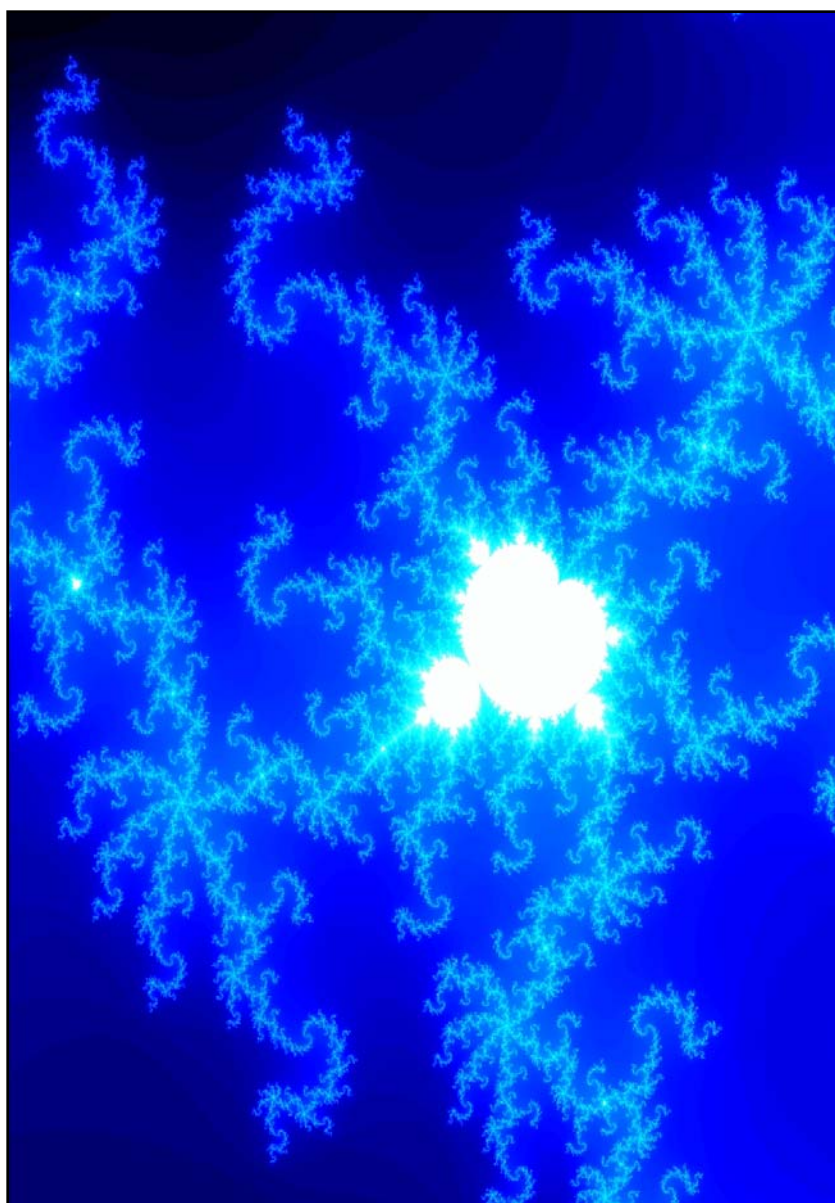


ZÁKLADNÍ INFORMACE O FRAKTÁLOVÉ GEOMETRII – PŘÍLOHA A

Vlastimil Hotař



OBSAH

1	Úvod	3
2	Krátce z historie teorie chaosu a fraktálové geometrie	4
3	Fraktálová geometrie a fraktály	5
3.1	Co je to fraktálová geometrie a fraktál?	5
3.2	Jak fraktály vznikají?	6
3.3	Jaké mají fraktály vlastnosti?	9
3.4	Co je to fraktálová (Hausdorff-Besicovitchova) dimenze?	9
3.5	Kde se fraktály vyskytují?	10
4	Definice fraktálů	12
4.1	Definice fraktálu pomocí Hausdorff-Besicovitch dimenze	12
4.1.1	Topologická dimenze D_T	12
4.1.2	Pokrývací dimenze D_P	13
4.1.3	Fraktálová (Hausdorff-Besicovitch) dimenze D_H	14
4.2	Definice fraktálu pomocí soběpodobnostní dimenze D_S	17
4.3	Definice fraktálu pomocí kapacitní dimenze D_K	19
4.4	Soběafinita a Hurstův exponent	21
5	Rozdělení fraktálů	23
5.1	Matematické fraktály	23
5.1.1	Kochova křivka a Kochova vložka	24
5.1.2	Cantorova množina	24
5.1.3	Sierpinského těsnění	25
5.1.4	Příklady dalších fraktálů vzniklých algoritmem IFS	26
5.1.5	Mandelbrotova množina	26
5.1.6	Juliovy množiny	28
5.1.7	Bifurkace	30
5.1.8	Atraktory	31
5.2	Přírodní fraktály	32
6	Odhad fraktálové dimenze	34
6.1	Obvodová metoda	34
6.2	Mřížková metoda	36
6.3	R/S dimenze	37
6.4	Celková variační metoda	38
6.5	Ostatní metody	39
7	Závěr	40
	Literatura	41

1 Úvod

*Teorii chaosu a fraktálovou geometrii lze označit za nový pohled na svět. Fraktálová geometrie (lze se také setkat s pojmem *fraktální geometrie*) je součástí obsáhlé teorie chaosu a slouží jako jeden z důležitých nástrojů popisů dynamických, turbulentních a nelineárních dějů. Teorie chaosu spolu s fraktálovou geometrií zasahuje prakticky do všech vědních oborů. Počínaje meteorologií, přes ekonomiku, biologii, medicínu až po astronomii. Zásadním způsobem mění pohled na přírodní struktury, dynamiku, turbulenci a nelineární systémy. Jako mnohé z nových teorií poráží hranice, které oddělovaly vědecké disciplíny a stává se tak vědou uplatňující se v mnoha různých oborech.*

Dá se říci, že teorie chaosu je vědou o věcech běžných, věcech které nás obklopují a které jsou pro nás přirozené. Je o mracích, vodních vírech, stromech, listí, pohoří, sněhových vločkách, počasí, biorytmech, inflaci, atd.

Teorie chaosu se stala nedílnou součástí dnešní matematiky a fyziky. Nejzavilejší zastánci této vědní disciplíny jdou dokonce tak daleko, že říkají, že minulé století budou charakterizovat tři věci: relativita, kvantová mechanika a chaos. Věří, že chaos se stal třetí velkou revolucí dvacátého století v přírodních vědách, který mění zásadně pohled na svět [A.4].

Toto tvrzení není nijak přehnané. Do šedesátých let se věřilo, že svět kolem nás je možné popsat pomocí „*Newtonovského determinismu*“. Tedy například 100% předpovědi počasí jsou jen otázkou dostatečně výkonných počítačů, modelování systémů soustav těles i vznik celého vesmíru je popsitelný pomocí tehdy známých matematických postupů a výkonných počítačů budoucnosti. Vycházelo se ze základních předpokladů: Velká příčina vyvolá velký následek a malá změna způsobí malou změnu. Dnes víme, že vše je jinak. Počasí dokážeme stále předpovědět se slušnou určitostí jen na dobu pěti dnů. Systém více než dvou těles je pomocí dříve známých postupů neřešitelný. Modely vzniku vesmíru je třeba stále brát s velkou neurčitostí. Dnes víme, že i malá změna může mít velké následky.

2 KRÁTCE Z HISTORIE TEORIE CHAOSU A FRAKTÁLOVÉ GEOMETRIE

Přesto, že je teorie chaosu a fraktálová geometrie relativně novou vědní disciplínou, na problematiku chaosu a fraktálovou geometrii naráželi vědci již dříve. Je to například problém měření délky hranic, řek a pobřeží. Délky často měřené stejným způsobem se lišily v desítkách procent. Tehdy však nikdo nevěděl o fraktálové geometrii a měřítkové neměnnosti. Rozdíl se proto připisovaly chybám v měření.

Na konci devatenáctého století (1883) přichází německý matematik Georg Cantor s *Cantorovou množinou*. Tato množina je jedním z dnes nejpopulárnějších a nejjednodušších fraktálů.

V roce 1904 popsal švédský matematik Helge von Koch jako první matematický objekt, který je znám pod pojmem *Kochova křivka*. Tato křivka svými vlastnostmi znepokojovala mnoho matematiků dvacátého století, kteří se jí zabývali. Byla něčím co se naprosto lišilo od tehdy známých geometrických matematických obrazců. Několik matematiků přišlo s dalšími podobnými útvary. Teprve až fraktálová geometrie dokázala specifické vlastnosti těchto útvarů vysvětlit.

Během první světové války objevili a studovali francouzští matematikové Gaston Julia a Pierre Fatou podivné útvary známé dnes jako *Juliovy množiny*. V té době však neexistoval počítač, který by jim práci usnadnil. Jejich skromné kresby a jejich práce zapadly.

Novodobé základy této vědní disciplíny sahají do šedesátých let dvacátého století. Jako snad první úspěšně studoval problémy chaosu matematik ve službách meteorologie Edward Lorenz. Setkal se s problémem, který byl později nazván jako „*Motýlí efekt*“. Na základě řešení tohoto problému objevil snad nejznámější atraktor, který je po něm pojmenován: *Lorenzův podivný atraktor*. Jeho práce se stali základy teorie chaosu. Další matematikem byl Stephen Smale se svojí topologickou transformací zvanou *Smaleova podkova*. Matematik James Yorke dal chaosu jméno. Nepřehlédnutelným je i Robert May, fyzik ve službách biologie, s *jednoduchou logistickou funkcí* a *bifurkačními diagramy* pro její popis. Benoit Mandelbrot, matematik polského původu, který poprvé použil název „*fraktál*“ pro „*nekonečně strukturované*“ objekty a je považován za „*otce fraktálové geometrie*“ Astronom Michel Hénon se svým *atraktorem*, Mitchell Feigenbaum s univerzální konstantou platnou v matematice i fyzice (*Feigenbaumova konstanta*). Nelze však zapomenout ani na Heinz-Otto Peitgena a Petera H. Richtera, kteří poprvé využili fraktálů jako uměleckých grafik při svých výstavách po celém světě. Samozřejmě na tvorbě teorie se podílelo mnoho dalších více či méně slavných vědců.

Podrobněji je historie teorie chaosu a fraktálové geometrie popsána v anglicky psané knize *Chaos and Fractals* [A.5]. Čtenáře lze dále odkázat na velice zdařilou populárně naučnou knihu: *Chaos, vznik nové vědy* [A.4], kde je tento vědní obor popsán i v historických souvislostech. Stručně je historie fraktálové geometrie popsána ve skriptech: *Aplikovaná informatika* [A.9].

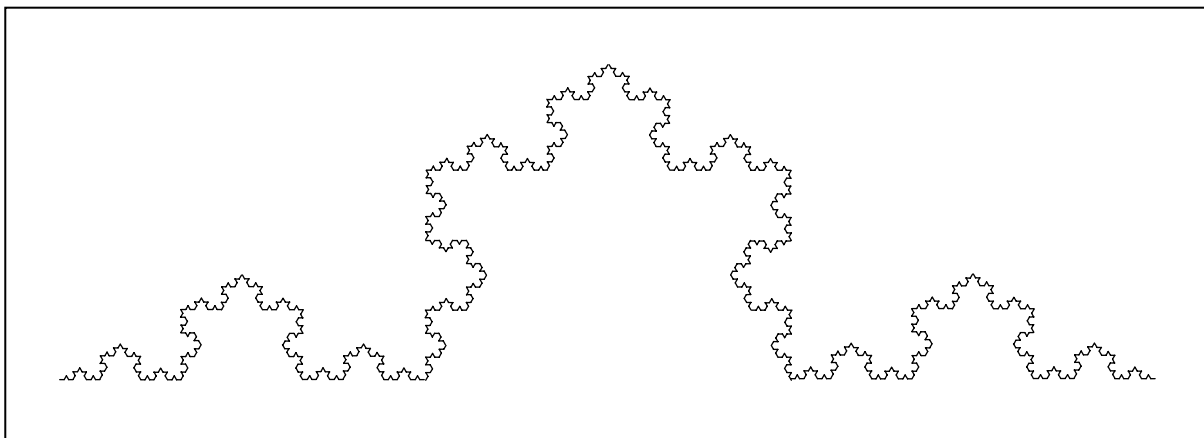
3 FRAKTÁLOVÁ GEOMETRIE A FRAKTÁLY

Do doby než byla objevena a popsána *fraktálová geometrie*, byla *euklidovská geometrie* považována za nejsilnější nástroj popisu všech geometrických útvarů. Euklidovská geometrie byla s úspěchem používána po celá staletí, avšak její slabinou, kterou si prakticky nikdo neuvědomoval, byl problém jak popsat jednoduchým způsobem složitě strukturované útvary. Tyto útvary mohly být jak matematického, tak i přírodního původu, jak bude v následujících podkapitolách ukázáno.

„Běžné objekty“ jako úsečky, kruhy, čtverce, trojúhelníky, obdélníky, koule, krychle, jehly lze poměrně snadno popsat pomocí Euklidovské geometrie. Například pravoúhlý trojúhelník je plně popsán (každý jeho bod je jednoznačně určen) Pythagorovou větou $c^2 = a^2 + b^2$ [A.9]. Pokud bychom chtěli popsat jednoduchý fraktál jako je například *Kochova křivka* (obr. 1), pak bychom museli stanovit složitou a nepřehlednou rovnici. Tento objekt však můžeme jednoduše popsat pomocí fraktálové geometrie. Její složitost lze dokonce popsat pomocí jednoho čísla, tzv. *fraktálové dimenze*.

K tomu, abychom pochopili celý problém, je nutné si zodpovědět pět základních otázek:

- co je to fraktálová geometrie a fraktál?
- jak fraktály vznikají?
- jaké mají fraktály vlastnosti?
- co je to fraktálová (Hausdorff-Besicovitchova) dimenze?
- kde se fraktály vyskytují?



Obr. 1 Kochova křivka

3.1 CO JE TO FRAKTÁLOVÁ GEOMETRIE A FRAKTÁL?

Fraktálová geometrie je matematický nástroj pro popis složitě strukturovaných objektů, jejichž charakter se nemění při zvětšení. Klasickým příkladem je tvar pobřežní linie. Pokud srovnáme dvě mapy různých měřítek pak charakter pobřežní linie se nemění – pobřeží na obou mapách vypadá stejně. To znamená, že pobřežní linie je *měřítkově neměnná*, či jinak, nemá charakteristické délkové měřítko [A.1]. Benoît Mandelbrot si položil jinou otázku: Jaká je podstata tvaru pobřeží? Ta se stala mezníkem úvah v jeho práci: „Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie?“ (1977 - How Long Is the Coast of Great Britain?) Tato na první pohled

jednoduchá otázka však po chvíli úvah nabývá hlubšího smyslu. Mandelbrot vyšel z poznatků Richardsona, který měřil ostrov Korsiky (více v kapitole 4.1.3 a 6.1). Mandelbrot použil pro změření délky pobřeží Velké Británie nejprve satelitních map. V druhém případě pak map turistických. Došel k závěru, že délka změřená z map turistických je 2x až 3x delší než délka změřená z map satelitních. Důvod je prostý: turistické mapy jsou mnohem podrobnější než mapy satelitní. To způsobí, že při měření délky pobřeží z mapy satelitní mnoho detailů zanedbáme či přehlédneme, a tyto detaily se nám projeví jako důležité při měření z map turistických. Richardson empiricky odvodil vztah mezi délkou a měřítkem. Mandelbrot pak našel souvislosti v tomto vztahu s Hausdorffovou dimenzí a mohl tak označit pobřežní linii za fraktál [A.5, A.9].

Označení fraktál tedy poprvé použil B. Mandelbrot. Ten je také označován za „otce“ fraktálové geometrie. Je však pravdou, že matematické objekty dnes označované jako klasické fraktály (přesněji matematické deterministické fraktály), byly objeveny mnohem dříve, včetně Kochovy křivky. Mandelbrot však tyto objekty popsal, nazval a spolu s dalšími matematiky sjednotil teorii, kterou označujeme jako fraktálová geometrie. Mandelbrot slovo „*fraktál*“ použil pro všeobecné označení objektů, jejichž tvar je nezávislý na velikosti měřítka, pod kterým objekt pozorujeme (měřítková neměnnost). Vyšel z významu latinského slova "*fractus*". Z něj odvozené slovo "*frangere*" znamená "*rozlámat*" - vytvořit nepravidelné úlomky. Jako fraktály se tedy označují nepravidelné geometrické útvary dělitelné na jednotlivé části, z nichž každá je v ideálním případě zmenšenou kopií celku. Jsou to tedy množiny, jejichž geometrický motiv se opakuje v základním tělese až do nekonečna a tento jev je nazýván *soběpodobnost* (*self-similarity*). Objekt je tedy *striktně soběpodobný* (*deterministický*), pokud může být rozdělen na libovolně malé části, které jsou malou replikou původní množiny [A.1-A.10]. Matematické fraktály mohou být také *statisticky soběpodobné* (*stochastické*), stejně jako fraktály přírodní, kdy jsou malé úlomky podobné celku jen statisticky.

Vedle soběpodobných fraktálů existují také fraktály *soběafinitní* (*self-affined*, *soběpříbuzné*). U těchto fraktálů je třeba znát vedle struktury nepravidelných úlomků i způsob transformace měřítka (více v kap. 4.4). Čtenář se může také setkat s názvem *samopodobnost* a *soběpříbuznost*. Můžeme se také setkat s pojmem *soběpříbuznost* [A.9], který charakterizuje objekty, jejichž kterýkoliv výsek je *podobnou* kopií původního tělesa. Fraktály budou dále matematicky definovány v kapitole 4 a rozděleny v kapitole 5.

3.2 JAK FRAKTÁLY VZNIKAJÍ?

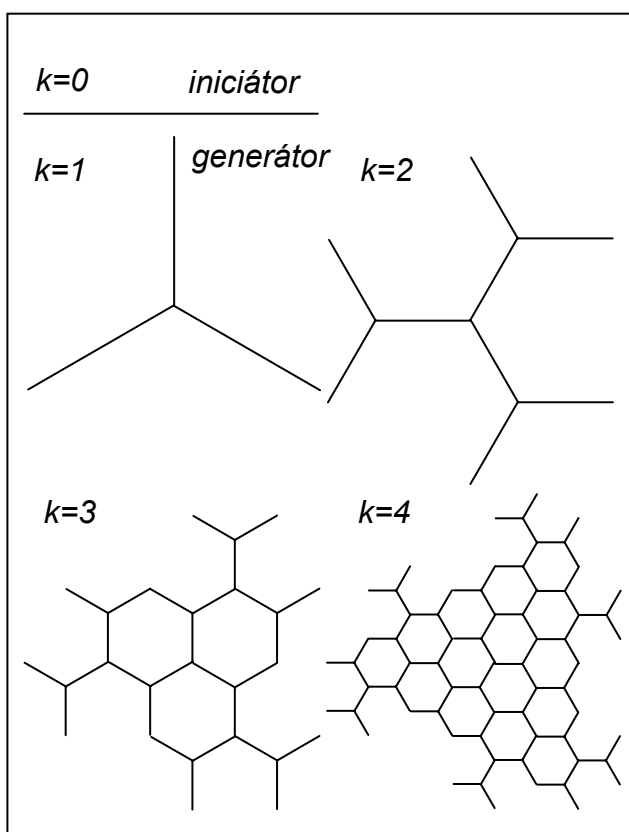
Na tuto otázku lze uspokojivě odpovědět pouze pro *matematické fraktály*, tedy útvary vznikající matematicky definovanou geometrickou transformací. Vedle matematických fraktálů existují také *fraktály přírodní*. V případě přírodních fraktálů neznáme geometrické transformace založené na fyzikální a (nebo) chemické podstatě jejich vzniku.

