

VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ V LIBERCI

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

Laboratoř experimentální mechaniky

Doc. Ing. Antonín POTĚŠIL, CSc.

ZÁKLADY TEORIE VISKOELASTICITY A DYNAMICKÁ ODEZVA VISKOELASTICKÝCH MATERIÁLŮ

(habilitační práce)

UNIVERZITNÍ KNIHOVNA
TECHNICKÉ UNIVERZITY V LIBERCI



3146088165

VYSOKÁ ŠKOLA STROJNÍ A TEXTILNÍ

Univerzitní knihovna

Voroněžská 1329, Liberec 1

PSČ 461 17

U2809

leden 1993

Předmluva k habilitační práci

Rozhodnutí, zpracovat téma, které je obsahem předkládané habilitační práce, do ucelenější podoby vhodné ke studiu jak denního, tak postgraduálního, vzniklo v souvislosti s vytvořením specializace "materiálové inženýrství" na strojní fakultě VŠST v Liberci v roce 1990. Účelem konaných přednášek a seminářů bylo seznámit posluchače se základy matematického popisu chování kovových materiálů za zvýšených teplot a s viskoelastickým pojetím odezvy plastických hmot na přiložené vnější zatížení. Jako základní studijní podklady byly posluchačům postupně poskytovány habilitantem zpracované písemné materiály se souhrnným názvem "Základy teorie creepu a viskoelasticity a dynamická odezva viskoelastických materiálů", které našly u posluchačů příznivou odezvu, což přesvědčilo autora o tom, aby se staly základem nyní předkládané práce.

Protože je habilitantem uvažováno posléze vydat podstatnou část této práce jako učební text pro studijní účely posluchačů VŠST je předkládaná habilitační práce především v úvodní partii kompilační, přičemž její jednotlivé kapitoly jsou obohaceny o části z oblasti původní vědecko-výzkumné činnosti autora, kterou mohl realizovat v prostředí kolektivu pracovníků Laboratoře experimentální mechaniky na VŠST v Liberci.

Práce zahrnuje nové poznatky a aplikace z oblasti identifikace dynamické odezvy viskoelastických materiálů. Zdá se, že by to mohlo být zajímavé a podnětné nejen pro strojařské, ale i pro textilní obory inženýrské činnosti. Snahou autora bylo začlenit a uspořádat nové poznatky do kontextu teorie lineární viskoelasticity a přispět tak k jejímu obohacení především v oblasti dynamické odezvy viskoelastických materiálů.

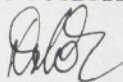
Je zřejmé, že teoretické partie textu nejsou vyčerpávajícím studijním materiálem k řešení problémů v oblasti viskoelastického chování plastických hmot a textilních materiálů. Publikace seznamuje a vysvětluje především v technické praxi užívanou terminologii teorie viskoelastivity a přibližuje filozofii předmětu, který se na vysokých školách s technickým zaměřením přednáší až v rámci postgraduálního a doktorandského studia. Snahou autora je usnadnit zvědavému zájemci o tyto problémy počáteční orientaci v teorii viskoelastivity pro případ rozšiřování znalostí v této vědní oblasti. K hlubšímu studiu je možné vybírat z titulů publikací v přiloženém seznamu literatury.

Poděkování autora patří vedoucímu katedry mechaniky pružnosti a pevnosti Prof. RNDr. Bohuslavu Střížovi, DrSc., kolegům z Laboratoře experimentální mechaniky, především jejímu vedoucímu Ing. Vladimírovi Humenovi, CSc.

Autor je hluboce zavázán své manželce paní Ing. Ludmile Potěšilové a svým dětem Alexandrovi, Nadě a Martinovi za jejich trpělivost a porozumění během přípravy habilitační práce.

Liberec, leden 1993

Antonín POTĚŠIL



ÚVOD - VISKOELASTICKÉ CHOVÁNÍ MATERIÁLŮ	4
1. Základní pojmy a vztahy v teorii lineární viskoelasticity	5
1.1. Creep a relaxace	6
1.2. Režimy periodického zatěžování	8
1.3. Integrální pojetí lineární viskoelasticity	10
1.4. Diferenciální pojetí lineární viskoelasticity	13
1.5. Relaxační a retardační spektra	14
1.6. Struktura teorie lineární viskoelasticity	16
2. Obecné rovnice pro izotropní těleso v teorii lineární viskoelasticity, korespondenční princip	18
3. Identifikace mechanických vlastností viskoelastických materiálů	24
3.1. Creepové a relaxační experimenty	25
3.2. Nepřímé metody určování složek komplexních veličin	26
3.2.1. Metoda volných kmitů	27
3.2.2. Metoda vynucených rezonančních kmitů	29
3.2.3. Metoda nerezonančních vynucených kmitů	29
3.2.4. Metoda šíření stacionárních harmonických vln ...	30
3.2.5. Metody šíření impulsů	31
3.3. Ekvivalence časových a frekvenčních materiálových funkcí v teorii lineární viskoelasticity	32
4. Impulsní metoda osamělého afinního pulsu - MOAP	33
4.1. Předchozí práce	33
4.2. Distorze osamělého deformačního pulsu šířícího se v tyči z disipativního materiálu	34
4.3. Charakteristika a předpoklady aplikace MOAP	36
4.3.1. Vztahy pro stanovení počátků reologických funkcí	37
4.3.2. Vztahy pro vyhodnocení frekvenčních charakteristik	40
4.3.3. Experimentální zařízení MOAP a metodika vyhodnocení materiálových funkcí	41

4.3.4. Testované materiály a výsledky získané MOAP	44
* Dynamické viskoelastické vlastnosti pro PMMA, PVC, CELULOID	45
* Porovnání útlumových vlastností kompozitů I. typu s polypropylénovou maticí (Mosten) a rozptýleným plnivem tvořeným krátkými skleněnými vlákny	48
* Stanovení dynamických charakteristik materiálu trubek z Litenu	49
* Dynamické útlumové vlastnosti polyakrylonitridových (PAN) svazků vláken	50
* Dynamická poddajnost skleněných vláken z hlediska technologie zpracování skaním	52
4.4. Predikce profilu pulsu šířícího se v jednorozměrném lineárně viskoelastickém prostředí	70
4.4.1. Predikce pomocí časových funkcí $j(t)$ a $o(t)$	71
4.4.2. Predikce pomocí frekvenčních funkcí $a(f)$ a $c(f)$	72
4.4.3. Experimentální ověření predikčních postupů a diskuse výsledků	73
5. Dynamická odezva reologických modelů hmoty	82
5.1. Dvouparametrické modely materiálu	83
5.1.1. Maxwellův model	83
5.1.2. Kelvinův model	84
5.2. Tříparametrické modely materiálů	84
5.2.1. Poyntingův-Thompsonův model	84
5.2.2. Zenerův model	85
5.3. Frekvenční vlastnosti reologických modelů	87
5.4. Energetická bilance v harmonickém cyklu zatížení lineárně viskoelastického prostředí	90
5.5. Odezva reologických modelů hmoty na rázová zatížení	93
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	97

ÚVOD - VISKOELASTICKÉ CHOVÁNÍ MATERIÁLŮ

Představa o viskoelastickém chování materiálů vznikla již poměrně dávno. V roce 1974 podal Boltzmann fenomenologickou lineární teorii tečení izotropních materiálů založenou na principu superpozice, v roce 1909 ji Volterra nazývá "teorií dědičné pružnosti" a uvádí analogické závislosti pro anizotropní materiály /1, 2/. Po dosti dlouhé období byla pak tato teorie považována za kuriózní, upadla téměř v zapomnutí a málokdo se jí zabýval; pro matematiky byla triviální a pro mechaniky nepraktická /3/.

V posledním polovině století se tato situace radikálně změnila. Ukázalo se, že teorie "dědičné pružnosti" je velice dobrou aproximací chování především polymerních materiálů, které v polovině 20. století zaznamenávají ve světě bouřlivý rozvoj a dokonce i kovů (při vysokých teplotách) a materiálů ve stavebnictví (např. beton).

Poznamenejme, že v současné odborné literatuře je původní termín "teorie dědičné pružnosti" nahrazen názvem "teorie materiálů s pamětí" nebo spíše "teorie viskoelastivity".

Počátkem 50.let se teorie viskoelastivity dále rozvíjí. Alfrey /4/ v roce 1944 zformuloval viskoelastickou analogii (princip vzájemnosti, resp. korespondence), která ukazuje za jistých zjednodušujících předpokladů o mechanických vlastnostech materiálů na vztah mezi řešením elastické a viskoelastické úlohy. V této době jsou výchozí rovnice teorie viskoelastivity znovu formulovány. Autoři vycházejí z axiomatického /5,6/, termodynamického /8,9/ i statistického /8/ přístupu a také z analýzy mechanických modelů /10/. V roce 1953 Gross /6/ shrnul vše, co do té doby náleželo k teorii lineární viskoelastivity a ukázal, že tato již tvoří uzavřený systém vztahů, který lze dále rozpracovat pouze v konkrétních aplikacích.

Zároveň s lineární teorií viskoelastivity je poněkud skromněji rozvíjena nelineární teorie. Tato se obvykle objevuje v závěrech článků a publikací, týkajících se teorie lineární /2,7,15,16/, nebo v konkrétnějších aplikacích ve výzkumných zprávách některých pracovišť /17,18,19,20,29/,

které jsou pro běžnou technickou praxi jen obtížně dostupné a použitelné. Je oprávněné se domnívat, že teorie nelineární viskoelasticity je dnes v podobném stavu svého vývoje, jako byla na počátku tohoto století teorie lineární /30/.

Ze stručného nahlédnutí do historie je zřejmé, že rozvoj teorie viskoelasticity byl podmíněn vznikem a výrobou nových hmot, jejichž statické ani dynamické vlastnosti nelze popisovat pomocí jednoduchých představ tak, jako v teorii pružnosti, nýbrž je třeba uvažovat další proměnné, kterými jsou v prvé řadě čas a teplota.

I když teorie viskoelasticity byla původně budována jako nástroj k popisu chování materiálů a konstrukcí při dlouhodobém zatěžování, ukázalo se, že lze obecně vypracované metody aplikovat i na problémy dynamické. Tato skutečnost znamenala kvalitativní skok v aplikacích směřujících k dynamice stacionárních i nestacionárních (přechodových) viskoelastických jevů.

Viskoelastická, jedna ze součástí reologie, se takto stává samostatným vědním oborem neobyčejně rozsáhlým, zasahujícím do řady vědních disciplín a částečně se s nimi překrývajícím.

1. Základní pojmy a vztahy v teorii lineární viskoelasticity

Viskoelastické prostředí (i nelineární) lze nejobecněji definovat funkcionálním vztahem mezi složkami tenzoru napětí σ_{ij} , složkami tenzoru deformace ϵ_{ij} , resp. rychlosti deformace $\dot{\epsilon}_{ij}$, časem t a teplotou T /10,23/, tj.

$$\Phi(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}, t, T) = 0. \quad (1.1)$$

Předpoklad platnosti tohoto vztahu přitom vylučuje problémy související s plastickými deformacemi /22/.

Pro zjednodušení budeme dále předpokládat, že materiál se při deformování chová izotermicky, tj. že všechny jevy námi sledované probíhají za konstantní teploty.

Obecně jsou známy vlastnosti dvou ideálních modelů materiálu - elastického tělesa a viskózní kapaliny. Reálné materiály však ve většině případů mají vlastnosti, které se nacházejí mezi těmito dvěma extrémy. Model elastického těle-

sa lze aplikovat na materiály, které mají schopnost akumulovat mechanickou energii a nerozptylovat ji. Na druhé straně viskózní kapalina (Newtonovská) má schopnost (při nehydrostatickém zatížení) rozptylovat energii, ale není schopna ji akumulovat. Potom ovšem ani jedna ani druhá teorie deformace nemůže popsat chování takových materiálů, které mají schopnost částečně (ale ne úplně) "navracet" potřebnou na jejich deformování. Takové materiály se vyznačují schopností jak akumulace energie, tak její disipace.

Jiný způsob charakterizování takovýchto materiálů spočívá ve sledování jejich mechanického chování při náhle přiloženém zatížení a náhlém odlehčení. Ideálně pružný materiál při takovýchto režimech zatěžování mění svůj tvar a objem s jistou konečnou rychlostí danou rychlostí šíření příslušné deformační vlny, přičemž po odlehčení se navrácí beze zbytku do výchozího stavu /42/, zatímco reálný materiál při těchto režimech zatěžování mění svůj tvar a objem v závislosti na čase, resp. na rychlosti zatížení.

1.1. Creep a relaxace

Bez újmy na obecnosti vyšetřujeme lineární viskoelastické charakteristiky izotropního materiálu při jednoosém tahu, resp. tlaku (jednorozměrný model napjatosti).

Podrobíme-li tenkou štíhlou tyč zhotovenou ze zkoumaného materiálu v čase $t = 0$ zatěžovacímu režimu

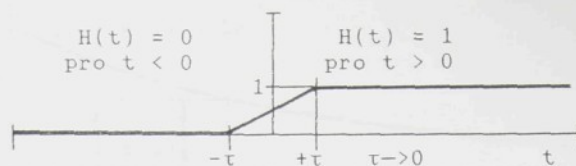
$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_0 H(t) \text{ pro } t \geq 0, \\ \sigma(t) &= 0 \text{ pro } t < 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

kde σ_0 je konstantní hodnota napětí vyvolaná přiloženým zatížením a $H(t)$ je Heavisideova funkce - viz obr. 1.1, deformace začne monotónně vzrůstat s časem. Tento jev je nazýván creepem (tečením) a lze jej vyjádřit vztahem

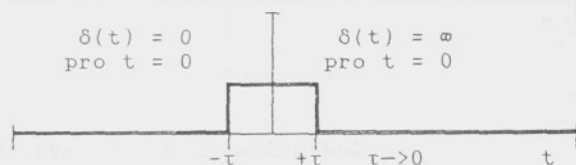
$$\epsilon(t) = \sigma_0 j(t) = \sigma_0 [j_0 + \zeta(t)], \quad (1.3)$$

kde $j(t)$ je funkce poddajnosti, $\zeta(t)$ je creepová funkce, $j_0 = 1/E_D$ (E_D - dynamický modul pružnosti) je poddajnost odpovídající okamžité elastické deformaci (viz. obr. 1.2).

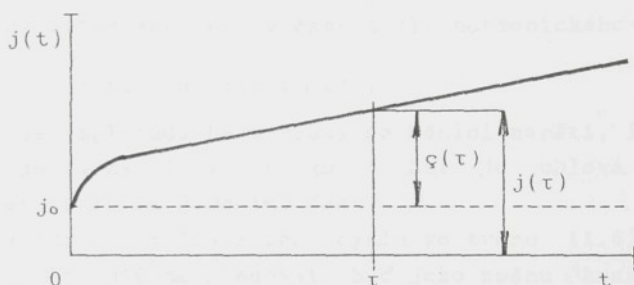
Heavisideova funkce



Diracova funkce



obr. 1.1



obr. 1.2

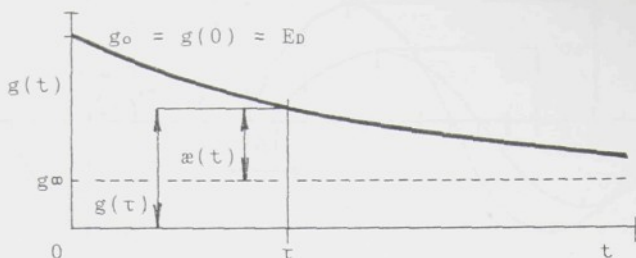
Pod pojmem relaxace napětí je obecně chápán jev spjatý s poklesem napětí v čase při konstantní hodnotě deformace ϵ_0 , která byla v tyči zafixována v okamžiku $t = 0$, což lze zapsat jako

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \epsilon_0 H(t) \text{ pro } t \geq 0, \\ \epsilon(t) &= 0 \text{ pro } t < 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Probíhající odezvu materiálu, pokles napětí v čase, lze vyjádřit vztahem

$$\sigma(t) = \epsilon_0 g(t) = \epsilon_0 [g_0 + \alpha(t)], \quad (1.5)$$

kde $g(t)$ je relaxační modul pružnosti ($g(0)=g_0=E_D$), $\alpha(t)$ je relaxační funkce a g_0 je tzv. rovnovážný modul - obr. 1.3.



obr. 1.3

1.2. Režimy periodického zatěžování

(Komplexní veličiny teorie lineární viskoelastivity)

Tyto režimy je zvykem v mechanice nazývat dynamickými. Nechť se deformace mění v čase t dle harmonického zákona

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp(i\omega t), \quad (1.6)$$

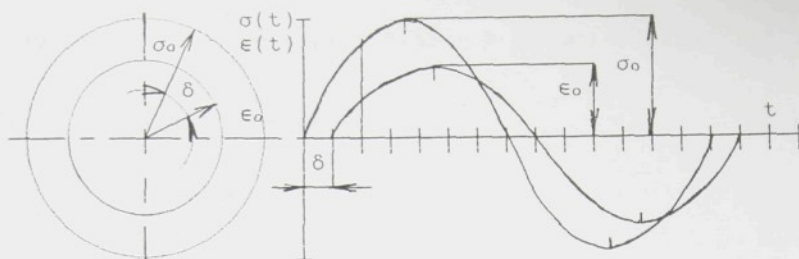
kde σ_0 je amplituda harmonicky se měnící napětí, i je imaginární jednotka ($\sqrt{-1}$) a $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence (f -počet cyklů za jednotku času).

Vyjádření zatěžovacího cyklu ve tvaru (1.6) značí, že změnu napětí můžeme sledovat buď jako změnu "kosinovou", či "sinovou" dle toho, sledujeme-li reálnou či imaginární složku napětí. V podstatě na tom nezáleží, avšak užité vyjádření v komplexní formě usnadňuje matematické zpracování.

Reakce lineárního viskoelastického prostředí na periodickou změnu zatížení je spojena se vznikem periodicky měnící se deformace $\epsilon(t)$ stejné frekvence, avšak fázově zpožděné o úhel δ za napětím vlivem disipativních vlastností viskoelastického prostředí. Průběh deformace se zapisuje ve tvaru

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \exp[i(\omega t - \delta(\omega))], \quad (1.7)$$

kde ϵ_0 je amplituda deformace zpožďujícího se o úhel ztrát $\delta(\omega)$ za napětím - viz. obr. 1. 4.



obr.1.4

Vztah mezi napětím a deformací lze pak vyjádřit podobně jako v teorii pružnosti

$$\begin{aligned}
 E(i\omega) &= \frac{\sigma(t)}{\epsilon(t)} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \exp[i \delta(\omega)] = \\
 &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} [\cos\delta(\omega) + i \sin\delta(\omega)] = \\
 &= E_1(\omega) + i E_2(\omega) ,
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

kde $E(i\omega)$ je nazýván komplexním modulem pružnosti se složkami, které jsou v literatuře označovány jako

$$E_1(\omega) = \text{Re}(E) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \cos\delta(\omega) , \tag{1.9}$$

$$E_2(\omega) = \text{Im}(E) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sin\delta(\omega) . \tag{1.10}$$

Je tedy zřejmé, že veličina komplexního modulu pružnosti je dána poměrem amplitud napětí a deformace σ_0/ϵ_0 a úhlem ztrát $\delta(\omega)$, který závisí na frekvenci harmonického pohybu. Pro úplnost připomeňme další běžně užívané vztahy

$$\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = |E(\omega)| = [E_1^2(\omega) + E_2^2(\omega)]^{1/2} , \tag{1.11}$$

$$\text{tg}\delta(\omega) = \frac{E_2(\omega)}{E_1(\omega)} \tag{1.12}$$

patrné z jednoduché grafické interpretace - viz. obr. 1.5.

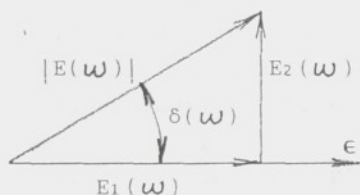
V teorii lineární viskoelastivity je analogicky jako v teorii pružnosti definovaná veličina komplexní poddajnosti $J(i\omega)$ vztahem

$$J(i\omega) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma(t)} = \frac{\epsilon_0}{\sigma_0} \exp[-i\delta(\omega)] = J_1(\omega) - iJ_2(\omega), \quad (1.13)$$

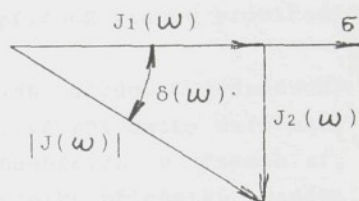
$$\text{kde} \quad J_1(\omega) = \frac{\epsilon_0}{\sigma_0} \cos\delta(\omega) \quad (1.14)$$

$$\text{a} \quad J_2(\omega) = \frac{\epsilon_0}{\sigma_0} \sin\delta(\omega). \quad (1.15)$$

Grafická interpretace $J(i\omega)$ je na obr. 1.6.



obr. 1.5



obr. 1.6

Poznámka: Složky komplexních veličin $E(i\omega)$ a $J(i\omega)$ mají jasný fyzikální význam [6,11]. Jejich reálné části charakterizují elastické vlastnosti materiálu, neboť při daném režimu deformování se akumuluje energie, která je úměrná $E_1(\omega)$, resp. $J_1(\omega)$ a imaginární části mají význam koeficientů úměrnosti ve vztazích charakterizujících množství disipované energie při dané frekvenci harmonického deformování - viz. kap. 5.4.

1.3. Integrální pojetí lineární viskoelasticity

(Princip superpozice)

Předchozí tři základní režimy deformování jsou nejčastěji uplatňované v metodách výzkumu vlastností lineárních viskoelastických materiálů. Každá z těchto metod umožňuje stanovit "vlastní" charakteristiku materiálu. Vzniká tedy mnohoznačnost v mechanických charakteristikách, které však přísluší témuž materiálu. Aby tato nepříjemná skutečnost byla systematickým způsobem odstraněna, bylo nutné nalézt vztahy mezi výsledky jednotlivých metod a odpovědět na otázku, zda jsou diskutované charakteristiky nezávislé, či zda

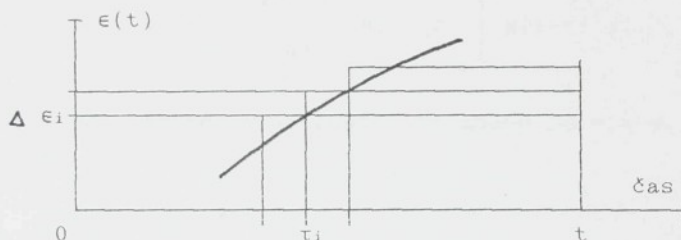
jsou vzájemně vázány. Tento problém řeší obecnější princip, nazývaný Boltzmannův princip superpozice, formulovaný původně heuristicky a posléze uznaný jako matematická formulace základního předpokladu teorie lineární viskoelasticity - hypotézy linearit viskoelastických jevů. Tato hypotéza tvoří základ a podstatu ucelené fenomenologické teorie, která podává úplný obraz o viskoelastickém chování materiálů splňujících předpoklad linearit.

Boltzmannův princip superpozice považuje všechny účinky na prostředí nezávislé a aditivní, přičemž reakce prostředí na tyto účinky je lineární.

Budeme-li za těchto předpokladů sledovat jednoduchý proces deformování, ve kterém jednotlivé přírůstky deformací $\Delta\epsilon_1, \Delta\epsilon_2, \dots, \Delta\epsilon_i, \dots, \Delta\epsilon_n$ působících v časech $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n$ jsou příčinou vzniku přírůstků napětí $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_i, \dots, \Delta\sigma_n$, lze v daném časovém okamžiku t vyjádřit celkovou změnu napětí jako

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \Delta\epsilon_i g(t - t_i), \quad (1.16)$$

kde $g(t)$ je relaxační modul pružnosti, uplatňující se na přírůstek deformace $\Delta\epsilon_i$ po dobu $(t-t_i)$ - viz. obr. 1.7.



obr. 1.7

Vzhledem k tomu, že průběh deformace může být spojitý, potom i napětí bude spojitou funkcí času a suma ve výrazu (1.16) přejde v integrál přes veškerý uplynulý čas t , během kterého mohly probíhat změny deformace prostředí. Tento přechod od diskretních účinků k účinkům spojitým vede na integrální rovnici

$$\sigma(t) = \int_0^t g(t-\tau) \frac{\partial \epsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau . \quad (1.17)$$

Jestliže analogické úvahy aplikujeme na jev tečení (Boltzmannův princip superpozice v deformacích), dostáváme

$$\epsilon(t) = \int_0^t j(t-\tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau . \quad (1.18)$$

Předchozí vztahy (1.17) a (1.18) jsou vlastně matematickým vyjádřením Boltzmannova principu superpozice a jsou nazývány integrálními rovnicemi Boltzmann-Volterrovými, neboť teorii těchto rovnic rozpracoval Volterra /12/.

Poznámka: Vzhledem k tomu, že v integrálních rovnicích (1.17) a (1.18) jsou obsaženy funkce relaxace a poddajnosti, lze na ně pohlížet jako na zobecnění jednoduchých experimentů popisovaných v kapitole 1. Uvážíme-li skokový proces deformování (4), pak po dosazení do vztahu (17) dostáváme výraz

$$\sigma(t) = \epsilon_0 \int_0^t g(t-\tau) \frac{\partial H(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \epsilon_0 \int_0^t g(t-\tau) \delta(\tau) d\tau ,$$

který lze na základě vlastností Diracovy funkce $\delta(t)$ /14/ zapsat jako

$$\sigma(t) = \epsilon_0 g(t).$$

Funkce $g(t)$ ve vztahu (1.17) je klesající, a proto přírůstky deformací, které se uplatňovaly při menších hodnotách času τ , když argument $(t-\tau)$ je velký, neovlivní hodnotu napětí $\sigma(t)$ tolik jako přírůstky deformací, které se uplatňovaly později, když rozdíl $(t-\tau)$ je menší. To neznamena nic jiného, než že materiál, dle této představy, má schopnost pozvolna zapomínat předchozí účinky. Poněvadž stejné úvahy lze aplikovat i na vztah (1.18), oba dva integrální výrazy

bývají nazývány "integrály dědičnosti" a funkce $g(t)$ a $j(t)$ funkcemi dědičnosti. Poznamenejme, že intenzita "zapomínání starších událostí" závisí na konkrétním tvaru funkcí $g(t)$ a $j(t)$.

Mnohdy se vztahy (1.17) a (1.18) uvádějí ve tvaru, který lze získat jejich integrací per-partes:

$$\sigma(t) = g(0) \epsilon(t) + \int_0^t \epsilon(\tau) \frac{\partial g(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.19)$$

$$\epsilon(t) = j(0) \sigma(t) + \int_0^t \sigma(\tau) \frac{\partial j(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.20)$$

kde $g(0)$ a $j(0)$ jsou počáteční hodnoty relaxačního modulu pružnosti a funkce poddajnosti - viz. obr. 1.2 a 1.3.

Označíme-li

$$-\frac{\partial g(t-\tau)}{\partial \tau} = L(t-\tau) \quad \text{a} \quad \frac{\partial j(t-\tau)}{\partial \tau} = K(t-\tau), \quad (1.21)$$

lze vztahy (1.19) a (1.20) přepsat do tvarů

$$\sigma(t) = g(0) \epsilon(t) - \int_0^t L(t-\tau) \epsilon(\tau) d\tau, \quad (1.22)$$

$$\epsilon(t) = j(0) \sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (1.23)$$

kde funkce $L(t)$ a $K(t)$ jsou nazývány jádry integrálních rovnic. V teorii lineární viskoelastivity toto vyjádření vede na použití algebry rezolventních operátorů. Touto problematikou se např. zabývají práce Rabotnova /3,13/ i jiných autorů /21,28/.

1.4. Diferenciální pojetí lineární viskoelastivity

(*Reologické modely*)

Tato představa, která je ekvivalentní předchozí představě integrální spočívá ve stanovení vazby mezi napětím a deformací pomocí diferenciálního vztahu. V nejobecnější

formě lze tento vztah mezi jednorozměrnými složkami napětí σ a deformace ϵ zapsat ve tvaru /7,24,27/

$$P \sigma = Q \epsilon \quad (1.24)$$

kde P a Q jsou lineární časové diferenciální operátory

$$P = p_0 + p_1 D^{(1)} + p_2 D^{(2)} + p_3 D^{(3)} + \dots = \sum_{k=0}^m p_k D^k \quad (1.25)$$

$$Q = q_0 + q_1 D^{(1)} + q_2 D^{(2)} + q_3 D^{(3)} + \dots = \sum_{k=0}^n q_k D^k$$

kde $D^{(i)} = d^i/dt^i$, $i = 1, 2, 3, \dots$

Tato forma zápisu je spojena s široce používanými reologickými modely materiálu (Maxwellův, Kelvinův, standardní atd.) a představuje chování zobecněného reologického modelu vytvořeného spočetným množstvím Kelvinových a Maxwellových skupin. Rozbor chování základních reologických modelů i nově vytvořených reologických modelů materiálu je podrobně proveden v literatuře, např. /7,8,10,11,16,23,24,25,26/. Zvláštní pozornost si zaslouží první a v současné době jediná československá kniha o reologii hmot a konstrukcí /15/. Některé vlastnosti základních reologických modelů budou diskutovány v kapitole 5.

1.5. Relaxační a retardační spektra

Jiný způsob popisu mechanického chování lineárních viskoelastických látek je možný v pojmech tzv. relaxačních a retardačních spekter. Při tomto popisu se předpokládá, že materiál se chová podobně jako nekonečné (ale spočetné) množství spojených Maxwellových, resp. Kelvinových skupin /15/.

Například pro reologický model, který se skládá z n Maxwellových skupin (viz. obr. 1.8), lze napětí $\sigma(t)$, při stálém přetvoření ϵ_0 , viz. vztah (1.4), vyjádřit jako

$$\sigma(t) = \epsilon_0 \left[E_0 + \sum_{k=1}^n E_k \exp(-E_k t / \lambda_k) \right] \quad (1.26)$$

Předchozí vztah můžeme zřejmě zapsat ve tvaru (1.5), tedy

$$\sigma(t) = \epsilon_0 g(t) = \epsilon_0 [g_0 + \alpha(t)] ,$$

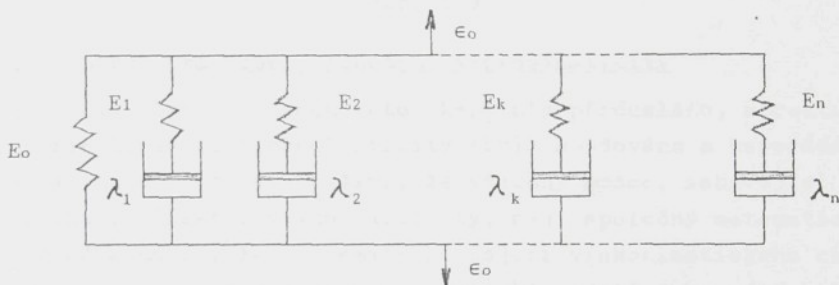
kde $g_0 = E_0$

$$a \quad \alpha(t) = \sum_{k=1}^n E_k \exp(-E_k t / \lambda_k) . \quad (1.27)$$

Když se blíží počet Maxwellových skupin nekonečnu, přejdou moduly pružin E_k ve spojitou funkci $E(\tau_r)$ relaxačních dob $\tau_{rk} = \lambda_k / E_k$ a suma ve výrazu (1.27) v integrál. Relaxační funkci $\alpha(t)$ lze pak zapsat ve tvaru

$$\alpha(t) = \int_0^{\infty} F_{RL}(\tau_r) \exp(-t/\tau_r) d\tau_r , \quad (1.28)$$

kde $F_{RL}(\tau_r) = dE(\tau_r)/d\tau_r$ je relaxační spektrum.



obr. 1.8

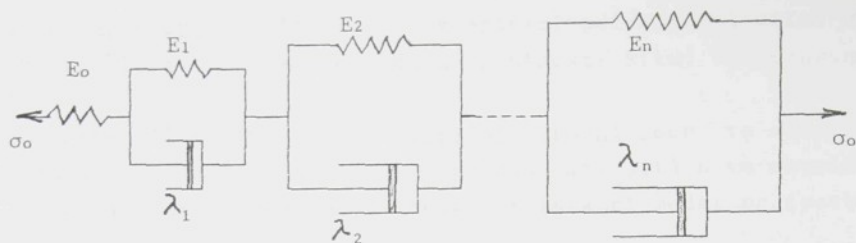
Jestliže analogické vztahy budeme rozvíjet v souvislosti s představou o chování nekonečného počtu sériově spojených Kelvinových skupin (obr. 1.9), dostaneme pro funkci tečení $\varphi(t)$ při zatěžovacím režimu (1.2) vztah

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} F_{RT}(\tau_r) [1 - \exp(-t/\tau_r)] d\tau_r , \quad (1.29)$$

který je důsledek toho, že funkce $\varphi(t)$ je rostoucí. Zde $F_{RT}(\tau_r)$ značí retardační spektrum a $\tau_r = \lambda_k / E_k$ retardační dobu.

