.

1.4.2 Intenzita gaussovského svazku

Pro intenzitu platí obecně (1.10), dosazením (1.13) získáme tvar

$$I(\rho, z) = I_0 \frac{w_0^2}{w^2(z)} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right) \tag{1.18}$$

kde $I_0 = |E_0|^2$. Na ose svazku má intenzita tvar

$$I(0, z) = I_0 \frac{w_0^2}{w^2(z)} = \frac{I_0}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}, \tag{1.19}$$

tedy svazek má maximální intenzitu I_0 v místě pasu svazku. V Raleighově vzdálenosti dosahuje $\frac{1}{2}I_0$. Ve větších vzdálenostech klesá intenzita svazku s kvadrátem vzdálenosti. Příčné rozložení intenzity svazku je na obrázku 1.5 včetně vlnové funkce a intenzity.

2 Nedifrakční optika

Difrakce je jev způsobující šíření světla do míst geometrického stínu. Jev je nejvíce patrný, pokud štěrbina, přes kterou svazek prochází, je velikostně porovnatelná s vlnovou délkou. Difrakce také způsobuje prostorovou rozbíhavost laserového svazku, což má negativní dopad v těch odvětvích optiky, kde je potřeba zachovat příčný profil pulzů a svazků, např. bezdrátová komunikace, tvoření obrazů, optická litografie, elektromagnetické pinzety [7].

Je tedy na místě hledat způsoby, které by tento jev omezily na únosnou mez. V roce 1987 přišel J. Durnin s přelomovou prací [11], v které představil vlnovou funkci, která řeší vlnovou rovnici a zároveň zachovává při šíření svůj příčný profil. V ten samý rok provedl experiment, kterým svoji teorii potvrdil a nastartoval tak nový směr ve výzkumu optiky [9].

2.1 Přehled nedifrakčních svazků

V sekci 1.1 byla z obecné vlnové rovnice odvozena Helmholtzova rovnice (1.3). Mluvíme-li o nedifrakčním svazku, myslíme tím svazek, jehož vlnová funkce nezávisí na souřadnicích osy kolineární se směrem propagace svazku. Taková funkce bude mít tvar

$$a(x, y, z) = u(x, y) \exp(-i\beta z) \tag{2.1}$$

kde β je podélná konstanta. Dosazením (2.1) do (1.3) a řešením této rovnice metodou separace proměnných v různých souřadných systémech dospějeme k různým svazkům [18].

Řešením v kruhových cylindrických souřadnicích jsou Besselovy rovnice – vznikají tak besselovské svazky (obrázek 2.1). Pro praktické využití se jedná o nejzajímavější svazky, které budou využívány v experimentální části práce.

Řešením Helmholtzovy rovnice v eliptických cylindrických souřadnicích jsou Mathieuovy rovnice – vznikají Mathieuovy svazky, které mají podobu soustředných elips (obrázek 2.2).

Obrázek 2.1: Intenzivní profil besselovského svazku (a) besselovský svazek nultého řádu (b) druhého řádu. [18]

Obrázek 2.2: Intenzitní profily Mathieuových svazků nultého řádu. [18]

Řešení v parabolických souřadnicích dává další druh nedifrakčního svazku – parabolické svazky (obrázek 2.3)

2.2 Besselovské svazky

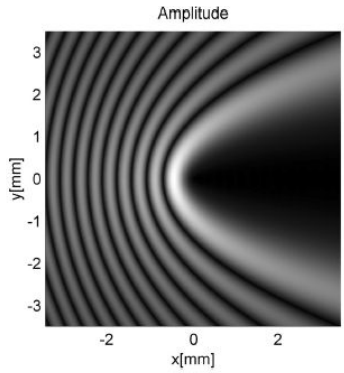
2.2.1 Odvození besselovského svazku z Helmholtzovy rovnice

Řešení Helmholtzovy rovnice hledáme metodou separace proměnných v kruhových válcových souřadnicích. (Pro tyto souřadnice platí $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$.) Pro takové řešení předpokládáme tvar

$$a(r,\varphi,z) = R(r)\Phi(\varphi)\exp(-i\beta z), \tag{2.2}$$

kde $\Phi(\varphi)$ je periodická funkce popisující závislost příčného profilu svazku ve tvaru

$$\Phi(\varphi) = \exp(im\varphi), \qquad m = 0,1,2,\dots\,. \tag{2.3}$$



Obrázek 2.3: Parabolické svazky [14].

Dosazením (2.2) a (2.3) do Helmholtzovy rovnice (1.3) získáme Besselovu rovnici [22]

$$\frac{\mathrm{d}^2R(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r} + \alpha^2 R(r)\left(1 - \frac{m^2}{\alpha^2 r^2}\right) = 0, \tag{2.4}$$

kde $\alpha^2 = k^2 - \beta^2$. Řešením této rovnice je lineární kombinace Besselovy funkce m-tého řádu prvního druhu (J_m) a Neumannovy funkce m-tého řádu N_m. Neumannova funkce představuje nefyzikální řešení, uvažujeme tedy pouze Besselovu funkci. [18] Výsledné pole má tvar

$$a(r, \varphi, z) = J_m(\alpha r)\exp(im\varphi - i\beta z) \tag{2.5}$$

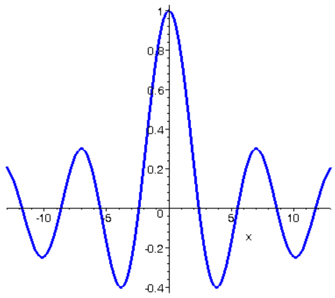
a nazývá se besselovský svazek. Obecný tvar Besselovy funkce je

$$J_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(m+k+1\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \tag{2.6}$$

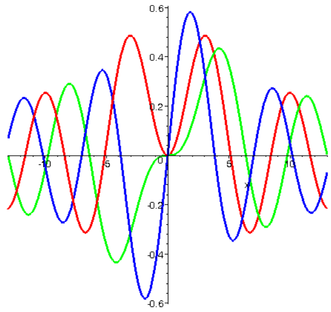
kde Γ je gamma funkce. Rovnice (2.6) platí obecně pro $m \in \mathbb{R}$. Pro $m = 0, 1, 2, \ldots$ můžeme vyjádřit Besselovu funkci v integrálním tvaru

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\theta - n\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{2.7}$$

Pro představu jsou přiloženy grafy Besselovy funkce nultého řádu (obrázek 2.4) a Besselových funkcí prvního, druhého a třetího řádu (obrázek 2.5). Z grafů funkcí můžeme vyčíst také intenzitní profil besselovského svazku. Umocníme-li funkce na druhou, získáme příčný profil intenzity světla. Můžeme tak porovnat s obrázkem 2.1, kde v případě nultého řádu je střed v maximu (Besselova funkce nultého řádu má



Obrázek 2.4: Graf Besselovy funkce nultého řádu.[16]



Obrázek 2.5: Graf Besselovy funkce prvního řádu (modře), druhého řádu (červeně) a třetího řádu (zeleně). [16]

v nule globální maximum) a v případě druhého řádu má střed v minimu (hodnota Besselovy funkce druhého řádu v nule $J_2(0) = 0$).

2.2.2 Integrální tvar besselovského svazku

Řešení Besselovy funkce lze zapsat v integrálním tvaru [18, 11]

$$U(\vec{r}, t) = \exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right] \int_0^{2\pi} \exp\left[i\alpha\left(x\cos\phi + y\sin\phi\right)\right] \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}, \tag{2.8}$$

kde

$$\alpha = k\sin\theta \tag{2.9}$$

a

$$\beta = k\cos\theta. \tag{2.10}$$

Výraz v integrálu popisuje tzv. úhlové spektrum, což je rozvoj pole v řadu rovinných vln s různými amplitudami a směry šíření. Vlnové vektory $\vec{k}$ leží v tomto případě na kuželové ploše s vrcholovým úhlem θ. Pokud $\alpha = 0$, vrcholový úhel θ je roven nule a besselovský svazek tak přechází na rovinnou vlnu. V opačném extrémním případě $\theta = \frac{\pi}{2}$, tedy $\alpha = k$, je šířka centrálního bodu minimální – o přibližném průměru $\frac{3\lambda}{4}$ [11]. V tomto případě má však besselovský svazek nulový dosah.

Připodobnění besselovského svazku k plášti kužele je velmi užitečné, především pak při popisu interference dvou takových svazků.

2.3 Pseudonedifrakční svazky

Nedifrakční svazky jsou pouze matematickým konstruktem, které nemohou odpovídat skutečnosti. Je to dáno tím, že funkce popisující tyto svazky nejsou kvadraticky integrabilní, tedy energie potřebná na jejich generaci by byla nekonečná. Je to dáno příčným poklesem intenzity, která je úměrná $1/\rho$ [11]. Dobrým experimentálním přiblížením nedifrakčních svazků jsou tzv. pseudonedifrakční svazky. Takové svazky jsou příčně omezeny funkcí, která klesá úměrně s $1/\rho^2$ nebo rychleji a zajistí tak konečnost energie [18]. Pseudonedifrakční svazky zachovávají základní charakteristiku nedifrakčních svazků – neměnnost příčného profilu při šíření svazku, ale pouze po omezený prostor z_{max}. Ten je pak určen použitou aparaturou, která daný svazek generuje (viz dále).

2.3.1 Besselovský-gaussovský svazek

Pseudonedifrakční svazek podobající se besselovskému se nazývá besselovský-gaussovský svazek (dále jen B-G svazek). Zatímco u besselovského svazku platí tvrzení, že se jedná o superpozici rovinných vln, jejichž vlnové vektory leží na povrchu kužele (viz podsekci 2.2.2), tak B-G svazky jsou tvořeny superpozicí gaussovských svazků, jejichž osy jsou rovnoměrně rozmístěny na povrchu kužele. Chování B-G svazku je určeno dvěma proti sobě jdoucími faktory:

- Když zvětšujeme vrcholový úhel kužele 2θ (tedy úhel os jednotlivých gaussovských svazků), snižujeme dosah překryvu těchto svazků – který tvoří B-G svazek [8]. B-G svazek je tedy kratší, avšak má užší poloměr středové části svazku [12].

- Velikost stopy gaussovského svazku roste se z, a tak se jednotlivé svazky ležící na povrchu kužele spíš překryjí. Tudíž s větší divergencí dílčích gaussovských svazků θ_G (definováno rovnicí (1.17)) se zvyšuje dosah B-G svazku.

Překryv je ve vzdáleném poli dán poměrem těchto dvou úhlů. Do poměrů jsou dosazeny rovnice (1.17) pro θ_G, θ je vyjádřena ze vztahu (2.9):

$$\frac{\theta}{\theta_G} = \frac{\pi w_0}{\lambda} \arcsin\left(\frac{\alpha}{k}\right) \simeq \frac{\alpha w_0}{2}, \tag{2.11}$$

kde poslední aproximace platí pro malé úhly θ [8].

