

Vysoká škola strojní a textilní PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra: fyziky

Kombinace oborů: fyzika - německý jazyk

ANALYTICKÉ A NUMERICKÉ ŘEŠENÍ POHYBOVÝCH ROVNIC

Diplomová práce 94-PF-fyzika-004

Autor: Eva Pavková

UNIVERZITNÍ KNIHOVNA
TECHNICKÉ UNIVERZITY V LIBERCI



3146065964

Adresa: Hálkova 6, Liberec 461 17

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Antonín Kopal, CSc

Počet	stran	obrázků	tabulek	příloh
	45	11	21	5

V Liberci dne 25. května 1994

Vysoká škola strojní a textilní PEDAGOGICKÁ FAKULTA

46117 LIBEREC 1, Sokolská 8/113 Telefon: 23553 Telefax: 23317

Katedra: fyziky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(závěrečného projektu)

pro (diplomant) Eva PAVKOVÁ

obor německý jazyk - fyzika

Název: Analytické a numerické řešení pohybových rovnic

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Antonín Kopal, CSc

Termín odevzdání: 30. dubna 1994

Pozn. Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž formulují podrobnosti zadání. Rámcové zásady pro způsob, obsah a formu zpracování jsou k dispozici na katedrách a na děkanátě pedagogické fakulty.

V Liberci dne 20.5.1993

*Výuka - fyzika
Fyzika - výuka
Ročník pohybové
Pohybové ročník
Metodika řešení*

Antonín Kopal
vedoucí katedry

V. Jiroušek
děkan

Převzal: *Pavkova*
Datum: 22.5.1993

Podpis: *Eva Pavkova*

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Univerzitní knihovna
Voroněžská 1329, Liberec 1
PSČ 461 17

V 48/95 P

*KFY/NJ-F
45a, 6 s. příl*

ODKROUVÁNÍ

ANOTACE

Práce se zabývá výzkumem v oblasti fyziky a matematiky. Cílem je zjistit, jak se tyto oblasti vzájemně ovlivňují a jaké jsou jejich současné problémy. Práce je rozdělena do dvou částí: teoretické a experimentální. V teoretické části jsou uvedeny základní rovnice a derivace. V experimentální části jsou uvedeny výsledky měření a jejich hodnocení.

Das Ziel der Diplomarbeit ist die Durcharbeitung gewisser Probleme der Physik und der mathematischen Methoden. Nach der theoretischen Einführung folgen die experimentellen Ergebnisse. Die beiden Teile werden miteinander verglichen.

The aim of the graduation thesis is to work out a suitable working method for the solution of various equations of motion by the analytical and numerical methods.

PROHLÁŠENÍ

"Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla veškerou použitou literaturu".

Liberec, 15.5. 1994

Eva Pavkova'

Anotace

Cílem práce je propracování vhodné metodiky k řešení pohybových rovnic analytickou a numerickou metodou.

Po teoretickém úvodu následuje osm řešených úloh, které ilustrují a srovnávají didaktický přínos obou metod.

Das Ziel der Diplomarbeit ist die Durcharbeitung passender Methodik zur Lösung der Bewegungsgleichungen mit der Hilfe analytischer und numerischer Methoden.

Nach der theoretischen Einführung folgen acht aufgelösten Aufgaben, die den didaktischen Beitrag beider Methoden illustrieren und vergleichen.

The aim of the graduation thesis is to work out a suitable teaching methodology of solving equations of motion by the analytical and numerical methods.

Eight solved exercises follow after the theoretical introduction to illustrate and compare the didactic contribution of both of these methods.

Obsah

1	Úvod	7
2	Dynamika hmotného bodu	9
3	Řešení pohybových rovnic	13
3.1	Analytické řešení	13
3.2	Numerické řešení	14
3.2.1	Grafické řešení	17
3.3	Kontrola správnosti a přesnosti řešení	17
4	Řešené příklady	19
5	Srovnání didaktického přínosu	41
6	Závěr	43

Kapitola 1

Úvod

Cílem práce je propracování metodiky řešení pohybových diferenciálních rovnic numerickou a analytickou metodou a vytvoření souboru řešených příkladů. Práce je určena zejména středoškolským a vysokoškolským studentům, které by měla přivést k hlubšímu chápání základních problémů dynamiky.

Domníváme se, že numerická metoda řešení je natolik názorná, že je přístupná všem středoškolkům a v aplikaci na jednoduché příklady ji lze použít i na základních školách. Analytické řešení je náročnější pouze z hlediska matematického aparátu a učitelé ocení jeho obecnost a bezprostřední možnost kontroly správnosti studentova řešení. Soubor úloh poslouží **učitelům** k procvičení probraných partií dynamiky hmotného bodu a **studentům** snad k tomu, aby *skutečně* pochopili kausalitu dějů, popisovaných rovnicemi dynamiky.

Diplomová práce je psána s použitím systému L^AT_EX.

Kapitola 2

Dynamika hmotného bodu

V této části se zaměříme na popis dynamiky hmotného bodu, kterou budeme pojímat jako systém. Aby dynamika splňovala svůj účel, kterým je předpovídání průběhu mechanických pohybů, nestačí se zabývat pouze třemi Newtonovými pohybovými zákony, jak by si mnohý středoškolák představoval. Je třeba osvojit si celý soubor znalostí a zkušeností, jakými jsou např. zákony zachování (energie, hybnosti, točivosti), dále znalost významu pojmů - hmotný bod, hybnost, síla, hmotnost. Důležité jsou vztahy pro reálné síly jako je tření, vztlak, odpor prostředí, elastická síla a vztahy známé z kinematiky pro výpočet dráhy, rychlosti, zrychlení. V neposlední řadě je také nutné mít znalosti matematické (diferenciální a integrální počet, diferenciální rovnice).

Základem dynamiky hmotného bodu zůstávají tři Newtonovy pohybové zákony, které ve stručnosti zformulujeme podle [ŠAN-93:76].

1. Newtonův zákon

V oblasti sluneční soustavy existují inerciální vztažné soustavy, tj. soustavy, v nichž se každý volný hmotný bod ¹ pohybuje rovnoměrně přímočaře nebo zůstává v klidu. ²

2. Newtonův zákon

Působí-li na hmotný bod o hmotnosti m tělesa a fyzikální pole silami o výslednici $\mathbf{F}_v$, má hmotný bod zrychlení $\mathbf{a}$ takové, že platí

$$\mathbf{F}_v = m\mathbf{a} . \quad (2.1)$$

Zdůrazněme, že 2. Newtonův zákon v uvedeném znění platí za předpokladu, že pohyby jsou nerelativistické a že je zkoumáme v inerciální vztažné soustavě. Vztah (2.1) vyjadřuje nejdůležitější zákon celé nerelativistické mechaniky. Nazývá se často **pohybová rovnice**. 2. Newtonův zákon lze vyjádřit pomocí hybnosti $\mathbf{p}$. Hybnost hmotného bodu o hmotnosti m a rychlosti $\mathbf{v}$ je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v} . \quad (2.2)$$

Z kinematiky vyplývá, že měl-li hmotný bod při pohybu v čase t_1 rychlost $\mathbf{v}_1$ a v čase nepatrně pozdějším $t_1 + \Delta t$ rychlost $\mathbf{v}_2$, platí o jeho zrychlení

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} . \quad (2.3)$$

¹Volný hmotný bod je hmotný bod, na který působí pouze gravitační pole stálé.

²Ve všech našich řešených příkladech je za inerciální vztažnou soustavu považována laboratorní vztažná soustava, která je pevně spojena se Zemí.

Dosazením vztahu (2.3) do (2.1) dostáváme

$$\mathbf{F}_v = \frac{m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} . \quad (2.4-a)$$

Z definice (2.2) pak plyne

$$\mathbf{F}_v = \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{t_2 - t_1} .$$

Vztah (2.1) lze tedy psát ve tvaru

$$\mathbf{F}_v = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \quad \text{pro} \quad \Delta t \rightarrow 0 . \quad (2.4-b)$$

Obvyklý zápis je v diferenciálním tvaru

$$\mathbf{F}_v = \frac{d\mathbf{p}}{dt} . \quad (2.4-c)$$

Při nerelativistických rychlostech, kdy je hmotnost konstantní, jsou vztahy (2.1), (2.4-c) ekvivalentní, přičemž jeden vyplývá ze druhého. Při relativistických rychlostech však hmotnost závisí na rychlosti. Teorie i experiment pak potvrzují, že vztah (2.4-c) platí, vztah (2.1) však nikoli.

3. Newtonův zákon

Působí-li jedno těleso na druhé při jejich styku silou $\mathbf{F}_1$, působí druhé těleso na první silou $\mathbf{F}_2$, přičemž platí, že

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 .$$

Nazve-li se jedna ze sil akce, je druhá reakce. Proto se tento zákon někdy nazývá *zákon akce a reakce* nebo ještě lépe *zákon vzájemného působení*.

Po provedení rozboru sil, působících na částice nebo na těleso a po zvážení počátečních podmínek, lze sestavit pohybovou rovnici, která může být ve vektorovém nebo souřadnicovém tvaru. Ukažme si na příkladu.

PŘÍKLAD

Na kmitající těleso zavěšené na pružině působí tíhová síla $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$ a síla pružiny $\mathbf{F}_p(t) = -k\mathbf{u}(t)$. Těleso je na počátku v klidu a má nulovou výchylku. Pro výslednici $\mathbf{F}_v$ pak platí

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_p . \quad (2.5)$$

o dosazení

$$m\mathbf{a}(t) = m\mathbf{g} - k\mathbf{u}(t) .$$

Na základě zavedení orientace souřadné osy y tak, jak je uvedeno v obr. 1, můžeme souřadnicově psát

$$ma_y(t) = -mg - ku_y(t) . \quad (2.6)$$

Z kinematiky víme, že zrychlení a lze definovat

$$a \equiv \frac{d^2 u(t)}{dt^2} ,$$

souřadnicově

$$a_y(t) = \frac{d^2 u_y(t)}{dt^2} . \quad (2.7)$$

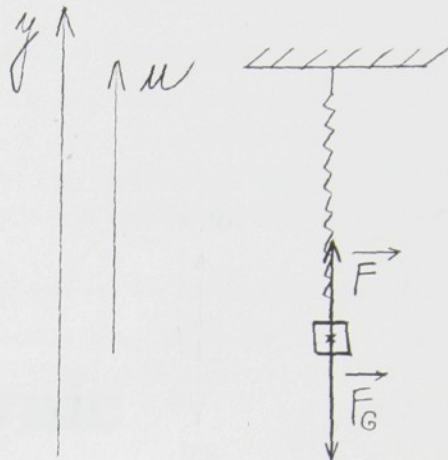
Dosazením vztahu (2.7) do (2.6) dostáváme konečnou pohybovou rovnici v diferenciálním tvaru

$$m \frac{d^2 u_y(t)}{dt^2} = -mg - ku_y(t) . \quad (2.8)$$

Tuto a jiné další diferenciální rovnice musíme upravit, abychom co nejjednodušším způsobem došli k jejich vyřešení. Jedná se většinou o jednoduché matematické úpravy jakými jsou dělení, násobení, vytýkání, sčítání, odčítání atd. . Tak např. rovnici (2.8) upravíme

$$mg + ku_y(t) + m \frac{d^2 u_y(t)}{dt^2} = 0 . \quad (2.9)$$

V tomto tvaru je přístupnější k řešení.



Obr. 1

Kapitola 3

Řešení pohybových rovnic

Pohybové diferenciální rovnice lze řešit dvěma základními postupy - metodou *numerickou* nebo *analytickou*.

3.1 Analytické řešení

Tento typ řešení je podmíněn jistými znalostmi a zkušenostmi z matematiky. Základní matematické principy, které jsme používali při řešení vzorových příkladů, zde uvedeme. Příklady jsou voleny tak, že se v nich vyskytují zejména homogenní lineární diferenciální rovnice 1. a 2. řádu s konstantními koeficienty. Při řešení těchto typů diferenciálních rovnic jsme používali následující matematické postupy [STĚ-52], [BN-77], [REK-81].

a) Metoda postupné integrace

Tohoto postupu jsme užili např. v příkladě 3 (viz Řešené příklady). Diferenciální rovnice má tvar

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g \quad \text{kde } g = \text{konst.} \quad (3.1)$$

První integrací rovnice (3.1) podle argumentu t dostáváme

$$\frac{dy}{dt} = -gt + c_1. \quad (3.2)$$

Následnou integrací rovnice (3.2) docházíme ke konečnému vztahu

$$y = \frac{-gt^2}{2} + c_1 t + c_2. \quad (3.3)$$

Konstanty c_1, c_2 určíme z počátečních podmínek.

b) Metoda separace proměnných podle [SM-87:81]

Základem je separace závislé a nezávislé proměnné. Ukázkou tohoto postupu je řešení diferenciální rovnice z příkladu 2 (viz Řešené příklady).

$$20 \frac{dv_x}{dt} + v_x^2 = 0. \quad (3.4)$$

Separujeme v_x a dt a po úpravě dostaneme

$$\frac{dv_x}{v_x^2} = \frac{-dt}{20}. \quad (3.5)$$

Tento vztah lze snadno zintegrovat a výsledek dostáváme ve tvaru

$$\frac{-1}{v_x} = \frac{-t}{20} + c. \quad (3.6)$$

Dosazením počátečních podmínek lze určit počáteční konstantu c (viz příklad 2).

c) Metoda charakteristické rovnice [SM-87:120]

Tento postup je vhodný zejména k řešení homogenních i nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic 1. a 2. řádu s konstantními koeficienty. Ukažme si tento postup na řešení diferenciální rovnice 1. řádu z příkladu 1

$$\frac{dv_y}{dt} + v_y = 2. \quad (3.7)$$

K ní odpovídající charakteristická rovnice

$$1x^1 + 1x^0 = x + 1 = 0 \quad \text{z čehož plyne} \quad x = -1. \quad (3.8)$$

Řešením homogenní rovnice $\frac{dv_y}{dt} + v_y = 0$ je funkce [SM-87:120]

$$v_y(t) = K e^{xt}. \quad (3.9)$$

Dosazením ze (3.8) dostáváme

$$v_y(t) = K e^{-t}. \quad (3.10)$$

Toto je obecné řešení homogenní rovnice. Pro nehomogenní rovnici (3.7) platí, že její řešení je součtem řešení homogenní rovnice (3.10) a alespoň jednoho z možných řešení rovnice nehomogenní. Partikulární řešení lze najít např. metodou variace konstant, která je popsána v [SM-87:69,134]. U jednodušších příkladů partikulární řešení zpravidla uhodneme. Např. partikulární řešení rovnice (3.7) je na první pohled zřejmé a to $v_y = 2$. Konečným řešením diferenciální rovnice (3.7) je tedy funkce

$$v_y(t) = 2 + K e^{-t}. \quad (3.11)$$

Konstantu K určíme po dosazení počátečních podmínek (viz příklad 1).