Poznamenejme, že i když se zdají být relaxační a retardační spektra z fyzikálního hlediska nejzajímavější, neboť poskytují informace o struktuře materiálového systému a povaze relaxačních mechanismů velice podrobně, jsou pouze matematickým popisem makroskopických jevů a nikoliv jevů na molekulární úrovni /5,6,11/. Musíme si tedy uvědomit, že

tento způsob popisu viskoelastického chování materiálů vychází ze sledování matematických vlastností relaxační a creepové funkce.



obr. 1.9

1.6. Struktura teorie lineární viskoelastivity

Jak bylo v úvodu této kapitoly předesláno, struktura teorie lineární viskoelastivity byla studována a uspořádána Grossem /6/. Ten si povšiml, že všechny práce, zabývající se aplikací lineární viskoelastivity, mají společný matematický základ a navíc, že matematické pojetí viskoelastického chování látek je stejné jako matematické pojetí jeho předchozího zájmu, a to chování reálných dielektrik. V tomto případě výsledky jeho výzkumů získané v této oblasti příznivě ovlivnily rozvoj poznání v oblasti viskoelastických jevů v nově vyvíjených materiálech a Grossovo uspořádání teorie lineární viskoelastivity se stalo základem pro pozdější výzkumy a aplikace v této oblasti mechaniky kontinua.

Vzhledem k tomu, že v české ani slovenské běžně dostupné odborné literatuře není zatím matematická struktura teorie lineární viskoelastivity v ucelené formě publikována věnujme se krátce této problematice.

Z výše uvedeného je zřejmé, že viskoelastické jevy, funkční závislosti i experimentální měření lze rozdělit do dvou skupin:

- první skupina (I) se týká creepových jevů a experimentálních měření při zadaném konstantním či harmonicky se měnícím napětí (zatížení),
- druhá skupina (II) zahrnuje relaxační jevy a experimentální měření za dané konstantní či harmonicky proměnné de-

formace.

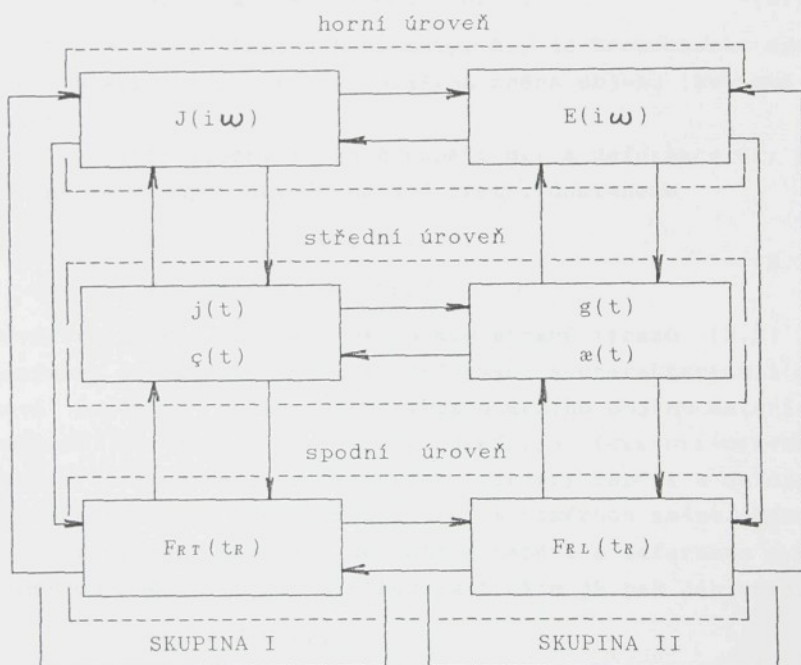
Materiálové funkce a závislosti lze přitom v každé skupině rozlišovat na třech úrovních:

a) horní úroveň tvoří funkce komplexní poddajnosti $J(i\omega)$ ve skupině I a komplexního modulu pružnosti $E(i\omega)$ ve skupině II,

b) materiálové funkce na střední úrovni jsou ve skupině I funkce creepová $\zeta(t)$, resp. poddajnosti $j(t)$ a ve skupině II relaxační funkce $\alpha(t)$, resp. relaxační modul pružnosti $g(t)$,

c) spodní úroveň je tvořena retardačním spektrem $F_{RT}(tr)$ ve skupině I a relaxačním spektrem $F_{RL}(tr)$ ve skupině II.

Uvedené rozdělení lze přehledně uspořádat do schematu (obr. 1.10), který odráží strukturu teorie lineární viskoelasticity a ukazuje na vztahy mezi veličinami obou skupin i různých úrovní.



obr. 1.10

2. Obecné rovnice pro izotropní těleso v teorii lineární viskoelastivity, korespondenční princip

V předchozí části III jsou základní pojmy a vztahy teorie lineární viskoelastivity zavedeny pro jednorozměrné viskoelastické těleso, za které je považována tenká štíhlá tyč. Doplňme proto dosavadní naše vědomosti souhrnnou diskusí, která ukáže, jak lze danou problematiku zobecnit do oblasti třírozměrnosti. Poznamenejme, že v této oblasti bylo zatím dosaženo jen skromných úspěchů v poznávání viskoelastických jevů, a to jak z hlediska teoretického, tak experimentálního. V této části shrneme základní vztahy mezi napětími a deformacemi tak, jak se objevují v dostupné literatuře.

V teorii matematické pružnosti je vztah mezi tenzorem napětí σ_{ij} a tenzorem deformace ϵ_{ij} , tedy Hookeův zákon pro homogenní izotropní elastický materiál, zapisován například ve tvaru /26/

$$\sigma_{ij} = 2 G \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} , \quad (2.1)$$

kde G a λ jsou Lamého konstanty, δ_{ij} je Kroneckerův symbol a $\epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ je poměrná změna objemu (kubická dilatace).

Jestliže složky tenzorů napětí σ_{ij} a deformace ϵ_{ij} rozdělíme ze známých důvodů na dvě části, dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= s_{ij} + \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3 , \\ \epsilon_{ij} &= e_{ij} + \epsilon_{kk} \delta_{ij} / 3 . \end{aligned} \quad (2.2)$$

První veličiny s_{ij} , e_{ij} na pravé straně výrazů (2.2) jsou nazývány deviatory napětí a deformace a charakterizují smyková napětí a změnu tvaru elementárního objemu materiálu, zatímco zbývající veličiny, $\sigma_{kk} \delta_{ij} / 3$ ($\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$), $\epsilon_{kk} \delta_{ij} / 3$, jsou nazývány kulovými tenzory napětí a deformace a charakterizují tzv. střední tlak a poměrnou změnu objemu.

Vztah mezi složkami deviatoru napětí a deformace a mezi poměrnou změnou objemu a středním tlakem je pak dán výrazy

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2 G e_{ij} , \\ \sigma_{kk} &= K \epsilon_{kk} = \epsilon_{kk} / \alpha , \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde $K = \lambda + 2G/3$ je objemový modul a $\alpha = 1/K$ je součinitel stla-

čitelnosti materiálu.

Jinými slovy lze tedy říci, že elementární část materiálu, která je podrobena účinku zatížení, dle této představy, mění obecně jak svůj tvar, tak současně i svůj objem.

Pro potřeby analýzy napětí v lineárně viskoelastickém izotropním prostředí je nutno vztahy (2.3) "obohatit" o faktor času. Vzhledem k tomu, že v teorii viskoelasticity existuje několikero pojetí materiálových funkcí (viz. kap. 1), bude takových rovnic více.

Uvážíme-li například diferenciální pojetí lineární viskoelasticity /24,25/, dostáváme

$$\begin{aligned} P_s \sigma_{ij} &= Q_s \epsilon_{ij} , \\ P_d \sigma_{kk} &= Q_d \epsilon_{kk} , \end{aligned} \quad (2.4)$$

kde P_s , Q_s , P_d , Q_d jsou lineární diferenciální operátory podobně jako ve vztahu (1.24). První dvojice diferenciálních operátorů (index s) charakterizuje viskoelastický materiál při smykové deformaci (změně tvaru), druhá dvojice operátorů (index d) popisuje jeho dilatační chování (změnu objemu).

Jiná forma výrazů (2.4) vychází z následující úvahy. Tak jako izotropní lineárně elastické těleso je jednoznačně specifikováno dvěma nezávislými elastickými konstantami, bude chování izotropního lineárně viskoelastického tělesa definováno rovněž dvěma materiálovými parametry, které budou navíc funkcemi času. Symbolicky, prostřednictvím operátorové algebry /1/ lze psát

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2 \tilde{G} \epsilon_{ij} , \\ \sigma_{kk} &= \tilde{K} \epsilon_{kk} . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Takový zápis má tu výhodu, že lze přímo využít známých vztahů mezi analogickými konstantami materiálu, které byly zavedeny v teorii elasticity, např.

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \tilde{\lambda} + \frac{2}{3} \tilde{G} = \frac{\tilde{\lambda} (1 + \frac{2}{3} \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\lambda}})}{\frac{3}{3} \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\lambda}}} = \\ &= \frac{2\tilde{G}(1 + \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\lambda}})}{3(1 - \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\lambda}})} = \frac{\tilde{G}\tilde{\nu}}{3(3\tilde{G} - \tilde{E})} = \frac{\tilde{E}}{3(1 - 2\tilde{\nu})} \end{aligned} \quad (2.6)$$

a které vlastně uvádějí do vztahu odpovídající funkce času /1/, tj.

$$K(t) = \lambda(t) + \frac{2}{3} G(t) = \dots = \frac{E(t)}{3[1 - 2\nu(t)]} \quad (2.7)$$

Poznamenejme, že $\tilde{E}$ a $\tilde{\nu}$ jsou operátory analogické modulu pružnosti a Poissonovu číslu.

Předchozí forma zápisu je úzce spjata s vyjádřením v integrální formě /2,24/. Platí

$$\sigma_{ij} = \int_0^t g_s(t - \tau) \frac{\partial \epsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2.8)$$

$$\sigma_{kk} = \int_0^t g_d(t - \tau) \frac{\partial \epsilon_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

resp.

$$\epsilon_{ij} = \int_0^t j_s(t - \tau) \frac{\partial \sigma_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2.9)$$

$$\epsilon_{kk} = \int_0^t j_d(t - \tau) \frac{\partial \sigma_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

kde symboly $g_s(d)$ a $j_s(d)$ značí relaxační moduly a funkce poddajnosti při smykové deformaci (index s), resp. objemové dilataci (index d).

Označíme-li

$$g_s(t) \approx 2 G(t) \quad \text{a} \quad g_d(t) \approx 3 K(t), \quad (2.10)$$

lze zapsat Hookeův zákon (2.1) analogicky jako

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) = & \int_0^t G(t - \tau) \frac{\partial \epsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ & + \delta_{ij} \int_0^t \lambda(t - \tau) \frac{\partial \epsilon_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Symbolicky lze vztahy (2.8), (2.9), (2.11) zapsat, transformujeme-li je Laplaceova prostoru /31/:

$$\bar{s}_{ij} = p \bar{g}_s(p) \bar{e}_{ij}, \quad (2.12)$$

$$\bar{\sigma}_{kk} = p \bar{g}_d(p) \bar{e}_{kk},$$

$$\bar{e}_{ij} = p \bar{j}_s(p) \bar{s}_{ij}, \quad (2.13)$$

$$\bar{e}_{kk} = p \bar{j}_d(p) \bar{\sigma}_{kk},$$

nebo

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2 p \bar{G}(p) \bar{e}_{ij} + \delta_{ij} p \bar{\lambda}(p) \bar{e}_{kk}, \quad (2.14)$$

kde p je Laplaceův parametr a pruh nad symboly značí Laplaceův obraz příslušné funkce času.

Aplikujeme-li Fourierovu transformaci /7/, dostáváme obdobnou formu zápisu

$$\bar{s}_{ij} = G(i\omega) \bar{e}_{ij}, \quad (2.15)$$

$$\bar{\sigma}_{kk} = K(i\omega) \bar{e}_{kk},$$

$$\bar{e}_{ij} = J(i\omega) \bar{s}_{ij}, \quad (2.16)$$

$$\bar{e}_{kk} = \kappa(i\omega) \bar{\sigma}_{kk},$$

kde $G(i\omega)$ je komplexní smykový modul, $K(i\omega)$ je komplexní objemový modul, $J(i\omega)$ je komplexní smyková poddajnost a $\kappa(i\omega)$ je komplexní modul stlačitelnosti.

Poznámka: Korespondenční princip

Aparátů Fourierovy a Laplaceovy transformace je běžně užíváno k řešení úloh v teorii lineární viskoelastivity. Jak je zřejmé /2,7,22,36,44/, aplikace těchto transformací převádí vztahy teorie lineární viskoelastivity na analogické vztahy známé v teorii pružnosti, jestliže budeme považovat transformované časové veličiny za odpovídající veličiny v teorii pružnosti a transformované materiálové funkce viskoelastivity za odpovídající konstanty elastického materiálu. To znamená, že elastické řešení dané úlohy je vlastně transformovaným řešením analogické viskoelastické úlohy.

Tento vzájemný vztah mezi řešením elastické a viskoelastické úlohy je nazýván korespondenčním principem nebo pružně-viskoelastickou analogií. Převedení řešené úlohy do

prostoru transformací usnadňuje zápis vztahů a další matematické zpracování. Jsou-li ovšem výsledkem řešení složitější výrazy, vznikají jisté potíže při zpětných transformacích. Z tohoto důvodu jsou byly navrženy účinné aproximativní postupy, které umožňují spolehlivé provedení inverzních operací /32,33,34/.

Z analýzy provedené např. v /2,7,22/ je zřejmé, že operátory a funkce odrážející smykové deformace, stejně jako operátory a funkce odrážející objemové dilatace jsou vzájemně vázány. Ovšem neexistuje a priori žádná spojitost mezi chováním při smyku a dilataci, takže operátory P_s a P_d , Q_s a Q_d stejně jako funkce $g_s(t)$ a $g_d(t)$, $j_s(t)$ a $j_d(t)$, $G(i\omega)$ a $K(i\omega)$, $J(i\omega)$ a $\alpha(i\omega)$ jsou nezávislé /22/.

To je jeden z důvodů, proč většina experimentálních technik pro stanovování vlastností viskoelastických těles je prováděna buď při smykových /49/ nebo jednodimenzionálních podmínkách zatěžování. Zatímco první experimentální postupy umožňují zjistit relaxační moduly, funkce poddajnosti a komplexní moduly ve smyku, druhé dávají výsledky, ve kterých je obsažena kombinace jak smykového, tak dilatačního chování materiálu. Této problematice, až na výjimky /35/, bylo však zatím věnováno jen málo vědomého úsilí a v současnosti není věrohodně prozkoumána /22/.

Při řešení problémů, které nějakým způsobem zasahují do této ne dostatečně probádané oblasti viskoelasticity, experimentátor i teoretik většinou zavádí předpoklady vhodné pro ten který případ /1,22,25,26/. Obvykle jsou to tyto předpoklady:

a) materiál se při smykové a objemové deformaci chová identicky, tzn. že platí

$$\gamma(t) = \text{konst.} < 0.5 ,$$

$$E(t) = E G(t)/G ;$$

b) materiál je pružně stlačitelný, tj.

$$K(t) = \text{konst.} ,$$

$$E(t) = E [1 - 2 \gamma(t)] / (1 - 2 \nu) ,$$

a rovnice (2.5) přejdou do tvaru

$$s_{ij} = 2 \tilde{G} e_{ij} ,$$

$$\sigma_{kk} = K \epsilon_{kk} ,$$

tedy vlastnosti materiálů jsou určovány jednou konstantou K a jednou funkcí času $G(t)$;

c) materiál je nestlačitelný a potom

$$\epsilon_{kk} = 0 , \quad K(t) \rightarrow \infty ,$$

$$E(t) = 3 G(t) \quad \text{a} \quad \nu(t) \approx \text{konst.} = 0.5 .$$

Jak vyplývá z celkem ojedinělé práce /35/, oprávněnost zvoleného předpokladu je nutno dokumentovat experimentálními výsledky.

3. Identifikace mechanických vlastností viskoelastických materiálů

V této kapitole souhrnně uvedeme základní typy experimentálních metod, které umožňují vyšetřování především dynamických materiálových parametrů (funkcí) zavedených v teorii lineární viskoelasticity.

Nejdříve však poznamenejme, že není známa obecná metoda, která umožňuje klasifikovat materiál při krátkodobém zatěžování z hlediska jeho lineární či nelineární odezvy a která by rozhodla o aplikaci buď lineární či nelineární teorie viskoelasticity. Je však zřejmé, že u materiálů splňujících předpoklad linearitu musí být splněny podmínky

$$f(k \cdot x_1) = k \cdot f(x_1), \quad (3.1)$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad (3.2)$$

které je nutno ověřit pro daný materiál experimentálně.

Charakterizování mechanického chování materiálů, které vykazují časovou závislost odezvy na přiložené zatížení, je problém složitější povahy, než je jeho elastický protějšek. V teorii lineární elasticity izotropního kontinua jsou parametry, které vstupují do vztahů napětí - deformace, dvě snadno měřitelné konstanty (viz vztah 2.1), zatímco v případě lineárně viskoelastických materiálů jsou tyto parametry časově, resp. frekvenčně závislé funkce. K vyčerpávajícímu popisu chování materiálu je v tomto případě žádoucí nalézt průběhy těchto funkcí teoreticky v nekonečném časovém, resp. frekvenčním rozsahu.

Dříve než obrátíme pozornost na stručnou charakteristiku jednotlivých experimentálních metod umožňujících identifikaci viskoelastických materiálů při krátkodobém zatěžování, je vhodné upozornit na obecné zvláštnosti, které je nutné si uvědomit při rozboru odůvodněných a spolehlivých experimentálních postupů.

Nedílnou součástí každé metody je teoretická analýza uvažovaného problému. Je nutná proto, aby bylo možné z měřitelných fyzikálních veličin vyhodnotit mechanické charakteristiky. Při ideálním uspořádání experimentu (včetně splnění okrajových podmínek) taková analýza poskytuje exaktní rovni-

ce a nakonec i řešení. Tato úvaha je sice prostá, ovšem musíme si uvědomit, že není vždy snadné a mnohdy ani možné dané předpoklady teoretické analýzy v reálném experimentu do důsledku splnit. Ve skutečnosti málokterá experimentální metoda splňuje všechny naznačené požadavky. To znamená, že buď rovnice teoretického řešení jen přibližně popisují reálné uspořádání experimentu, nebo teoretická analýza neuvažuje zcela přesně skutečné, např. zatěžovací či geometrické, okrajové podmínky.

Není ovšem účelem tyto skutečnosti považovat za kritiku většiny experimentálních, nýbrž vyzdvihnout důležitost teoretických základů experimentu a upozornit na příčiny, které vedou k tomu, že jedny experimentální postupy jsou lépe analyzovatelné než druhé. Jestliže toto máme na mysli, přistupme ke zmíněné charakteristice jednotlivých experimentálních metod.

3.1. Creepové a relaxační experimenty

Je obecně známo, že creepové a relaxační experimenty, viz. vztahy (1.2) a (1.4), poskytují nejzákladnější informace o chování viskoelastických materiálů. Jestliže však sledovaný časový interval creepového nebo relaxačního jevu není srovnatelný s časovým intervalem, který je dán vstupními podmínkami, např. rychlostí zatížení na počátku experimentu, pak takový experiment může poskytnout nepřesné a dokonce i klamné výsledky. Tato skutečnost souvisí s užíváním kvazistatických creepových a relaxačních experimentů při zkoumání dynamické (rázové) odezvy viskoelastických materiálů, tedy pro časové intervaly zatěžování řádově desítky až stovky mikrosekund. Důvody, které vedou k tomu, že nelze jednoduché creepové a relaxační testy užít k dynamické identifikaci viskoelastických materiálů jsou dva:

- první souvisí s tím, že prakticky není možné realizovat ideálně skokové zatěžovací cykly,
- druhý říká, že i kdyby to bylo možné, byly by příčinou složitějších dynamických (přechodových, resp. vlnových) jevů, které nejsou vysvětlitelné teoretickou analýzou kvazistatických creepových nebo relaxačních testů.

Pro ilustraci nejnižší hranice času, od které je možné provádět měření materiálových závislostí viskoelastických materiálů standardním, t.j. kvazistatickým způsobem, uvádí v diskusi autor práce /36/ publikaci Benbova, který realizoval torzní creep v tyčích od časové hranice 40 ms. Obvykle je však v literatuře uváděna spodní hranice časů 1 s /16/ až 0,1 s /2, 52/. To znamená, že charakter creepových a relaxačních funkcí pro časy menší než je uvedená hranice je nutné vyšetřovat metodami, které se zásadně odlišují od standardních creepových a relaxačních experimentů.

3.2. Nepřímé metody určování složek komplexních veličin

Jak bylo ukázáno v předchozích kapitolách, lze odezvu viskoelastických materiálů charakterizovat komplexními veličinami, jako funkci frekvence, viz kap. 1.2.

Pro získávání složek komplexního modulu pružnosti, resp. komplexní poddajnosti byla vypracována řada experimentálních postupů, běžně označovaných za dynamické. Tyto jsou založeny buď na rozkmitávání vzorků ze zkoumaného materiálu na určitou frekvenci volnými, resp. vynucenými kmity, nebo na vysílání do zkušebního tělesa vyrobeného ze zkoumaného materiálu akustických (deformačních) vln a následné registraci potřebných fyzikálních veličin, pomocí kterých lze vyhodnotit reálnou a imaginární složku příslušné komplexní veličiny pro danou frekvenci nebo pro určitý frekvenční interval.

Poznamenejme, že v některé odborné literatuře, a to převážně sovětské, jsou tyto metody souhrnně nazývány jako metody akustické /37/, Nigul /38/ metody založené na analýze echo signálů nazývá metody akustodiagnostiky.

Dynamické metody jsou experimentálně uskutečnitelné poměrně snadno, avšak interpretace naměřených veličin je již relativně složitější.

Jak bylo výše naznačeno, lze dle charakteru experimentů tyto metody dělit do dvou hlavních skupin:

- metody založené na měření kmitů (dle /39/ metody rezonanční),

- metody založené na měření šíření vln (dle /38/ metody akustodiagnostiky, dle /39/ metody fázových rychlostí a metody impulsní).

Společnou výhodou těchto metod je skutečnost, že při jejich aplikaci nedochází zpravidla ke změně struktury materiálu a k porušení. V tomto smyslu tyto dynamické metody nemohou být nahrazeny ani nejspolehlivějšími statickými metodami. Jinou výhodou těchto postupů je, že nevyžadují vzorky velkých rozměrů a jeden vzorek, či skupinu vzorků, lze užít pro měření v širokém intervalu teplot. Dalším kritériem užití metod je jejich pracnost, přístrojová náročnost, možnost automatizace zpracování experimentálních dat a s tím spojená možnost sledování potřebných fyzikálních veličin v co nejširším rozsahu časů a frekvencí.

3.2.1. Metoda volných kmitů

V tělese ve tvaru tyče nebo prutu lze vyvolat podélné, příčné nebo torzní kmitání. Pro daný zkušební vzorek existují jisté charakteristické frekvence, které jsou funkcí jeho geometrie, hmotnosti, materiálových vlastností a tvaru kmitání. Pro vzorky jednoduchého geometrického tvaru lze pomocí principů mechaniky kontinua odvodit vztahy mezi těmito parametry a frekvencí pro daný tvar kmitů. Při experimentu se postupuje tak, že se vzorek, popř. soustava se vzorkem uvede do některého tvaru kmitání a po odpojení budící síly se sleduje jednak frekvence kmitů, ze které se vypočte reálná složka komplexní veličiny, a jednak průběh dozívání, tj. amplitud tlumených kmitů, ze kterých se vyhodnotí pomocí tzv. logaritmického dekrementu imaginární složka komplexní veličiny.

Nejrozšířenějším přístrojem v této metodě je torzní kyvadlo. Perepečko /37/ uvádí, že asi 80% všech dynamických testů je uskutečňováno tímto způsobem.

Pro ilustraci uveďme schema přístroje - viz obr. 3.1, typický záznam tlumených kmitů - viz. obr. 3.2 a vztahy pro vyhodnocení složek G_1 , G_2 komplexního smykového modulu pružnosti $G(i\omega)$ /16/:

$$\Delta = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}} ,$$

$$G_1(\omega) = M \frac{2 l}{\pi r^4} \omega^2 , \quad (3.3)$$

$$G_2(\omega) = G_1(\omega) \frac{\Delta}{\pi} ,$$

$$\operatorname{tg} \delta(\omega) = \frac{G_2(\omega)}{G_1(\omega)} = \frac{\Delta}{\pi} ,$$

kde Δ - logaritmický dekrement

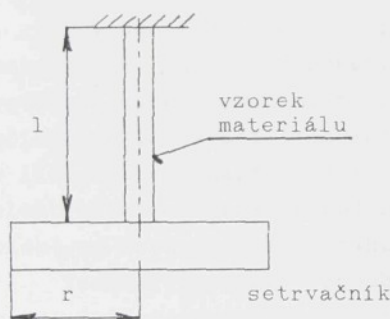
A_k, A_{k+1} - viz. obr. 3.2

l, r - viz. obr. 3.1

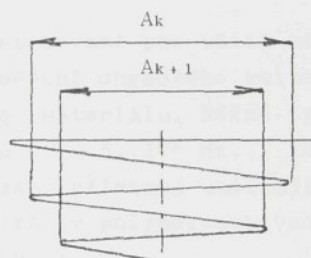
M - moment setrvačnosti disku setrvačníku

ω - úhlová frekvence

$\delta(\omega)$ - fázové zpoždění



obr. 3.1

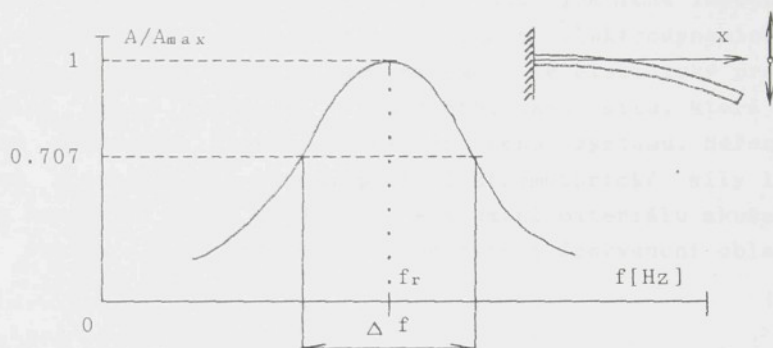


obr. 3.2

Poznamenejme, že existují různé varianty těchto přístrojů (technické parametry a další odkazy lze nalézt v publikacích např. /16, 37/). Interval frekvencí ve kterém je této metody užíváno bývá $10^{-2} - 30$ Hz /37/.

3.2.2. Metoda vynucených rezonančních kmitů

Při této metodě se vzorek nebo soustava se vzorkem uvádí do známého tvaru kmitání a pozoruje se amplitudová odezva na změnu budicí frekvence. Rezonanční frekvence f_r a šířka rezonanční křivky Δf - viz obr. 3.3, jsou měřenými fyzikálními veličinami pro vyhodnocení složek komplexního modulu /16, 37, 40/.



obr. 3.3

Poznamenejme, že přístroje konstruované pro užití této metody jsou založeny zpravidla na měření ohybového kmitání vetknuté tyče vyrobené ze zkoumaného materiálu. Běžně tyto přístroje pokrývají frekvenční rozsah $5 - 5 \cdot 10^3$ Hz, i když v literatuře, např. /37/, je popsán přístroj umožňující elektrostatické buzení podélných kmitů (v polymerních vzorcích) ve frekvenčním rozsahu 1 - 40 kHz !

Torzní varianta obdobného přístroje je popisována v práci Gottenberga a Christensena /49/.

3.2.3. Metoda nerezonančních vynucených kmitů

Obě výše prezentované metody jsou velice jednoduché a zabezpečují vysokou přesnost stanovování dynamických charakteristik materiálů i v širokém intervalu teplot. Mají ovšem jeden nedostatek, který spočívá v tom, že rezonanční frekvence je závislá na tuhosti zkušebního vzorku. Poněvadž se však tuhost mění s teplotou, měření je nutné provádět pro různé rezonanční frekvence zvlášť. Proto se pro stanovování

frekvenčních a teplotních závislostí viskoelastické odezvy materiálů přednostně užívají nerezonanční metody.

Princip metody spočívá v tom, že se vzorek materiálu začlení do elektromechanického obvodu a zkoumá se chování tohoto obvodu v určitém frekvenčním pásmu. Přitom se vzorek neuvádí do rezonance. Při praktickém způsobu měření je více možností. Jako jedna z možností je metoda dynamické impedance. Je založena na skutečnosti, že činnost elektrodynamického budiče je reverzibilní, to znamená, že elektrický proud v budící cívce indukuje elektromotorickou sílu, která je úměrná dynamické impedanci mechanického systému. Měřením reálné a imaginární složky protielektromotorické síly lze určit komplexní modul pružnosti a tlumení materiálu zkušebního vzorku /23/. Tyto metody pokrývají frekvenční oblast 10^{-3} - 110 Hz /16/.

Poznámka:

Metody založené na měření kmitů vzorků zhotovených ze zkoumaných materiálů jsou zatíženy chybou, na kterou se v literatuře běžně neupozorňuje, a mnohdy si jí experimentátoři ani neuvědomují. Každé uchycení, resp. upnutí, většinou vetknutí vzorku zkoumaného materiálu se v experimentálním uspořádání považuje za dokonale tuhé, ačkoliv takové nelze v podstatě nikdy zaručit a to především za podmínek dynamického zatěžování. Tato skutečnost je pak příčinou toho, že vyhodnocení dynamického experimentu poskytuje poněkud větší útlum materiálu, neboť k rozptylu (disipaci) energie dochází nejen v samotném zkoumaném vzorku materiálu, ale i v jeho reálném uchycení.

3.2.4. Metoda šíření stacionárních harmonických vln

Tato metoda, stejně jako metoda následující, je z experimentálního hlediska poněkud složitější než metody výše uvedené. To však nic nemění na skutečnosti, že je prostředkem pro měření vlastností materiálů při velmi vysokých frekvencích 10 - 30 MHz /2, 16, 37/.

Veličiny, které určují charakter šíření vln, tj. jejich rychlost a útlum, závisí na typu vlnění, elastických a útlu-

mových vlastnostech materiálu, na měrné hmotnosti a geometrii vzorku /41, 42/. Z naměřených fyzikálních veličin, kterými jsou fázová rychlost $c(\omega)$ a útlum $d(\omega)$ dané frekvence ω , lze dle známých vztahů určit složky příslušných komplexních veličin /22, 43, 44, 68/. Mezi nejrozšířenější metody patří /37/ metoda imerzní a metoda přenosových tyčí.

Podstata první metody spočívá v tom, že se vzorek materiálu včetně piezoelektrického vysílače a přijímače akustických vln umístí do imerzní kapaliny, která zabezpečuje dobrou akustickou vazbu mezi piezokrystaly a vzorkem materiálu. Odpadají tak potíže spojené s problémem kontaktních vrstev.

Metoda přenosových tyčí spočívá v tom, že se vzorek materiálu umístí mezi čela dvou přenosových kovových nebo křemenných tyčí, přičemž na protilehlých koncích jsou připevněny piezokřemíkové krystaly, jeden ve funkci přijímače, druhý ve funkci vysílače akustických vln. Přenosové tyče jsou užívány z toho důvodu, aby se vyloučila možnost překrytí (superpozice) deformačních pulsů produkovaných budícím piezokrystalem s deformační vlnou, která se šíří zkoumaným vzorkem materiálu. Současně tento způsob umožňuje rozšířit teplotní interval měření.

Tyto metody jsou úzce spjaté s poslední metodou, poněvadž užívaná aparatura může pracovat jak v režimu stacionárních vln, tak přechodových impulsů.