Pokud je poměr menší než jedna, dílčí gaussovské svazky se překrývají i v dalekém poli ($z \to \infty$). Mohlo by se tedy zdát, že každý příčný průřez B-G svazku bude připomínat nedifrakční svazek. Při bližším pohledu však při poměru menším než jedna bude pološířka pasu dílčích gaussovských svazků menší než poloměr středové části (jádra) B-G svazku ρ_0, který je dán vztahem

$$\rho_0 = \frac{2{,}405}{\alpha} \cong 0{,}382 \frac{\lambda}{\sin\theta}. \tag{2.12}$$

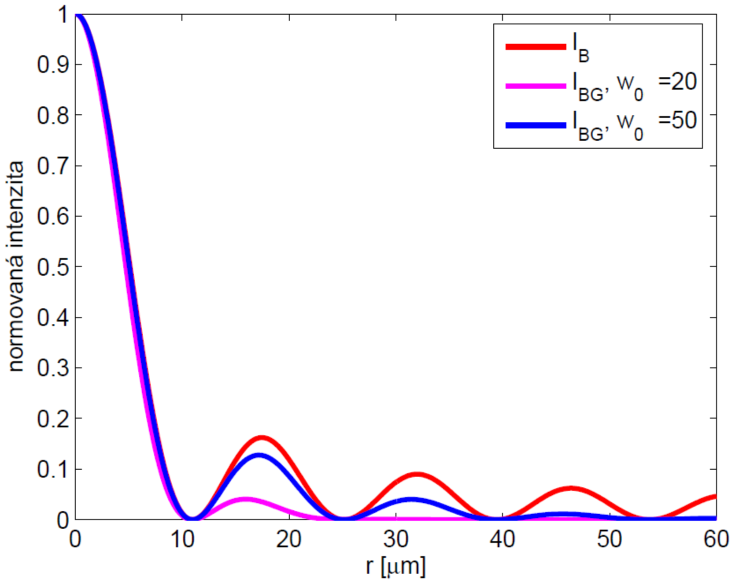
Z toho vyplývá, že vnější oscilace funkce J_0 jsou silně tlumené a ve skutečnosti je příčný průřez B-G svazku velmi podobný gaussovskému svazku [8].

V opačném případě, kdy je poměr větší než jedna, bude ve vzdáleném poli jádro prakticky nepatrné. Dílčí gaussovské svazky se budou skládat od $z = 0$ po $z = z_{max}$ – tato oblast je považována za zónu existence nedifrakčního svazku. Přesně je zóna existence B-G svazku definována jako vzdálenost od roviny pasu, na které intenzita poklesne na hodnotu $1/e^2$. Pro tuto vzdálenost platí

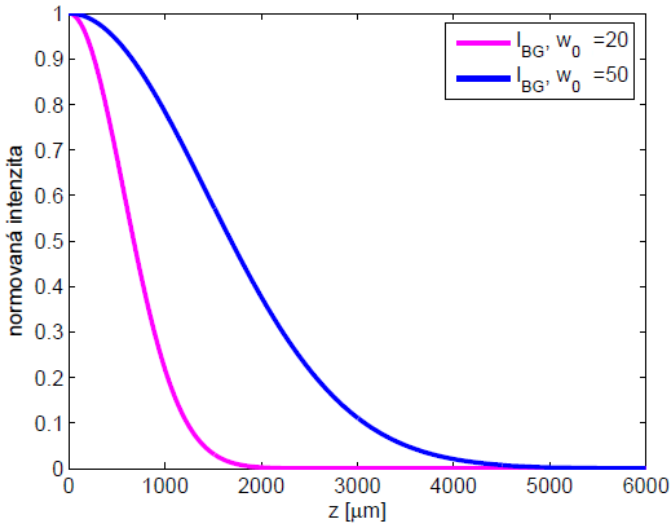
$$z_{max} = \frac{w_0}{\sin\theta} = \frac{w_0 k}{\alpha}. \tag{2.13}$$

Je tedy možné měnit dosah svazku změnou pološířky pasu gaussovské obálky (obrázek 2.7) [18].

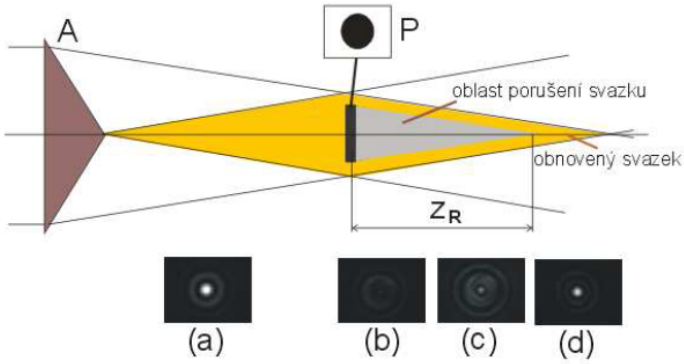
Dohoda: Z této kapitoly plyne, že besselovský svazek neexistuje, existují pouze B-G svazky (a jiné pseudonedifrakční svazky). Pro přehlednost práce bude nadále používán pojem besselovské svazky i ve smyslu B-G svazku, a to i v experimentální části (kde by se z logiky věci o besselovském svazku v pravém slova smyslu mluvit nedalo). Pro zdůraznění, že se jedná o matematické besselovské svazky, bude použito sousloví ideální besselovský svazek. Tato terminologie je běžná v odborné literatuře.



Obrázek 2.6: Příčný intenzitní profil besselovského a B-G svazku při různém parametru pološířky gaussovské obálky (20 a 50 μm). Poloměr jádra svazků je 10 μm. Je vidět, že v blízkosti osy svazku se B-G paprsek chová velmi přesně jako besselovský. Intenzita v dalších maximech klesá mnohem rychleji a zaručuje tak kvadratickou integrabilitu B-G svazku. [18]



Obrázek 2.7: Podélný pokles intenzity B-G svazku pro různé parametry pološířky gaussovské obálky (20 a 50 μm). [18]



Obrázek 2.8: Nedifrakční svazek (generovaný axikonem) je přerušen neprůhlednou překážkou a znovuobnoven ve vzdálenosti z_v. [18]

2.4 Vlastnosti nedifrakčních svazků

Oproti obyčejným svazkům mají nedifrakční svazky specifické vlastnosti.

První vlastností je invariantnost příčného intenzitního profilu, a to jak u nedifrakčních, tak u pseudonedifrakčních svazků – rozdíl je pouze v dosahu, jak bylo již zmíněno v podsekci 2.3.1. Vzdálenost, po které zůstává příčný intenzitní profil invariantní, závisí na použité metodě generace svazku a může při použití moderních metod generace udržet světlé jádro s šířkou do 5 mm až do vzdálenosti 200 m [12]. Je dobré zdůraznit, že se nemění příčný intenzitní profil (tedy poměry intenzit jednotlivých maxim – kruhů), velikost intenzity pseudonedifrakčních svazků se s podélným posuvem mění [18].

Další velmi zajímavou vlastností nedifrakčních svazků je jejich schopnost obnovování profilu za neprůhlednou překážkou. Jak již bylo popsáno, ideální besselovské svazky vznikají jako superpozice rovinných vln, jejichž vlnové vektory leží na povrchu kužele. Vloží-li se do cesty takovému svazku překážka, po nějaké vzdálenosti z_v se rovinné vlny opět složí a znovuobnoví svazek (obrázek 2.8). Pro vzdálenost z_v platí (z geometrie)

$$z_v = \frac{a}{\tan\theta} \cong \frac{ak}{2\alpha}, \tag{2.14}$$

kde θ je polovina vrcholového úhlu kužele a a je příčná velikost překážky (průměr v případě kruhové překážky). Druhá přibližná rovnost odpovídá malým úhlům θ. Ideální besselovské svazky se v místě z_v obnoví a dál pak pokračují do nekonečna. V případě B-G svazků se svazky obnoví, pokud je splněna podmínka, že vzdálenost obnovy svazku z_v je menší než dosah B-G svazku z_{max} – viz rovnici (2.13) [21].

2.5 Generování besselovských svazků

2.5.1 Mezikruhová štěrbina

Historicky první generace besselovských svazků byla uskutečněna Durninem už ve stejném roce (1987), kdy tyto svazky předpověděl, a byla zveřejněna v článku [9]. Sestava experimentu je vyobrazena na obrázku 2.9. Jedná se o velmi úzký mezikruhový otvor o průměru d a šířce otvoru Δd umístěný v ohniskové rovině spojné čočky o poloměru R a ohniskové vzdálenosti f.

Mezikruhová štěrbina je osvětlována kolimovaným monochromatickým zářením. Podle Huygensova principu se každý bod štěrbiny stává bodovým zdrojem záření – sférické vlny. Tyto kruhové vlny jsou transformovány spojnou čočkou na vlny rovinné. Vlnové vektory těchto rovinných vln leží na povrchu kužele, což je podmínka pro vznik besselovského svazku [9]. Polovina vrcholového úhlu kužele bude mít velikost

$$\theta = \arctan \frac{d}{2f}, \tag{2.15}$$

svazek bude mít dosah

$$z_{max} = \frac{R}{\tan \theta}. \tag{2.16}$$

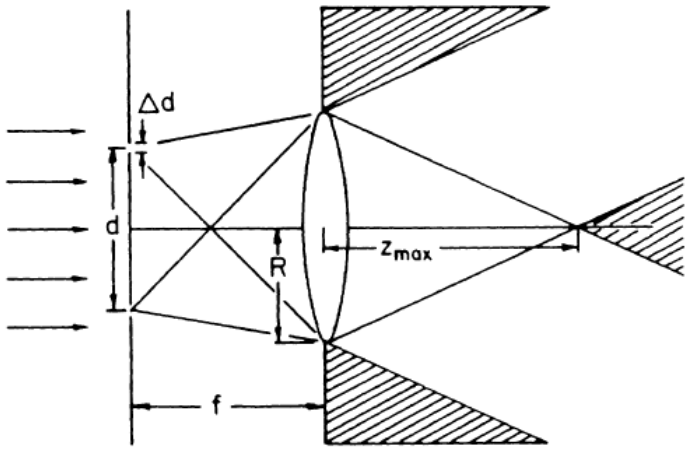
Poloměr jádra svazku bude mít velikost dle rovnice (2.12).

Nevýhodou generování besselovského svazku tímto způsobem je malá účinnost – většina energie se ztratí na mezikruhové štěrbině – a prudké oscilace intenzity v podélném směru [6]. Proto je tato metoda v praxi nevyužitelná, ovšem stojí za zmínku, protože dokázala poprvé vygenerovat besselovský svazek a je zároveň velmi jednoduchá.

2.5.2 Axikon

Významnějším prvkem generujícím besselovské svazky je čočka ve tvaru kužele zvaná axikon. Axikon se osvětlí kolimovaným laserovým svazkem, rovinná vlna se na axikonu rozdělí na více rovinných vln, jejichž vlnové vektory leží na povrchu kužele (viz obrázek 2.10). Ty se opět skládají a vytvářejí besselovský svazek. Charakteristika svazku je dána geometrií axikonu, hlavně úhlem γ (na obrázku 2.10). Tento úhel spolu s indexem lomu axikonu n určuje úhel θ besselovského svazku vztahem

$$\theta = (n-1)\,\gamma. \tag{2.17}$$



Obrázek 2.9: Schéma sestavení experimentu generování besselovského svazku pomocí mezikruhové štěrbiny. R je poloměr spojné čočky, z_{max} je dosah besselovského svazku a zároveň vymezuje geometrický stín čočky, d je průměr štěrbiny, Δd je šířka štěrbiny a f je ohnisková vzdálenost čočky. [9]

Zóna existence svazku je dána poloměrem pasu gaussovského vstupního svazku w_0 a úhlem θ dle vztahu

$$z_{max} \approx \frac{w_0}{\tan\theta}. \tag{2.18}$$

Velikost jádra je taktéž závislá na θ potažmo na γ [12].

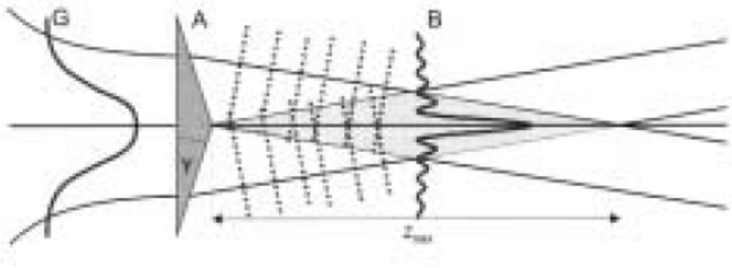
$$\rho_0 = 2{,}405\ \frac{\lambda}{2\pi\theta} \tag{2.19}$$

Rozdíl vzniklého svazku axikonem s nízkým γ a vysokým γ je názorně zobrazen na obrázku 2.11.