U některých typů diferenciálních rovnic analytické řešení vůbec neexistuje nebo ho lze najít jen velmi obtížně. Jedná se např. o nehomogenní kvadratické diferenciální rovnice 1. a 2. řádu. K řešení těchto úloh použijeme numerickou metodu.

3.2 Numerické řešení

Pro naše potřeby jsme využívali jednoduché numerické postupy, které jsou názorné, a tak přístupné i žákům středních škol. Tato jednoduchost má však za následek malou přesnost výpočtů. Složitější numerické metody by však byly na střední škole méně vhodné. Seznámíme se se základními principy této metody v následujícím příkladě [Šan-93:281]. Budeme předpokládat, že:

1. V každém bodě, do kterého se hmotný bod dostane, je známa nebo se dá určit výslednice sil $\mathbf{F}_v$, které na něj působí. Hmotnost hmotného bodu označíme m .
2. V čase $t = t_0$ je hmotný bod v daném bodě P_0 (tj. je dán polohový vektor $\mathbf{r}_0$ tohoto bodu) a má danou rychlost $\mathbf{v}_0$. Tyto údaje se nazývají počáteční podmínky.

*Vztah platí pouze číselně, ne rozměrově.

POSTUP

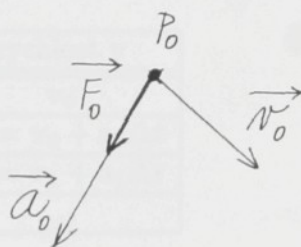
Nejdříve určíme zrychlení $\mathbf{a}_0$ hmotného bodu v čase t_0 ze vztahu $m\mathbf{a}_0 = \mathbf{F}_0$, kde $\mathbf{F}_0$ je výsledná síla působící na hmotný bod v bodě P_0 (podle předpokladu ji známe). Hmotný bod je tedy v čase t_0 ve známém bodě P_0 a má známou rychlost $\mathbf{v}_0$ a zrychlení $\mathbf{a}_0$. Tento stav označíme jako stav 0. Další polohy hmotného bodu, jeho rychlosti a zrychlení budeme určovat postupně po krocích s užitím vztahů

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \rightarrow \Delta \mathbf{r} = \mathbf{v} \Delta t, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \rightarrow \Delta \mathbf{v} = \mathbf{a} \Delta t, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m},$$

kde $\Delta t, \Delta \mathbf{r}, \Delta \mathbf{v}$ jsou velmi malé, avšak konečné změny veličin $t, \mathbf{v}, \mathbf{r}$. Uvedené vztahy se tím více blíží přesným vztahům, čím menší je krok Δt . Proto se musí k dosažení požadované přesnosti volit krok Δt dostatečně malý. Z toho plyne, že počet kroků je pak velmi vysoký. Znázorníme si tento postup graficky pomocí vektorů. (Abychom mohli postup znázornit v rovinném obrázku, omezíme se na případ, kdy počáteční rychlost a působící síly leží v jedné rovině. Stejně je však možno postupovat i v obecném případě, kdy tato podmínka není splněna).



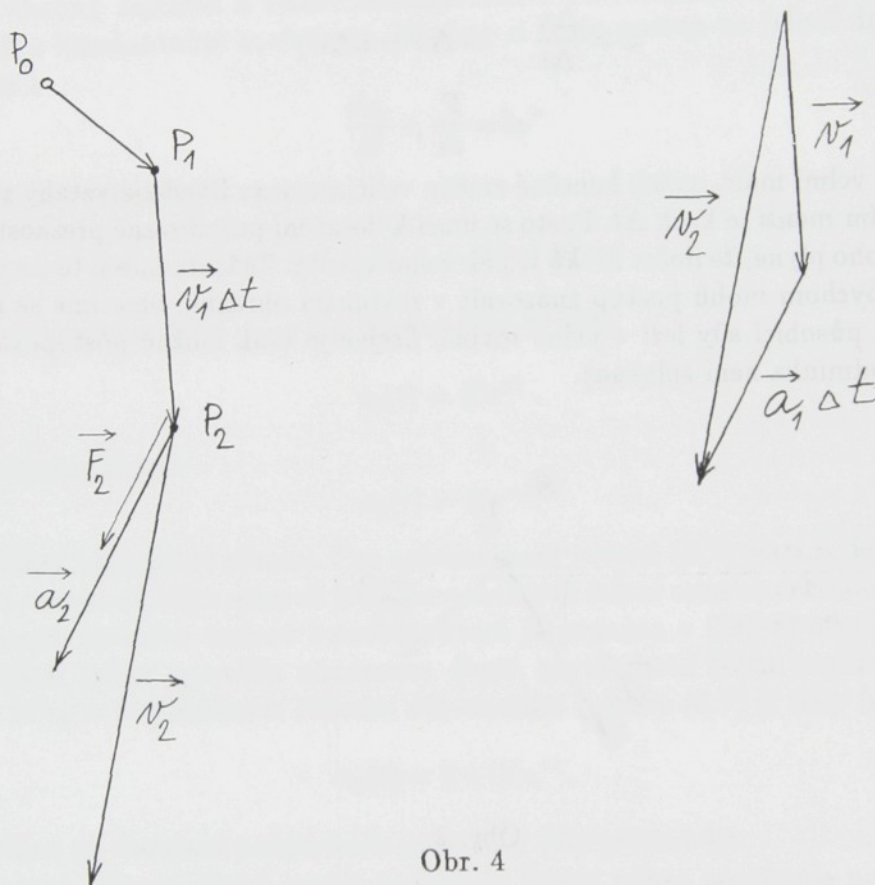
Obr. 2

Všimněme si, co se stane s hmotným bodem během krátkého časového intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$, kde $t_1 = t_0 + \Delta t$, na jehož začátku je hmotný bod v P_0 , má rychlost $\mathbf{v}_0$ a zrychlení $\mathbf{a}_0$. Jelikož má nějakou rychlost $\mathbf{v}_0$, postoupí z bodu P_0 ve směru rychlosti $\mathbf{v}_0$ do dalšího bodu, který označíme P_1 .



Obr. 3

Vektor posunutí $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ je určen přibližným vztahem (3.12, kde $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, tedy $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \mathbf{v}_0\Delta t$ (viz obr. 3). Zároveň se jeho rychlost změní z hodnoty $\mathbf{v}_0$ na hodnotu $\mathbf{v}_1$, danou přibližně vztahem (3.13), který napíšeme ve tvaru $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0\Delta t$, tedy dostaneme $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0\Delta t$ (obr. 3). V bodě P_1 bude mít hmotný bod zrychlení $\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{F}_1}{m}$. Tímto prvním krokem jsme zjistili na základě znalosti stavu 0 příští stav 1 ($t_1, P_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_1$). Následuje další krok výpočtu, zcela podobný prvnímu. Z polohy P_1 a hodnot $\mathbf{v}_1, \mathbf{a}_1$ v čase t_1 určíme bod P_2 , rychlost $\mathbf{v}_2$ a zrychlení $\mathbf{a}_2$ v čase t_2 s užitím vztahů $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{v}_1\Delta t$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{a}_1\Delta t$, $\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{F}_2}{m}$. Tím dostaneme údaje charakterizující stav 2 ($t_2, P_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{a}_2$).



Obr. 4

Tímto způsobem postupujeme dále a dostáváme další přibližné body trajektorie, vektory rychlosti a zrychlení. Uvedený postup si shrneme do tabulky 1.

Tab. 1

čas	poloha	rychlost	zrychlení
t_0	P_0	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{a}_0$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$P_1(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \mathbf{v}_0\Delta t)$	$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0\Delta t$	$\mathbf{a}_1$
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$P_2(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{v}_1\Delta t)$	$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{a}_1\Delta t$	$\mathbf{a}_2$
$t_3 = \dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Postupem, který jsme si znázornili v obr. 2,3,4, získáme pro dané počáteční podmínky posloupnost bodů $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$, které přibližně udávají polohy hmotného bodu na trajektorii v časech $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$ i jeho rychlosti a zrychlení. Spojíme-li sousední body úsečkami, dostaneme místo hladké skutečné trajektorie jen přibližnou trajektorii, která se skládá z úseček. Tato přibližná trajektorie se blíží skutečné tím více, čím je délka kroku Δt menší. V průběhu výkladu numerické metody jsme několikrát narazili na fakt, že získané výsledky touto metodou nejsou úplně přesné. Naší snahou ale je, abychom získali

hodnoty veličin, které se budou od skutečných lišit co nejméně. Proto výpočet zpřesníme. Můžeme toho dosáhnout buď zmenšením délky kroku Δt , jak jsme se již zmínili, a nebo efektivněji úpravou, vyplývající z této úvahy. Při výpočtu posunutí $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ jsme mlčky předpokládali, že pohyb v tomto intervalu je rovnoměrný stálou rychlostí $\mathbf{v}_0$. Víme však, že pohyb rovnoměrný nebyl, neboť rychlost se změnila z $\mathbf{v}_0$ na $\mathbf{v}_1$. Průměrná rychlost pohybu byla tedy $\mathbf{v}_p = \frac{\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1}{2}$. Pak skutečná hodnota posunutí $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ v čase t_1 bude bližší veličině, kterou označíme $\mathbf{r}_p(t_1)$ a která je dána vztahem

$$\mathbf{r}_p(t_1)^* = \mathbf{r}(t_0) + \frac{(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1)\Delta t}{2}.$$

(3.14)

Z tabulky 1 plyne, že $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0\Delta t$. Dosazením tohoto do (3.14) dostáváme

$$\mathbf{r}_p(t_1) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}_0\Delta t + \frac{\mathbf{a}_0(\Delta t)^2}{2}.$$

(3.15)

Tento vztah si rozebereme. První člen na pravé straně rovnice $\mathbf{r}(t_0)$ určuje počáteční polohu hmotného bodu, člen $\mathbf{v}_0\Delta t$ charakterizuje pohyb rovnoměrný a poslední člen $\frac{1}{2}\mathbf{a}_0(\Delta t)^2$ udává posunutí rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí a se zrychlením $\mathbf{a}_0$. To je i v soulase s užitým vztahem $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0\Delta t$, udávajícím rychlost při pohybu s konstantním zrychlením $\mathbf{a}_0$. Člen $\frac{1}{2}\mathbf{a}_0(\Delta t)^2$ vystupuje tedy jako jistá korekce posunutí, způsobená zrychlením $\mathbf{a}_0$. Podobně doplníme výpočet i v dalších krocích. Srovnajme tabulky s uvažovanou korekcí a bez ní.

Tab. 2 Bez korekce

čas	poloha $\mathbf{r}$	rychlost $\mathbf{v}$
t_0	$\mathbf{r}_0$	$\mathbf{v}_0$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\Delta t$	$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0\Delta t$
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1\Delta t$	$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{a}_1\Delta t$
$t_3 = \dots$	$\dots$	$\dots$

Tab. 3 S korekcí

čas	poloha $\mathbf{r}_p$	rychlost $\mathbf{v}$
t_0	$\mathbf{r}_0$	$\mathbf{v}_0$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$\mathbf{r}_{p1} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}_0\Delta t^2$	$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0\Delta t$
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$\mathbf{r}_{p2} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}_1\Delta t^2$	$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{a}_1\Delta t$
$t_3 = \dots$	$\dots$	$\dots$

3.2.1 Grafické řešení

Z důvodu větší názornosti je v některých případech vhodné řešit úlohu graficky. Na rozdíl od numerického řešení, kdy pracujeme se souřadnicemi (číslly), pracujeme zde přímo s vektory. Princip řešení je však obdobný viz. obr. 1,2,3. Grafická konstrukce byla provedena v úloze 8 (viz Řešené příklady), která popisuje pohyb komety kolem Slunce a v úloze 7, která znázorňuje balistickou křivku.

3.3 Kontrola správnosti a přesnosti řešení

V obtížných případech jsme k řešení použili počítače, který určil, zda existuje analytické řešení a jaký je jeho tvar. Tento způsob řešení by se však neměl považovat za základní. Mělo by se ho použít jen

*Označením $\mathbf{r}_p$ chceme naznačit, že se jedná o přesnější hodnotu veličiny $\mathbf{r}$.

jako doplňkové metody k ověření správnosti řešení. Pro žáky a studenty je mnohem přínosnější, když výsledek získají vlastním výpočtem, než-li ho jen pohodlně a bez porozumění opíší z obrazovky počítače. Počítače bylo užito k řešení příkladů 3 a 6, kde jeho výsledky sloužily ke zpřesnění výpočtů, získaných numerickou metodou. A dále v příkladě 6 ke grafické konstrukci tlumených kmitů.

Ke kontrole lze také použít zákonů zachování, které za daných podmínek platí - např. v příkladech 3 a 4 se jedná o zákon zachování mechanické energie, v příkladě 5 o zákon zachování hybnosti.

V jistých případech, pokud podmínky zadaného příkladu odpovídají podmínkám reálným, lze správnost výsledku ověřit i *experimentem*. V naší práci jsme tento způsob kontroly provedli v příkladě 4.