Rozdělení matematických fraktálů je možné podle algoritmu konstrukce fraktálu:

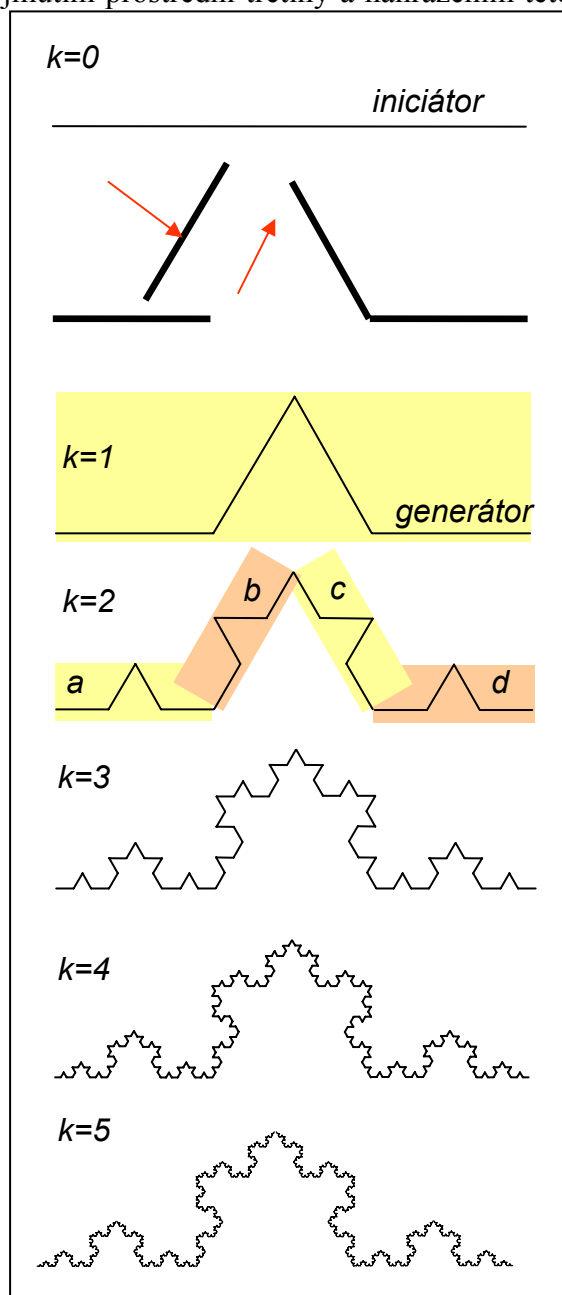
- IFS (*Iteration Function System*), který ke konstrukci používá transformací, které se cyklicky opakují.
- TEA (*Time Escape Algorithms*). Tento algoritmus provádí iterace pro uživatelsky stanovené hranice. Je používán v komplexní rovině.

Fraktály lze dále dělit podle různých pravidel a podle různých autorů, viz kap. 5.

Vysvětlení konstrukce *IFS* fraktálů je možné například pomocí již zmíněné *Kochovy křivky*. V případě této křivky potřebujeme mít tzv. *iniciátor* a *generátor*. Iniciátor v tomto případě představuje přímku (krok 0, obr. 2) a generátor je tvar kterým se iniciátor nahradí. V tomto případě je generátorem útvar vzniklý vyjmutím prostřední třetiny a nahrazením této třetiny dvěma přímkami délky jedné třetiny, jak je na obr. 2. Tuto transformaci si lze také představit jako přerušení úsečky v jedné třetině a nadzvednutí druhé třetiny tak abychom mohli vložit novou přímku délky jedné třetiny. Po transformaci je každá strana už považována za iniciátor v kroku dalším. V každém kroku se nahrazuje každá přímka (iniciátor) zmenšenou kopií generátoru. Jak je vidět na obr. 2, tak již v kroku 5 dostáváme poměrně komplikovanou křivku.



Obr. 3 Generování Voštinovy struktury



Obr. 2 Generování Kochovy křivky

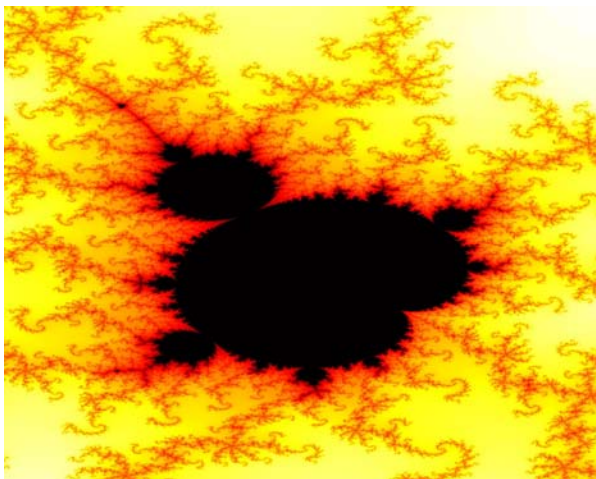
Pokud iniciátorem bude opět přímka a generátorem tři úsečky jdoucí z počátku po 120° (obráz. 3) pak po několika iteracích obdržíme tzv. *Voštinovu strukturu*.

Pokud jako iniciátor bude rovnostranný trojúhelník, a generátor stejný jako u Kochovy křivky, pak obdržíme tzv. *Kochovu vločku* (obráz. 15 v kap. 5.1.1).

Generaci tohoto typu fraktálů je lépe si představit z matematického hlediska jako konstrukce pomocí takzvaných *afinních transformací*. Těmito transformacemi je: *zmenšení*, *rotace* a *pohyb*. V případě Kochovy křivky je pro generaci použito všech tří transformací.

Postup těchto transformací je znázorněn na obr.2 žlutou a oranžovou výplní. Generátor v kroku 1 je ve druhém kroku čtyřikrát uplatněn. Pro levou část kroku (a) je generátor pouze zmenšen na $1/3$. Pro druhou návaznou část (b-oranžová výplň) je generátor zmenšen na $1/3$, posunut na $1/3$ a pravý konec otočen o 60° proti směru hodinových ručiček. Třetí část (c) je také zmenšena na $1/3$, posunuta $1/3$, ale levý konec otočen o 60° ve směru hodinových ručiček. Poslední část je opět zmenšena na $1/3$ a posunuta na $2/3$. Více o afinních transformacích najde čtenář ve skriptech [A.9].

Jiným typem fraktálů je *TEA*. Pro tento typ fraktálů se využívá komplexní roviny. *Komplexní rovina* se skládá z reálných a imaginárních čísel. Imaginární čísla jsou definována vztahem $i = \sqrt{-1}$ a vznikla z důvodu potřeby řešit polynomické funkce i pro hodnotu $\sqrt{-1}$. Komplexní rovinu si lze představit tak, že na ose x jsou *reálná čísla* a na ose y *imaginární čísla*. Aritmetika komplexních čísel je jednoduchá. Komplexní číslo se zapisuje jako součet dvou částí, například $2 + 3i$ (souřadnice bodu na ose x je 2 a souřadnice na ose y je 3).



Obr. 4 Výřez Mandelbrotovy množiny

Komplexní rovina je pro generaci fraktálu typu TEA definována maticí komplexních čísel. Tuto matici si lze představit jako klasickou matici „reálných“ čísel. Jednotlivé body matice jsou brány jako vstupní hodnoty iterace, která je dána například vztahem: $z_{n+1} = z_n^2 + c$, což je rovnice *Mandelbrotovy množiny*. Pro každý bod matice, který představuje c , je spuštěn tento algoritmus, kde počáteční $z_0 = 0$. Po každém kroku v daném bodu je proveden test, zda řešení směřuje k nekonečnu nebo zda se blíží ke konečné hodnotě. Pokud řešení směřuje k nekonečnu, pak bod do množiny nepatří a výpočtová smyčka se zastaví. Když řešení nesměruje k nekonečnu, přejde se k dalšímu kroku, nově vypočtená čísla předcházejícího kroku se použije jako výchozí a provede se znovu test. Pokud řešení ani po nekonečně mnoha krocích nesměruje k nekonečnu, pak do množiny patří a bodu je přiřazena černá barva. Tento algoritmus se provede pro každý bod množiny komplexních čísel. Barevná škála okolo množiny reprezentuje, po kolika krocích se výpočet přeruší. V reálném výpočtu se provádí samozřejmě jen konečný počet iterací. 100 iterací už vede k uspokojivému výsledku a 1000 iterací zaručuje správný výsledek. (Tento typ fraktálu je podrobněji popsán v kapitole 5.1.5 a 5.1.6.) Ukázka vzniklého objektu je na Obr. 4. Černé plochy obrázku tvoří množinu bodů, která je fraktálovým obrazcem. Ostatní barvy reprezentují části, která do množiny nepatří a začaly unikat do nekonečna po několika krocích. V našem případě nejsytější červená představuje vyšší číslo kroků a bílá únik do nekonečna hned po prvním kroku. Mandelbrotova množina je vlastně tvořena *atraktorem* (kap.5.1.8).

Fraktálová geometrie je ve své nejhlubší podstatě práce s *metrickými prostory*, na kterých se pracuje s limitami, ze kterých v konečné fázi vzniknou fraktály. Vztah mezi metrickými prostory a fraktály je dobře a srozumitelně vysvětlen ve skriptech [A.9].

3.3 JAKÉ MAJÍ FRAKTÁLY VLASTNOSTI?

Vlastnosti fraktálů je možné popsat na příkladu již známé *Kochovy křivky* (obr. 1), která má několik zajímavých vlastností typických pro fraktály:

- Kochova křivka má složitý tvar těžko popsatelný pomocí Euklidovské geometrie.
- Křivka je spojitá, sama sebe nikde neprotíná a nemá nikde derivaci.
- Jedná se o křivku *striktně soběpodobnou*, tedy můžeme vzít jakoukoliv malou část této množiny a ta bude vždy přesnou malou replikou původní množiny. Říkáme, že je měřítkově nezávislá.
- Délka Kochovy křivky je nekonečná, ačkoliv se vyskytuje na konečné ploše. Tímto způsobem lze zahlédnout nekonečno. K pochopení tohoto problému si stačí uvědomit, že při každém kroku je křivka prodloužena o $1/3$ délky původní. Při nekonečném počtu kroků je zřejmé, že nekonečně mnoho prodloužení povede k nekonečné délce.
- Pokud bychom však chtěli změřit délku Kochovy křivky pomocí různých měřítek, pak bychom došli pokaždé k jiné délce. Tato délka by se prodlužovala se zmenšující se délkou měřidla. Slovy laika řečeno: Vezmeme odpichovací kružítko s nastaveným krokem 10 mm a změříme s ním délku Kochovy křivky. Pak nastavíme krok 1 mm a provedeme nové měření. To samé provedeme pro krok 0.1 mm. Přesto že bychom očekávali, že délka se bude blížit k nějaké konečné hodnotě, bude se ve skutečnosti se zmenšujícím krokem (zmenšující se délkou měřidla) délka pokaždé prodlužovat. Důvod je, že při větších krocích odpichovacího kružítko jsou zanedbány určité detaily, které však jsou proměřeny a do délky započteny při menších krocích.
- Další vlastností je neceločíselná (fraktálová) dimenze křivky. Fraktálová dimenze Kochovy křivky je 1,2619, tedy je z hlediska topologického něčím mezi přímkou (která má dimenzi 1) a hladkou plochou (která má dimenzi 2). To je možné díky vysoké strukturovanosti křivky, která se objeví ve zvětšení fraktálové dimenze. Toto číslo (fraktálová dimenze) uvádí míru složitosti křivky.

Uvedené vlastnosti Kochovy křivky jsou platné pro většinu fraktálů. Nicméně popis fraktálů a jejich vlastností se liší často podle autorů. Je tedy možné se setkat s jiným popisem vlastností.

V případě zmiňované Mandelbrotovy množiny mluvíme o tzv. multifraktálu (mnoho-fraktálu), u kterého se strukturovanost mění.

3.4 CO JE TO FRAKTÁLOVÁ (HAUSDORFF-BESICOVITCHOVA) DIMENZE?

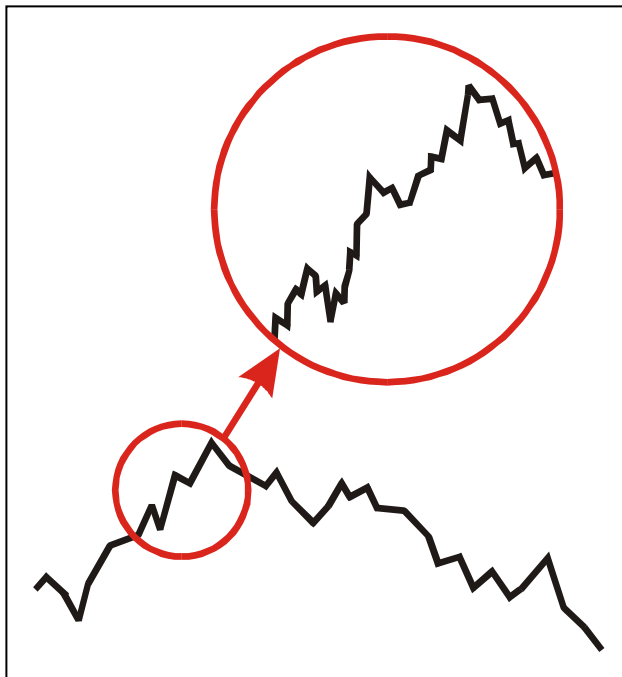
Ve fraktálové geometrii počítáme nebo odhadujeme tzv. *fraktálovou dimenzi*, které je „*charakteristickým číslem*“, které uvádí jak složitý je pozorovaný útvar. Může se jednat o povrch, nebo strukturu tělesa, časovou řadu nebo množinu bodů. Fraktálová dimenze (lze se také setkat s pojmem *Hausdorff-Besicovitch* dimenze) matematicky popisuje složitost těchto objektů (více o fraktálové - Hausdorff-Besicovitchovy - dimenzi v kapitole 4.1.3).

Fraktálová dimenze, v případě fraktálů, převyšuje jejich topologickou dimenzi, která je celočíselná (dimenze charakterizované bodem, úsečkou, trojúhelníkem a tetraedrem). Z tohoto předpokladu vychází také jedna z definic fraktálů. Více o dimenzích v kapitole 4.

3.5 KDE SE FRAKTÁLY VYSKYTÚJÍ?

Zatím jsme se zabývali pouze fraktály matematickými, až na výjimku, kterou byla pobřežní linie. Matematické fraktály nemají tak velký význam pro náš běžný život a setkáme se s nimi pouze v matematice. Dobře nám však poslouží pro pochopení fraktálové geometrie a dají se použít pro modelování určitých přírodních struktur (*stochastické fraktály*).

Mnohem důležitější jsou fraktály kolem nás (*přírodní fraktály*). Mnoho objektů a struktur okolo nás je nepravidelných a nedá se popsat pomocí klasické Euklidovské geometrie, tedy pomocí přímek, obdélníků, trojúhelníků, kružnic, kuželů apod. Je značně složité či spíše nemožné popsat pomocí této klasické geometrie struktury, jako je již zmíněná pobřežní linie, nebo pohoří, oblaka, stromy, sněhové vločky, rozložení hmoty v galaxiích, ale i povrch obrobku, tvar trhlin i vad v obrobku i nástroji.



Obr. 5 Struktura na struktuře

Podíváme-li se kolem nás důkladně, můžeme svět vnímat jako kompromis mezi Euklidovskou geometrií a geometrií fraktálovou. Vesmírné těleso jako je naše planeta se může při pohledu z jiné planety jevit jako hladká koule. Abychom si to představili, udělejme malý výpočet. Rozdíl mezi nejvyšším bodem povrchu naší planety Mount Everest - 8,848 km a nejnižším bodem Mariánským příkopem -11,034 km v Tichém oceánu je skoro 20 km. Průměr naší planety je 12 740 km. Představme si nyní naši planetu jako kouli o průměru 10 cm. Nejvyšší rozdíl mezi nejnižším a nejvyšším bodem bude pouhých 156 μm (0,0156 cm). Takto hladký povrch může mít koule zhotovená ze skla. Jistě málokdo zapochybuje a označí takovéto těleso za dokonale hladkou kouli. Tedy za euklidovské těleso. Nikdo však také nebude pochybovat, že povrch naší planety je strukturovaný a členitý. Všechny hory, kopce, údolí, oceány a moře se svými vlnami, a další tvoří nekonečně složitý útvar. Právě fraktálová geometrie složitost struktury umí popsat.

V této souvislosti mluvíme také o struktuře na struktuře. Představme si kamenné pohoří. To má při pohledu z dálky svoji strukturu, kterou tvoří hory, kopce a vyvýšeniny. Podívejme se jen na jednu horu. Ta na první pohled bude opět strukturovaná. Pokud k ní přijdeme blíže, pak poznáme, že se skládá mimo jiné z kamenů, které mají opět strukturu. Pokud odlomíme kus kamene a zvětšíme ho pod lupou, tak objevíme další strukturu. Při dalším zvětšování budeme pozorovat další a další struktury. Tak to bude pokračovat až po atomární délky. Jedná se tedy o strukturu na struktuře jak je znázorněno na obr. 5.

Podle této úvahy se naše planeta Země může označit jak za euklidovské těleso, tak za fraktálový útvar. Záleží na zvoleném měřítku pozorování.

Pokud bychom se snažili popsat povrch zmiňované skleněné koule zjistili bychom, že při dostatečném zvětšení má i ona na povrchu svojí strukturu. Jakési mikrotrhliny způsobené chlazením koule při její výrobě. Pokud bychom zvětšovali dále, budeme objevovat nové a nové struktury. Opět bychom povrch této koule mohli popsat pomocí fraktálové geometrie.

Neomezujme se však na popis povrchu útvarů. Vezměme si třeba takovou sněhovou vločku, její struktura je nádherně složitá. Popis pomocí Euklidovské geometrie by byl prakticky nemožný. Pokud by se nám povedlo přeci jen naši sněhovou vločku popsat, pak výsledky budou omezeny pouze na tuto vločku. Pokud bychom pozorovali další sněhové vločky, pak každá námi pozorovaná vločka bude jiná a bude se třeba jen mírně lišit od těch ostatních. Dá se říci, že každá vločka je jedinečná. Nikdy před tím a ani nikdy v budoucnu nedopadne na zem stejná vločka. To je způsobeno neopakovatelnými podmínkami, při kterých vločka vzniká. Stejně tak jako vločka je každé těleso, útvar, množina či povrch v reálném světě unikátem, který nelze absolutně přesně reprodukovat. Můžeme vytvořit podobný objekt, ale nikdy ne kopii.

Protože fraktály se z geometrického hlediska v přírodě vyskytují a jsou její přirozenou součástí, je znalostí fraktálů využíváno i při simulacích reálného světa ve virtuální realitě, počítačových hrách a ve filmu. Příkladem může být povrch měsíce ve filmu *Apollo 13* režiséra Rona Howarda nebo *Titanik*, *Den po té* a v dalších.

4 DEFINICE FRAKTÁLŮ

Definováním pojmu fraktál, je možné lépe pochopit podstatu fraktálové geometrie a vlastnosti fraktálů. Proto se definicí fraktálů z různých pohledů budeme zabývat podrobněji.

Přestože pojem *fraktálová geometrie* je znám od konce 70. let, neexistuje přesná definice fraktálu. V odborné literatuře se můžeme setkat s různými definicemi fraktálů, které definují pojem *fraktál* z různých pohledů. Fraktály jsou v podstatě množiny, jejichž geometrický motiv se opakuje ve vlastním mateřském tělese [A.9] a z tohoto poznatku vychází většina definic. Zde je uvedeno několik nejčastějších a nejvýstižnějších definic, se kterými se může čtenář setkat.