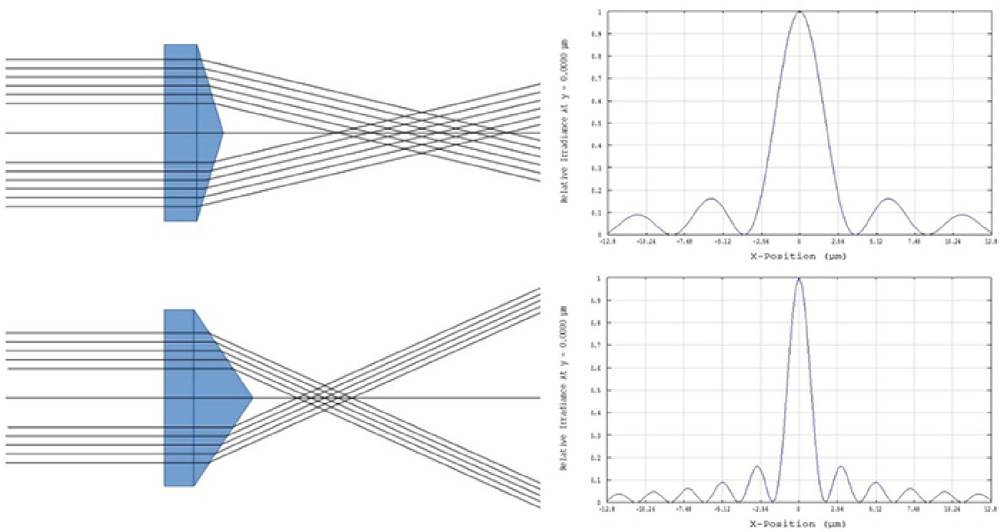
Výhodou generování besselovského svazku axikonem je její energetická účinnost, kvalita svazku a snadná manipulace. Nevýhodou jsou vlastnosti svazku pevně dané geometrií axikonu, tedy nemožnost měnit parametry svazku jiným způsobem než výměnou axikonu.

2.5.3 Další způsoby generování

Dalším možným způsobem generování nedifrakčních svazků jsou difraktivní masky. Ty jsou vyrobeny buďto fotolitograficky, nebo s využitím prostorových modulátorů světla (SLM – spatial light modulator). Dokáží generovat nedifrakční pole libovolného tvaru a zároveň provádět změny v reálném čase. Tento způsob generování je



Obrázek 2.10: Generace besselovského svazku pomocí axikonu s úhlem γ. [6].



Obrázek 2.11: Rozdíl generovaného svazku u dvou axikonů s rozdílnou geometrií. Nízké γ vytvoří delší svazek s velkým jádrem, vysoké γ naproti tomu vytvoří krátký svazek s úzkým rozložením intenzity. [19]

mírně energeticky náročnější než u axikonu, v možnostech využití však axikon silně předčí [18].

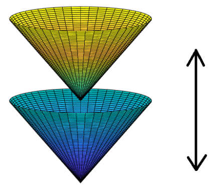
2.6 Využití besselovských svazků

Jedním z významnějších způsobů využití besselovského svazku jsou manipulace s mikroobjekty. Oproti klasickému gaussovskému svazku nemá besselovský svazek ohnisko a nemůže tak vytvářet trojrozměrnou past. Vytváří však úzký dlouhý svazek. Mikroobjekty jsou zachycovány ve dvou dimenzích a ve třetí dimenzi (směr osy svazku) je mikroobjekt posouván radiačním tlakem. Díky samorekonstrukci svazku (viz sekci 2.4) lze manipulovat více částicemi umístěných v různých rovinách centrálního minima [18]. Uchycení v dlouhém úzkém svazku lze také s výhodou využít při manipulaci s 1D objekty – tedy např. lineárními polymery, které lze tak uchytit, natáhnout a zpřístupnit tak stericky bráněné funkční skupiny pro další chemické reakce.

Besselovské svazky lze využít i při zpracování materiálů – k vrtání mikroděr do materiálů, výrobě mikro- nebo nanokanálů v průhledných materiálech nebo fotopolymerizaci [15]. Fotopolymerací pomocí besselovského svazku lze připravit extrémně úzká polymerní vlákna, která jsou velmi závislá na parametrech besselovského svazku – v experimentální části článku [10] byla připravena vlákna o šířce 2 μm a délce 1 cm.

Další možná využití jsou v metrologii, hlavně při měření na velké vzdálenosti, protože besselovské svazky jsou méně ovlivnitelné atmosférickými turbulencemi. Využití je možné i v zobrazovacích metodách, kde besselovské svazky slibují extrémně dlouhou hloubku ostrosti [22]. Jsou známy i aplikace v dalších odvětvích – heslovitě: statistická fyzika, atomová fyzika, optická koherentní tomografie, bezdrátové komunikace nebo oční operace rohovky [18].

Zatím celkem opomíjenou aplikací je interferometrie pomocí besselovských svazků – využitelná např. v optické metrologii. Oproti interferometrii gaussovských svazků, díky kterým je možné měřit tři stupně volnosti, je možné pomocí interference besselovských svazků měřit pět stupňů volnosti. Mohly by tak být užitečné při velmi přesných experimentech. Proto se o tyto svazky zajímá metrologické oddělení v CERNu. Toto téma je zároveň hlavním zaměřením této bakalářská práce.



Obrázek 2.12: Vzájemný pohyb kuželů odpovídající fázovému posunu.

2.6.1 Stupně volnosti zrcadel

Při interferenci dvou rovinných vln jsme schopni měřit relativní fázový posun (posuv po ose z) a náklony rovin (otočení kolem osy x,y) – tedy tři stupně volnosti. Při posunu po ose x a y nic nepozorujeme, jelikož v těchto směrech jsou roviny definovány od $-\infty$ do $+\infty$. Pro měření těchto posunů je možné použít právě besselovské svazky. Díky definovanému středu a středové souměrnosti lze poznat rozdíl v posunu právě po těchto osách. Jediný stupeň volnosti, který není možné měřit, je rotace kolem osy z, což je dáno osou souměrnosti kruhového kužele. Úkolem experimentální části bude tyto stupně volnosti oddělit a pokusit se je popsat.

Relativní fázový posun

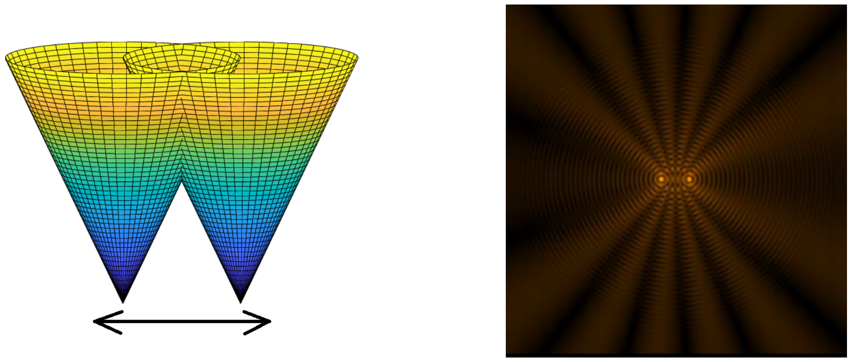
Relativní fázový posun (anglicky *relative phase shift*) je charakterizován posunem normály zrcadla rovnoběžně s osou šíření. Přejdeme-li k aproximaci besselovských svazků pomocí rotačních kruhových kuželů, můžeme si představit dva stejné souosé kužele, z nichž jeden se sune po společné ose (obrázek 2.12). Při interferenci dvou rovnoběžných rovinných vln se při relativním fázovém posunu střídá světlo a tma. Stejně je tomu i u besselovských svazků. Vzniklý obrazec soustředných kružnic se posunem po ose z zesiluje a zeslabuje v závislosti na fázovém rozdílu jednotlivých kružnic.

Náklon os svazků

Náklonem os svazků (anglicky *tilt* nebo *angular misalignment*) se rozumí rotace kolem osy x a y. Tento stupeň volnosti je také měřitelný klasickou interferometrií. Při interferenci dvou rovinných vln se objevují na interferogramu černé pruhy, jejichž množství odpovídá velikosti náklonu normál. V případě interference besselovských svazků vzniknou černé pruhy přes základní kruhový vzor. Jejich množství odpovídá velikosti náklonu os kuželů (obrázek 2.13).

(a) (b)

Obrázek 2.13: (a) Vzájemný pohyb kuželů odpovídající náklonu os. (b) Předpokládaný interferogram při náklonu os besselovských svazků. [12]



(a) (b)

Obrázek 2.14: (a) Vzájemný pohyb kuželů odpovídající posunu jejich vrcholů. (b) Předpokládaný interferogram při posunu vrcholů besselovských svazků. [5]

Posun os svazků

Posun os svazků nebo také posun vrcholů kuželů (anglicky *cone tips offset*) vyjadřuje dva stupně volnosti posunu po ose x a y. Tyto stupně volnosti jsou klasickou interferometrií rovinných vln neměřitelné, což je příčinou zájmu o interferenci besselovských svazků. Dle simulací je očekáváno, že na interferogramu budou znatelná dvě jádra besselovských svazků, a v případě rovnoběžných os obou kuželů budou ze středu vycházet tmavé pruhy. Jejich počet poroste v závislosti na vzdálenosti jader svazků. Vzájemný posun vrcholů kuželů spolu s očekávaným interferogramem je na obrázku 2.14.

Kombinace více stupňů volnosti

Zkombinujeme-li náklon os s relativním fázovým posunem, černé pruhy vytvořené náklonem os se posouvají přes interferogram. Ke stejnému chování dochází i v případě klasické interference rovinných vln.

Kombinací posunu os svazků a relativního fázového posunu se obrazec periodicky mění s periodou rovnou λ. Při fázovém posunu o $\lambda/2$ je obrazec inverzní vůči obrazci bez posunu. [12]

Kombinací posunu a náklonu os vznikají různé obrazce v závislosti na tom, směřují-li vrcholy k sobě nebo od sebe. Pokud směřují k sobě, vzniká obrazec uzavřených tmavých křivek, v případě směřování od sebe vzniká obrazec otevřených křivek.

3 Experimentální část

3.1 Použité pomůcky, metody detekce a zpracování interferogramů

V průběhu všech experimentů byl používán ke generaci gaussovského svazku laser MELLES GRIOT 05-LHP-111, SN: 9016EY o vlnové délce $\lambda = 632{,}8$ nm. Ke generaci besselovských svazků byl použit axikon o charakteristickém úhlu 2°. Zrcadlo s piezoelektrickým aktuátorem bylo používáno pro měření jemných pohybů (především fázového posunu) a bylo ovládáno ovladačem THORLABS MDT693A, SN: 050719-5.

K detekci interferogramů byla použita CCD kamera ThorLabs DCC1545M-GL (parametry viz tabulku 3.1) ovládaná programem ThorLabs ThorCam. Kamera umožňuje vytvářet snímky nebo videa vzniklého interferogramu. Při dobrém nastavení v programu ThorCam lze pak každému pixelu přiřadit hodnotu stupně šedi od 0 do 255. Při pořizování takového videa je však třeba dbát toho, aby nedošlo k přesycení intenzity a saturaci hodnot stupňů šedi na číslo 255 pro místa s nestejnou intenzitou. U nepřesycených videí a snímků byla však zároveň velmi nízká intenzita pro tisk, což znamená, že snímky vyskytující se v rámci práce jsou vždy ty přesycené a zpracovány byly jiné. Pro lepší viditelnost byly navíc všechny zobrazené snímky barevně invertovány a u některých byl zvýšen kontrast.