Kapitola 4

Řešené příklady

a) Úlohy s numerickým i analytickým řešením

1. Pohyb balónu
2. Pohyb loďky při působení odporové síly
3. Průběh pohybu na trampolíně

b) Úlohy pouze s řešením numerickým

4. Rotace tyče v gravitačním poli Země
5. Čelná nepružná srážka raketoplánu se sněhovou koulí
6. Tlumené kmitání

c) Úlohy s grafickým řešením

7. Balistická křivka
8. Pohyb komety kolem Slunce

PŘÍKLAD 1 Pohyb balónu

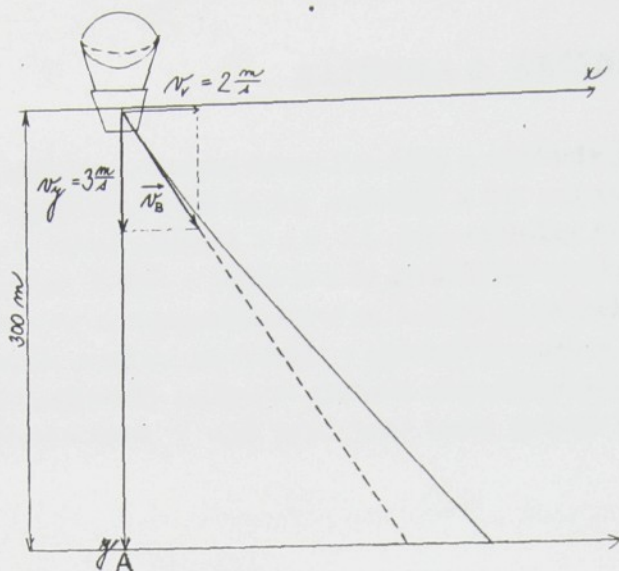
Balón je unášen větrem rychlosti $v_v = 2\text{ms}^{-1}$ ve směru osy y a v čase $t = 0\text{s}$ rovnoměrně klesá rychlostí $v_y = 3\text{ms}^{-1}$ (viz obr. 5). Hmotnost balónu je $m = 1100\text{ kg}$, vztlaková síla $F_{vz} = 8000\text{ N}$ a tíhové zrychlení uvažujeme pro jednoduchost $g = 10\text{ms}^{-2}$.

Úkol: Vypočítejte a) numericky, b) analyticky trajektorii a průběh rychlosti a zrychlení balónu po odhození zátěže. Odhadněte, kam balón dopadne.

(Poznámka: Při numerickém řešení volíme zkusmo odhozenou hmotnost Δm , vypočítáme trajektorii a dle výsledku změníme Δm . Provedeme konkrétně jeden takový výpočet, volíme $\Delta m = 100\text{kg}$).

Zadání: viz text příkladu.

Řešení:



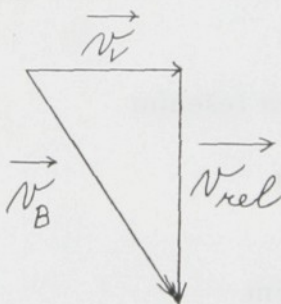
Obr. 5

ROZBOR SIL

Na balón působí vztlaková síla F_{vz} , tíhová síla F_G a odporová síla F_o . Pohybová rovnice je

$$F_{vz} + F_G + F_o = ma.$$

V našem systému souřadnic (podle obr. 5) platí, že vztlaková síla $F_{vz} = (0; -F_{vz}; 0)$, kde F_{vz} je velikost vztlakové síly. Podobně platí: $F_G = (0; mg; 0)$, $F_o = (0; -kv_y; 0)$. Odporová síla F_o je dána vztahem: $F_o = -kv_{rel}$, kde v_{rel} je relativní rychlost tj. rychlost balónu vůči prostředí. Tedy $v_{rel} = v_b - v_v$. Grafické znázornění:



Obr. 6

Z obr. 6 je zřejmé, že v našem příkladě je v_{rel} rovna složce rychlosti balónu do osy y , označené v_y . Potom je $F_o = -kv_y$.

SITUACE PŘED VYHOZENÍM ZÁTĚŽE Δm

Pohybová rovnice pro souřadnici y ve zvoleném systému souřadnic (viz obr.5) má tvar

$$-F_{vz} - kv_y + mg = ma_y. \quad (4.1)$$

Balón klesá rovnoměrně. Tedy $a_y = 0$ a z toho plyne, že $-F_{vz} + mg = kv_y$. Z tohoto vztahu je koeficient odporu k roven $k = \frac{mg - F_{vz}}{v_y}$. Po číselném dosazení je $k = 1000 \text{ Nsm}^{-1}$.

SITUACE PO VYHOZENÍ ZÁTĚŽE Δm

Pohybová rovnice je ve tvaru

$$-F_{vz} - kv_y + (m - \Delta m)g = (m - \Delta m)a_y. \quad (4.2)$$

Odtud je $a_y = \frac{(m - \Delta m)g - F_{vz} - kv_y}{m - \Delta m}$. Po číselném dosazení platí $a_y = 2 - v_y$.

a) Numerické řešení

Počáteční podmínky: $v_y(0) = 3ms^{-1}, y(0) = 0m$

Tab. 4 Pohyb balónu po vyhození zátěže

t [s]	y [m]	$v_y[ms^{-1}]$	$a_y[ms^{-2}]$
0.0	0.00	3.00	-1.00
0.5	1.25	2.50	-0.50
1.0	2.50	2.25	-0.25
1.5	3.63	2.13	-0.13
2.0	4.70	2.07	-0.07
2.5	5.74	2.04	-0.04
3.0	6.76	2.02	-0.02
3.5	7.77	2.01	-0.01
4.0	8.78	1.990	0.01
4.5	9.78	1.995	0.005
5.0	10.78	1.998	0.002
5.5	11.78	1.999	0.001
6.0	12.78	2.000	0.000
6.5	13.78	2.000	0.000

Zvolený krok $\Delta t = 0.5s$ je příliš velký. K dosažení přesnějších výsledků musíme zvolit Δt menší a to alespoň $\Delta t = 0.2s$. (viz str. 22)

b) Analytické řešení

Rovnice (4.2) v diferenciálním tvaru

$$-F_{vz} - kv_y + (m - \Delta m)g = (m - \Delta m)\frac{dv_y}{dt} ,$$

po úpravě

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{kv_y}{m - \Delta m} + \frac{F_{vz}}{m - \Delta m} - g = 0 .$$

Po dosazení konkrétních údajů ze zadání dostaneme diferenciální rovnici 1. řádu s konstantními koeficienty

$$\frac{dv_y}{dt} + v_y - 2 = 0 . \tag{4.3}$$

Tuto rovnici řešíme metodou charakteristické rovnice (viz kapitola 3.1c). Řešení dostáváme ve tvaru

$$v_y = 2 + Ke^{-t} . \tag{4.4}$$

v čase $t=0s : 3=2+K \rightarrow K=1$

$$v_y(t) = 2 + e^{-t} \tag{4.5}$$

$$y(t) = y(0) + \int_0^t v_y dt' = y(0) + \int_0^t 2 + e^{-t'} dt' = y(0) + 2t + [-e^{-t'}]_0^t$$

$$y(t) = y(0) + 2t + 1 - e^{-t} , \quad y(0) = 0 \rightarrow y(t) = 1 + 2t - e^{-t}$$

$a_y(t) = 2 - v_y(t)$, dosazením ze (4.5) je $a_y(t) = -e^{-t} .$

Tab. 5 $\Delta t = 0.20s$

t[s]	y[m]	$v_y[ms^{-1}]$	$a_y[ms^{-2}]$
0.0	0.00	3.00	-1.00
0.2	0.60	2.80	-0.80
0.4	1.16	2.64	-0.64
0.6	1.69	2.51	-0.51
0.8	2.19	2.41	-0.41
1.0	2.67	2.33	-0.33
1.2	3.14	2.26	-0.26
1.4	3.59	2.21	-0.21
1.6	4.03	2.17	-0.17
1.8	4.47	2.13	-0.13
2.0	4.89	2.11	-0.11
2.2	5.31	2.09	-0.09
2.4	5.73	2.07	-0.07
2.6	6.15	2.06	-0.06
2.8	6.56	2.04	-0.04
3.0	6.97	2.032	-0.032
3.2	7.38	2.026	-0.026
3.4	7.78	2.020	-0.020
3.6	8.19	2.016	-0.016
3.8	8.59	2.013	-0.013
4.0	8.99	2.010	-0.010

Tab. 5 (pokračování)

t[s]	y[m]	$v_y[ms^{-1}]$	$a_y[ms^{-2}]$
4.2	9.39	2.008	-0.008
4.4	9.79	2.006	-0.006
4.6	10.19	2.005	-0.005
4.8	10.59	2.004	-0.004
5.0	10.99	2.0032	-0.003
5.2	11.40	2.0026	-0.0026
5.4	11.80	2.0021	-0.0021
5.6	12.20	2.0017	-0.0017
5.8	12.60	2.0014	-0.0014
6.0	13.00	2.0011	-0.0011
6.2	13.40	2.0008	-0.0008
6.4	13.80	2.0007	-0.0007
6.6	14.20	2.0006	-0.0006
6.8	14.60	2.0004	-0.0004
7.0	15.00	2.00036	-0.00036
7.2	15.40	2.0003	-0.00030
7.4	15.80	2.00022	-0.00022
7.6	16.20	2.00018	-0.00018
7.8	16.60	2.00015	-0.00015
8.0	17.00	2.00012	-0.00012
8.2	17.40	2.00009	-0.00009

Tab. 6 Srovnání výsledků numerického a analytického řešení

Numerické řešení	Analytické řešení
$t = 1\text{ s}$	$t = 1\text{ s}$
$y = 2.67\text{ m}$	$y = 2.63\text{ m}$
$v_y = 2.33ms^{-1}$	$v_y = 2.37ms^{-1}$
$a_y = -0.33ms^{-2}$	$a_y = -0.37ms^{-2}$
$t = 7\text{ s}$	$t = 7\text{ s}$
$y = 15.00\text{ m}$	$y \doteq 15.00\text{ m}$
$v_y = 2.00ms^{-1}$	$v_y \doteq 2.00ms^{-1}$
$a_y = -0.00036ms^{-2}$	$a_y \doteq -0.00091ms^{-2}$

Relativní chyba $\delta x_{num} = \frac{|x_{num} - x_{anal}|}{x_{anal}}$ je u výpočtů trajektorie a rychlosti malá a to 2%. V případě zrychlení je relativní chyba větší, která postupně během pohybu stále narůstá. V čase $t = 1s$ je $\delta a_{ynum} = 10\%$, v čase $t = 7s$ už $\delta a_{ynum} = 60\%$. Vzhledem k malé hodnotě a_y však nemá chyba podstatný význam.

V tomto příkladě se projevila již zmíněná chyba numerického řešení. Tuto chybu může do jisté míry vyvážit fakt, že student z tabulek velmi názorně vidí, jak se zrychlení postupně zmenšuje, až dosáhne téměř nulové hodnoty (ustálení pohybu).

Body trajektorie vypočítané dle tab. 5 jsou znázorněny v grafech 1,2 v přílohách 1,2. Graf 1 je detail závislosti souřadnice x na souřadnici y , znázorňující trajektorii balónu. Čárkovaně je označena původní trajektorie, křížky označují body trajektorie po odhození zátěže. Její konečnou směrnici použijeme k

sestrojení grafu 2, ze kterého odhadneme místo dopadu balónu. Ukazuje se, že balón dopadne asi 286 m od místa A, označeného v grafu 2.

PŘÍKLAD 2 Pohyb loďky při působení odporové síly

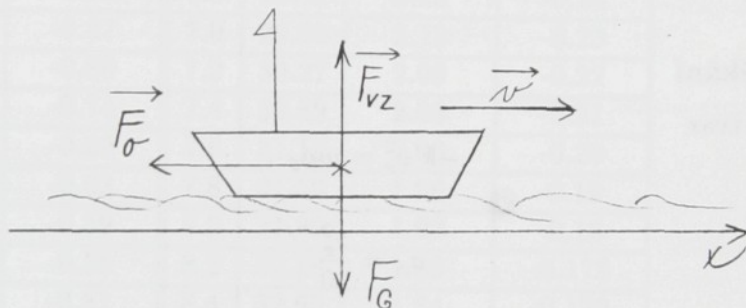
Loďka o hmotnosti $m = 20\text{ kg}$ pluje po hladině rybníku počáteční rychlostí $v_x(0) = 10\text{ ms}^{-1}$. Koeficient odporu při lineární závislosti je $k = 10\text{ Nm}^{-1}\text{s}$, koeficient odporu při kvadratické závislosti $k' = 1\text{ N s}^2\text{ m}^{-2}$. Předpokládejte, že hladina rybníku je stále v klidu.

Úkol: Vypočítejte a) numericky, b) analyticky průběh pohybu loďky.

1. Předpokládejte, že odporová síla je lineární funkcí rychlosti (případ laminárního obtékání).
2. Uvažte též případ, kdy je závislost odporové síly na rychlosti kvadratická (turbulentní obtékání).

Zadání: viz text příkladu.

Řešení:



Obr. 7

ROZBOR SIL

Na loďku působí tíhová síla $\mathbf{F}_G$, vztlačková síla $\mathbf{F}_{vz}$ a odporová síla $\mathbf{F}_o$.

Pohybová rovnice je ve tvaru $\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_{vz} + \mathbf{F}_o = m\mathbf{a}$.

Podmínkou plavání $\mathbf{F}_G = -\mathbf{F}_{vz}$ se pohybová rovnice zjednoduší na $\mathbf{F}_o = m\mathbf{a}$. Sílu $\mathbf{F}_o$ vypočítáme podle vztahu $\mathbf{F}_o = -k\mathbf{v} = (-kv_x; 0; 0)$ pro laminární obtékání nebo podle vztahu $\mathbf{F}_o = -k'\mathbf{v}^2 = (-k'v_x^2; 0; 0)$ pro turbulentní obtékání.

a) Numerické řešení

1. Laminární obtékání

Pohybová rovnice pro souřadnici x (podle obr. 7) je ve tvaru

$$-kv_x = ma_x.$$

Po číselném dosazení

$$a_x = \frac{-v_x}{2}.$$

Počáteční podmínky jsou $v_x(0) = 10\text{ ms}^{-1}$, $x(0) = 0\text{ m}$.