3.2.5. Metody šíření impulsů

Při aplikaci těchto metod se do vzorku, např. ve tvaru tyče nebo bloku vysílá buď soustava impulsů nebo přímo jeden impuls. Jednou z fyzikálních charakteristik měření je čas potřebný pro přechod signálu mezi dvěma pozorovanými místy. Pomocí tohoto se stanoví rychlost čela pulsu a posléze se za předpokladu stavu napjatosti vypočte podle známých vztahů /41, 42/ příslušná charakteristika materiálu (např. dynamický modul pružnosti atd.). Útlum materiálu a složky komplexních veličin lze určovat ze změny amplitudy /37, 45/ a tvaru pulsu /38, 43, 44/. Poněvadž podle tvaru pulsů mohou dominantní frekvenční složky tvořit úzkou nebo širokou část

spektra, rozlišují se úzkopásmové a širokopásmové impulsy /39/.

Do této skupiny metod, které jsou v literatuře označovány jako nejperspektivnější z hlediska aplikací, patří metoda osamělého pulsu (MOAP) uvedená v kapitole 4.

3.3. Ekvivalence časových a frekvenčních materiálových funkcí v teorii lineární viskoelastivity

I když funkce relaxace či creepu na nekonečném časovém intervalu jsou ekvivalentní složkám odpovídajících komplexních veličin na nekonečném intervalu frekvencí zůstává skutečností, že ani jedny ani druhé nelze stanovit pro celý rozsah časů a frekvencí. Přísněji řečeno, znalost např. průběhu funkce relaxace na některém konečném časovém intervalu není v obecném případě ekvivalentní vyšetřeným průběhům složek komplexního modulu pružnosti na některém konečném intervalu frekvencí /2/. To znamená použití transformačních vztahů matematicky zabezpečujících vzájemnou vazbu časových a frekvenčních funkcí není v takovém případě snadný ani nadmíru spolehlivý /36/. Z tohoto důvodu se doporučuje raději použít takových metod pro přímé stanovování příslušných mechanických charakteristik, které se jeví jako nejvhodnější k dosažení požadovaného cíle.

Pokud se ovšem považuje za schůdnější experimentální stanovení charakteristiky jednoho typu a posléze přechod k charakteristice jiného typu pomocí aproximativních matematických, případně numerických metod, nelze současně nesledovat vzájemné vazby mezi časovými a frekvenčními intervaly /2/:

- obou typů experimentů pro daný materiál,
- ve kterých jsou požadované mechanické charakteristiky užívány k analýze některého z následně řešených teoretických problémů.

4. Impulsní metoda osamělého afinního pulsu - MOAP

4.1. Předchozí práce

Historie experimentální mechaniky je bohatá na práce zabývající se problémem odezvy elastických konstrukcí na dynamické zatížení. Totéž však nelze říci ani o jednoduchých konstrukcích zhotovených z materiálů, které samy o sobě vykazují časově závislou odezvu na aplikované zatížení. Příčinou je právě přítomnost času, resp. frekvence, v konstitutivních rovnicích (viz. kap. 1) a v neposlední řadě i ve vlastní identifikaci dynamických materiálových funkcí (viz. kap. 3).

Ze studia literatury je zřejmé, že nejvíce cenných teoretických i experimentálních výsledků bylo zatím dosaženo v oblasti šíření vln napětí, resp. deformací v jednorozměrném lineárně viskoelastickém prostředí.

Práce z této oblasti lze rozdělit do tří skupin:

- první skupinu tvoří práce těch výzkumníků, kteří se zabývali rozborem platnosti základních reologických modelů reprezentujících lineárně viskoelastické chování materiálů. Odezvou např. Maxwelllova, Kelvinova, standardního i jiných víceparametrických modelů na ustálenou periodickou změnu napětí, resp. deformace, se zabývali, jak uvádí autor práce /22/, kde lze najít tyto odkazy, Hillier, Davies a Ferry a rovněž Kolsky /26/,
- v druhé skupině jsou práce, ve kterých byla studována odezva různých materiálů na přechodové (nestacionární) vlny, resp. pulsy deformace (napětí) /50, 53, 54, 55, 56, 57, 71, 72/. Zvláště upozorněme na práce českého výzkumníka Karlíka, který aplikoval tříparametrický model viskoelastického prostředí na modelování nestacionární napjatosti metodou konečných prvků /109, 110/.
- třetí skupinu prací tvoří práce, ve kterých byla zkoumána odezva materiálů rovněž na nestacionární zatěžovací účinek ve formě různých tvarů pulsů, avšak předpokládaly se obecnější závislosti materiálových vlastností na čase, resp. na frekvenci, popř. přímo byly použity závislosti experimentálně stanovené /22, 25, 26, 47, 48, 58, 59, 60, 61, 62, 63,

64, 65, 66, 70, 97/.

Důkazy o tom, že v zorném poli zájmu teoretiků a experimentátorů nejsou jen problémy jednodimensionálního šíření viskoelastických vln, podávají např. práce Lifshitze a Kolského /35/, Brepty /71, 72, 108/ a Filippova /73, 74/.

Závěrem informujme o pracech, které se především staly zdrojem inspirace pro vypracování níže uvedené metody, tzv. MOAP a které jsou vlastně inverzní úlohou k úloze o šíření vln ve viskoelastickém prostředí.

Zatímco vstupními daty do úlohy šíření viskoelastické vlny jsou materiálové vlastnosti prostředí a tvar zatěžující vlny, resp. pulsu, u inverzní úlohy, přesněji řečeno úlohy identifikace materiálových vlastností, jsou vstupem vhodné měřitelné fyzikální veličiny, např. časové průběhy posunutí, rychlosti částic nebo deformace, které na základě dříve provedené teoretické analýzy poskytnou po zpracování požadované materiálové funkce. Tento postup, který požaduje měření parametrů nestacionární viskoelastické vlny během jejího šíření zkoumaným prostředím není již tak běžný. Z této oblasti lze doporučit ke studiu práce Lifshitze a Kolského /35/, Blanca /68/, Sackmana a Kaye /67/, Kaye /36/, Distéfana /76/, Distéfana a Pistera /27/ a již citované publikace československých autorů /39, 43, 44/.

Pro úplnost literárního souhrnu se odvoláme ještě na odkazy, ze kterých lze čerpat základní informace pro konstrukci postupů, jejichž cílem by byla identifikace dynamických vlastností nelineárních viskoelastických materiálů /18, 19, 38, 76, 77, 78/.

4.2. Distorze osamělého deformačního pulsu šířícího se tyčí z disipativního materiálu

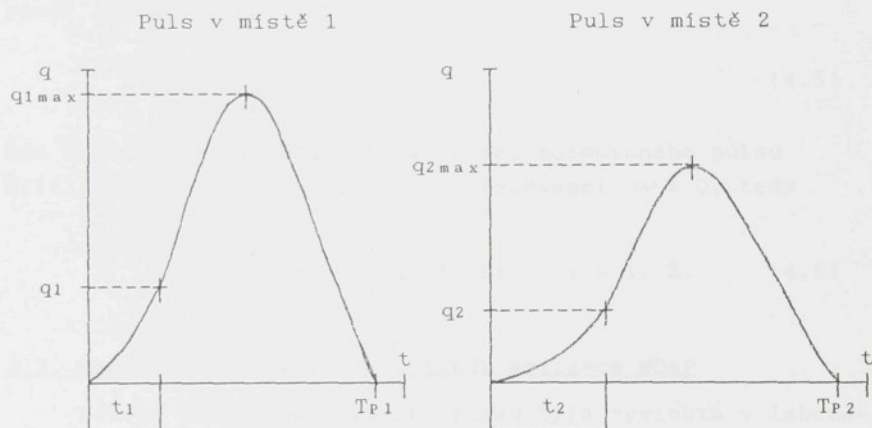
Během teoretických a experimentálních prací prováděných v laboratoři katedry mechaniky, pružnosti a pevnosti na Vysoké škole v Liberci, které byly zaměřeny na šíření podélných deformačních pulsů v tenkých dlouhých tyčích se ukázalo, že vyhodnocení dynamických charakteristik jisté třídy viskoelastických materiálů lze výrazně zjednodušit. Podstatou zjednodušení je experimentálně pozorovaná a statisticky pro-

kázaná "afinní podobnost časových průběhů poměrných deformací", které jsou snímány např. tenzometry ve dvou místech 1 a 2 na tyči zhotovené ze zkoumaného materiálu.

Na základě rozsáhlého experimentálního pozorování byl autory práce /88/ zaveden popis distorze pulsu, tj. poklesu jeho amplitudy a současně změny jeho tvaru (resp. prodloužení pulsu), pomocí *distorzních koeficientů* α_ϵ , α_τ , které definují afinní transformaci souřadnic *poměrná deformace* (q) - *čas* (t) , viz obr. 4.1., vztahy

$$q_2(t_2) = \alpha_\epsilon q_1(t_1), \quad (4.1)$$

$$t_2 = \alpha_\tau t_1. \quad (4.2)$$



obr. 4.1

Závislost *distorzních koeficientů* na pulsem prošlé vzdálenosti byla nazvána - *distorzní charakteristikou*.

Dále uvedeme způsob stanovení *distorzních koeficientů*, rovněž diskutovaný v /88/. Určení α_ϵ je snadné, avšak přesnost se kterou jej lze stanovovat závisí ve značné míře na přesnosti experimentálního zařízení (zesílení tenzometry registrovaných signálů, citlivost snímačů fyzikálních veličin atd.). Ze vztahu (4.1) a obr. 4.1. plyne

$$\alpha_\epsilon = q_{2\max}/q_{1\max}. \quad (4.3)$$

Distorzní koeficient α_τ by bylo možné stanovovat pomocí

vztahu (4.2), tj.

$$\alpha_{\tau} = T_{P2}/T_{P1} , \quad (4.4)$$

avšak tento způsob neposkytuje statisticky uspokojivé výsledky vzhledem k tomu, že doba trvání dominantní části pulsu není zcela přesně určitelná, protože konec pulsu, tzv. ocas, je tvořen ve skutečnosti zákmity, které jsou průvodním jevem mnohdy ne ideálně jednorozměrného formování tvaru pulsu (pokud je puls měřen v blízkosti zdroje rázu), či konec pulsu pozvolna klesá k nulové hodnotě, která nemusí být vzhledem k prahové citlivosti snímacího zařízení zcela věrohodná. Proto bylo pomocí diskrétní Fourierovy transformace ukázáno /88/, že distorzní koeficient α_{τ} lze stanovit jako poměr integrálních veličin

$$\alpha_{\tau} = \frac{\hat{A}_2(0)}{\hat{A}_1(0)} , \quad (4.5)$$

kde $\hat{A}_i(0)$ je modul Fourierova obrazu normovaného pulsu $\hat{q}_i(t) = q_i(t)/q_{i\max}$, $i=1, 2$, pro frekvenci $\omega = 0$, tedy

$$\hat{A}_i(0) = \frac{1}{q_{i\max}} \int_0^{T_{Pi}} q_i(t) dt , \quad i = 1, 2. \quad (4.6)$$

4.3. Charakteristika a předpoklady aplikace MOAP

Metoda osamělého afinity pulsu byla vyvinuta v laboratoři katedry mechaniky, pružnosti a pevnosti na Vysoké škole strojní a textilní v Liberci v rámci tam řešených výzkumných úkolů v průběhu let 1982 až 1985. Umožňuje přímo stanovit jednak časové dynamické charakteristiky lineárně viskoelastických materiálů, tj. počáteční části creepových a relaxačních funkcí a jednak frekvenční charakteristiky lineárně viskoelastických materiálů, tj. složky komplexních veličin.

Je důležité poznamenat, že teoretické základy metody vychází z teorie šíření podélné vlny v jednorozměrném lineárně viskoelastickém prostředí a není uvážován vliv geometrie jednorozměrného tělesa na změnu tvaru šířící se vlny deformace. Jinými slovy, je vyloučen vliv geometrické disperze a veškeré změny tvaru pulsu, ke kterým dojde během jeho ší-

ření, se předpokládají býti důsledkem disipativních vlastností materiálu.

Úspěšné použití MOAP předpokládá znalost stejných fyzikálních veličin, např. změřených časových průběhů poměrné deformace, ve dvou místech dlouhé štíhlé tyče nejlépe kruhového průřezu, přičemž aplikace aparátu Laplaceovy transformace v teoretické analýze umožňuje formulovat vztahy pomocí nichž lze snadno stanovit časové dynamické charakteristiky materiálu a použití Fourierovy transformace vede k vyhodnocení složek komplexních veličin, které jsou funkcemi frekvence.

Je zřejmé, že dynamické charakteristiky zkoumaného materiálu stanovené na základě představ o šíření podélného rozruchu v jednorozměrném lineárně viskoelastickém prostředí nepostačují k úplné identifikaci vlastností zkoumaného materiálu při krátkodobém zatížení dvojrozměrného, resp. třírozměrného lineárně viskoelastického kontinua. Vyřešení tohoto problému předpokládá, jak plyne ze vztahů v kap. 2, nutnost realizace jednak složitějších experimentů a jednak osvojení si podstatně náročnější teoretické analýzy /35, 36/.

4.3.1. Vztahy pro stanovení počátků reologických funkcí

Matematická formulace problému šíření vlny v lineárně viskoelastickém prostředí plyne úzce z analogického elastického problému, který je definován v pojmech *rovnice pohybu*, *rovnice kompatibility*, *vztahem napětí - deformace* a příslušnými okrajovými podmínkami.

Uvažujeme-li jednorozměrné lineárně viskoelastické prostředí, pak šíření podélného rozruchu v tomto prostředí je definováno vztahy

rovnice pohybu

$$\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}, \quad (4.7)$$

rovnice kompatibility

$$\epsilon(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad (4.8)$$

resp.

$$\frac{\partial \epsilon(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}, \quad (4.9)$$

vztah napětí deformace

$$\sigma(x,t) = \int_0^t g(t-\tau) \frac{\partial \epsilon(x,t)}{\partial \tau} d\tau, \quad (4.10)$$

resp.

$$\epsilon(x,t) = \int_0^t j(t-\tau) \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial \tau} d\tau. \quad (4.11)$$

V předchozích vztazích značí:

σ - napětí, u - posuv částice, v - rychlost částice, ϵ - poměrná deformace, $g(t)$ - relaxační modul pružnosti, $j(t)$ - funkce poddajnosti, ρ - měrná hmotnost.

Aplikací Laplaceovy transformace na předchozí vztahy a řešením pro aproximativní tvar reologických funkcí v nejbližším okolí časového počátku byly odvozeny výrazy [11] pro

relaxační modul pružnosti

$$g(t) = g_0 - g_1 t + g_2 t^2, \quad (4.12)$$

kde $g_0 = \rho c_0^2$, $g_1 = \frac{2 g_0 \ln \alpha_T}{\Delta t}$, $g_2 = \frac{3 g_0 \ln^2 \alpha_T}{\Delta t^2}$,

funkci poddajnosti

$$j(t) = j_0 + j_1 t + j_2 t^2, \quad (4.13)$$

kde $j_0 = \frac{1}{g_0}$, $j_1 = \frac{2 \ln \alpha_T}{g_0 \Delta t}$, $j_2 = \frac{\ln^2 \alpha_T}{2 g_0 \Delta t^2}$,

relaxační modul rychlosti

$$o(t) = c_0 - c_1 t + c_2 t^2, \quad (4.14)$$

kde $c_1 = \frac{c_0 \ln \alpha_T}{\Delta t}$, $c_2 = \frac{c_0 \ln^2 \alpha_T}{2 \Delta t^2}$.

V předchozích vztazích značí:

c_0 - rychlost šíření čela podélného rozruchu v jednorozměrném prostředí, tzv. tyčová rychlost,

d_T - distorzní koeficient definovaný vztahem (4.5),

$\Delta t = \Delta x / c_0$, kde Δx je vzdálenost prošlá pulsem mezi dvěma měrnými místy na tyči vyrobené ze zkoumaného materiálu,

ρ - měrná hmotnost zkoumaného materiálu.

Časová oblast exaktní použitelnosti uvedených aproximací počátků výše uvedených reologických funkcí je dána dobou trvání dominantní části pulsu, tj. dobou cca T_p .

Připomeňme, že pomocí vyhodnocených reologických funkcí $g(t)$, $j(t)$ a $o(t)$ lze v teorii lineární viskoelastivity získat časové průběhy napětí $\sigma(t)$, poměrné deformace $\epsilon(t)$ a rychlosti částice $v(t)$ podle vztahů zčásti uvedených v kap. 1.3.:

$$\sigma(t) = \int_0^t g(t-\tau) \frac{\partial \epsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (4.15)$$

$$\epsilon(t) = \int_0^t j(t-\tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (4.16)$$

$$v(t) = - \int_0^t o(t-\tau) \frac{\partial \epsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (4.17)$$

Přitom reologické funkce jsou vázány vztahy

$$\int_0^t g(t) j(t-\tau) d\tau = t, \quad (4.18)$$

$$g(t) = \rho [c_0 o(t) + \int_0^t o(t-\tau) \frac{\partial o(\tau)}{\partial \tau} d\tau]. \quad (4.19)$$

Poznámka:

Vztahy (4.14), (4.17) a (4.19) nejsou běžnými ani dostatečně známými výrazy při analýze statických problémů lineární viskoelastivity. Mají však své opodstatnění při sledování dyna-

mických viskoelastických jevů spojených s šířením vln deformace a vlastně korespondují se vztahy, které jsou vcelku běžné při sledování vln deformací v elastických prostředích. Stručně lze poznamenat, že relaxační modul rychlosti $\sigma(t)$ koresponduje s rychlostí šíření čela podélné elastické vlny v tenké štíhlé tyči c_0 , vztah (4.17) odpovídá pak výrazu

$$v_E = - c_0 \epsilon \dot{\epsilon}$$

a konečně vztah (4.19) je viskoelastickým analogem výrazu

$$E_D = \rho c_0^2,$$

kde E_D je nazýván dynamickým modulem pružnosti.

Důslednou diskusi skutečností uvedených v této poznámce lze nalézt v práci [111].

V níže uvedených aplikacích MOAP je veličiny dynamického modulu pružnosti E_D užíváno jako charakteristiky *dynamické tuhosti* viskoelastických materiálů a veličiny $J_D = 1/E_D$ jako charakteristiky tzv. *dynamické poddajnosti*.

4.3.2. Vztahy pro vyhodnocení frekvenčních charakteristik

Je-li aplikována Fourierova transformace na řešení problému, který je popsán rovnicemi (4.7) až (4.11) lze ukázat, že funkcemi které ve frekvenční oblasti popisují vlastnosti lineárně viskoelastického prostředí jsou koeficient útlumu $d(f)$, charakterizující útlum amplitud jednotlivých složek frekvenčního spektra vytvářejících dominantní část pulsu, a *fázová rychlost* $c(f)$. Ta udává rychlost šíření složek frekvenčního spektra.

Protože tato představa využívá superpozice harmonických složek napětí dané frekvence $f = \omega/2\pi$ [Hz], u kterých se jejich amplituda zpožďuje o úhel *mechanických ztrát* $\delta(f)$ za deformací, je možno rovněž charakterizovat vlastnosti materiálů pomocí komplexního modulu pružnosti $E(if)$, resp. komplexní poddajnosti $J(if)$, či jejich reálnými a imaginárními složkami (viz. kap. 1.2.).

Metoda osamělého afinity pulsu uvedené frekvenční funkce vyhodnocuje ze vztahů [106/:

$$d(f) = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{A_1(f)}{A_2(f)}, \quad (4.20)$$

$$c(f) = c_0 \frac{2 \pi f \Delta x}{2 \pi f \Delta x - c_0 [\varphi_1(f) - \varphi_2(f)]}, \quad (4.21)$$

$$\delta(f) = 2 \operatorname{arctg} \frac{c(f) d(f)}{2 \pi f}, \quad (4.22)$$

$$|E(f)| = \rho c^2(f) \cos^2 \frac{\delta(f)}{2}, \quad (4.23)$$

$$\operatorname{Re} E(f) = |E(f)| \cos \delta(f), \quad (4.24)$$

$$\operatorname{Im} E(f) = |E(f)| \sin \delta(f), \quad (4.25)$$

ve kterých $A_1(f)$ a $\varphi_1(f)$ jsou amplitudová a fázová spektra časových profilů pulsu snímaného ve dvou místech $i=1,2$ na tenké tyči vyrobené ze zkoumaného materiálu.

4.3.3. Experimentální zařízení MOAP a metodika vyhodnocení materiálových funkcí

Distorze pulsu při jeho šíření v tyči je vyvolána materiálovou disipací, geometrickou disperzí a distorzí způsobenou konečnou délkou snímače a přenosovou charakteristikou záznamového zařízení. Se zřetelem na možnosti experimentálního zařízení laboratoře je nutné volit takové experimentální uspořádání metody, aby distorze pulsu byla dána především materiálovou disipací. Jak plyne z teoretické podstaty metody, předpokládá se jednorozměrné lineárně viskoelastické těleso, ve kterém je distorze pulsu způsobena pouze materiálovou disipací. Má-li být vliv geometrické disperze na distorzi pulsu minimální, pak podle /42/ je vhodné volit poměr mezi délkou pulsu a charakteristickým příčným rozměrem tyče minimálně pět. V /105/ bylo ukázáno, že v případě desetinasobné délky pulsu oproti délce snímače je podíl vlivu konečné délky snímače na distorzi pulsu zanedbatelný.

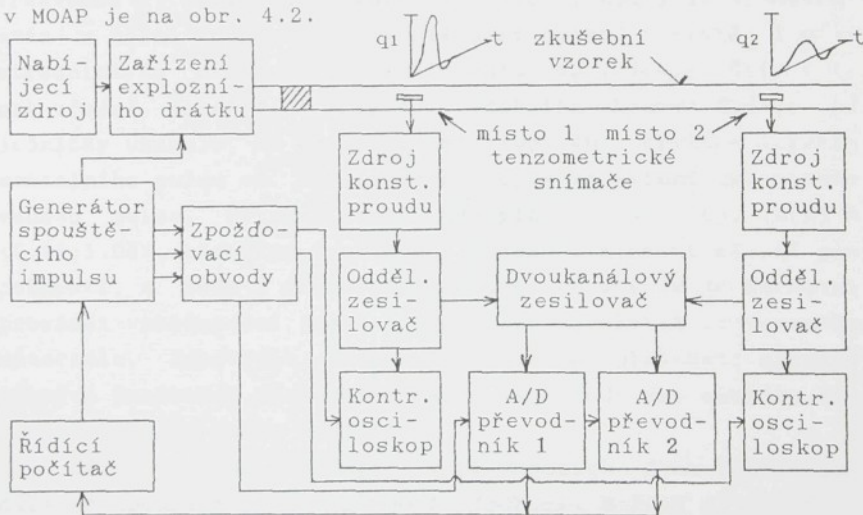
V experimentálním uspořádání používaném v laboratoři katedry mechaniky, pružnosti a pevnosti na Vysoké škole

v Liberci se použitím zařízení explozního drátku /89, 90, 93/ produkuje deformační puls délky cca 60 mm.

Vzhledem k této délce pulsu je vhodné používat tyčí, vyrobených ze zkoumaných materiálů, jejichž charakteristický příčný rozměr je maximálně 10-12 mm. Jako snímač deformace se používá polovodičový tenzometr délek 3 nebo 4 mm. Vybuze-
ný deformační puls je tedy cca 15krát až 20krát delší než délka snímače.

Způsob vybuzení pulsu podmiňuje umístění 1. snímače. Je nutné zabezpečit, aby v místě 1. snímače byl snímán pouze podélný deformační puls nedoprovázený přechodovými jevy souvisejícími s tvorbou pulsu. V zařízení laboratoře KMP se na podkladě experimentů /112/ ukázalo, že 1. snímač je vhodné umístit od místa exploze minimálně ve vzdálenosti rovné dvacetinásobku charakteristického příčného rozměru tyče.

Signál z tenzometrů je pak nutné vhodně zesílit a přivést na vstup záznamového zařízení, paměťového osciloskopu nebo lépe rychlého analogo-digitálního převodníku, který již může být v současné době součástí, např. personálního počítače schopného řídit průběh celého dynamického experimentu, včetně vyhodnocení požadovaných materiálových funkcí podle výše uvedených vztahů. Blokové schéma zařízení použitelného v MOAP je na obr. 4.2.



obr. 4.2

Podstatou zpracování získaných experimentálních dat je stanovení distorzního koeficientu α_T pomocí vztahu (4.5), a provedení diskrétní Fourierovy transformace na zaznamenaných, ve dvou místech na tyči, dominantních částech časových průběhů deformací v šířícím se pulsu.

Protože se však předpokládá platnost afinního přiřazení obou registrovaných dominantních částí časových průběhů deformací, což je vlastně jistá aproximace reálného jevu šíření pulsu tenkou tyčí, která, jak prokázaly experimentální práce /88/, vyhovuje teorii šíření vln v jednorozměrném lineárně viskoelastickém tělese a kromě jiného provádí potřebné sesouhlasení počátků obou separovaně registrovaných změn deformace, je nutné přesvědčit se o korektnosti tohoto předpokladu.

K tomuto účelu byla autory MOAP definována chybová funkce

$$K(f) = \frac{\hat{A}_{2AF}(f)}{\hat{A}_{2EXP}(f)} . \quad (4.26)$$

V uvedeném vztahu značí $\hat{A}_{2EXP}(f)$ amplitudu Fourierova obrazu (při frekvenci f) normovaného experimentálního pulsu v místě 2. Obdobně $\hat{A}_{2AF}(f)$ značí amplitudu Fourierova obrazu (při frekvenci f) normovaného pulsu v místě 2, který je zkonstruován z normovaného experimentálního pulsu v místě 1 prostřednictvím distorzního koeficientu α_T . Je-li $K(f) = 1$, pak zřejmě $\hat{A}_{2EXP}(f) = \hat{A}_{2AF}(f)$. Odchylka chybové funkce od jedničky ukazuje na odchylku amplitudového spektra experimentálního pulsu od amplitudového spektra afinně zkonstruovaného pulsu. Pripustíme-li odchylku $\pm 5\%$, tj. $K(f) = \langle 0.95; 1.05 \rangle$, obdržíme frekvenční rozsah platnosti afinní podobnosti, a tedy i frekvenční rozsah ve kterém je korektní provádět vyhodnocení frekvenčních charakteristik testovaného materiálu. Zpravidla frekvenční rozsah platnosti afinity pokrývá frekvence dominantní části amplitudového spektra experimentálního pulsu v místě 2.

Užití vztahů uvedených v předchozích dvou kapitolách dále předpokládá předem stanovit rychlost šíření čela podélného rozruchu v tyči co. Rovněž je předpokládána znalost měrné hmotnosti ρ zkoumaného materiálu.

Určení rychlosti c_0 vyžaduje provedení nezávislého experimentu, který spočívá ve stanovení času průchodu čela pulsu mezi dvěma místy na tyči z testovaného materiálu. Tento experiment je snadno realizovatelný a jeho popis lze nalézt např. v [91, 113].

Užitá metodika vyhodnocení požadovaných materiálových funkcí, ve které je prvotní stanovení distorzního koeficientu d_τ má tu významnou přednost, že není citlivá, za předpokladu lineární odezvy snímačů v daném rozsahu deformace, na rozdílnost snímacích cest experimentálního zařízení. To znamená, že není nutné provádět kalibrační experimenty snímačů deformace. Diskrétní Fourierovu transformaci je tedy výhodné provádět na experimentálním časovém profilu deformace v místě 1 a pomocí d_τ zkonstruovaném afinním časovém profilu deformace v místě 2, neboť musí být splněna podmínka

$$d_\varepsilon d_\tau = 1, \quad (4.27)$$

vyjadřující rovnost plochy pod časovými profily deformace [104]. Tím je respektován zákon o zachování hybnosti.

4.3.4. Testované materiály a výsledky získané MOAP

Uvedenou metodou osamělého afinního pulsu byla testována řada polymerních materiálů a kompozitů s rozptýleným plnivem a rovněž byla metoda aplikována na několik typů polymerních, skleněných a uhlíkových svazků vláken. Získané výsledky jsou uspořádány do tabulek a grafů a závěrem je vždy uváděn stručný komentář.

V některých případech byla MOAP užitá k porovnávání útlumových vlastností kompozitů vyvíjených v čs. průmyslu. Pro tyto případy je vhodné definovat integrální veličinu

$$P = \int_0^{f_0} \delta(f) df, \quad (4.28)$$

kde f_0 je horní mez vyšetřovaného frekvenčního intervalu, pomocí které se posuzování rozdílnosti útlumových vlastností materiálů, vyrobených odlišnými technologickými způsoby, nebo se lišícími složením, převádí na porovnávání jednotlivých

hodnot veličiny P , namísto porovnávání frekvenčních závislostí ve vyšetřovaném intervalu frekvencí 0 až f_0 [Hz]. To umožňuje užít obvyklých statistických testů významnosti pro objektivnější porovnání materiálů.

Připomeňme, že úhel *mechanických* ztrát $\delta(f)$ odráží podíl nevratně rozptýlené energie v excitovaném tělese vzhledem k vratné potenciální energii úměrné ReE . S rostoucí hodnotou δ a tedy i P roste podíl nevratně rozptýlené energie z celkově dodané energie.

Z pochopitelných důvodů, souvisejících s rozsahem tohoto textu, není možné uvádět všechny podrobnosti související např. s přípravou vzorků, technickou realizací vlastních experimentů a počítačovým zpracováním experimentálních dat. Tyto lze nalézt v citovaných pracích autorů, ve výzkumných zprávách archivovaných na pracovišti autorů, nebo se s autory osobně setkat za požadovaným účelem.

DYNAMICKÉ VISKOELASTICKÉ VLASTNOSTI PRO PMMA (Akrylon), PVC (Novodur) A CELULOID

Pro výše uvedené materiály byly metodou osamělého afinního pulsu stanoveny všechny viskoelastické vlastnosti /114, 115/ a jsou souhrnně uvedeny v tab. 4.1. Spočtené funkce charakterizující odezvu materiálů na rázem přiložené zatížení jsou graficky znázorněny na obr. 4.3 až 4.10.

Protože jsou frekvenční funkce vyhodnocovány aparátem diskrétní Fourierovy transformace, tedy na spočetném intervalu frekvencí, byla provedena po jejich určení polynomická regrese metodou nejmenších čtverců, výsledkem které jsou regresní koeficienty a_0, a_1, a_2, a_3 atd., pomocí nichž lze v případných aplikacích vyjádřit potřebnou frekvenční funkci obecně ve tvaru

$$F(f) = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + a_3 f^3 + \dots, \quad (4.29)$$

kde f je frekvence v Hz (viz. tab. 4.1).

Tabulka 4.1

Veličina		Rozměr	materiál		
			PMMA	PVC	Celuloid
g(t)	g ₀	x10 ³ MPa	5,46	3,65	4,18
	g ₁	MPa μs ⁻²	12,45	8,65	11,04
	g ₂	x10 ⁻² MPa μs ⁻²	1,07	0,77	1,09
j(t)	j ₀	x10 ⁻⁴ MPa ⁻¹	1,83	2,74	2,39
	j ₁	x10 ⁻⁷ MPa ⁻¹ μs ⁻¹	4,18	6,50	6,33
	j ₂	x10 ⁻¹⁰ MPa ⁻¹ μs ⁻²	1,19	1,93	2,09
o(t)	c ₀	ms ⁻¹	2150	1650	1740
	c ₁	ms ⁻¹ μs ⁻¹	2,45	1,95	2,30
	c ₂	x10 ⁻³ ms ⁻¹ μs ⁻²	1,40	1,16	1,52
d(f)	a ₀	m ⁻¹	0	0	0
	a ₁	m ⁻¹ Hz ⁻¹	4,58e-6	-8,66e-6	7,31e-6
	a ₂	m ⁻¹ Hz ⁻²	6,51e-10	3,34e-9	9,77e-10
	a ₃	m ⁻¹ Hz ⁻³	2,24e-14	-2,8e-14	4,37e-14
c(f)	a ₀	ms	2087	1593	1682
	a ₁	ms Hz ⁻¹	0,02e-3	0,15e-3	0
	a ₂	ms Hz ⁻²	-7,78e-9	-2,02e-8	0
δ(f)	a ₀	deg	0	0	0
	a ₁	deg Hz ⁻¹	0,05e-3	0,05e-3	0,07e-3
	a ₂	deg Hz ⁻²	-3,43e-10	1,76e-9	-5,48e-10
	a ₃	deg Hz ⁻³	1,75e-10	-4,75e-14	3,07e-14
ReE	a ₀	MPa	5156	3399	3900
	a ₁	MPa Hz ⁻¹	1,05e-3	0,86e-3	0
	a ₂	MPa Hz ⁻²	-9,67e-8	-9,2e-8	0

- pokračování -

Veličina		Rozměr	materiál		
			PMMA	PVC	Celuloid
ImE	a ₀	MPa ⁻¹	0	0	0
	a ₁	MPa ⁻¹ Hz ⁻¹	4e-3	4,21e-3	3,86e-3
	a ₂	MPa ⁻¹ Hz ⁻²	4,63e-8	-4.97e-8	6,41e-8
	a ₃	MPa ⁻¹ Hz ⁻³	-2,36e-12	3,65e-12	-3,29e-12
	a ₄	MPa ⁻¹ Hz ⁻⁴	6,14e-17	-8,31e-17	8,99e-17
f ₀		kHz	32	32	32
T _P		μs	30	30	30
ρ		x10 ³ kgm ⁻³	1,18	1,34	1,18
Δx		m	0,80	0,40	0,40
Δt		μs	370	240	230
Rozměry průřezu		mm	ø 10	ø 12	8 x 4
d _τ	x - střední hodnota		1,529	1,333	1,355
	S-směrodatná odchyl.		0,0704	0,0301	0,0633
Počet experimentů			12	8	10
Zatížení	1. puls		tlak	tlak	tlak
	2. puls		tah	tlak	tlak

POROVNÁNÍ ÚTLUMOVÝCH VLASTNOSTÍ KOMPOZITŮ I. TYPU
S POLYPROPYLENOVOU MATRICÍ (Mosten) A ROZPTÝLENÝM PLNIVEM
TVOŘENÝM KRÁTKÝMI SKLENĚNÝMI VLÁKNY

Vlastnosti těchto materiálů při rázovém zatěžování jsou komplexně shrnuty v /116, 117/. Zde ukážeme pouze výběr a grafickou interpretaci těch spočtených funkcí, na základě kterých byly formulovány závěry /116, 117/.