Vzniklé video či snímek je třeba zpracovat skriptem v programu MATLAB, který vytvoří čtyřrozměrnou matici dat. Jeden rozměr určuje délku, druhý šířku snímku, třetí má tři hodnoty, které odpovídají hodnotám v RGB (při práci ve stupních šedi nepotřebný), a čtvrtý rozměr udává číslo snímku. Pomocí fixace každého rozměru získáme informace o časovém nebo prostorovém průběhu relativní intenzity, která může být jak lokální, tak i globální. Globální intenzita je suma intenzit všech pixelů, lokální intenzita může znamenat intenzitu jednoho pixelu nebo množiny pixelů. Problémem měření intenzity jednoho pixelu je intenzitní fluktuace. Při měření globální intenzity způsobuje problémy to, že i tmavé pixely mají nenulovou hodnotu stupně

Tabulka 3.1: Parametry CCD kamery používané během všech experimentů. (Převzato z internetových stránek výrobce Thorlabs.)

CCD kamera DCC1545M	
Typ senzoru	CMOS
Rozlišení	1280x1040 pixelů
Třída senzoru	1/2”
Citlivá oblast (uhlopříčka)	cca 8,5 mm

šedi. Výsledná intenzita se tedy může ztrácet v šumu. Při měření obyčejného gaussovského svazku to tolik nevadí, při měření besselovského svazku to může hodně zkreslovat výsledek.

Ze snímků vytvořených kamerou je také možno určit vzdálenosti. Ty se měří v pixelech – podělením uhlopříčky citlivé oblasti kamery (tabulka 3.1) počtem pixelů na diagonále lze získat převodní vztah

$$1 \text{ px} = 5{,}2\ \mu\text{m}. \tag{3.1}$$

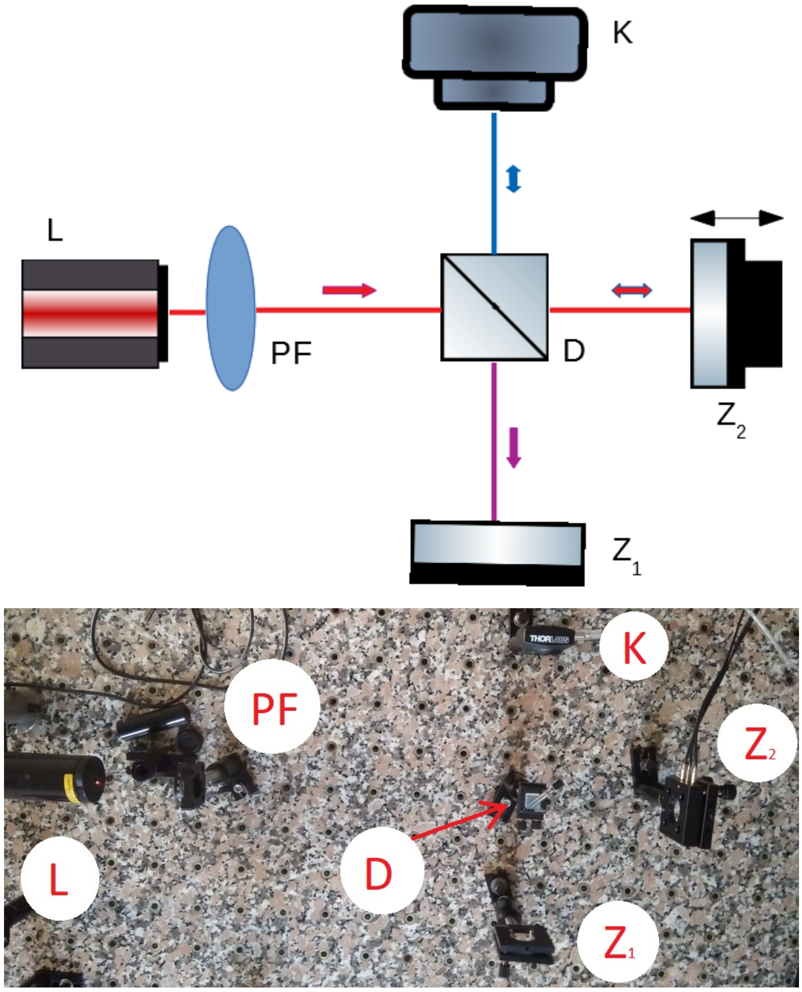
3.2 Michelsonův interferometr

Tato sekce obsahuje výsledky experimentů na Michelsonově interferometru.

První uspořádání Michelsonova interferometru v laboratoři bez generátoru besselovských svazků je na obrázku 3.1. Laser vytváří svazek, jehož intenzitu lze měnit polarizačním filtrem. Svazek se dělí na svazkovém děliči. První svazek se odrazí k referenčnímu zrcátku (Z_1) a na něm se odráží zpět do děliče. Druhý svazek projde děličem k zrcátku (Z_2), které lze jemně ovládat díky piezoelektrickému aktuátoru. Od zrcátka se druhý svazek odrazí zpět do děliče, kde interferuje s prvním svazkem. Interferenční obrazec je snímán CCD kamerou.

3.2.1 Kalibrace piezoelektrického aktuátoru

Motivací prvního experimentu je změřit, o kolik se přibližně posouvá zrcadlo s piezoelektrickým aktuátorem (dále ZPA) při daném zvýšení nebo snížení napětí ovladače aktuátoru – tzv. konstanta piezoelektrického aktuátoru. Uvažujeme jenom posun roviny zrcadla ve směru normály (tzv. režim *masterscan*). K měření je použita interference gaussovských svazků. K měření bylo použito Michelsonova interferometru v rozestavení zobrazeném na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Schéma a fotografie Michelsonova interferometru pro interferenci gaussovských svazků. L – laser, D – svazkový dělič, Z_1 – referenční zrcadlo, Z_2 – zrcadlo s piezoelektrickým aktuátorem ovládané vysokonapěťovým ovladačem, K – CCD kamera.

Ovladač ZPA byl připojen na generátor signálu s nastavením peak-to-peak napětí $U_{pp} = 4$ V, nulová hodnota napětí byla posunuta na $U_{offset} = 2{,}5$ V. Průběh napětí byl trojúhelníkový s frekvencí $f = 10$ mHz. Toto nastavení generátoru připojeného k ovladači piezoelektrického aktuátoru jednou za 100 s periodicky zvyšovalo a snižovalo napětí o 75 V. Bylo natočeno 50s video (délka půl periody) snímající změny intenzity při náběžné hraně signálu.

Naměřené hodnoty jsou graficky zobrazeny v grafu na obrázku 3.2. Hodnoty byly fitovány v programu Gnuplot funkcí $f(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$ s parametry a, b, c, d metodou nejmenších čtverců. K výpočtu konstanty piezoelektrického aktuátoru bylo použito vypočteného parametru $b = 0{,}9926 \pm 0{,}0007$, který určuje periodu p harmonické funkce vztahem

$$p = \frac{2\pi}{b}. \tag{3.2}$$

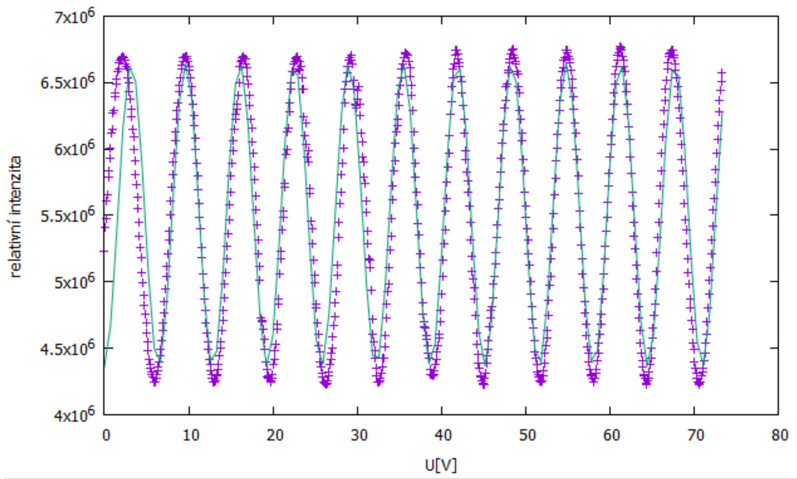
Za jednu periodu $p = (6{,}330 \pm 0{,}004)\ V$ se dráhový rozdíl paprsku změní o vlnovou délku světla. Jelikož paprsek projde mezi děličem a zrcátkem dvakrát, tak se za jednu periodu posune zrcátko o polovinu vlnové délky. Označíme-li Δl_U posun zrcátka vztažený na jednotku napětí (piezoelektrická konstanta), platí

$$\Delta l_U = \frac{\lambda}{2p} = \frac{\lambda b}{4\pi}. \tag{3.3}$$

V případě použitého piezoelektrického aktuátoru vyšla piezoelektrická konstanta $\Delta l_U = (49{,}98 \pm 0{,}03)$ nm/V. Zobrazované odchylky vychází z asymptotické standardní odchylky fitu vypočítané programem Gnuplot. Nicméně vzhledem k použité metodě měření je nejistota měření větší. Nejistota je způsobena též možnými mechanickými poruchami zrcátka. Ty způsobují také rozdílné délky period při obratu signálu ze vzestupné hrany na sestupnou. Naměřená piezoelektrická konstanta je průměrnou po celé délce rozsahu napětí na aktuátoru. Při dalším měření bude brána v úvahu zaokrouhlená hodnota piezoelektrické konstanty $\Delta l_U = 50$ nm.

3.2.2 Generace svazků axikonem

Sestava experimentu pro interferenci besselovských svazků byla podobná sestavě s interferencí gaussovských svazků. Byl opět sestaven Michelsonův interferometr, akorát byl vyměněn svazkový dělič. Mezi polarizační filtr a dělič byly umístěny postupně tzv. *beam expander* (rozšiřující laserový paprsek 4x) a axikon generující besselovské svazky. Axikon má charakteristický úhel $\gamma = 2°$. Sestava je vyobrazena na obrázku 3.3.



Obrázek 3.2: Naměřené hodnoty závislosti globální relativní intenzity (měřeno ve stupních šedi) na napětí proložené fitovací křivkou.