Tab. 7 Laminární obtékání

t[s]	x[m]	$v_x[ms^{-1}]$	$a_x[ms^{-2}]$	t[s]	x[m]	$v_x[ms^{-1}]$	$a_x[ms^{-2}]$
0.0	0.00	10.00	-5.00	2.4	15.73	3.46	-1.73
0.2	2.00	9.00	-4.50	2.6	15.65	3.11	-1.55
0.4	3.80	8.10	-4.05	2.8	16.27	2.80	-1.40
0.6	5.42	7.29	-3.65	3.0	16.83	2.52	-1.26
0.8	6.88	6.56	-3.28	3.2	17.33	2.27	-1.14
1.0	8.19	7.22	-3.61	3.4	17.79	2.04	-1.02
1.2	9.63	6.50	-3.25	3.6	18.20	1.83	-0.92
1.4	10.93	5.85	-2.92	3.8	18.56	1.65	-0.83
1.6	12.10	5.27	-2.63	4.0	18.89	1.48	-0.74
1.8	13.16	4.74	-2.37	4.2	19.19	1.33	-0.67
2.0	14.11	4.27	-2.13	4.4	19.45	1.20	-0.60
2.2	14.96	3.84	-1.92	4.6	19.69	1.08	-0.54

2. Turbulentní obtékání

Pohybová rovnice má tvar

$$-k'v_x^2 = ma_x .$$

Po číselném dosazení

$$a_x = \frac{v_x^2}{20} .$$

Počáteční podmínky jsou stejné jako v případě laminárního obtékání.

Tab. 8 Turbulentní obtékání

t[s]	x[m]	$v_x[ms^{-1}]$	$a_x[ms^{-2}]$	t[s]	x[m]	$v_x[ms^{-1}]$	$a_x[ms^{-2}]$
0.0	0.00	10.00	-5.00	4.4	23.19	3.00	-0.45
0.2	2.00	9.00	-4.05	4.6	23.79	2.91	-0.42
0.4	3.80	8.19	-3.35	4.8	24.37	2.83	-0.40
0.6	5.40	7.52	-2.83	5.0	25.49	2.67	-0.36
0.8	6.90	6.95	-2.42	5.2	25.49	2.67	-0.36
1.0	8.29	6.47	-2.09	5.4	26.02	2.60	-0.34
1.2	9.58	6.05	-1.83	5.6	26.54	2.53	-0.32
1.4	10.79	5.68	-1.61	5.8	27.05	2.47	-0.30
1.6	11.93	5.36	-1.44	6.0	27.54	2.41	-0.29
1.8	13.00	5.07	-1.29	6.2	28.03	2.35	-0.28
2.0	13.96	4.81	-1.16	6.4	28.50	2.30	-0.26
2.2	14.93	4.58	-1.05	6.6	28.96	2.25	-0.25
2.4	15.85	4.37	-0.96	6.8	29.41	2.18	-0.24
2.6	16.72	4.18	-0.87	7.0	29.85	2.13	-0.23
2.8	17.56	4.01	-0.80	7.2	30.27	2.09	-0.22
3.0	18.36	3.85	-0.74	7.4	30.69	2.05	-0.21
3.2	19.13	3.70	-0.69	7.6	31.10	2.00	-0.20
3.4	19.87	3.56	-0.63	7.8	31.50	1.96	-0.19
3.6	20.58	3.43	-0.59	8.0	31.89	1.92	-0.18
3.8	21.27	3.31	-0.55	8.2	32.28	1.88	-0.178
4.0	21.93	3.20	-0.51	8.4	32.65	1.84	-0.170
4.2	22.57	3.10	-0.48	8.6	33.02	1.81	-0.160

b) Analytické řešení

1. Laminární proudění

Pohybová rovnice je ve tvaru

$$m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x .$$

Po číselném dosazení a po separaci proměnných je

$$\frac{dv_x}{v} = \frac{-dt}{2} .$$

Po integraci dostaneme

$$\ln v_x = \frac{-t}{2} + c . \tag{4.6}$$

Integrační konstantu c určíme z počáteční podmínky $v_x(0) = 10ms^{-1}$. Tedy $c = \ln 10$.

Ze vztahu(4.6) je $\ln v_x - \ln 10 = \frac{-t}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{v_x}{10} &= e^{\frac{-t}{2}} \\ v_x(t) &= 10e^{\frac{-t}{2}} \end{aligned} \tag{4.7}$$

definice $v_x(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}$ určíme integrací $x(t)$,

$$x(t) = \int_0^t v_x(t') dt' . \tag{4.8}$$

Po dosazení ze vztahu (4.7) do (4.8) je

$$x(t) = \int_0^t 10e^{-\frac{t'}{2}} dt'.$$

Integrací dostaneme

$$x(t) = -20(e^{-\frac{t}{2}} - 1).$$

2. Turbulentní proudění

Pohybová rovnice je ve tvaru

$$m \frac{dv_x}{dt} = -k'v_x^2.$$

Po číselném dosazení a po separaci proměnných dojdeme ke vztahu

$$\frac{dv}{v_x^2} = \frac{-dt}{20}.$$

Tuto rovnici zintegrujeme a dostaneme

$$\frac{-1}{v_x} = \frac{-t}{20} + c. \quad (4.9)$$

Integrační konstantu c určíme z počáteční podmínky $v_x(0) = 10 \text{ ms}^{-1} \rightarrow c = \frac{-1}{10}$.

Po dosazení do (4.9) je

$$\frac{-1}{v_x} = -\frac{t}{20} - \frac{1}{10}.$$

Odtud získáme vztah pro v_x ,

$$v_x(t) = \frac{20}{t+2}.$$

Po integraci dojdeme ke vztahu

$$x(t) = \int_0^t \frac{20}{t'+2} dt' = 20 \left(\ln \frac{t+2}{2} \right).$$

Srovnání numerického a analytického řešení

Tab. 9 Laminární obtékání

Numerické řešení	Analytické řešení
$t=1,2\text{s}$	$t=1,2\text{s}$
$x=9,63\text{m}$	$x=9,02\text{m}$
$v_x = 6,50\text{ms}^{-1}$	$v_x = 5,49\text{ms}^{-1}$
$t=4,4\text{s}$	$t=4,4\text{s}$
$x=19,45\text{ m}$	$x=17,78\text{m}$
$v_x = 1,20\text{ms}^{-1}$	$v_x = 1,11\text{ms}^{-1}$

Relativní chyba numerického řešení $\delta x_{num} = \frac{|x_{num} - x_{anal}|}{x_{anal}}$, podobně $\delta v_{xnum} = \frac{|v_{xnum} - v_{xanal}|}{v_{xanal}}$ nepřesahuje v žádném z těchto konkrétních případů 20%.

Tab. 10 Turbulentní obtékání

Numerické řešení	Analytické řešení
$t=1,2\text{s}$ $x=9,58\text{ m}$ $v_x = 6,05\text{ms}^{-1}$	$t=1,2\text{s}$ $x=9,40\text{ m}$ $v_x = 6,25\text{ms}^{-1}$
$t=4,4\text{s}$ $x=23,19\text{ m}$ $v_x = 3,00\text{ms}^{-1}$	$t=4,4\text{s}$ $x=23,26\text{ m}$ $v_x = 3,125\text{ms}^{-1}$

V těchto konkrétních případech jsou numerické výpočty mnohem přesnější než u laminárního proudění a relativní chyby numericky vypočtených rychlostí a souřadnic nepřesahují 4%.

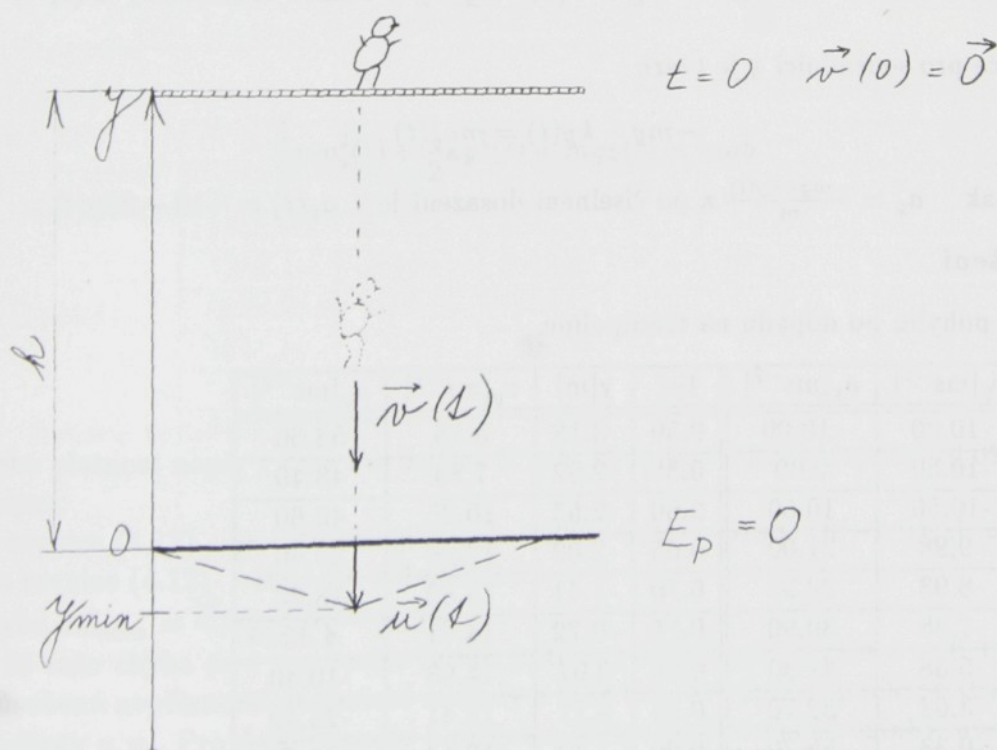
Příklad 3 Průběh pohybu na trampolíně

Cvičenec o hmotnosti $m = 100\text{kg}$ skáče z výšky $h = 5\text{m}$ na trampolínu. Tuhost trampolíny je $k = 2 \cdot 10^3\text{N.m}^{-1}$, tíhové zrychlení uvažujeme pro jednoduchost $g = 10\text{m.s}^{-2}$.

Úkol:

- Vypočítejte průběh souřadnice $y(t)$:
 - v úseku $y > 0$ analyticky.
 - v úseku $y < 0$ numericky (viz obr. 8).
- Vypočítejte $y_{\min}$ analyticky ze zákona zachování mechanické energie. Porovnejte s numerickým řešením.
- Ve vybraném okamžiku t_1 (v úseku $y < 0$) proveďte kontrolu numerického výpočtu zákonem zachování mechanické energie.

Zadání : viz text příkladu.



Obr. 8

Řešení:

Úkol 1a)

V úseku $y > 0$ jsou počáteční podmínky: $t_0 = 0\text{s}$, $v(0) = 0\text{ms}^{-1}$, $y(0) = 5\text{m}$.

ROZBOR SIL (viz obr. 8)

Předpokládejme, že na cvičence působí pouze tíhová síla $\mathbf{F}_G = (0; -mg; 0)$. (Vztlakovou a odporovou sílu zanedbáme).

Pohybová rovnice je ve tvaru

$$mg = ma.$$

Pro souřadnici y (podle obr. 8) $-mg = ma_y$.Po jednoduché matematické úpravě dostaneme $-g = \frac{dv_y}{dt}$. Odtud pak $dv_y = -gdt$ a po zintegrování

$$v_y(t) = -gt + c_1. \quad (4.10)$$

Konstantu c_1 získáme z počátečních podmínek a je zřejmé, že $c_1 = 0$.

Další integrací vztahu (4.10) dostaneme

$$y(t) = \frac{-gt^2}{2} + c_1t + c_2. \quad (4.11)$$

Z počátečních podmínek plyne, že $c_2 = 0$.V úseku $y > 0$ se jedná o volný pád. Dobu volného pádu t vypočítáme podle (4.11) $t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$. Po dosazení je $t = 1\text{s}$. Ze vztahu (4.10) dostaneme pro konečnou hodnotu rychlosti $v_y = -10\text{m.s}^{-1}$.

Úkol 1b)

V úseku $y < 0$ jsou počáteční podmínky: $t_0 = 0\text{s}$, $v_y(0) = -10\text{m.s}^{-1}$, $y(0) = 0\text{m}$, $E_p(0) = 0\text{J}$.

ROZBOR SIL

Na cvičence působí tíhová síla $\mathbf{F}_G = mg = (0; -mg; 0)$ a reakce trampolíny $\mathbf{F}(t) = -ku(t) = (0; -ky(t); 0)$.Pohybová rovnice pro souřadnici y je tvaru

$$-mg - ky(t) = ma_y(t).$$

Z této rovnice pak $a_y = \frac{-mg - ky(t)}{m}$ a po číselném dosazení je $a_y(t) = -10 - 20y(t)$.**Numerické řešení**

Tab. 11 Průběh pohybu po dopadu na trampolínu

$t[\text{s}]$	$y[\text{m}]$	$v_y[\text{ms}^{-1}]$	$a_y[\text{ms}^{-2}]$	$t[\text{s}]$	$y[\text{m}]$	$v_y[\text{ms}^{-1}]$	$a_y[\text{ms}^{-2}]$
0.00	0.00	-10.00	-10.00	0.50	-3.18	5.15	53.60
0.05	-0.50	-10.50	0.00	0.55	-2.92	7.83	48.40
0.10	-1.03	-10.50	10.50	0.60	-2.53	10.25	40.60
0.15	-1.55	-9.98	21.00	0.65	-2.02	12.28	30.40
0.20	-2.05	-8.93	30.98	0.70	-1.41	13.80	18.20
0.25	-2.50	-7.38	39.90	0.75	-0.72	14.71	4.40
0.30	-2.86	-5.38	47.30	0.80	0.02	14.93	-10.40
0.35	-3.13	-3.02	52.70	0.85	0.77	14.41	-25.40
0.40	-3.28	-0.38	55.70	0.90	1.49	13.14	-39.80
0.45	-3.30	2.40	55.00	0.95	2.15	11.15	-52.90

Tab. 11 je pro přesnější posouzení pohybu nevhodná. Změny veličin v_y, a_y, y dosahují v jednotlivých časových krocích až 50% své hodnoty a v těchto případech užití vztahů $\Delta v_y = a_y \Delta t, \Delta y = v_y \Delta t$ vede k velkým chybám. Změny $\Delta a_y, \Delta v_y, \Delta y$ nemůžeme považovat za dostatečně malé (viz kap. 3.2). Výpočet zpřesníme zmenšením kroku $\Delta t = 0.02$ s (tab. 12).