Zadavatel SVÚM v Praze dodal k testování následující materiály, a to ve formě destiček o rozměrech 150x100-10 mm:

- dva matricové materiály pod označením 52 492 a 58 412
- dvě série kompozitů tvořených matricí 52 492 a různým objemovým podílem krátkých skleněných vláken (SV), konkrétně

1. série - matrice 52 492 + 5% SV (Vertex)
 - matrice 52 492 + 10% SV (Vertex)
 - matrice 52 492 + 20% SV (Vertex)
 - matrice 52 492 + 30% SV (Vertex)
2. série - matrice 52 492 + 20% SVosc (379)-(Vertex s lubrikací OSC)
 - matrice 52 492 + 30% SVosc (379)-(Vertex s lubrikací OSC)

Zkušební vzorky byly vyrobeny rozřezáním dodaných destiček na krátké tyčky, jejichž konce byly nataveny a svařeny, čímž byla zhotovena dostatečně dlouhá tyč o průřezu 10x10 mm.

Za reprezentanty viskoelastických funkcí testovaných materiálů uvedeme grafické znázornění $g(t)$, $j(t)$, $o(t)$, $d(f)$ a $\delta(f)$, viz obr. 4.11 až 2.20.

Dále lze odlišnost testovaných hmot sledovat v závislostech P - % plnění a E_D - % plnění, viz. obr. 4.21 a 4.22.

Na základě posouzení těchto závislostí bylo možno formulovat tyto poznatky :

Plnění matricového materiálu krátkými skleněnými vlákny ovlivňuje odezvu testovaných kompozitů následujícím způsobem:

- s růstem procenta plnění roste dynamický modul pružnosti E_D , který charakterizuje tuhost kompozitu,
- v případě kompozitů 1. série dochází s růstem objemového podílu skleněných vláken k poklesu útlumových vlastností v oblasti viskoelastického rázového namáhání. Minima je do-

saženo pro plnění v rozmezí 10 až 20%.

- v případě kompozitů 2. série předchozí tvrzení není již tak jednoznačné, i když i zde při plnění v rozmezí 20 až 30% dochází k výraznému snížení útlumu. Toto rozdílné chování lze patrně přičítat rozdílnosti povrchové úpravy vláken a tedy způsobu vazby mezi maticí a skleněnými vlákny.

- dále je zřejmé, že největšího útlumu je dosahováno ve zkušebních vzorcích pouze z maticího materiálu, přičemž není podstatného rozdílu v dynamické odezvě mezi maticí 52 492 a maticí 58 412.

STANOVENÍ DYNAMICKÝCH CHARAKTERISTIK MATERIÁLU TRUBEK Z LITENU

V návaznosti na úkol řešený SVÚM v Praze pro Plynoprojekt Praha, k. ú. o. byly v laboratoři experimentální mechaniky katedry mechaniky, pružnosti a pevnosti VŠST v Liberci testovány MOAP materiály polyetylénových trubek určených pro rozvody zemního plynu a svítiplynu.

Metodou osamělého afinního pulsu byly testovány materiály čtyř trubek, které se odlišovaly středním průměrem, tloušťkou stěny, délkou a rokem výroby trubky, viz. tab. 4.2. Z trubek byly po délce vyříznuty tyče a tyto pak byly tavně spojeny v tyč takové délky, která byla vhodná pro aplikaci MOAP.

Z vyhodnocených v /118/ viskoelastických funkcí uvedeme pro představu jen $g(t)$, $d(f)$ a $\delta(f)$, viz obr. 4.23 až 4.25. Hodnoty E_0 a P jsou zřejmé ze sloupcového diagramu na obr. 4.26. Z analýzy viskoelastických funkcí bylo možno získat následující informace:

Extrémní hodnota E_0 je dosažena u trubky průměru 160 mm s tloušťkou stěny $t = 11.2$ mm. Nejvyšší útlum vykazuje materiál trubky průměru 90 mm s tloušťkou stěny $t = 8.5$ mm. Jednoznačně se ukázalo, že materiál trubky s nejnižším dynamickým modulem pružnosti E_0 vykazuje též i nejvyšší útlum (trubka T9/90). Uvedená trubka též vykazovala největší odchylku veličiny $K(f)$ charakterizující afinní podobnost profilů šířícího se pulsu. Tato odchylka zřejmě upozornila na to, že materiál této trubky je spíše nelineárně viskoelas-

tický, než lineárně viskoelastický v testovaném frekvenčním intervalu 0÷10 kHz.

Tabulka 4.2

Označení	Průměr trubky	Tloušťka stěny trubky [mm]	Rok výroby
	[mm]		
T 6	110	6,8	1983
T 9	90	8,5	1980
T 10	160	11,2	1982
T 13	225	12,8	1984

DYNAMICKÉ ÚTLUMOVÉ VLASTNOSTI POLYAKRYLONITRIDOVÝCH (PAN) SVAZKŮ VLÁKEN

Vlákna tohoto typu jsou ve vyspělých průmyslových zemích užívána, kromě jiného, k výrobě uhlíkových vláken, určených převážně ke konstrukci kompozitních struktur.

Ve výzkumech prováděných v laboratoři KMP v letech 1981-1989 byla zkoumána odezva PAN vláken i vláken uhlíkových na rázová zatížení doprovázených šířením vln deformace /113, 119, 120/.

Cílem těch částí prací, které byly zaměřeny na výzkum útlumových vlastností těchto materiálů bylo dát čs. výrobci uhlíkových vláken (MONOKRYSTALY Turnov) podklady o dynamické odezvě jednak v zahraničí nakupovaných surovin pro výrobu uhlíkových vláken a jednak o dynamické tuhosti, resp. poddajnosti, ve vlastním poloprovozu produkovaných uhlíkových vláken. Současně byla prováděna i porovnávací měření dynamických tuhostí a poddajností uhlíkových vláken vyráběných světovými firmami v USA, Japonsku a SSSR.

Pomocí MOAP se podařilo porovnat viskoelastické vlastnosti PAN vláken na rázové zatížení a spolu s výrobcem byl hledán vliv technologie výroby uhlíkových vláken z těchto surovin na vlastnosti uhlíkových vláken. U PAN vláken byly sledovány všechny viskoelastické charakteristiky /113/. Z mnoha získaných výsledků jsou uvedeny informativně v obr. 4.27 a 4.28 jen některé. V tabulce 4.3 je uveden typ vlákna, jeho označení a výrobce.

Tabulka 4.3

Označení v grafech	Přesné označení	Výrobce - poznámka
vlákna uhlíková		
T3	TORAYCA T 300	Japonsko, firma TORAY
T4	TORAYCA T 400	Japonsko, firma TORAY
T6	TORAYCA T 635	Japonsko, firma TORAY
TH	THORNEL 300	USA, firma Union Carbide
S5	CRYTUR SAF 557	Monokrystaly TURNOV - SAF
W	CRYTUR W 230	Monokrystaly TURNOV - Wolpryla
S56	56/2	SSSR
S67	67/1	SSSR
S59	59/2	SSSR
PAN vlákna		
BV2	BV 212	NDR - typ suroviny Wolpryla
S4	SAF 4	Anglie, firma Courtanlds Ltd.
BV1	BV 162	NDR - typ suroviny Wolpryla
507	W 507	NDR - typ suroviny Wolpryla
S10	SAF 10	Anglie, firma Courtanlds Ltd.
510	W 510	NDR - typ suroviny Wolpryla
519	W 519	NDR - typ suroviny Wolpryla
528	W 528	NDR - typ suroviny Wolpryla
502	W 502	NDR - typ suroviny Wolpryla

DYNAMICKÁ PODDAJNOST SKLENĚNÝCH VLÁKEN Z HLEDISKA TECHNOLOGIE ZPRACOVÁNÍ SKANÍM

Zvyšování výkonnosti textilní techniky používané při technologickém zpracování multifilních svazků vláken obvykle znamená zvýšení otáček používaných textilních strojů a tím nárůst rychlosti zpracování těchto materiálů. Tato skutečnost se nutně odráží ve změně spektra zatěžování zpracovávaných materiálů. Uplatňují se ve větší míře časově proměnná namáhání různé frekvence a amplitud, která mohou mít charakter jak stacionární (kmitavé pohyby), tak nestacionární (pulsy, rázy). Taková zatížení vyvolávají ve zpracovávaných svazcích vláken šíření vln napětí, resp. deformací, které se superponují na napětí, resp. deformace způsobené vibracemi jednotlivých částí textilních strojů. Pak je pro konstruktéra příslušné textilní techniky, ale i pro výrobce zpracovávaných textilních materiálů důležitá znalost reakce, resp. odezvy materiálu vlákna na dynamická zatížení. Tato zatížení se šíří vysokými rychlostmi, vyvolávají rázy, což ve svém důsledku může způsobit až porušení některých vláken ve svazku nebo i celého multifilního pramene svazku vláken. Přitom je třeba uvážit fakt, že bude docházet k útumu šířících se vln deformace vlivem vnitřní struktury materiálu a vlivem geometrického uspořádání svazků vláken za současných změn v rychlostech šíření jednotlivých složek spektra dynamického zatížení.

K popisu a ocenění těchto jevů je nutná znalost materiálových charakteristik vláken, resp. svazků vláken. Za takové charakteristiky mohou být považovány např. dynamická poddajnost, resp. tuhost vláken a frekvenční, resp. časově závislé funkce, které je schopna poskytnout MOAP.

V rámci experimentální činnosti laboratoře KMP byly v roce 1987 /121, 122/ posuzovány dynamické vlastnosti několika multifilních pramenů skleněných vláken a to z hlediska inovace technologie jejich zpracování skaním v KVÚ Elitex Brno.

Testované materiály

K ocenění dynamických vlastností multifilních pramenů skleněných vláken EC 6 československé výroby metodou osamělého afinity pulsu byly dodány čtyři typy vzorků :

1. EC 6 - 17 tex - kokon
2. EC 6 - 34 tex - kokon
3. EC 6 - 17 tex - 140 Z (140 zákrutů na 1m délky svazku)
4. EC 6 - 34 tex - 90 Z (90 zákrutů na 1m délky svazku)

Pro eventuální srovnání bylo rovněž testováno několik pramenů skleněného vlákna firmy OWENS/CORMING FIBERGLAS CORP. (USA). O tomto vlákne je známo, že má z hlediska zpracování příznivé technologické vlastnosti a že užité vlastnosti skleněných tkanin vyrobených z těchto vláken a používaných např. ve zdravotnictví jsou vynikající. Jemnost tohoto vlákna byla stanovena na 0,31 tex/fibrilu.

Parametry experimentálního uspořádání včetně vyhodnocených veličin jsou uvedeny v tabulce 4.4.

Tabulka 4.4

		testovaný materiál, $\rho = 2,5 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$				
parametr [rozměr]	statis- tická charakte- ristika	EC 6 34 tex kokon	EC 6 17 tex kokon	EC 6 34 tex 90 Z	EC 6 17 tex 140 Z	OW.COR. FIBER. USA
Δx	$\bar{x}$	905	900	890	893	867
Δt [μs]	$\bar{x}$	175	169	165	163	179
	K _f	0,3	0,3	0,3	0,5	0,5
	S	0,9	0,7	0,9	1,3	1,4
	K _{š_k}	-0,220	0,000	0,188	-0,948	0,166
	K _{š_p}	-0,855	-0,857	-1,526	0,204	-1,133
c_0 [ms^{-1}]	$\bar{x}$	5180	5330	5400	5480	4840
	K _f	10	8	10	16	15
	S	27	22	28	43	39
	K _{š_k}	0,237	0,014	-0,182	0,978	-0,151
	K _{š_p}	-0,836	-0,857	-1,529	0,262	-1,333
$E_D \cdot 10^3$ [MPa]	$\bar{x}$	67,0	70,9	72,8	76,1	58,6
	K _f	0,3	0,2	0,3	0,4	0,4
	S	0,7	0,6	0,8	1,2	0,9
	K _{š_k}	0,246	0,021	-0,179	0,993	-0,143
	K _{š_p}	0,826	0,857	-1,531	0,292	-1,331
počet měření		30	30	30	30	30

$\bar{x}$ - střední hodnota parametru

K_f - konfid. interval pro hladinu pravděpodobnosti 0,95

S - směrodatná odchylka

K_{š_k} - koeficient šikmosti

K_{š_p} - koeficient špičatosti

Výsledky provedených měření se skleněnými vlákny

Z provedených a vyhodnocených experimentů byly učiněny následující závěry :

1. Všechna testovaná vlákna splňovala podmínky pro aplikaci MOAP. Ve frekvenčním rozsahu platnosti MOAP 0 - 3,5 kHz bylo možné vyhodnotit frekvenční charakteristiky testovaných multifilních pramenů skleněných vláken.

2. Získané poznatky korespondují s domněnkou o ideálně elastickém, tj. bezútlumovém chování testovaných skleněných vláken podrobených podélnému rázovému zatížení. Z tohoto důvodu byla proto vyhodnocena pouze fázová rychlost - viz. obr. 4.29.

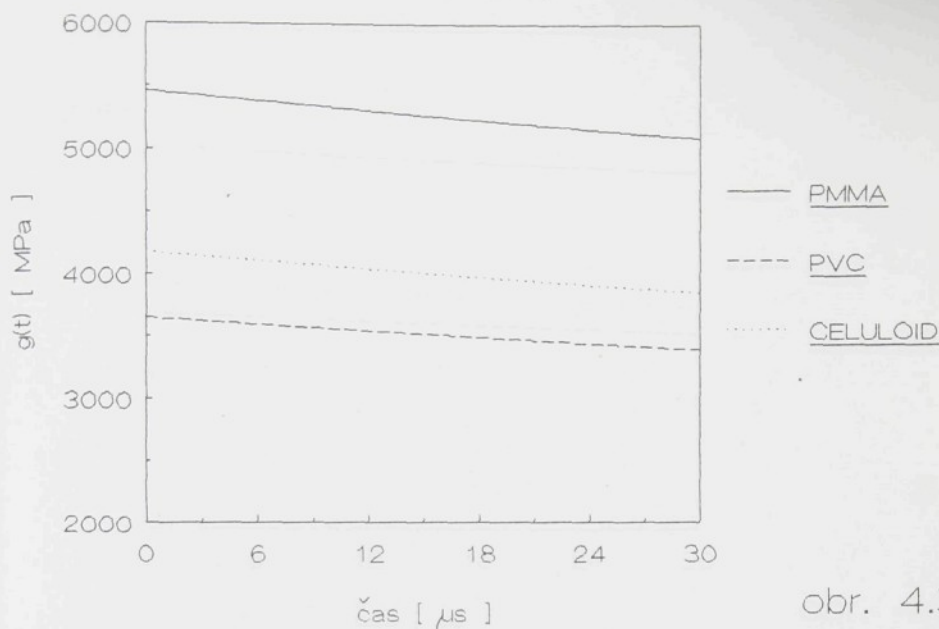
Poznámka: Klasické textilní materiály (syntetické ale i přírodní) vykazují ve větší, či menší míře vždy viskoelastické, tj. útlumové chování, což je v textilních technologiích a priori s úspěchem využíváno.

3. Vyhodnocené průběhy fázových rychlostí skleněných vláken EC 6 naznačují, že určitý stupeň zakroucení svazků vláken ovlivňuje při vyšších frekvencích charakter fázové rychlosti, avšak nenarušuje jejich výše diskutovanou elasticitu. Geometrické uspořádání vláken ve svazku má vliv na mechanickou odezvu systému vláken při podélném rázu. Do jaké míry je takový způsob ovlivňování vlastností systému skleněných vláken žádoucí z hlediska technologických parametrů při jejich zpracování nebylo možné zatím z dosavadních experimentálních pozorování jednoznačně posoudit. Hlubší rozbor tohoto problému je námětem pro další bádání v této oblasti.

Poznámka: Závislost fázové rychlosti pro zahraniční vlákno nebyla stanovena vzhledem k jeho nedostatečné délce.

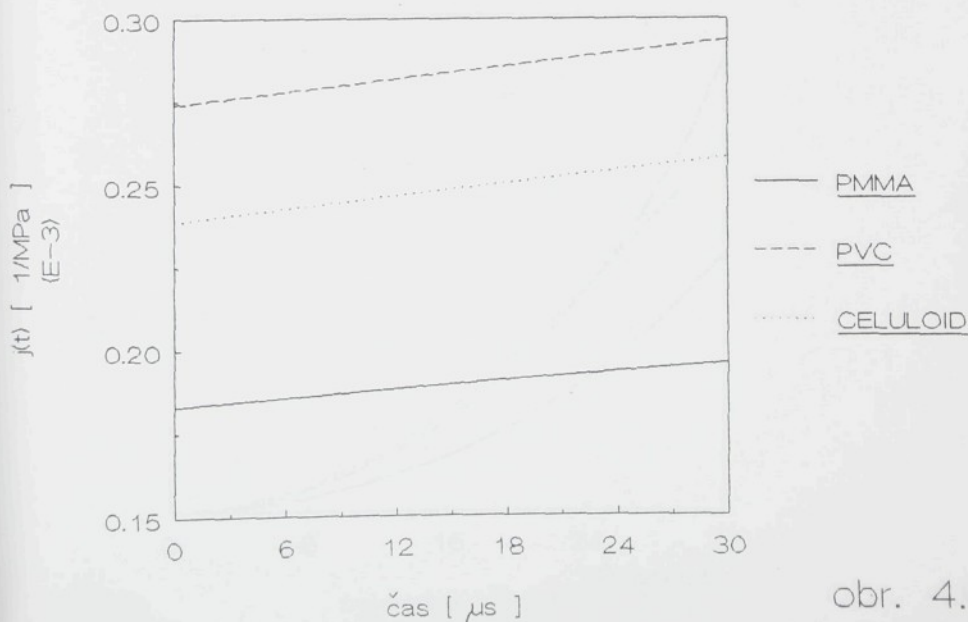
4. Dynamické vlastnosti testovaných vláken se vzájemně liší z hlediska množství akumulované energie při rázu. Ze srovnání dynamických tuhostí E_D , resp. poddajností J_D , které je pro přehlednost uvedeno na obr. 4.30, plyne, že zahraniční vlákno (USA) je výrazně poddajnější a proto má příznivější vlastnosti z hlediska technologií textilního zpracování, než vlákna EC 6.