Fraktál lze nejjednodušeji definovat jako *nekonečně členitý útvar*. Opakem nekonečně členitého útvaru je *geometricky hladký útvar*. Příkladem geometricky hladkých útvarů jsou euklidovská tělesa, jako je přímka, kruh, krychle, koule, atd.

Vlastnost fraktálů zvanou soběpodobnost použil Mandelbrot pro jinou definici fraktálu: *Fraktál je tvar tvořený částmi, které jsou podobné celku*. Je možné tak definovat soběpodobnostní dimenzi, z které můžeme odvodit fraktálovou dimenzi. Soběpodobnost a soběafinita však není postačující podmínkou. K tomu abychom mohli mluvit o fraktálu, musí být splněny ještě další podmínky [A.1, A.5].

Další snad nejvíce používanou je definice opět od Mandelbrota: *Fraktál je množina jejíž Hausdorff-Besicovitch (fraktálová) dimenze převyšuje její topologickou dimenzi* [A.1, A.5, A.6].

Fraktálovou dimenzi můžeme také definovat pomocí tzv. kapacitní dimenze (capacity dimension): *Pokud kapacitní dimenze množiny existuje a není celočíselná, pak se jedná o fraktálovou dimenzi* [A.3].

V [A.9] se setkáme s podobnou definicí jako od Mandelbrota: *Fraktál je objekt jehož geometrická struktura se opakuje v něm samém. Fraktály se dělí na sobě-podobné a soběafinitní (soběpříbuzné)*.

Jednotlivé definice budou dále vysvětleny na matematických základech v následujícím textu.

4.1 DEFINICE FRAKTÁLU POMOCÍ HAUSDORFF-BESICOVITCH DIMENZE

Fraktál je množina jejíž Hausdorff-Besicovitchova (fraktálová) dimenze převyšuje její topologickou dimenzi [A.1, A.5, A.6]. Pro tuto definici musíme nejprve připomenout topologickou dimenzi D_T nejlépe pomocí pokrývací dimenze D_P . Poté bude vysvětlena Hausdorff-Besicovitch (fraktálová) dimenze.

4.1.1 TOPOLOGICKÁ DIMENZE D_T

Topologická dimenze D_T je vždy celočíselná. Objekt který je možné homomorfně (zobrazení objektu jednoho na druhém i inverzně) převést stlačováním a ohýbáním na jeden ze simplexů, má stejnou topologickou dimenzi jako simplex. Simplex v tomto případě je bod s topologickou dimenzí 0, úsečka délky 1 s topologickou dimenzí 1, pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délky 1 má topologickou dimenzi 2 a tetraedr má topologickou dimenzi 3. Topologická dimenze je často spojována s charakteristickými objekty pro tuto

dimenzi. Objekt s topologickou dimenzí 0 je bod, topologickou dimenzí 1 má přímka, topologickou dimenzí 2 má čtverec a s topologickou dimenzí 3 je to krychle. Pro většinu množin (objektů), s výjimkou patologické množiny, je možné určit jejich topologickou dimenzi pomocí „pokrývací“ dimenze. Jejich hodnoty se rovnají.

Topologickou dimenzi používá věda zvaná topologie. Topologie se nezabývá například velikostí geometrických útvarů, ale vlastnostmi, které se deformací otáčením nebo stlačováním nemění. Není důležité zda je objekt kulatý nebo hranatý, velký nebo malý, protože deformací se tyto vlastnosti změní. V topologii je důležité zda je daný objekt spojitý, zda obsahuje otvory, zda je zauzlený a podobně. Topologové se také neomezují na jedno, dvoj či tři dimenzionální Euklidovské prostory, ale často pracují v prostorech mnoha dimenzí.

4.1.2 POKRÝVACÍ DIMENZE D_P

Množina bodů, křivka a plocha můžou být pokryty disky několika možnými způsoby jak je znázorněno na obr. 6. Jednotlivé útvary můžeme pokrývat samostatnými disky, dvojicí disků mající nenulový průnik, mluvíme o dubletách, třemi kotouči, které mají vzájemný nenulový průnik – triplety a disky kde je vzájemný průnik čtyř kotoučů – kvadruplety. Pokud chceme pokrývat plochu nebo topologicky třídimenzionální objekt, musíme použít místo disků koule. Při nenulovém průniku dvou koulí mluvíme opět o dubletách, při nenulovém průniku tří koulí o tripletech, atd.

Podívejme se nejprve na pokrytí křivky v rovině. Ta je pokryta disky čtyřmi různými způsoby (obr. 6 uprostřed). Na úplné pokrytí křivky nám stačí dublety. Pouze jediný průnik dvou sousedních koulí a to při jakémkoliv poloměru. Pokrývací dimenze je $D_P = 1$.

Množina izolovaných bodů může být pokryta koulemi o nekonečně malém poloměru, takže mezi koulemi nebude žádný průnik. Pokrývací dimenze $D_P = 0$.

Plocha má pokrývací dimenzi $D_P = 2$. Na obr. 6 vpravo uprostřed jsou na pokrytí plochy použity dublety. Jak je vidět, toto pokrytí není dostačující, neboť plocha není pokryta celá. Na pokrytí potřebujeme průnik alespoň tří koulí (triplety), jak je vidět na obr. 6 dole uprostřed.

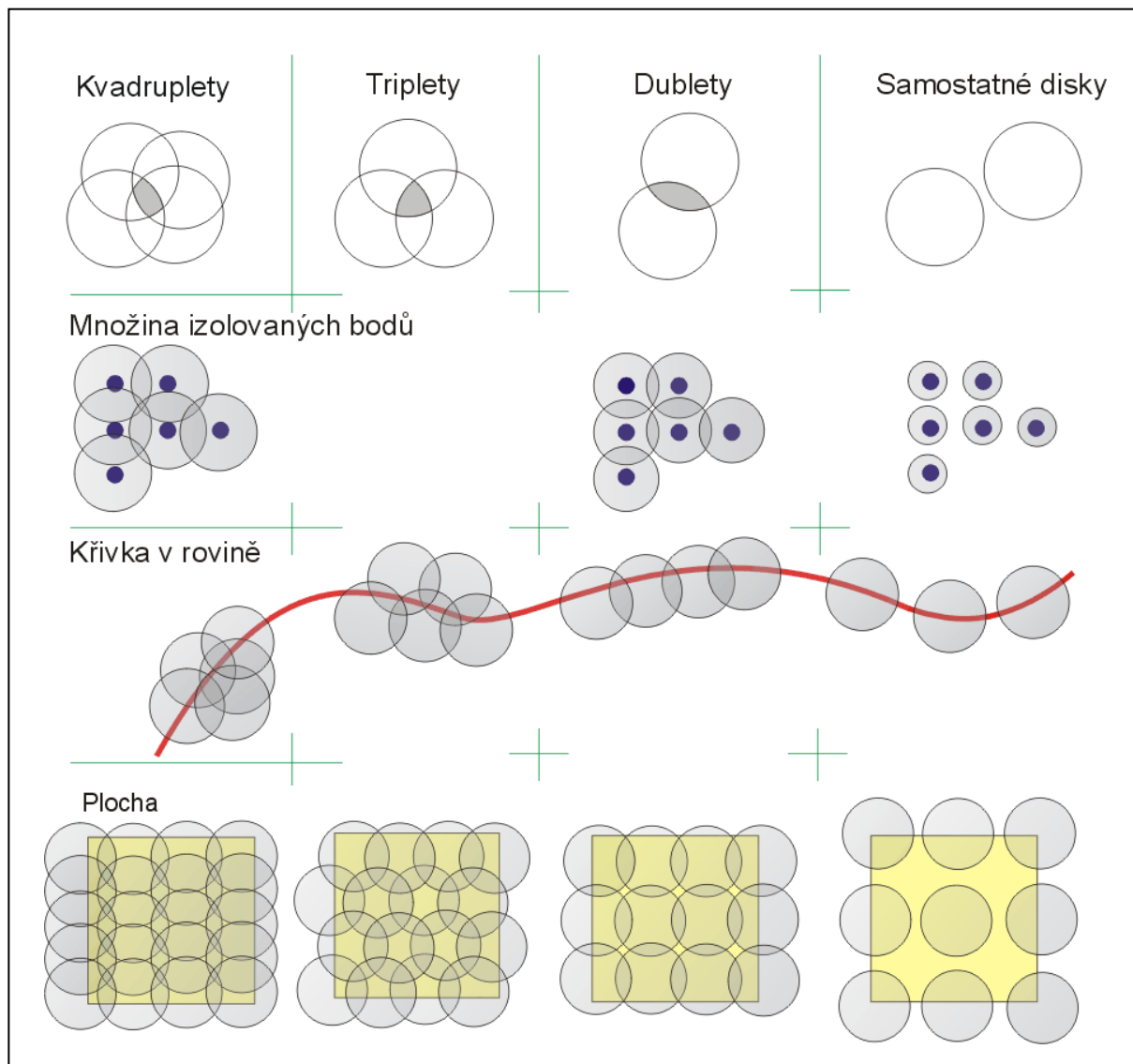
Podobná myšlenka určuje pokrývací dimenzi například krychle, takže pokrývací dimenze $D_P = 3$.

Definice pokrývací dimenze je následující:

Pokud množina S je pokryta malými disky respektive koulemi, maximální počet disků respektive koulí, který má vzájemně nenulový průnik, je nazýván uspořádání pokrytí. V případě dublet je uspořádání rovno dvěma, v případě triplet je to 3 a v případě kvadruplet je to 4. Otevřená pokrytí množiny S jsou soubory konečně otevřených disků $A = \{A_1, \dots, A_m\}$ takové, že jejich spojení pokrývá množinu S . Otevřené pokrytí $B = \{B_1, \dots, B_m\}$ je nazýváno zjemnění množiny A stanovené pro každé B_i , v němž je A_k takové že $B_i \subset A_k$ (množina B_i je podmnožinou množiny A_k). Uspořádání pokrytí množiny A je maximální celočíselné k takové, že existují disjunktivní (nespojité) indexy $i_1, \dots, i_k$ s $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \neq \emptyset$.

Množina S má pokrývací dimenzi $D_P = n$ právě tehdy, pokud pro libovolný poloměr disku respektive koule $r > 0$ existuje pokrytí množiny S koulemi o poloměru r takové, že každý bod množiny S patří maximálně do $n+1$ pokrývacích koulí a neexistuje takové pokrytí těmito koulemi, pro které by každý bod z množiny S patřil do n koulí.

Dá se dále prokázat, že pro převážnou většinu množin platí $D_T = D_P$. Pomocí pokrývací dimenze můžeme tedy definovat dimenzi topologickou.



Obr. 6 Pokrývací dimenze - pokrývání bodů, křivky a plochy koulemi

4.1.3 FRAKTÁLOVÁ (HAUSDORFF-BESICOVITCH) DIMENZE D_H

Vraťme se tedy k definici fraktálů: Útvar je fraktálem pokud platí vztah:

$$D_H > D_T. \quad (1)$$

Topologická dimenze D_T již byla definována pomocí pokrývací dimenze D_P . Fraktálová dimenze (Hausdorff-Besicovitch dimenze) D_H nemusí být oproti topologické dimenzi celočíselná. Fraktálová dimenze také obsahuje informaci o tvaru tělesa. Jinak řečeno, je úměrná míře nepravidelnosti objektu. Vyjadřuje do jaké míry se útvar liší od klasického euklidovského útvaru, který má topologickou dimenzi celočíselnou.

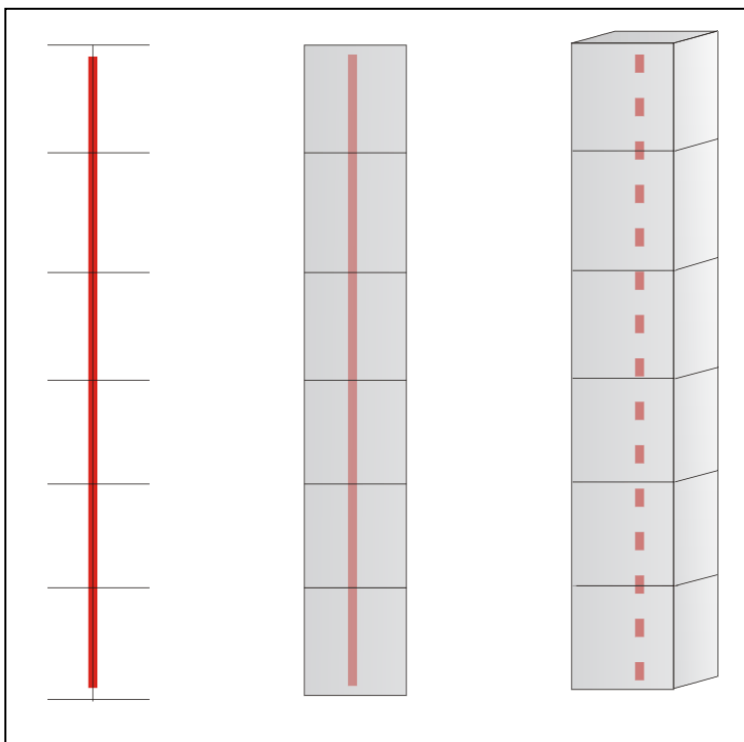
Jednoduchým způsobem jak měřit velikost nějakého útvaru S , je pokrýt jeho prostor malými boxy o straně ε a spočítat počet boxů $N(\varepsilon)$ potřebných pro pokrytí objektu. Mějme tedy útvar S jako podmnožinu prostoru R^n , kde $n = 1, 2, 3$ ($n=1$ pro jednodimenzionální prostor, $n=2$ pro dvojdimenzionální prostor a $n=3$ pro třidimenzionální prostor). n -dimenzionálním boxem v R^n budeme myslet uzavřený interval pokud $n=1$, čtverec pokud $n=2$ a krychli pokud $n=3$.

Uvažujme nejprve obyčejnou přímku (obr. 7) o délce L_0 , kde počet N boxů délky ε je $N(\varepsilon)=L_0/\varepsilon$.

Délka přímky je pak dána výrazem $L(\varepsilon)=N(\varepsilon) \cdot \varepsilon$, kde $N(\varepsilon)$ je počet boxů o délce ε nutných na pokrytí přímky. Pokud délku boxu budeme zmenšovat až k $\lim \varepsilon \rightarrow 0$, pak se spočítaná délka $L(\varepsilon)$ bude asymptoticky blížit k délce skutečné L_0 . Tedy:

$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_0 \cdot \varepsilon^0 = L_0 \quad (2)$$

Je zřejmé, že délka L_0 je nezávislá na ε . Tedy jinak řečeno, je nezávislá na měřítku. Zdůrazněme, že v tomto případě se stále jedná o euklidovský („klasický“) geometrický útvar - přímku.



Obr. 7 Měření přímky pomocí uzavřeného intervalu, čtverců a krychlí

Pokud budeme měřit plochu A přímky, pak počet boxů je opět $N(\varepsilon)$ a boxy mají plochu ε^2 (obr. 7 uprostřed). Plocha je dána vztahem:

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_0 \cdot \varepsilon^1 = 0. \quad (3)$$

Plocha přímky je samozřejmě rovna nule. Podobně lze spočítat objem:

$$V = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_0 \cdot \varepsilon^2 = 0. \quad (4)$$

Plocha a objem přímky konvergují k nule jak se ε zmenšuje. Užitečnou mírou pro popis přímky je pouze délka.

Pokusme se podobným způsobem změřit plochu (obr. 8). Běžně se měří u plochy povrch A :

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_0 \cdot \varepsilon^0 = A_0. \quad (5)$$

Počet boxů potřebných pro pokrytí plochy je $N(\varepsilon)=A_0/\varepsilon^2$. Když se ε blíží nule, povrch plochy je A_0 .

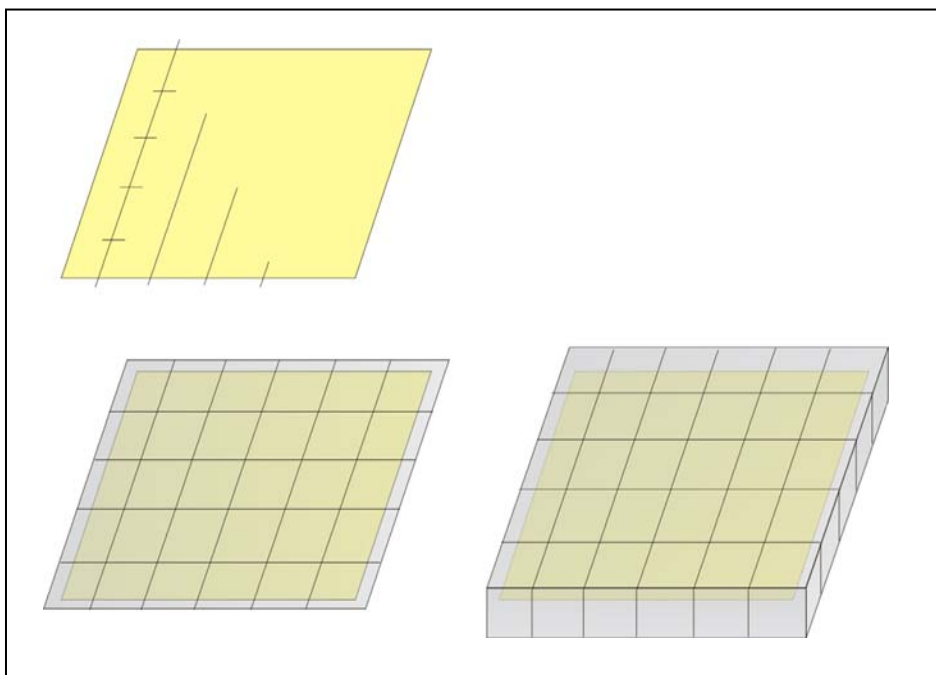
Objem plochy je:

$$V = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_0 \cdot \varepsilon^1 = 0. \quad (6)$$

Formálně můžeme vypočítat délku plochy:

$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_0 \cdot \varepsilon^{-1} = \infty. \quad (7)$$

Délka plochy je samozřejmě nekonečná. Užitečnou mírou je pouze povrch plochy.



Obr. 8 Měření plochy pomocí přímkového segmentu, čtverců a krychlí

Pomocí zobecnění těchto měření rozměrů lze definovat fraktálovou (Hausdorff-Besicovitchovou) dimenzi.

Měření množiny $M(d) = \sum h(\gamma)$ je dáno testovací funkcí $h(\varepsilon) = \gamma \cdot \varepsilon^d$ určené pro pokrytí množiny S . γ je geometrický faktor. Obvykle je měření M_d buď nula nebo nekonečno, což závisí na volbě d (jak $\varepsilon \rightarrow 0$). Fraktálová (Hausdorff-Besicovitchova) dimenze D_H množiny S je kritická hodnota d pro kterou M_d se mění z nuly v nekonečno:

$$M_d = \sum \gamma \cdot \varepsilon^d = \gamma \cdot N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0, d > D_H \\ \infty, d < D_H \end{cases}, \quad (8)$$

kde $N(\varepsilon)$ je opět počet boxů potřebných pro pokrytí množiny S . Pro případ dříve uvedené plochy je objem $V=0$ a $d=3$, délka $L=\infty$ a $d=1$. V tomto případě je tedy fraktálová (Hausdorff-Besicovitchova) dimenze $D_H = 2$. Topologická dimenze plochy $D_T=2$, tedy fraktálová dimenze, se rovná topologické $D_T=D_H$. Hladká plocha tedy není fraktál. Podobně ani přímka, krychle či jakékoliv jiné euklidovské těleso není z geometrického hlediska fraktálem.