Tab. 12

t[s]	y[m]	$v_y[ms^{-1}]$	$a_y[ms^{-2}]$	t[s]	y[m]	$v_y[ms^{-1}]$	$a_y[ms^{-2}]$
0.00	0.00	-10.00	-10.00	0.24	-2.34	-7.16	36.70
0.02	-0.20	-10.20	-6.00	0.26	-2.48	-6.43	39.70
0.04	-0.40	-10.44	-1.92	0.28	-2.61	-5.64	42.20
0.06	-0.61	-10.48	2.20	0.30	-2.72	-4.80	44.46
0.08	-0.82	-10.44	6.40	0.32	-2.82	-3.91	46.40
0.10	-1.03	-10.30	10.60	0.34	-2.90	-2.98	48.00
0.12	-1.24	-10.09	14.80	0.36	-2.96	-2.02	49.20
0.14	-1.44	-9.79	18.80	0.38	-3.00	-1.04	50.00
0.16	-1.64	-9.41	22.70	0.40	-3.02	-0.04	50.40
0.18	-1.83	-8.96	26.60	0.42	-3.02	0.97	50.40
0.20	-2.01	-8.43	30.20	0.44	-3.00	1.98	50.00
0.22	-2.18	-7.83	33.60	0.46	-2.96	2.98	49.20

Ukazuje se, že ani zmenšení kroku Δt nezpřesní výpočty natolik, aby číselné hodnoty souhlasily se zákonem zachování mechanické energie.

V našem přiblížení platí v libovolném okamžiku t zákon zachování mechanické energie, který má tvar

$$\frac{1}{2}mv_y^2(t) + \frac{1}{2}ky^2(t) + mgy(t) = mgh . \tag{4.12}$$

věříme si jeho platnost např. v čase $t = 0.12$ s . Z tab. 12 je $y = -1.24$ m, $v_y = -10.09$ ms⁻¹ .
Číselné dosazení:
levá strana rovnice (4.12) $\frac{1}{2} \cdot 100(-10.09)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2000(-1.24)^2 + 100 \cdot 10(-1.24)$ J =5388 J .
pravá strana rovnice (4.12) $100 \cdot 10 \cdot 5$ J=5000 J .
relativní chyba $\delta E_{num} = \frac{|E_{num}-E_{ZZE}|}{E_{ZZE}}$ je 8%.
Ukazuje se, že tato chyba se s rostoucím časem ještě zvyšuje. Např. v čase $t = 0.38$ s již činí 20%.
Chyba je způsobená nepřesností numerické metody a také tím, že výpočet podle (4.12) je velmi citlivý na číselné hodnoty y, v_y . Pro další výpočty použijeme korigované přesnější vztahy, uvedené v tab. 3 v kapitole 3.2. Pro porovnání uvádíme ještě v druhém sloupci tab. 13 číselné hodnoty y , vypočítané dle korigovaných vztahů tab. 2 (viz kap. 3.2).

Tab. 13 s korekcí

t[s]	y[m]	y _p [m]	y[ms ⁻¹]	a[ms ⁻²]	t[s]	y[m]	y _p [m]	y[ms ⁻¹]	a[ms ⁻²]
0.00	0.000	0.000	-10.000	-10.000	0.26	-2.447	-2.414	-6.394	38.280
0.02	-0.200	-0.200	-10.200	-5.960	0.28	-2.575	-2.534	-5.628	40.684
0.04	-0.404	-0.407	-10.319	-1.856	0.30	-2.688	-2.638	-4.814	42.768
0.06	-0.610	-0.614	-10.356	2.275	0.32	-2.784	-2.726	-3.959	44.516
0.08	-0.817	-0.821	-10.311	6.413	0.34	-2.863	-2.796	-3.069	45.926
0.10	-1.023	-1.028	-10.183	10.560	0.36	-2.925	-2.848	-2.150	46.964
0.12	-1.227	-1.229	-9.972	14.591	0.38	-2.968	-2.882	-1.211	47.632
0.14	-1.426	-1.425	-9.680	18.510	0.40	-2.992	-2.897	-0.258	47.934
0.16	-1.620	-1.615	-9.310	22.298	0.42	-2.997	-2.893	0.701	47.851
0.18	-1.806	-1.797	-8.864	25.935	0.44	-2.983	-2.869	1.658	47.382
0.20	-1.983	-1.969	-8.345	29.382	0.46	-2.950	-2.826	2.606	46.527
0.22	-2.150	-2.130	-7.757	32.60	0.48	-2.898	-2.765	3.537	45.291
0.24	-2.305	-2.279	-7.105	35.572	0.50	-2.827	-2.685	4.443	43.704

Ověříme přesnost výpočtů zákonem zachování mechanické energie podle (4.12) např. v čase $t = 0.12s$.
 $LS = \frac{1}{2} \cdot 100(-9.972)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2000(-1.229)^2 + 100 \cdot 10(-1.229) \text{ J} = 5253 \text{ J}$.
 $PS = 5000 \text{ J}$.

Relativní chyba δE_{num} je 5%, tedy o 2% nižší než u nekorigovaných hodnot y .
Pro tento příklad není numerická metoda dostatečně přesná a je vhodnější použít metodu analytickou.

Analytické řešení bylo získáno počítačem a je ve tvaru

$$y(t) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\sqrt{5}t - \sqrt{5} \sin 2\sqrt{5}t , \tag{4.13}$$

$$v_y(t) = -\sqrt{5} \sin 2\sqrt{5}t - 10 \cos 2\sqrt{5}t , \tag{4.14}$$

$$a_y(t) = 20\sqrt{5} \sin 2\sqrt{5}t - 10 \cos 2\sqrt{5}t . \tag{4.15}$$

Tab. 14 Výsledky analytické metody-počítač

t[s]	y[m]	v _y [ms ⁻¹]	a _y [ms ⁻²]	t[s]	y[m]	v _y [ms ⁻¹]	a _y [ms ⁻²]
0.00	0.0000	-10.0000	-10.0000	0.26	-2.3541	-6.0206	37.0816
0.02	-0.2017	-10.1598	-5.9654	0.28	-2.4669	-5.2559	39.3384
0.04	-0.4058	-10.2383	-1.8830	0.30	-2.5640	-4.4492	41.2807
0.06	-0.6107	-10.2350	2.2144	0.32	-2.6447	-3.6069	42.8930
0.08	-0.8147	-10.1498	6.2941	0.34	-2.7081	-2.7357	44.1624
0.10	-1.0162	-9.9836	10.3234	0.36	-2.7539	-1.8427	45.0787
0.12	-1.2135	-9.7375	14.2702	0.38	-2.7817	-0.9350	45.6346
0.14	-1.4052	-9.4135	18.1030	0.40	-2.7913	-0.0198	45.8257
0.16	-1.5896	-9.0143	21.7910	0.42	-2.7825	0.8956	45.6504
0.18	-1.7652	-8.5430	25.3048	0.44	-2.7555	1.8038	45.1102
0.20	-1.9308	-8.0035	28.6163	0.46	-2.7105	2.6976	44.2093
0.22	-2.0850	-7.3999	31.6991	0.48	-2.6478	3.5698	42.9549
0.24	-2.2264	-6.7372	34.5284	0.50	-2.5679	4.4135	41.3572

Můžeme se snadno přesvědčit, že počítačové výsledky z tab. 14 jsou konzistentní se zákonem zachování mechanické energie.

Číselné dosazení do (4.12) např. v čase $t = 0.12s$

$$LS = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (-9,7375)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot (-1,2135)^2 + 100 \cdot 10 \cdot (-1,2135) \text{ J} = 5000 \text{ J} .$$

$$PS = 5000 \text{ J} .$$

Úkol 2

Pro extrémální souřadnici y musí platit, že $v_y = 0 \text{ ms}^{-1}$. (Cvičenec se v místě maximálního protažení trampolíny na okamžik zastaví). Zákon zachování mechanické energie je pak ve tvaru

$$\frac{1}{2}ky^2 + mgy = mgh .$$

Z tohoto vztahu je

$$y_{1,2} = \frac{-mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k} .$$

Po číselném dosazení

$$y_{\max} = \frac{-100 \cdot 10 + \sqrt{100^2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 2000 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 5}}{2000} = 1,79 \text{ m} , \quad (4.16)$$

$$y_{\min} = \frac{-100 \cdot 10 - \sqrt{100^2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 2000 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 5}}{2000} = -2,79 \text{ m} . \quad (4.17)$$

$y_{\max}$ má fyzikální smysl v případě, že by se cvičenec po dopadu pevně spojil s trampolínou.

Tab. 15 Porovnání výsledků $y_{\min}$ získaných numerickou resp. analytickou metodou s výsledky zákona zachování mechanické energie

$y_{\min}$ ze ZZME	$y_{\min}$ num. resp. anal. metodou
$y_{\min} = -2.791 \text{ m}$	Tab. 11: $y_{\min} = < -3.30; -3.28 > \text{ m}$
	Tab. 12: $y_{\min} = -3.02 \text{ m}$
	Tab. 13: $y_{\min} = < -2.897; -2.893 > \text{ m}$
	Tab. 14: $y_{\min} = < -2.791; -2.783 > \text{ m}$

oznámka: Číselné hodnoty $y_{\min}$ leží v intervalu, jelikož okamžik obratu směru rychlosti v_y nelze z tabulek přesně určit.

Je vidět, že se výsledky postupně zpřesňují. Nejpřesnější hodnota $y_{\min}$ je z tabulky 14, která je konstantní se zákonem zachování mechanické energie.

Úkol 3

splněn v úkolu 1.

Příklad 4 Rotace tyče v gravitačním poli Země

Tyč délky $L = 1,51 \text{ m}$ a hmotnosti $m = 0,47 \text{ kg}$ se otáčí kolem pevné osy z , která je kolmá na rovinu otáčení (viz obr. 9). V čase $t = 0 \text{ s}$ je úhlová rychlost tyče $\omega(0) = 0 \text{ rads}^{-1}$ a úhlová dráha $\varphi(0) = \frac{\pi}{12}$ rad. Tíhové zrychlení uvažujeme $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$.

Úkol:

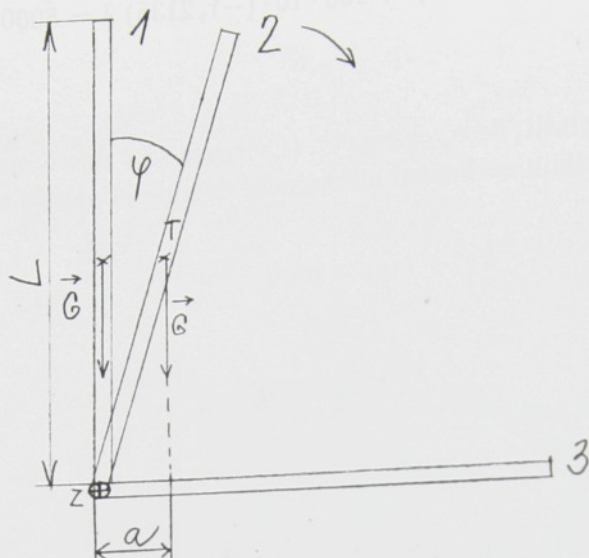
Vypočítejte numericky průběh úhlové rychlosti $\omega(t)$ a úhlové dráhy $\varphi(t)$.

Proveďte kontrolu numerického výpočtu zákonem zachování mechanické energie.

Získané výsledky ověřte experimentem.

Řešení: viz text příkladu.

Řešení:



Obr. 9 Rotace tyče

Jedná se o otáčivý pohyb kolem osy z , pro který platí následující vztahy. Souřadnice z momentu tíhy je $M_z = mga$ [ŠAN-93:192]. Tíha působí v těžišti T . Podle obr. 9 je

$$M_z = mg \frac{L}{2} \sin \varphi . \quad (4.18)$$

Pohybová rovnice tuhého tělesa je pro rotační pohyb kolem osy z [ŠAN-93:194]

$$M_z = \frac{db_z}{dt} . \quad (4.19)$$

Souřadnice točivosti tuhého tělesa je dána vztahem

$$b_z = J_z \omega . \quad (4.20)$$

Moment setrvačnosti J_z vzhledem k ose z je podle [BR-80:46] roven

$$J_z = \frac{1}{3} mL^2 . \quad (4.21)$$

Dosazením ze vztahů (4.21)(4.20),(4.18) do (4.19) dostaneme po úpravě

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \sin \varphi(t) . \quad (4.22)$$

Pro jednoduchost zavedeme konstantu $K = \frac{3g}{2L}$. Pohybová rovnice má pak tvar

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = K \sin \varphi(t) . \quad (4.23)$$

Rovnice (4.23) je nelineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty, pro kterou nelze najít analytické řešení. Proto řešíme úlohu numericky.

ÚKOL 1 Numerické řešení

Levá strana rovnice (4.23) je úhlové zrychlení ε , tedy

$$\varepsilon = K \sin \varphi(t) .$$

Po číselném dosazení je

$$\varepsilon(t) = 9.75 \sin \varphi(t) \text{ .}$$

K numerickému výpočtu používáme další vztahy: $\Delta\omega = \varepsilon\Delta t$, $\Delta\varphi = \omega\Delta t$.
Ze zkušenosti z předcházejících příkladů víme, že pohyb v intervalu Δt není rovnoměrný, proto k výpočtu úhlové dráhy φ použijeme korigovaný vztah $\varphi(t_{i+1}) = \varphi(t_i) + \frac{\omega(t_i) + \omega(t_{i+1})}{2} \Delta t$.

Tab. 16 Průběh rotace tyče

t[s]	φ [rad]	ω [rads ⁻¹]	ε [rads ⁻²]	t[s]	φ [rad]	ω [rads ⁻¹]	ε [rads ⁻²]
0.00	0.262	0.000	2.523	0.50	0.636	1.720	5.788
0.05	0.268	0.126	2.585	0.55	0.729	2.009	6.496
0.10	0.278	0.255	2.671	0.60	0.838	2.334	7.244
0.15	0.294	0.389	2.826	0.65	0.964	2.696	8.008
0.20	0.317	0.530	3.039	0.70	1.109	3.096	8.728
0.25	0.347	0.682	3.319	0.75	1.275	3.532	9.326
0.30	0.385	0.847	3.664	0.80	1.463	3.998	9.694
0.35	0.432	1.030	4.082	0.82	1.545	4.192	9.747
0.40	0.489	1.234	4.577	0.84	1.631	4.387	9.732
0.45	0.556	1.463	5.149	0.86	1.721	4.582	9.640

Dosáhne-li úhlová dráha hodnoty $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad tj.1.571 rad, tyč dopadne na vodorovnou podložku(poloha 3) - viz obr. 9.