Relaxační modul pružnosti v okolí časového počátku



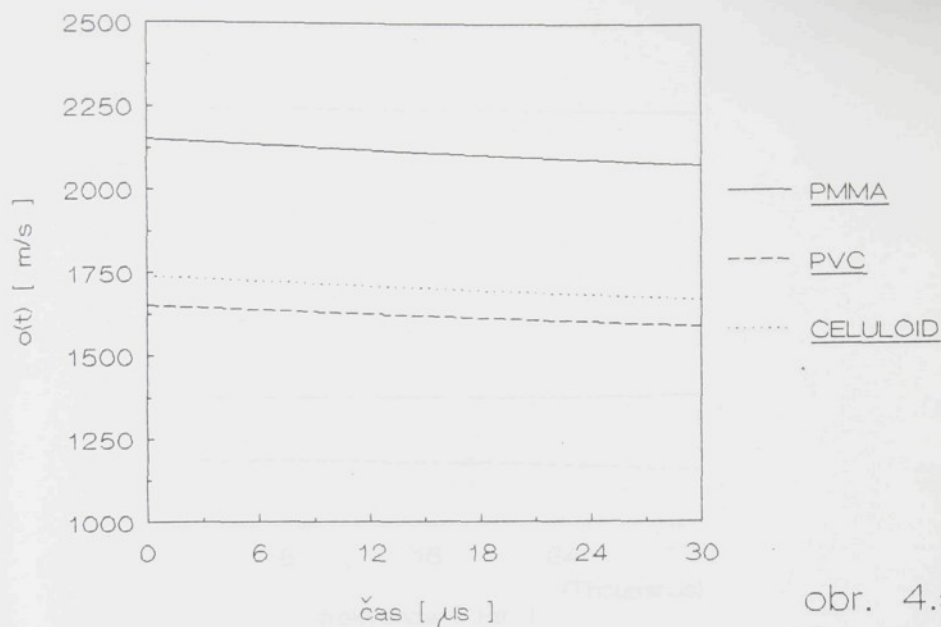
obr. 4.3

Funkce poddajnosti $j(t)$ v okolí časového počátku



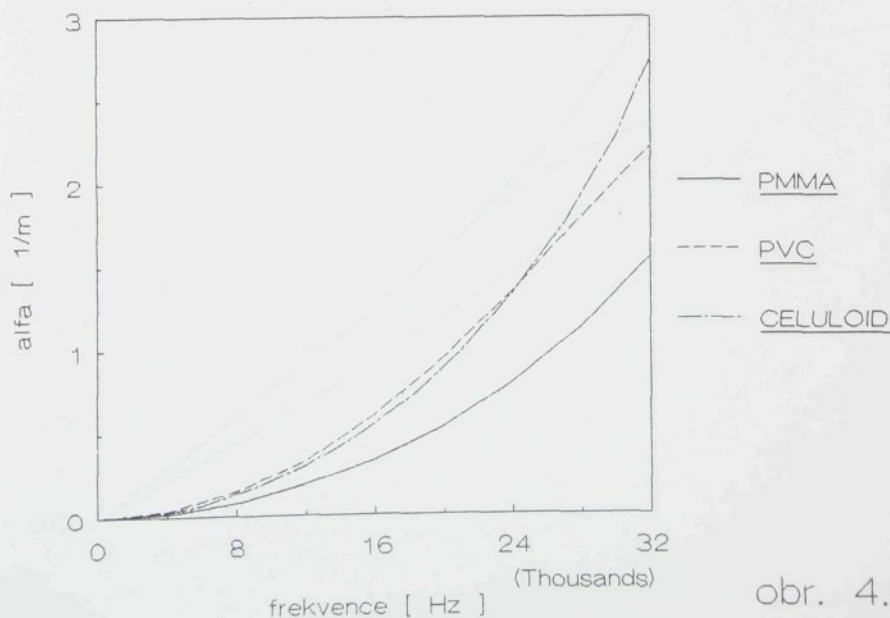
obr. 4.4

Relaxační modul rychlosti v okolí časového počátku



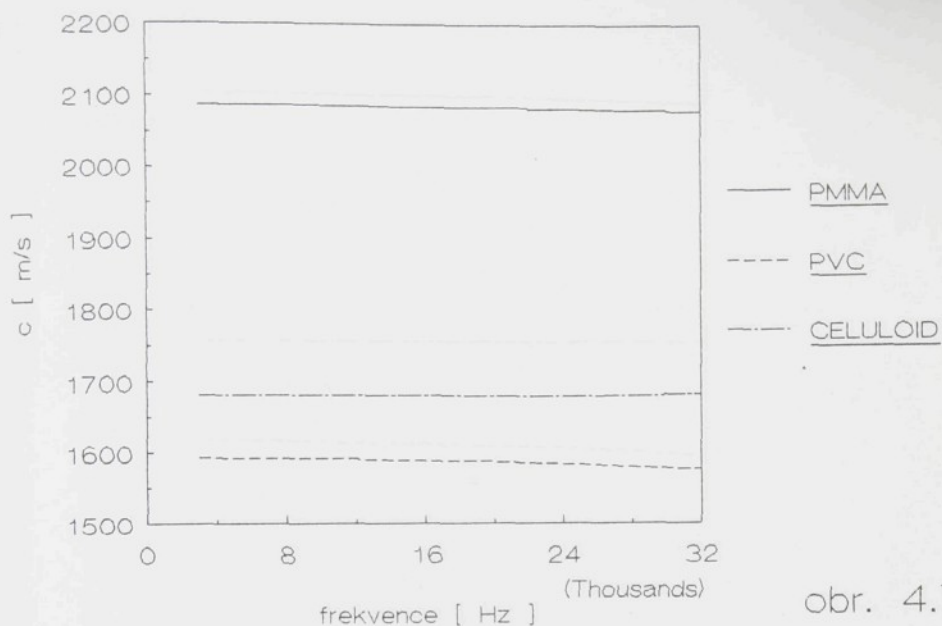
obr. 4.5

Závislost koeficientu útlumu na frekvenci



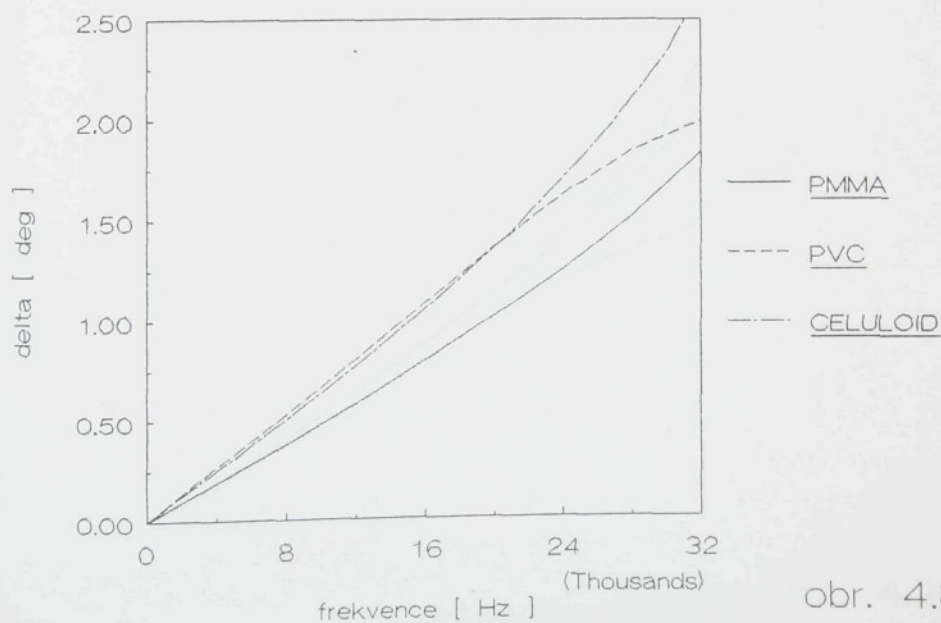
obr. 4.6

Závislost fázové rychlosti na frekvenci



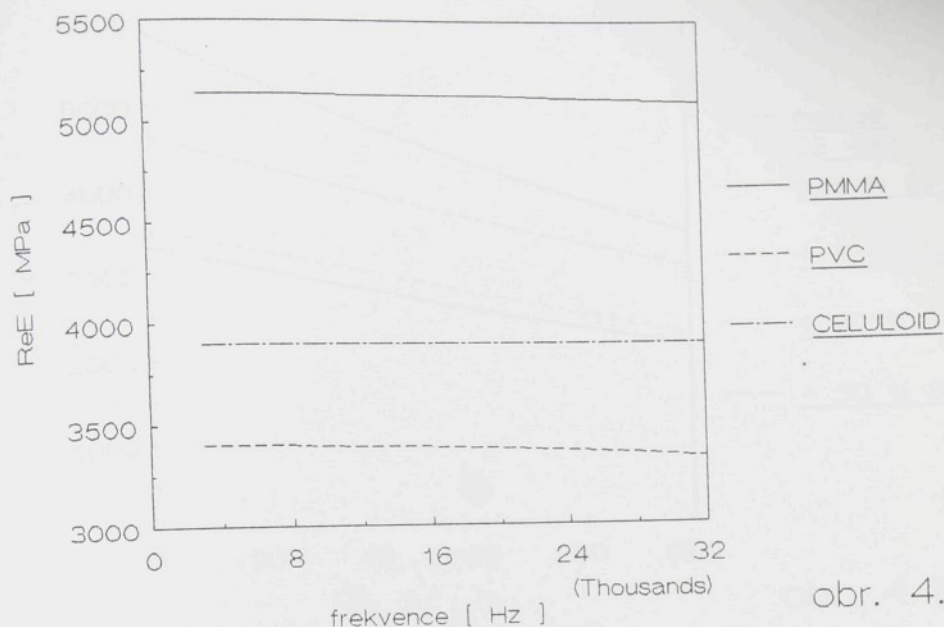
obr. 4.7

Závislost úhlu ztrát na frekvenci



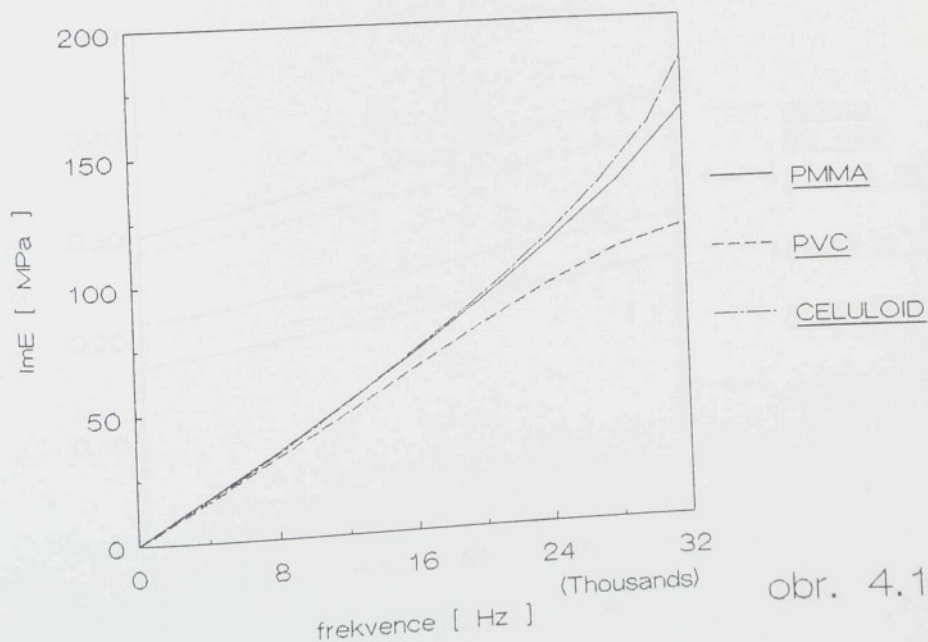
obr. 4.8

Závislost reálné části komplexního modulu pružnosti na frekvenci



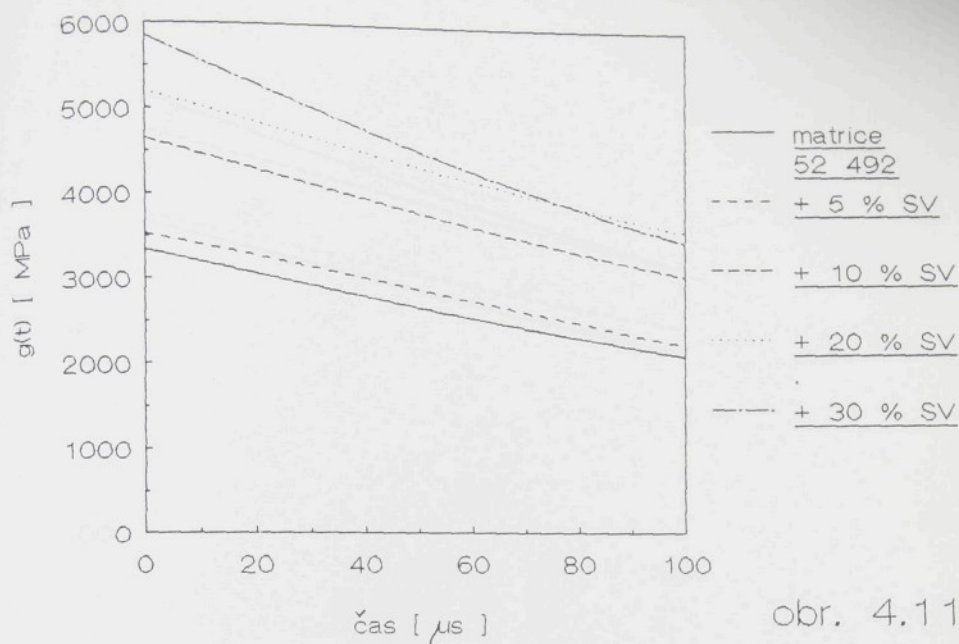
obr. 4.9

Závislost imaginární části komplexního modulu pružnosti na frekvenci



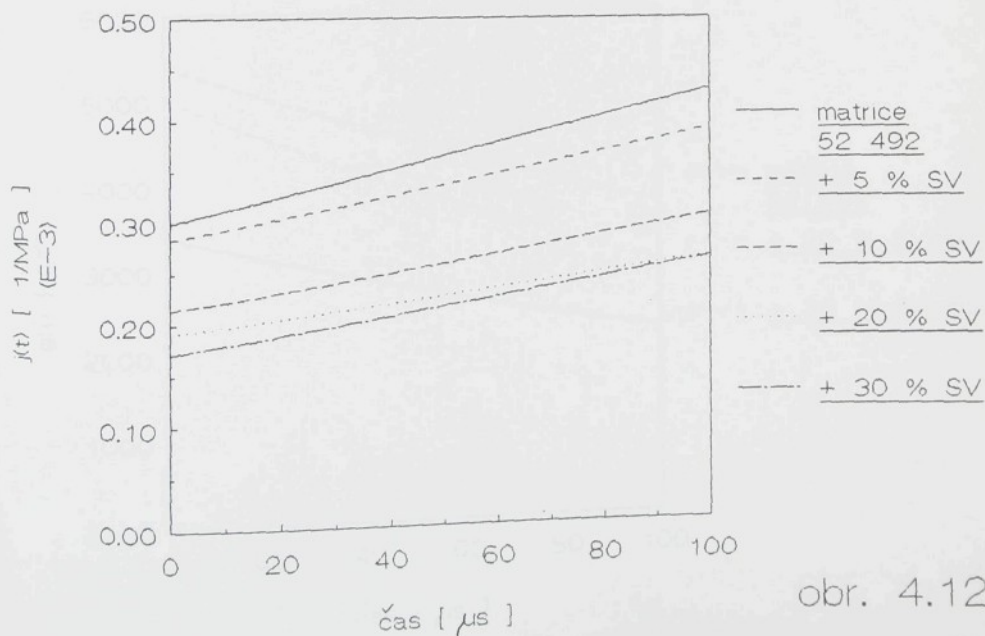
obr. 4.10

Relaxační modul pružnosti pro 52 492 + % plnění SV



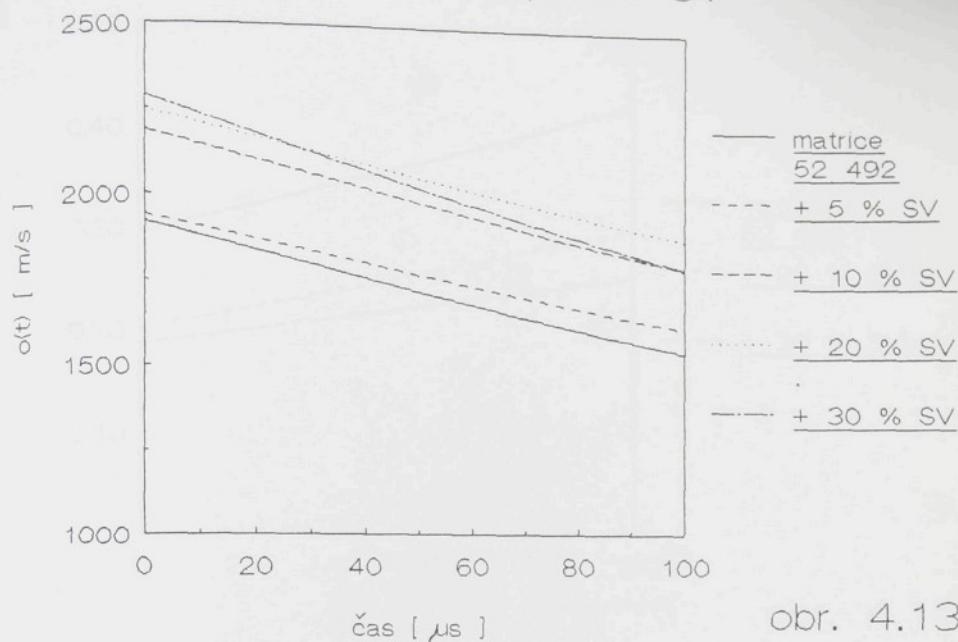
obr. 4.11

Funkce poddajnosti pro 52 492 + % plnění SV



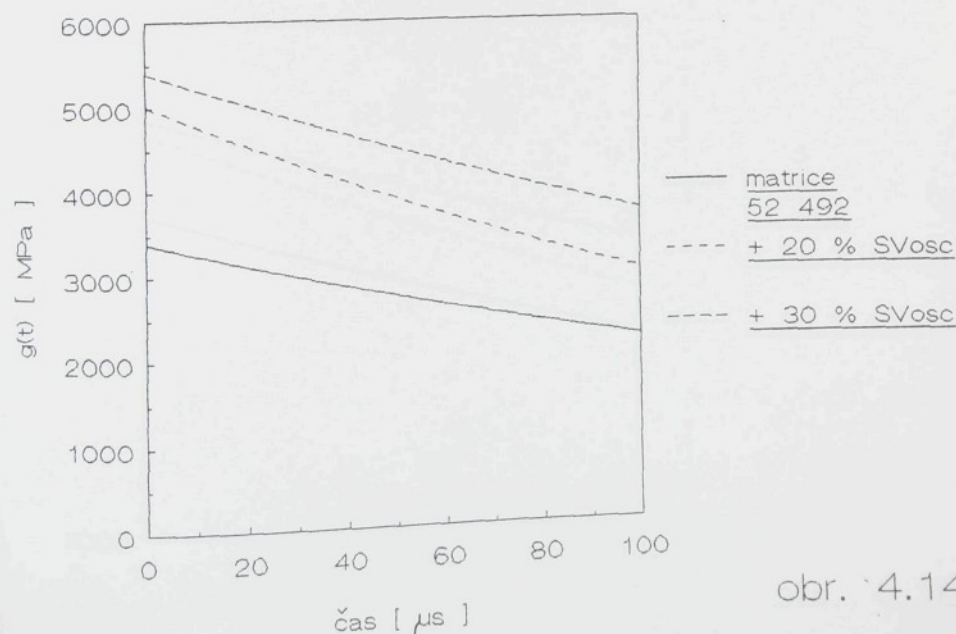
obr. 4.12

Relaxační modul rychlosti
pro 52 492 + % plnění SV



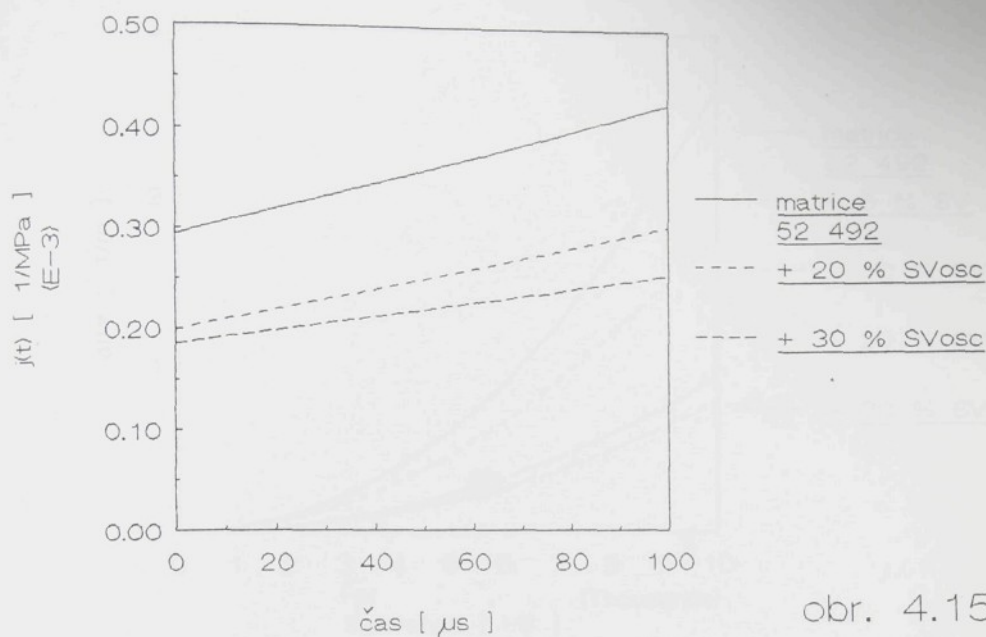
obr. 4.13

Relaxační modul pružnosti
pro 52 492 + % plnění SVosc



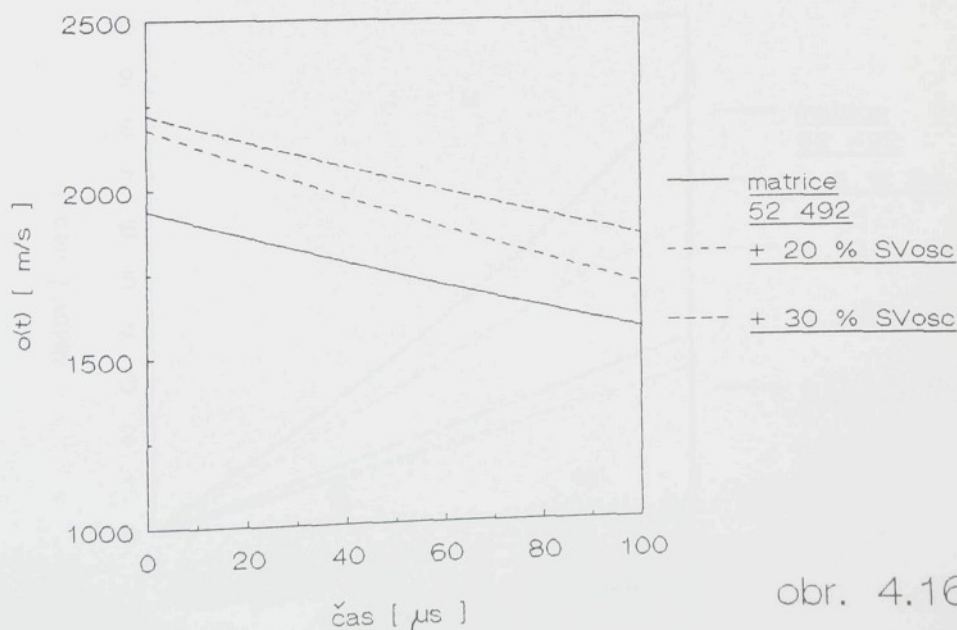
obr. 4.14

Funkce poddajnosti pro 52 492 + % plnění SVosc



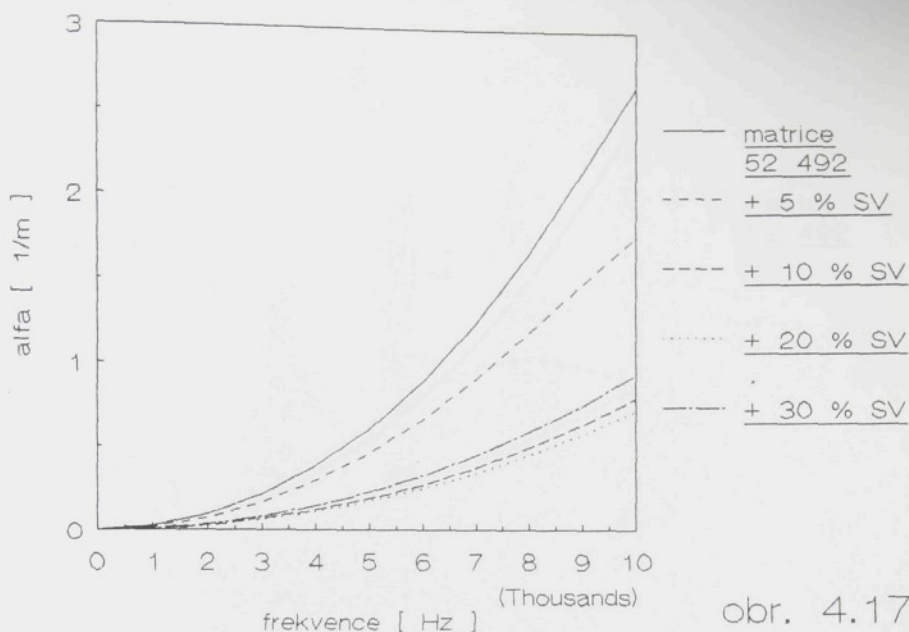
obr. 4.15

Relaxační modul rychlosti pro 52 492 + % plnění SVosc



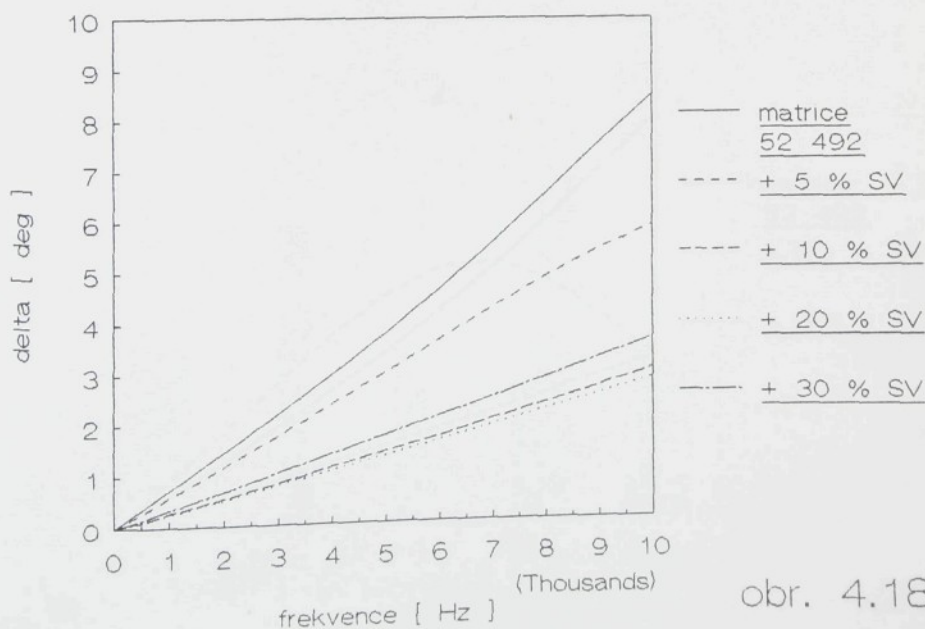
obr. 4.16

Závislost alfa na frekvenci
pro 52 492 + % plnění SV



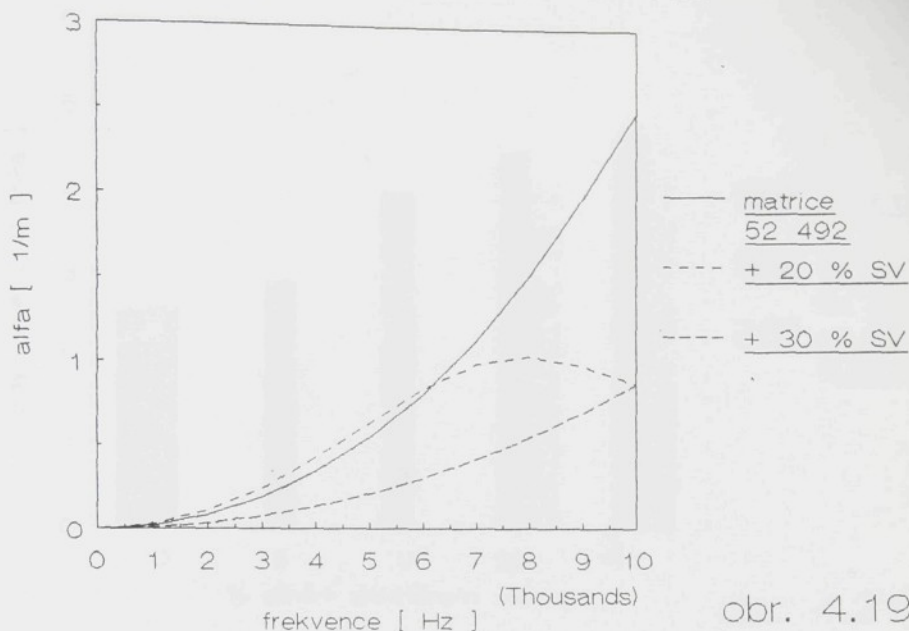
obr. 4.17

Závislost úhlu mech. ztrát na frekvenci
pro 52 492 + % plnění SV



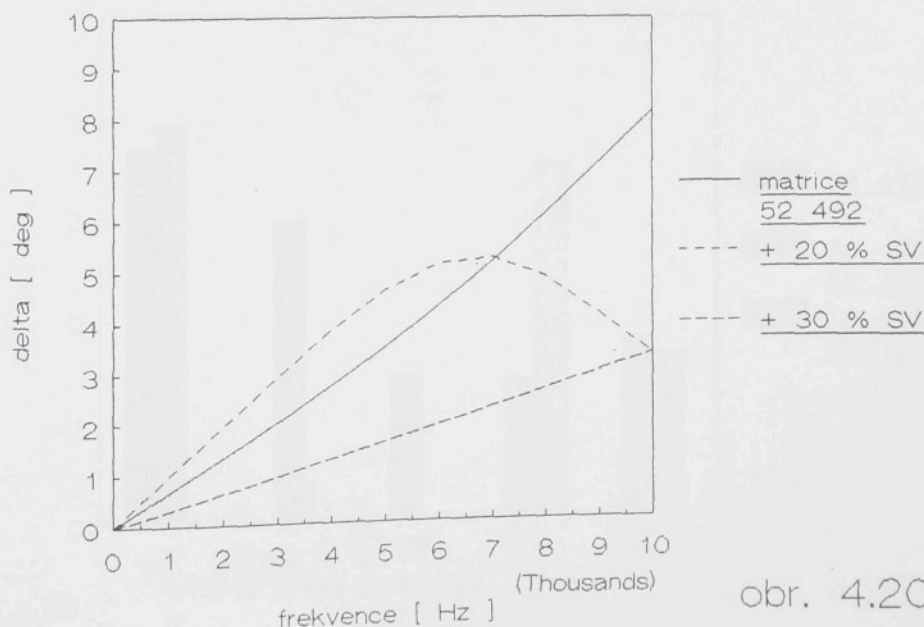
obr. 4.18

Závislost alfa na frekvenci
pro 52 492 + % plnění SVosc



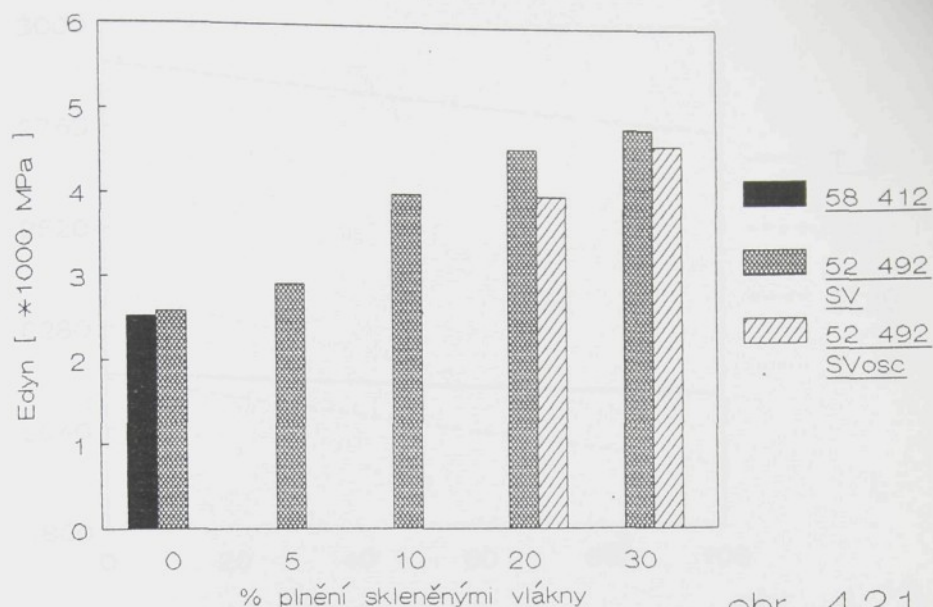
obr. 4.19

Závislost úhlu mech. ztrát na frekvenci
pro 52 492 + % plnění SVosc



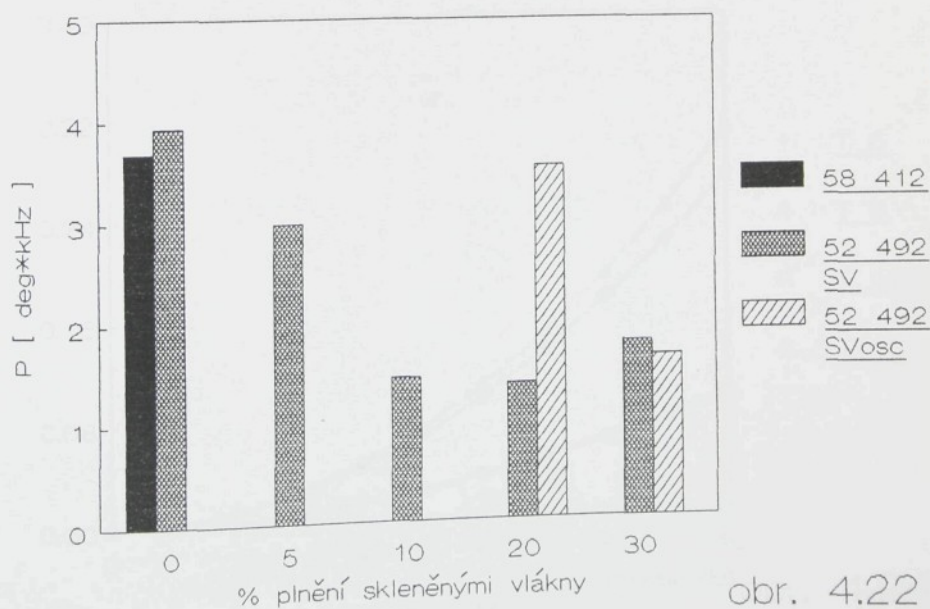
obr. 4.20

Závislost dynamického modulu pružnosti na % plnění



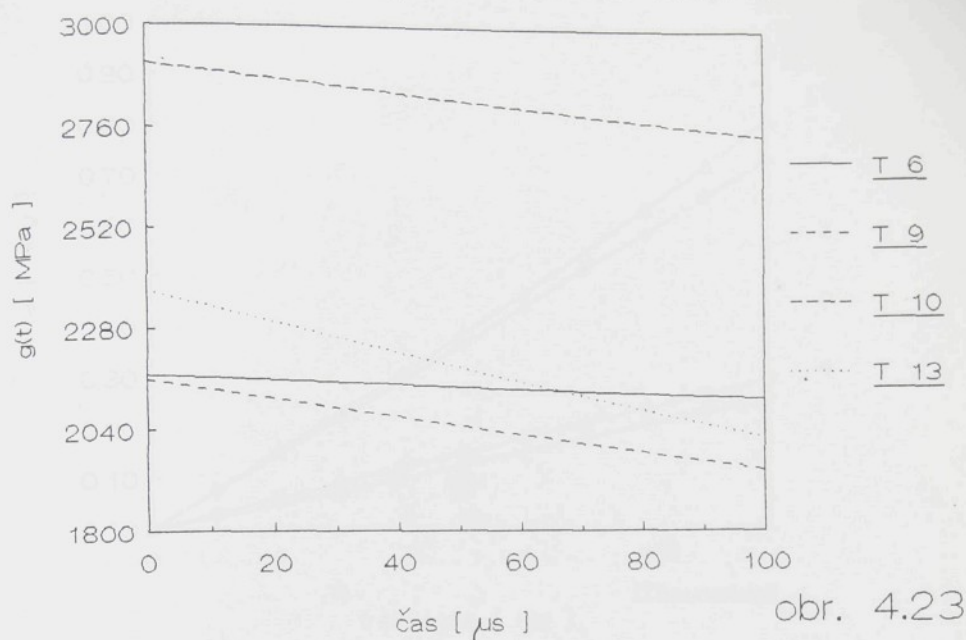
obr. 4.21

Závislost P na % plnění



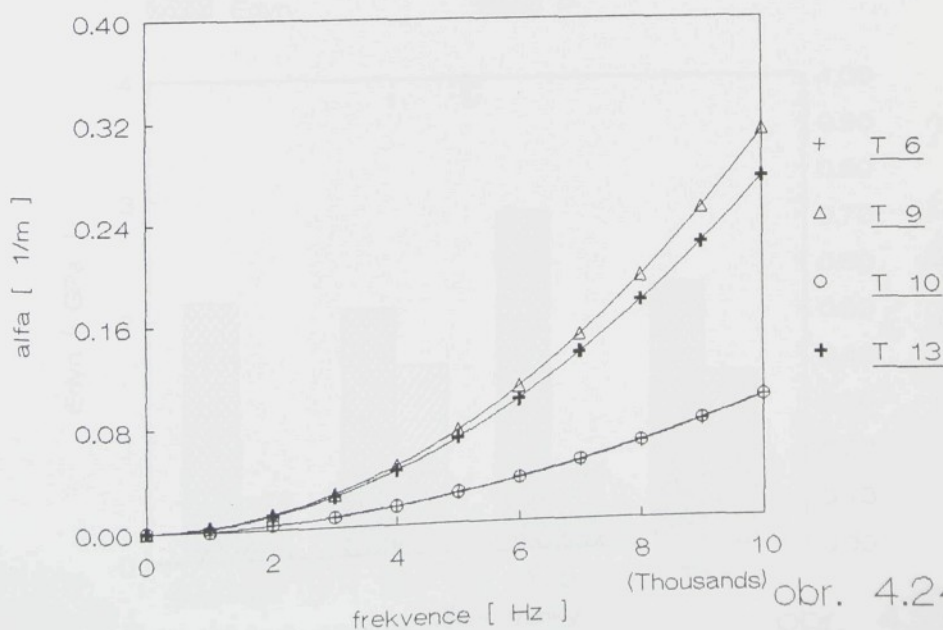
obr. 4.22

Relaxační modul pružnosti pro materiály trubek z Litenu



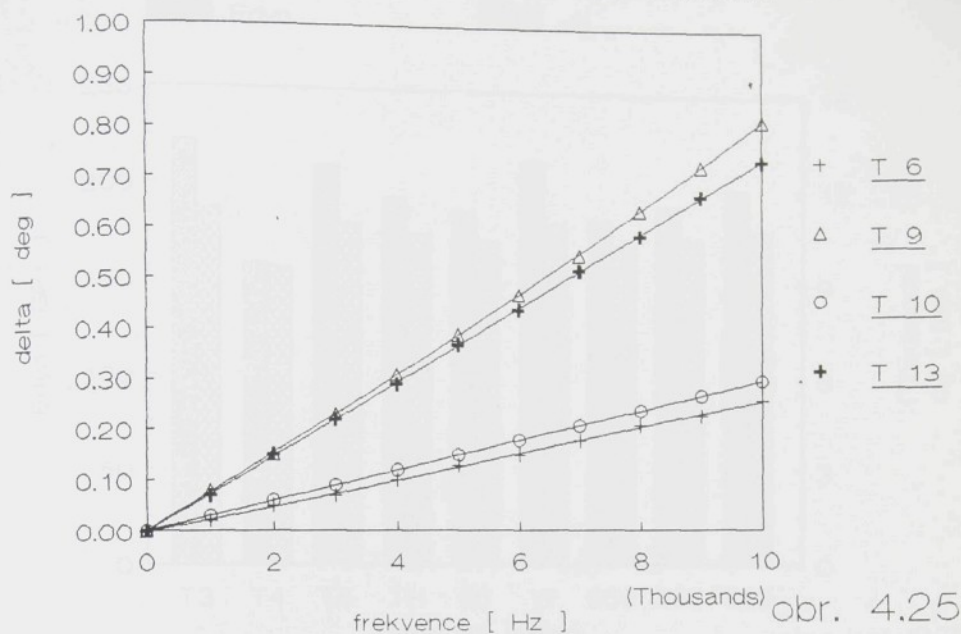
obr. 4.23

Koeficient útlumu alfa pro materiály trubek z Litenu

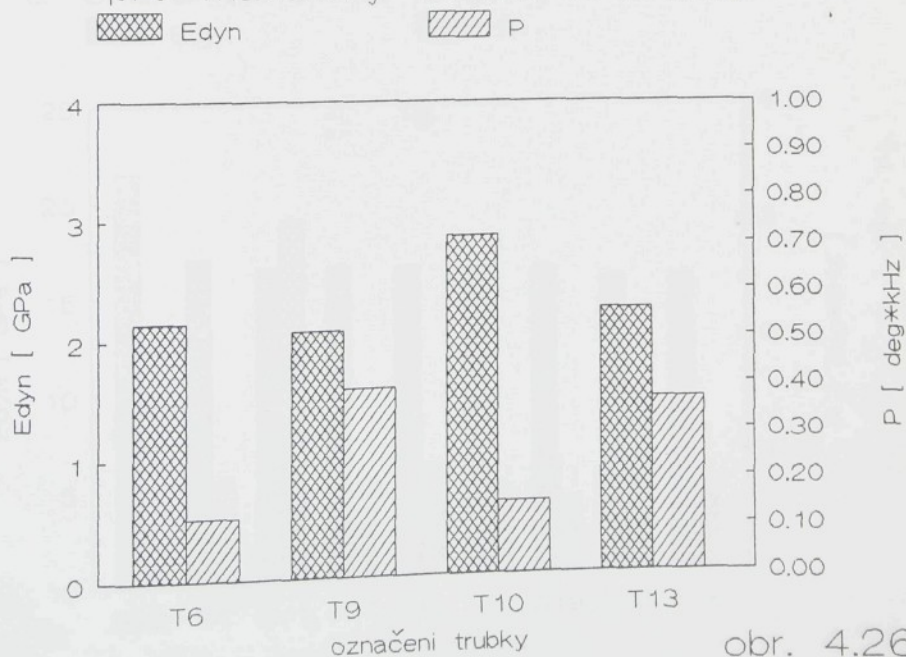


obr. 4.24

Úhel ztrát delta pro materiály trubek z Litenu



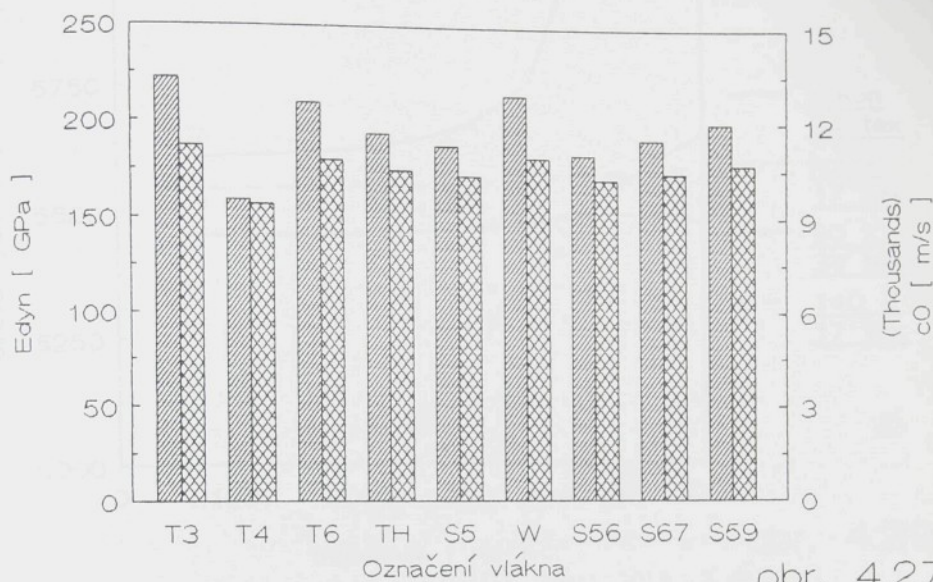
Porovnání Edyn a P pro materiály trubek z Litenu