Sestava byla umístěna a připevněna na stůl s těžkou žulovou deskou. Jelikož je interferometrie velmi přesná metoda, je zároveň velmi citlivá k vibracím a infrazvuku. Je tedy žádoucí snížit frekvenci vlastního kmitání stolu na minimum. Toho se dle vzorce

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{3.4}$$

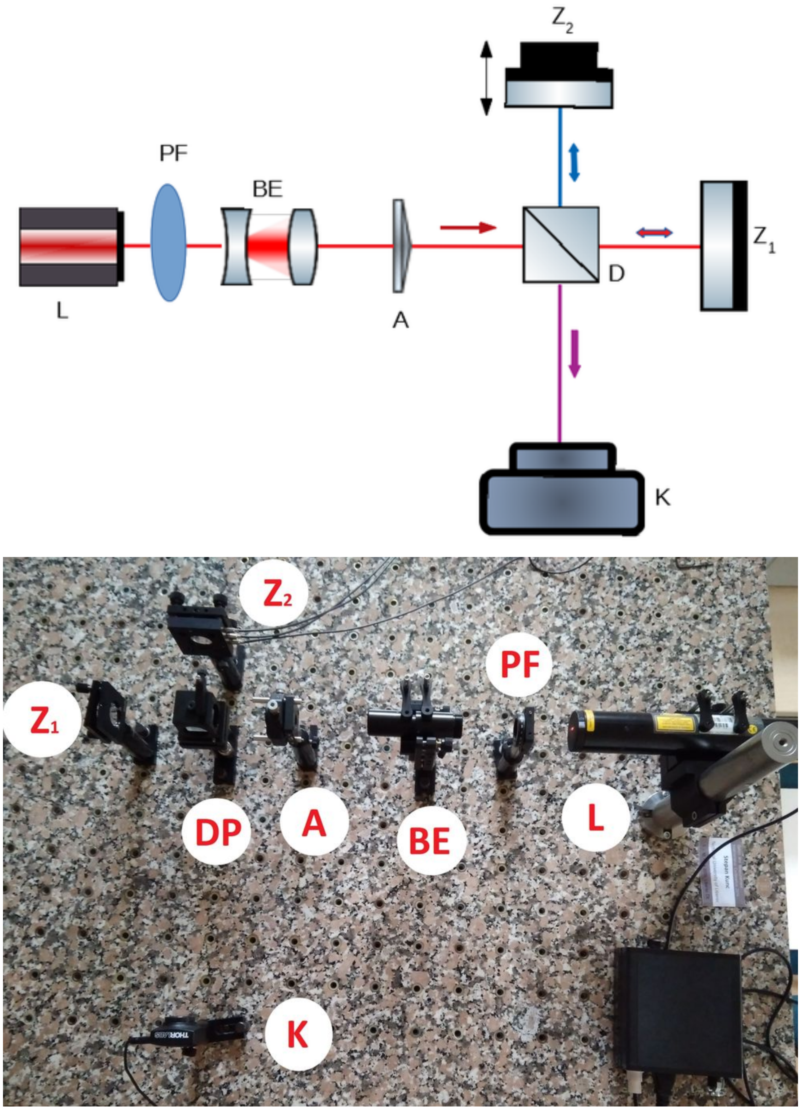
dá dosáhnout snížením tuhosti k – čili pořízením odpruženého stolu, nebo zvýšením hmotnosti stolu. V našem případě volíme druhou možnost.

3.2.3 Interference besselovských svazků na Michelsonově interferometru

Výhodou Michelsonova interferometru byla jednoduchost, se kterou byl postaven. Vzniklé interferogramy měly dobrý kontrast a byly dobře viditelné. První interferenční obrazce byly nevyladěné, při spojení jader svazků pomocí zrcátek byl znatelný interferogram náklonu os (obrázek 3.4). Použitím piezoelektrického aktuátoru v režimu *masterscan* tvořícím relativní fázový posun bylo možné sledovat pohyb pruhů vytvořeným náklonem os po interferogramu.

Při pootočení jednoho ze zrcátek se jádra rozestoupila a vznikla tak kombinace několika stupňů volnosti – náklonu a posunu os svazků. Při menším rozestupu vznikla spirála, při větším se ramena spirály uzavřela a vytvořila tzv. ledvinky (obrázek 3.5).

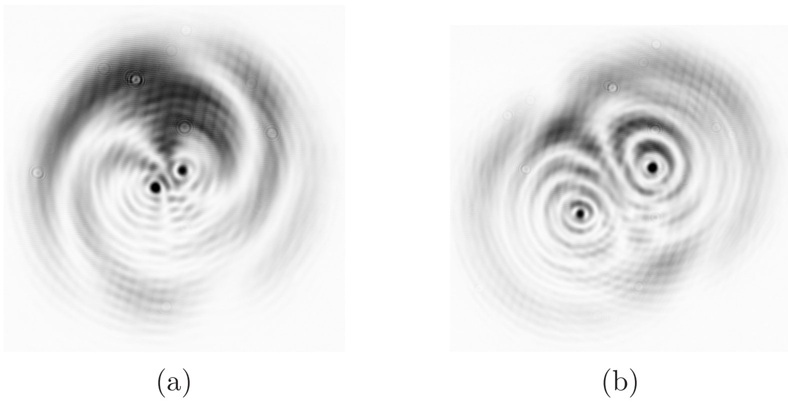
Protože úkolem experimentální části práce bylo jednotlivé stupně volnosti oddělit, bylo potřeba vyrovnat náklon os a dosáhnout přibližné souososti svazků. Ideální



Obrázek 3.3: Schéma a fotografie sestavy Michelsonova interferometru pro interferenci besselovských svazků. L – laser, PF – polarizační filtr, BE – beam expander, A – axikon, DP – dělič paprsků, Z_1 – referenční zrcátko, Z_2 – zrcátko s piezoelektrickým aktuátorem (černou šipkou naznačený pohyb), K – kamera s CCD čipem.

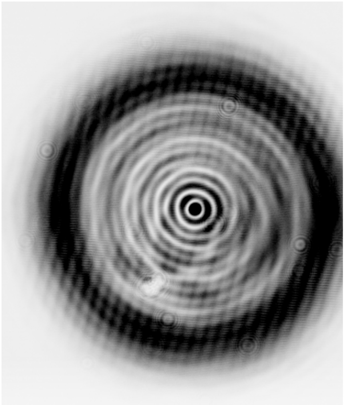
(a) (b)

Obrázek 3.4: Interferogram vzniklý náklonem os svazků. Mezi (a) a (b) bylo použito relativního fázového posuvu – pruhy vzniklé interferencí se posunuly.

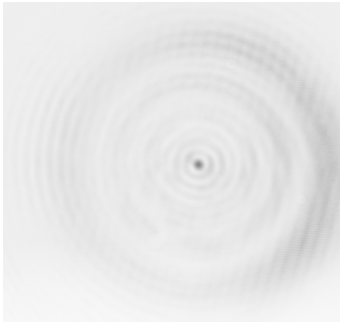


(a) (b)

Obrázek 3.5: Interferogramy vzniklé kombinací více stupňů volnosti: (a) menší rozestupy jader – vzniklá spirála, (b) větší rozestup jader – vzniklé ledvinky.



(a)



(b)

Obrázek 3.6: Porovnání maxima (a) a minima (b) interference dvou besselovských svazků při fázovém posunu.

souososti nelze za normálních podmínek dosáhnout. Bylo potřeba, aby svazek směřující k oběma zrcátkům se vracel tím samým směrem kolmo do děliče svazků. Toho bylo dosaženo pomocí náklonu zrcátek. Tím se stopy svazků na stínítku (v tomto případě to byla zeď laboratoře) rozestoupily a byly srovnány manipulací svazkovým děličem. Výsledkem byl obrazec, kde jsou jádra na sobě a nevytváří se žádné pruhy. Při fázovém posunu se intenzita obrazce snižuje na minimum a poté se zvyšuje zpět na maximum. V ideálním případě by měl obrazec v minimu úplně zmizet. Tomu by tak bylo, kdyby oba svazky měly stejnou intenzitu a byly ideálně souosé. Ideální souosost není bez přesných přístrojů dosažitelná a svazky nemají stejnou intenzitu, protože dělič není ideálně nepolarizovaný. Přesto kontrast maximální a minimální intenzity je markantní. Rozdíl je znát na obrázku 3.6.

Problémem Michelsonova interferometru byla nemožnost oddělení dalších stupňů volnosti. Jediný měřitelný stupeň byl fázový posun. Při posunu zrcátka ve směru os x a y (svazek se šíří po ose z) nedochází k žádnému pohybu svazku, protože zrcátko je rovinné. Při rotaci kolem osy x a y se změní zároveň náklon a posun os svazků. Bylo třeba navrhnout nové rozestavení experimentu tak, aby se daly tyto stupně volnosti oddělit. Z toho důvodu byly výsledky interferometrie na Michelsonově interferometru omezeny na čistě kvalitativní.

3.3 Mach–Zehnderův interferometr

Pro potřeby bakalářské práce se ukázal být výhodný Mach–Zehnderův interferometr. Na základě jeho rozestavení by mělo být možné oddělit jednotlivé stupně volnosti. Nevýhodou Mach–Zehnderova interferometru je vysoká citlivost a mnoho stupňů volnosti natočení jednotlivých komponent interferometru. Je tedy velmi složité takový interferometr vyladit. Zrcadla interferometru musí být co nejpřesněji pod úhlem 45°, aby se svazek odrážel kolmo. Svazek se navíc celou dobu musí pohybovat v jedné horizontální rovině.

3.3.1 Fázový posun

K naměření fázového posunu bylo použito sestavení interferometru zobrazeného na obrázku 3.7. Svazky interferující v děliči D_2 bylo třeba vyrovnat, aby byly souosé. Toho bylo dosaženo vyrovnáním jejich stop v blízkém a dalekém poli od děliče. V obou místech musely svazky ležet na sobě.

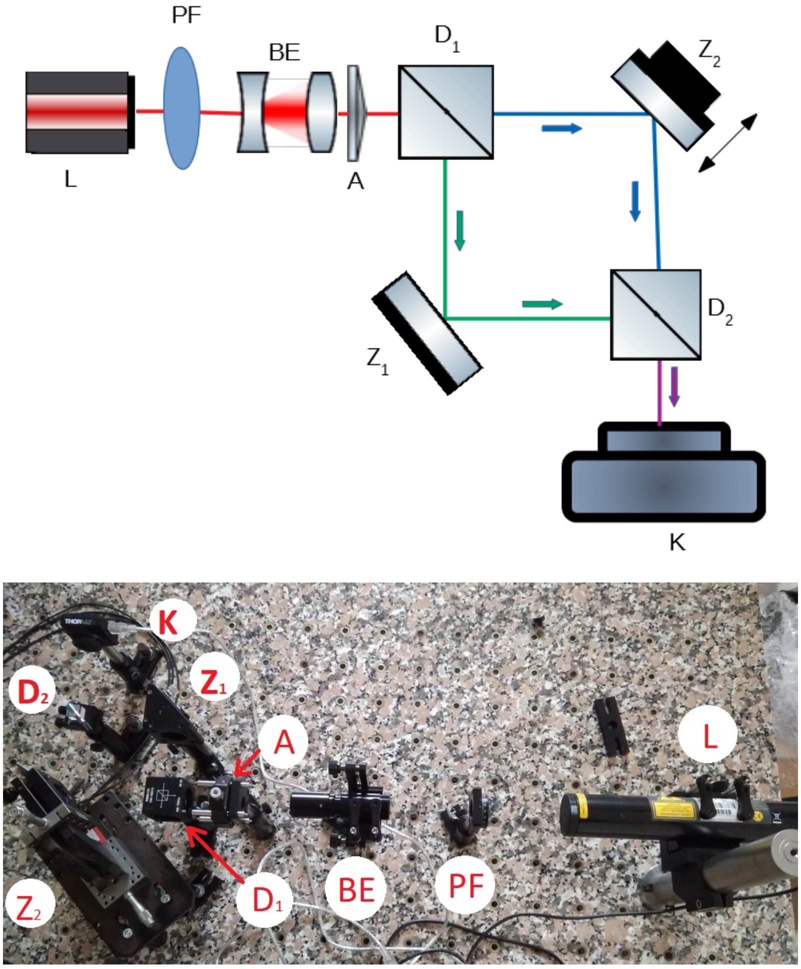
Ovladač piezoelektrického aktuátoru byl připojen na generátor signálu podobně jako v podsekci 3.2.1.

Při tomto zapojení bylo natočeno video průběhu relativní intenzity při náběžné hraně napětí – tedy pohybu piezoelektrického zrcátka jedním směrem. Zpracováním videa v programu MATLAB byla získána relativní intenzita bodu maxima nultého řádu na jednotlivých snímcích. Při znalosti počtu snímků za sekundu bylo možno sestavit závislost relativní intenzity maxima na čase. Nakonec při znalosti intervalu rostoucího napětí a časové periody byla získána závislost relativní intenzity maxima na napětí na aktuátoru. Ze znalosti piezoelektrické konstanty aktuátoru (kalibrace v podsekci 3.2.1) lze sestrojit graf závislosti relativní intenzity na velikosti posunu zrcátka (obrázek 3.8).