ÚKOL 2

Zákon zachování mechanické energie tyče mezi polohami (2) a (3) je ve tvaru $E_p(2) + E_k(2) = E_p(3) + E_k(3)$, tedy

$$mg \frac{L}{2} \cos \varphi(0) + 0 = 0 + \frac{1}{2} J_z \omega_3^2 \quad , \quad [\text{ŠAN-93:196}]$$

$$\omega(3) = \sqrt{\frac{3g \cos \varphi(0)}{L}} \text{ .}$$

Po číselném dosazení je $\omega(3) = 4.34 \text{ rad s}^{-1}$.
Z tab. 16 je patrné, že úhlová rychlost tyče při dopadu, které odpovídá $\varphi = 1.571$ rad je interval $\omega = < 4.19; 4.39 > \text{ rads}^{-1}$. Hodnotu ω_{num} získáme lineární interpolací k hodnotě $\varphi(3)$ [ČM-85:22].
 $\omega_{num}(3) = 4.25 \text{ rads}^{-1}$. Relativní odchylka $\delta\omega_{num}(3) = \frac{|\omega_{num}(3) - \omega_{ZZME}(3)|}{\omega_{ZZME}(3)}$ je 2%.

ÚKOL 3

Srovnáme dobu pádu tyče t z tab. 16 s výsledky, které získáme experimentem. 10x měříme elektrickými stopkami dobu pádu tyče z polohy (2) do polohy (3).

Tab. 17 Měření doby pádu tyče

t[s]	Δt [s]
0.88	+0.04
0.86	+0.02
0.88	+0.04
0.85	+0.01
0.83	
0.81	
0.79	
0.86	+0.02
0.85	+0.01
0.82	

Numerické výsledky tab. 17 zpracujeme metodou kladných odchylek podle [ČM-85:17] a určíme střední hodnotu: $t = (0.84 \pm 0.03)$ s. Z tab. 16 je zřejmé, že doba pádu je v intervalu $t = < 0.82; 0.84 >$ s. Výsledky experimentu jsou téměř v úplné shodě s numerickými výpočty tab. 16.

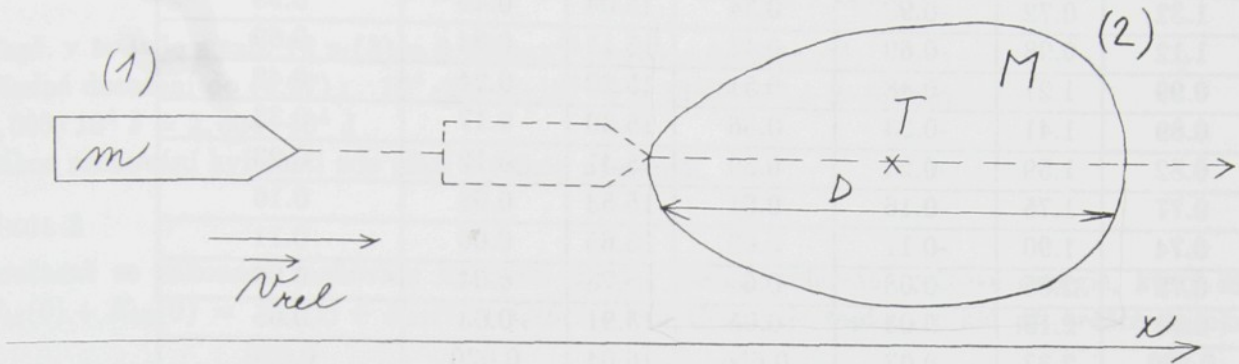
Příklad 5 Čelná nepružná srážka raketoplánu se sněhovou koulí

Raketoplán (1) se přibližuje ke sněhové kouli (2) relativní rychlostí $v_{xrel} = 2ms^{-1}$. Jeho hmotnost je $m = 10000$ kg. Hmotnost koule je $M = 20000$ kg. V důsledku srážky zaznamená palubní přístroj raketoplánu negativní počáteční zrychlení $a_1 = -2ms^{-2}$.

- Úkol:
1. Vypočítejte numericky průběh souřadnice $x(t)$, rychlosti $v_x(t)$ a zrychlení $a_x(t)$ jak pro raketoplán (1), tak pro těžiště koule (2). Rozhodněte, zda nastane průnik nebo záchyt.
 2. Zkontrolujte výpočet v libovolně zvoleném okamžiku t zákonem zachování hybnosti.
 3. Ze zákona zachování celkové energie vypočítejte množství tepla Q , vzniklého při srážce do libovolně zvoleného okamžiku t .

Zadání: viz text příkladu.

Řešení:



Obr. 10 Srážka raketoplánu s koulí

ROZBOR SIL

Předpokládáme, že po srážce působí na raketoplán (1) koule (2) odporovou silou $\mathbf{F}_0 = -k\mathbf{v}_{rel}(t)$, kde $\mathbf{v}_{rel}(t) = \mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)$ a $\mathbf{v}_2(t)$ je rychlost těžiště koule.

Pohybová rovnice pro raketoplán je

$$-k\mathbf{v}_{rel} = m\mathbf{a}_1.$$

V souřadnicích

$$-kv_{xrel} = ma_{1x}. \quad (4.24)$$

Podle 3. Newtonova zákona akce a reakce (viz kap. 2) působí raketoplán na kouli opačnou silou $\mathbf{F} = +k\mathbf{v}_{rel}$. Pohybová rovnice pro kouli je

$$k\mathbf{v}_{rel} = M\mathbf{a}_2.$$

V souřadnicích

$$kv_{xrel} = Ma_{2x}. \quad (4.25)$$

Ze vztahů (4.24), (4.25) dostáváme po číselném dosazení

$$a_{1x} = -v_{xrel}, \quad a_{2x} = \frac{1}{2}v_{xrel}. \quad (4.26)$$

Z těchto vztahů vyjdeme při numerickém řešení, postupujeme jako v předcházejících příkladech.

ÚKOL 1 Numerické řešení

Počáteční podmínky: $t_0 = 0s$, $v_{1x}(0) = 2ms^{-1}$, $v_{2x}(0) = 0ms^{-1}$, $x_1(0) = 0m$, $x_2(0) = 15m$

Tab. 18 Pohyb raketoplánu a koule po srážce

$t[s]$	$v_{1x}[ms^{-1}]$	$x_1[m]$	$a_{1x}[ms^{-2}]$	$v_{2x}[ms^{-1}]$	$x_2[m]$	$a_{2x}[ms^{-2}]$	$v_{1x} - v_{2x}[ms^{-1}]$
0.0	2.00	0.00	-2.00	0.00	15.00	1.00	2.00
0.2	1.60	0.40	-1.40	0.20	15.00	0.70	1.40
0.4	1.32	0.72	-0.98	0.34	15.04	0.49	0.98
0.6	1.12	0.98	-0.69	0.44	15.11	0.34	0.69
0.8	0.99	1.21	-0.48	0.51	15.20	0.24	0.48
1.0	0.89	1.41	-0.33	0.56	15.30	0.17	0.33
1.2	0.82	1.59	-0.23	0.59	15.41	0.12	0.23
1.4	0.77	1.75	-0.16	0.61	15.53	0.08	0.16
1.6	0.74	1.90	-0.11	0.63	15.65	0.06	0.11
1.8	0.72	2.05	-0.08	0.64	15.78	0.04	0.08
2.0	0.70	2.19	-0.05	0.65	15.91	0.03	0.05
2.2	0.690	2.33	-0.03	0.656	16.04	0.020	0.030
2.4	0.684	2.47	-0.02	0.660	16.17	0.012	0.024
2.6	0.679	2.61	-0.017	0.662	16.30	0.009	0.017
2.8	0.676	2.75	-0.012	0.664	16.43	0.006	0.012
3.0	0.674	2.89	-0.009	0.665	16.56	0.005	0.009
3.2	0.672	3.02	-0.006	0.666	16.69	0.003	0.006
3.4	0.671	3.15	-0.004	0.667	16.82	0.002	0.004
3.6	0.670	3.28	-0.003	0.667	16.95	0.002	0.003
3.8	0.669	3.41	-0.0020	0.6670	17.08	0.0010	0.002
4.0	0.6686	3.54	-0.0014	0.6672	17.21	0.0007	0.0014

Z tabulky 18 je patrné, že se raketoplán zachytil v kouli a pohybuje se spolu s ní. K tomu, aby raketoplán pronikl koulí, je třeba změnit počáteční podmínky a to např. tak, že: $v_{1x}(0) = 20ms^{-1}$, $a_{1x}(0) = -1ms^{-2}$. Tím se také změní rovnice (4.26) v následující

$$a_{1x} = \frac{-v_{xrel}}{20}, \quad a_{2x} = \frac{v_{xrel}}{40}.$$

Pro tento případ platí tabulka 19.

Tab. 19 Průnik raketoplánu koulí

$t[s]$	$v_{1x}[ms^{-1}]$	$x_1[m]$	$a_{1x}[ms^{-2}]$	$v_{2x}[ms^{-1}]$	$x_2[m]$	$a_{2x}[ms^{-2}]$	$v_{1x} - v_{2x}[ms^{-1}]$
0.0	20.00	0.00	-1.00	0.00	15.00	0.500	20.00
0.2	19.80	4.00	-0.99	0.10	15.00	0.490	19.70
0.4	19.60	7.96	-0.97	0.20	15.02	0.485	19.40
0.6	19.41	11.90	-0.96	0.30	15.06	0.478	19.10
0.8	19.22	15.80	-0.94	0.39	15.12	0.470	18.80
1.0	19.03	19.60	-0.93	0.48	15.20	0.460	18.50
1.2	18.84	23.40	-0.91	0.57	15.30	0.457	18.30
1.4	18.66	27.20	-0.90	0.66	15.40	0.450	18.00
1.6	18.48	30.90	-0.89	0.75	15.53	0.440	17.70
1.8	18.30	34.60	-0.87	0.84	15.68	0.437	17.46

Po změně počátečních podmínek raketoplán již po 1,6s pronikne koulí.

V libovolném okamžiku t platí zákon zachování hybnosti, který je ve tvaru

$$\mathbf{p}_1(0) + \mathbf{p}_2(0) = \mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_2(t).$$

$$m_1 v_{1x}(0) + M v_{2x}(0) = m v_{1x}(t) + M v_{2x}(t) \quad (4.27)$$

Např. v $t=3\text{s}$ je z tab. 18 $v_1(3) = 0,674\text{ms}^{-1}$, $v_2(3) = 0,665\text{ms}^{-1}$.

Číselné dosazení do (4.27): $10^4 \cdot 2 + 2 \cdot 10^4 \cdot 0 = 10^4(0,674 + 2 \cdot 0,665)$

$2,000 \cdot 10^4 \text{ J} \doteq 2,004 \cdot 10^4 \text{ J}$

Zákon zachování hybnosti zde platí s velkou přesností.

ÚKOL 3

Současně se zákonem zachování hybnosti platí i zákon zachování celkové energie, který má tvar $E_{k1}(0) + E_{k2}(0) = E_{k1}(t) + E_{k2}(t) + Q(0;t)$, kde $Q(0;t)$ je teplo vzniklé při srážce do okamžiku t .

$$Q(0;t) = \frac{1}{2}[m v_{1x}^2(0) - m v_{1x}^2(t) - M v_{2x}^2(t)].$$

Např. v čase $t = 3 \text{ s}$ je množství vzniklého tepla v první variantě zadaných hodnot $Q(0;3) = 13,3 \text{ kJ}$.

Příklad 6 Tlumené kmitání s nelineárním tlumením

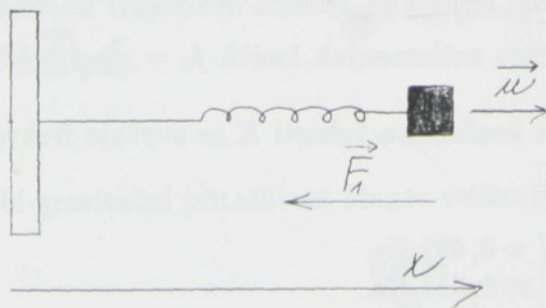
Popište průběh tlumeného kmitání s tlumící silou, úměrnou čtverci rychlosti. Výchylka v čase $t = 0\text{s}$ je $u(0) = 0 \text{ m}$, rychlost $v_u(0) = 10\text{ms}^{-1}$. Hmotnost kmitajícího tělesa je $m = 1 \text{ kg}$, tuhost elastické vazby $K = 40\text{Nm}^{-1}$ a koeficient kvadratického tlumení $k = 0,2\text{Nm}^{-2}\text{s}^2$.

Úkol:

1. Vypočítejte numericky průběh souřadnice $u(t)$, rychlosti $v_u(t)$ a zrychlení $a_u(t)$.
2. Vyjádřete graficky závislost výchylky $u(t)$ na čase t při různých číselných hodnotách koeficientů k , K .

Zadání: viz text příkladu.

Řešení:



Obr. 11

ROZBOR SIL

Na kmitající závaží působí síla elastické vazby $\mathbf{F}_1 = -K\mathbf{u}(t) = (-Ku(t); 0; 0)$ a tlumicí síla $\mathbf{F}_2 = (-kv_u(t)|v_u(t)|; 0; 0)$. Tíhovou sílu $\mathbf{F}_G$ v tomto příkladě neuvažujeme.

Pohybová rovnice je v souřadnicovém tvaru

$$-Ku(t) - kv_u(t)|v_u(t)| = ma_u(t).$$

Po číselném dosazení je

$$a_u = -40u - 0,2v_u|v_u|. \quad (4.28)$$

ÚKOL 1 Numerické řešení

Při výpočtech uvažujeme korigované přesnější vztahy z tab. 3 (viz kap. 3.2).

Počáteční podmínky jsou $u(0) = 0$ m, $v_u(0) = 10\text{ms}^{-1}$.

Pro srovnání uvádíme ještě ve třetím sloupci tabulky 20 přesné hodnoty výchylky $u(t)$ vypočítané počítačem.