Jaká ale bude fraktálová dimenze pro již zmíněnou pobřežní linii nebo Kochovu křivku? Jak je to tedy například s *Kochovou křivkou*. Jednou ze zásadních vlastností fraktálu je závislost celkové délky $L(\varepsilon)$ na zvoleném měřítku. Při zmenšování délky boxu ε , kterým budeme měřit délku Kochovy křivky, se celková délka neblíží ke konečné hodnotě, ale roste. Jako příklad jsou na obr. 9 uvedeny dvě zvolené míry: $\varepsilon=10$ a $\varepsilon=5$. $N(\varepsilon)$ je počet přímkových segmentů o délce ε nutných na změření a $L(\varepsilon)$ je spočítaná délka ($L(\varepsilon)=N(\varepsilon) \cdot \varepsilon$). Jak je zřetelně vidět, při použití menší míry se délka prodlouží.

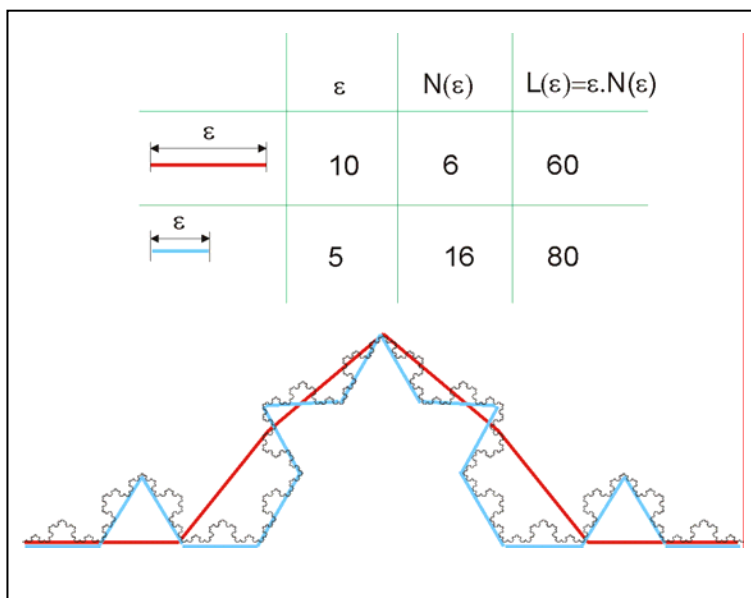
Pokud budeme délku přímkového segmentu (boxu) dále zmenšovat až k $\lim \varepsilon \rightarrow 0$, pak pro Kochovu křivku získáme délku nekonečnou:

$$L(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^1 = \infty, \quad (9)$$

porovnej s (2). Pokud bychom se pokusili změřit povrch Kochovy křivky, vyjde nám:

$$A(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^2 = 0. \quad (10)$$

Kochova křivka tedy musí mít fraktálovou dimenzi mezi hodnotou 1 a 2. Pomocí vztahu (8) a dalších jeho úprav by se dalo dokázat, že Kochova křivka má fraktálovou (Hausdorff-Besicovitchovou) dimenzi $D_H = 1,2619$. (Dimenze Kochovy křivky bude vypočtena v následujících kapitolách.) Kochova křivka je tedy fraktál. Je něco mezi hladkou křivkou a hladkou plochu, ale více se blíží hladké křivce. Zdůrazněme, že tyto vztahy platí pro útvary s fraktálovou dimenzí $1 < D_H < 2$.



Obr. 9 Měření Kochovy křivky pomocí přímkového segmentu

Se závislostí celkové délky na zvoleném měřítku se setkáváme i u dalších přírodních útvarů, jako jsou například délky hranic, břehy řek, pobřežní linie atd. Vůbec poprvé se tímto problémem podrobně zabýval Richardson. Ten měřil obvod (pobřežní linii) ostrova Korsika. Čím byla větší přesnost jeho měření, tím byla naměřená délka vyšší. Také jako první zjistil, že obvod ostrova je závislý na délce tyče, kterou se měří a empiricky odvodil vztah:

$$L_K = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^D, \quad (11)$$

kde L_K je naměřenou délkou, $N(\varepsilon)$ je počet boxů (v tomto případě úseček) o délce ε potřebných k pokrytí (aproximaci) dané křivky (porovnej se vztahem (2) a (9)). Důvodem je již zmíněná měřítková závislost, kdy při měření značně složitého útvaru pomocí velkého měřítka spoustu drobných detailů nezměříme, nebo také zanedbáme, ale tyto drobné detaily jsou pak zohledněny při zvětšování měřítka a v důsledku toho délka narůstá. Tento jev označujeme jako Richardsonův efekt.

To co se ukázalo být zajímavé je, že délka pobřeží je závislá na konstantě D . Význam této konstanty si Richardson nedokázal vysvětlit, teprve Benoit Mandelbrot dokázal souvislost této konstanty a Hausdorff-Besicovitch (fraktálovou) dimenzí.

4.2 DEFINICE FRAKTÁLU POMOCÍ SOBĚPODOBNOSTNÍ DIMENZE D_S

Fraktál je tvar tvořený částmi, které jsou podobné celku. Tato definice využívá tedy pojem soběpodobnosti (anglicky self-similarity). Nicméně *soběpodobnost* není postačující podmínkou pro to, abychom mohli daný objekt označit jako fraktál. Uvažujme přímku,

čtverec a krychli na obr. 10. Všechny jsou rozděleny na malé kopie celku pomocí faktoru změny měřítka $s=3$.

Vztah mezi počtem částí N na které se těleso rozdělí (faktor změny délky) a faktorem změny měřítka s je dán:

$$N(s) = s^{D_S}. \quad (12)$$

Vztah pak můžeme upravit dále na:

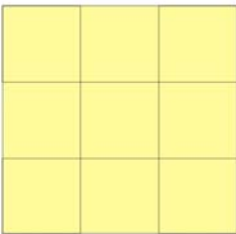
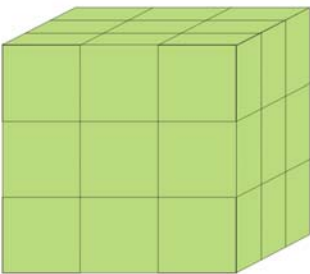
$$D_S = \frac{\log N(s)}{\log s}. \quad (13)$$

D_S je soběpodobnostní dimenze. $D_S = 1$ pro přímku, $D_S = 2$ pro plochu a $D_S = 3$ pro krychli. Tyto dimenze jsou shodné jak s fraktálovou (Hausdorff-Besicovitchovou) dimenzí D_H , tak i s topologickou dimenzí D_T . Proto se nejedná o fraktály, stejně tak jako jsme to dokázali v předchozí kapitole.

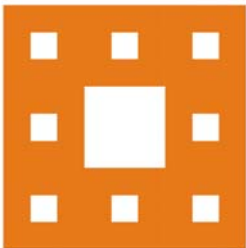
Vraťme se nyní ke Kochově křivce. Ve všech krocích jsme rozdělili všechny úsečky na tři části. Faktor změny měřítka s je tedy 3. V každém kroku jsme vložili dvě úsečky na místo jedné o délce $1/3$ celkové délky. Počet částí N (faktor změny délky) na které se těleso rozdělilo v každém kroku je pak 4. Tedy

$$D_S = \frac{\log N}{\log s} = \frac{\log 4}{\log 3} = D_H = 1,2619. \quad (14)$$

Kochova křivka má soběpodobnostní dimenzi $D_S=1,269$ a ta je rovna fraktálové (Hausdorff-Besicovitchovy) dimenzi D_H . Výsledek není celočíselný, fraktálová dimenze je vyšší než topologická ($D_T \text{ Koch}=1$) a jedná se tedy o fraktál.

	D_T	s	$N(s)$	$N(s)=s^{D_S}$
Úsečka 	1	3	3	3^1
Čtverec 	2	3	9	3^2
Krychle 	3	3	27	3^3

Obr. 10 Soběpodobnost euklidovských objektů

	D_T	s	$N(s)$	$D_S = \frac{\log N(s)}{\log s}$
Cantorova množina 	0	3	2	0,63
Sierpinského těsnění 	1	2	3	1,58
Sierpinského koberec 	1	3	8	1,89

Obr. 11 Soběpodobnost fraktálových objektů

Na obr. 11 je uvedeno několik příkladů matematických deterministických fraktálů. Je zde uvedena topologická dimenze D_T a soběpodobnostní dimenze D_S .

Cantorova množina (angl. *Cantor set*) je generovaná odstraněním prostřední třetiny úsečky. V následujících krocích je opět u všech úseček odstraněna prostřední třetina. Pokud budeme pokračovat v tomto algoritmu do nekonečna obdržíme Cantorovu množinu (obr. 11). V tomto případě je faktor změny měřítka $s=3$ (stejně jako u Kochovy křivky). Protože jsme však žádnou úsečku nevkládali, je počet částí N (faktor změny délky), na které se těleso v každém kroku rozdělí $N=2$. Po dosazení do vztahu (13) obdržíme fraktálovou dimenzi pro Cantorovu množinu $D_H=0,6309$. Tento útvar je více než izolovaný bod, ale méně než hladká křivka. Více v kapitole 5.1.2 *Cantorova množina*.

Sierpinského těsnění (anglicky *Sierpinski gasket*) je generováno rozdělením plochy trojúhelníku na čtyři menší a odstraněním v prostředního trojúhelníku z původního celkového trojúhelníku. Faktor změny měřítka je $s=2$. Tedy každá hrana objektu je rozdělena na dvě části. Po vyjmutí prostřední části, získáme v každém kroku třikrát více samostatných částí, faktor změny délky je tedy $N=3$. Pokud budeme proceduru generování opakovat do nekonečna, obdržíme objekt s fraktálovou dimenzí $D_H=1,58496$. Tuto dimenzi můžeme spočítat pomocí vztahu (13). Sierpinského těsnění je více než hladká křivka, ale méně než hladká plocha. Více v kapitole 5.1.3 *Sierpinského těsnění*.

Sierpinského koberec (anglicky *Sierpinski carpet*) je generován podobně jako těsnění, ale iniciátorem je čtverec. Lze si tuto proceduru představit jako rozdělení čtverce na devět malých čtverců a vyjmutím prostředního. Objekt má pak fraktálovou dimenzi $D_H=1,8928$. Celkově je však lepší si představit generaci fraktálů jako algoritmus s afinními transformacemi IFS.

4.3 DEFINICE FRAKTÁLU POMOCÍ KAPACITNÍ DIMENZE D_K

Pokud kapacitní dimenze útvaru (množiny) existuje a není celočíselná, pak se jedná o Hausdorff-Besicovitch (fraktálovou) dimenzi [A.3].

Mějme množinu S jako úsečku v intervalu $[0,2]$, obr. 12. Pro přibližné pokrytí celého intervalu je zapotřebí $1/\varepsilon$ boxů s malým rozměrem $\varepsilon>0$, což je $2/\varepsilon$ boxů k pokrytí intervalu na obr. 12. Tedy $N(\varepsilon) \approx 2/\varepsilon$, kde $N(\varepsilon)$ je počet boxů při velikosti boxu ε . Samozřejmě, pokud $2/\varepsilon$ není celočíselné, pak $N \neq 2/\varepsilon$. Například, pokud $\varepsilon=3/7$ (jako v našem případě), pak počet boxů nutných k pokrytí intervalu $[0,2]$ je $N(3/7)=5$, kdežto $2/\varepsilon=14/3 \neq 5$. Ovšem je možné zapsat $N(\varepsilon) \approx 14/3$. S tím jak se však ε blíží k 0, $N(\varepsilon)$ je úměrné k $1/\varepsilon$.

Pokud je množina S obdélníkem $[0,2] \times [0,3]$ (obr. 12), pak pro malé $\varepsilon>0$ získáme přibližně $N(\varepsilon) \approx 6/\varepsilon^2$ boxů pro její pokrytí.

Mějme podmnožinu S množiny (prostoru) R^n , kde $n=1,2,3$. Uvažujme hodnoty $C>0$ a $D \geq 0$, takové, že:

$$N(\varepsilon) \approx C \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^D, \quad (15)$$

kde ε se blíží k 0. Pro úsečku v intervalu $[0,2]$ tedy platí:

$$N(\varepsilon) \approx 2/\varepsilon = 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^1 \Rightarrow C=2 \text{ a } D=1. \quad (16)$$

Pro obdélník $[0,2] \times [0,3]$:

$$N(\varepsilon) \approx 6/\varepsilon^2 = 6\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \Rightarrow C=6 \text{ a } D=2. \quad (17)$$

Pokusme se rovnici (15) dále upravit, tak abychom získali vztah pro D . Nejprve rovnici zlogaritmuje:

$$\log N(\varepsilon) \approx D \log \frac{1}{\varepsilon} + \log C. \quad (18)$$

Z tohoto vztahu získáme:

$$D \approx \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} - \frac{\log C}{\log(1/\varepsilon)} \approx \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}. \quad (19)$$

Druhou část rovnice jsme mohli zanedbat, protože se bude blížit k 0 s tím jak se k 0 bude blížit ε . Pokud existuje limita vztahu (19), když se ε blíží k 0, definujeme D jako kapacitní dimenzi množiny S .

Definice: Mějme množinu S jako podmnožinu $\mathbb{R}^n$, kde $n=1,2$ nebo 3. Kapacitní dimenze (box dimenze) množiny S je dána vztahem:

$$D_K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \quad (20)$$

pokud existuje limita. Pokud kapacitní dimenze existuje a není celočíselné, pak množina S má fraktálovou (Hausdorff-Besicovitchovu) dimenzi.

Kapacitní dimenzi lze také použít pro výpočet fraktálové dimenze matematických deterministických fraktálů. Vztah (20) však musíme upravit a dokázat jeho platnost:

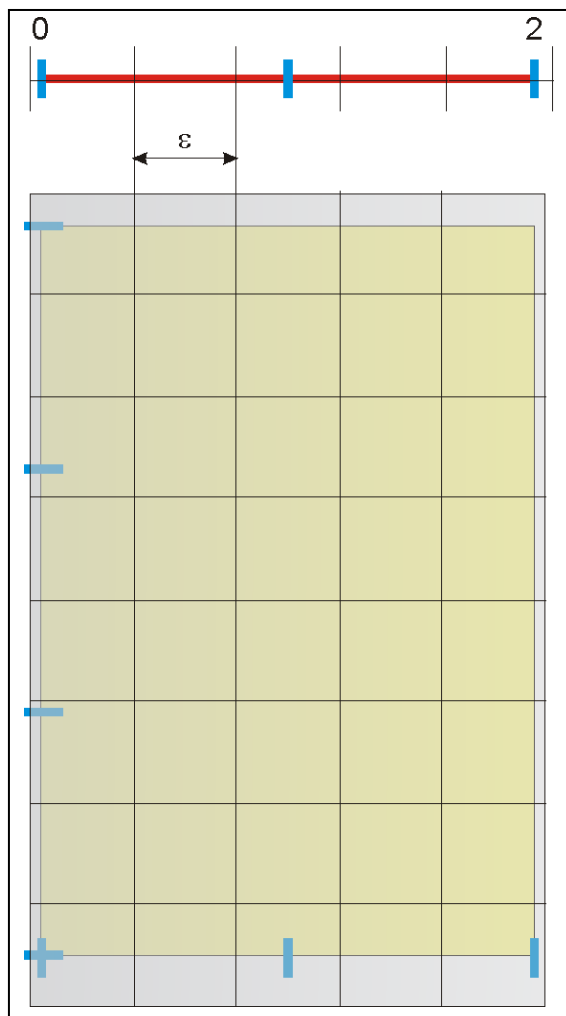
$$D_K = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(r^k)}{\log(1/r^k)}, \quad (21)$$

kde k je počet kroků iterace (opakování), $N(r^k)$ je počet částí na které se těleso rozdělí (z předchozí kapitoly známý faktor změny délky) a r je změna měřítka nově rozdělených částí pro kterou platí $0 < r < 1$.

Dá se dokázat, že vztah (21) existuje jen pokud existuje vztah (20) [A.3].

Vypočteme nyní kapacitní dimenzi Cantorovy množiny. Jak bylo zmíněno dříve, množinu generujeme vyjmutím prostřední třetiny z intervalu $[0,1]$. Po každém kroku máme dvakrát více segmentů než v předchozím kroku a každý segment je třetinový. Tedy $N(1/3)=2$ a z toho po dosažení $N(1/3^k)=2^k$ pro každé $k \geq 1$. Změna měřítka rozdělených částí je $r=1/3$. Ze vztahu (21) obdržíme:

$$D_K = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(1/3^k)}{\log(1/(1/3^k))} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log 2}{k \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309. \quad (22)$$



Obr. 12: Dělení intervalu a obdélníku segmenty velikosti ε

Kapacitní dimenze není celočíselná a tedy mluvíme o fraktálové dimenzi $D_H=0,6309$. Tato hodnota se shoduje s hodnotou vypočtenou pomocí soběpodobnostní dimenze v kapitole 4.2. Bylo by možné ji vypočítat i podle vztahů uvedených v kapitole 4.1.

Podobným způsobem jako jsme vypočítali kapacitní dimenzi Cantorovy množiny lze vypočítat dimenzi *Sierpinského těsnění*. Tato množina je generována z plochy rovnostranného trojúhelníka o délce stran 1. V každém kroku obdržíme třikrát více trojúhelníků než v předcházejícím kroku. Délka stran je v každém kroku poloviční. Obdržíme tedy $N(1/2^k)=3^k$ a $r=1/2$. Za použití vztahu (21) obdržíme:

$$D_K = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(1/2^k)}{\log(1/(1/2^k))} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 3^k}{\log 2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log 3}{k \log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,58496. \quad (23)$$

Opět není vypočtená kapacitní dimenze celočíselná. Fraktálová dimenze je $D_H=1,585$. Srovnej s kapitolou 4.2

4.4 SOBĚAFINITA A HURSTŮV EXPONENT

Zatím jsme hovořili o takzvaných soběpodobných fraktálech. Jak již bylo zmíněno, mají specifické vlastnosti. Pokud například vyjmeme malou část z celého fraktálu a zvětšíme ji stejně ve všech směrech (izotropicky), bude originál i zvětšenina vypadat stejně [A.1, A.5].

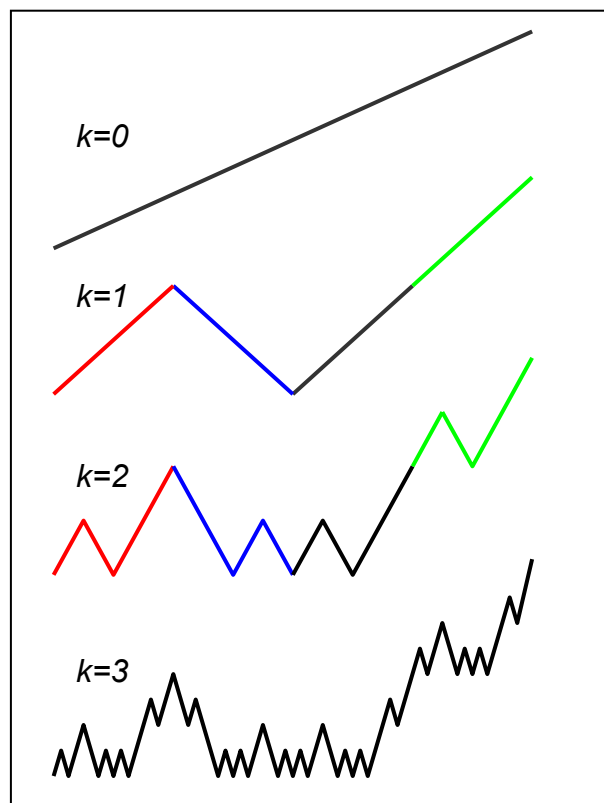
Vedle soběpodobných fraktálů se v matematice i přírodě často setkáme s tzv. *soběafinitními* (soběpříbuznými) *fraktály*. Čtenář se může také setkat s názvem *soběpříbuznost*. Pokud chceme po zvětšení dosáhnout stejného výsledku jako u soběpodobných fraktálů, musíme zvětšovat vyjmutou část v různých směrech jinak (anizotropicky). Jednoduchý model generování soběafinitního fraktálu je na obr. 13.