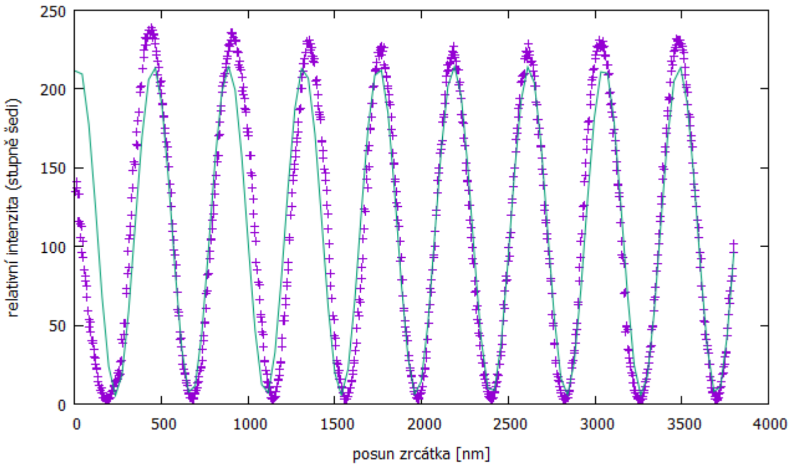
Získaný graf byl fitován obecnou sinusovkou $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$. Parametr určující periodu byl vypočítán programem Gnuplot: $b = 0{,}01451$. Perioda byla stanovena vztahem (3.2) a je rovna $p = 433$ nm. Oproti Michelsonovu interferometru se dráhový rozdíl paprsku Δd nerovná dvojnásobku posunu zrcátka Δl, ale z geometrie (viz obrázek 3.9) platí

$$\Delta d = \sqrt{2}\Delta l. \tag{3.5}$$

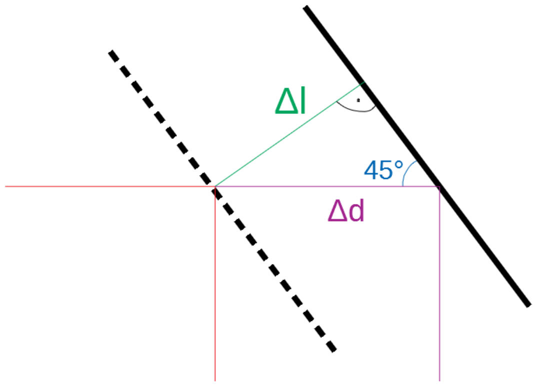
Za jednu periodu je dráhový rozdíl paprsku 612 nm. Při klasické interferometrii je dráhový rozdíl paprsku při jedné periodě vždy roven vlnové délce. Zde se hodnota dráhového rozdílu liší o 3 %. To může být způsobeno systematickými chybami během měření nebo během výpočtu. Všechny hodnoty jsou velmi silně závislé na parametru b vypočítaném z grafu 3.8. Přestože proložená křivka poměrně přesně sedí na naměřených hodnotách, malá odchylka se může vyskytnout. Zvláště na začátku grafu se naměřené hodnoty od proložené křivky odchylují. To, jak již bylo



Obrázek 3.7: Schéma a fotografie sestavy Mach–Zehnderova interferometru pro interferenci besselovských svazků. L – laser, PF – polarizační filtr, BE – beam expander, A – axikon, D_1, D_2 – děliče svazků, Z_1 – referenční zrcátko, Z_2 – zrcátko s piezoelektrickým aktuátorem (černou šipkou naznačený pohyb), K – kamera s CCD čipem.



Obrázek 3.8: Graf závislosti relativní intenzity bodu nultého maxima besselovského svazku na velikosti posunu zrcátka. Data jsou proložena fitovací křivkou
f(x) $= 105 \cdot \sin(0{,}01451x - 1{,}27) + 110$.

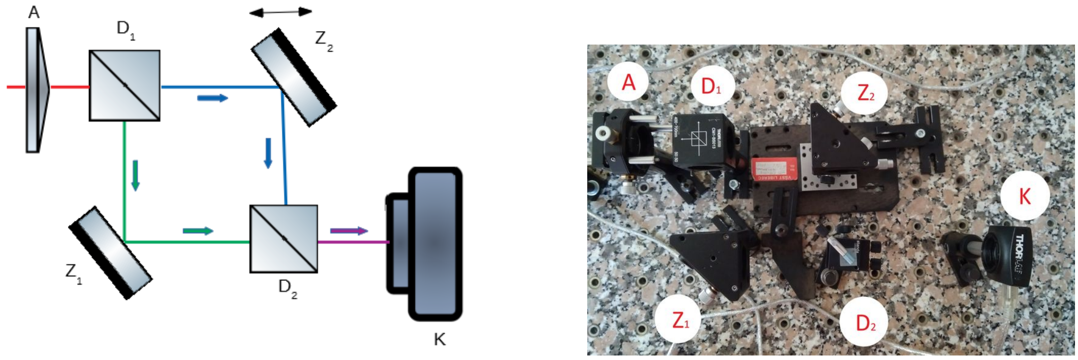


Obrázek 3.9: Schéma posunu zrcátka u Mach–Zehnderova interferometru.

zmíněno v podsekci 3.2.1, může být způsobeno mechanickými poruchami na ZPA. Bude-li brána 3% odchylka jako přípustná, lze tvrdit, že interference besselovských svazků funguje u fázového posunu stejně jako interference gaussovských svazků, což potvrzují i některé simulace [12].

3.3.2 Posun os svazků

Stupně volnosti posunu os svazků (nebo posun vrcholů kuželů) po ose x a y byly již představeny v podsekci 2.6.1. K posunu os dochází i v rozestavení z měření fázového posunu (obrázek 3.7). Tento posun je po celém intervalu napětí na aktuátoru roven maximálně 3,9 μm, což je vzhledem k velikosti jednoho pixelu kamery $5,2$ μm neměřitelné. Bylo proto třeba vyměnit zrcátko s piezoelektrickým aktuátorem za

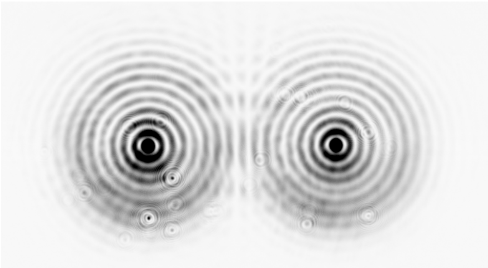


Obrázek 3.10: Schéma a fotografie sestavy (od axikonu dále – sestava před axikonem zůstává stejná) Mach–Zehnderova interferometru pro měření posunu os svazků. A – axikon, D_1, D_2 – děliče paprsků, Z_1 – referenční zrcátko, Z_2 – zrcátko s mikroposuvem (černou šipkou naznačený pohyb), K – kamera s CCD čipem.

zrcátko s mikroposuvem. Kamera byla přesunuta tak, aby se každý svazek na děličích odrážel pouze jednou – tím se odstranil problém silného a nepředvídatelného fázového posunu, který by vznikal, kdyby se jeden svazek odrážel na děliči dvakrát a jeden ani jednou. Schéma a fotografie použitého rozestavení od axikonu dále jsou na obrázku 3.10. Rozestavení od laseru po axikon zůstává stejné.

Po sestavení bylo třeba interferometr vyladit tak, aby osy svazků byly rovnoběžné – tedy aby se mikroposuvem měnil opravdu jen jeden stupeň volnosti. Rovnoběžnosti bylo nakonec dosaženo – ověřena byla posunem kamery ze vzdálenosti 12 cm (kde probíhalo celé měření posunu os) do vzdálenosti 59,5 cm od druhého svazkového děliče. Vzdálenost jader se změnila z 300 px na 286 px (resp. se změnila vzdálenost středů kruhů – ve vzdálenosti 59,5 cm již jádra neexistují). V přepočtu to je 73 μm. Úhel, který svírají osy svazků, je $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ rad, v přepočtu je to 32". Rovnoběžnost os svazků je tedy více než dostačující.

Interferogramy vzniklé posunem jader svazků od sebe jsou zdokumentovány na obrázku 3.12. Jak bylo předpokládáno, interference vytvářela dostředné tmavé pruhy (na inverzních obrázcích světlé pruhy), jejichž počet rostl se zvyšujícím se rozestupem paprsků. Při bližším pohledu je však patrné, že od vzdálenosti 320 μm se již nejedná o dostředné přímky, avšak o hyperboly. Při lichém počtu pruhů je prostřední pruh osou souměrnosti. Jádra svazků jsou ohnisky hyperbol, což bylo ověřeno měřením vzdáleností několika bodů jedné hyperboly od obou ohnisek. Rozdíly vzdáleností jednoho každého bodu od obou ohnisek se pohybují ± 2 pixely kolem nějaké konstantní hladiny. Nepřesnost je dána manuálním měřením – bylo třeba odhadnout pozici středu jádra a zároveň střed hyperbolového pásu. Pomineme-li



(a)

(b)

Obrázek 3.11: Dva interferogramy stejného nastavení (a) ze vzdálenosti 12 cm, (b) ze vzdálenosti 59,5 cm od druhého svazkového děliče. U (a) je znatelný jev, kdy slabá maxima na okrajích jednotlivých svazků interferují ve výsledná silná maxima.

odchylku, tak interferenční pruhy splňují definici hyperboly a jádra splňují definici ohnisek hyperboly.

Pro další zkoumání by bylo vhodné mít svazek s menším jádrem a celkově lépe definovanými maximy, který by vytvářel i užší pruhy s větším kontrastem. Toho by se dalo dosáhnout axikonem s větším vrcholovým úhlem γ (viz podsekci 2.5.2), lepší by však bylo sáhnout k jinému způsobu generování, protože axikon s větším úhlem γ má zároveň menší dosah. K úplné kvantifikaci by bylo zapotřebí mnohem hlubšího zkoumání s použitím měřících algoritmů.

Dalším zajímavým jevem pozorovaným při tomto rozestavení experimentu byla interference hodně rozestoupených svazků (obrázek 3.11 (a)). Viditelné kruhy jednotlivých svazků by se dle očekávání měly dotýkat, avšak slabá maxima interferují také a vytváří tak maxima silná.