Tab. 20 Tlumené kmity

t[s]	u[m]	$u_p[m]$	$v_u[\text{ms}^{-1}]$	$a_u[\text{ms}^{-2}]$	t[s]	u[m]	$u_p[m]$	$v_u[\text{ms}^{-1}]$	$a_u[\text{ms}^{-2}]$
0.0	0.0000	0.0000	10.0000	-20.0000	0.8	-1.2393	-0.8959	3.5430	47.0602
0.1	0.9000	0.8543	8.0000	-48.8000	0.9	-0.6497	-0.5098	8.2490	-42.058
0.2	1.4560	1.2887	3.1200	-60.1870	1.0	-0.0351	0.0281	4.0432	-1.8655
0.3	1.5667	1.2112	-2.8987	-60.9875	1.1	0.3599	0.5022	3.8567	-17.3705
0.4	0.9719	0.6906	-8.9975	-22.6847	1.2	0.6587	0.7535	2.1196	-27.2472
0.5	-0.0413	-0.0168	-11.2660	27.0366	1.3	0.7344	0.7088	-0.6051	-29.3037
0.6	-0.9193	-0.6280	-6.2938	44.6941	1.4	0.5274	0.3989	-3.5355	-18.5960
“ 0.7	-1.3252	-0.9493	-1.8244	53.6741	1.5	0.0809	-0.0359	-5.3951	-2.5866

ÚKOL 2 Grafické řešení úlohy bylo získáno počítačem - viz příloha 3.

Grafy 3,4 ukazují řešení pohybové rovnice (4.28) při různé volbě parametrů k, K za stejných počátečních podmínek. Z grafů určíme periodu T a frekvenci $f = \frac{1}{T}$ tlumených kmitů.

Z grafu 3 plyne, že při zvyšování číselných hodnot koeficientu tlumení k , se kmitání tlumí rychleji a frekvence tlumených kmitů se snižuje.

Příklad: $K = \text{konst} = 40\text{Nm}^{-1}$.

$k_1 = 2\text{Nm}^{-2}\text{s}^2$ odpovídá frekvence $f_1 = 0,981$ Hz.

$k_2 = 10\text{Nm}^{-2}\text{s}^2$ odpovídá frekvence $f_2 = 0,930$ Hz.

Tyto frekvence f_1, f_2 jsou nižší, než-li frekvence netlumených kmitů $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$ [BBZ-90:230]. Po dosazení je $f_0 = 1.006$ Hz.

Z grafu 4 je patrné, že při zvyšování hodnot koeficientu tuhosti K se zvyšuje frekvence tlumeného kmitání.

Příklad: $k = \text{konst} = 2\text{Nm}^{-2}\text{s}^2$.

$K_1 = 10\text{Nm}^{-1}$ odpovídá frekvence $f'_1 = 0,491$ Hz.

$K_2 = 70\text{Nm}^{-1}$ odpovídá frekvence $f'_2 = 1,317$ Hz.

Frekvence f'_1, f'_2 z grafu 4 jsou nižší, než-li frekvence netlumených kmitů $f'_{01} = 0.503$ Hz, $f'_{02} = 1.332$ Hz.

Ukazuje se, že frekvence daných tlumených kmitů se během tlumení zvyšuje. Např. pro kmitání s parametry $K = 40\text{Nm}^{-1}$, $k = 10\text{Nm}^{-2}\text{s}^2$ je frekvence v první periodě $f(1T) = 0,930$ Hz, ve druhé

periodě $f(2T)=1,000$ Hz, pro třetí periodu je $f(3T)=1,019$ Hz a ve čtvrté periodě je $f(4T)=1,039$ Hz.

Příklad 7 Grafická konstrukce balistické křivky

Fotbalový míč o hmotnosti $m = 1$ kg byl vržen počáteční rychlostí $v(0) = 10\text{ms}^{-1}$ pod elevačním úhlem $\alpha = 45^\circ$. Předpokládáme lineární závislost odporu prostředí na rychlosti. Koeficient odporu míče ve vzduchu je $k = 0.5\text{Nm}^{-1}\text{s}$. Tíhové zrychlení uvažujeme pro jednoduchost $g = 10\text{ms}^{-2}$.

Úkol: Užitím 2. Newtonova zákona a pravidel vektorové kinematiky zkonstruujte ve vhodném měřítku přibližnou trajektorii míče.

Zadání: viz text příkladu.

Řešení:

ROZBOR SIL

Na míč působí tíhová síla $\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$ a odpor prostředí $\mathbf{F}_o = -k\mathbf{v}$. Vztakovou sílu $\mathbf{F}_{vz}$ zanedbáváme. Pohybová rovnice je ve tvaru

$$m\mathbf{g} - k\mathbf{v}(t) = m\mathbf{a}(t).$$

Ze vztahu (2.1) a (3.13) je výsledná síla

$$\mathbf{F}_v = m \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \quad (4.29)$$

Pro grafickou konstrukci volíme časový krok $\Delta t = 0.25$ s. Po dosazení do (4.29) dostaneme $\frac{\mathbf{F}_v}{4} = \Delta \mathbf{v}$. Obecně:

$$\frac{\mathbf{F}_{vi}}{4} = \mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}_{i+1} = \frac{\mathbf{F}_i}{4} + \mathbf{v}_i. \quad (4.30)$$

Ze zadání je $\mathbf{F}_{oi} = -\frac{\mathbf{v}_i}{2}$.

Grafická konstrukce - viz příloha 4.

Příklad 8 Pohyb komety kolem Slunce

Kometa o hmotnosti m je v čase $t = 0$ s ve vzdálenosti 200 miliónů kilometrů od Slunce, jehož hmotnost je $M = 1.989 \cdot 10^{30}$ kg. Počáteční rychlost komety je $v_0 = 60\text{kms}^{-1}$.

Úkol: Užitím Newtonova gravitačního zákona a pravidel vektorové kinematiky zkonstruujte ve vhodném měřítku přibližnou trajektorii komety, na kterou působí gravitační síla $\mathbf{F}_g$.

Zadání: viz text příkladu.

Řešení:

ROZBOR SIL:

Na kometu působí gravitační přitažlivost Slunce velikosti $F_g = \frac{\kappa m M}{r^2}$. Pohybová rovnice určující velikost zrychlení je

$$\frac{\kappa M m}{r^2} = m a.$$

Zrychlení komety má směr ke středu Slunce. Pro jednoduchost zavedeme konstantu $C = \kappa M$, tedy $a = \frac{C}{r^2}$. Ze vztahu (3.13) plyne, že:

$$|\Delta \mathbf{v}| = \frac{C \Delta t}{|\mathbf{r}|^2}. \quad (4.31)$$

$\Delta \mathbf{v}$ má směr spojnice kometa-Slunce, označené v příloze 4 jako $\mathbf{r}$.
Ke grafické konstrukci je třeba zvolit vhodné měřítko. Volíme měřítko pro vzdálenost: $1mm \hat{=} 1 \cdot 10^9m = 1Gm$, pro rychlost : $1mm \hat{=} 1 \cdot 10^3ms^{-1} = 1GmMs^{-1}$. Čas měříme v $Ms = 1 \cdot 10^6s \hat{=} 11,6dne$.
Převedeme gravitační konstantu κ do nových jednotek $[Ms,Gm,kg]$: $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2} = 6,67 \cdot 10^{-26}Gm^3kg^{-1}Ms^{-2}$. Konstanta C bude mít v těchto jednotkách hodnotu $k = 13,277 \cdot 10^4Gm^3Ms^{-2}$.
Pro grafickou konstrukci použijeme vztah(4.31) v nových jednotkách.
Grafická konstrukce je znázorněna v příloze 4. Zpočátku volíme krok $\Delta t = 1 Ms$. Čím více se kometa přibližuje ke Slunci, tím větší silou je k němu přitahována. Velikost změny rychlosti dosahuje téměř 40% velikosti rychlosti, proto volíme v blízkosti Slunce menší krok $\Delta t = 0.5 Ms$. Z důvodu větší přesnosti dosazujeme do vztahu (4.31) střední hodnotu vektoru $\mathbf{r}$ v daném intervalu $\bar{\mathbf{r}}$. Také směr vektoru $\Delta \mathbf{v}$ je určen směrem $\bar{\mathbf{r}}$.
Pro ilustraci uvádíme numerické hodnoty $\bar{r}$ a $|\Delta \mathbf{v}|$ ve zvolených jednotkách.

Tab. 21 Numerické hodnoty $\bar{r}, |\Delta \vec{v}|$

$\Delta t [Ms]$	$\bar{r} [Gm]$	$ \Delta \vec{v} [GmMs^{-1}]$
1	172	4.5
1	113	10.4
0.5	69	13.9
0.5	40	41.5
0.5	37	48.5
0.5	71	13.2
0.5	108	5.7
0.5	147	3.1

Grafické řešení je vypracováno v příloze 5.

Kapitola 5

Srovnání didaktického přínosu numerické a analytické metody při řešení pohybových rovnic

1. Numerické řešení

Tento způsob řešení je vhodný použít na středních školách. Fyzikální vztahy, uváděné v popisu této metody, jsou zařazovány do učiva fyziky zpravidla již v 1.ročníku, a tak by neměl být problém tuto metodu použít. Numerická metoda poskytne středoškolákům zažití problematiky, uváděné do té doby pouze teoreticky. Umožní to, že se student stane nepřímým pozorovatelem popisovaného děje a dokáže na základě předešlých stavů předvídat stavy následující. Student může velmi názorně vidět, jak se pohyb postupně vyvíjí - resp. jak se mění $a(t)$, $v(t)$, $r(t)$. Při vhodné volbě kroku Δt lze registrovat i malé změny ve vývoji pohybu, které student dokáže do jisté míry předpovědět i zdůvodnit. Numerická metoda poskytuje vhled do kausalit pohybových stavů a fyzikálních dějů vůbec.

Měli bychom též ocenit její názornost, jednoduchost a nenáročnost. Žák potřebuje k řešení pouze kalkulačku.

Z našich řešeních příkladů bychom na střední školu doporučili příklady 1,2,3,5. Grafické řešení příkladů 7,8 je také studentům středních škol dostupné, avšak je časově náročnější. Příklady 4,6 překračují svou tematikou a náročností učivo fyziky pro střední školy.

Pro základní školy není vhodný žádný z uvedených příkladů. Tam bychom se museli omezit pouze na přímočaré rovnoměrné pohyby, které lze také analyzovat numerickou metodou. Pro žáky základních škol je však přístupnější jednoduché dosazení do jim známých vztahů $s = vt$, $v = \frac{s}{t}$, $t = \frac{s}{v}$. Vztahy (3.12), (3.13) nejsou ani v učebnici pro 7.ročník uváděny.

Vhodnými otázkami a podněty lze však již žáky základních škol dovést k tomu, aby odhadli další vývoj pohybu, popř. určili příčinu a následek uvažované změny.

2. Analytické řešení

Z důvodu matematické náročnosti je vhodné tuto metodu použít pouze na středních školách (a to ještě v omezené míře) a na vysokých školách. Pro žáky základních škol je tato metoda nedostupná. Výhodou analytické metody oproti metodě numerické je její přesnost. Proto ji lze použít ke kontrole

správnosti řešení, což je pro studenty důležité.

Analytická metoda ve srovnání s metodou numerickou řeší úlohy obecněji. Numerické řešení poskytuje výsledky vždy jen v konkrétních, speciálních případech, zatímco řešení analytické v sobě zahrnuje celou řadu příkladů, u kterých lze měnit pouze počáteční podmínky.

Posoudíme-li význam obou metod současně, pak bychom se přikláněli k tomu, aby studenti vyřešili úlohu např. nejprve numericky a pochopili do základů její fyzikální podstatu. Pak, pokud by bylo vůbec možné, se snažili najít řešení analytické, jako vyšší nadstavbu řešení numerického. Dále by bylo vhodné výsledky obou metod srovnat a popř. vysvětlit rozdíly, způsobené chybou numerického řešení.

Kapitola 6

Závěr

Numerická (resp. grafická) a analytická metoda se navzájem doplňují. Nevýhody jedné metody nahrazují výhody druhé. Metoda numerická resp. grafická poskytne opravdové pochopení podstaty a kausality dynamických dějů.

Doufáme, že této práci využijí nejen studenti, ale i středoškolští - popř. vysokoškolští pedagogové při výkladu a procvičování dynamiky hmotného bodu.

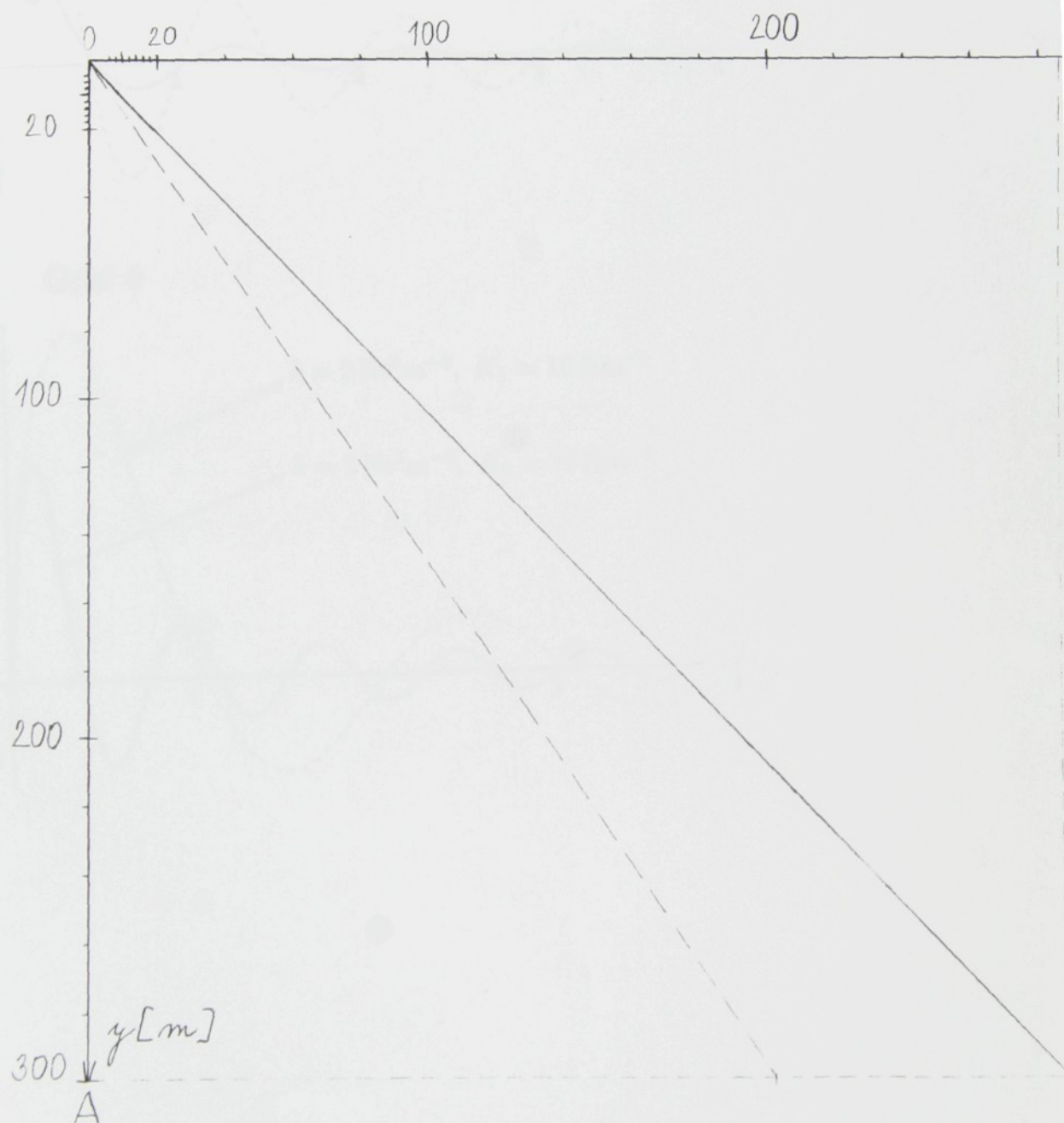
Zajímavé by jistě bylo sestavit a prakticky ověřit metodiku numerického popř. grafického řešení pro základní školu. V tomto směru by mohli navázat na diplomovou práci další studenti, kteří by se chtěli touto problematikou zabývat.