Tato struktura je neměnná při anizotropickém zvětšení $x \rightarrow 4x$, $y \rightarrow 2y$. Při samotné konstrukci jsme totiž použili pravidlo: v ose x se při každé iteraci rozdělí přímka na 4 díly, kdežto v ose y pouze na 2 díly. Pokud vyjmeme malou část z originálu fraktálu (s $n \rightarrow \infty$ iterací) a přepočítáme osu x faktorem 4 a osu y faktorem 2, získáme shodnou strukturu s originálem. Jinými slovy, pokud popíšeme křivku na obr. 13 pomocí funkce $F(x)$, pak pro transformaci této funkce vyhovuje rovnice:

$$F(4x) = 2F(x) = 4^{1/2} F(x) \quad (24)$$

Všeobecně, pokud je křivka měřítkově neměnná (má po zvětšení stejný charakter) při transformaci $x \rightarrow bx$, $y \rightarrow by$, pak získáme výraz:

$$F(bx) = aF(x) \equiv b^H F(x) \quad (25)$$



Obr. 13 Model generování soběafinitního fraktálu

H je tzv. *Hurstův koeficient*. Po úpravě výrazu (25) obdržíme:

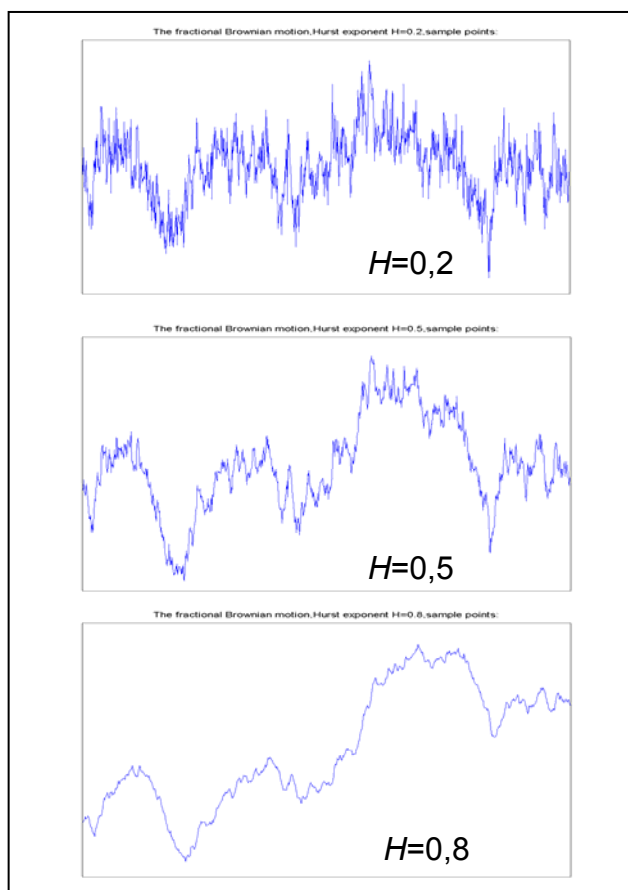
$$H = \frac{\log a}{\log b} \quad (26)$$

V případě křivky generované na obr. 13 platí $H = 1/2$. Řešení rovnice (25) je jednoduše $F(x) = Ax^H$. K tomu abychom dosáhli stejného charakteru po zvětšení, potřebujeme tedy transformační koeficient, tzv. Hurstův exponent. Ten nám uvádí jak musí být fraktál transformován z pohledu měřítka, abychom dosáhli stejného charakteru po zvětšení.

Soběafinitní fraktály jsou často signály - časové řady. Jsou to objekty které mají z topologického hlediska dimenzi $D_T=1$.

Vztah mezi Hurstovým koeficientem a fraktálovou (Hausdorff-Besicovitch) dimenzí je dán vztahem:

$$D_R = 2 - H \quad (27)$$



Obr.14 Simulace Brownianova pohybu pro Hurstův koeficient $H = 0,2; 0,5; 0,8$

Hurstův koeficient je od 0 do 1 a stejně jako fraktálová dimenze, uvádí charakter objektu. V případě časové řady, složitější řada z pohledu struktury je popsán nižším Hurstovým koeficientem, tedy vyšší fraktálovou dimenzí. Jednodušší (často hladší) časová řada má vyšší Hurstův koeficient a nižší fraktálovou dimenzi. $H = 0$ prezentuje tzv. růžový šum; $H = 0,5$ Brownianův šum; $H = 1$ je černý šum. Po určité transformaci může být Hurstův koeficient použit také pro další části spektra šumu.

Příklady časových řad a jejich Hurstova koeficientu jsou uvedeny na obr. 14 pro simulaci *Brownianova pohybu* užitím *Cholesky-Factorizace* odpovídající kovarianční matice.

V případě časové řady z dynamického systému může mít toto číslo dva významy:

- míra chaotičnosti daného procesu, tedy jak moc se liší charakter časové řady od hladké funkce.
- za určitých okolností může vypovídat, zda např. dva časové průběhy spolu „sdílí“ tentýž zdroj.

5 ROZDĚLENÍ FRAKTÁLŮ

Stejně jako v jiných vědních disciplínách i ve fraktálové geometrii se začalo uplatňovat rozdělení fraktálů do jednotlivých skupin. Rozdělení však není jednotné a často se velmi liší mezi jednotlivými autory. V tomto přiblížení fraktálové geometrie je použito velice obecné rozdělení na *matematické a přírodní fraktály*.

Jednoduše můžeme tedy fraktály rozdělit na

- fraktály matematické,
 - deterministické (pravidelné),
 - stochastické (náhodné),
- fraktály přírodní.

Podrobně jsou jednotlivé skupiny popsány dále včetně metod odhadu fraktálové dimenze.

Další alternativou je již zmíněné rozdělení na

- fraktály soběpodobné, které po rozlámání a zvětšení jsou podobné původnímu celkovému tvaru a
- fraktály soběafinitní, které musíme zvětšit v jednotlivých směrech podle určitého pravidla.

5.1 MATEMATICKÉ FRAKTÁLY

Matematické deterministické fraktály (se striktní soběpodobností) jsou objekty, které vznikají při přesném opakování stanoveného pravidla - transformace. Jednotlivé části fraktálu jsou pak většinou přesnou malou replikou fraktálu celého. Jinak řečeno, pokud fraktálový útvar rozlámeme na malé části (latinsky frangere znamená rozlámat) a tyto části zvětšíme, pak každá část bude podobná celku. Pokud útvar rozlámeme podle definovaného pravidla, kterým fraktál vznikl a provedeme zvětšení, pak dostaneme přesnou repliku útvaru celého. Příkladem tohoto fraktálu je Kochova křivka. U matematických fraktálů můžeme fraktálovou dimenzi přímo spočítat, neboť známe způsob generace („algoritmus generování“) těchto objektů, viz kap. 4.

Matematické stochastické fraktály (se statistickou soběpodobností) jsou často používány při napodobování reálných přírodních struktur, časových řad a těles. Při jejich generaci je do algoritmu vložen prvek náhodnosti. Tyto fraktály jsou často používány pro vytváření povrchů těles v počítačové simulaci.

Důležité rozdělení fraktálů vznikajících afinní transformací je podle [A.9] na algoritmus:

- IFS (*Iteration Function System*), např. Kochova křivka
- TEA (*Time Escape Algorithms*), např. Mandelbrotova množina.

Rozdíly mezi těmito typy fraktálů byly popsány v kapitole 3.2. Tyto fraktály mohou být jak deterministické, ale i stochastické po vložení určitého náhodného prvku (algoritmu).

Velice důležité jsou pro teorii chaosu tzv. *Dynamické systémy*. Mezi ně se řadí také fraktály vzniklé afinní transformací algoritmem TEA. Mezi dynamické systémy se řadí dále obecně *bifurkační diagramy a atraktory* viz kap. 5.1.7 a 5.1.8.

Možné je rozdělení matematických fraktálů na: L-systémy, systémy iterovaných funkcí (IFS), dynamické systémy, nepravidelné fraktály (statisticky soběpodobné).

U matematických fraktálů musíme znát většinou jednoduchý algoritmus generování útvaru – transformaci – konkrétní, přesně definovatelný a snadno opakovatelný soubor pravidel. Tento algoritmus v sobě skrývá veškeré potřebné informace pro reprodukci útvaru. Transformace provedeme pro daný objekt v nekonečně mnoha krocích.

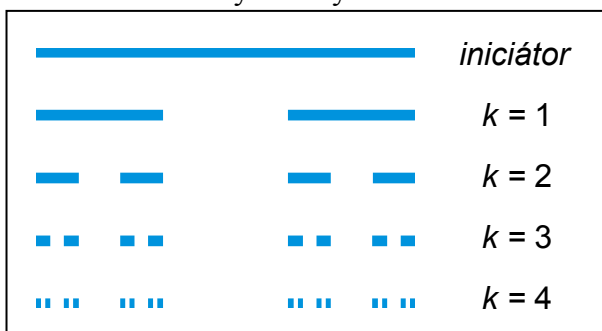
5.1.1 KOCHOVA KŘIVKA A KOCHOVA VLOČKA

Kochova křivka je jedním z nejjednodušších matematických fraktálů. Jedná se o matematický deterministický fraktál. Generace této křivky byla zmíněna v kap. 3.2, její vlastnosti byly popsány v kap. 3.3.

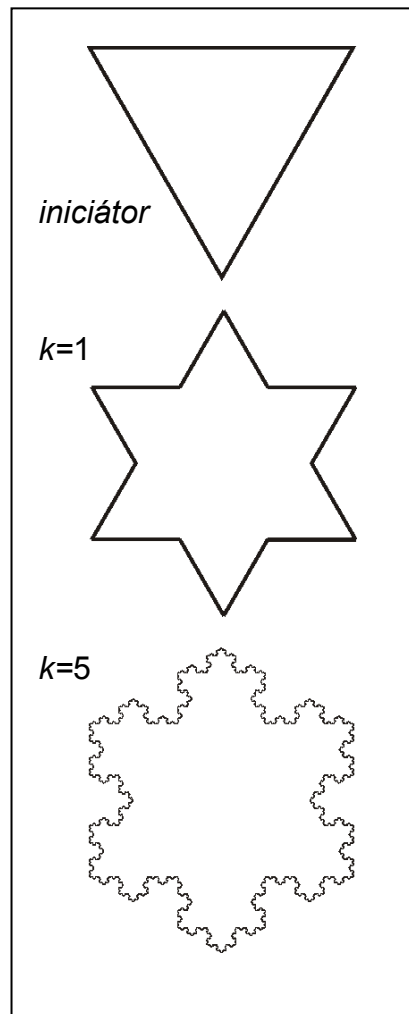
Kochova vločka je generována podle stejných pravidel jako Kochova křivka. Iniciátorem Kochovy vločky je však rovnostranný trojúhelník, viz. obr. 15

5.1.2 CANTOROVA MNOŽINA

Při generaci Cantorovy množiny (anglicky Cantor set) odstraňujeme jednu třetinu z každé úsečky a po nekonečně mnoha iteracích (krocích) získáme množinu bodů, která má z hlediska topologického dimenzi nulovou, ale z hlediska fraktálového je její dimenze 0,6309, viz obr. 16. Opět je množinou soběpodobnou a lze ji získat afinními transformacemi algoritmem IFS, kap. 3.2. Na rozdíl od zmíněné Kochovy křivky a dalších matematických fraktálů, probíhají transformace pouze



Obr. 16 Generace Cantorovy množiny



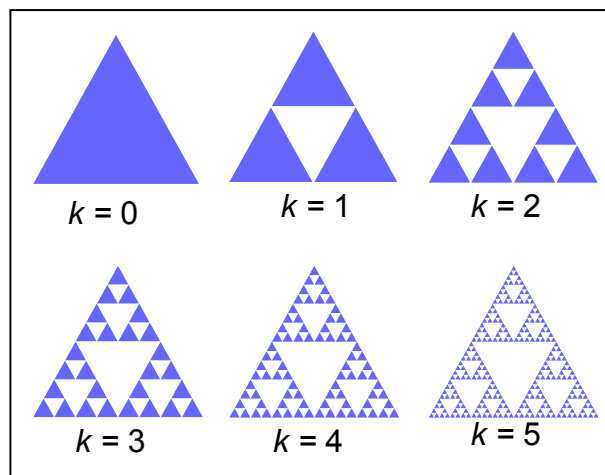
Obr. 15 Generace Kochovy vločky

v jedné ose. Pro generaci je použito pouze dvou principů transformací: *zmenšení a posuvu*. V první iteraci je iniciátor ve formě úsečky délky 1 zmenšen na 1/3 a ponechán na místě. Další transformace (ne iterace) je zmenšení úsečky na 1/3 a posuv o 2/3. V dalších iteracích jsou obě transformace uplatněny na celou vzniklou množinu. Výpočet fraktálové dimenze této množiny je uveden v kapitole 4.2 a 4.3.

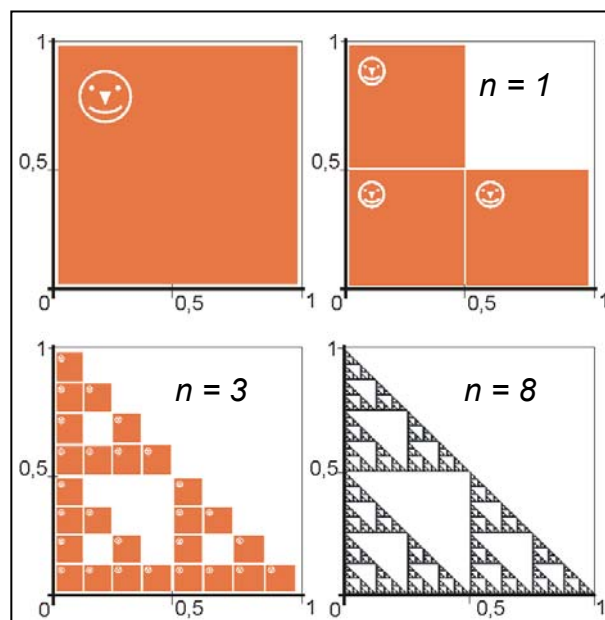
5.1.3 SIERPINSKEHO TĚSNĚNÍ

Sierpinského těsnění je možné konstruovat pomocí několika principů. Prvním je již zmíněná konstrukce rozdělením trojúhelníku na menší čtyři čtverce a odstranění prostředního, viz obr. 17 a kap. 4.2. Z matematického hlediska je srozumitelnější si představit konstrukci jako afinní transformace algoritmem IFS. Pro generaci tohoto fraktálu je vhodné jako počáteční objekt použít trojúhelník, který dále transformujeme. Nicméně je možné použít i čtverec [A.9], bod, či jiný objekt (např. text) [A.5]. Po dostatečném počtu iterací vliv tvaru počátečního objektu vymizí. Důležité pro algoritmus IFS jsou afinní transformace. Začínáme třeba od čtverce o délce stran 1, viz obr. 18. V každém kroku (iteraci) jsou použity tři transformace. První zmenší čtverec na $1/2$ a ponecháme na místě. Druhá transformace zmenší čtverec opět o $1/2$ a posune na pozici $0,5; 0$. Třetí transformace provede stejné zmenšení a posun na pozici $0,5; 0,5$. Po dostatečném množství iterací získáme obraz Sierpinského těsnění (obr. 18).

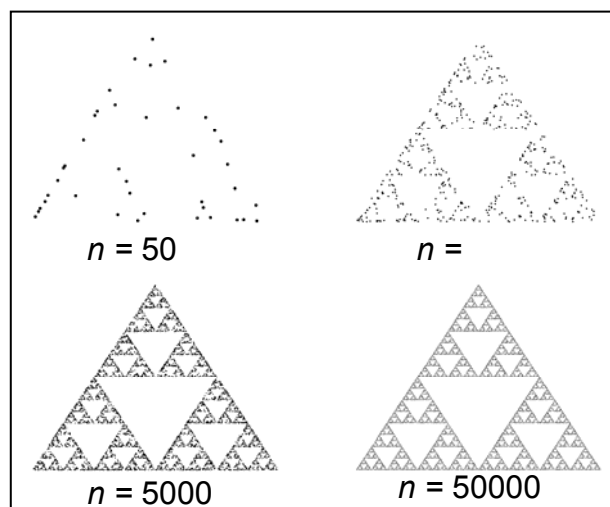
Je zde i jiná možnost konstrukce tohoto zajímavého fraktálu. Lze si na něm ukázat jak lze z náhodného procesu získat pravidelnost a nahlédnout pod pokličku tzv. *Deterministického chaosu*. Pro konstrukci použijeme jednoduchých pravidel. Nejprve sestrojme tři body, jako vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Zvolme si bod uvnitř tohoto trojúhelníku. Zvolme jeden z vrcholů trojúhelníku a vzdálenost mezi bodem a trojúhelníkem rozdělme na půl. Vznikne nám bod. Opět zvolme jeden z vrcholů a rozdělme vzdálenost mezi bodem a vrcholem napůl. Tento princip opakujeme mnohokrát. První body, které mohou být mimo tuto množinu se během několika kroků stanou součástí tělesa. Postupně se nám začne na papíru objevovat Sierpinského těsnění. Tedy útvar velice pravidelný. Obr. 19 ukazuje průběh generace po 50, 500, 5000, 50000 krocích. Jak je vidět, je dobré provést minimálně 5000 kroků, tak abychom dostali uspokojivý obraz Sierpinského těsnění. Generaci tohoto fraktálu nazýváme „Hra chaosu“.



Obr. 17 Generace Sierpinského těsnění



Obr. 18 Generace Sierpinského těsnění pomocí afinních transformací



Obr. 19 „Hra chaosu“

chaosu“. Velice pěkně je tato a další „hříčky“ deterministického chaosu podány formou hry na webu [A.12].

Další možností jak generovat tento fraktál jsou *Buněčné automaty* a *Pascalův trojúhelník*. [A.5, A.6, A.7, A.9].

Ještě je vhodné připomenout že, fraktálová dimenze Sirpinského těsnění je $D_F = 1,5849$ a topologická je $D_T = 1$. Sierpinského těleso (nekonečně mnoho iterací) je tvořeno spojitou křivkou. Povrch tělesa je nulový.

5.1.4 PŘÍKLADY DALŠÍCH FRAKTÁLŮ VZNIKLYCH ALGORITMEM IFS

Na obr. 20 je zobrazeno několik dalších fraktálů vzniklých afinními transformacemi. Některé fraktály jsou tzv. sobě-podobné a jiné soběafinitní (soběpřibuzné). Záleží na tom, zda bylo pro generaci těchto fraktálů použito afinní transformace zmenšení izotropní (ve všech směrech stejné zmenšení), pak získáme fraktál soběpodobný, nebo anizotropní (v každém směru jiné zmenšení) a pak získáme fraktál soběafinitní. Jak je vidět, tyto fraktály mohou mít nejenom „přísně matematický vzhled“, ale také se mohou podobat tomu co známe z přírody. Příkladem je fraktál „Strom“ a „Větvička“. Zdrojový kód ISF transformace je přejat z [A.9].