3.3.3 Náklon os svazků

Schéma a fotografie rozestavení experimentu pro měření náklonu os svazků jsou vyobrazeny na obrázku 3.13. V původním úmyslu bylo sestavit takové rozestavení, aby se otáčením děliče měnil pouze náklon os svazků a nic jiného – tedy aby jádra svazků byla stále na sobě, pouze by se zvyšoval počet pruhů. To by fungovalo, kdyby otočný dělič ležel přesně ve vrcholu kužele svazku, což je velmi těžko realizovatelné. V tomto případě i při mírném otočení děliče se jádra silně rozestoupila, což bylo třeba kompenzovat mikroposuvem zrcátka Z_2. Bylo naměřeno, že při pootočení děliče o jeden miliradián bylo potřeba posunout zrcátko o 138 μm. Při takovém způsobu manipulace se náklon os svazků skutečně měnil. Pokud byly pruhy svislé, náklon

0 μm

110 μm

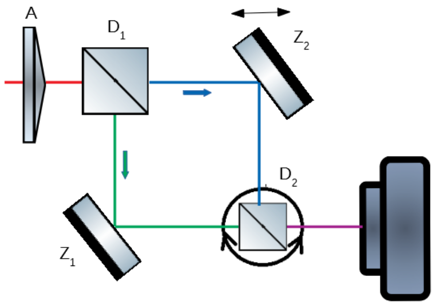
200 μm

320 μm

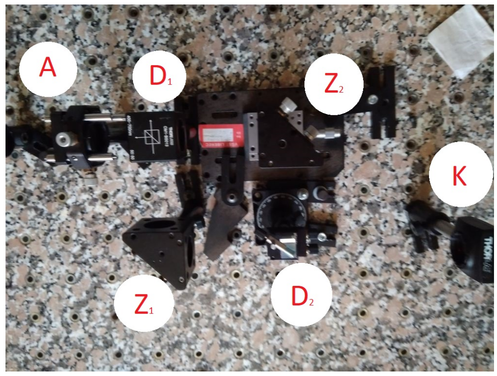
420 μm

490 μm

Obrázek 3.12: Pozorované interferogramy různě rozestoupených středů svazků. Vzdálenosti jader svazků byly měřeny ze snímků podle počtu pixelů. Měřena byla vždy vzdálenost vnější hrany prvního jádra a vnitřní hrany druhého jádra. Předpokládaná chyba špatného odhadnutí vzdálenosti jsou cca 2 pixely, tedy 10 μm.



(a)

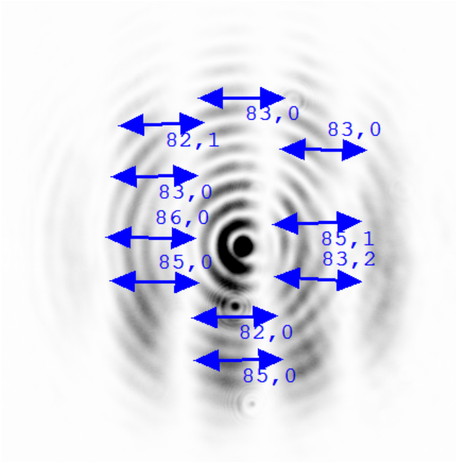


Obrázek 3.13: Schéma a fotografie sestavy (od axikonu dále) Mach–Zehnderova interferometru pro měření náklonu os svazků. A – axikon, D_1 – první dělič svazků, D_2 – druhý dělič svazků na otočném stojánku, Z_1 – referenční zrcátko, Z_2 – zrcátko s mikroposuvem (černou šipkou naznačený pohyb), K – kamera s CCD čipem.

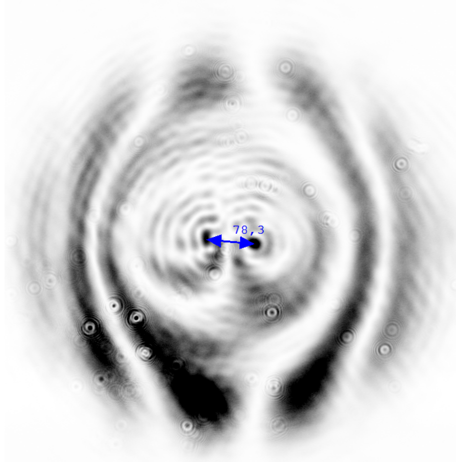
os byl nulový v té dimenzi, kterou nelze výše zmíněnou manipulací měnit. V tom případě bylo možné náklon zmenšit až na nulu. V opačném případě šlo vynulovat pouze náklon v jedné dimenzi a minimální počet pruhů byl ve chvíli, kdy pruhy byly vodorovné.

Pro částečnou kvantifikaci náklonu os se nabízel jednoduchý experiment změření závislosti úhlu svíraným svazky na délce jedné periody pruhového vzoru interference. K měření bylo třeba získat interferogram s takovým počtem pruhů, aby bylo možné měřit jejich vzdálenost (periodu interferenčního vzoru). Po vyfocení takového interferogramu byla kamera posunuta do dalších dvou vzdáleností – pořízeny byly tedy další dva snímky. Z prvního snímku byly změřeny vzdálenosti pruhů na deseti místech (obrázek 3.14 (a)), měření bylo statisticky zpracováno. Ze zbylých dvou snímků (obrázek 3.14 (b,c)) byla změřena vzdálenost jader – měření bylo opakováno pětkrát a bylo statisticky zpracováno. Měření z největší vzdálenosti bylo vždycky nejproblematičtější, protože již neexistovala jádra svazků a středy kruhů byl odhadovány jen přibližně – vždy se jedna větev interferometru zakryla, odhadly se pozice středů jednotlivých svazků a poté byla změřena jejich vzdálenost. Naměřené hodnoty byly vyneseny do grafu závislosti rozestupu jader na vzdálenosti kamery od děliče. Hodnoty byly proloženy přímkou, jejíž směrnice udává úhel náklonu os v radiánech.

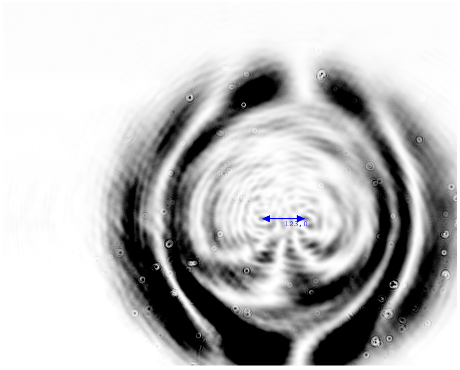
V případě příkladu na obrázku 3.14 je vzdálenost pruhů (vše přepočteno na mikrometry) $(435 \pm 5)\ \mu$m, rozestup jader ve vzdálenosti 39 cm od děliče je $(410 \pm 10)\ \mu$m a rozestup jader ve vzdálenosti 59,5 cm je $(660 \pm 30)\ \mu$m. Úhel je směrnicí přímky z grafu na obrázku 3.15 a má velikost $(1{,}6 \pm 0{,}1)$ mrad.



(a)

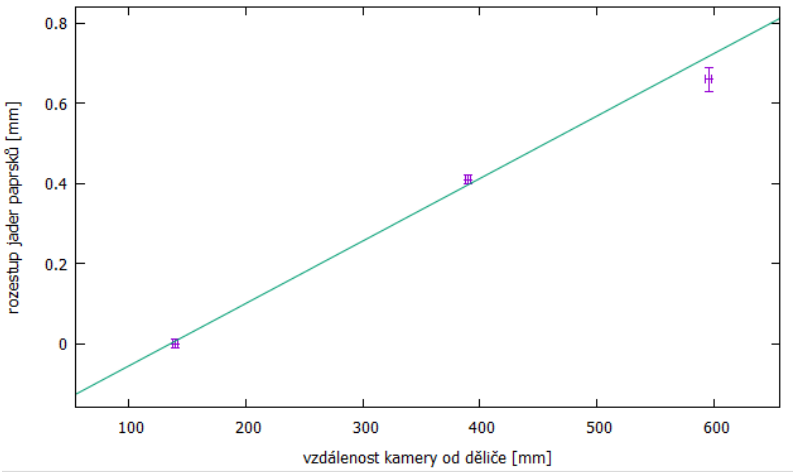


(b)

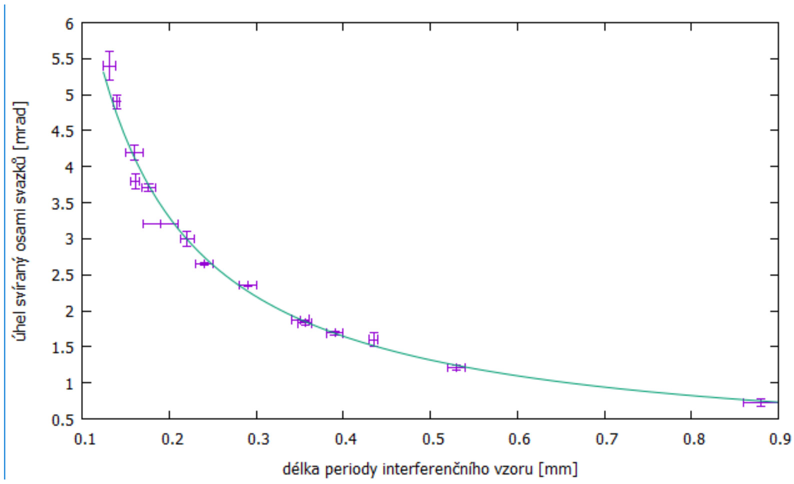


(c)

Obrázek 3.14: (a) měření vzdálenosti periody pruhového vzoru, (b) jedno z pěti měření vzdálenosti jader ve vzdálenosti 39 cm od druhého děliče, (c) jedno z pěti měření vzdálenosti jader ve vzdálenosti 59,5 cm od druhého děliče



Obrázek 3.15: Graf závislosti rozestupu jader na vzdálenosti kamery od děliče. Hodnoty proložené přímkou se směrnicí $k = (1{,}6 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}$ odpovídající náklonu os v radiánech.



Obrázek 3.16: Hodnoty závislosti svíraného úhlu svazků v miliradiánech na vzdálenosti interferenčních pruhů v milimetrech. Proložená křivka je křivkou nepřímé úměry o rovnici $f(x) = \frac{0{,}659}{x}$.

Tímto způsobem byla změřena závislost úhlu svíraného osami svazků pro čtrnáct vzdáleností interferenčních pruhů. Deset hodnot bylo při náklonu os v jedné dimenzi, čtyři hodnoty ve dvou dimenzích. Hodnoty byly vyneseny do grafu na obrázku 3.16. Všechny naměřené hodnoty vykazují stejný trend, který byl fitován v programu Gnuplot křivkou nepřímé úměry $f(x) = \frac{a}{x}$, kde parametr $a = 0{,}659 \pm 0{,}007$.

Pro další měření náklonu os by bylo vhodné použít generátor svazků s delším dosahem. Měření vzdáleností jader svazku je mnohem přesnější než měření vzdáleností neurčitých středů kruhu. Bylo by také vhodné měřit závislost rozestupu jader na vzdálenosti kamery od děliče na více místech než na třech – tedy mít delší stůl a posuvný díl, na kterém je kamera připevněna, posouvá se jen ve směru šíření svazků a je přesně daná její vzdálenost od děliče. Ke zjištění vzdálenosti interferenčních pruhů je vhodné použít detektor hran, který dokáže tuto vzdálenost velmi přesně změřit. Přestože těchto přesných metod nebylo použito (jsou nad rámec bakalářské práce), výsledný trend je velmi dobře patrný a kvantifikovatelný.

Náklon os svazků lze také měřit pomocí gaussovských svazků. V jejich případě by však bylo obtížné určit polohy osy svazku. Jádra besselovských svazků jsou průmětem os svazků, jejich určení je tedy mnohem přesnější.

4 Analytická geometrie kuželů

Význam této stručné kapitoly by měl být informativní pro další studium besselovských svazků. Používáme-li aproximaci besselovských svazků pomocí kuželů, bylo by vhodné je matematicky popsat – nejlépe analyticky tak, aby se daly v případě interference předpokládat vzniklé obrazce. Z důvodu časového omezení nebylo možno dovést úvahy do konce, shrnuty jsou zjištěné poznatky, které mohou být využity při dalším studiu.

Parametrické vyjádření kužele

Parametrické vyjádření rotačního kužele, jehož osa je rovnoběžná s osou z, může být zapsáno ve vektorovém tvaru s parametry $r \in (0, h)$ a $\varphi \in (0, 2\pi)$

$$\vec{r}(r, \varphi) = (x_0 + r\cos\varphi) \cdot \vec{i} + (y_0 + r\sin\varphi) \cdot \vec{j} + (z_0 + r \cdot \arctan\theta)\,\vec{k}, \tag{4.1}$$

kde souřadnice $[x_0, y_0, z_0]$ určují polohu vrcholu kužele, h je výška kužele a θ vyjadřuje stejně jako v minulých případech polovinu vrcholového úhlu kužele. Vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru x,y,z.