Dynamický modul pružnosti a rychlost c_0 pro uhlíková vlákna

Edyn

c_0

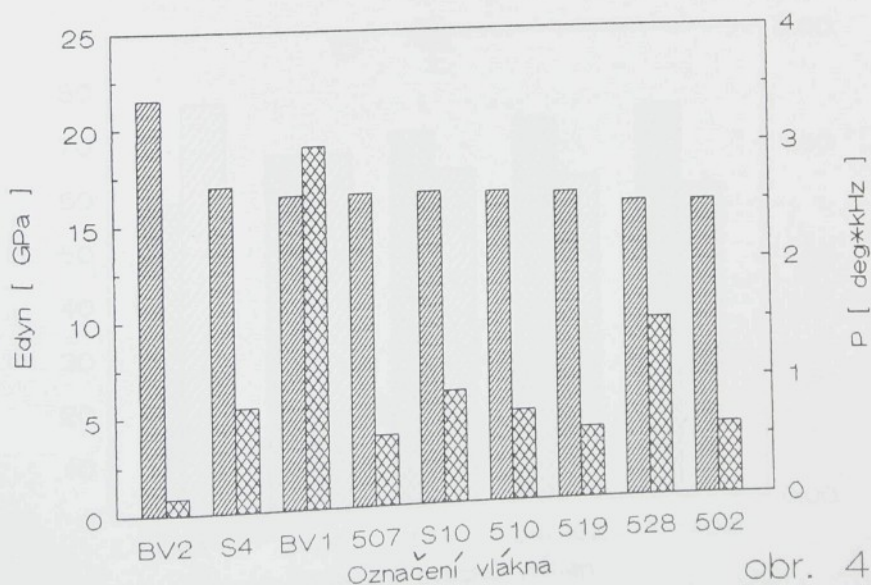


obr. 4.27

Dynamický modul pružnosti a charakteristika P pro PAN vlákna

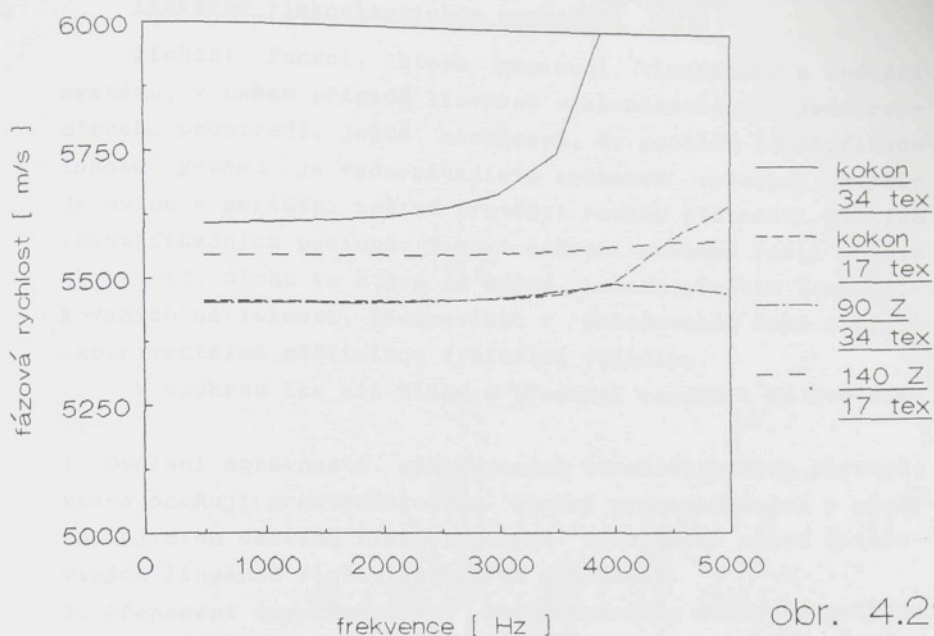
Edyn

P



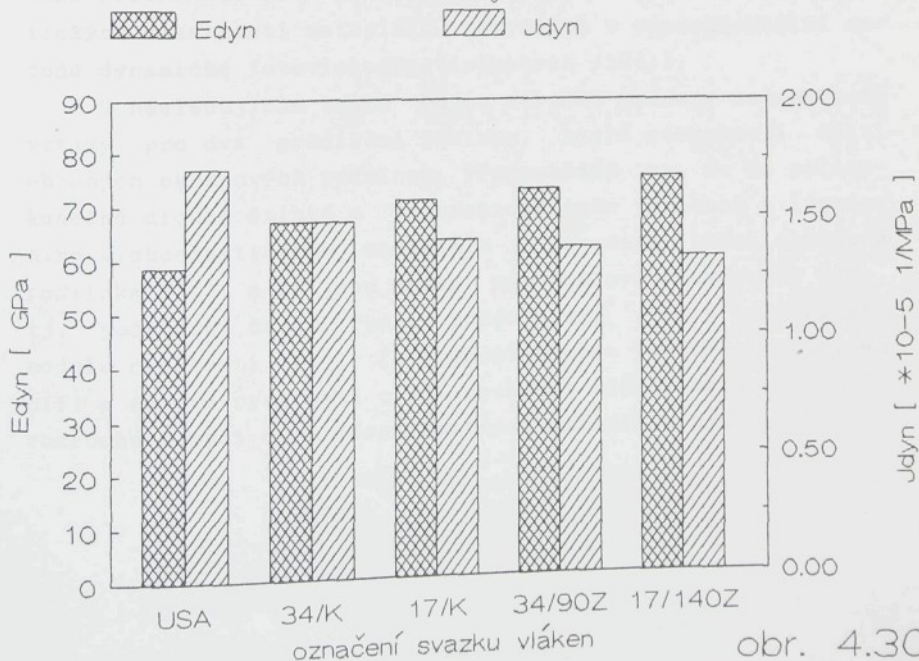
obr. 4.28

Frekvenční závislost fázové rychlosti pro skleněná vlákna EC 6



obr. 4.29

Dynamická tuhost a poddajnost svazku skleněných vláken



obr. 4.30

4.4. Predikce profilu pulsu šířícího se v jednorozměrném lineárně viskoelastickém prostředí

Získání funkcí, které popisují vlastnosti a chování systému, v našem případě lineárně viskoelastického jednorozměrného prostředí, ještě neznamená, že problém identifikace tohoto systému je vyčerpávajícím způsobem vyřešen. Obvykle je nutné a seriózní zpětně prověřit rozsah platnosti užitých identifikačních postupů. Takové ověření znamená řešit přímou úlohu, tj. úlohu ve které je možné, pomocí předtím identifikovaných závislostí, předpovědět v požadovaném čase a místě experimentálně měřitelnou fyzikální veličinu.

V souhrnu lze cíl úlohy o predikci rozdělit na dvě části:

1. Ověření správnosti navrhovaných identifikačních postupů, které oceňují prostřednictvím funkcí prezentovaných v předcházejících částech viskoelastické vlastnosti rázem zatěžovaných lineárně viskoelastických materiálů.

2. Přenesení experimentálně registrovaného časového průběhu fyzikální veličiny, např. poměrné deformace, z místa měření do požadovaného místa za účelem získání dat pro řešení problémů následujících (např. nalezení okrajových podmínek pro řešení úlohy nestacionární napjatosti ve viskoelastickém tělese /110/ nebo pro potřeby identifikace dynamických reooptických vlastností materiálů užívaných v experimentální metodě dynamické fotoviskoelasticimetrie /124/).

V následujícím textu budou stručně uvedeny matematické vztahy pro dva predikční postupy, které respektují užití obecných okrajových podmínek. Předpokládá se, že do polonekonečné dlouhé štíhlé a prizmatické tyče vyrobené z lineárního viskoelastického materiálu je zavedena známá okrajová podmínka $f(t)$ a že jsou známy materiálové vlastnosti tyče, tj. počáteční části funkce poddajnosti $j(t)$ a relaxačního modulu rychlosti $o(t)$, frekvenční funkce koeficientu útlumu $\alpha(f)$ a fázové rychlosti $c(f)$, rychlost šíření čela podélného rozruchu v tyči c_0 a měrná hmotnost materiálu tyče ρ .

4.4.1. Predikce pomocí časových funkcí $j(t)$ a $o(t)$

Základním vztahem pro predikci profilu pulsu $\varphi(t)$ je výraz odvozený v /36/ a diskutovaný v /125/. Platí

$$\varphi(t) = S_0 f(t) + \int_0^t f(\tau) S_R(t-\tau) d\tau \quad (4.30)$$

Pomocnou funkci $S_R(t)$ lze získat z funkce poddajnosti $j(t)$ postupně numerickým řešením dalších integrálních rovnic Volterrova typu

$$\rho \frac{dj(t)}{dt} = \frac{2}{c_0} m(t) + \int_0^t m(\tau) m(t-\tau) d\tau, \quad (4.31)$$

$$S_0 t m(t) = \frac{1}{x} t S_R(t) + \int_0^t \tau m(\tau) m(t-\tau) d\tau, \quad (4.32)$$

kde $m(t)$ je další pomocná funkce pro kterou platí

$$S_0 = \exp[x m(0^+)], \quad (4.33)$$

$$m(0^+) = \frac{\rho c_0}{2} \left. \frac{dj(t)}{dt} \right|_{t=0^+}, \quad (4.34)$$

$$S_R(0^+) = x S_0 \left. \frac{dm(t)}{dt} \right|_{t=0^+}. \quad (4.35)$$

Protože je distorze osamělého pulsu ve viskoelastickém prostředí charakterizována poklesem jeho amplitudy a současně prodlužováním jeho délky, viz. obr. 4.31, je nezbytné vyřešit problém vzájemného přiřazování odpovídajících si bodů profilů pulsu, tj. $A \rightarrow A'$, v místech 1 a 2 na tyči. Vztah (4.30) tuto skutečnost sice inherentně předpokládá, ovšem vlastní přiřazení profilů pulsu $f(t_1) \rightarrow \varphi(t_2)$ neřeší. V /125/ byl řešen tento problém s využitím relaxačního modulu rychlosti $o(t)$. Pomocí geometrických vazeb vyplývajících z obr. 4.31 je možné získat funkci

$$d_{\tau}(t) = \frac{t_2}{t_1} = 1 + \frac{|x|}{t} \left[\frac{1}{o(t)} - \frac{1}{c_0} \right]. \quad (5.36)$$

Pomocí této funkce lze pak "opravit" ve vztahu (5.30) argument predikovaného profilu $\varphi(t_2)$, pro predikci ve směru šíření pulsu, na

$$\varphi(t/\alpha_\tau(t)) = S_0 f(t) + \int_0^t f(\tau) S_R(t-\tau) d\tau \quad (4.37a)$$

a pro predikci proti směru šíření pulsu na

$$\varphi(t/\alpha_\tau(t)) = S_0 f(t) + \int_0^t f(\tau) S_R(t-\tau) d\tau. \quad (4.37b)$$

Přitom t značí časovou souřadnici libovolného bodu známého profilu $f(t)$ a absolutní hodnota $|x|$ ve výrazu (5.36) byla zavedena z toho důvodu, aby bylo možno predikovat profily pulsů rovněž opačným směrem, tj. proti směru šíření pulsu.

4.4.2. Predikce pomocí frekvenčních funkcí $a(f)$ a $c(f)$

Řešit úlohu o predikci s využitím materiálových funkcí závislých na frekvenci znamená využít aparátu Fourierovy syntézy. V takovém případě je problém predikce soustředěn do řešení vztahů

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A_P(f) \cos[2\pi f t - \varphi_P(f)] d(2\pi f), \quad (5.38)$$

$$\text{kde} \quad A_P(f) = A(f) \exp[-x d(f)] \quad (5.39)$$

$$\text{a} \quad \varphi_P(f) = \varphi(f) + 2\pi f x \left[\frac{1}{c(f)} - \frac{1}{c_0} \right]. \quad (5.40)$$

V předchozích vztazích značí f frekvenci, $A_P(f)$, $A(f)$, $\varphi_P(f)$ a $\varphi(f)$ amplitudová a fázová spektra predikovaného profilu $\varphi(t)$ (index P) a vstupní (okrajové) podmínky $f(t)$ (bez indexu), x je vzdálenost místa ve kterém je předpovídán profil pulsu $\varphi(t)$ od místa známé okrajové podmínky $f(t)$.

Poznamenejme, že vztah (5.40) "zabezpečuje" podobně jako výraz (5.36) příslušné prodloužení pulsu. Oba výrazy jsou vzájemně analogické a jejich užití je podmínkou korektní predikce profilu pulsu šířícího se v jednorozměrném lineárně

4.4.3. Experimentální ověření predikčních postupů a diskuse výsledků

Ověření navrhovaných postupů predikce profilů pulsu šířícího se v dlouhé štíhlé tyči vyrobené z lineárně viskoelastického materiálu předpokládá realizaci experimentu, ve kterém je možné registrovat časový průběh některé z fyzikálních veličin, jako je posuv částice (průřezu), rychlost částice nebo poměrná deformace, alespoň ve třech místech na tyči - viz. obr. 4.32.

Z časových průběhů (profilů) např. poměrné deformace, kterou registrujeme tenzometricky ve dvou místech na tyči vyhodnotíme identifikační procedurou příslušné materiálové charakteristiky a v místě třetím porovnáme spočtený predikovaný průběh s experimentálně měřeným.

V laboratoři experimentální mechaniky katedry mechaniky, pružnosti a pevnosti na Vysoké škole strojní a textilní v Liberci byl takový experiment realizován. Tvary experimentálně změřených (..... A) a predikovaných (----- B) časových profilů dominantních částí šířícího se deformačního pulsu v tyči ($\varnothing$ 10 mm) z PMMA jsou uvedeny na obr. 4.33a, b, c až 4.34a, b, c. Směry predikcí jsou v obrázcích zapsány symbolicky. Např. 1+3 $\rightarrow$ 2 značí, že byla provedena predikce profilu v místě 2 z profilů v místech 1 a 3 a s pomocí příslušných materiálových funkcí. Grafická interpretace těchto funkcí je uvedena pro názornost vždy ve spodních částech obrázků.

Prostým vizuálním porovnáním experimentálně registrovaných (A) a predikovaných (B) časových profilů deformačních pulsů lze výsledky úlohy o predikci shrnout následovně:

1. Oba navržené predikční postupy jsou vhodné k realizaci stanovených cílů, tj.

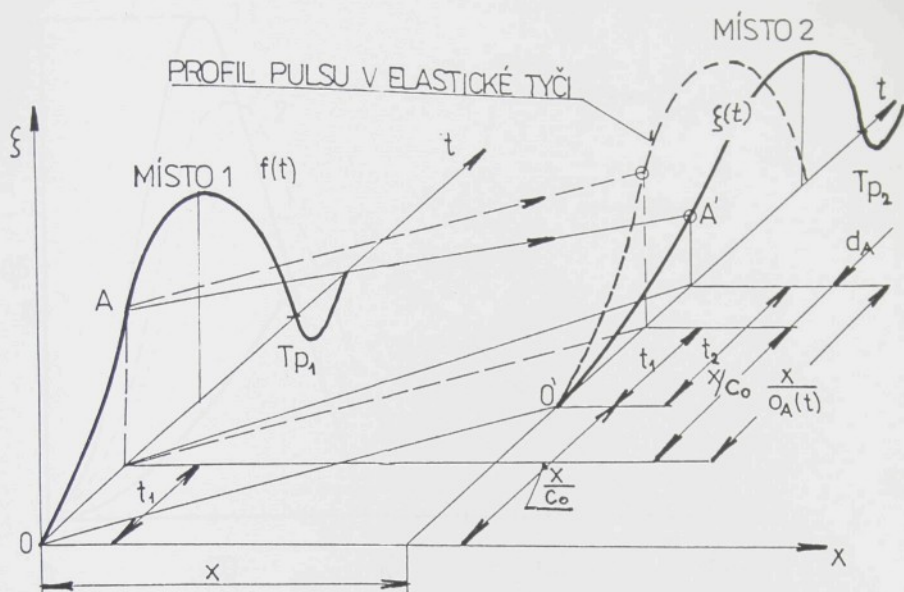
- potvrzují korektnost identifikačních postupů tak, jak je uvádí metoda osamělého afinity pulsu,
- v rámci užívané metody registrace poměrné deformace pomocí tenzometrů a obrazovky osciloskopu umožňují s vyhovující přesností přenášet časový průběh měřené mechanické veličiny

do požadovaného místa na tyči.

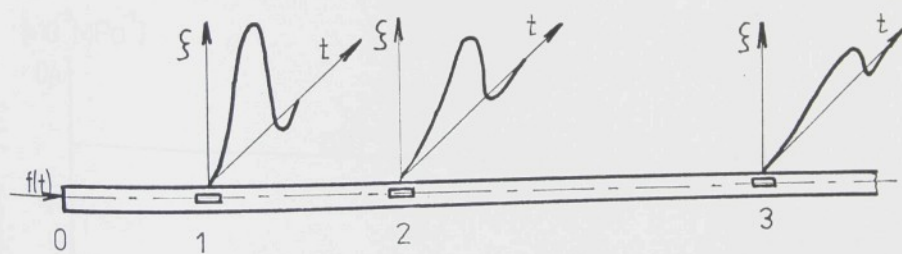
2. Z hlediska přesnosti predikce uvedenými postupy je vhodné mít k dispozici dynamické viskoelastické vlastnosti materiálu identifikované z časových profilů mechanické veličiny, jejíž změna byla sledována a měřena na dostatečné měřicí bázi.

3. Z předchozího závěru plyne, že predikce bude obecně limitována určitou oblastí změny rychlosti deformace ke které dojde při změně tvaru časového profilu měřeného pulsu.

4. Pomocí uvedených matematických prostředků řídicích predikci je příznivějších výsledků dosaženo tehdy, když jsou předvídaný ty stavy historie deformování viskoelastického materiálu, které materiál během svého zatížení již "poznal" a pomocí nichž byla předtím provedena jeho identifikace.



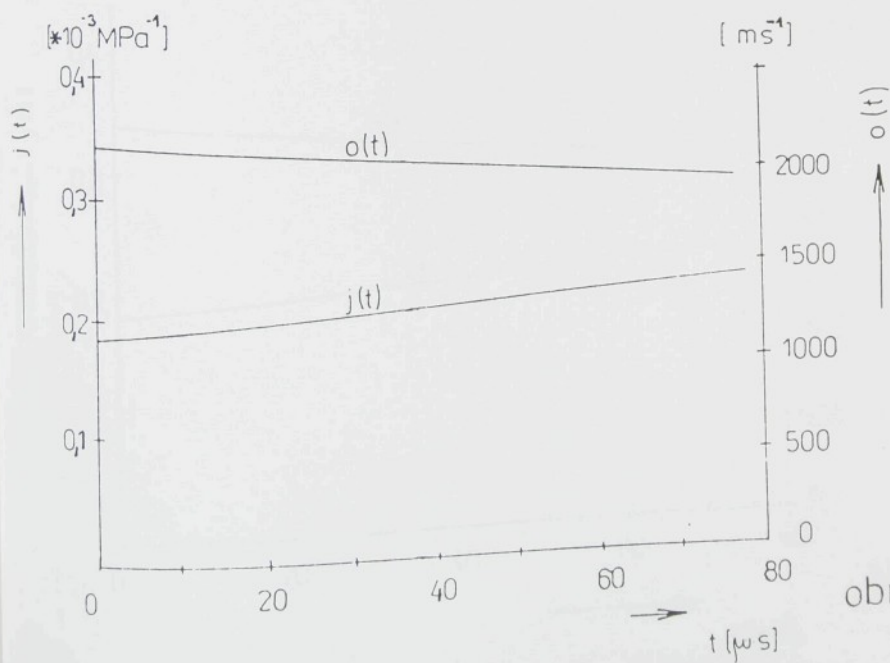
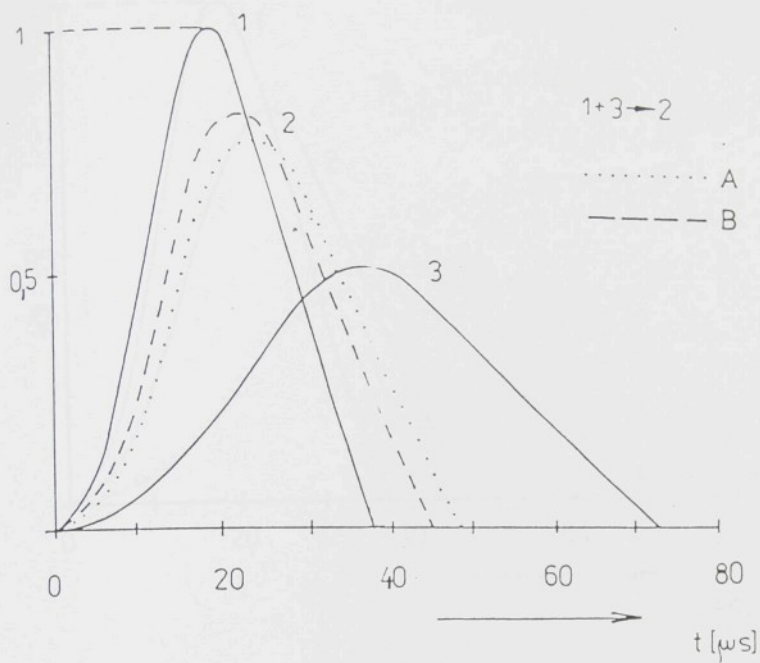
obr. 4.31



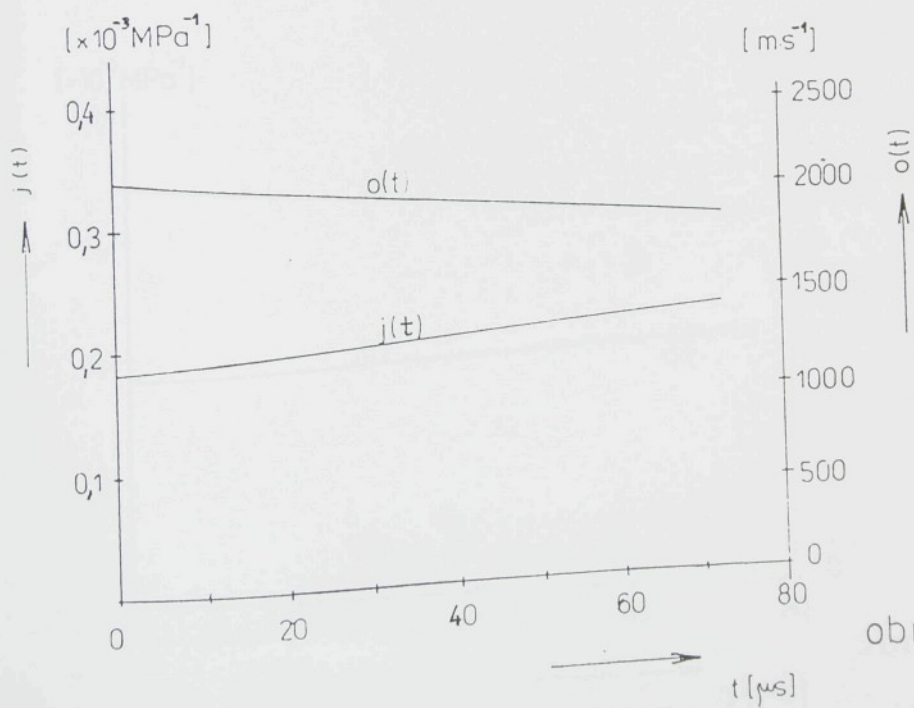
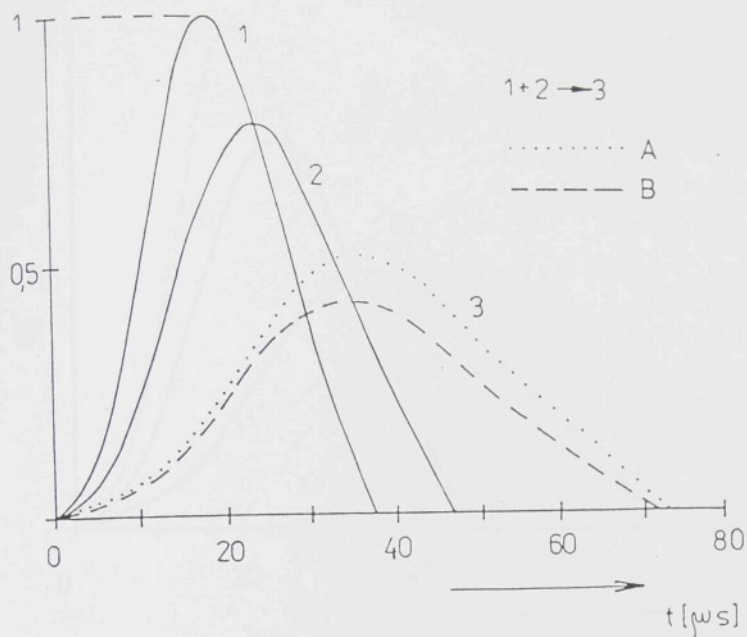
01	300 mm
12	297 mm
23	798 mm
13	1095 mm

MATERIÁL: TYČ PMMA $\phi 10$ mm

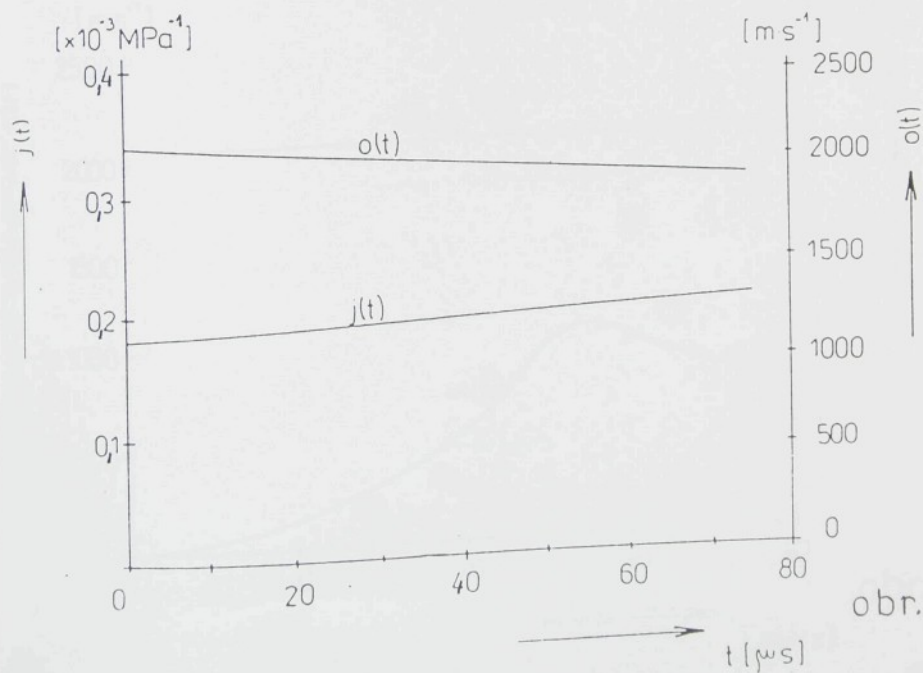
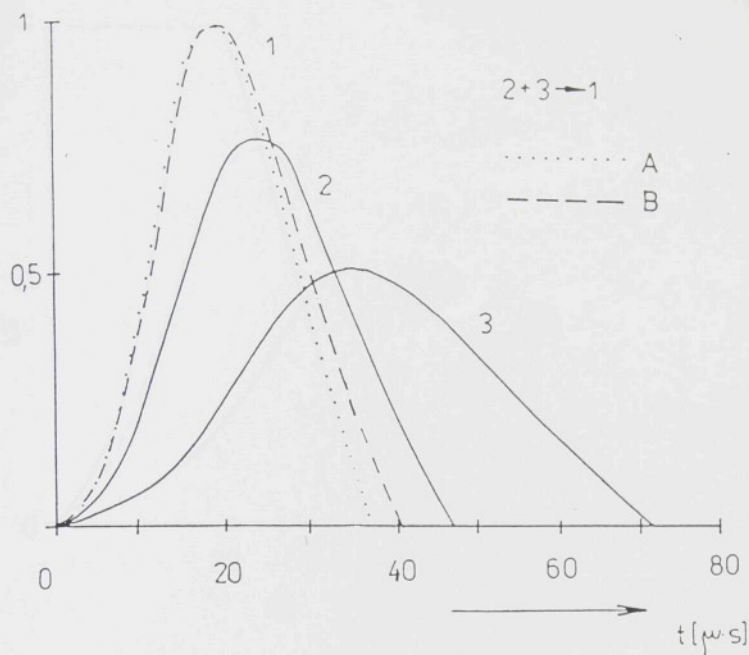
obr. 4.32



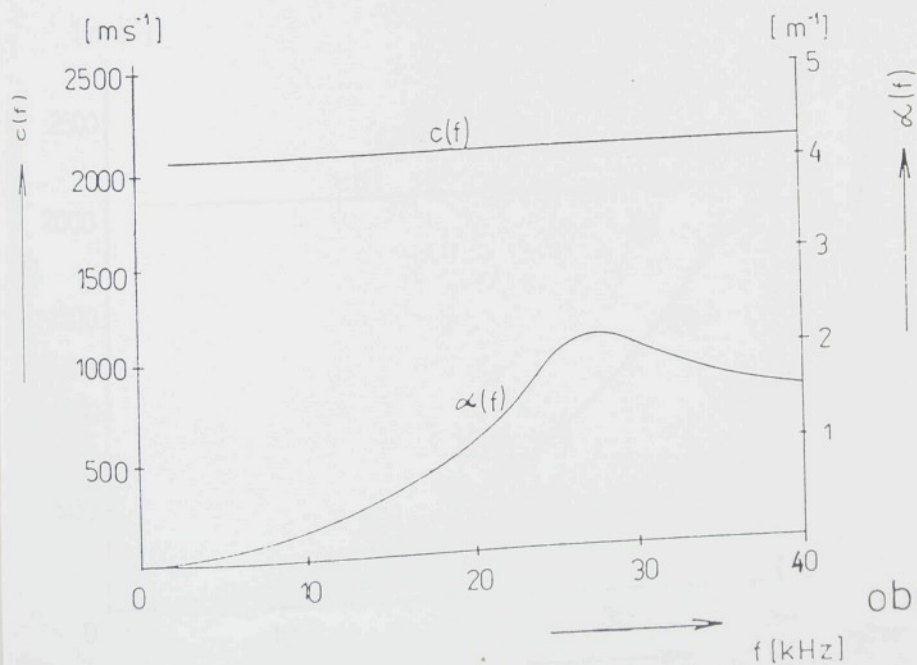
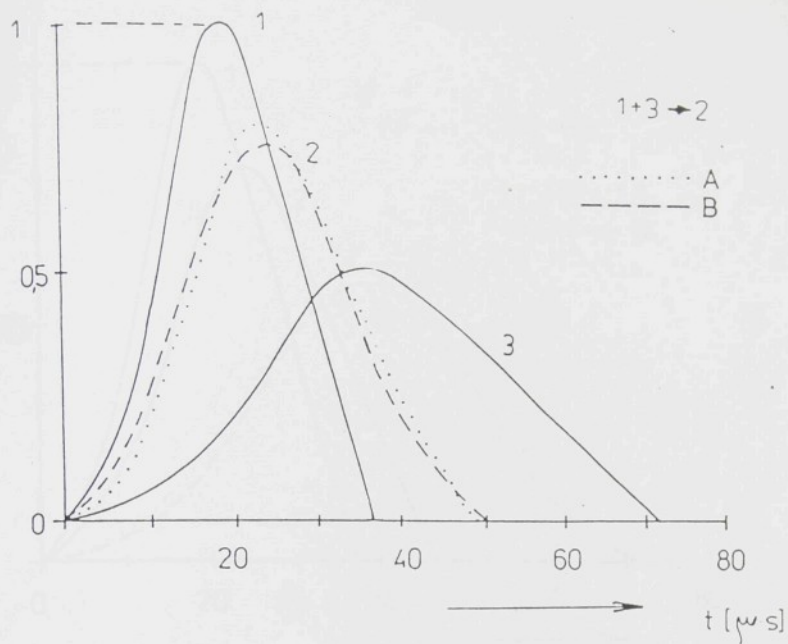
obr. 4.33a