5.1.5 MANDELBROTOVA MNOŽINA

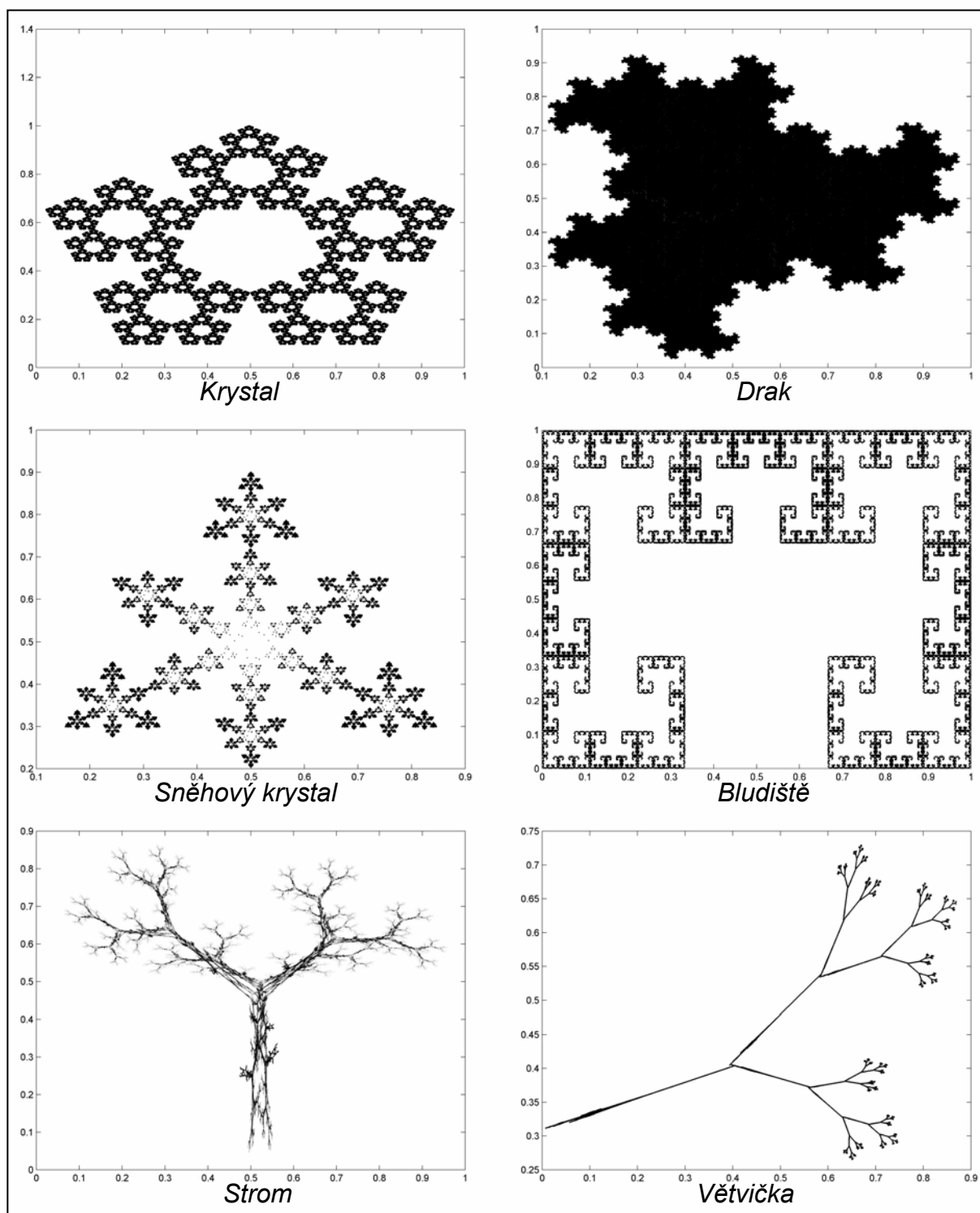
V roce 1979 se Benoit Mandelbrot pokoušel o zobecnění Juliových množin, které studovali Gaston Julia a Pierre Fatou v době první světové války. V komplexní rovině objevil obrázek, který mohl sloužit jako katalog Juliových množin, či spíše úvod do studia každé z nich. Tento obrázek byl nazván po svém objeviteli, Mandelbrotova množina.

Obdivovatelé Mandelbrotovy množiny často říkají, že se jedná o nejkrásnější a nejsložitější matematický objekt. Ani za nekonečně dlouhou dobu bychom tuto množinu nedokázali prohlédnout celou. Mandelbrotova množina totiž není klasickým fraktálem, ale multi-fraktálem. Jedná se o skutečnou nádhernou složitost, ve které se objevují prvky vždy trochu pozmeněné při změně výřezu či měřítka. Soupis různých obrázků, které ji tvoří, nebo numerický popis obrysu množiny by vyžadoval nekonečné množství informací. Přitom k reprodukci celé Mandelbrotovy množiny stačí stručný počítačový program, který obsahuje jen několik desítek znaků kódu.

Mandelbrotova množina je souborem bodů, které leží v komplexní rovině. Pro svojí konstrukci používá algoritmu TEA, který byl vysvětlen v kap. 3.2. Program Mandelbrotovy množiny se skládá jen z několika základních částí. Hlavním motorem, který jej pohání, je smyčka instrukcí, ve které se na výchozí komplexní číslo aplikuje aritmetické pravidlo. Pro Mandelbrotovu množinu je toto pravidlo následující: $z_{n+1} = z_n^2 + c$, kde počáteční z_0 bereme rovno nule a c je komplexní číslo příslušející bodu, který se právě testuje. Takže: vezměte číslo 0, vynásobte je sebou samým a přičtěte k němu výchozí číslo; vezměte výsledek vynásobte jej sám sebou a přičtěte výchozí číslo.

K tomu, aby se program dostal z této smyčky, musí kontrolovat průběžnou sumu. Pokud průběžná suma míří k nekonečnu a stále více se vzdaluje od středu roviny, výchozí bod do množiny nepatří; pokud se stane, že průběžná suma buď v reálné nebo v imaginární části přesáhne 2 směrem nahoru nebo -2 směrem dolů, je to, že míří k nekonečnu jistě a program může přejít k dalšímu bodu. Jestliže však program výpočet mnohokrát zopakuje a suma čísla 2 (-2) nepřesáhne, pak bod do množiny patří. Kolikrát musí program zopakovat výpočet,

závisí na zvětšení. Pro měřítka dostupná na osobním počítači už často stačí 200 opakování a 1000 opakování zaručuje správný výsledek.

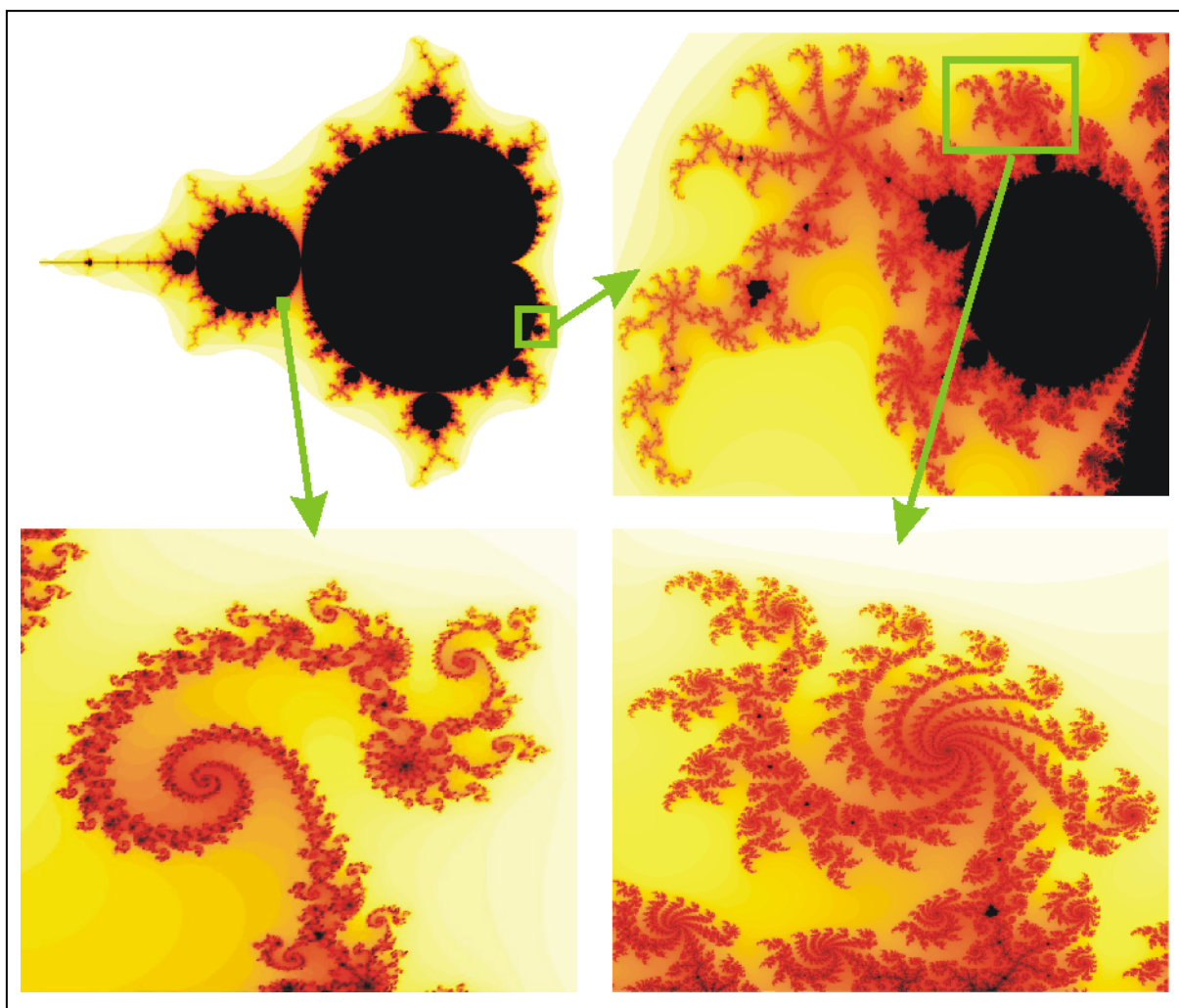


Obr. 20 příklady fraktálů vzniklých afinními transformacemi algoritmem IFS [A.9]

Program musí tento postup zopakovat pro každý z tisíců bodů mřížky, v měřítku, které je možné upravit pro větší zvětšení. A program musí výsledek zobrazit. Body množiny mohou být znázorněny černě a ostatní body bíle. Nebo chceme-li, aby byl obrázek pestřejší, můžeme bílé body nahradit odstíny barev viz obr. 21. Jestliže se například iterace přeruší po desíti cyklech, program může bod zakreslit žlutě; pro dvacet cyklů oranžově, pro čtyřicet cyklů

červeně, a tak dál. Výběr barev a kritérium přerušení cyklu mohou být měněny podle programátorova vkusu. Barvy znázorňují obrysy terénu při hranicích vlastní množiny [z A.4].

Ukázka Mandelbrotovy množiny a jejích výřezů je na obr. 21. Černé body tvoří Mandelbrotovu množinu, bílá barva reprezentuje body, jejichž průběžná suma uniká do nekonečna hned po prvním kroku a odstíny žluté a červené popisují body s průběžnou sumou mířící do nekonečna po několika krocích. Tmavší barva reprezentuje vyšší hodnoty a světlejší nižší hodnoty. Na obrázku jsou zobrazena i místa výřezů a jejich zvětšení ukazuje nádhernou strukturovanost, členitost a rozmanitost množiny.



Obr. 21 Mandelbrotova množina a její výřezy

5.1.6 JULIOVY MNOŽINY

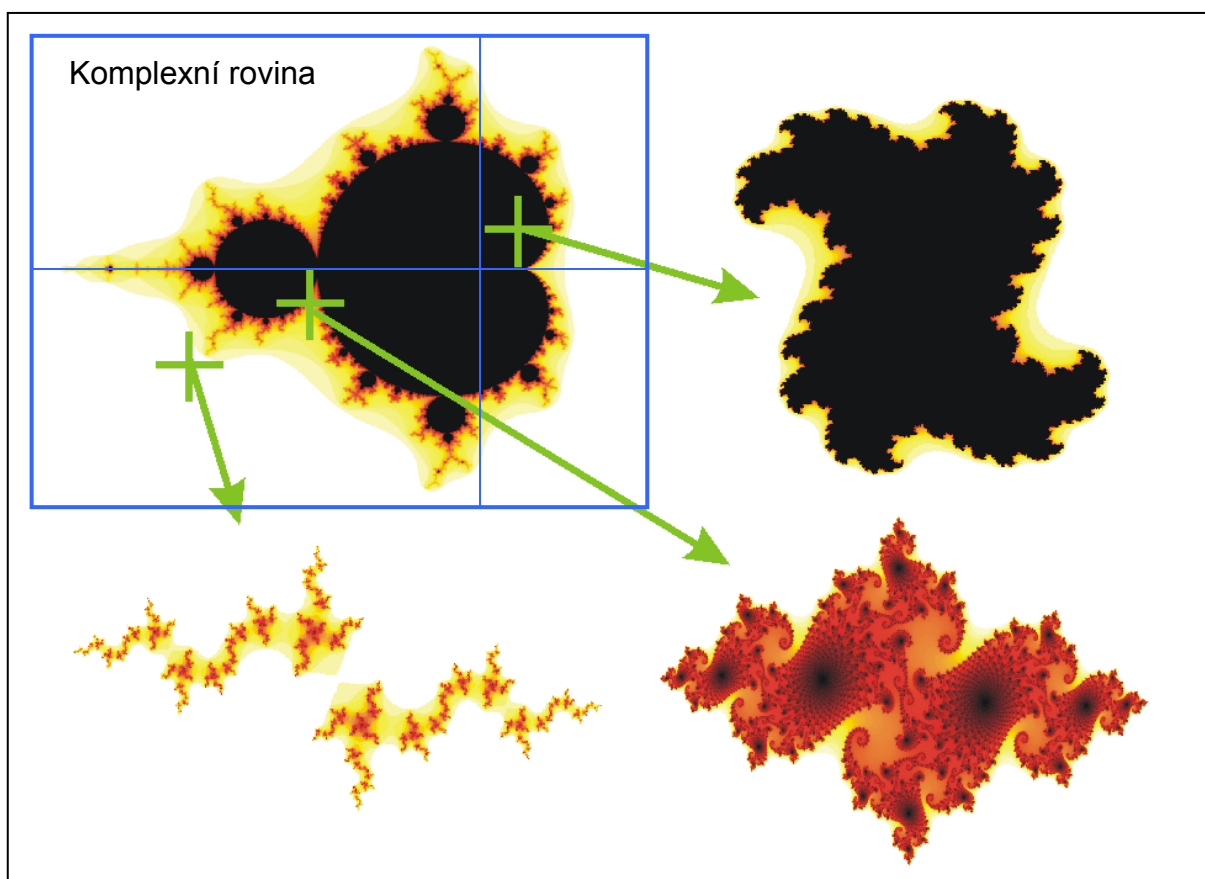
Matematickými fraktály, které s Mandelbrotovou množinou souvisejí, jsou Juliovy množiny. Tyto množiny byly objeveny a zkoumány během první světové války francouzskými matematiky Gatonem Julia a Pierre Fatou. Snad nejlépe vystihují tyto množiny slova matematika Adroene Douady: „Juliovy množiny jsou neuvěřitelně rozmanité. Některé z nich jsou tlusté obláčky, jiné vychrlé keříky ostružiní, další vypadají jako jiskérky ohně, které se vznášejí poté, co skončil ohňostroj. Jedna tvarem připomíná králíka a spousta jich má ocasy jako mořští koníci.“ Jedná se o množiny, které nelze popsat slovy ani pojmy Euklidovské geometrie. Tyto množiny inspirovaly Benoita Mandelbrota, který se pokusil najít

sjednocující prvek této škály množin. Byla to právě již zmíněná Mandelbrotova množina. Pro konstrukci Juliových množin se opět používá algoritmu TEA, viz kap. 3.2.

Dnes, když se podíváme na vztah mezi Juliovými množinami a Mandelbrotovou množinou, je vše jasné. Pro výpočet nám stačí původní program pro Mandelbrotovu množinu, který jen drobně upravíme.

Opět tedy testujeme všechny body komplexní roviny. Stejně jako u Mandelbrotovy množiny nám stačí kontrolovat průběžnou sumu. Jestliže průběžná suma algoritmu pro daný bod uniká do nekonečna, pak do množiny nepatří a pokud ani po nekonečně mnoha iteracích do nekonečna výsledek algoritmu neuteče, pak do množiny patří. Pro Juliovu množinu je algoritmus velice podobný algoritmu Mandelbrotovy množiny: $u_{n+1} = u_n^2 + k$, kde počáteční u_0 je komplexní číslo příslušného bodu, který právě testujeme a k je vstupní parametr který jsme zvolili.

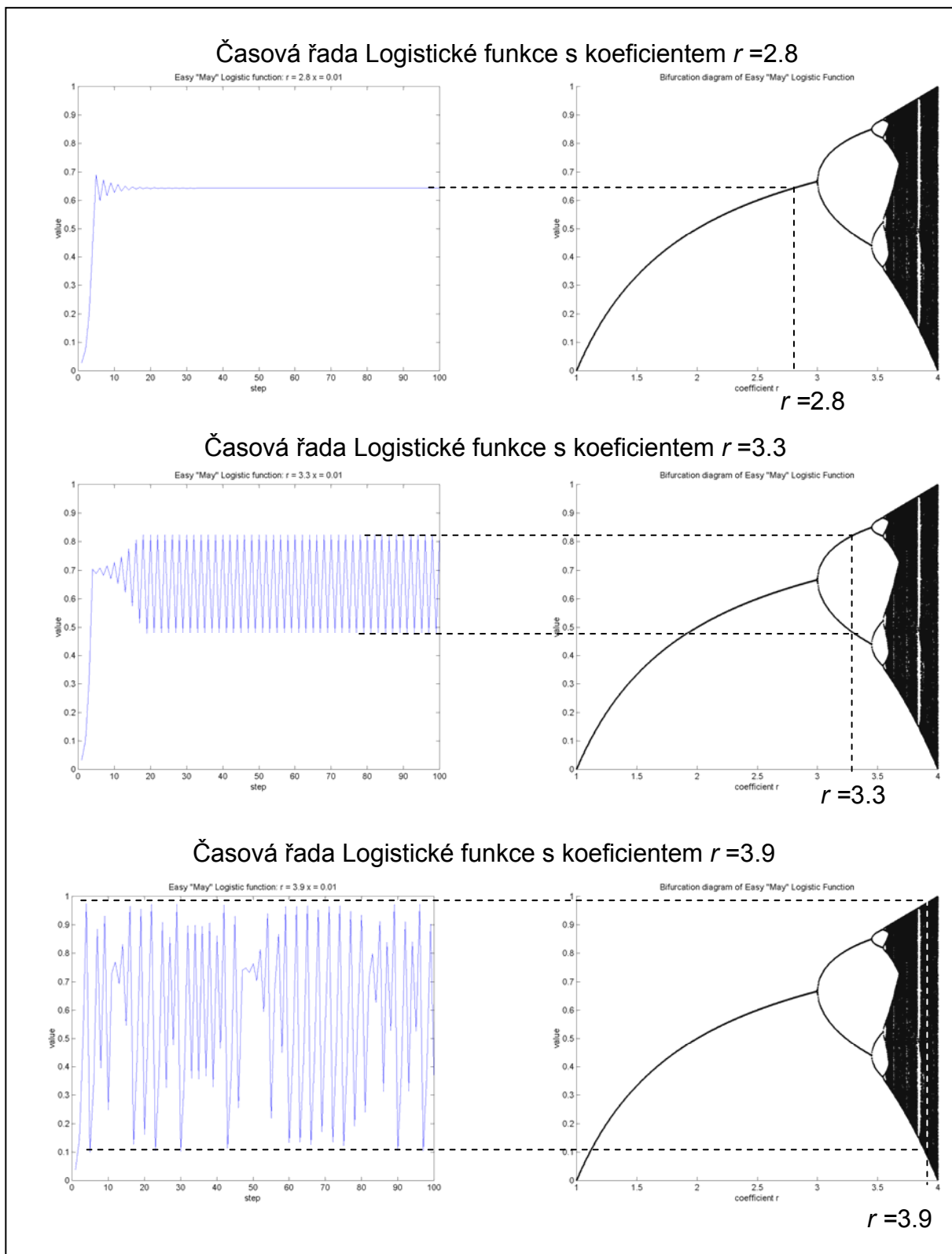
Změna tvarů množin je závislá na volbě vstupního parametru. Tento parametr je opět komplexní číslo. Do komplexní roviny vynesme Mandelbrotovu množinu. Pokud bude vstupní parametr ležet uvnitř Mandelbrotovy množiny, pak Juliova množina bude „spojitý“ útvar. Pokud bude ležet mimo, pak se nám množina rozpadne na systém oddělených „chomáček“. Jak je vidět, tak nejkrásnější Juliovy množiny vznikají při zadání parametru k , jehož hodnoty leží na hranici Mandelbrotovy množiny. Závislost a příklady jsou vidět na obr. 22.