Obecná rovnice kužele

Odstraněním parametrů v parametrickém vyjádření (4.1) získáme obecnou rovnici kužele. V prvním kroku se vyjádří r ze z-ové složky

$$r = \frac{z - z_0}{\arctan\theta}, \tag{4.2}$$

v druhém kroku se umocní na druhou x-ová a y-ová složka a vznikne

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{4.3}$$

a za r se dosadí (4.2), vznikne tedy

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \tan^2 \theta \, (z - z_0)^2 \,, \tag{4.4}$$

což je obecná rovnice kužele, který je bez omezení parametrů. Jeho výška je tedy nekonečná a od vrcholu v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ se šíří do $-\infty$ a do $+\infty$.

Rotace kužele

Kužel lze nechat rotovat kolem osy všech os. Pro rotaci o úhel δ kolem osy x platí rovnice

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta & -\sin\delta \\ 0 & \sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \tag{4.5}$$

pro rotaci kolem osy y

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta & 0 & -\sin\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\delta & 0 & \cos\delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

a pro rotaci kolem osy z

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ \sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \tag{4.7}$$

Pomocí rovnic (4.1), (4.7), (4.6) a (4.5) lze např. v MATLABu vytvořit skupiny různých kuželů a zkoumat (spíše numericky než analyticky) jejich průsečíky a porovnat výsledky s naměřenými interferogramy.

Průsečíky kuželů s posunutými vrcholy

Průsečíky kuželů s posunutými vrcholy se dají snadno zkoumat analyticky. Při interferometrii dvou besselovských svazků vzniklých jedním zdrojem máme úhel θ totožný a soustavu souřadnic si zvolíme tak, že posun jednoho kužele nastane pouze ve směru x o x_0 a druhý je umístěn vrcholem do počátku. Dosazením parametricky vyjádřeného posunutého kužele

$$\vec{r} = (x_0 + r\cos\varphi)\ \vec{i} + r\sin\varphi\ \vec{j} + r\tan\theta\ \vec{k} \tag{4.8}$$

do obecně vyjádřeného kuželе v počátku souřadného systému

$$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \theta \tag{4.9}$$

dostaneme

$$r \cos \varphi = \frac{x_0}{2}. \tag{4.10}$$

Z toho vyplývá, že průsečík kuželů se nachází v rovině $x = \frac{x_0}{2}$. To je logické, průnik kruhů nastane v ose úsečky ohraničené jejich středy. Po dosazení takového x do (4.9) získáme implicitně zadanou křivku – hyperbolu průsečíku

$$z^2 = \frac{x_0^2 + 4y^2}{4 \tan^2 \theta}. \tag{4.11}$$

Bereme-li v úvahu pouze kladný poloprostor, lze zapsat křivku explicitně

$$z = \sqrt{\frac{x_0^2 + 4y^2}{4 \tan^2 \theta}}. \tag{4.12}$$

Průsečíky dvou kuželů s posunutými vrcholy mají průsečík hyperbolu. V podsekci 3.3.2 bylo zjištěno, že interference svazků s posunutými rovnoběžnými osami vytváří tmavé hyperbolové pruhy. Nabízí se otázka, zda-li má tato skutečnost nějakou souvislost. Tato otázka bude ponechána pro další studium.

5 Závěr

V první kapitole bakalářské práce byly shrnuty základní principy vlnové optiky a interferometrie. Ve druhé kapitole bylo navázáno rešerší zabývající se popisem nedifrakčních svazků s důrazem na nejvýznamnější – besselovské svazky. Byl popsán rozdíl mezi nedifrakčními a pseudonedifrakčními svazky, byl vysvětlen pojem besselovský-gaussovský svazek. Druhá kapitola také stručně seznámila čtenáře s vlastnostmi besselovských svazků, s možnostmi jejich generování a s využitím. Závěrem kapitoly byla také věnována pozornost různým stupňům volnosti, které byly zkoumány v experimentální části.

Experimentální část popisovala postupně většinu experimentů, které proběhly v optické laboratoři. Na Michelsonově interferometru byly provedeny čistě kvalitativní měření, která měla za cíl seznámení s laboratorní technikou. Michelsonův interferometr se ukázal být nepostačujícím k dalšímu měření stupňů volnosti zrcadel. Nebylo totiž možné oddělit různé stupně volnosti od sebe, především pak náklon os a posun os. Jediný měřitelný stupeň volnosti pomocí Michelsonova interferometru se ukázal být fázový posun.

Postaven byl Mach–Zehnderův interferometr, který dle předpokladu měl jednotlivé stupně volnosti oddělit. Fázový posun se oddělil využitím zrcadla s piezoelektrickým aktuátorem, který velmi citlivě pohyboval zrcadlem a prodlužoval tak dráhu svazku v jedné větvi interferometru. Bylo změřeno, že s 3% odchylkou se fázový posun mění stejně jako u interference gaussovských svazků. Nelze zcela definitivně určit, je-li taková odchylka dána systematickou chybou měření, nebo jiným chováním svazku. Dle simulací [12] by interference fázového posunu pomocí besselovských svazků měla být totožná s interferencí gaussovských svazků.

Posun rovnoběžných os svazků byl zkoumán podobnou sestavou. Piezoelektrické zrcadlo bylo vyměněno za zrcadlo s mikroposuvem, který umožňoval posun v rozsahu 0 až 0,5 mm. Kamera oproti minulému rozestavení snímala druhý svazek procházející druhým děličem. Zaznamenány byly interferogramy svazků s různým rozestupem. Bylo zjištěno, že interferenční pruhy vytváří od jistého rozestupu os svazků hyperboly. Ohniska těchto hyperbol jsou jádra svazků. Posun os svazků je významný tím, že ho nelze měřit klasickou interferometrií, je tedy úspěchem, že se tento stupeň volnosti podařilo takto zdokumentovat.

Posledním měřeným stupněm volnosti byl náklon os. Ten se měnil pomocí pootočení děliče, které se kompenzovalo posunem zrcátka. Byla měřena závislost úhlů svíraných svazky na vzdálenosti jednotlivých pruhů tvořených náklonem os, resp. délky periody interferenčního vzoru. Výsledek měření ukázal, že tato závislost je nepřímou úměrností popsanou rovnicí $f(x) = \frac{0{,}659}{x}$, kde úhel svíraný osami svazků $f(x)$ je vyjádřen v miliradiánech a délka periody interferenčního vzoru x v milimetrech.

Na závěr práce byla vložena kapitola týkající se analytické geometrie kuželů. Byl zjištěn způsob analytického popisu kuželů, který lze jednoduše převést do skriptu Pythonu nebo MATLABu a pomocí kterého lze zkoumat průsečíky kuželů s různými vzájemnými polohami. Jednoduchým výpočtem bylo dokázáno, že průnik kuželů, jejichž vrcholy jsou posunuty v jedné dimenzi po ose x nebo y, má tvar hyperboly. Pro další bakalářské nebo diplomové práce se nabízí otázka, jakou to má souvislost s interferenčními pruhy ve tvaru hyperboly při posunu os svazků, když právě posunem vrcholů kuželů se posun os svazků aproximuje.

Bakalářská práce přinesla více světla do neprobádané oblasti interference nedifrakčních svazků a zároveň položila na stůl mnoho otázek pro další studium. Určování přesné polohy pomocí besselovských svazků může být velice užitečné při seřizování optických aparatur. O výzkum v této oblasti je tedy z pochopitelných důvodů velký zájem. Aby se však známé skutečnosti daly proměnit v reálné aplikace, je třeba celkové kvantifikace všech stupňů volnosti, což může být práce na několik let pro tým vědců. Výsledky však mohou být v metrologii velice užitečné.

Bibliografie

[1] MIKŠ A. *Aplikovaná optika*. 2009. ISBN: 978-80-01-04254-0.

[2] SALEH B.E.A. a TEICH M.C. *Základy fotoniky*. 1994. ISBN: 8085863006.

[3] Wikipedia contributors. *Gaussian beam — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 3-March-2018]. 2018. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaussian_beam&oldid=822729815.

[4] Wikipedia contributors. *LIGO — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 20-March-2018]. 2018. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=LIGO&oldid=830942479.

[5] JÍNOVÁ D. *Interferometrie pro určování polohy ve 3D*. 2016. URL: http://knihovna-opac.tul.cz/diplomovaPrace.php?id_dipl=33738.

[6] McGLOIN D. a DHOLAKIA K. "Bessel beams: Diffraction in a new light". In: *Contemporary Physics* 46.1 (led. 2005), s. 15–28. DOI: 10.1080/0010751042000275259.

[7] RECAMI E. *Non-diffracting Waves*. Wiley-VCH, 2013. ISBN: 978-3527411955.

[8] GORI F. et al. "Bessel-Gauss beams". In: *Optics Communications* 64.6 (pros. 1987), s. 491–495. DOI: 10.1016/0030-4018(87)90276-8.

[9] DURNIN J. et al. "Diffraction-free beams". In: *Physical Review Letters* 58.15 (dub. 1987), s. 1499–1501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.58.1499.

[10] JEŽEK J. et al. "Manufacturing of extremely narrow polymer fibers by non-diffracting beams". In: 6609 (květ. 2007). URL: http://www.isibrno.cz/omitec/download/jezek_SPIE_07.pdf.

[11] DURNIN J. "Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory". In: *Journal of the Optical Society of America A* 4.4 (dub. 1987), s. 651. DOI: 10.1364/JOSAA.4.000651.

[12] KŘÍŽEK J. "Study of non-diffracting beams". Dipl. FJFI ČVUT, 2016.

[13] QingHua Lv et al. "Interference patterns of two non-diffracting beams". In: *Optics Communications* 285.6 (2012), s. 960–964. DOI: 10.1016/j.optcom.2011.11.079.

[14] BANDRES M. A. "Parabolic nondiffracting optical wave fields". In: *Optics Letters* 29.1 (led. 2004), s. 44–46. DOI: 10.1364/OL.29.000044.

[15] DUOCASTELLA M. a ARNOLD C.B. "Bessel and annular beams for materials processing". In: *Laser & Photonics Reviews* 6.5 (led. 2012), s. 607–621. DOI: 10.1002/lpor.201100031.

[16] ROKYTKA M. *Grafy Besselových funkcí*. Ed. MFF CUNI. 23. ún. 2018. URL: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/0607/zs/besselky.htm.

[17] MALÝ P. *Optika*. Vyd. 2., přeprac. Praha: Karolinum, 2013. ISBN: 978-80-246-2246-0.

[18] KOLLÁROVÁ V. "Syntéza světelných polí [online]". Disertační práce. Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, Olomouc, 2011 [cit. 2017-11-14]. URL: http://theses.cz/id/9sslk2/.

[19] Wikipedia. *Axicon — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. [Online; Stand 19. März 2018]. 2018. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Axicon&oldid=173015977.

[20] Wikipedie. *Interferometr — Wikipedie: Otevřená encyklopedie*. [Online; navštíveno 20. 03. 2018]. 2017. URL: https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Interferometr&oldid=15675031.

[21] BOUCHAL Z. et al. "Self-reconstruction of a distorted nondiffracting beam". In: *Optics Communications* 151.4-6 (červ. 1998), s. 207–211. DOI: 10.1016/s0030-4018(98)00085-6.

[22] BOUCHAL Z. "Nondiffracting optical beams: Physical properties, experiments and applications". In: *Czechoslovak Journal of Physics* 53.7 (2003), s. 537–578. DOI: 10.1023/a:1024802801048.