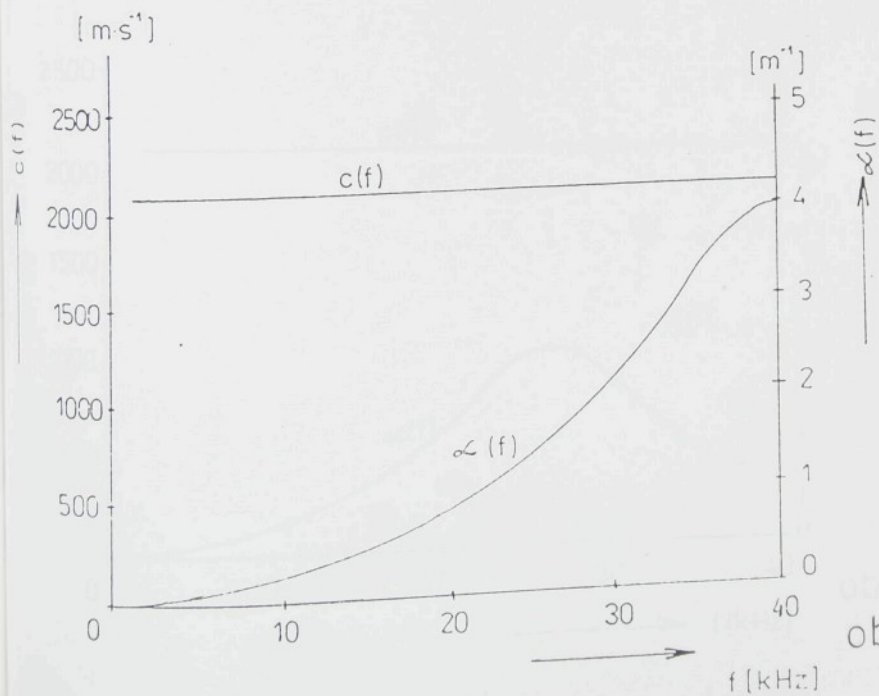
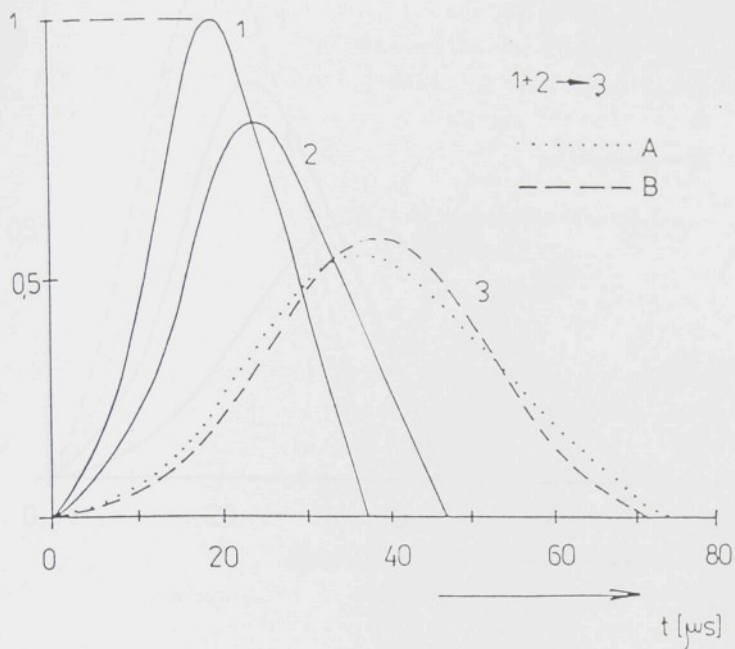
obr. 4.33b



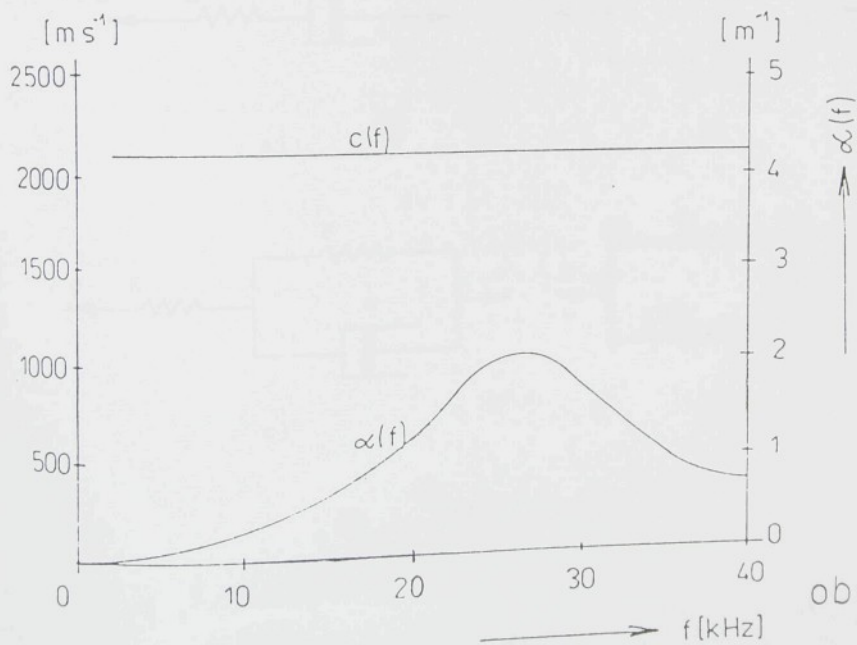
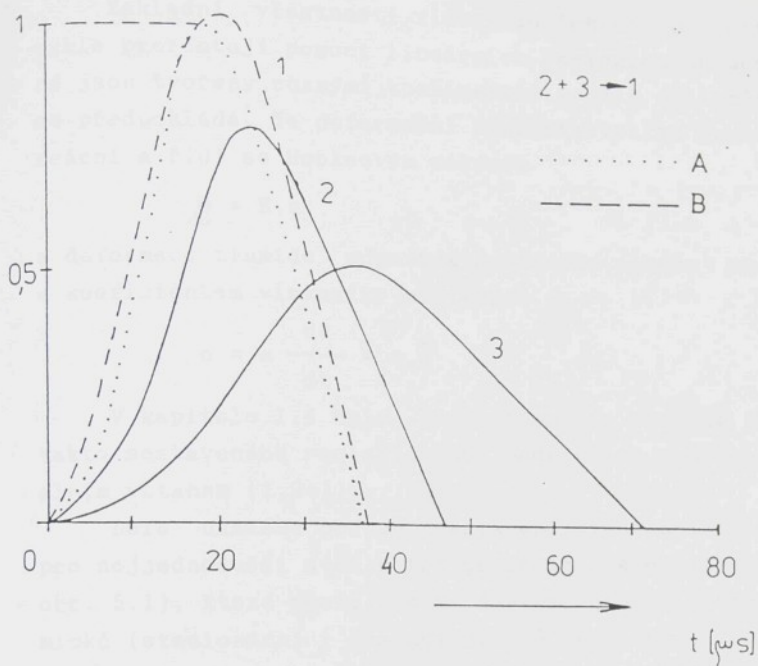
obr. 4.33c



obr. 4.34a



obr. 4.34b



obr. 4.34c

5. Dynamická odezva reologických modelů hmoty

Základní vlastnosti viskoelastických materiálů se obvykle prezentují pomocí lineárních reologických modelů, které jsou tvořeny různými kombinacemi pružin a tlumičů. Přitom se předpokládá, že deformační charakteristika pružiny je lineární a řídí se Hookeovým zákonem

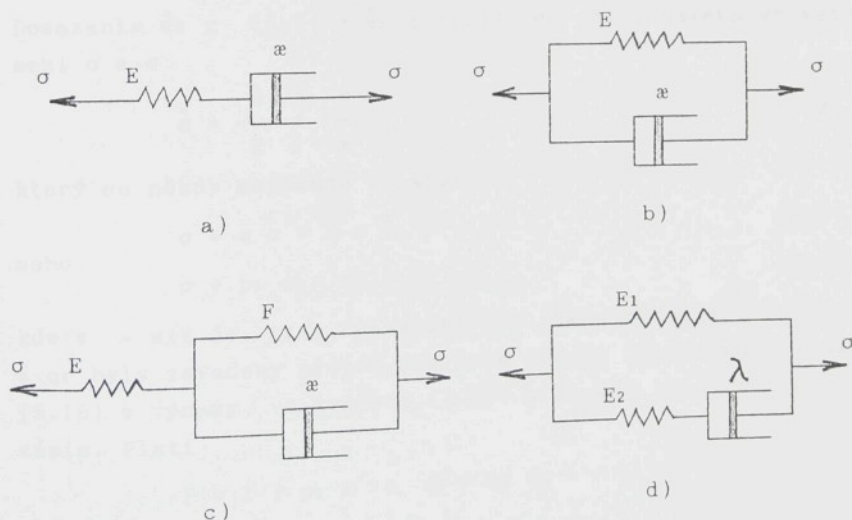
$$\sigma = E \epsilon \quad (5.1)$$

a deformace tlumiče odpovídá Newtonovu zákonu pro kapalinu s koeficientem viskozity α , tedy

$$\sigma = \alpha \frac{d\epsilon}{dt} = \alpha \dot{\epsilon} \quad (5.2)$$

V kapitole 1.4 bylo předesláno, že chování jakéhokoliv takto sestaveného reologického modelu lze popsat diferenciálním vztahem (1.24).

Dále ukážeme postup sestavení diferenciálních rovnic pro nejjednodušší dvou a tří-parametrické modely hmoty (viz. obr. 5.1), které použijeme k diskusi jejich odezvy na dynamické (stacionární i nestacionární) zatížení.



obr. 5.1

5.1. Dvouparametrické modely materiálu

Základními reologickými prvky se dvěma parametry jsou Maxwellův (obr. 5.1a) a Kelvinův (obr. 5.1b) model.

5.1.1. Maxwellův model

Jeho struktura je tvořena sériovým spojením pružiny (S - spring) a tlumiče (D - dashpot). Zatížíme-li tento model silou vztaženou na jednotku plochy, tedy napětím σ , pak z podmínek rovnováhy jednotlivých prvků plyne $\sigma = \sigma_s = \sigma_D$ a ze vztahů (5.1) a (5.2)

$$\sigma = E \epsilon_s, \quad (5.3)$$

$$\sigma = \alpha \dot{\epsilon}_D. \quad (5.4)$$

Přitom je zřejmé, že celková deformace Maxwellova modelu je tvořena deformací pružiny ϵ_s a tlumiče ϵ_D , tedy

$$\epsilon = \epsilon_s + \epsilon_D. \quad (5.5)$$

Derivujeme-li (5.3) a (5.5) podle času dostaneme

$$\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon}_s, \quad (5.6)$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_s + \dot{\epsilon}_D. \quad (5.7)$$

Dosazením $\dot{\epsilon}_s$ z (5.6) a $\dot{\epsilon}_D$ z (5.4) do (5.7) nalezneme vztah mezi σ a $\dot{\epsilon}$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\alpha}, \quad (5.8)$$

který se někdy zapisuje ve tvaru

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = E \tau \dot{\epsilon} \quad (5.9)$$

nebo

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_1 \dot{\epsilon}, \quad (5.10)$$

kde $\tau = \alpha/E$ je tzv. relaxační čas Maxwellova modelu a p_1 a q_1 byly zavedeny proto, aby byla zřejmá konzistence vztahu (5.10) s výrazy ve tvarech (1.24) a (1.25) a zestručnil se zápis. Platí

$$p = 1 + p_1 D \quad \text{a} \quad Q = q_1 D.$$

5.1.2. Kelvinův model

Byl vytvořen paralelním spojením pružiny a tlumiče. Zatížíme-li takovou soustavu, potom napětí v jednotlivých větvích budou

$$\sigma_s = E \epsilon_s , \quad (5.11)$$

$$\sigma_D = \alpha \dot{\epsilon}_D , \quad (5.12)$$

přičemž musí platit

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_D , \quad (5.13)$$

$$\epsilon = \epsilon_s = \epsilon_D . \quad (5.14)$$

Po dosazení (5.11) a (5.12) do (5.13) dostaneme

$$\sigma = E \epsilon + \alpha \dot{\epsilon} , \quad (5.15)$$

který lze zapsat pomocí zavedeného τ ve tvaru

$$\sigma = E \epsilon + E \tau \dot{\epsilon} , \quad (5.16)$$

nebo
$$\sigma = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon} \quad (5.17)$$

pro ověření konzistence se zápisy (1.24) a (1.25). Platí

$$P = 1 \quad \text{a} \quad Q = q_0 + q_1 D .$$

5.2. Tříparametrické modely materiálu

Na obr. 5.1c a 5.1d jsou příklady nejčastějších tříparametrických lineárních modelů. V prvním případě se jedná o Poyntingův-Thompsonův model standardního tělesa, v druhém o tzv. Zenerův model.

5.2.1. Poyntingův-Thompsonův model

Protože se tento model skládá ze sériového spojení Hookeovské pružiny (S) a Kelvinovy skupiny (K), využijeme pro sestavení diferenciální rovnice tohoto modelu již známých vztahů. Předpokládáme-li, podobně jako v předchozích případech, zatížení σ působící na tuto soustavu zřejmě platí

$$\sigma = \sigma_s = \sigma_K , \quad (5.18)$$

$$\epsilon = \epsilon_s + \epsilon_K , \quad (5.19)$$

$$\text{kde} \quad \sigma_s = E \epsilon_s , \quad (5.20)$$

$$\sigma_K = F \epsilon_K + \alpha \dot{\epsilon}_K . \quad (5.21)$$

Dále vyjádříme

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E} = \frac{F}{E} \epsilon_k + \frac{\alpha}{E} \dot{\epsilon}_k, \quad (5.22)$$

$$\epsilon_k = \epsilon - \epsilon_s = \epsilon - \frac{\sigma}{E}, \quad (5.23)$$

$$\dot{\epsilon}_k = \dot{\epsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E}, \quad (5.24)$$

Dosazením (5.20), (5.23) a (5.24) do (5.22) a úpravou dostáváme diferenciální rovnici

$$\left(1 + \frac{F}{E}\right) \sigma + \frac{\alpha}{E} \dot{\sigma} = F \epsilon + \alpha \dot{\epsilon}, \quad (5.25)$$

nebo se zavedenou relaxační dobou $\tau = \alpha/F$ výraz

$$\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{F}\right) \sigma + \frac{\tau}{E} \dot{\sigma} = \epsilon + \tau \dot{\epsilon}, \quad (5.26)$$

$$\text{resp.} \quad p_0 \sigma + p_1 \dot{\sigma} = \epsilon + q_1 \dot{\epsilon}, \quad (5.27)$$

$$\text{nebo} \quad P \sigma = Q \epsilon,$$

$$\text{kde} \quad P = p_0 + p_1 D \quad \text{a} \quad Q = 1 + q_1 D.$$

5.2.2. Zenerův model

Tato soustava je vytvořena paralelním spojením Hookeovské pružiny (S) a Maxwellovy skupiny (M). Po zatížení napětím σ lze pro složky napětí a deformací v jednotlivých větích psát

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_M, \quad \sigma_M = \sigma_{MS} = \sigma_{MD}, \quad (5.28, 5.29)$$

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_s + \dot{\sigma}_M, \quad \dot{\sigma}_M = \dot{\sigma}_{MS} = \dot{\sigma}_{MD}, \quad (5.30, 5.31)$$

$$\epsilon = \epsilon_s = \epsilon_M = \epsilon_{MS} + \epsilon_{MD}, \quad (5.32)$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_s = \dot{\epsilon}_M = \dot{\epsilon}_{MS} + \dot{\epsilon}_{MD}, \quad (5.33)$$

$$\sigma_s = E_1 \epsilon_s = E_1 \epsilon, \quad (5.34)$$

$$\dot{\sigma}_s = E_1 \dot{\epsilon}, \quad (5.35)$$

$$\sigma_{MS} = E_2 \epsilon_{MS} = \sigma_M, \quad \dot{\epsilon}_{MS} = \frac{\dot{\sigma}_M}{E_2}, \quad (5.36, 5.37)$$

$$\sigma_{MD} = \lambda \dot{\epsilon}_{MD} = \sigma_M, \quad \dot{\epsilon}_{MD} = \frac{\sigma_M}{\lambda}, \quad (5.38, 5.39)$$

Dosazením (5.37) a (5.39) do (5.33) vyjádříme

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}_M}{E} + \frac{\sigma_M}{\lambda}. \quad (5.40)$$

Po dosazení (5.28) a (5.30) do předchozího vztahu, užitím (5.34) a (5.35) a po nezbytných úpravách dostaneme

$$\sigma + \frac{\lambda}{E_2} \dot{\sigma} = E_1 \epsilon + \lambda \frac{E_1 + E_2}{E_2} \dot{\epsilon}, \quad (5.41)$$

nebo zavedením relaxační doby $\tau = \lambda/E_2$

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = E_1 \epsilon + \tau (E_1 + E_2) \dot{\epsilon}, \quad (5.42)$$

$$\text{resp.} \quad \sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon}, \quad (5.43)$$

$$\text{nebo} \quad P \sigma = Q \epsilon,$$

$$\text{kde} \quad P = 1 + p_1 D \quad \text{a} \quad Q = q_0 + q_1 D.$$

Poznámka: Porovnáme-li diferenciální rovnice (5.27) a (5.43) shledáváme, že se jedná o rovnice stejného typu, avšak s různými koeficienty p_k , q_k u jednotlivých jejích členů. Znamená to, že oba dva tříparametrické modely jsou z hlediska svých vlastností, čili odezvy na přiložené zatížení zcela ekvivalentní. Je snadné se přesvědčit, že mezi parametry jednoho a druhého modelu platí jednoznačně následující převodní vztahy /109/:

$$E_1 = \frac{E F}{E + F}, \quad E_2 = \frac{E^2}{E + F}, \quad (5.44, 5.45)$$

$$\lambda = \alpha \left[\frac{E}{E + F} \right]^2, \quad (5.46)$$

$$E = E_1 + E_2, \quad F = \frac{E_1}{E_2} (E_1 + E_2), \quad (5.47, 5.48)$$

$$\alpha = \lambda \left[\frac{E_1 + E_2}{E_2} \right]^2, \quad (5.49)$$

Úkol 1: Dokažte, že pro tříparametrický model na obr. 5.2 platí diferenciální rovnice ve tvaru

$$\sigma + \frac{\lambda}{E} \dot{\sigma} = (\lambda + \alpha) \dot{\epsilon} + \frac{\lambda}{E} \alpha \ddot{\epsilon}, \quad (5.50)$$

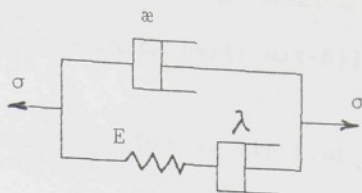
$$\text{nebo} \quad \sigma + \tau \dot{\sigma} = E (\tau + \tau') \dot{\epsilon} + E \tau \tau' \ddot{\epsilon}, \quad (5.51)$$

$$\text{kde} \quad \tau = \lambda/E, \quad \tau' = \alpha/E,$$

$$\text{resp.} \quad \sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \ddot{\epsilon},$$

$$\text{nebo} \quad P \sigma = Q \epsilon$$

$$\text{a} \quad P = 1 + p_1 D, \quad Q = q_1 D + q_2 D.$$



obr. 5.2

5.3. Frekvenční vlastnosti reologických modelů

Komplexní veličiny teorie lineární viskoelasticity zavedené v kap. 1.2 určují odezvu viskoelastického materiálu na harmonické zatížení dané amplitudy a příslušné frekvence. Z matematických důvodů je výhodné zapsat působící harmonické zatěžování v komplexní formě, tj.

$$\sigma = \sigma_0 \exp(i\omega t). \quad (5.52)$$

Odezva lineárního viskoelastického prostředí na takové zatížení, čili deformace musí být opět harmonická a téže frekvence. Její vektor se však bude zpožďovat o úhel ztrát δ , což vyjádříme ve formě

$$\epsilon = \epsilon_0 \exp[i(\omega t - \delta)]. \quad (5.53)$$

Budeme-li nyní dosazovat tyto režimy stacionárního dynamického zatížení a odezvy do příslušných diferenciálních rovnic řídících chování reologických modelů, získáme po nezbytných matematických úpravách, vyžadujících základní znalosti manipulace s komplexními čísly, závislosti složek komplexních veličin na parametrech příslušného reologického modelu a frekvenci ω . Rozbor těchto závislostí ve frekvenčních pásmech a pro dané parametry reologických modelů je nazýván frekvenční analýzou reologických modelů.

V následujícím textu podáme odvození frekvenčních závislostí komplexního modulu pružnosti pro reologické modely, jejichž diferenciální rovnice byly sestaveny v předchozích kapitolách. K tomuto účelu nejprve vyjádříme potřebné časové derivace vztahů (5.52) a (5.53). Platí

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = i\omega \sigma_0 \exp(i\omega t), \quad (5.54)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} = i\omega \epsilon_0 \exp[i(\omega t - \delta)] , \quad (5.55)$$

$$\ddot{\epsilon} = \frac{d^2\epsilon}{dt^2} = -\omega^2 \epsilon_0 \exp[i(\omega t - \delta)] . \quad (5.56)$$

Komplexní modul pro Maxwellův model materiálu

Dosazením vztahů (5.52), (5.54) a (5.55) do (5.10) po úpravě dostaneme

$$E(i\omega) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \exp(i\delta) = E_1(\omega) + iE_2(\omega) , \quad (5.57)$$

kde

$$E_1(\omega) = \frac{p_1 q_2 \omega^2}{1 + p_1^2 \omega^2} , \quad E_2(\omega) = \frac{q_1 \omega}{1 + p_1^2 \omega^2} . \quad (5.58, 5.59)$$

Komplexní modul pro Kelvinův model materiálu

Dosazením vztahů (5.52), (5.53) a (5.55) do (5.17) po úpravě do tvaru (5.57) dostaneme pro složky $E(i\omega)$ vztahy

$$E_1(\omega) = q_0 , \quad E_2(\omega) = q_1 . \quad (5.60, 5.61)$$

Komplexní modul pro Poyntingův-Thompsonův model materiálu

Obdobným postupem aplikovaným na vztah (5.27) obdržíme

$$E_1(\omega) = \frac{p_0 + p_1 q_1 \omega^2}{p_0 + p_1^2 \omega^2} , \quad E_2(\omega) = \frac{(p_0 q_1 - p_1) \omega}{p_0 + p_1^2 \omega^2} . \quad (5.62, 5.63)$$

Komplexní modul pro Zenerův model materiálu

Užitím vztahu (5.43) se snadno přesvědčíme o platnosti vztahů pro složky komplexního modulu pružnosti

$$E_1(\omega) = \frac{q_0 + p_1 q_1 \omega^2}{1 + p_1^2 \omega^2} , \quad E_2(\omega) = \frac{(q_1 - p_1 q_0) \omega}{1 + p_1^2 \omega^2} . \quad (5.64, 5.65)$$

Poznámka: Porovnáním vztahů (5.62), (5.63) se vztahy (5.64) a (5.65) lze opět konstatovat, obdobně jako v předchozí poznámce, že poslední dva reologické modely jsou identické z hlediska frekvenční odezvy.

Úkol 2: Dokažte, že pro tříparametrický model materiálu na obr. 5.2 platí pro složky komplexního modulu pružnosti vztahy

$$E_1(\omega) = \frac{(p_1 q_1 - q_2) \omega^2}{1 + p_1^2 \omega^2}, \quad E_2(\omega) = \frac{(q_1 + p_1 q_2 \omega^2)}{1 + p_1^2 \omega^2}. \quad (5.66, 5.67)$$

Závěrem poznamenejme, že význam koeficientů p_1, q_1 v předchozích vztazích je dán specificky pro každý reologický model zvlášť - viz. tab. 5.1.

Tabulka 5.1

model	koeficienty diferenciálních rovnic				
	p_0	p_1	q_0	q_1	q_2
Maxwell	0	$\frac{\alpha}{E}$	0	α	0
Kelvin	1	0	E	α	0
Poynt.-Thomp.	$\frac{1}{E} + \frac{1}{F}$	$\frac{\alpha}{EF}$	1	$\frac{\alpha}{F}$	0
Zener	1	$\frac{\lambda}{E_2}$	E_1	$\frac{(E_1 + E_2)}{E_2}$	0
obr. 5.2	1	$\frac{\lambda}{E}$	0	$\lambda + \alpha$	$\frac{\lambda \alpha}{E}$

Komplexní poddajnost

V kapitole 1.2 byla spolu s komplexním modulem pružnosti definována komplexní poddajnost $J(i\omega)$ vztahem (1.13). Využijeme-li vztah (1.8), zřejmě platí

$$\begin{aligned}
 J(i\omega) &= \frac{1}{E(i\omega)} = \frac{1}{E_1(\omega) + iE_2(\omega)} = \frac{E_1(\omega)}{E_1^2(\omega) + E_2^2(\omega)} - \frac{i E_2(\omega)}{E_1^2(\omega) + E_2^2(\omega)} = \\
 &= J_1(\omega) - i J_2(\omega) .
 \end{aligned} \quad (5.68)$$

Takže

$$J_1(\omega) = \frac{E_1(\omega)}{E_1^2(\omega) + E_2^2(\omega)}, \quad J_2(\omega) = \frac{E_2(\omega)}{E_1^2(\omega) + E_2^2(\omega)}. \quad (5.69)$$

Předchozí výrazy poskytují možnost stanovení složek komplexní poddajnosti pomocí složek komplexního modulu pružnosti.

5.4. Energetická bilance v harmonickém cyklu zatížení lineárně viskoelastického prostředí

Pro snadnější pochopení energetických změn probíhajících v lineárně viskoelastických prostředích vlivem zatěžování uvažme element osově zatížený tenké dlouhé prizmatické tyče o průřezu A a délce dx , na jehož koncích působí vnitřní síla $N = \sigma A$. Protože vnější síla F působící na jednom konci tyče je obecně funkcí času $F = F(t)$, pak za časový okamžik dt deformace elementu $\epsilon = du/dx$ vzroste o hodnotu $\dot{\epsilon} dt$ a kinetická energie elementu (vlastně částice elementární hmoty tyče), který se v tomto okamžiku pohybuje rychlostí v , se změní o hodnotu $d(0.5v^2 dm)$. Pro současně deformující se a pohybující se element musí být splněna rovnice energetické bilance

$$A dx dw = \sigma A dx \dot{\epsilon} dt + d(0.5 \rho v^2 A dx), \quad (5.70)$$

kde dw označuje přírůstek práce vnějších sil vztažený na jednotku objemu tyče, tzv. hustotu energie. Jestliže zatížení $F(t)$ spojitě roste v čase, potom i napětí a deformace spojitě rostou v čase a předchozí vztah lze po integraci v čase upravit na tvar

$$w = w_P + w_K, \quad (5.71)$$

$$\text{kde } w_P = \int_0^t \sigma \dot{\epsilon} dt \text{ je hustota potenciální energie} \quad (5.72)$$

$$\text{a } w_K = 0.5 \rho v^2 \text{ je hustota kinetické energie.} \quad (5.73)$$

Doplníme tyto úvahy konkrétní představou o tom, jaká bude energetická bilance při stacionárním harmonickém zatížení lineárně viskoelastického tělesa.

Předpokládejme časový průběh zatěžování ve tvaru

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cos \omega t. \quad (5.73)$$

Odezva deformace na kosinový průběh zatížení pak bude

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \cos(\omega t - \delta), \quad (5.74)$$

$$\text{čili } \dot{\epsilon}(t) = -\omega \epsilon_0 \sin(\omega t - \delta). \quad (5.75)$$

Časovou funkci měnící se hustoty potenciální energie získáme ze vztahu (5.72)

$$w_P(t) = -\omega \sigma_0 \epsilon_0 \int_0^t \cos \omega \tau \sin(\omega \tau - \delta) d\tau = \quad (5.76)$$

$$= \sigma_0 \epsilon_0 \left[-\frac{1}{2} \sin \delta (\omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t) - \frac{1}{2} \cos \delta \sin^2 \omega t \right]. \quad (5.77)$$

Vzhledem k platnosti vztahů (1.9) a (1.10) lze předchozí vztah upravit do tvaru

$$w_P(t) = \frac{\epsilon_0^2}{2} E_2(\omega) (\omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t) - \frac{\epsilon_0^2}{2} E_1(\omega) \sin^2 \omega t \quad (5.78)$$

nebo stručněji

$$w_P(t) = w_{PD}(t) + w_{PA}(t). \quad (5.79)$$

Z posledních dvou výrazů je zřejmé, že hustota potenciální energie se skládá ze dvou částí. První její část je úměrná imaginární složce komplexního modulu pružnosti $E_2(\omega)$ a odráží proces disipace energie, tzn., že část práce konané vnějšími silami se nevratně přetváří v teplo, zatímco druhá část je úměrná reálné složce komplexního modulu pružnosti $E_1(\omega)$ a vypovídá o procesu akumulace energie, tak jako u elastického tělesa.

Z grafické interpretace průběhu funkce $w_{PA}(t)/\sigma_0 \epsilon_0$ na obr. 5.3 je patrné, že akumulace energie probíhá během první a třetí čtvrtiny cyklu zatížení, aby se vzápětí, tj. v druhé a čtvrté čtvrtině cyklu opět uvolnila. K disipaci energie,

jak ukazuje závislost $w_{PD}(t)/\sigma_0 \epsilon_0$, dochází průběžně během celého cyklu zatížení.

Časový průběh hustoty kinetické energie získáme pomocí vztahu (5.73). Vzhledem k tomu, že pro rychlost částice při dané frekvenci ω a deformaci ϵ platí

$$v(t) = -c(\omega) \dot{\epsilon}(t), \quad (5.80)$$

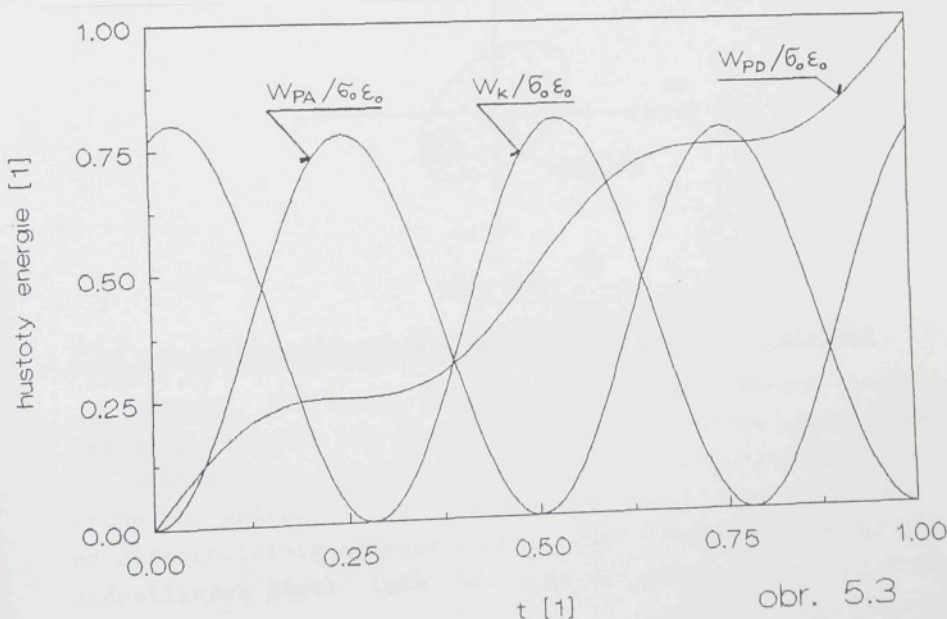
kde $c(\omega)$ je rychlost šíření harmonické vlny o frekvenci ω , obvykle označovaná jako fázová rychlost. Ta je však obsažena ve vztahu (4.23) odkud plyne

$$\rho c^2(\omega) = |E(\omega)| \cos^{-2} \frac{\delta}{2} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \cos^{-2} \frac{\delta}{2}. \quad (5.81)$$

Tedy výraz (5.73) lze upravit na tvar

$$w_K(t) = \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon_0 \cos^2(\omega t - \delta) \cos^{-2} \frac{\delta}{2}. \quad (5.82)$$

Charakter časové změny kinetické energie během cyklu zatížení je graficky znázorněn v obr. 5.3 funkcí $w_K(t)/\sigma_0 \epsilon_0$. Je patrné, že tato závislost je fázově zpožděna za zatížením $\sigma(t)$, což je logickým důsledkem existence úhlu ztrát δ a tedy opožděné reakce viskoelastického prostředí.