Obr. 22 Mandelbrotova množina a její vztah k Juliovým množinám

5.1.7 BIFURKACE

Bifurkace znamená rozdělení a například v zeměpise má význam rozdělení řeky ve dva či více toků. Bifurkační diagramy však představují jedny z nejvýznamnějších nástrojů při studiu dynamických dějů. Bifurkační diagramy se používají pro popis především logistických rovnic.



Obr. 23 Vztah mezi časovou řadou Jednoduché „Mayovy“ funkce a bifurkačním diagramem

Jedná se o fraktály tzv. *dynamické systémy*. Bifurkační diagramy umožňují pohlédnout na rovnice jako celek, tedy dokáží vcelku jasně ukázat změny v chování těchto rovnic se změnou parametru. Princip těchto grafů bude nejspíše zřejmý z následujícího příkladu.

Poprvé s bifurkačním diagramem přišel Robert May a aplikoval jej na snad nejjednodušší logistickou funkci: $x_{n+1} = r \cdot x \cdot (1 - x)$. Tato funkce se může jevit na první pohled jako „stabilní“. Funkce je skutečně „stabilní“, ale jen při nízké hodnotě zvoleného parametru r . Pokud je tento parametr malý, pak se časová řada, generovaná výše uvedenou rovnicí, ustálí na konečné hodnotě. V bifurkačním diagramu se tato ustálená hodnota projeví jako bod. To je zobrazeno na obr. 23 nahoře.

Pokud budeme parametr r dál pomalu zvětšovat, pak ustálené stavy budou tvořit spojitou křivku. Při dalším zvětšování však začne časová řada oscilovat mezi dvěma ustálenými stavy, obr. 23 uprostřed.

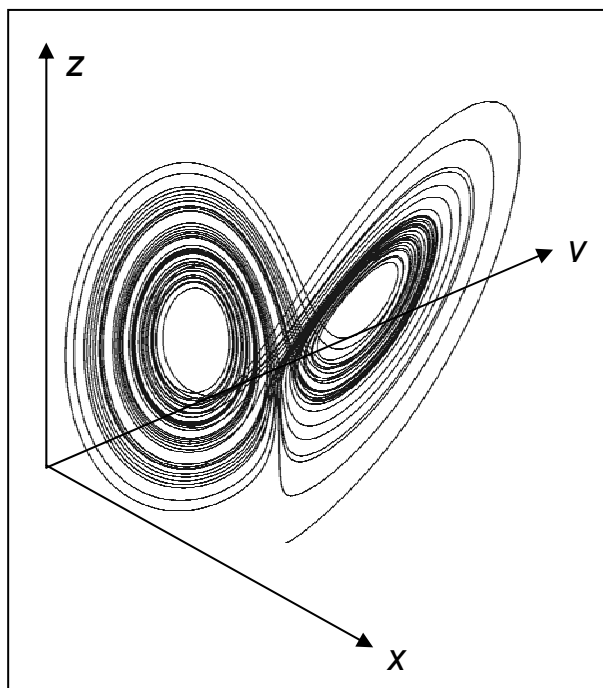
Pak dojde k oscilaci mezi čtyřmi stavy, osmy, šestnácti,... nakonec máme časovou řadu, která nám osciluje chaoticky.. S dalším zvyšováním parametru r se občas vyskytují stabilní stavy se stavy chaotickými, obr. 23 dole. Bifurkační diagramy lze samozřejmě použít i na popis složitějších rovnic.

5.1.8 ATRAKTORY

Atraktory patří stejně jako bifurkace mezi tzv. *Dynamické systémy*. Snad nejznámějším atraktorem, který doslova změnil pohled na dynamické a nelineární soustavy, je *Lorenzův podivný atraktor*, obr. 24., který objevil Edward Lorenz. Jedná se o tři diferenciální rovnice, které tvoří nelineární soustavu. Je to jednoduchý systém, který nemá analytické řešení a je „nevyzpytatelný“. Malá změna parametrů povede k velkým změnám konečného výsledku. Tomu se říká s trochou nadsázky a s trochou vážnosti: „*Motýlí efekt*“.

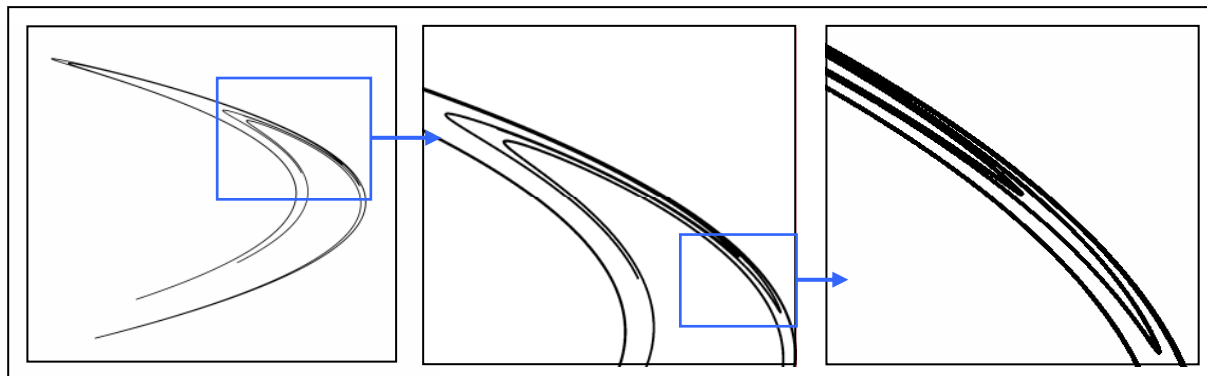
Lorenz dospěl k atraktoru, když použil pro pochopení systému tří diferenciálních rovnic fázového prostoru. Tradičně se změna hodnoty jedné z proměnných zobrazuje pomocí tzv. časového rozvoje (časové řady). Ve fázovém prostoru je v každém časovém okamžiku poloha bodu v trojrozměrném prostoru určována třemi proměnnými. Jak se systém mění, pohyb bodu představuje průběžně se měnící proměnné. Jinak řečeno ve fázovém prostoru odpovídá danému stavu bod určený polohou na třech osách, x , y , z .

Vedle Lorenzova podivného atraktoru byly objeveny i další atraktory. Jedním z nejjednodušších je *Hénonův atraktor*, který je na obr. 25. Ten je důkazem, jak na první pohled jednoduchý atraktor, může vykazovat vysokou složitost. Původně zdánlivě jednoduché linie jsou dvojice a pak dvojice dvojic čar. Hénonův atraktor je příkladem matematického přehýbání a natahování oválu.



Obr. 24 Lorenzův atraktor

Pro samotné fraktály má atraktor klíčový význam a ve své podstatě by fraktály nemohly bez atraktorů existovat. Atraktor je z hlediska fraktálu jeho limitou a ta je hromadným bodem.



Obr. 25 Detaily Hénonova atraktoru, při zvětšování objevíme další novou strukturu

5.2 PŘÍRODNÍ FRAKTÁLY

V předchozích odstavcích jsme se zabývali pouze fraktály matematickými – deterministickými (jsou striktně soběpodobné). Matematické fraktály jsou i *stochastické* (jsou statisticky soběpodobné nebo soběafinitní). Především matematické stochastické fraktály nám můžou dobře posloužit jako model. Nicméně, pro širší uplatnění fraktálové dimenze je významný odhad této dimenze u přírodních fraktálů.

Je třeba připomenout, že jako přírodní fraktály jsou označována tělesa, která z geometrického hlediska vykazují složitost (tzv. struktura na struktuře), jsou soběpodobné, jejich fraktálová dimenze je vyšší než jejich topologická a mají další vlastnosti.

Přírodní fraktály oproti matematickým nejsou nikdy striktně soběpodobné, tedy přírodní útvary při zvětšení nejsou přesně identické. Příkladem přírodního fraktálu je již zmíněná pobřežní linie v kap. 3.1. To je objekt s fraktálovou dimenzí mezi 1 a 2. S objekty, které lze od určitých měřítek z geometrického hlediska nazvat fraktály, se ovšem můžeme v přírodě setkat i jinde. Fraktály jsou pohoří, oblaka, blesky, sněhové vločky, toky řek, stromy i listí, cévní systémy živočichů, komůrky v plicích, DNA, dále i rozložení hmoty v galaxiích, hvězdokupy, ale i povrch obrobku, tvar trhlin i vad v obrobku i nástroji, či dokonce časový vývoj akcí na burzách všeho druhu, časové změny inflace, zadlužení států i vývoj kurzu měny. Dá se říci, že nás fraktály obklopují a jsou všude, aniž bychom to tušili. Euklidovská tělesa, jako například přímky, čtverce či krychle, jsou pouze v učebnicích matematiky. Laik se tedy musí vzdát klasických představ o tělesech kolem, ale i dějích kolem nás a spíše než poznat, uvěřit, že náš svět je strukturovaný. Mandelbrot s oblibou říkal: „Mraky nejsou koule, hory nejsou kužele, blesk se nešíří po přímce. Nová (fraktálová) geometrie je obrazem vesmíru, který je hrbolatý, nikoliv rovný, a poďobaný nikoliv hladký. Je to geometrie důlků, jamek a hrboľů, pokřivenin, spleť a deformací.“

Neznamená to však, že by nebyla Euklidovská geometrie k ničemu použitelná. Například obyčejný stůl. Skládá se ze čtyř nohou a desky. Nohy budou pro zjednodušení jen válce stejného průměru i délky. Deska bude mít konstantní délku, šířku a tloušťku. Tento objekt v našich běžných měřících bude popsateľný pomocí Euklidovské geometrie. Pokud bychom posuzovali jeho povrch, který bychom náležitě zvětšili, pak bychom studovali strukturovaný povrch, kde bychom se setkávali se strukturou na struktuře (kap. 3.5 a obr. 5). Povrch bychom tedy označili z geometrického hlediska jako fraktál. Jiným příkladem je strom, který z geometrického hlediska i v našich běžných měřících je fraktálem.

U přírodních fraktálů neznáme „algoritmus generování“ útvaru. Vlastnosti těchto fraktálů (fraktálovou dimenzi) můžeme jen odhadovat. Metody odhadů jsou uvedeny v následující kapitole 6.

Přírodní fraktály jsou často multifraktály. Tento pojem značí, že fraktál v určitých měřítcích má jinou složitost (jiné vlastnosti). To je dáno různou vahou vlivů působících na vznik fraktálu v různých měřítcích. Multifraktály mohou být také generovány „uměle“, lze se tak setkat i s matematickými multi-fraktály.

6 ODHAD FRAKTÁLOVÉ DIMENZE

Odhadovat fraktálovou dimenzi můžeme jak v případě přírodních fraktálů, tak matematických fraktálů. Odhadovat fraktálovou dimenzi pro matematické fraktály, ale nemá velký význam, neboť je přesnější a jednodušší vypočítat jejich dimenzi na základě známých pravidel – transformací, např. viz kap. 4.1, 4.2 a 4.3. Odhadu fraktálové dimenze matematických fraktálů lze především použít pro posouzení přesnosti a citlivosti jednotlivých metod odhadu.

Odhad fraktálové dimenze je možné provádět pro množiny bodů, časové řady, topologicky 2D a 3D objekty. Pro jednotlivé objekty v různých topologických dimenzích se používají různé metody odhadu fraktálové dimenze, které lze použít jen pro objekty v určité topologické dimenzi. Metody pro odhad v jiné topologické dimenzi lze použít pouze po určité modifikaci základního algoritmu. Metody odhadu fraktálové dimenze používají často euklidovských těles, která musí být pro použití v jiné topologické dimenzi změněna – transformována. Příkladem je mřížková (box) metoda. Pro posouzení bodů v přímce je boxem interval. V případě 2D tělesa je boxem čtverec a pro 3D těleso krychle, jak je v tab. 6.1. Pro stanovení fraktálové dimenze je několik koncepcí. Nejednodušší je tzv. „obvodová metoda“ (v angličtině je používáno *Compass method*) a tzv. „mřížková (box) metoda“ (v angličtině je používáno *Box method*), kap. 6.1 a 6.2.

Pro odhad *Hurstova koeficientu* soběafinitních fraktálů a z něj fraktálové dimenze lze použít několik analýz, které vesměs vycházejí ze statistických metod. Je to „*R/S analýza*“ (*Range/Standart Deviation Analysis*), „*Celková variační metoda*“, „*Spektrální fraktálová analýza*“ (*Power-spectral analysis*), „*Roughness -length analysis*“ a další. První dvě z těchto metod jsou v kapitole 6.3, 6.4. Takto odhadnutá fraktálová dimenze je nazývána podle jména metody, kterou byla odhadnuta, např. *box (mřížková) dimenze*, *R/S dimenze*, apod.

Tab. 6.1 Výběr metod odhadu fraktálové dimenze

Metoda	Objekt	Rozmezí frakt. dim. D_F	Topolog. dim. D_T
Mřížková metoda pro množinu bodů na přímce	Množina bodů na přímce	0 až 1 pro množinu bodů na přímce a	0
Mřížková metoda pro objekty na ploše	Struktury na ploše	0 až 1 pro množinu bodů a 1 až 2 pro objekty na ploše	0 pro množinu bodů a 1 pro objekty na ploše
Mřížková metoda pro objekty v prostoru	Struktury v prostoru	2 až 3	2
Obvodová metoda	Křivky	1 až 2	1
R/S metoda	Časové řady	1 až 2	1
Celková variační metoda	Časové řady	1 až 2	1

6.1 OBVODOVÁ METODA

Metoda je užívána k odhadu fraktálové dimenze křivek, a tak může být například použita pro odhad fraktálové dimenze u zmíněné pobřežní linie a lze ji odhadnout za použití mapy a kružítko. Délku pobřeží budeme měřit různě otevřeným kružítkem r_{OBV} a počítat počet



Obr. 26 Princip Obvodové metody, měření délky pobřežní linie Velké

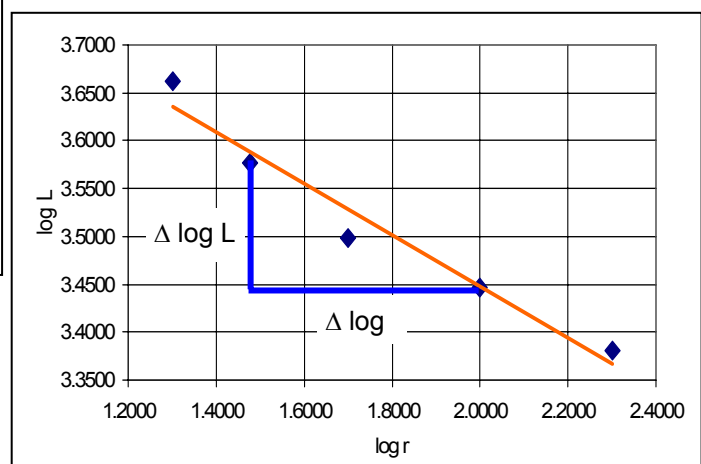
kroků potřebných pro pokrytí N_{OBV} , jak je vidět na obr. 26. Délka pobřežní linie je pak dána výrazem

$$L(r_{OBV}) = N(r_{OBV}) \cdot r_{OBV}$$

Tabulka 6.2 nám ukazuje zřetelně prodlužování délky pobřežní linie se snižujícím se rozpětím kružítka.

Pokud by mělo pobřeží konečnou délku, $L(r_{OBV})$ by se přibližovalo k hodnotě L_0 pro $r \rightarrow 0$. Obr. 27 ukazuje závislost mezi $\log r_{OBV}$ a $\log L(r_{OBV})$.

Jak je vidět, délka $L(r_{OBV})$ se neblíží k žádné konečné hodnotě, ale stále roste. Jak již bylo zmíněno dříve, takovýto jev se nazývá *Richardsonův efekt* (kap. 3.1 a 4.1.3). Tedy na otázku: Jak dlouhá je pobřežní linie ostrova? Nelze jednoznačně odpovědět. Délka se totiž mnění v závislosti na zvoleném měřítku.



Obr. 27 Závislost mezi $\log r$ a $\log L$

Protože závislost mezi $\log r_{OBV}$ a $\log L(r_{OBV})$ je přímková, pak je zřejmé, že platí vztah:

$$L(r_{OBV}) = N(r_{OBV}) \cdot r_{OBV} = konst. r_{OBV}^{-D_{OBV}} \cdot r_{OBV} = konst. \cdot r_{OBV}^{1-D_{OBV}}. \quad (27)$$

D_{OBV} je obvodovou dimenzí (compass dimension), jež je odhadnutá fraktálová dimenze touto metodou.

Ze sklonu regresní přímky můžeme po úpravě vztahu (27) odhadnout dimenzi D_R :

$$1 - D_{OBV} = \frac{\Delta \log L(r_{OBV})}{\Delta \log r_{OBV}} = s \Rightarrow D_{OBV} = 1 - s = 1 - \frac{\Delta \log L(r_{OBV})}{\Delta \log r_{OBV}}. \quad (28)$$

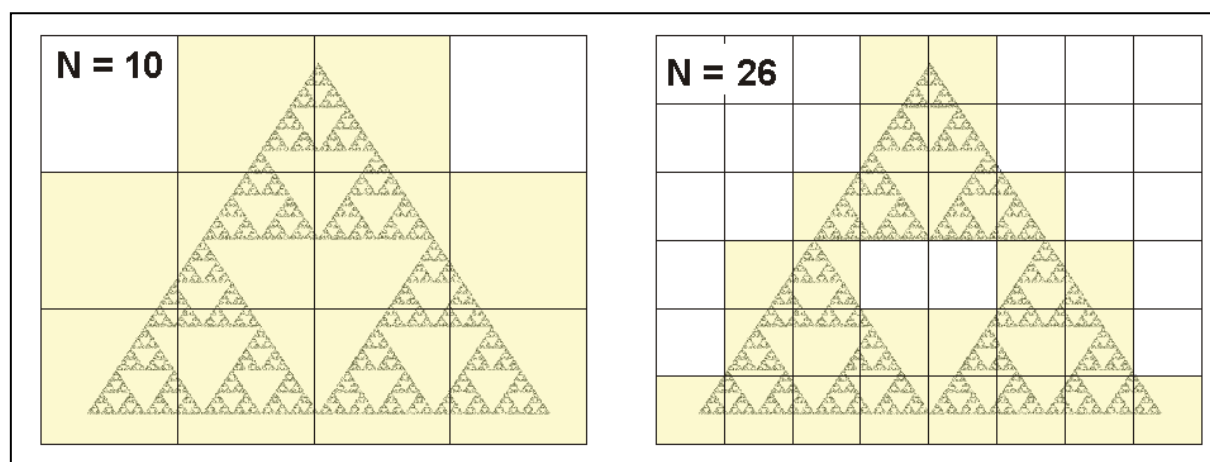
V našem případě vychází obvodová dimenze $D_R = 1,2492$. Poznamenejme, že čím je hodnota D_R vyšší než hodnota topologické dimenze, tím je vyšší stupeň nepravidlosti objektu. Změna délky se změnou měřítka je pak výraznější.