Literatura

- [BBZ] Baník, I. - Baník, R. - Zámečník, J.: Fyzika netradičně - Mechanika. Bratislava, Alfa 1990.
- [BN] Bruthans, V. - Nekvinda, M.: Cvičení z matematické analýzy II. VŠST Liberec 1977.
- [BRV] Brož, J. - Roskovec, V. - Valouch, M.: Fyzikální a matematické tabulky. Praha, SNTL 1980.
- [ČM] Čmelík, M. - Machonský, L.: Fyzikální laboratoře. VŠST Liberec 1985.
- [REK] Rektorys, K.: Přehled užití matematiky. Praha, SNTL 1981.
- [SM] Stará, J. - Milota, J.: Diferenciální rovnice pro IV. roč. tříd gymnázií se zaměřením na matematiku. Praha, SPN 1988.
- [STĚ] Stěpanov, V. V.: Kurs diferenciálních rovnic. Praha, Přírodovědecké vydavatelství 1952.
- [ŠAN] Šantavý, I.: Mechanika. Praha, SPN 1993.

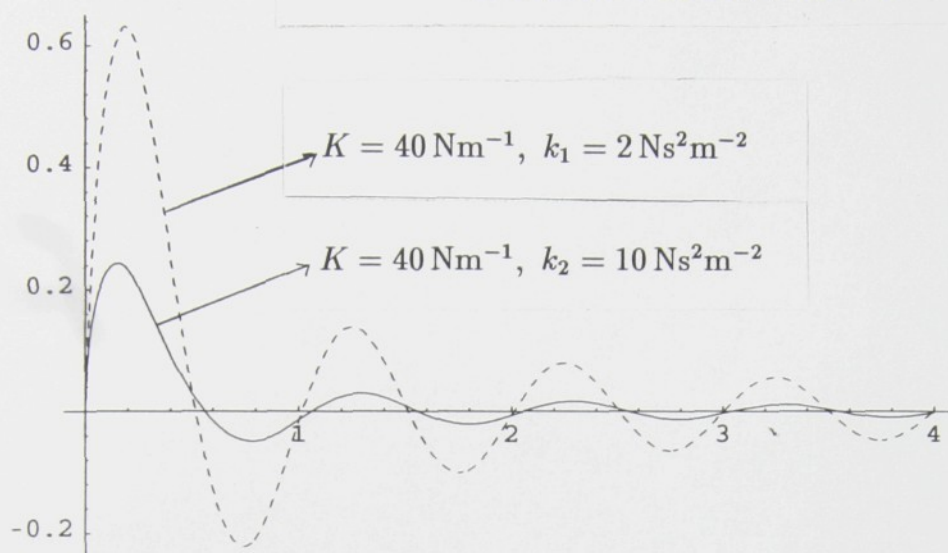
Globální znázornění původní a pozměněné trajektorie

Graf 2

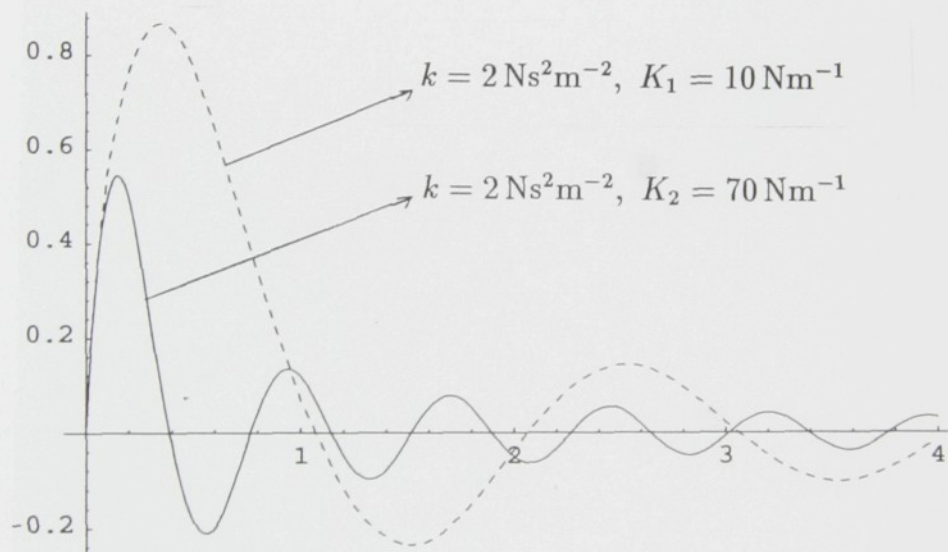


Graf 3

Tlumené kmitání



Graf 4

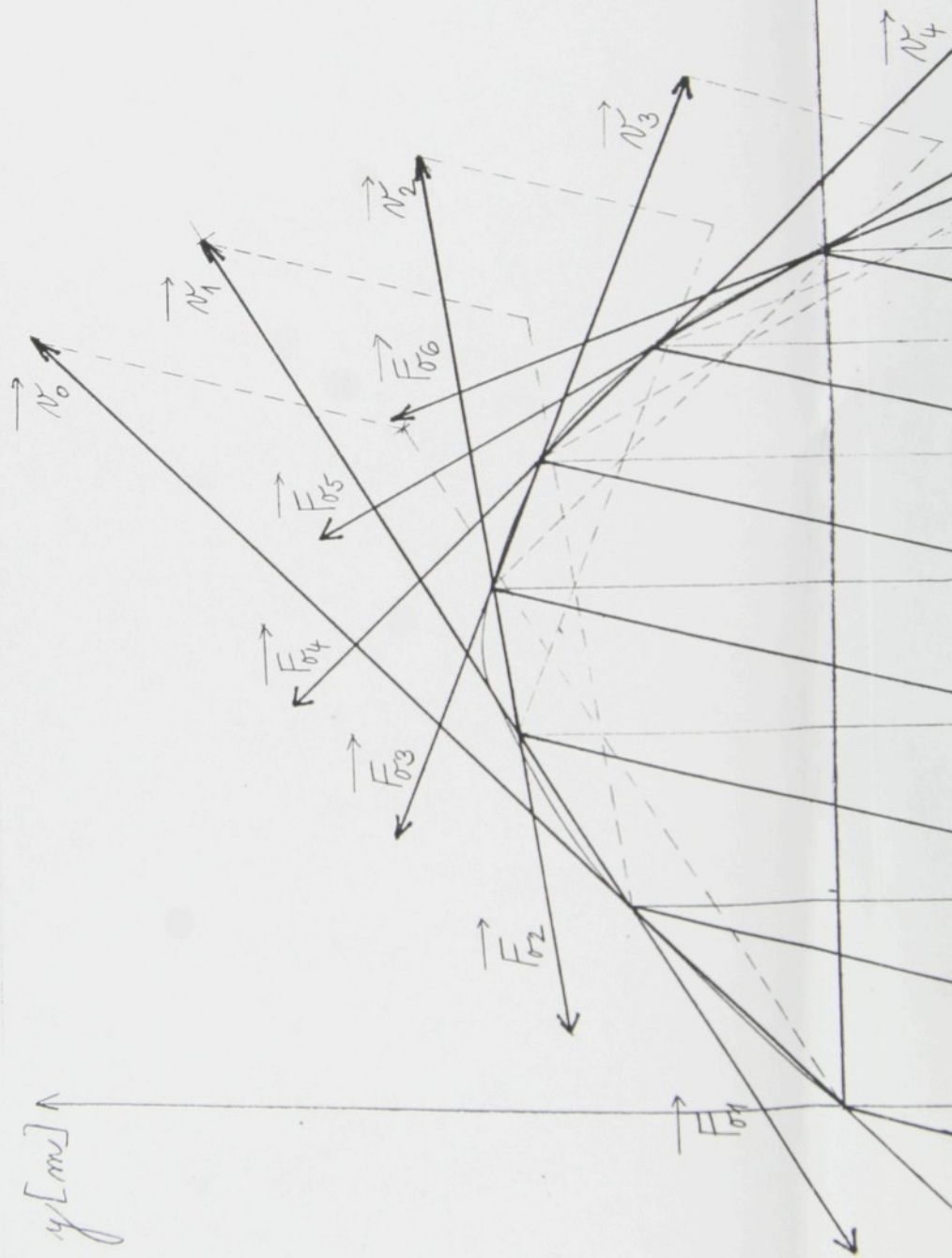


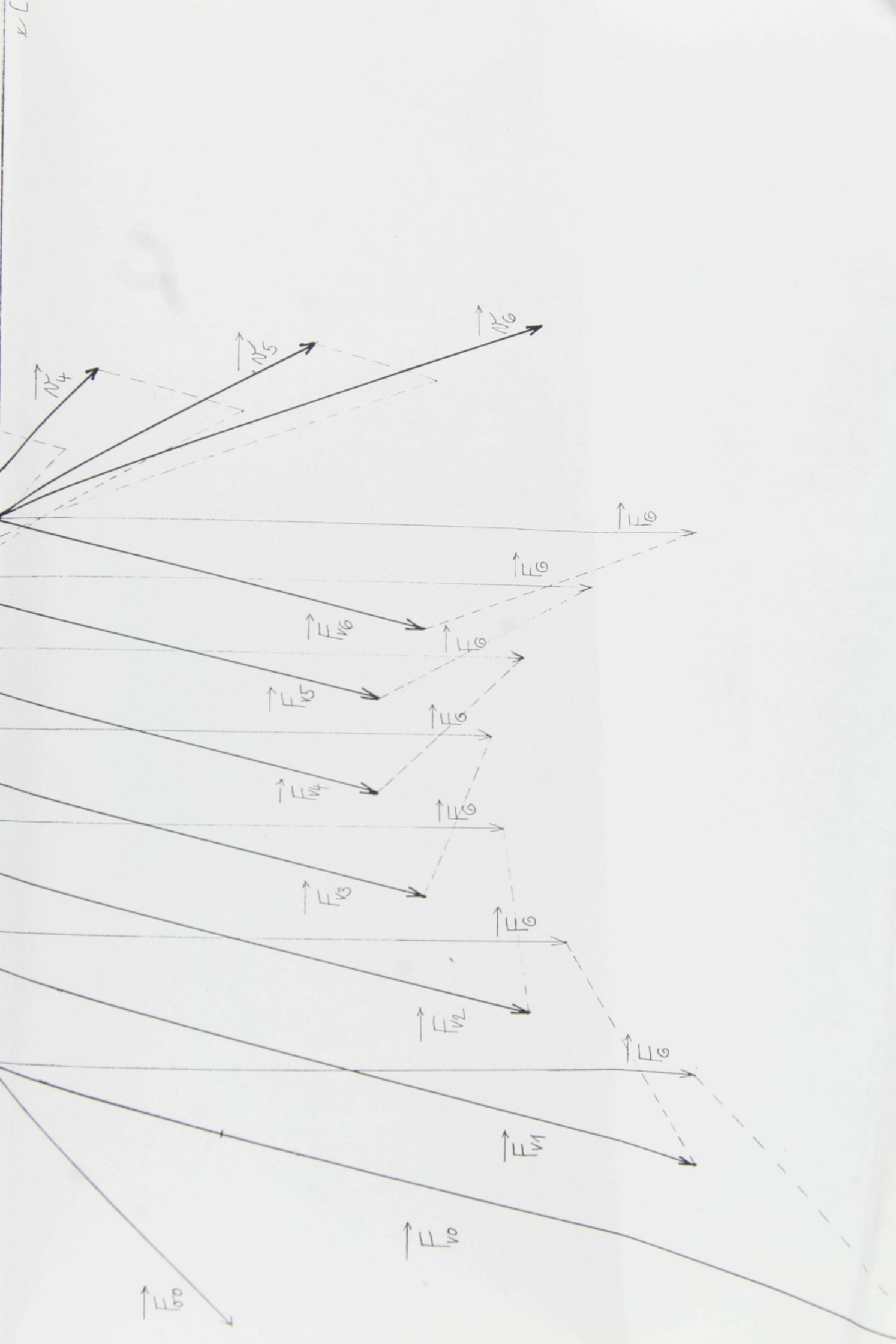
Měřítko

pro souřadnici $1 \text{ cm} = \frac{2}{3} \text{ m}$

pro rychlost $1 \text{ cm} = \frac{2}{3} \text{ ms}^{-1}$

pro sílu $1 \text{ cm} = \frac{2}{3} \text{ N}$





Grafické znázornění oběhu komety kolem Slunce

Měřítko

pro souřadnici 1 mm $\hat{=}$ 1 Gm

pro rychlost 1 mm $\hat{=}$ 1 GmMs⁻¹