Disipovaná energie během jednoho cyklu zatížení

Množství hustoty disipované energie v cyklu zatěžování získáme snadno tím, že uvažíme ve vztahu (5.78) dobu trvání periody harmonického cyklu $t = T = 2\pi/\omega$. Platí

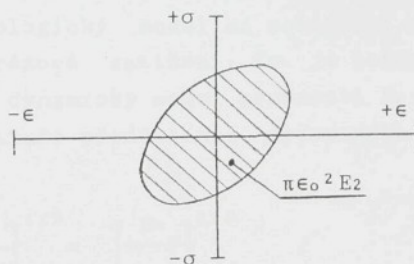
$$W_P\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = W_{PD}\left(\frac{2\pi}{\omega}, E_2\right) = \pi \epsilon_0^2 E_2. \quad (5.82)$$

Tato hodnota energie představuje plochu uzavřenou elipsou v pracovním diagramu σ - ϵ , který je schematicky znázorněn na obr. 5.4. Poznamenejme, že vztahy (5.73) a (5.74) jsou parametrickými rovnicemi elipsy. Eliminací času dostaneme

$$\left[\frac{\sigma}{\sigma_0}\right]^2 + \left[\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right]^2 = \sin^2 \delta + 2 \frac{\sigma}{\sigma_0} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \cos \delta. \quad (5.83)$$

Charakterizovat viskoelastické prostředí z hlediska jeho disipačních schopností je možné dále pomocí tzv. disipační funkce D , která je dána součinem $W_{PD}(2\pi/\omega, E_2)$ a počtu cyklů za jednotku času f (Hz), tedy

$$D = W_{PD}\left(\frac{2\pi}{\omega}, E_2\right) f = W_{PD}\left(\frac{2\pi}{\omega}, E_2\right) \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\epsilon_0^2}{2} E_2 \omega. \quad (5.84)$$



obr. 5.4

5.5. Odezva reologických modelů hmoty na rázová zatížení

Obecně je tento problém velice komplikované povahy. Základní poznatky lze získat z představy, která předpokládá na jednom konci rázem zatíženou tenkou polonekonečnou tyč kruhového průřezu A , jejíž mechanické vlastnosti jsou popsány diferenciálním vztahem (1.24). Ráz vyvolá podélné posuvy jednotlivých částí tyče, tj. vlnu deformace, která se bude

šířit podél tyče. Rovnice rovnováhy elementu tyče je dána výrazem (4.7), deformace elementu vztahem (4.8). Derivujeme-li (1.24) a (4.8) podle polohové souřadnice elementu x dostaneme

$$\rho \sum_o^m p_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \sum_o^n q_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{\partial \epsilon}{\partial x}, \quad (5.84)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.85)$$

Dosazením (4.7) a (5.85) do (5.84) pak

$$\rho \sum_o^m p_k \frac{\partial^{k+2} u}{\partial t^{k+2}} = \sum_o^n q_k \frac{\partial^{k+2} u}{\partial x^2 \partial t^k}. \quad (5.86)$$

Tím jsme získali parciální diferenciální rovnici, která popisuje posuv elementů tyče v závislosti na jejich poloze x , čase t a parametrech reologického modelu p_k, q_k . Poznamenejme, že ρ je měrná hmotnost materiálu tyče. Fyzikálně jsou však možná jen taková řešení této diferenciální rovnice, která poskytují konečné rychlosti šíření rázové vlny. Taková řešení jsou označována jako vlnová řešení. Lze ukázat /123/, že tomu odpovídají všechny případy, pro které platí $m = n$ a kdy reologický model má schopnost okamžitě reagovat na přiložené rázové zatížení. To je tehdy, když u modelu existuje tzv. dynamický modul pružnosti E_D , tj. když model má ve své struktuře předřazenou jednu nebo více pružin. Potom platí

$$c_0 = \left[\frac{E_D}{\rho} \right]^{1/2} = \left[\frac{p_n}{\rho q_n} \right]^{1/2} \quad (5.87)$$

Z uvedených modelů v této kapitole těmto požadavkům vyhovují Maxwellův, Poyntingův-Thompsonův a Zenerův model viskoelastického prostředí. Tyto modely materiálu lze užít ke studiu šíření rázů a jevů s tím spjatých, např. dynamiky porušení atd. /109,110/, i když jsou to modely vcelku jednoduché a primitivní (Maxwellův model).

Užití více komplikovaných reologických modelů by snad mohlo přinést přesnější popis rázových jevů v tělesech, ale

ukazuje se, že to není nejvhodnější cesta k úspěchu. Důvodem jsou matematické potíže při teoretickém řešení i jednoduchých problémů nestacionární viskoelastivity a výsledky nemusí být adekvátní vynaložené pracnosti, neboť posléze vystane problém identifikace parametrů použitého modelu. K tomu je obvykle nutné konstruovat numerické optimalizační postupy a navrhnout vhodný experimentální program, jehož podstata by spočívala v měření fyzikálních veličin při rázech, obdobně jak to činí v kapitole 4 uvedená metoda osamělého afinního pulsu - MOAP.

Naladění parametrů reologických modelů je však možné provést jen pro určité frekvenční pásmo nebo ohraničený časový interval. Obecně totiž žádný reologický model není schopen popsat chování reálných materiálů v širokém pásmu frekvencí a časů - viz. kap. 5.3.

V rámci vyvinuté MOAP byl proveden odhad parametrů Maxwellova a Poyntingova-Thompsonova reologického modelu. Pomocí vztahů (5.44) až (5.46) pak lze získat parametry Zenerova modelu.

Výrazy (4.12) až (4.14) užívané v MOAP k vyhodnocení počátků reologických funkcí, viz. kap. 4.3.1, jsou polynomy druhého stupně, které se příliš neodlišují od přímek. Tuto skutečnost lze využít a odhadnout jednoduše parametry uvedených reologických modelů.

Parametry Maxwellova modelu

Pro napětí stálé v čase, viz. vztah (1.2) hledáme řešení diferenciální rovnice (5.8) ve tvaru (1.3), tj.

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\alpha} \right) = \sigma_0 j(t), \quad (5.88)$$

kde funkce poddajnosti $j(t)$ je přímka

$$j(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\alpha} = j_0 + \zeta(t). \quad (5.89)$$

Uvážíme-li, že kvadratický člen v (4.13) nemá v uvažovaném intervalu času, tj. době trvání rázového pulsu, významný vliv dostáváme

$$E = g_0 = \varrho c_0^2 = \frac{1}{j_0}, \quad (5.90)$$

$$\alpha = \frac{\varrho c_0}{2} \frac{\Delta x}{\ln \alpha_{\tau}}. \quad (5.91)$$

Parametry Poyntingova-Thompsonova modelu

Řešením (5.25) pro zatěžovací režim (1.2) dostaneme

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{F} (1 - \exp\{-\frac{F}{\alpha} t\}) \right] = \sigma_0 j(t), \quad (5.92)$$

kde funkce poddajnosti $j(t)$ má tvar

$$j(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{F} (1 - \exp\{-\frac{F}{\alpha} t\}) = j_0 + \varphi(t). \quad (5.93)$$

Protože tento model v limitě pro $F \rightarrow 0$ přejde v model Maxwellův, můžeme uvážit

$$E = g_0 = \varrho c_0^2 = \frac{1}{j_0}, \quad (5.94)$$

$$F \rightarrow 0, \text{ resp. } F \ll E, \quad (5.95)$$

$$\alpha = \frac{\varrho c_0}{2} \frac{\Delta x}{\ln \alpha_{\tau}}. \quad (5.96)$$

Význam jednotlivých symbolů v předchozích vztazích je shodný se zavedeným označením v kap. 4.3.1.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- /1/ Bugakov, I. I.: Polzučest' polymernych mat'erialov. Moskva, Nauka, 1973.
- /2/ Christensen, R. M.: Vvėdėnije v tėoriju vjazkouprugosti. Ruský překlad, Moskva, Mir, 1974.
- /3/ Rabotnov, J. N.: Elementy nasledstvėnnoj mekhaniky tvjordych tėl. Moskva, Nauka, 1973.
- /4/ Alfrey, T.: Non-homogeneous Stresses in Viscoelastic Media. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. II, 1944, s. 113-119.
- /5/ Gross, B.: On Creep and Relaxation. Journ. of Applied Physics, Vol. 18, 1947, February, s. 212-221.
- /6/ Gross, B.: Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity. Paris, Herman, 1953.
- /7/ Bland, D. R.: Teorija linėjnoj vjazkouprugosti. Ruský překlad, Moskva, Mir, 1965.
- /8/ Malmejster, A. K. - Tamuž, V. P. - Teters, G. A.: Soprotivlenije žostkich polymernych mat'erialov. 2. vyd. Riga, Zinatnė, 1972.
- /9/ Coleman, B. D. - Owen, D. R.: On the Thermodynamics of Materials with Memory. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 36, 1970, s. 245-269.
- /10/ Ržanicin, A. R.: Teorija polzučesti. Moskva, Izd. litėratury po stavitėlstvu, 1968.
- /11/ Vinogradov, G. V. - Malkin, A. J.: Reologija polymerov. Moskva, Izd. inostrannoj litėratury, 1960.
- /12/ Tricomi, F. G.: Intėgralnyje uravnėnija. Ruský překlad, Moskva, Nauka, 1966.
- /13/ Rabotnov, J. N.: Polzučest' elementov konstrukcij. Moskva, Nauka, 1966.
- /14/ Gelfand, I. M. - Šilov, G. E.: Obobščėnye funkciji i dėjstvija nad nimi. Moskva, Gosud. izd. fizikomatematičeskoj litėratury, 1959.
- /15/ Sobotka, Z.: Reologie hmot a konstukcí. 1.vyd., Praha, Academia, 1981.
- /16/ Ward, I. M.: Meckaničeskie svojstva tvjordych polymerov. Ruský překlad, Moskva, Chimija, 1975.

- /17/ Scott, E. J. - Findley, W. N.: Preliminary Consideration of Linear and Nonlinear Mechanical Models for Creep of Plastics. /Výzkumná zpráva/, Urbana, Department of Theoretical and Applied Mechanics University of Illinois, January, 1954.
- /18/ Lockett, F. J - Gurtin, M. E.: Frequency Response of Nonlinear Viscoelastic Solids. /Výzkumná zpráva/, Providence, R. I., Division of Applied Mathematics Brown University, March, 1964.
- /19/ Hsin-lin Yuan - Lianis, G.: Experimental Investigation of Wave Propagation in Nonlinear Viscoelastic Materials. /Výzkumná zpráva/, Lafayette, Indiana, Purdue University, March, 1971.
- /20/ Schapery, R. A.: On the Characterization of Nonlinear Viscoelastic Materials. Polymer Engineering and Science, Vol. 9, No. 4, 1969, s. 295-310.
- /21/ Ekelčik, V. S. - Rjabov, V. M.: Ob ispol'zovaniji odnogo klassa nasledstvennykh jadër v linëjnykh uravnenijach vjaskouprugosti. Mechanika kompozitnykh materialov, No. 3, 1981, s. 393-404.
- /22/ Hunter, S. C.: Viscoelastic Waves. In. Progress in Solid Mechanics, Vol. 1, edit Snedon I. N. and Hill R., Amsterdam 1960.
- /23/ Plander, I. - Tomáš, J.: Dynamické vlastnosti viskoelastických materiálov a ich meranie. 1. vyd., Bratislava, SAV, 1964.
- /24/ Eirich, F. R.: Rheology - Theory and Application. Vol. 1 and 2, Academic Press Incl., New York, 1956.
- /25/ Kolsky, H.: Recent Experimental Studies of the Mechanical Response of Inelastic Solids to Rapidly Changing Stresses. In. Inelastic Behaviour of Solids, edit. Kanninen M. F., Adler W. F., Rosenfield A. R., Jatfee, McGraw-Hill Book Company, 1970.
- /26/ Kolsky, H. - Shi, Y. Y.: The Validity of Model Representation for Linear Viscoelastic Behaviour. /Výzkumná zpráva/, Providence, R. I., Division of Engineering Brown University, January, 1958.

- /27/ Distefano, M. J. - Pister, K. S.: In the Identification Problem for Thermorheologically Simple Materials. *Acta Mechanica* 13, 1972.
- /28/ Koltunov, M. A.: Poľzučest' i relaxacija. Moskva, Vysša-ja škola, 1976.
- /29/ Soldatov, M. M.: Nėlinėjnaja teorija vjazkouprugosti s symetričnymi funkcijami vlijanja. *Mechanika polymerov*, No. 5, 1967, s. 921-926.
- /30/ Filippov, I. G.: K nėlinėjnoj tėoriji vjazkouprugich Izotropnych tėl. *Prikladnaja mechanika*, No. 3, 1983, s. 3-8.
- /31/ Rogers, T. G.: Viscoelastic stress analysis. In: *Proceedings of the Princeton University on Solid Mechanics*, New Jersey, 1965, s. 49-74.
- /32/ Shapery, R. A.: Approximate Methods of Transform Inversion for Viscoelastic Stress Analysis. In: *Proceedings of the U. S. National Congress of Appl. Mech.*, Vol. II, ASME, 1962, s. 1075-1084.
- /33/ Cost, T. L.: Approximate Laplace Transform Inversions in Viscoelastic Stress Analysis. *AIAA Journ.*, Vol. 2, No. 12, 1964, s. 2157-2166.
- /34/ Swanson, S. R.: Approximate Laplace Transform Inversion in Dynamic Viscoelasticity. *Journ. of Appl. Mech.*, Vol. 47, December, 1980, s. 769-774.
- /35/ Lifshitz, J. M. - Kolsky, H.: The Propagation of Spherically Divergent Stress Pulses in Linear Viscoelastic Solids. *Journ. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, 1965, s. 361-376.
- /36/ Kaya, I.: Very Early Time Characteristics of Linear Viscoelastic Materials. Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, 1968.
- /37/ Perepečko, I. I.: Akustičeskije metody issledovanija polymerov. Moskva, Chimija, 1973.
- /38/ Nigul, U. K.: Nelinėjnaja akusto-diagnostika. *Lenin-grad, Sudostrojenje*, 1981.
- /39/ Martinček, G.: Teória a metodika dynamického nedeštruktívneho skúšania plošných prvkov. Bratislava, 1. vyd., Veda, SAV, 1975.

- /40/ Fedorov, A. P.: *Opredělení dynamických svojstv prozračných materiálův. Strojní mechanika i rasčot sooruženij*, No. 3, 1962, s. 33-66.
- /41/ Brepta, R. - Prokopec, M.: *Šíření napětových vln a rázy v tělesech*. 1. vyd., Praha, Academia, 1972.
- /42/ Brepta, R.: *Rázy a vlny napětí v pevných elastických tělesech*. Skriptum, ČVUT, Praha, 2. vyd., 1977.
- /43/ Jílek, M.: *Metoda zjišťování dynamických charakteristik viskoelastických materiálů. /Výzkumná zpráva/, Praha, ČVUT, fakulta strojní, 1980.*
- /44/ Jílek, M.: *Metodika zjišťování komplexního modulu viskoelastických materiálů při rázovém zatížení*. In: ACTA Polytechnica, Praha, Vědecká konference ČVUT Praha, 1982, s. 119-123.
- /45/ Truell, R. - Elbaum, Ch. - Chick, B. B.: *Ultrasonic Methods in Solid State Physics*. New York and London, Academic Press, 1969, s. 55-70.
- /46/ Rippl, J.: *Integral Transformations - General Theory and Application to Continuum Dynamics*. In: Monographs and Memoranda, No.18, 1976.
- /47/ Valanis, K. C.: *Wave Propagation in Viscoelastic Solids with Measured Relaxation or Creep Functions*. In: *Proceeding Fourth Intern. Congress on Rheology, Part 2*, New York, 1965, s. 261-285.
- /48/ Valanis, K. C.: *Propagation and Attenuation of Waves in Linear Viscoelastic Solids*. *Journ. of Math. and Phys.*, Vol. XLIV, No. 3, 1965, s. 227-239.
- /49/ Gottenberg, W. T. - Christensen, R. M.: *An Experiment for Determination of the Mechanical Property in Shear for a Linear Isotropic Viscoelastic Solid*. *Int. Journ. Engineering and Science*, Pergamon Press, 1964, Vol. 2, s. 45-57.
- /50/ Arenz, R. J.: *Uniaxial Wave Propagation in Realistic Viscoelastic Materials*. *Journ. of Appl. Mech.*, March, 1964.
- /51/ Lethersich, W. - Pelzer, H.: *The Measurement of the Coefficient of Internal Friction of Solid Rods by a Resonance Method*. *British Journ. of Appl. Physics*, Vol. 1, January, 1950, s. 18-22.

- /52/ Lethersich, W.: The Rheological Properties of Dielectric Polymers. British Journ. of Appl. Physics, Vol. 1, November, 1950, s. 294-301.
- /53/ Lee, E. H. - Kanter, I.: Wave Propagation in Finite Rods of Viscoelastic Material. Journ. of Appl. Physics, Vol. 24, No. 9, 1953, s. 1115 - 1122.
- /54/ Glauz, R. D. - Lee, E. H.: Transient Wave Analysis in a Linear Time Dependent Material. Journ. of Appl. Physics, Vol. 25, No. 8, 1954, s. 947-953.
- /55/ Morrison, J. A.: Wave Propagation in Rods of Voigt Material and Visco-elastic Materials with Three-parameter Models. Quarterly of Appl. Mathematics, Vol. XIV, No. 2, 1956, s. 153-169.
- /56/ Lee, E. H. - Morrison, J. A.: A Comparison of the Propagation of Longitudinal Waves in Rods of Viscoelastic Materials. Journ. of Polymer Sci., Vol. XIX, 1956, s. 93-110.
- /57/ Tsay, L. J.: Numerical Computation of Spherical Waves in Two Viscoelastic Media. Journ. of Appl. Mech., June, 1972, s. 401-406.
- /58/ Berry, D. S. - Hunter, S. C.: The Propagation of Dynamic Stresses in Viscoelastic Rods. Journ. of the Mech. and Phys. of Solids, Vol. 4, 1956, s. 72-95.
- /59/ Filippov, I. G. - Dmochovskij, A. V. - Skropkin, C. A.: Teoretiko-experimentalnoe issledovanie voln naprjazhenij v vjazkouprugich stierznjach peremennogo sečenija. In: Prime-nenije metoda fotouprugosti dlja sostajanija strojitel'nykh konstrukcij, Sbornik prací, MISI, 1978, Moskva, s. 116-121.
- /60/ Petrof, R. C. - Gratch, S.: Wave Propagation in a Viscoelastic Material with Temperature Dependent Properties and Thermomechanical Coupling. Journ. of Applied Mech., serie E, Vol. 31, No. 3, 1964, s. 423-429.
- /61/ Knaus, W. G.: Uniaxial Wave Propagation in a Viscoelastic Material Using Measured Material Properties. Journ. of Appl. Mech., September, 1968, s. 449-453.
- /62/ Schuler, K. W.: Propagation of Steady Shock Waves in Polymetyl Metacrylate. Journ. Mech. Phys. Solids, Vol. 18, 1970, s. 277-293.

- /63/ Kolsky, H.: The Propagation of Stress Pulses in Viscoelastic Solids. Philosophical Magazine, ser. 8, Vol. I, No. 8, August, 1956, s. 693-710.
- /64/ Kolsky, H.: Viscoelastic Waves. In: Intern. Symph. on Stress Wave Propagation in Materials, New York, 1960, s. 59.
- /65/ Norris, D. M.: Propagation of a Stress Pulse in Viscoelastic Rod. Exper. Mechanics, Vol. 7, No. 7, July, 1967, s. 297-301.
- /66/ Sackman, J. L. - Kaya, I.: On the Propagation of Transient Pulses in Linearly Viscoelastic Media. Journ. Mech. Phys. Solids, Vol. 16, 1968, s. 349-356.
- /67/ Sackman, J. L. - Kaya, I.: On the Determination of Very Early-Time Viscoelastic Properties. Journ. Mech. Phys. Solids, Vol. 16, 1968, s. 121-132.
- /68/ Blanc, R. H.: Spectre instantané d'une impulsion dans un berreau viscoélastique. Rheol. Acta 13, 1974, s. 228-232.
- /69/ Sutherland, H. J. - Lingle, R.: An Acoustic Characterization of Polymethyl Metacrylate and Three Epoxy Formulations. Journ. Appl. Phys., Vol. 43, No. 10, 1972, s. 4022-4026.
- /70/ Filippov, I. G. - Popovič, A. J.: Rasprastaněníje voln sžatija v stěržžjach iz vjaskouprugogo matěriala. Prikladnaja mechanika, tom. XII, No. 7, s. 45-50.
- /71/ Brepta, R.: Pohyb torzního napětového pulsu v tenkém kotouči z Kelvinova-Voigtova lineárně viskoelastického materiálu. Strojnícky časopis, XXIII, č. 2, 1972, s. 163-178.
- /72/ Brepta, R.: Pohyb torzního napětového pulsu v tenkém kotouči z materiálu podle modelu standardního tělesa. Strojnícky časopis, XXV, č. 1, 1974, s. 17-37.
- /73/ Filippov, I. G.: Ob odnom metodě rešenija uravněníj dviženija vjaskouprugich sredach. Mech. polymerov, No. 3, 1973, s. 429-435.
- /74/ Filippov, I. G.: Ob odnom predstavlenii uravněníj dviženija vjaskouprugich sred. Mech. tvjordogo těla, No. 6, 1973, s. 79-86.
- /75/ Distéfano, N.: On the Identification problem in Linear Viscoelasticity. ZAMM, Bd. 50, Nr. 11, 1970, s. 683-690.

- /76/ I-Ho Lin, E. - Sackman, J. L.: Identification of the Dynamic Properties of Nonlinear Viscoelastic Materials and the Associated Wave Propagation Problem. In: Eng. Solids Structures, Vol. 11, No. 10, 1975, s. 1145-1159.
- /77/ Gurtin, M.: Wave propagation in Nonlinear Viscoelastic Materials. In: Propagation of Shock Waves in Solids, AMD, Vol. 17, edit. Varley E., New York, 1976, s. 65-72.
- /78/ Distéfano, N.: Some Numerical Aspects in the Identification of a Class of Nonlinear Viscoelastic Materials. ZAMM, Bd. 52, Nr. 8, 1972, s. 389-395.
- /79/ Lee, E. H.: Stress Analysis in Viscoelastic Materials. Journ. Appl. Physics, Vol. 27, No. 7, 1956, s. 655-672.
- /80/ Gurtin, M. E. - Sternberg, E.: On the Linear Theory of Viscoelasticity. Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 11, No. 7, 1962, s. 291-356.
- /81/ Boa-Teh Chu: Response of Various Material Media to High-Velocity Loadings. Journ. Mech. Phys. Solids, Vol. 13, 1965, s. 165-187.
- /82/ Achenbach, J. D. - Reedy, D. P.: Note on Wave Propagation in Linear Viscoelastic Media. ZAMP, Vol. 18, No. 1 1967, s. 141-144.
- /83/ Stříž, B. a kol.: Experimentální výzkum dynamiky křehkého porušení. /Výzkumná zpráva SPZV III-6-1/3-3/, KMP VŠST, Liberec, 1980.
- /84/ Humen, Vl. - Potěšil, A.: Metody vyhodnocení dynamických viskoelastických vlastností polymerních materiálů. In: Sborník referátů EAN, 1983, Luhačovice, s. 103-110.
- /85/ Potěšil, A.: The Method of Direct Determination on the Creep and Relaxation Functions During Loading with Short Pulses. In: Sborník referátů Intern. Confer. Dynamical Mechanical Properties and fracture Dynamics of Engineering Materials, Brno, Czechoslovakia, June, 1983, s. 141-148.
- /86/ Jones, J. G.: On the Numerical Solution of Convolution Integral Equation and Systems of such Equations. Mathematical and Computation, Vol. 15, Jan. 1961, s. 73-76.
- /87/ STŘÍŽ, B. a kol.: Porušení těles se stacionární trhlinou zatíženou napěťovým pulsem. /Výzkumná zpráva SPZV III-3-1/2B/, KMP VŠST, Liberec, listopad 1983, 82s.

- /88/ Humen, Vl. - Vejvoda, J. ml.: Experimentální stanovení distorze pulsu šířícího se v tyči z disipativního materiálu. Strojnícky časopis, 33, č. 5, 1982, s. 575-589.
- /89/ Vejvoda, J.st. - Vejvoda, J.ml. - Humen, Vl.: Optimalizace parametrů experimentálního uspořádání explozního drátku. KMP VŠST, Liberec, 1982, (nepublikováno).
- /90/ Humen, Vl. - Vejvoda, J.st.: Tvorba deformačního pulsu explozním drátkem. KMP VŠST, Liberec, 1982, (nepublikováno).
- /91/ Humen, Vl. - Vejvoda, J.st.: Rychlost šíření napětového pulsu v tyči z PMMA. In: Sborník prací VŠST v Liberci, 1980, s. 157-161.
- /92/ Potěšil, A.: Vliv rychlosti deformace na optickomechanické vlastnosti transparentních opticky citlivých materiálů. /Závěrečná práce PGS "Experimentální metody v pružnosti a pevnosti"/, KMP VŠST, Liberec, 1980.
- /93/ Vejvoda, J.ml.: Optimalizace parametrů experimentálního uspořádání explozního drátku. /Diplomová práce/, KTK VŠST, Liberec, 1981.
- /94/ Klaboch, L.: Experimentální metody I. Skriptum, ČVUT Praha, 1. vyd., 1982.
- /95/ Stříž, B. a kol.: Porušení jednoose a dvouose staticky zatížených rovinných těles dynamickou trhlinou. /Výzkumná zpráva SPZV III-3-1/2B/, KMP VŠST, Liberec, 1982.
- /96/ Lazan, B. J.: Damping of materials and Members in Structural Mechanics. Perg. Press, Oxford, 1. vyd., 1968.
- /97/ Lokšin, A. A. - Suvorova, J. V.: Matématičeskaja teorija rasprastaněnija voln v sredach s pamjatju. Izd. Moskovskogo univerzitetā, Moskva, 1982.
- /98/ Pírko, Z. - Veit, J.: Laplaceova transformace. Základy teotie a užití v elektrotechnice. SNTL, Praha, 1970.
- /99/ Veit, J.: Integrální transformace. SNTL-MVŠT, sešit XIV, Praha, 1979.
- /100/ Olehla, M. - Tišer, J.: Praktické použití fortranu. NADAS, 2. vyd., Praha, 1979.
- /101/ Kopecký, M. - Ondrek, J.: Charakteristika Tenzometrického snímača pri použití k štúdiu impulzívneho rázového náhania. In: Sborník referátů EAN, 1980, Banská Bystrica, s. 350-357.

- /102/ Stříž, B. a kol.: Fotoelasticimetrické pozorování interakce stacionární trhliny s napětovým pulsem. /Výzkumná zpráva SPZV III-7-3/1c/, KMP VŠST, Liberec, 1980.
- /103/ Humen, Vl. - Potěšil, A. - Vejvoda, J.st.: Kvazielastické dynamické konstanty Akrylonu (PMMA). In: Sborník prací VŠST v Liberci, 1981, s. 129-135.
- /104/ Humen, Vl. - Potěšil, A. - Vejvoda, J.st.: Afinní podobnost podélného deformačního pulsu šířícího se v dlouhé tenké tyči zhotovené z Akrylonu (PMMA). Strojírenství, 34, 1984, č. 2, s. 108-114.
- /105/ Potěšil, A.: Modelování odezvy odporového tenzometru při dynamickém namáhání. In: Sborník prací VŠST v Liberci, 1982, s. 125-131.
- /106/ Humen, Vl. - Potěšil, A.: Experimentální impulsní metoda určující některé dynamické vlastnosti lineárního viskoelastického materiálu. Strojnícky časopis, 37, 1986, č. 1, s. 99 - 114.
- /107/ Humen, Vl.: Současné tendence experimentálního výzkumu dynamiky křehkého porušení modelových materiálů. In: Strojírenství, Sv. 33, č. 5, 1983, s. 299-306.
- /108/ Brepta, R.: Šíření podélných vln v tenkých pásech s rheologickými vlastnostmi. Strojnícky časopis, XXII, č. 5, 1971, s. 409-427.
- /109/ Karlík, J.: Zenerův model viskoelastického kontinua. /Výzkumná zpráva SPZV III-4-2/2-3, V-KMAT-291/90/, ČVUT-FJFI-KMAT, Praha, 1990, 30 s.
- /110/ Karlík, J.: PANDA - Program pro řešení nestacionární viskoelastické napjatosti metodou konečných prvků. /Výzkumná zpráva SPZV III-4-2/2-3, V-KMAT-291/90/, ČVUT-FJFI-KMAT, Praha, 1990, 71 s.
- /111/ Potěšil, A. - Humen, Vl.: Impulsní metoda stanovující počátky reologických funkcí lineárně viskoelastických materiálů. Strojnícky časopis, 37, 1986, č. 6, s. 719 - 732.
- /112/ Humen, Vl. - Potěšil, A.: Některé poznatky o tvorbě deformačního pulsu explozním drátkem. In: Sborník referátů EAN '84', Holany, 1984, s. 51-53.

- /113/ Humen, Vl. - Potěšil, A. a kol.: Rychlost šíření podélného rozruchu a dynamické útlumové vlastnosti PAN vláken. /Výzkumná zpráva podle HS pro MONOKRYSTALY Turnov/, KMP VŠST, Liberec, listopad, 1989, 44s.
- /114/ Humen, Vl. - Potěšil, A. - Vejvoda, J. st.: Identifikace frekvenčních charakteristik Akrylonu (PMMA), Novoduru (PVC) a Celuloidu metodou osamělého afinity pulsu. Strojírenství, 35, 1985, č. 12, s. 698-703.
- /115/ Potěšil, A. - Humen, Vl.: Počáteční části reologických funkcí některých plastických hmot. Strojírenství, 36, 1986, č. 12, s. 703 - 706.
- /116/ Stříž, B. - Potěšil, A. a kol.: Odezva kompozitu 1. typu s rozptýleným plnivem na dynamické zatížení. /Výzkumná zpráva SPZV III-2-2/03/04/, KMP VŠST, Liberec, listopad, 1987, 57s.
- /117/ Humen, Vl. - Babuška, M. - Potěšil, A. a kol.: Experimentální výzkum viskoelastických a viskoplastických vlastností kompozitů I. typu - aplikace MOAP a HMDT. /Výzkumná zpráva SPZV III-2-2/03/04/, KMP VŠST, Liberec, listopad 1989, 94s.
- /118/ Humen, Vl. - Babuška, M. - Jelínek, R. - Potěšil, A.: Stanovení dynamických charakteristik materiálu trubek z Litenu. /Výzkumná zpráva podle HS pro SVÚM Praha/, KMP VŠST, Liberec, listopad, 1989, 65s.
- /119/ Humen, Vl. - Potěšil, A. a kol.: Identifikace viskoelastických vlastností výchozí suroviny pro výrobu uhlíkových vláken. /Výzkumná zpráva podle HS pro MONOKRYSTALY Turnov/, KMP VŠST, Liberec, prosinec 1985, 72s.
- /120/ Humen, Vl. - Babuška, M. - Potěšil, A.: Měření a rozbor mechanických vlastností uhlíkových vláken a jejich kompozitů. /Výzkumná zpráva podle HS pro MONOKRYSTALY Turnov/, KMP VŠST, Liberec, únor, 1988, 105s.
- /121/ Potěšil, A.: Identifikace některých dynamických vlastností skleněných vláken EC 6. /Výzkumná zpráva podle HS pro VÚ ELITEX Liberec, pracoviště Brno/, KMP VŠST, Liberec, prosinec 1986, 36s.

/122/ Potěšil, A. - Vejvoda, J. ml. - Markovič, J.: Dynamic-
ké vlastnosti skleněných vláken EC 6 při rázovém zatěžování.
In: Sborník vědeckých prací VŠST v Liberci, Liberec, 1986,
s. 107 - 116.

/123/ Flügge, W.: Viscoelasticity. Blaisdell Publ. Comp.,
London, 1967, 127s.

/124/ Potěšil, A. - Humen, Vl.: Optická citlivost PMMA při
rázovém zatížení. In: Sborník referátů EAN '90', Pardubice,
květen 1990.

/125/ Potěšil, A.: Identifikace dynamických viskoelastických
vlastností fotoelasticimetrických materiálů. /Kandidátská
disertační práce/, ČVUT, Praha, leden 1984, 171s. .