Tab. 6.2 Délka pobřežní linie

r [km]	N	L=N.r [km]	log r	log L
200	12	2400	2,3010	3,3802
100	28	2800	2,0000	3,4472
50	63	3150	1,6990	3,4983
30	126	3780	1,4771	3,5775
20	230	4600	1,3010	3,6628

6.2 MŘÍŽKOVÁ METODA

Jednoduchou a universální metodu pro odhad fraktálové dimenze je mřížková metoda (box metoda). Princip metody je vysvětlen na objektu na ploše - Sierpinského těsnění. Těleso pokrýváme několika boxy (mřížkami) o různých stranách buněk r jak je na obr. 28.



Obr. 28 Princip Box metody, pokrývání Sierpinského trojúhelníku boxy velikosti $r = 20$ a $r = 10$

Počítáme pak počet boxů potřebných pro pokrytí tělesa $N(r)$. Počet těchto boxů je dán vztahem:

$$N(r) = \text{konst.} \left(\frac{1}{r} \right)^{D_B} = \text{konst.} \cdot r^{-D_B} . \quad (29)$$

D_B je box dimenze.

Pro odhad fraktálové dimenze můžeme použít algoritmus, jenž stanovuje plochu potřebnou pro pokrytí objektu. Za použití (29) je celková plocha pokrytí $A(r)$ boxy o straně r dána vztahem:

$$A(r) = N(r) \cdot r^2 = \text{konst.} \cdot r^{-D_B} \cdot r^2 = \text{konst.} \cdot r^{2-D_B} . \quad (30)$$

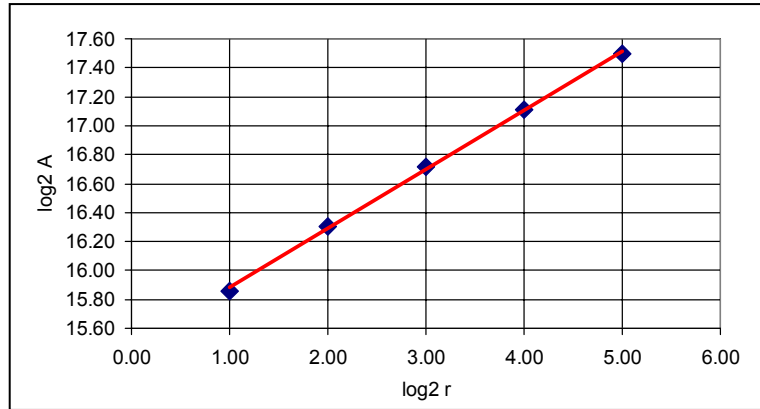
Logaritmická závislost mezi plochou $\log_2 A$ a velikostí strany $\log_2 r$ je na obr. 29. Jedná se o tzv. Richardson - Mandelbrotův graf.¹

¹ *Není důležité, jakých logaritmů je použito (log, ln, log₂). Podmínkou je pouze, aby se jednalo o tentýž logaritmus při jednotlivých odhadech fraktálové dimenze. Nicméně Richardson - Mandelbrotův graf využívá dvojkový logaritmus.*

D_B můžeme pak získat ze sklonu regresní přímky:

$$2 - D_B = \frac{\Delta \log A(r)}{\Delta \log r} = s \Rightarrow D_B = 2 - s = 2 - \frac{\Delta \log A(r)}{\Delta \log r} \quad (31)$$

Opět D_B je odhadnutá fraktálová dimenze a v ideálním případě by se měla rovnat skutečné fraktálové dimenzi. V případě Sierpinského těsnění nám ze sklonu regresní přímky vyjde $D_B = 1,586$ a skutečná fraktálová dimenze je $D_F = 1,5849$ (jak je vypočteno v kapitole 4.3).



Obr. 29 Richardson - Mandelbrotův graf pro Sierpinského těsnění

S Box metodou můžeme odhadovat fraktálovou dimenzi i pobřežní linie, tedy křivky na ploše. Stejně jako pro Sierpinského těsnění platí vztah (29). Pro délku pak platí:

$$L(r) = N(r) \cdot r = \text{konsr.} \cdot r^{1-D_B} \quad (32)$$

Box metodu je také možné použít i těleso ve třech dimenzích. Místo čtverců jsou pak použity krychle pro pokrytí objektu. Za použití vztahu (29) můžeme psát:

$$C(r) = N(r) \cdot r^3 = \text{konst.} \cdot r^{3-D_B} \quad (33)$$

Pokud chceme použít box metodu pro množinu bodů, tak se použije vztah (29) bez dalších úprav. Vztah (29) lze také použít podle [A.8, A.13] přímo pro výpočet box dimenze objektu na ploše.

6.3 R/S DIMENZE

R/S metoda (Range/Standard Deviation Analysis) [A.2] je určena pro odhad Hurstova koeficientu (viz kap. 4.4) ze kterého lze jednoduše vypočítat fraktálovou dimenzi:

$$D_R = 2 - H \quad (34)$$

Uvažujme interval nebo okno délky w v signálu, objektu se soběafinitní fraktálovou dimenzí. V tomto okně definujeme dvě veličiny:

$R(w)$, řada získaná z hodnot y v intervalu. Řada je měřená s ohledem na trend v okně, kde trend je jednoduše odhadnut jako přímka spojující první a poslední bod v okně. Je odečítán průměrný trend v okně.

$S(w)$, standardní odchylka první derivace dy hodnoty y uvnitř okna. První derivace hodnot y je definována jako rozdíl mezi hodnotami y v pozici x a hodnotami y v předchozí pozici na ose x :

$$dy(x) = y(x) - y(x - dx) \quad (35)$$

kde dx je vzorkovací interval, tedy interval mezi dvěma sousedními hodnotami.

Spolehlivé měření $S(w)$ vyžaduje data s konstantním vzorkovacím intervalem dx , neboť rozdíl mezi následujícími hodnotami y je funkcí vzdálenosti mezi nimi. $S(w)$ v R/S analýze je použito ke standardizaci řady $R(w)$ umožňující porovnání rozdílných množin dat; pokud $S(w)$ se nepoužije, řada $R(w)$ může být počítána na množině dat, které nemají konstantní vzorkovací interval.

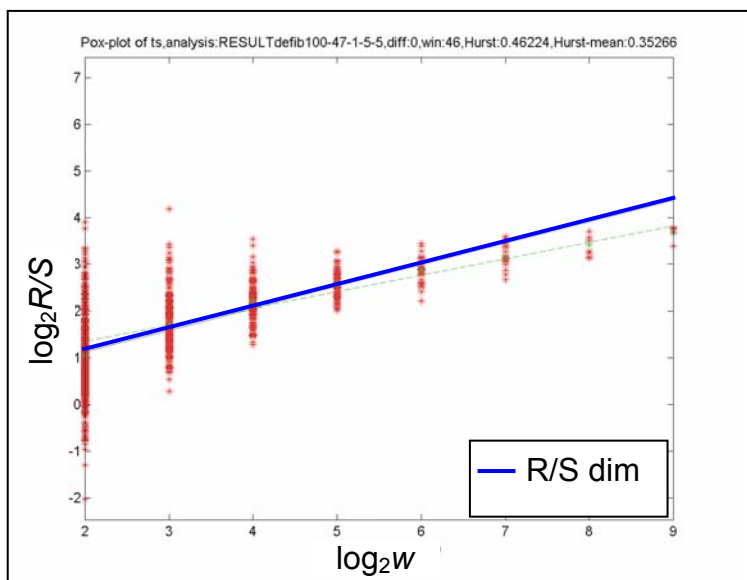
Poměr $R/S(w)$ je definován jako:

$$R/S(w) = \left\langle \frac{R(w)}{S(w)} \right\rangle, \quad (36)$$

kde w je délka okna a hranaté závorky $\langle R(w) \rangle$ označují průměrnou hodnotu čísel řady $R(w)$. Protože se jedná o soběafinitu, základem metody je předpoklad, že řada $R/S(w)$ získaná z hodnot y v okně délky w je úměrná délce okna mocněného Hurstovým koeficientem, tedy:

$$R/S(w) = w^H. \quad (37)$$

Vstupní signál je tedy dělen na intervaly délek w , pro které je měřeno $R(w)$ a $S(w)$ v každém intervalu a počítáno $R/S(w)$ jako průměr poměru $R(w)/S(w)$ jak je v (36). Tento proces je mnohokrát opakován a druhý logaritmus $R/S(w)$ je vynášen na vertikální osu a druhý logaritmus w na osu horizontální (obr. 30). Pokud je signál soběafinitní pak ze sklonu regresní přímky všech vypočtených hodnot vypočteme Hurstův koeficient H , na základě úpravy vztahu (37) platí:



Obr. 30 Graf pro určení Hurstova koeficientu pro časovou řadu

$$\frac{\Delta \log_2 R/S(w)}{\Delta \log_2 w} = H. \quad (38)$$

Fraktálovou dimenzi lze vypočíst z Hurstova koeficientu z výrazu (34).

6.4 CELKOVÁ VARIČNÍ METODA

Celková variační metoda [A.2] je založena na rozdělení původní časové řady $V = \{V_i, i \geq 1\}$ do bloků velikosti t_s a výpočtu průměrné hodnoty každého bloku, tedy uvažuje se celková (seskupená) řada:

$$V^{(t_s)}(k) = \frac{1}{t_s} \sum_{i=(k-1)t_s+1}^{kt_s} V(i) \quad k=1,2,\dots, \quad (39)$$

pro posloupnost hodnot t_s . Index k označuje blok. Pak je vypočítána vzorkovací variace řady (sample variance) $V^{(t_s)}(k)$ $k=1,2,\dots$ uvnitř každého bloku. Tato vzorkovací variace $V^{(t_s)}(k)$ je odhad $\text{Var} V^{(t_s)}$.

Pro všechny řady $V_1, \dots, V_N$, dané velikosti bloku t_s , pro celkový počet bloků $N_{BLOCK} = \frac{l_V}{t_s}$ (kde l_V je délka celé časové řady V), vypočtené $V^{(t_s)}(k)$ pro $k=1,2,\dots,N_{BLOCK}$, je tedy vypočtena vzorkovací variace:

$$\overline{\text{Var}} V^{(t_s)} = \frac{1}{N_{BLOCK}} \sum_{k=1}^{N_{BLOCK}} (V^{(t_s)}(k))^2 - \left(\frac{1}{N_{BLOCK}} \sum_{k=1}^{N_{BLOCK}} V^{(t_s)}(k) \right)^2. \quad (40)$$

Tato procedura se opakuje pro různé hodnoty velikosti bloku t_s . Do grafu se pak vynáší logaritmus vzorkovací variace $\log(\overline{\text{Var}} V^{(t_s)})$ versus $\log(t_s)$. Je nutné vybrat t_s , $\{t_{Si}, i \geq 1\}$, takové jenž má ekvidistantní vzdálenosti na logaritmické škále, tak že $t_{Si+1}/t_{Si} = C$, kde C je konstanta jenž závisí na délce časové řady a požadovaném počtu bodů v grafu závislosti $\log(\overline{\text{Var}} V^{(t_s)})$ versus $\log(t_s)$.

Pokud $\overline{\text{Var}} V^{(t_s)}$ je odhad $\text{Var} V^{(t_s)}$, výsledné body by měly tvořit přímku se stupáním $\beta = 2H - 2, -1 \leq \beta < 0$. V praxi je stoupání odhadnuto pomocí regresní přímky bodů grafu. Předpokládá se přitom, že délka bloku t_s a délka celé časové řady l_V jsou velké, a že $t_s \ll l_V$. Tedy, jak délka každého bloku, tak počet boxů je velký.

6.5 OSTATNÍ METODY

Vedle výše uvedených metod se používá mnoho dalších metod a mnoho dalších variant. Nicméně, všechny metody mají podobný princip, tedy jedná se o pokrývání objektu různými euklidovskými tělesy a počítáme počet, plochu nebo obsah pokrytí. Výsledky pak vynášíme do již zmíněného Richardson - Mandelbrotova grafu, či logaritmických grafů podobných.

Různé metody se dají použít pro různé objekty. Vedle všech tří dimenzí se může jednat o objekty v binárním kódu, v šedivé škále či barevné. Pro každý objekt může být vhodná jiná metoda odhadu fraktálové dimenze. Je proto vhodné pro každý objekt provést více odhadů za použití více metod.

Vedle již zmíněných metod odhadu D_F se jedná o metody jako je "Metoda dilatace pixelů" (2D variation procedure), Triangular Prism Surface Area Procedure, Cumulative - Intersection Method, Parallel - Lines Method, Mass - Radius Method.

7 ZÁVĚR

Euklidovská geometrie dokáže jen komplikovaně a nebo vůbec nedokáže popsat složité útvary jako jsou vady, drsnost povrchu, nehomogenní množiny bodů, či složité časové řady dat z výrobních procesů. Složitost těchto útvarů však může být významná jak pro jejich popis tak i pro hlubší pochopení jejich vzniku.

Fraktálová geometrie je matematický nástroj pro popis složitě strukturovaných objektů, jejichž charakter se nemění při zvětšení. Tyto objekty, které lze popsat pomocí této geometrie, nazýváme z geometrického hlediska fraktály.

Jestliže se na otázku: „Co je to fraktál?“ budeme snažit odpovědět jednoduše a celý problém zjednodušíme, pak můžeme říci, že fraktál je těleso, které má „nekonečnou složitost“, ale jeho „základní prvek“ se v různých měřících opakuje. Označení fraktál poprvé použil B. Mandelbrot. Slovo fraktál použil pro všeobecné označení objektů, jejichž tvar je nezávislý na velikosti měřítka, pod kterým objekt pozorujeme. Znamená to tedy, že není důležité jaké měřítko pro pozorovaný objekt použijeme, neboť „charakter struktury“ bude stejný nebo podobný pro různá zvětšení, či zmenšení (tzv. měřítková neměnnost).

Ve fraktálové geometrii počítáme nebo odhadujeme tzv. fraktálovou dimenzi, které je „charakteristickým číslem“, které uvádí jak složitý je pozorovaný útvar. Může se jednat o povrch, nebo strukturu tělesa, časovou řadu nebo množinu bodů. Fraktálová dimenze (lze se také setkat s pojmem Hausdorff-Besicovitch dimenze) matematicky popisuje složitost těchto objektů. **Složitost popisuje pomocí jednoho čísla. Toto číslo vyjadřuje geometrické vlastnosti pozorované struktury.** Fraktálová dimenze, v případě fraktálů, převyšuje jejich topologickou dimenzi, která je celočíselná (dimenze charakterizované bodem, úsečkou, trojúhelníkem a tetraedrem). To je i jedna z definic fraktálů.

Fraktály můžeme rozdělit na:

- matematické
- přírodní

Matematické fraktály vznikly za pomoci výpočetní techniky a mohou se skládat z identických částí. Matematické fraktály nemají tak velký význam pro běžný život a setkáme se s nimi pouze v matematice. Dobře však poslouží pro pochopení fraktálové geometrie a dají se použít pro modelování určitých přírodních struktur („stochastické fraktály“).

Mnohem důležitější jsou fraktály kolem nás, tedy fraktály přírodní. Prakticky každé těleso, nebo objekt v reálném světě má na první pohled nebo po zvětšení složitou strukturu. Odborně říkáme, že vykazuje fraktalitu, tedy je z geometrického hlediska fraktálem. Proto i objekty, či časové řady, které můžeme získat ve výrobě se dají popsat pomocí fraktálové geometrie.

V případě přírodních fraktálů nelze fraktálovou dimenzi přímo spočítat. Neznáme totiž způsob a princip „generace“ fraktálu. Přesněji nevíme za jakých podmínek fraktál vzniká. V tomto případě můžeme fraktálovou geometrii jen odhadovat. K tomu slouží mnoho metod. Při odhadu fraktálové geometrie záleží zda se jedná o topologicky jednodimenzionální útvar (např. časová řada z výrobního procesu) nebo dvojdimenzionální útvar (např. snímek poruchy).

Fraktálová geometrie spolu s teorií chaosu v různých odvětvích vědy znamenala relativně velký průlom v poznání. Je cestou nejenom k popisu dějů a tvarů v přírodě, kde si

nestačíme s klasickou geometrií a matematikou, ale je i cestou k modelování složitých procesů. Fraktálová geometrie je tedy silným nástrojem, který zatím čeká na své "komerční uplatnění" - uplatnění v průmyslu.

LITERATURA

- [A.1] BUNDE, A. and HAVLIN, S. Fractals in science. Berlin: Springer, 1994. ISBN: 0387562206.
- [A.2] EVERTSZ, C.J.G., PEITGEN, H.O. and VOSS, R.F. Fractal Geometry and Analysis. Singapore: World Scientific Publishing Co.Pte. Ltd., 1996. ISBN: 9810224346.
- [A.3] DENNY, G. Encounters with chaos. New York; St. Louis; San Francisco: McGraw-Hill, Inc., 1992. ISBN 0-07-025203-3.
- [A.4] GLEICK, J. Chaos, vznik nové vědy. Překlad SEDLÁŘ, J. a KAMENICKÁ, R. Praha: Ando publishing, 1996. ISBN: 80-86047-04-0.
- [A.5] PEITGEN, H.O., JUERGENS, H. and SAUPE, D. Chaos and Fractals: New Frontiers of Science. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1992. ISBN: 0387979034.
- [A.6] PEITGEN, H.O., JUERGENS H. and SAUPE, D. Chaos: Bausteine der Ordnung. Übers. Von RODENHAUSEN, A.M. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag; Stuttgart: Klett-Cotta, 1994. ISBN: 3-540-55782-2; 3-608-95435-X
- [A.7] PEITGEN H.O., JUERGENS H., SAUPE D. Fractals for the Classroom, Part One, Introduction to Fractals and Chaos. New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 1992.
- [A.8] TROUSSOV, G. Help of Benoit 1.2: software for estimating of fractal dimension. St. Petersburg: TruSoft International Inc., 1996.
- [A.9] ZELINKA, Ivan. Aplikovaná informatika aneb úvod do fraktální geometrie, buněčných automatů ... 1. vydání, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta technologická ve Zlíně, 1999. ISBN: 80-214-1423-5.

Odkazy na Internetu

- [A.10] HOTAŘ, V. Fraktály: neceločíselná dimenze kolem nás.
<http://fraktal.hotar.net>
Liberec, **prosinec** 2005.
- [A.11] TIŠNOVSKÝ, P. Fraktály.
http://www.fit.vutbr.cz/%7Etisnovpa/fract/clanky/1.htm#tth_sEc1.2
Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2000.
- [A.12] PEITGEN, H. O. and Voss, R. NSF Pattern Exploration Directions and Software.
<http://www.cevis.uni-bremen.de/CeVis/fractals/index.html>
Florida, Florida Atlantic University, 2000
- [A.13] ZMESKA, O., NEZADAL, M., BUCHNICEK, M. AND SEDLAK, O. HarFA and HARFA: E-JOURNAL.
<http://www.fch.vutbr.cz/lectures/imagesci/>
Brno: Ústav fyzikální a spotřební chemie, 2002.

